Métodos iterativos para ecuaciones no lineales

Problem 1: Escribe un programa para calcular la constante matemática e, considerando la definición

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

es decir, calcula $(1+1/n)^n$ para $n = 10^k$, $k = 1, 2, \ldots, 20$. Determina el error relativo y absoluto de las aproximaciones comparándolas con $\exp(1)$. **(1 punto)**

Solution.

Listing 1: Calcula el n-ésimo término del límite de e

```
#include <math.h>
#include <stdio.h>

/*
returns the nth term of the sequence (1+1/n)^n
 */
long double approx_exp(unsigned long int n) { return powl(1.0 + 1.0
    / n, n); }

/*
prints the absolute and relative errors to the file inserted
 */
void print_relative_error(FILE *file, double *xn, double x, int dim)
    {
  fprintf(file, "Absolute Error, Relative Error\n");
  for (int i = 0; i < dim; i++) {
    fprintf(file, "%.15e, %.15e\n", fabs(*xn - x), fabs((*xn - x) /
        (*xn)));
    xn++;
  }
}
int main() {
  unsigned long long int term = 10;
  short unsigned int pow = 1;       // we use powers of 10, that is,
      10^k for 1\leq k \leq 20
  double e_n[20];     // storage of e_n = (1+1/n)^n
  double e = exp(1); // value of e^1 given by the math.h library

  while (pow <= 20) {
    e_n[pow - 1] = approx_exp(term);
    printf("e_{10^{%d}} = %.15lf\n", pow , e_n[pow - 1]); // prints
```

```
        the value of e_n

    term *= 10;
    pow++;
  }
  FILE *file;
  file = fopen("errors.csv",
              "w+"); // the file errors.csv will contain the
                  absolute and
                    // relative errors of the sequence and the
                        value e^1 given
                    // by the math.h library
  print_relative_error(file, e_n, e, pow - 1);
}
```

Este nos genera la list

$$
\begin{aligned}
e_{10^1} &= 2.593742460100002 \\
e_{10^2} &= 2.704813829421528 \\
e_{10^3} &= 2.716923932235594 \\
e_{10^4} &= 2.718145926824926 \\
e_{10^5} &= 2.718268237192297 \\
e_{10^6} &= 2.718280469095753 \\
e_{10^7} &= 2.718281694132082 \\
e_{10^8} &= 2.718281798347358 \\
e_{10^9} &= 2.718282052011560 \\
e_{10^{10}} &= 2.718282053234788 \\
e_{10^{11}} &= 2.718282053357110 \\
e_{10^{12}} &= 2.718523496037238 \\
e_{10^{13}} &= 2.716110034086901 \\
e_{10^{14}} &= 2.716110034087023 \\
e_{10^{15}} &= 3.035035206549262 \\
e_{10^{16}} &= 1.000000000000000 \\
e_{10^{17}} &= 1.000000000000000 \\
e_{10^{18}} &= 1.000000000000000 \\
e_{10^{19}} &= 1.000000000000000 \\
e_{10^{20}} &= 1.000000000000000
\end{aligned}
$$

Notemos que en el término 15, la computadora deja de producir un valor prudente. Esto se debe a que un doble tiene precision de 15 digitos. Para este punto, $1/10^{15}$ tiene el decimal en el último punto de precisión. Entonces, al elevar a este mismo término, quedamos con algo que será impreciso. Para el término 16, $1/10^{16}$ ya es redondeado a 0 por el sistema. Entonces, solamente nos queda $1^{10^k} = 1$. ◇

Problem 2: La ecuación $x^3 + x = 6$ tiene una raíz en el intervalo $[1.55, 1.75]$, ¿cuántas iteracions se necesitan para obtener una aproximación de la raiz con error menor a 0.0001 con el método de bisección? Verifica con el método de bisección tu predicción de la raíz. **(2 puntos)**

Solution.

◇

Problem 3: Hallar una raíz de $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ por medio de las siguientes 4 formulaciones de punto fijo utilizando $p_0 = 1$:

$$\text{a) } x = \sqrt{\frac{2 - x^4}{3}}, \qquad \text{b) } x = (2 - 3x^2)^{\frac{1}{4}}, \qquad \text{c) } x = \frac{2 - x^4}{3x}, \qquad \text{d) } x = \left(\frac{2 - 3x^2}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

1. Las raíces de $f(x)$ deben de coincidir con las raíces de $x - g(x)$. Grafica $f(x)$ y $x - g(x)$. Comenta lo observado. **(1 punto)**
2. Crea una talba comparativa para comparar el resultado de las raices de $f(x)$ con la raiz alcanzada con cada una de las formulaciones. Usa maximo 20 iteraciones y tol $= 0.0001$. Explica lo sucedido. **(2 puntos)**

Solution.

◇

Problem 4: Utiliza el método de bisección, método de Newton, método de la secante y método de al falsa posición para comparar los resultados de los siguientes problemas: Encontrar λ con una presición de 10^{-4} y $N_{iter,max} = 100$, para a ecuación de la población en términos de la tasa de natalidad λ,

$$P(\lambda) = 1,000,000e^{\lambda} + \frac{435,000}{\lambda}(e^{\lambda} - 1)$$

para $P(\lambda) = 1,564,000$ individuos por años. Usa $\lambda_0 = 0.01$. (Sugerencia: graficar $P(\lambda) - N$) **(4 puntos)**