Problem 1: Busca una variable aleatoria de la vida real que no es discreta ni continua.

Solution. Sea X una v.a. representando el resultado de tirar una moneda justa. Sea Y (con $X \perp Y$) una v.a. representando la distancia (en cm) del centro a un dardo tirado hacia una diana de radio 21cm. Asumimos que los dardos caen de manera uniforme en la diana. Sean Z (con $X \perp Z$) los puntos que otorga la posición en la que cae este dardo. Entonces, Y es una v.a. continua y Z es una v.a. discreta, que solo toma los puntos otorgados por región. Asumimos que cada región que divide la diana es de area similar, de esta manera, todos las regiones tienen probabilidad similar (1/82).

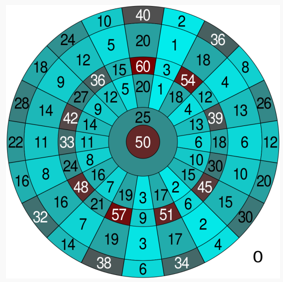


Figure 1: Ejemplo de diana con puntuaciones.

Definimos una nueva v.a.

$$M = \begin{cases} Z & \text{if } X = 0, \\ Y & \text{if } X = 1. \end{cases}$$

Notemos entonces que, por definición,

$$\begin{aligned} F_M(x) &= P(M \leq x) \\ &= \frac{1}{2}P(Y \leq x) + \frac{1}{2}P(Z \leq x) \\ &= \frac{F_Y(x) + F_Z(x)}{2}, \end{aligned}$$

Sin embargo, esta suma no es continua ni discreta. Podemos observar esto cerca de $x = 1$: sea $\varepsilon > 0$, entonces

$$\begin{aligned} F_M(1-\varepsilon) &= \frac{(1-\varepsilon)^2}{2 \cdot 21^2} + 0 \\ F_M(1) &= \frac{1}{2 \cdot 21^2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \end{aligned}$$

Es decir, tenemos una discontinuidad en $x = 1$. No es discreta porque es continua en $x \in (1, 2)$.

□

Problem 2: El tiempo de ejecución (en segundos) de un cierto programa de optimización tiene densidad:

$$f_X(x) = c(0.4x^2 + x) \qquad \text{si } x \in [1, 10].$$

Calcula el valor de la constante y dibuja la densidad.
Supongamos que se dice que el programa es exitoso si el tiempo de ejecución es menos de 6 segundos. Al correr el programa 20 veces, suponiendo que las corridas son independientes, calcula la probabilidad de tener menos de 8 corridas exitosas.

Solution. Recordemos que una funciíon de densidad debe cumplir, para todo $x \in \Omega$,

a) $f_X(x) \geq 0$,

b) $\int_\Omega f_X(x) = 1$

En particular, b) nos dice que, en este caso, se debe cumplir

$$\int_{[1,10]} c(0.4x^2 + x)\, dx = 1 \iff \int_1^{10} 0.4x^2 + x\, dx = c^{-1}.$$

Entonces, resolvemos la integral:

$$\begin{aligned}\int_1^{10} 0.4x^2 + x\, dx &= \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_1^{10} \\ &= \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{10^3}{3} + \frac{10^2}{2}\right] - \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right] \\ &= \frac{1827}{10} = 182.7.\end{aligned}$$

Entonces, $c = \frac{10}{1827} \approx 0.0055$.

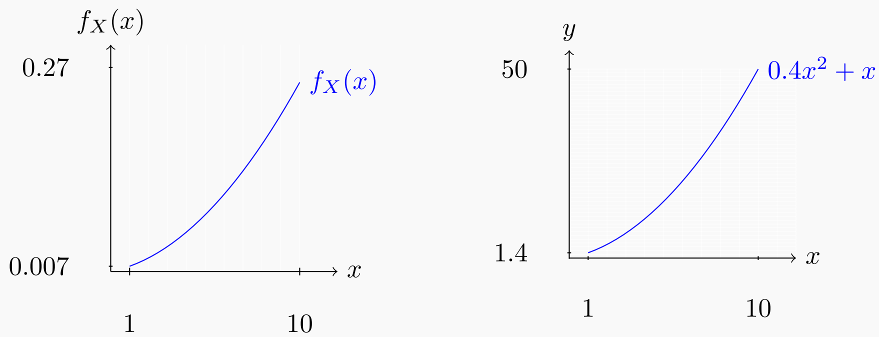


Figure 2: Función de distribución.

△

Para la segunda parte del ejercicio, primero notemos que

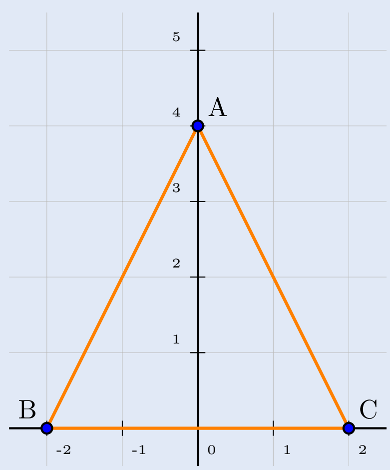
$$\begin{aligned} P(X \leq 6) &= c\int_1^6 0.4x^2 + x\,dx \\ &= c\left[0.4\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_1^6 \\ &= c\left[0.4\frac{6^3}{3} + \frac{6^2}{2}\right] - c\left[0.4\frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2}\right] \\ &= c\,[0.4 \cdot 72 + 18] - c\left[0.4\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] \\ &\approx 46.166 \cdot c \\ &\approx 0.25. \end{aligned}$$

Ahora, sea Y el número de ejecuciones exitosas dentro de las 20 ejecuciones. Sea $p = P(X \leq 6)$, entonces tenemos que $Y \sim Bin(20, p)$. Podemos concluir que

$$\begin{aligned} P(Y \leq 7) &= \sum_{i=1}^{7} P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{7} \binom{20}{i}(1-p)^{20-i}p^i \\ &\approx 0.895. \end{aligned}$$

□

Problem 3: Se elige al azar un punto (X, Y) adentro del siguiente triángulo.



Calcula

a) $P(|X| < 0.1)$,

b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x f_X(x)\,dx$.

Solution.

a) $P(|X| < 0.1)$, Podemos interpretar el triángulo de la siguiente manera:

$$y = \begin{cases} 2x+4, & \text{if } -2 \le x < 0 \\ -2x+4, & \text{if } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

O de manera equivalente, $y = -2|x| + 4$ para $x \in [-2, 2]$. El área del triángulo es $4 \cdot 4/2 = 8$, por lo que podemos decir que la función de distribución está dada por $f_X(x) = \frac{1}{8}(-2|x| + 4)$. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} 8 \cdot P(|X| < 0.1) &= \int_{-0.1}^{0.1} -|2x| + 4\,dx \\ &= 2\int_{0}^{0.1} -|2x| + 4\,dx \qquad (1) \\ &= 2\int_{0}^{0.1} -2x + 4\,dx \qquad (2) \\ &= 2\left[-x^2 + 4x\right]_0^{0.1} \\ &= 2(0.4 - 0.01) \\ &= 0.78. \end{aligned}$$

donde (1) se sigue del hecho de que $-2|x| + 4$ es una función par, y (2) de que $|x| = x$ si $x \ge 0$.

Es decir, $P(|X| < 0.1) = 0.78/8 = 0.0975$. △

b) $\int_{-2}^{2} x f_X(x)\,dx$ En el inciso anterior descubirmos que

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{-2|x|+4}{8}, & \text{if } x \in [-2, 2] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Por lo que tenemos que

$$\int_{-2}^{2} x f_X(x)\,dx = 0, \qquad (3)$$

donde (3) se sigue del hecho de que $x f_X(x)$ es una función (integrable) impar (ya que $f_X(x)$ es par, y x es impar), siendo integrada sobre un intervalo simétrico.

□

Problem 4: Cada vez cuando uno compra una bolsa de Sabritas, se recibe una foto de uno de los 20 jugadores de los Diablos Rojos. Si las fotos son distribuidas de una manera arbitraria en las bolsas, calcula el promedio del número de bolsas que uno va tener que comprar para obtener una foto que no sea la del jugador Romelu Lukaku.
¿En promedio cuántas bolsas vas a tener que comprar para tener todos los 20 jugadores?

Solution. Sea X la cantidad de bolsas que debemos comprar para obtener una foto distinta a la Romelu Lukaku. Como son distribuidas de manera arbitraria (y que hay un número infinito de bolsas), la probabilidad de obtener una foto que no sea de Romelu Lukaku es de 19/20. Es decir, la probabilidad de un éxito es de 19/20, por lo que $X \sim Geom(19/20)$, por lo que

$$\mathbf{E}[X] = \frac{20}{19} \approx 1.05.$$

Ahora, sean $Y_0, \ldots, Y_{19}$ v.a. indicando la cantidad de bolsas para obtener el jugador i por primera vez. Entonces, $Y_i \sim Geom(1/20)$. Sea Z la v.a. indicando las bolsas a compara para conseguir los 20 jugadores, entonces tenemos que $Z = \sum Y_i$. Por linealidad, tenemos

$$\mathbf{E}[Z] = \sum_i \mathbf{E}[Y_i] = 20.$$

$\square$