Problem 1: Lee el siguiente artículo que se publicó en septiembre de 2022 en El Universal, a raíz de que tanto en 1985, 2017 y 2022 hubo un sismo en la CDMX el día 19 de septiembre (además de que el 19 de septiembre 2022 hubo un seminario de CC en CIMAT sobre métodos numéricos para datos sismológicos). ¿Cuál es tu opinión basada en lo que vimos en (apenas) un mes de clases de probabilidad?

Solution. La probabilidad proveniente del artículo se calcula asumiendo que la función de distribución de los sismos es uniforme con respecto a los días del año, también se asumió algún límite inferior para estas probabilidades, ya que sismos ocurren todos los días (mayormente imperceptibles) en esas zonas. La independencia de los eventos tampoco es clara de concluir, ya que estos sismos pueden causar que ciertas placas tectónicas se posicionen de tal manera que otro sismo sea inminente.
En conclusión, la probabilidad propuesta por el físico asume diversas condiciones que son posiblemente falsas, o difícil de concluir. □

Problem 2: Sea X el tiempo en minutos entre la llegada de un cliente a una oficina de correos y la finalización de la atención, y Y el tiempo que el cliente tiene que esperar. Se sabe que la densidad conjunta es:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} ky\exp(-x) & \text{if } 0 \le y < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Determina el valor de k, $Var(X|Y=1)$ y $P(X-Y<a)$ con $a>0$.

Solution. Para encontrar k, integramos sobre todo $\mathbb{R}^2$. Esta integral debe tener valor 1; es decir,

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dA = 1.$$

Por la definición de $f_{X,Y}(x,y)$ y linealidad de la integral, podemos descomponerla en la región $0 \le y < x < \infty$ y su complemento. Como en el complemento es 0, tenemos

$$\begin{aligned} 1 = \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dA &= \int_0^\infty \int_0^x f_{X,Y}(x,y)\,dydx \\ &= \int_0^\infty \int_0^x kye^{-x}\,dydx \\ &= \frac{k}{2}\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx \\ (\text{por partes} \times 2) &= \frac{k}{2}\left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x}\right]_0^\infty + \frac{k}{2}\int_0^\infty 2e^{-x}\,dx \\ &= 0 - k[e^{-x}]_0^\infty \\ &= k. \end{aligned} \tag{1}$$

Es decir, $k=1$ y

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} y\exp(-x) & \text{if } 0 \le y < x < \infty \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Recordemos que

$$\mathbf{Var}(X) \coloneqq \int (x - \mathbf{E}[X])^2 f_X(x)\,dx,$$

por lo que tenemos

$$\mathbf{Var}(X|Y=1) \coloneqq \int (x - \mathbf{E}[X|Y=1])^2 f_{X|Y=1}(x)\,dx.$$

Entonces, calculemos $\mathbf{E}[X|Y=1]$. Recordemos que

$$f_{X|Y=y_0}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y_0)}{f_Y(y_0)},$$

por lo que, en este caso, como $f_Y(y) = y$,

$$\begin{aligned} f_{X|Y=1}(x) &= \frac{f_{X,Y}(x,1)}{f_Y(1)} \\ &= \frac{f_{X,Y}(x,1)}{1} \\ &= \begin{cases} e^{-x}, & \text{if } x \in [0,\infty] \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X|Y=1] &= \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y=1}(x)\,dx \\ &= \int_{[0,\infty]} xe^{-x}\,dx \\ (\text{por partes}) &= [xe^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} \\ &= 0+1 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Volviendo a $\mathbf{Var}(X|Y=1)$, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}(X|Y=1) &= \int_{\mathbb{R}} (x-1)^2 f_{X|Y=1}(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty (x-1)^2e^{-x}\,dx \\ &= \int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx - \int_0^\infty 2xe^{-x}\,dx + \int_0^\infty e^{-x}\,dx \\ &= 2-2+1 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Notemos que (3) viene de los cálculos de integrales anteriores: (2) y (1).
Finalmente, calculamos $P(X-Y<a)$. Como la función de distribución es 0 para $y \le 0$, dividimos esto en dos casos: $0<x<a$ y $x>a$. Tenemos entonce que

$$\begin{aligned} P(X-Y<a) &= \int\int_{x-y<a} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx \\ &= \int\int_{x-y<a} ye^{-x}\,dy\,dx \\ &= \underbrace{\int_0^a\int_0^x ye^{-x}\,dy\,dx}_{0<x<a} + \underbrace{\int_a^\infty\int_{x-a}^x ye^{-x}\,dx\,dy}_{x>a} \\ &= \int_0^a \frac{x^2}{2}e^{-x}\,dx + \int_a^\infty \frac{(x^2-(x-a)^2)}{2}e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a x^2e^{-x}\,dx + \frac{1}{2}\int_a^\infty (2ax-a^2)e^{-x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^a + \frac{1}{2}\left[-2axe^{-x} + a^2e^{-x} - 2e^{-x}\right]_a^\infty \\ &= \frac{1}{2}\left[2 - (a^2+2a+2)e^{-a}\right] + \frac{1}{2}\left[a(a+2)e^{-a}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2 - (a(a+2)+2)e^{-a}\right] + \frac{1}{2}\left[a(a+2)e^{-a}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[2 - 2e^{-a}\right] \\ &= 1 - e^{-a}. \end{aligned}$$

□

Problem 3: Al mismo tiempo alguien sale de Valenciana a Dos Rios y otra persona sale de Dos Rios a Valenciana con velocidad constante. La velocidad de la primera persona es un valor de una distribución $\mathcal{U}([20,40])$ km/h y la velocidad de la segunda persona es siempre 45km/h. Calcula el tiempo promedio que tardan en encontrarse si sabes que la distancia entre los dos lugares es 3.5km.

Solution. Sean V_1, V_2 las velocidades de la persona en Valenciana y la persona en Dos Rios, respectivamente. Supongamos que Valenciana se encuentra en el origen, y Dos Rios a $x_0 = 3.5$km del origen. Entonces, el tiempo t que buscamos es uno tal que

$$v_1t = -v_2t + x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{x_0}{v_1+v_2}.$$

Por lo que, el valor esperado del tiempo se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[T] &= \mathbf{E}\left[\frac{x_0}{V_1+V_2}\right] \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x_0}{v_1+v_2} f_{V_1}(v_1)\,dv_1 \\ &= \frac{1}{20}\int_{20}^{40} \frac{x_0}{v_1+v_2}\,dv_1 \\ &= \frac{x_0}{20}\left(\log|40+v_2| - \log|20+v_2|\right) \\ &= \frac{x_0}{20}\log\frac{|40+v_2|}{|20+v_2|} \\ &= \frac{3.5}{20}\log\frac{17}{13} \\ &\approx 0.175 \cdot 0.268 \\ &\approx 0.046 \end{aligned}$$

Esto es, 0.046 horas, que equivale a aproximadamente 169 segundos. □

Problem 4: La vida útil de un cierto tablet sigue una distribución normal con promedio 3 años y $\sigma^2 = 0.9$.

a) Calcula la probabilidad que funcionará más de cuatro años.

b) Se quiere determinar la duración de la garantía. ¿Para cuántos meses máximos se debe dar la garantía para que la probabilidad que el tablet se descomponga antes del fin de la garantía sea no mayor que 0.25? La respuesta debe ser en términos de meses enteros.

Solution.

a) La distribución del tiempo de vida útil $T \sim \mathcal{N}(3, 0.9)$. Queremos $P(T>4)$. Primero, normalizamos la distribución:

$$Z = (T-3)/0.9 \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Entonces, $P(T>4) = P(0.9Z+3>4) = P(Z>10/9) \approx 0.1333$. Esta última aproximación viene de una calculadora.

b) Buscamos el número máximo de meses M tal que $P(T<M) \le 0.25$. Es decir, $P(T<M+1) > 0.25$. Nuevamente, usando la distribución normalizada, tenemos

$$P(T<M) = P(0.9Z+3<M) = P\left(Z < \frac{M-3}{0.9}\right) \le 0.25$$

Notemos que para $M = \frac{28}{12}$, tenemos $P(Z<-0.74) \approx 0.23$, pero para $M = \frac{29}{12}$ tenemos $P(Z<-0.64) \approx 0.26$. Entonces, debemos dar una garantía de 28 meses.

□