1. Durante el festival Cervantino, se instalan en la Plaza de la Paz de Gto 4 baños públicos móviles, uno a lado de otro. Estás en la búsqueda del baño más limpio. Puedes abrir la puerta de un baño y en base de lo que ves, decidir quedarse con este baño, o explorar el siguiente baño. Como hay gente detrás de ti, no puedes regresar a un baño ya visitado.

   Decides aplicar la siguiente estrategia:

   - abres la puerta del primer baño para ver (nada más) su estado y te diriges después al segundo baño;
   - abres la puerta del segundo baño; si está en mejores condiciones que el primer baño, te quedas con este baño; si no, abres la puerta del tercer baño; si está en mejores condiciones que los dos baños anteriores, te quedas con este baño; si no, te decides por el cuarto baño.

   Suponiendo que no hay dos baños en condiciones iguales: ¿cuál es la probabilidad de quedarse con el mejor baño? ¿Cuáles supuestos hiciste?

Demostración. Sean las posiciones de los baños $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y sus condiciones higiénicas $Y = \{A, B, C, D\}$, donde A es el más limpio, y D el más sucio. Definimos nuestro espacio muestral como $\Omega = \{(x, y) \in X \times Y \mid x_1 \neq x_2 \implies y_1 \neq y_2\}$. Es decir, para dos baños distintos, su suciedad es distinta.

Vamos a calcular la probabilidad de no obtener el mejor baño. Es decir, $P(A^c)$. Para simplificar el problema, podemos ver el conjunto como palabras de 4 letras distintas. Tenemos 4 casos:

a) El primer baño es A.
b) El primer baño es B.
c) El primer baño es C.
d) El primer baño es D.

En el caso a), es garantizado no obtener el mejor baño. El caso b) nos garantiza elegir el baño A, ya que en cualquier posición es el único que será mejor que todos los previamente vistos. En el caso c), debemos elegir el baño B, ya que el D es imposible escogerlo, debido a que es el más sucio que los previamente vistos. Para elegir éste, debe estar antes de A. En el caso d), cualquier configuración que no sea A en segundo funciona, ya que cualquiera es más limpio que el D.

En resumen, para a) tenemos 3! casos, para el b) 0, el c) tiene $3!/2! = 3$ (posiciones en las que B se encuentra antes de A). Finalmente, para d) tenemos $2! + 2! = 4$ casos (A no es segunda posición). En total, 13 casos en los que no obtenemos el mejor baño, de $4! = 24$ posibles. Entonces,

$$P(y = A) = 1 - P(y \neq A) = 1 - \frac{13}{24} = \frac{11}{24}.$$

□

2. Dado Ω, P, y ciertos eventos A, B, C. Expresa las siguientes situaciones con operaciones sobre conjuntos (unión, complemento, etc):

   a) Los tres eventos ocurren,

   b) Ocurre al menos un evento,

   c) Ocurren A o B pero no C.

Demostración. a) Los tres eventos ocurren,

$$\{x \in \Omega : x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C\} = \{x \in A \cap B \cap C\}$$

b) Ocurre al menos un evento,

$$\{x \in \Omega : x \in A \vee x \in B \vee x \in C\} = \{x \in A \cup B \cup C\}$$

c) Ocurren A o B pero no C

$$\begin{aligned}\{x \in \Omega : (x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C\} &= \{x \in \Omega : (x \in A \vee x \in B) \wedge x \in C^c\} \\ &= \{x \in (A \cup B) \cap C^c\} \\ &= \{x \in (A \cup B) \setminus C\}\end{aligned}$$

□

3. Se lanzan cuatro dados y se multiplican los números que se obtienen. ¿Cuál es la probabilidad de que este producto sea divisible por 5?

Demostración. Sea $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definimos nuestro espacio muestral como $\Omega = \mathcal{D}^4$. Entonces, nos interesan los eventos

$$A = \{(d_1, d_2, d_3, d_4) \in D^4 : 5|d_1 d_2 d_3 d_4\}$$

Para que el producto sea divisible entre 5, por descomposición prima, al menos uno debe ser múltiplo de 5 (ya que 5 es primo). Entonces, esto se reduce a la probabilidad de que al menos un dado sea 5. Analicemos el evento contrario: que ningún 5 se presente. Como los dados son independientes, que todos sean distintos de 5 se calcula como

$$P(C^c) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^4}{6^4}.$$

Entonces,

$$P(C) = 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.518.$$

□

4. En un campus universitario, el 25 % de todos los estudiantes programan en Python, el 10 % programan en C++ y el 5 % programan en ambos, Python y C++. Te encuentras con un estudiante al azar en el campus. Cuál es la probabilidad de que no programe ni en Python ni en C++?

Demostración. Sea Ω el conjunto de estudiantes universitarios. Sea Y el conjunto de estudiantes programan Python y C los que programan en C++. Entonces, $P(Y) = 0.25$, $P(C) = 0.1$ y $P(C \cap Y) = 0.05$. Buscamos $P(C^c \cap Y^c) = P((C \cup Y)^c)$.

$$\begin{aligned} P((C \cup Y)^c) &= 1 - P(C \cup Y) \\ &= 1 - (P(Y) + P(C) - P(C \cap Y)) \\ &= 1 - (0.25 + 0.1 - 0.05) \\ &= 1 - (0.3) \\ &= 0.7 \end{aligned}$$

Es decir, el 70% de los estudiantes no programan en ninguno de los dos lenguajes. $\square$

5. Supongamos que $A \subset B \subset C$. Indica para cada una de las siguientes afirmaciones si siempre es cierta o no. Da un contraejemplo cuando no es cierta y demuéstralo si es cierta.

   a) $P(A|B) \leq P(A)$

   b) $P(B^c) \leq P(A^c)$

   c) $P(A) = P(A|B)P(B|C)P(C)$

Demostración. a) $P(A|B) \leq P(A)$ es falso. De hecho, probamos lo contrario. Dado que $A \subset B$, tenemos $A \cap B = A$. Entonces,

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &\geq P(A), \end{aligned}$$

donde el último paso sigue de

$$0 < P(B) \leq 1 \implies 1 \leq \frac{1}{P(B)} < \infty \implies P(A) \leq \frac{P(A)}{P(B)}.$$

b) $P(B^c) \leq P(A^c)$ es verdadero. Tenemos $A \subset B$, notemos que

$$\{x \in B^c\} \iff \{x \notin B\} \implies \{x \notin A\} \iff \{x \in A^c\}.$$

Esto es, $B^c \subset A^c$. Esto implica $P(B^c) \leq P(A^c)$.

c) $P(A) = P(A|B)P(B|C)P(C)$ es verdadero:

$$\begin{aligned} P(A|B)P(B|C)P(C) &= \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\frac{P(B\cap C)}{P(C)}P(C) \\ &= \frac{P(A)}{P(B)}\frac{P(B)}{P(C)}P(C) \\ &= P(A). \end{aligned}$$

$\square$

6. Elige al azar $b, c \in [0,1]$ de manera independiente. ¿Cúal es la probabilidad que $x^2+2bx+c=0$ tenga dos raices reales?

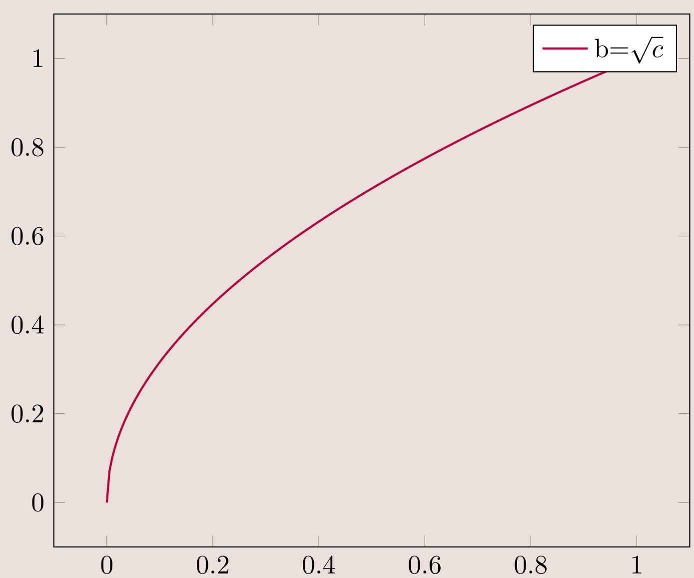
Demostración. Nuestro conjunto de valores es $\Omega = [0,1]^2$. Queremos b, c tal que

$$4b^2 - 4c \geq 0.$$

Esto es, que el discriminante del polinomio cuadrático sea positivo. Como $b, c \geq 0$, la expresión es equivalente a

$$b \geq \sqrt{c}$$

con gráfica.



Nos interesa el área arriba de la curva, que no sobrepase $b = 1$. Es decir,

$$\int_0^q \sqrt{c}\, dc = \frac{2}{3} q^{3/2},$$

donde $q \in \mathbb{R}_+$ es el punto tal que $\sqrt{q} = 1$. Por lo tanto, $q = 1$. Entonces, tenemos

$$\int_0^1 \sqrt{c}\, dc = \frac{2}{3}.$$

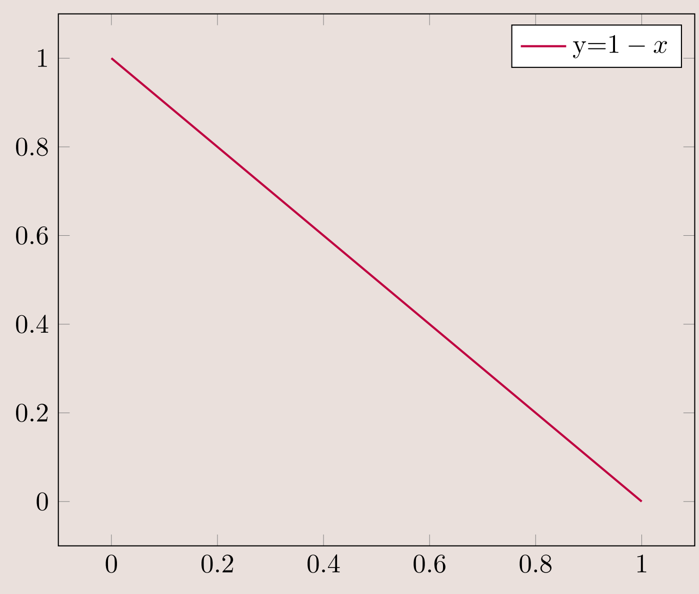
Entonces, el area arriba de la curva es

$$\int_0^1 1 - \sqrt{c}\, dc = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$\square$

7. Tomamos dos números x, y al azar de $[0, 1]$ y de manera independiente. Si sabemos que su suma es menor que 1, calcula la probabilidad que $\max(x, y) < 0,2$.

Demostración. Nuestro conjunto de valores es $\Omega = [0, 1]^2$. Notemos que la condición $x + y < 1$ equivale a $y < 1 - x$, que se traduce a la gráfica siguiente:



Entonces, sean $A = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : \max(x, y) < 0.2\}$ y $B = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x+y < 1\}$. Podemos además notar que

$$A = \{(x, y) \in [0, 0.2)^2\}.$$

Con estas representaciones, es fácil ver que $A \subset B$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)}{P(B)} \\ &= \frac{0.2^2}{0.5} \\ &= \frac{0.04}{0.5} \\ &= 2 \cdot 0.04 \\ &= 0.08. \end{aligned}$$

$\square$