1 Problemas Lineales

Queremos estudiar problemas del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

donde

$$\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}$$

- Solucion de matriz diagonal con

  $$a_{ii} \neq 0 \qquad a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$$

  Entonces,

  $$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

  tiene soluciones $x_i = b_i/a_{ii}$.

- Soluciones de matriz triangular inferior

  resolvemos de arriba hacia abajo:

  $$\begin{aligned} x_1 &= b_1/l_{11}, \\ x_2 &= \frac{b_2 - l_{11}x_1}{l_{22}} \\ x_k &= \frac{b_k - \sum l_{ii}x_i}{l_{kk}} \end{aligned}$$

- Solciones de matriz triangular superior

1.1 Gauss-Jordan

Este algoritmo consiste en traingulizar la matriz. **INSERTAR FORMULA:** Como este m'etodo es costoso, hacemos *pivoteo*, que consiste en cambiar columnas y filas, de tal manera que ponemos el mayor valor de la matriz en la diagonal, luego continuamos el proceso. Esto se hace para que las divisiones sean entre números grandes, y tener un algoritmo consistente.

1.2 Calcular inversas

Para encontrar la matriz inversa mediante Gauss-Jordan aumentado, estamos solucionando el sistema de ecuaciones n veces. Entonces, con los algoritmos vistos para resolver el sistema de ecuaciones, podemos hacerlo para $\mathbf{b} = e_i$, donde $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$.

1.3 Descomposicion LU

El método de Grouth consiste en descomponer la matriz en un producto de matrices triangulares inferiores y superiores.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$
$$(n=3) = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{11}u_{12} & l_{11}u_{12} \\ l_{21} & l_{21}u_{12}+l_{22} & l_{21}a_{13}+l_{22}a_{23} \\ l_{31} & l_{31}u_{12}+l_{32} & l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+l_{33} \end{bmatrix}$$

Podemos calcular de manera explícita:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} \\ a_{21} &= l_{21} \\ a_{12} &= l_{11}u_{12} \implies u_{12} = \frac{a_{12}}{l_{11}} a_{ik} && = Pending \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} l_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \\ u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj} \\ l_{ii} &= a_{ii} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{ik}u_{ki} \end{aligned}$$

1.4 Descomposicion de Cholevsky

Consiste en descomponer la matriz Hermitian $\mathbf{A}$ de forma LL^T. Notemos que para la resolucioón de sistemas de ecuaciones, $\mathbf{A}$ debe ser definida positiva.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$
$$(n=3) = \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}u_{31} \\ & l_{11}^2+l_{22}^2 & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{12} \\ & & l_{11}^2+l_{22}^2+l_{33}^2 \end{bmatrix}$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}^2}$$

2 Ecuacion de calor

2.1 Ecuacion de calor en 1D

Definida por $q = -K\frac{dQ}{dx}$, esta ecuación describe el flujo de calor en una dimensión. Es decir, si aplicamos una fuente de calor a una vara, esta nos dice la temperatura en cada punto de la vara.

$$K\frac{\partial\phi}{\partial x^2} + Q = 0.$$

La derivada puede ser calculada de manera discreta:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi_i - \phi_{i+1}}{\Delta x}$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2}$$

$$K\frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x} + Q\Delta x = 0.$$

Es decir,

$$\frac{K}{dx^2}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{i-1} \\ \phi_i \\ \phi_{i+1} \end{bmatrix} = Q.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \end{bmatrix}$$