

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Псковский государственный университет

МОЛОДЁЖЬ — НАУКЕ. 2023
*Материалы Международной
молодежной научно-практической конференции:
«Актуальные вопросы физико-математического
и цифрового образования»
по итогам научно-исследовательской работы
в 2022/2023 учебном году*

Том III

Псков
Псковский государственный университет
2023

ББК 74.580
М754

*Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Псковского государственного университета*

Редакционная коллегия:

*А. Ф. Веселова, С. Е. Ганго, Т. А. Гаваза, В. Н. Мельник, С. В. Лебедева
Ответственный редактор: Т. А. Гаваза*

М754

Молодёжь — науке. 2023. Материалы Международной молодежной научно-практической конференции: «Актуальные вопросы физико-математического и цифрового образования» по итогам научно-исследовательской работы в 2022/2023 учебном году. Т. III. — Псков : Псковский государственный университет, 2023. — 124 с.

ISBN 978-5-00200-141-5 (том III)

ISBN 978-5-00200-136-1 (общий)

В данный том сборника вошли материалы Международной молодежной научно-практической конференции: «Актуальные вопросы физико-математического и цифрового образования», состоявшейся в Псковском государственном университете в апреле 2023 года.

ББК 74.580

Стилистика, орфография и пунктуация соответствуют оригинал-макету, предоставленному редколлегией.

ISBN 978-5-00200-141-5 (том III)

ISBN 978-5-00200-136-1 (общий)

© Коллектив авторов, 2023

© Псковский государственный университет, 2023

- задачи с техническим содержанием — 94,1 %;
- задачи с межпредметным содержанием — 88,2 %.

6. Эксперты принимают без сомнений рациональную структуру следующих

- компонент дидактических материалов;
- мини и локальных проектов — 70,6 %;
- тематических проектов и задач с межпредметным содержанием —

76,5 %;

- задач с техническим содержанием — 82,4 %;

7. 47 % экспертов убеждены в эффективности применении разработанных дидактических материалов, а 53 % подтверждают это с некоторыми сомнениями.

Источники и литература

1. Годунова Е. А. STEM-подход в образовании. [Электронный ресурс]: URL: <https://goo.gl/FJF68X> свободный (дата обращения: 10.07.2022).
2. Кротов В. М. Физика как учебный предмет в учреждениях общего среднего образования: монография. 2021. 156 с.

*Муленко П. Д., ПсковГУ, институт физико-математических наук
и информационных технологий, студент, IV курс.
(научный руководитель — доцент Перькова Н. В.)*

Задачи по теме «Функции, свойства функций» на математических конкурсах: школьные ожидания VS реальность

Начиная с первого класса общеобразовательной программы, параллельно со «школьной» математикой существует «олимпиадная». Принято считать, что в рамках школьной программы учащийся на уроках математики получает базовые навыки работы с числами, решения задач и уравнений, черчения и решения геометрических фигур, а вся «сложная» и «интересная» математика, если и изучается, то исключительно «на полях» в рамках элективных курсов и факультативных занятий. Поэтому начнём издалека и посмотрим на двух закадычных друзей: Петю и Васю, которые с первого класса учатся вместе в обычной средней общеобразовательной школе, но Петю родители записали в математический кружок ещё в пятом классе, а Вася увлечённо занимался, например, шахматами. И вот к 11 классу они подошли на примерно равном уровне IQ и с примерно равными интересами, даже ВУЗ они выбрали один и тот же. Для повышения шансов на поступление они решили принять участие в нескольких олимпиадах из Перечня олимпиад школьников Министерства науки и высшего образования.

Достаточно очевидно, что у Пети, занимавшегося дополнительной, олимпиадной математикой целых 7 лет, гораздо больше шансов на успешное выступление — хотя бы потому, что в олимпиадах наверняка встретятся задачи на темы,

в «школьной» математике не затрагиваемые в принципе (например, теория графов). Неужели у Васи нет вообще никаких шансов?

Давайте попробуем дать Васе надежду и хотя бы частично нивелируем Петину преимущество. Для этого в основу исследования положим такую тему, которая даже в «олимпиадной» математике начинается *поздно* — функциональную линию, которая появляется вместе с разделением предмета «математика» на «алгебру» и «геометрию» в 7 классе, но не главенствует вплоть до 9 класса. Таким образом, целью работы является посмотреть, какие именно задачи встречаются в олимпиадах, для решения которых требуются числовые функции и их свойства, и являются ли они просто усложнёнными версиями соответствующих «школьных» задач или как-либо выходят за рамки школьной программы.

Функциональная линия в школьном курсе математики

Давайте ещё чуть-чуть повысим шансы Васи успешно выступить на олимпиаде, и скажем, что их школа — это лицей с углублённым изучением математики, и рассмотрим какой-нибудь школьный учебник продвинутого уровня.

Наиболее полным и последовательным изучение темы «Числовая функция» выглядит в учебнике под редакцией Наума Яковлевича Виленкина ([1, 2]). Начиная с третьей главы учебника за 10 класс [1] учащиеся последовательно знакомятся с самим понятием функции и её графика, пределами функций, производной и дифференциалом. После этого в последней главе учебника за 10 класс Виленкин подробно рассматривает тригонометрические функции и обратные им.

Изучение алгебры в 11 классе [2] начинается с интегралов вкупе с простейшими дифференциальными уравнениями, так как это потребуется для следующей главы «Показательная, логарифмическая и степенная функции», ведь первое определение логарифма требует понимания несобственного интеграла. Все последующие главы непосредственно к функциям уже не относятся.

О математических конкурсах

Если сделать поисковый запрос в сети Интернет «популярные математические конкурсы для школьников», то, помимо онлайн-викторин (то есть тестов), практически все ссылки ведут на сайты различных олимпиад. Но существуют и другие виды математических конкурсов (в качестве интеллектуальной разминки для читателя можно привести ложное доказательство этого утверждения: в противном случае название данного раздела и тема работы содержали бы слово «олимпиада» вместо «конкурс»), и ровно одна ссылка на первой странице таки ведёт на сайт математического праздника МГУ.

На портале «Олимпиада.ру» (самом крупном агрегаторе новостей более чем 700 олимпиад) можно найти рейтинговый список самых популярных олимпиад [3]. Хотя в нём присутствуют «Турнир городов» на 6-м месте и «Турнир Ломоносова» на 21-м, они не являются турнирами в классическом понимании. Под математическим турниром следует понимать, в первую очередь, командные соревнования (в отличие от индивидуальных олимпиад), проводимые по одному или нескольким видам математических игр (таким как математические регаты или математические бои). К таковым относятся, например, международный математический турнир старшеклассников «Кубок памяти А. Н. Колмогорова» или турнир Архимеда.

Также нельзя не упомянуть математические фестивали. Как правило, так называют и сюда относят любые виды математических турниров, объединяющие в себе несколько видов математических игр. В зависимости от возраста участников и количества команд проводятся в один или несколько дней.

Основной целью фестивалей, в отличие от других видов турниров, являются не сами по себе соревнования с целью определения победителя, а отдых, установление дружеских отношений между математиками, пробуждение интереса к предмету у детей и поиск талантов.

Примеры задач на применение свойств функции в математических конкурсах

Полная классификация олимпиадных задач на применение свойств числовых функций не представляется возможной, ведь всегда будут существовать задачи на комбинирование каких-либо идей. Тем не менее, с некоторой долей уверенности можно утверждать, что хотя бы одна задача из представленных далее типов будет присутствовать в любой перечневой олимпиаде. У каждой задачи курсивом указано, где появлялась (олимпиада, год, этап, номер задачи, ссылка на источник, автор – при наличии), после которых в скобках будет приведён ответ, если задача не на доказательство (найти решение читателю предлагается самостоятельно). Задачи взяты из следующих олимпиад: Открытая олимпиада школьников по математике (ИТМО), Объединённая межвузовская математическая олимпиада (ОММО), Объединённая международная математическая олимпиада «Формула Единства» / «Третье тысячелетие» (ФЕТТ).

Задача №1 на функции целой и дробной частей

ИТМО, 2021–22 уч. год, 2-й отб. этап, 11 кл., №5 [4] (ответ: 863)

Найдите площадь множества точек в первой координатной четверти, удовлетворяющих неравенствам $y \leq x \leq 42$ и $\{y\} \leq \{x\}[x + 1]$. Квадратные скобки означают целую часть числа, фигурные — дробную. Ответ округлите до целого.

Задача №2 на теоремы непрерывности функций

ФЕТТ, 2022–23 уч. год, отб. этап, 11 кл., №8, Теслер А. А. [5]

Некая непрерывная функция f такова, что

$$f\left(f\left(f\left(f(f(0))\right)\right)\right) = 0.$$

Докажите, что уравнение $f(f(x)) = x$ имеет хотя бы один корень.

Задача №3 на область допустимых значений функций

ФЕТТ, 2022–23 уч. год, отб. этап, 11 кл., №5, Муленко П. Д. [5] (ответ: $a = b = c = -1$)

Найдите все тройки вещественных чисел a, b, c , для которых

$$27^{a^2+b+c+1} + 27^{b^2+c+a+1} + 27^{c^2+a+b+1} = 3.$$

Задача №4 на нахождение семейства функций

ОММО, 2022–23 уч. год, закл. этап, 11 кл., №9 [6] (ответ: $f(x) = 2x + 1$)

Найдите все функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a , что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$f(2xy + 1) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Задача №5 на анализ графиков функций

ОММО, 2022–23 уч. год, закл. этап., 11 кл., №6 [6] (ответ: $\left[\frac{2-\sqrt{5}}{3}; 1\right)$)

Укажите все значения параметра a , $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\sin t - a| - \cos t}{\left|\sin t - \frac{2}{3}\right|} > 0$$

для $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Задача №6 на степенные функции

ФЕТТ, 2020–21 уч. год, отб. этап, 10–11 кл., №2, А. А. Солянин [7] (ответ: $f(x) = kx^2$ и $f(x) = k(x^2 - 1)$)

Найдите все такие квадратные трёхчлены $f(x)$, что многочлены $f^2(x)$ и $f(x^2)$ имеют одинаковое и непустое множество вещественных корней.

Из предыдущего раздела становится видно, что большинство олимпиадных задач по теме «Числовая функция и её свойства» являются просто усложнёнными школьными задачами (в основном, за счёт комбинации идей и фактов этой темы с другими). Тем не менее, и здесь встречаются вещи, выходящие за рамки школьной программы: например, функции целой и дробной частей или «именные» неравенства, которые не рассматриваются в общеобразовательной программе старшей школы.

Источники и литература

1. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общ. орган. (углублённый уровень) М., 2014.
2. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Учебник для учащихся общ. орган. (углублённый уровень) М., 2014.
3. 39 олимпиад из Перечня Минобрнауки России по математике для 11 класса // Олимпиада.ру. [Электронный ресурс]: URL: https://olimpiada.ru/activities?subject%5B6%5D=on&class=11&type=any&period_date=&period=year&perechen=on (дата обращения: 06.02.2023).
4. Задачи Открытой олимпиады школьников по математике 2021 года: 11 класс, 2 отборочный этап // Олимпиада.ру. [Электронный ресурс]: URL: <https://rsr-olymp.ru/upload/files/tasks/121/2021/121-ans-math-11-tur2-otbor-21-22.pdf> (дата обращения: 10.02.2023).
5. Олимпиада по математике 2022-23 года // «Формула Единства». [Электронный ресурс]: URL: https://www.formulo.org/wp-content/uploads/2023/01/fdi_tm_22_23_math_sol_rus.pdf (дата обращения: 10.02.2023).
6. Объединённая межвузовская математическая олимпиада школьников 2023 года [Электронный ресурс]: URL: <https://olympiads.mccme.ru/ommo/23/ommo2023-sol-pre.pdf> (дата обращения: 22.02.2023).

7. Олимпиада по математике 2020–21 года // «Формула Единства». [Электронный ресурс]: URL: <https://www.formulo.org/wp-content/uploads/2021/01/fditm-2020-21-1round-sol-ru.pdf> (дата обращения: 10.02.2023).

*Наделко У. Е., ПсковГУ, институт физико-математических наук
и информационных технологий, студент, III курс
(научный руководитель — доцент Лебедева С. В.)*

Элементы истории математики на уроках алгебры в 7 классе

В последнее время в школьном образовании наблюдается тенденция связи гуманитарных и точных наук. На ее фоне становится очевидной актуальность изучения элементов истории математики на уроках. Рабочие программы по предметам, составляемые учителями, ориентируются на результаты обучения, прописанные в Федеральном государственном образовательном стандарте. К ним относятся личностные, метапредметные и предметные результаты. История математики расширяет представления школьников о современной системе научных знаний. Это важно для развития полноценной личности. Также история математики дополняет и углубляет знания, полученные на уроках алгебры и геометрии, способствует формированию научного типа мышления (предметные результаты обучения). Она помогает освоить межпредметные понятия и использовать их в различной деятельности.

Чтобы доказать актуальность данной работы, было проведено интервьюирование Колмаковой Ольги Николаевны, учительницы седьмых классов в МБОУ «СОШ № 12» г. Пскова. На вопрос, используются ли элементы истории математики на уроках алгебры в 7 классе, был получен отрицательный ответ. Однако выяснилось, что учащиеся делают проекты по различным предметам, в том числе и по алгебре. В качестве дополнительных материалов можно использовать элементы истории математики. Также при проведении уроков не уделяется достаточное внимание мотивации, для которой можно было бы использовать древние задачи. Таким образом, элементы из истории математики пригодились бы не только учащимся для написания проектов, но и учителю при проведении уроков.

Цель работы: отобрать исторический теоретический и практический материал к различным темам курса алгебры в 7 классе.

В учебнике алгебры для 7 классов авторов Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой, по которому учатся современные школьники, изложены краткие сведения по малому числу тем: зарождение алгебры, функции, формулы сокращенного умножения, метод координат, вычислительные средства. Однако, этого недостаточно для того, чтобы учащиеся вполне углубились в историю развития математики как науки.

В работе представлены элементы истории математики на уроках алгебры для учащихся 7 классов. В качестве примера рассмотрим тему «Линейные уравнения», так как она подробно изучается с седьмого класса. О них повествуется в