Симплекс-метод.

$x_0 = (1,0,1,0)$; $-x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \to min$, $x \in D = \{x \in \mathbb{R}^4_+ \mid x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 5,\ x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 9\}$

Базис – x_1 и x_3. Выразим их из ограничений:

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 \\ x_1 = 9 - 7x_2 - 8x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 - 3x_2 - 4x_3 - x_4 \\ x_1 = 9 - 7x_2 - 8x_3 - 2x_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_1 = 9 - 7x_2 - 8 + 6x_2 + 2x_4 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = 1 - \frac{3}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 \\ x_1 = 1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}x_2 + x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Подставим x_1 и x_3 в целевую функцию:

$$f(x) = -1 + x_2 + 3x_2 + 5 - \frac{15}{4}x_2 - \frac{5}{4}x_4 + x_4 = \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_4 + 4$$

Составим симплекс-таблицу:

План	Базис	x_1	x_2	x_3	x_4	b_i	$\frac{b_i}{a_{ij}}$	
1	x_1	1	1	0	0	1	$\frac{1}{0} = \infty$	разрешающий элемент
	x_3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$	– минимальное значение
	f	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-4		← Выбираем наиб. по модулю отриц. коэф.
2	x_1	1	1	0	0	1		
	x_4	0	3	4	1	4		
	f	0	$1 \geq 0$	$1 \geq 0$	0	-3		← Нет отриц. коэф. => план оптимален.

В итоге базисные переменные – x_1 и x_4. Их значения указаны в b_i => $X_{min} = (1;0;0;4)$.

Число -3 является значением целевой функции с обратным знаком => $f_{min} = 3$.

Ответ: $f_{min}(x) = 3$; $x_{min} = (1;0;0;4)$.