

MUP

Stampato con un Contributo del Dipartimento di Ingegneria e Architettura  
dell'Università di Parma.

Il testo e le figure sono stati composti usando i programmi L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X,  
T<sub>E</sub>X, Vectorsnator, GNU C, Ghostscript, Gnuplot e Octave.

ISBN 978-88-7847-634-9

© 2023 Monte Università Parma Editore

*Nessuna parte di questo libro può essere riprodotta o trasmessa in qualsiasi forma o con qualsiasi mezzo elettronico, meccanico o altro senza l'autorizzazione scritta dei proprietari dei diritti e dell'editore.*

MUP Editore è il marchio editoriale di Monteparmaservizi Srl,  
impresa strumentale della



[www.mupeditore.it](http://www.mupeditore.it)

RINALDO GARZIERA

**Meccanica delle Macchine**

Cinematica

MUP



## Indice

<b>Note Introduttive</b>	<b>1</b>
1    Cenni Storici . . . . .	2
2    Il Nostro Approccio alla Meccanica delle Macchine . . . . .	4
<b>I    CORPI RIGIDI E LORO MOTI RELATIVI</b>	<b>9</b>
<b>1  Il Corpo Rigido: Spostamenti e Velocità</b>	<b>11</b>
1.1  Introduzione . . . . .	11
1.2  Spostamenti e Velocità . . . . .	12
1.3  Teorema di Chasles . . . . .	14
<b>2  Accelerazioni</b>	<b>19</b>
2.1  Derivazione della Velocità . . . . .	19
2.2  Punto di Vista della Traiettoria . . . . .	21
<b>3  I Moti Relativi</b>	<b>25</b>
3.1  Introduzione . . . . .	25
3.2  Posizione del Problema . . . . .	26
3.3  L'Accelerazione di Coriolis . . . . .	28
3.4  Riepilogo . . . . .	29
<b>4  Esempi di Moti Relativi</b>	<b>31</b>
4.1  Precisazioni sull'Accelerazione di Coriolis . . . . .	31
4.2  Ulteriori Precisazioni . . . . .	33
4.3  Due Esempi Significativi . . . . .	34
4.4  Ulteriori Considerazioni sui Moti Relativi . . . . .	38
<b>II   TRASMISSIONE E TRASFORMAZIONE DEL MOVIMENTO</b>	<b>41</b>
<b>5  Breve Introduzione</b>	<b>43</b>

<b>6 Trasmissione del Moto mediante Ruote Dentate</b>	<b>45</b>
6.1 Le Ruote di Frizione . . . . .	45
6.2 Percorso Intuitivo verso le Ruote Dentate . . . . .	46
6.3 Costruzione di Profili Coniugati di Assortimento . . . . .	53
6.4 Profili Coniugati a Evolente . . . . .	65
6.5 Proporzionamento Modulare delle Ruote . . . . .	73
6.6 Taglio delle Ruote Dentate per Inviluppo . . . . .	75
6.7 Ruote Corrette mediante Spostamento del Profilo I . . . . .	80
6.8 Ruote Corrette mediante Spostamento del Profilo II . . . . .	83
6.9 Note Conclusive sulle Ruote Dentate . . . . .	88
<b>7 Cenni ai Sistemi Articolati</b>	<b>91</b>
7.1 Introduzione . . . . .	91
7.2 Quadrilateri Articolati: Velocità e Accelerazioni . . . . .	92
7.3 Applicazioni dei Quadrilateri . . . . .	94
7.4 Curve di Biella . . . . .	97
<b>8 Manovellismi</b>	<b>101</b>
8.1 Introduzione . . . . .	101
8.2 Il Manovellismo Ordinario . . . . .	102
8.3 Espressioni Analitiche di Velocità e Accelerazione del Piede di Biella . . . . .	104
8.4 Velocità e Accelerazione del Piede di Biella: Analisi mediante i Moti Relativi . . . . .	107
8.5 Manovellismi Non Ordinari . . . . .	108
8.6 Meccanismo a Ritorno Rapido . . . . .	110
8.7 Cinematica del Meccanismo a Ritorno Rapido: Analisi mediante i Moti Relativi . . . . .	113
8.8 Manovellismi non Ordinari con Due Membri Rotanti . . . . .	114
8.9 Quadrilateri Doppiaamente Degeneri e Altre Considerazioni . .	116
<b>9 Leggi di Moto e Profilatura delle Camme</b>	<b>121</b>
9.1 Introduzione . . . . .	121
9.2 Le Leggi di Moto . . . . .	123
9.3 Profilatura delle Camme . . . . .	129
9.4 Camme Coniugate . . . . .	138
<b>III APPROFONDIMENTI</b>	<b>141</b>
<b>10 Moto Rigido Tridimensionale</b>	<b>143</b>
10.1 Il Moto nelle Tre Dimensioni dello Spazio . . . . .	143
10.2 Rotazioni Infinitesimali . . . . .	145
10.3 Asse del Mozzi e Altre Considerazioni . . . . .	147

Indice

<b>11 Dentature con Profilo Cicloidale</b>	<b>153</b>
11.1 Una Proprietà Notevole della Cicloide . . . . .	153
11.2 Ruote con Denti a Profilo Cicloidale . . . . .	159
11.3 Proporzionamento delle Ruote Cicloidali . . . . .	160
11.4 Interessanti Casi di Ruote Cicloidali . . . . .	162
<b>12 Ulteriori Considerazioni sulla Profilatura delle Camme</b>	<b>169</b>
12.1 Una Proprietà del Diagramma delle Accelerazioni . . . . .	169
12.2 Un Metodo per Ridurre l'Ingombro delle Camme . . . . .	170
12.3 Cenni alla Profilatura di Camme con Cedente a Bilanciere . .	172
12.4 Cenni alla Profilatura di Camme Tastate da Piattello . . . . .	175
<b>Bibliografia</b>	<b>181</b>



Questo lavoro è dedicato al ricordo del professor Franco Giordana. Senza i suoi consigli e il suo affettuoso incoraggiamento il presente volume non avrebbe avuto luce di stampa. Un particolare ringraziamento va al professor Alessandro Tasora, per suoi preziosi suggerimenti.



## Note Introduttive

Al termine *Meccanica* non corrisponde una sola disciplina. Il dominio abbracciato da questa materia è assai vasto e una classificazione, forse leggermente arbitraria e imprecisa, sicuramente incompleta, dispone questa parte della *Fisica* in quattro branche, a loro volta molto estese: la *Meccanica Classica*, la *Meccanica Statistica*, la *Meccanica Relativistica* e la *Meccanica Quantistica*. Questi quattro rami, i nomi dei quali si apprendono, unitamente ai loro principali risultati, nel corso della formazione secondaria, sono tra loro intrecciati: è comune trovare, nelle librerie scientifiche, trattati di *Meccanica Quantistica Relativistica* oppure di *Meccanica Statistica Relativistica*.

Prendendo le mosse da [1], se si volesse rispondere alla domanda “che cos’è la *Meccanica*?” si potrebbe dire: essa si propone lo scopo di descrivere i movimenti che avvengono nello spazio e nel tempo in relazione alle cause che provocano tali moti; definizione che ognuno vede quanto sia ampia. Infatti, tutte le interazioni fisiche, avendo luogo nello spazio e nel tempo, implicano *movimento*. Prendendo quindi tale definizione per buona, la *Meccanica* dilagherebbe in quasi tutti i campi della *Fisica*. D’altra parte, i fenomeni naturali appartengono a tutte le branche della *Fisica* e, a rigore, sta a chi si occupa di tali problemi decidere di trascurare certuni o cert’altri aspetti. Quando, nello studio del movimento, sono trascurabili o vengono trascurati gli scambi e le variazioni termiche, le relazioni elettromagnetiche, chimiche, nucleari e non si palesano velocità prossime a quelle della luce ricadiamo, in generale, nell’ambito della Meccanica Classica.

Limitandoci quindi alla branca della Meccanica Classica avremo una copiosissima biblioteca di opere importanti e ispiratrici, se non altro come fonti del modello espositivo *standard* dell’introduzione alla *Cinematica*, modello che, per ragioni che cercherò di esporre più avanti, non seguiremo. Riporto soltanto due trattati di Meccanica Classica, ben consci però di proporre una porzione minuscola della letteratura effettivamente disponibile in questo campo. Sia [2] sia [3] entrano in argomento definendo e descrivendo il moto di un punto. Come anticipato, non sarà però questo il nostro *incipit*. Uno dei motivi che mi hanno persuaso a non cominciare lo studio della Meccanica dalla cinematica del punto riguarda il fatto che il concetto di velocità angolare compare in questo studio in modo forzato, tramite altri oggetti, in quanto sui punti non si possono misurare angoli. Ma il motivo principale, che da

solo potrebbe bastare a farci prendere un'altra strada, è che, pur riconoscendo allo studio della cinematica del punto un notevole valore formativo, tale studio ci sembra fuorviante dal solco maggiormente aderente alle applicazioni tecniche della Meccanica, che è la traccia che invece vorremmo seguire in questo spazioso campo.

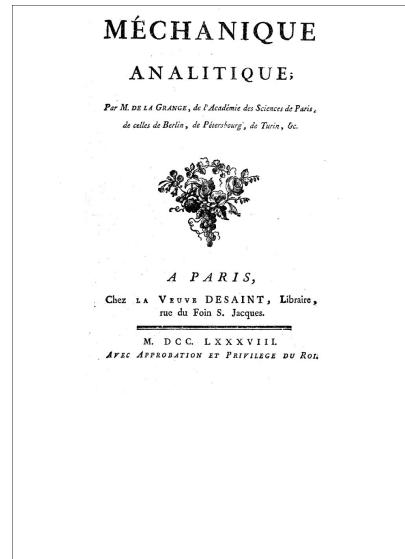
Il nostro percorso, infatti, si snoderà tra le *macchine* e i loro componenti: esse saranno studiate utilizzando i metodi di indagine, i risultati, e quanto possibile dell'impianto concettuale e del complesso di idee che formano la Meccanica Classica, scienza con vocazione prevalentemente matematica. Evitando di entrare in un secondo girone di definizioni che rispondono a “cosa sono le macchine?”, desiderosi anzi di toglierci quanto prima da tali ginepri, basterà qui dire che non esistono macchine o parti di esse che siano punti isolati. Sicuramente la nozione di *punto* è fondamentale, intuitiva e presa volentieri in prestito, ringraziando, dalla geometria. Ma il punto, nella nostra trattazione, apparterrà sempre a un corpo o, più precisamente, a una entità che definiremo come *corpo rigido* e che sarà il protagonista dei nostri moti. Partiremo quindi dallo spostamento dei corpi, come in [4]. I risultati e le conclusioni ai quali giungeremo saranno comunque in sintonia con tutte le altre trattazioni della Meccanica.

## 1 CENNI STORICI

Riprendiamo nel presente paragrafo quanto riporta [1] nella sua introduzione, opera insigne, questa, che l'autore ha avuto la fortuna di dover studiare per preparare l'esame di *Meccanica Razionale*. Pare che, prima dell'intervento leonardesco, pochi autori si fossero espressi, e soltanto in considerazioni filosofiche, sulle cause del moto e sulle condizioni di equilibrio, seguendo i resti della Filosofia Greca conservata e giunta in Europa con l'eredità della “Scuola Alessandrina”. Tra i diversi frammenti, a noi pervenuti da tale “patrimonio”, segnaliamo un'opera preziosa per chi volesse esplorare le sorgenti del pensiero scientifico: [5]. *Leonardo da Vinci* aprì il primo sentiero, per lo studio della Meccanica, pressoché scevro dai pregiudizi della Filosofia Antica e dalle opinioni teologiche, tanto autorevoli e tanto in voga durante i secoli precedenti. Il periodo moderno della Meccanica ha però inizio con le nuove concezioni circa il moto dei pianeti elaborate da *Copernico* e *Keplero*; e tali idee portarono un radicale sconvolgimento nel campo dell'astronomia. È appena posteriore a questa notevolissima “riforma astronomica” la fondazione, da parte di *Galileo*, del cosiddetto *metodo di indagine sperimentale*, che negli ultimi tre secoli è stato spesso indicato come l'unica strada sicura per il progresso della Scienza. *Galileo* formula per primo la nozione precisa di accelerazione e intuisce che questa grandezza dovrà comparire tra i protagonisti sul palcoscenico della Meccanica. Nel frattempo *Cartesio* pone le basi esatte per lo studio quantitativo della

geometria e, siccome il movimento dei corpi ha luogo nelle dimensioni dello spazio, forgia alcuni strumenti che renderanno il cammino della Meccanica più rapido, *in primis* la *Geometria Analitica*. Su queste solide fondamenta si sviluppano alcuni rami della *Statica*, per opera di *Varignon* e *Stevin*, e tali studi – senza dimenticare quelli pionieristici e ancora fondamentali di *Archimede* – costituiscono ancora oggi un notevole bagaglio di sapere tecnico. La definitiva sistemazione della legge d'inerzia (già intravista da *Galileo*) da parte di *Newton* e il “suo” *Calcolo Infinitesimale*<sup>1</sup> dotano il secolo XVIII di strumenti per affrontare un ventaglio amplissimo di problemi di meccanica. Nel corso di quel secolo, i *Bernoulli* (*Giacomo*, *Giovanni* e *Daniele*) prima, *Eulero* poco dopo, raffinando ulteriormente i concetti dell'Analisi Matematica, posero le basi per quello che oggi si chiama *Calcolo delle Variazioni*. Essi impostarono correttamente e risolsero svariati problemi paradigmatici di statica e di dinamica. Ormai il *Principio dei Lavori Virtuali* aveva ottenuto una formulazione precisa e *Monsieur de la Grange*, noto poi come *Lagrange*, scriveva il suo bel trattato *Méchanique Analytique* (il cui frontespizio appare qui a lato) nel quale, facendosene un curioso vanto, non inserì alcuna figura. *Lagrange* portava così a compimento e sintetizzava quel dovizioso novero di metodi matematici disponibili alla fine del secolo XVIII. Al termine di tale secolo, la Meccanica si trova ormai ripartita in diversi rami dovendo fornire risposte a specifiche necessità dei vari ambiti applicativi, vertiginosamente crescenti con l'avvento della Rivoluzione Industriale: problemi di *elasticità*, di *idrodinamica*, di *suono* e *vibrazioni*, di *meccanica delle macchine*.

È proprio durante il secolo XIX che la Meccanica subisce, a livello teorico, ulteriori e “definitive” sistematizzazioni dovute a *Laplace*, *Gauss*, *Cauchy* e *Hamilton*, nonché alcune importanti rivisitazioni critiche per opera di *Poincaré*, *Hertz* e soprattutto *Mach*. A stimolare la revisione dei fondamenti di questa scienza sono prevalentemente il concetto di *forza* e di *spazio* e *tempo assoluti*. *Mach*, nel suo prezioso libro [6], prepara il terreno per la Meccanica



Il frontespizio del libro di Lagrange.

<sup>1</sup> *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687, opera non visionata dall'autore.

Relativistica di *Einstein*, che dovrà entrare poi in quasi tutte le branche della Fisica. Consiglio agli appassionati di meccanica, di scienza e di tecnica una lettura di [6], se non altro per rendersi conto di quanto un pensiero, molto indipendente e rigoroso, possa mettere in discussione qualsiasi teoria che, per età, per diffusione, per abbondanza di risultati, tenda al dogmatismo. Oltre a questo, come si è già accennato, il secolo XIX porta alla ribalta le esigenze della nascente Rivoluzione Industriale. La Meccanica scopre allora la propria vocazione *applicativa*. Alcuni dei frutti delle ricerche svolte da *Poisson*, *Cauchy*, *Carnot*, *Coriolis* sono squisitamente applicativi e appartengono alla *Meccanica Applicata*. Questa, a sua volta, si è occupata e si occupa di un campo molto esteso di problematiche. Si va dalla *Statica* dei corpi all'*Elasticità*, studi che ormai spettano alla *Scienza delle Costruzioni*, si procede con la *Meccanica dei Fluidi*, di estremo interesse per gli ingegneri civili quando il fluido è l'acqua e per gli ingegneri aeronautici quando il fluido è l'aria. Si spazia poi dall'*Acustica* alle *Vibrazioni*, dalla *Biomeccanica* alla moderna *Balistica*.

Giungiamo quindi alle *Macchine*, con i loro organi e i loro azionamenti, i loro movimenti speciali, le loro criticità e la loro straordinaria rilevanza economica. Eccoci all'imboocco di una nuova restrizione del campo di questa scienza; è l'unico strato che riguarderà da vicino la materia del nostro corso. Anzi, nel dominio stesso della meccanica delle macchine, saremo portati o costretti a fare delle scelte che, per forza di cose, limiteranno ulteriormente lo scopo di queste note.

## 2 IL NOSTRO APPROCCIO ALLA MECCANICA DELLE MACCHINE

Questo lavoro si rivolge, in particolare, agli studenti dei corsi di Ingegneria che prevedono l'insegnamento della Meccanica Applicata alle Macchine. Alcuni di tali corsi non sono preceduti da insegnamenti che abbraccino argomenti di meccanica, fatta eccezione per l'insegnamento della fisica del primo anno. Si rende così necessario anteporre alle nozioni di *Cinematica Applicata*, contenute nella *Seconda Parte* e approfondite nella *Terza Parte* di questo volume, un'introduzione alla *Cinematica Teorica*. La *Prima Parte*, infatti, richiama i concetti di *corpo rigido* e di *moto relativo*, proponendo anche alcune nozioni circa la composizione dei movimenti. Come già accennato, partiremo dal concetto di *velocità* e *accelerazione* di punti appartenenti a corpi rigidi, dal concetto di *velocità angolare* e di *moto roto-traslatorio*. Il *teorema di Coriolis*, indispensabile per la comprensione dei *moti relativi* dei vari organi delle macchine, in particolare dei *sistemi articolati*, ci mostrerà quindi la via corretta per l'interpretazione delle quantità cinematiche provenienti da differenti osservatori.

Nella seconda parte di questo lavoro, entrando nel campo più proprio alla meccanica applicata e in particolare alla cinematica applicata, ci è parso

opportuno presentare una panoramica sulle *ruote dentate*. Esse sono qui studiate esclusivamente dal punto di vista cinematico, prendendo comunque in considerazione tutti i loro aspetti geometrici, anche quelli connessi con la loro fabbricazione. L'esposizione dei concetti legati alle ruote dentate si snoda quindi attraverso un "percorso" che, in maniera induttiva, mette in luce l'ineluttabilità della effettiva forma dei denti, che di fatto risultano profilati a evolente di cerchio. Sempre in questo capitolo, vengono analizzati alcuni aspetti geometrico-funzionali rilevanti per gli ingranaggi, *in primis* le loro correzioni mediante lo spostamento del profilo.

Il capitolo che riguarda i *sistemi articolati* fornisce, in ristretto, alcune indicazioni circa la loro analisi e le possibilità che essi offrono per ottenere leggi di moto e traiettorie particolari.

Più esteso è il capitolo che tratta i *manovellismi*. Sia per la loro importanza nel mondo industriale, sia per la loro tradizionale presenza nei corsi di Meccanica Applicata, i manovellismi hanno meritato in queste note uno spazio che comprende diversi metodi per la loro analisi. Anche i manovellismi non ordinari vengono posti, in questo capitolo, al centro dell'attenzione, giungendo a dare conto di qualche loro applicazione notevole.

I meccanismi a *camma* sono senza dubbio tra quelli maggiormente usati nell'ambito delle macchine automatiche, soprattutto quando sono implicati movimenti particolari, da eseguirsi con la massima precisione. Nel capitolo dedicato alla loro profilatura, lo studio delle leggi di moto e le tecniche per la loro sintesi precedono pertanto l'analisi degli aspetti cinematici (quindi geometrici) di questi sofisticati eccentrici, in modo tale da fornire al lettore una discreta base per la loro progettazione.

La terza parte di queste note è destinata ad alcuni approfondimenti e di essa fanno parte tre ulteriori capitoli. Il primo fornisce qualche nozione circa il movimento nello spazio tridimensionale. Il secondo capitolo mostra alcune applicazioni delle ruote dentate con profilo cicloideale dei denti, la più interessante delle quali riguarda gli ingranaggi per orologi. L'ultimo capitolo aggiunge qualche ulteriore notizia circa la sintesi degli azionamenti a camma. Qui si accenna alla profilatura delle camme speciali *offset*, e vengono esemplificate la progettazione di una camma tastata da un cedente a bilanciere e quella di una camma tastata da un piattello.

Il presente volume, come annuncia il suo titolo, è limitato allo studio della *Meccanica Applicata alle Macchine* in un perimetro che riguarda solamente la *Cinematica*. Nelle intenzioni dell'autore risiede però la volontà di esporre, in ulteriori lavori, altre parti fondamentali di questa materia. Il cuore dello studio della Meccanica delle Macchine è rappresentato dall'analisi del loro comportamento *dinamico* e di tutte le problematiche legate al loro funzionamento: dovrebbe allora essere questo il contenuto di un altro volume, completamente dedicato alla *Dinamica delle Macchine* e allo studio dei loro

principali componenti. “Nell’accezione moderna una macchina è qualcosa in grado di produrre beni o servizi elaborando energia e può essere elementarmente schematizzata come una scatola (o blocco, o *black box*) in cui entrano uno o più flussi di energia (eventualmente di natura diversa) ed escono uno o più flussi energetici (in generale di natura diversa)”, [7]. In questo blocco generale si riconoscono spesso importanti sotto-sistemi: il motore, gli organi di trasmissione e le parti che, utilizzando il lavoro meccanico fornito loro dai primi due, producono effetti di varia utilità. La descrizione della macchina, vista come somma di tre sotto-sistemi, è ovviamente incompleta e grossolana, e lascia sicuramente notevoli eccezioni fuori dal suo perimetro. Tuttavia tale definizione comprende una vasta generalità di casi ed è sufficiente per prendere le mosse nello studio di questa disciplina. La *Meccanica Applicata alle Macchine* si propone proprio l’analisi generale di queste ultime trovando, ove possibile, un comune denominatore tra gli approcci alle loro problematiche. Questa disciplina ha, di fatto, anche il compito di studiare il funzionamento di particolari sotto-sistemi presenti nella stragrande maggioranza delle macchine, come *sistemi articolati, manovellismi, eccentrici, freni, frizioni, ruote dentate, pulegge, cinghie, catene, volani, supporti...* Tutti questi dispositivi dovranno trovare adeguato spazio nel volume che riguarderà la Dinamica.

Un Terzo Volume dovrebbe invece riguardare lo studio delle *Vibrazioni Meccaniche*. Tradizionalmente, per motivi di tempo, le lezioni che toccano questo argomento si fermano all’analisi di sistemi discreti con più gradi di libertà. Con un pizzico di ottimismo crediamo che il volume sulle vibrazioni possa però comprendere anche argomenti maggiormente specialistici, giungendo all’analisi delle *Vibrazioni dei Continui*, allo studio delle vibrazioni nel dominio della frequenza, e ad alcuni aspetti legati alla loro misura.

L’esperienza, accumulata in più di trent’anni di insegnamento, mi ha vieppiù confermato nel credere in una distribuzione di interessi molto variegata per questa materia. Le parti scritte sotto forma di note, o in caratteri ridotti, unitamente alla parte terza del volume, integrano la sintetica e spesso mutilata presentazione di alcuni argomenti e potranno essere lette dagli studenti più volenterosi a complemento delle nozioni impartite frontalmente.

Le figure che compaiono nella seconda e nella terza parte del volume, eccezion fatta per una decina di esse, sono state prodotte da codici numerici, sviluppati integralmente dall’autore per tale proposito. Non avendo in mente fini didattici o di ricerca, lo stile dei programmi (se così si può chiamare) è molto rudimentale, con pochi commenti, i quali contengono un’infinità di refusi. Ciononostante, dato che tali codici danno origine a figure che appaiono plausibili, ci sembrava un peccato non mettere l’intero *software* a disposizione di qualche studente curioso. Il tutto si trova all’indirizzo [gitlab.com/public](https://gitlab.com/public) dove si deve cercare il nome dell’autore, il quale sarà grato a chiunque lasci

qualsiasi osservazione in merito.

Abbiamo ritenuto opportuno fornire una bibliografia di dimensioni ragionevoli, citata nel testo laddove necessario. La scelta, che potrebbe apparire arbitraria, delle opere citate aderisce al principio secondo il quale chi scrive dovrebbe avere confidenza e dimestichezza con ciò che propone come fonti, o come esempi, insomma con le opere citate. Talvolta uniremo alla citazione brevi commenti circa l'opera indicata e il suo contenuto, con la speranza di suscitare la curiosità attiva di almeno uno studente ogni due anni.



PARTE I

CORPI RIGIDI E LORO MOTI  
RELATIVI



## CAPITOLO 1

# Il Corpo Rigido: Spostamenti e Velocità

### 1.1 INTRODUZIONE

Le macchine sono costituite da un certo numero di parti, molte delle quali sono corpi rigidi. *Bielle, manovelle, aste, bilancieri, ruote dentate, telai*, sono tutti *corpi rigidi*. Per definizione, un corpo è rigido se risulta essere invariante nel tempo la distanza tra due suoi punti scelti ad arbitrio. Siano  $P_1$  e  $P_2$  punti appartenenti al nostro corpo: perché tale corpo sia rigido deve essere

$$d(P_1, P_2, t_1) = d(P_1, P_2, t_2), \quad (1.1)$$



Figura 1.1: *Biella di motore d'automobile.*

dove  $d(., ., .)$  è la funzione distanza tra due punti al tempo  $t$ . Come vedremo tra poco, la definizione di corpo rigido appena introdotta risulterà essere di grande utilità nello studio della cinematica, in quanto i corpi rigidi possono dare luogo esclusivamente a *spostamenti rigidi*<sup>1</sup>. La definizione enunciata poc'anzi ci offre, peraltro, l'opportunità di riflettere sui modelli che mettiamo in campo per utilità nello studio dei fenomeni naturali: in questo caso si intuisce che nessun corpo “reale” potrà rispettare rigorosamente la 1.1, dato che non esistono corpi indeformabili. Ma il modello, cioè la rappresentazione ideale e parziale, che si deduce dalla 1.1 indica anche la via che si desidera percorrere nell’indagine scientifica: il corpo rigido è utile per lo studio della cinematica degli organi delle macchine, dove risulta comodo e appropriato

<sup>1</sup>Non è vero il contrario: anche corpi deformabili come gas e liquidi possono muoversi rigidamente. La condizione 1.1 fa sì che un tetraedro, formato prendendo come vertici quattro punti qualsiasi del corpo, rimanga invariato nella forma anche dopo un eventuale spostamento. Non è difficile immaginare una bolla d’aria all’interno di un liquido che scorra in una condotta trasparente (in modo da poter essere osservata), la quale si muova senza cambiare forma.

(ma questo si deve verificare a posteriori) trascurare le elasticità. Tale modello non sarebbe affatto opportuno qualora il campo di ricerca fosse quello della resistenza dei materiali, dove gli oggetti considerati sono posti sotto carico e subiscono delle variazioni (di norma piccole) della loro forma: in questo caso il modello del *corpo rigido* non solo sarebbe fuori luogo, ma risulterebbe un ostacolo insormontabile nel considerare le deformazioni che subiscono tali corpi. La biella di un motore endotermico, figura 1.1, sarà considerata come un *corpo rigido* nello studio della cinematica dei manovellismi, ma nessuno negherà che tale biella si deformerà sotto gli effetti del carico laterale dovuto alle sue accelerazioni, come si studia di fatto nella disciplina che ha nome *Costruzione di Macchine*<sup>2</sup>.

## 1.2 SPOSTAMENTI E VELOCITÀ

*Posizione* e *velocità* appaiono a chiunque come concetti ampiamente intuitivi. Del resto siamo abituati a conoscere la velocità dei nostri spostamenti in automobile semplicemente leggendo il *tachimetro* del cruscotto. Per quel che riguarda poi la nostra posizione, avvertiamo la sensazione che tutto ciò che ci circonda funga da *sistema di riferimento* naturale. Sappiamo, in

---

<sup>2</sup>Questa nota vorrebbe invitare lo studente a una riflessione circa la natura, l'utilità e i limiti dei modelli che si impiegano ai fini di studiare e di prevedere il comportamento, anche oltre l'immediato presente, degli oggetti e dei fenomeni che popolano il mondo circostante. La *Teoria dei Modelli* è una scienza a sé stante, dunque questa digressione non ha alcuna pretesa di completezza né di profondità.

Modellare il comportamento di un sistema reale significa tentare un parallelo tra la realtà, complessa e ricchissima di dettagli, e altre strutture (i modelli appunto), talvolta matematiche, altre volte informatiche, oppure anche esse fisiche che, essendo intrinsecamente più sintetiche e meno doviziose di particolari, probabilmente inessenziali, risultano più comode da indagare e spesso feconde di risultati. Tali risultati potranno essere considerati validi per il sistema reale soltanto se confrontabili positivamente con l'esperienza, nel perimetro di tutti gli aspetti che nel modello sono stati considerati. Ad esempio, sembrerebbe strano poter ricavare da un *modello urbanistico fisico*, cioè da quelle tavole di legno compensato su cui gli architetti costruiscono le loro città in scala ridotta, ricavare, dicevo, informazioni riguardanti la risposta sismica dei fabbricati; sarebbe impossibile persino scuotendo energicamente la tavola.

I modelli matematici e numerici sono ancora più austeri: fecondi di risultati, semplici e sicuri, ma intrinsecamente refrattari a essere infarciti di particolari. Trascurare il colore di un oggetto reale che si modella con il *metodo degli elementi finiti* è un comportamento che tutti i tecnici approvano, e con ragione. Ma la legittimità di questo comportamento, cioè di trascurare "arbitrariamente" nei modelli alcune caratteristiche della realtà, necessita comunque del conforto sperimentale o con modelli di altra natura.

I modelli insomma spogliano la realtà di molti dettagli e caratteristiche ritenuti inutili ai fini di prevedere "ciò che accadrà": l'impatto urbanistico di un nuovo quartiere o la frequenza delle oscillazioni del pendolo di una certa lunghezza. Quanto più la realtà "alleggerita" che si ottiene da un modello è semplice, priva di informazioni inessenziali, tanto più sarà facile interpretarne i risultati, sempre da verificare, limitatamente all'ambito per il quale il modello è stato pensato.

generale, renderci conto senza sforzo della nostra posizione: ci troviamo a Milano, nella Piazza del Duomo, giusto all'ingresso... Posizione e velocità sono peraltro a disposizione di tutti gli utenti di dispositivi dotati di GPS (*Global Positioning System*).

Qualche difficoltà emerge qualora, ad esempio, si volesse conoscere la velocità del piede di un calciatore nell'istante in cui calcia il pallone. Tale difficoltà nasce dall'intuizione che la velocità del piede del calciatore difficilmente coinciderà con la velocità del calciatore stesso, cioè con quella che potrebbe essere dedotta da un orologio con GPS indossato dall'atleta. Allo stesso modo nessuno troverebbe corretto identificare la velocità delle dita di un pianista durante un concerto con la velocità del pianista stesso, il quale, di solito, sta seduto su di uno sgabello. Eccoci venuti al punto: i corpi, gli oggetti, sono i protagonisti del movimento ma i concetti di *spostamento* e di *velocità* si mostrano estremamente adatti a essere applicati a punti precisi di tali oggetti in movimento. Locuzioni come “in questo istante il modulo della velocità della punta dell'indice del pianista è di  $0.5m/s$ ” assumono immediatamente carattere di indicazione molto accurata, ammesso che la punta dell'indice sia un riferimento tanto preciso da renderci soddisfatti. È subito chiaro che, seguendo la strada sulla quale ci siamo incamminati, non ci accontenteremo di punta delle dita o di altri riferimenti approssimativi, perciò diremo che *spostamenti* e *velocità* appartengono esclusivamente ai punti dei corpi mobili, e sono pertinenti (ma questo si sapeva già) soltanto agli istanti di tempo ai quali vengono riferiti. Nel dire tutto questo, il linguaggio della matematica e della geometria ci può venire in grande aiuto. La figura 1.2 mostra un *corpo rigido C* che ha subito uno spostamento rigido e *piano*. Quest'ultimo aggettivo aggiunge un'informazione importantissima e restrittiva: tutti i *vettori spostamento* degli infiniti punti di tale corpo saranno contenuti in piani fra loro paralleli. Per esempio, limitando la presente introduzione ai soli *moti piani*, il concetto di *velocità angolare*, che introdurremo a breve, sarà più semplice rispetto al caso generale di moto rigido tridimensionale, di conseguenza lo sarà l'intera trattazione dei moti piani. Questa scelta limita non poco la portata del presente lavoro e non sarebbe giustificata dalla sola semplificazione dei concetti cinematici che ne consegue, se la maggior parte dei moti che si verificano nelle macchine non fosse di questa specie, cioè *moti piani*. Si possono comunque rilevare molte eccezioni: le viti di azionamento e di manovra, le ruote sterzanti (e non) dei veicoli, ecc. Ma i casi più importanti di moti non piani, attinenti la meccanica delle macchine, si verificano nell'ambito dei *robot*. Vi è però da dire che la cinematica tradizionale che considera i moti tridimensionali, riportata comunque a grandi linee e in ristrettissimo compendio nel capitolo 10, si mostra piuttosto inefficiente per lo studio della *Meccanica dei Robot*. Infatti, in quest'ambito è d'uopo una trattazione algebrica *ad hoc*, basata su specifiche matrici  $4 \times 4$ , [8], e questo ci fa sentire meno in colpa.

Nella figura 1.2 è rappresentato lo spostamento *piano* del corpo rigido **C**. Assumiamo che lo spostamento  $\Delta s$ , dalla posizione 1) alla posizione 2), avvenga nell'intervallo di tempo  $\Delta t$ . Il vettore  $\Delta s$ , che congiunge i punti  $P_{(1)}$  e  $P_{(2)}$ , si chiama *spostamento* del punto  $P$  nel tempo  $\Delta t$ . Nello stesso intervallo temporale  $\Delta t$  il corpo avrà anche mutato orientamento. Chiamiamo *rotazione*  $\Delta\theta$  l'angolo compreso tra una qualsiasi direzione distinguibile sul corpo **C** nella posizione 1) (come può essere uno spigolo o un segmento tracciato sul corpo) e lo stesso riferimento, quando il corpo si trova nella posizione 2). I rapporti

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \mathbf{v} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega, \quad (1.2)$$

si chiamano rispettivamente *velocità* del punto  $P$  e *velocità angolare* del corpo **C**. Il lettore con qualche reminiscenza di cinematica potrebbe chiedersi come mai non sia stato introdotto alcun *sistema di riferimento*. È un fatto che nella maggior parte dei libri moderni di cinematica si usi spesso riferire gli spostamenti a “ragionevoli sistemi di riferimento”, il più delle volte rappresentati da piccoli *assi cartesiani* disegnati nelle figure nell’angolo in basso a sinistra, come anche a noi accadrà di fare più avanti. Riteniamo qui superflua la presenza di assi coordinati e, come abbiamo mostrato, siamo in grado di identificare spostamenti, rotazioni e velocità senza basarci su di essi. Ricordiamo però che un sistema di riferimento, almeno implicito, deve esistere: per noi può essere la pagina stessa del libro. A un osservatore (privo di massa) seduto sul corpo **C**, isolato da tutto il resto dell'universo, sarebbe infatti impossibile rendersi conto di qualsiasi movimento del corpo stesso.

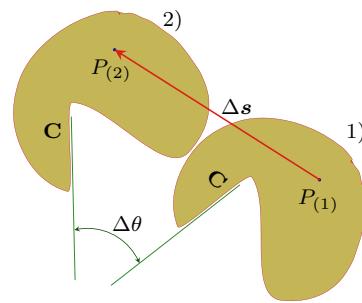


Figura 1.2: *Spostamento piano di un corpo rigido nel tempo  $\Delta t$ .*

### 1.3 TEOREMA DI CHASLES

La seguente osservazione è di importanza fondamentale: lo spostamento di un corpo **C** è inequivocabilmente individuato dallo spostamento di un qualsiasi suo punto  $P$  unitamente alla rotazione dello stesso corpo **C**. Per convincerci di ciò consideriamo la figura 1.3 a) dove il corpo rigido **C** è stato sostituito, per comodità di esposizione, dal triangolo  $\triangle ABC$ . Il suo spostamento dalla posizione 1) alla posizione 2), che muove il triangolo  $\triangle ABC$  in  $\triangle A'B'C'$ , può essere ottenuto mediante la “somma” di due successivi spostamenti elementari.

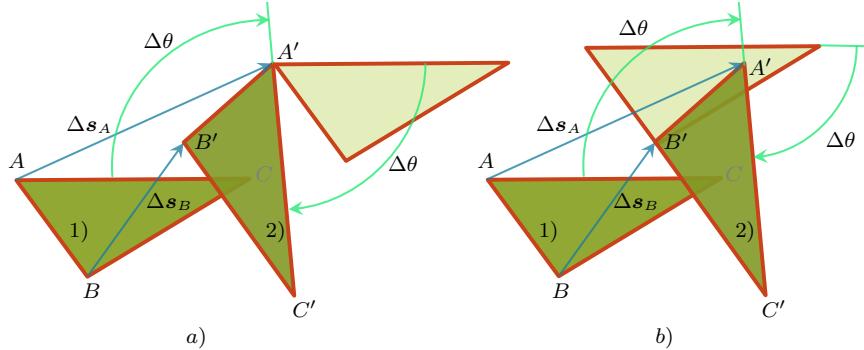


Figura 1.3: I due casi riportano la riduzione del medesimo spostamento, subito da un corpo rigido, alla combinazione di due diverse traslazioni con la stessa rotazione attorno a due diversi poli.

Supponiamo dapprima di spostare il vertice  $A$  in  $A'$  mediante una *traslazione* del triangolo  $\triangle ABC$ , cioè mediante uno spostamento che mantenga inalterato l'orientamento primitivo dei tre lati. Successivamente ruotiamo il triangolo attorno al punto  $A'$  di un angolo pari a  $\Delta\theta$ , portandolo a coincidere col triangolo  $\triangle A'B'C'$ . Risulta subito chiaro che la scelta del punto  $A$  come base per la traslazione del triangolo è arbitraria e che in sua vece si sarebbe potuto scegliere  $B$ ,  $C$ , o qualsiasi altro punto, dentro o fuori dal perimetro del triangolo, purché legato a muoversi rigidamente col triangolo stesso. In figura 1.3 b) viene rappresentato lo stesso spostamento subito dal triangolo  $\triangle ABC$  assumendo come base per la traslazione il punto  $B$ . Naturalmente, attribuendo la traslazione a punti diversi si avranno per essi spostamenti  $\Delta s$  diversi, come si evince peraltro dalla figura. Quando la rotazione  $\Delta\theta$  non è nulla è possibile individuare un punto, che potrebbe non essere incluso nel perimetro del triangolo bensì appartenere a un *piano mobile* idealmente incollato su di esso, per il quale lo spostamento  $\Delta s$  è nullo. Tale punto, che indichiamo con  $O$ , si individua tracciando dalla mezzeria dei segmenti orientati che rappresentano gli spostamenti  $\Delta s_A$  e  $\Delta s_B$  le loro perpendicolari, come in figura 1.4: il loro punto di incontro è il *centro dello spostamento rigido piano*. È facile

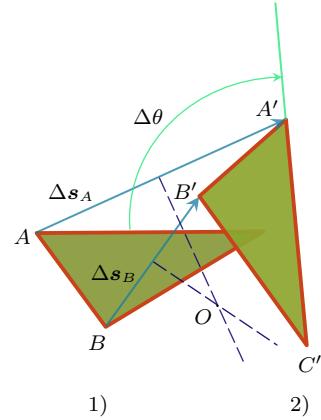


Figura 1.4: Riduzione generica di uno spostamento piano a una rotazione.

dimostrare (e pertanto lasciato al lettore come esercizio<sup>3</sup>) che

$$\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \widehat{COC'} = \Delta\theta. \quad (1.3)$$

Così, una rotazione rigida di un angolo  $\Delta\theta$  attorno al punto  $O$  porterà il triangolo dalla posizione 1) alla posizione 2). Dalla precedente affermazione si può dedurre la seguente restrizione al caso di spostamenti rigidi piani del *teorema di Chasles*: *ogni spostamento rigido piano si può ridurre in modo univoco o a una traslazione o a una rotazione*<sup>4</sup>.

Quanto sin qui riferito circa gli spostamenti piani di un corpo rigido risulta essere indipendente dalla entità degli spostamenti stessi. Perciò le medesime conclusioni resteranno valide anche qualora avessimo a che fare con spostamenti infinitesimali anziché finiti<sup>5</sup>. Riferendoci alla figura 1.5, possiamo quindi affermare che lo spostamento infinitesimale di un punto  $Q$  del triangolo mobile,  $ds_Q$ , si possa ottenere sommando lo spostamento infinitesimale del punto  $P$ ,  $ds_P$ , all'effetto che la rotazione  $d\theta$ , anch'essa infinitesimale, esercita sul segmento  $Q - P$ . E qual è questo effetto? Cioè: la rotazione  $d\theta$  applicata al *segmento orientato*  $Q - P$  quale spostamento produce? Conviene qui fare ricorso a un “arnese della matematica”, forse un po’ arcigno, ma che risulta troppo comodo per essere lasciato in disparte: il *prodotto vettoriale*. Consideriamo quindi la rotazione infinitesimale  $d\theta$ <sup>6</sup> come

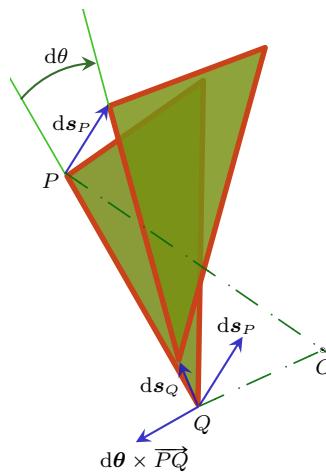


Figura 1.5: *Composizione di spostamenti infinitesimali.*

<sup>3</sup>Si noti che i due triangoli  $\triangle ABO$  e  $\triangle A'B'O$  sono uguali.

<sup>4</sup>Ricordiamo questo teorema come riportato in [1]: “Ogni spostamento rigido, non traslatorio, si riduce in infiniti modi a uno spostamento roto-traslatorio, sempre però con la stessa componente di rotazione. Si riduce poi in modo univoco a uno spostamento elicoidale”. Torneremo brevemente nel capitolo 10 agli spostamenti tridimensionali, col tentativo di giustificare, anche in questi casi, l'esistenza di una direzione principale che è l'asse dell'elica.

<sup>5</sup>Non è vero il contrario: si incorre spesso in errore trasportando i risultati dedotti considerando spostamenti infinitesimali nel campo degli spostamenti finiti.

<sup>6</sup>Il vettore  $d\theta$  non è, nei casi di moto tridimensionale, il differenziale di alcun angolo finito di rotazione, come invece lo è nel piano. Rimandiamo il lettore agli approfondimenti del capitolo 10 per ulteriori chiarimenti.

un vettore ortogonale al piano dove avviene lo spostamento, senza precisarne la *giacitura*<sup>7</sup>, col verso dato dalla cosiddetta *regola della mano destra* secondo cui il pollice indica il verso del vettore quando le dita concordano con il senso della rotazione. Se al segmento orientato  $Q - P$  diamo valore di vettore con verso da  $P$  a  $Q$  si ricava lo spostamento infinitesimale del punto  $Q$  come

$$ds_Q = ds_P + d\theta \times \overrightarrow{PQ}. \quad (1.4)$$

Dividendo tutti i termini della 1.4 per  $dt$  otteniamo la seguente equazione

$$\frac{ds_Q}{dt} = \frac{ds_P}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \times \overrightarrow{PQ}, \quad (1.5)$$

che, con ovvio significato dei simboli, diventa

$$v_Q = v_P + \omega \times \overrightarrow{PQ}. \quad (1.6)$$

La conoscenza della velocità di un punto e della velocità angolare del corpo, oppure della velocità angolare e del centro  $O$ , ci permettono di individuare le velocità di tutti i punti del corpo che ne costituiscono il suo *atto di moto*. Il centro  $O$ , nel caso di spostamenti infinitesimali, si chiama *centro istantaneo di rotazione* o *centro d'istantanea rotazione*<sup>8</sup>, ed è in generale mobile.

Abbiamo usato la rotazione infinitesimale  $d\theta$  e di conseguenza la velocità angolare  $\omega$  come vettori ortogonali al piano del moto per i quali il loro *prodotto vettoriale* con un segmento orientato del piano del moto fornisce uno spostamento infinitesimale oppure una velocità.

Vogliamo aggiungere che la rappresentazione vettoriale delle velocità angolari non si limita al caso di moti piani, anzi, essa ha origine proprio nella

---

<sup>7</sup>Autori importanti, [4] e [1] per esempio, specialmente quando parlano di questo vettore col senso di velocità angolare (come faremo anche noi tra poco) gli attribuiscono una precisa giacitura, coincidente con l'*asse istantaneo di rotazione*. Ritenendo questa posizione sterile se non fuorviante, benché non scorretta, preferiamo lasciare tale vettore libero di giacere dove vuole.

<sup>8</sup>Se tenessimo traccia delle posizioni via via occupate dal centro d'istantanea rotazione col procedere del movimento, otterremmo due diverse curve a seconda che tale traccia sia lasciata sul piano fisso (il foglio del disegno per intenderci), oppure sul piano mobile (un piano idealmente incollato col nostro corpo rigido). Questi due *luoghi geometrici* si chiamano rispettivamente *polare fissa* e *polare mobile*. Esse godono di proprietà interessantissime, soprattutto dal punto di vista della nostra materia, e risultano indispensabili in alcune analisi cinematiche, come accade nello studio dei profili dei denti delle ruote dentate. Riteniamo opportuno rimandare il breve studio che faremo delle polari del moto proprio al capitolo 6, dove esporremo i principi di progettazione delle ruote dentate. Segnaliamo agli interessati, che volessero approfondire l'argomento, [1], pagg. 168–176 e [9], pagg. 31–33.

cinematica dei moti tridimensionali<sup>9</sup>, come esposto in breve nella conclusione del capitolo 10.

---

<sup>9</sup>Nel caso di moto piano, il prodotto vettoriale che coinvolge le rotazioni avviene sempre tra vettori ortogonali tra loro, mentre nel caso generale questo non si verifica. Le rotazioni infinitesime e le velocità angolari sono però vettori particolari. Il loro verso dipende dalla scelta che si fa “destrorsa” o “sinistrorsa” nella convenzione del prodotto vettoriale e mal sopportano deformazioni dello spazio che alterino la sua metrica. In più, la possibilità di rappresentare una velocità angolare con un vettore è limitata allo spazio tridimensionale.

## CAPITOLO 2

### Accelerazioni

#### 2.1 DERIVAZIONE DELLA VELOCITÀ

L'accelerazione del punto  $Q$  di figura 1.5 si può ottenere derivando la sua velocità rispetto al tempo. Derivando perciò la 1.6 otteniamo

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\overrightarrow{PQ}}. \quad (2.1)$$

Concentriamoci sull'ultimo termine a destra della 2.1: si tratta di eseguire il prodotto vettoriale tra  $\boldsymbol{\omega}$  e il vettore "derivata rispetto al tempo di  $\overrightarrow{PQ}$ ". Mediante l'ausilio della figura 2.1, la quale vorrebbe essere un tentativo (forse maldestro) di mostrare il vettore rotazione infinitesimale  $d\theta$  ortogonale al piano dove avvengono gli spostamenti, affermiamo che la derivata di un vettore  $\mathbf{u}$  di modulo costante, come lo è anche  $\overrightarrow{PQ}$ , risulta dalla sola variazione della sua posizione angolare:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta \times \mathbf{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \mathbf{u}. \quad (2.2)$$

Pertanto la 2.1 diventa

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PQ}), \quad (2.3)$$

relazione di grande importanza nella cinematica piana<sup>1</sup>.

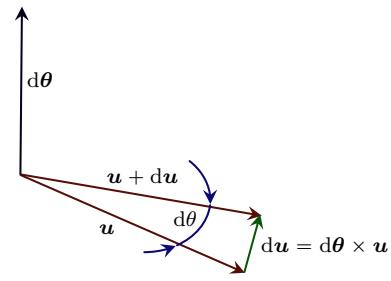


Figura 2.1: *Rotazione di un vettore costante.*

---

<sup>1</sup>Troveremo di nuovo la 2.3 e la precedente espressione delle velocità 1.6 nel paragrafo che tratta i *moti relativi*. Di fatto queste espressioni di velocità e accelerazione del punto  $Q$  che si ottengono una volta note la velocità e l'accelerazione di un punto del sistema mobile, unitamente alla velocità e all'accelerazione angolari, permettono il passaggio dalle

Il termine  $\mathbf{a}_P$  non è altro che l'accelerazione del punto  $P$ . Il secondo termine,

$$\mathbf{a}_{t_{Q(P)}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ}, \quad (2.4)$$

si chiama *accelerazione tangenziale* del moto di  $Q$  attorno a  $P$ ; il terzo termine,

$$\mathbf{a}_{n_{Q(P)}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{PQ}), \quad (2.5)$$

rappresenta l'*accelerazione normale* (a quella tangenziale) del moto di  $Q$  attorno a  $P$ . La figura 2.2 dovrebbe chiarire i nomi di questi ultimi due termini. Tramite la *scomposizione del doppio prodotto vettoriale*<sup>2</sup> della 2.5 possiamo riscrivere il valore della componente normale dell'accelerazione nel modo seguente, valida nel caso di moti piani

$$\mathbf{a}_{n_{Q(P)}} = -\omega^2 \overrightarrow{PQ}. \quad (2.7)$$

La 2.3 può quindi essere così riscritta<sup>3</sup>

$$\mathbf{a}_Q = \mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} - \omega^2 \overrightarrow{PQ}. \quad (2.9)$$

Qualora poi il punto  $P$  appartenesse all'asse fisso di rotazione del corpo rigido, asse presente in ruote dentate, manovelle, dischi, volani, ecc., la 2.9 diventa

---

grandezze cinematiche “relative” a quelle “assolute”. Preferiamo però non mescolare i due problemi, anche se la differenza riguarda la forma e non la sostanza. Per inciso, le due espressioni citate sopra costituiscono il *teorema di Rivals*, [9], pag. 12.

<sup>2</sup> Siano  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ , e  $\mathbf{w}$  tre vettori in  $\mathbb{R}^3$ , vale la relazione

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v}(\mathbf{u}\mathbf{w}) - \mathbf{w}(\mathbf{u}\mathbf{v}). \quad (2.6)$$

<sup>3</sup>Ci possiamo porre la domanda seguente: esiste un punto del piano mobile con accelerazione nulla? Uguagliando a zero l'accelerazione di un generico punto  $K$ , dalla 2.9 otteniamo l'equazione

$$\mathbf{a}_K = 0 = \mathbf{a}_P + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PK} - \omega^2 \overrightarrow{PK}, \quad (2.8)$$

che può essere risolta rispetto al vettore  $\overrightarrow{PK}$ . Il punto  $K$  così individuato si chiama *centro delle accelerazioni*.

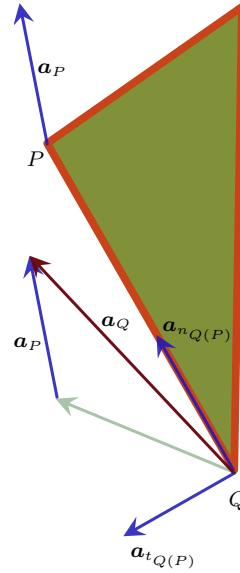


Figura 2.2: Le componenti dell'accelerazione del punto  $Q$ .

$$\mathbf{a}_Q = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{PQ} - \omega^2 \overrightarrow{PQ}, \quad (2.10)$$

e i suoi due termini a destra dell'uguale si chiamano rispettivamente *accelerazione tangenziale* e *accelerazione centripeta* del punto  $Q$ <sup>4</sup>.

## 2.2 PUNTO DI VISTA DELLA TRAIETTORIA

Un altro approccio al calcolo dell'accelerazione del punto  $Q$  si basa sulla valutazione diretta della derivata di  $\mathbf{v}_Q$ . Dopo un tempo infinitesimale  $dt$  il punto  $Q$  si sarà portato in  $Q'$ , come mostrato nella figura 2.3. Anche le velocità  $\mathbf{v}_Q$  e  $\mathbf{v}_{Q'}$  saranno in generale diverse e possiamo quindi evidenziare la loro differenza infinitesimale. Con l'aiuto delle figure 2.1 e 2.3 abbiamo

$$d\mathbf{v}_{Q_t} = \frac{\mathbf{v}_Q}{|\mathbf{v}_Q|} |\dot{\mathbf{v}}_Q| dt, \quad (2.11)$$

$$d\mathbf{v}_{Q_n} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{v}_Q. \quad (2.12)$$

Il vettore  $d\boldsymbol{\theta}$  che, come abbiamo precedentemente chiarito, è ortogonale al piano del disegno, non viene rappresentato

in figura se non tramite il proprio simbolo. A questo punto conviene però introdurre un sistema di tre versori ortogonali tra loro  $\hat{\mathbf{t}}$ ,  $\hat{\mathbf{n}}$  e  $\hat{\mathbf{b}}$ . Poniamo il *versore tangente*

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v}_Q}{|\mathbf{v}_Q|}, \quad (2.13)$$

e imponiamo al *versore normale*  $\hat{\mathbf{n}}$  di essere appunto normale a  $\hat{\mathbf{t}}$  e al vettore  $d\boldsymbol{\theta}$ , inoltre, di essere diretto come  $\overrightarrow{QO}$ ; infine imponiamo a  $\hat{\mathbf{b}}$ , chiamato

---

<sup>4</sup>Nel caso in cui il punto  $P$  fosse centro d'istantanea rotazione (e non di una rotazione finita), la 2.10 e i nomi di accelerazione tangenziale e centripeta del punto  $Q$  rimarrebbero validi, in quel momento, indipendentemente dall'esistenza o meno di un asse fisso di rotazione.

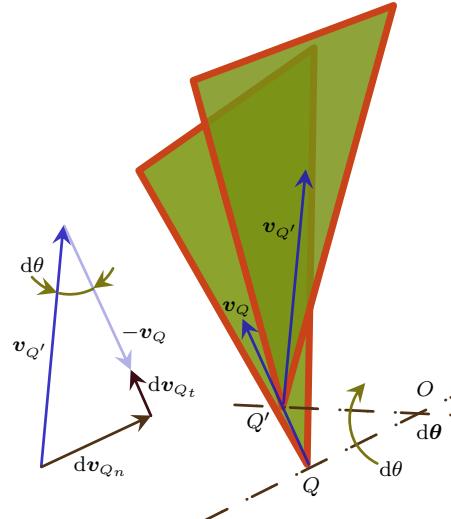


Figura 2.3: *Accelerazioni di un corpo rigido: punto di vista intrinseco.*

*versore binormale*, di avere la medesima direzione e il medesimo verso di  $d\theta$ . Le relazioni 2.11 e 2.12 si possono ora scrivere, aiutandoci con i versori della *terna intrinseca* testé introdotta, nel seguente modo:

$$dv_{Q_t} = \hat{t}|\dot{v}_Q|dt, \quad (2.14)$$

$$dv_{Q_n} = d\theta(\hat{b} \times v_Q). \quad (2.15)$$

L'angolo  $d\theta$  si può ottenere dal rapporto tra arco  $|(Q' - Q)| = |v_Q|dt$  e il *raggio di curvatura della traiettoria*, individuato da  $\rho = |(O - Q)|$  o alternativamente da  $\rho = |(O - Q')|$ , cioè

$$d\theta = \frac{|v_Q|dt}{\rho}. \quad (2.16)$$

Dividendo tutte le espressioni per  $dt$  e sostituendo  $d\theta$  con l'espressione fornita dalla 2.16, le 2.14 e 2.15 diventano

$$a_{Q_t} = \hat{t}|\dot{v}_Q|, \quad (2.17)$$

$$a_{Q_n} = \frac{|v_Q|}{\rho}(\hat{b} \times v_Q). \quad (2.18)$$

Ma il versore  $\hat{b}$ , che è concorde a  $d\theta$  sia come direzione sia come verso, risulta ortogonale a  $v_Q$  e al versore  $\hat{n}$ , pertanto

$$(\hat{b} \times v_Q) = \hat{n}|v_Q|, \quad (2.19)$$

e la 2.18 si può scrivere nel modo seguente

$$a_{Q_n} = \hat{n}\frac{|v_Q|^2}{\rho}. \quad (2.20)$$

Riassumendo, abbiamo per la accelerazione del punto  $Q$

$$a_Q = \hat{t}|\dot{v}_Q| + \hat{n}\frac{|v_Q|^2}{\rho}. \quad (2.21)$$

Ci si può chiedere quale sia la differenza tra l'espressione 2.9, ottenuta poc'anzi, e la formula alternativa 2.21. Si nota immediatamente che le informazioni necessarie all'individuazione dell'accelerazione del punto  $Q$ , mediante i due approcci, sono diverse. Da una parte l'espressione 2.9 richiede di sapere l'accelerazione del punto  $P$ , unitamente alla velocità e all'accelerazione angolari del corpo rigido, nonché la posizione di  $Q$  rispetto a  $P$ . Dall'altra dobbiamo sapere cosa succede alla velocità del punto  $Q$  in due posizioni temporali infinitamente vicine, il che equivale a conoscere anche la geometria della *traiettoria* del punto  $Q$ . L'espressione 2.20 risulta molto

comoda qualora si conoscano la velocità e la *curvatura della traiettoria* percorsa da  $Q$ . Immaginiamo di percorrere con un'automobile una curva e di trovarci in un punto dove il suo raggio, in generale variabile, sia noto<sup>5</sup> e di conoscere la nostra velocità (il suo modulo) mediante la lettura del tachimetro: ecco che tramite la 2.20 risulta immediato calcolare la nostra accelerazione centripeta. Inoltre, la 2.21 è equivalente alla 2.10 (il lettore può verificarlo tramite le relazioni che intercorrono tra le varie quantità) quando il moto ha un asse fisso. Vale la pena aggiungere che la 2.21 è stata ricavata senza fare uso della planarità del moto, quindi la sua validità si estende anche ai moti tridimensionali.

---

<sup>5</sup>Non è facile avere a disposizione una tale informazione, anche se forse si potrebbe ottenere dalle mappe, oggigiorno disponibili su vari dispositivi.



## CAPITOLO 3

### I Moti Relativi

#### 3.1 INTRODUZIONE

Agli spostamenti, alle velocità, con le quali abbiamo or ora fatto conoscenza, e, con prudenza, alle accelerazioni calza spesso a pennello l'epiteto “relativo”. Stando seduti sul sedile di un treno che si muove per partire dalla stazione in molti hanno sperimentato la percezione che un altro treno, vicino di binario al nostro, si stesse muovendo verso il fondo delle rotaie, in procinto di scendere i gradini verso Piazza Duca d'Aosta<sup>1</sup>. Un tale dubbio non potrebbe mai sorgere nella mente di un passeggero di quel treno che invece ci osserva tranquillamente partire. Come pure, rimanendo in ambito ferroviario, il passeggero che cammina placido verso la testa del treno possiede, rispetto ad un passeggero a terra, che aspetta sul marciapiede, la propria velocità sommata a quella del treno.

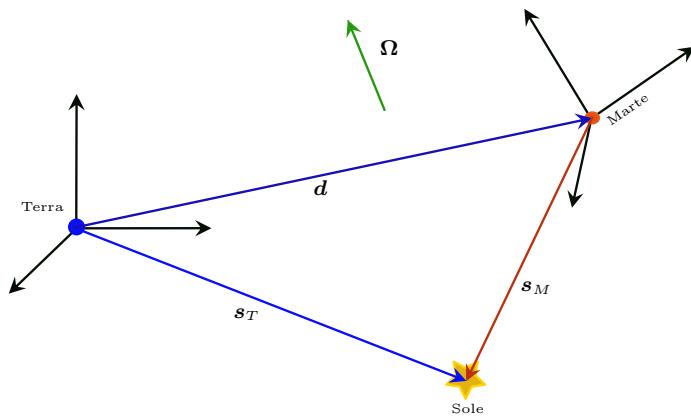


Figura 3.1: *Osservazione del Sole da due pianeti diversi.*

---

<sup>1</sup>Per chi parte dalla Stazione Centrale di Milano.

Insomma, gli spostamenti di un oggetto, come anche le sue velocità e le sue accelerazioni, appaiono diversi ad osservatori tra loro in movimento. Anzi tutte le grandezze cinematiche sono legate (relative) all'osservatore che le misura. La domanda che ci si può porre, la quale costituisce il *problema dei moti relativi*, è la seguente: risulta possibile a due diversi osservatori scambiare i dati provenienti dalle loro indagini cinematiche e confrontare le rispettive osservazioni eseguite sopra oggetti comuni? La risposta è sì, stando a certi patti e a certe condizioni.

### 3.2 POSIZIONE DEL PROBLEMA

Premettendo che una trattazione del *teorema di Coriolis*, rigorosa e completa, si trova magistralmente esposta nel già citato [1], pag. 219, riportiamo qui un esempio che riteniamo un inquadramento piuttosto generale del *problema dei moti relativi*. Un terrestre e un marziano, di professione astronomi, sono appassionati di osservazioni solari: entrambi misurano con facilità posizione, velocità e accelerazione della nostra stella. Nessuna delle quantità misurate dal terrestre è in accordo con la corrispondente del marziano<sup>2</sup>. Il terrestre, forse per protagonismo, decide di misurare alcune quantità cinematiche di Marte, *in primis* la sua posizione  $\mathbf{d}$  e le corrispondenti derivate ma, incuriosito dalla rotazione del suo corrispondente (dispongono di cannocchiali potentissimi), decide di misurare anche  $\boldsymbol{\Omega}$ , la velocità angolare di Marte rispetto alla Terra. Mediante lo schema fornito dalla figura 3.1, impostano la seguente relazione

$$\dot{\mathbf{s}}_T = \dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{s}}_M, \quad (3.1)$$

che infonde ai due astronomi (sono ovviamente in contatto tra loro) un pizzico di ottimismo circa la loro relazione, perché la trovano soddisfatta. Il terrestre ha a disposizione anche la velocità del punto di Marte dove lavora il suo amico extraterrestre,  $\dot{\mathbf{d}}$ , e il marziano gli fornisce gentilmente la sua misura della velocità del Sole,  $\dot{\mathbf{s}}_M$ . Ma scrivendo la seguente

$$\cancel{\dot{\mathbf{s}}_T} = \cancel{\dot{\mathbf{d}}} + \dot{\mathbf{s}}_M, \quad (3.2)$$

in apparente accordo con la 3.1, e sostituendo dati in loro possesso, incontrano una cocente delusione. Con lo scopo di rendere più chiare le interazioni

<sup>2</sup>Un caro amico, leggendo le bozze di questo lavoro, mi ha fatto notare come, pur lasciando da parte il sapore vagamente tolemaico delle misure di velocità e accelerazione del Sole da parte dei due astronomi, non sia comunque possibile il confronto tra osservazioni eseguite da due distinti punti dell'universo separati da immense distanze, in quanto la luce del Sole impiega tempi rilevanti e diversi per giungere sulla Terra e su Marte. Rispondiamo a questa giusta critica affermando che, fuori dalla sfera dei meccanismi, dove gli esempi di moti relativi abbondano, purtroppo non ci vengono in mente altre situazioni da proporre, sia pure di fantasia. Per questo ci teniamo gli astronomi tolemaici, supponendo in tutto questo che la velocità della luce sia infinita.

future tra i due osservatori conviene attribuire loro epiteti che ricordino le loro “prerogative”. A ben considerare, essi sono completamente intercambiabili: Marte e Terra sono due pianeti a pieno titolo e nessuno dei due osservatori possiede caratteristiche tali da implicare alcuna sorta di privilegio. Chiameremo tuttavia *osservatore assoluto* colui che misura, oltre alle grandezze cinematiche del Sole, anche le grandezze cinematiche dell’altro osservatore, che sono il vettore  $\mathbf{d}$ , il vettore  $\boldsymbol{\Omega}$  e le loro derivate; per noi costui è, ad arbitrio, l’osservatore terrestre. Chiameremo invece il marziano *osservatore relativo*. Risulta chiaro da quanto ora esposto che i due ruoli sono invertibili: basterebbe all’osservatore marziano essere in possesso di posizione, velocità e accelerazione, grandezze angolari comprese, della Terra per potere diventare l’osservatore assoluto. Il terrestre pensa e ripensa alla 3.2 e, cercando di capire dove si nasconde l’errore, per stinarlo conduce il seguente esperimento mentale: immagina una mosca aliena ferma sulla lente del cannocchiale marziano e, con lo scopo di conoscerne la velocità, prova ad applicare a essa l’errata formula 3.2. La *velocità relativa*, cioè la velocità della mosca misurata dal marziano, quella che nella 3.2 è indicata con  $\dot{\mathbf{s}}_M$ , è in questo caso sicuramente nulla. Per tale ragione, l’osservatore assoluto (il terrestre) si dovrebbe accontentare di ottenere per la velocità della mosca, come per le velocità di tutti gli oggetti fermi su Marte, un valore uguale a  $\mathbf{d}$ . Ebbene questo sarebbe possibile solo se tali oggetti (i punti considerati di tali oggetti) si trovassero giusto nel centro della terna del sistema di riferimento marziano, oppure se tutto il pianeta, e di conseguenza il sistema di riferimento a esso collegato, traslassasse. Addebitando alla rotazione del sistema relativo la causa delle differenti velocità assolute degli oggetti fermi su Marte cominciano a intravedere uno spiraglio di luce verso la soluzione dell’enigma. La formula 3.2 non funziona perché il sistema di riferimento relativo ruota rispetto al sistema di riferimento assoluto con velocità angolare  $\boldsymbol{\Omega}$ . Per stimare l’errore che l’osservatore relativo commette nell’effettuare “le proprie derivate” l’osservatore assoluto chiede al marziano di comunicargli la derivata di un vettore  $\mathbf{a}$  di modulo costante e fisso con il sistema assoluto. Il marziano vede tale vettore ruotare con velocità angolare  $-\boldsymbol{\Omega}$  e ne determina una variazione temporale (derivata rispetto al tempo) pari a  $\dot{\mathbf{a}} = -\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a}$ . Il calcolo di questo termine è già stato svolto in precedenza, nel capitolo in cui si descrivono gli spostamenti infinitesimali, e in quel contesto è limitato al caso piano, equazioni 1.4, 1.5, 1.6. A questo punto l’osservatore assoluto conosce il termine correttivo da introdurre nella 3.2 e la riscrive correttamente<sup>3</sup>

$$\dot{\mathbf{s}}_T = \dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{s}}_M + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}_M . \quad (3.3)$$

---

<sup>3</sup>Per coloro i quali volessero approfondire il calcolo delle derivate di un vettore rotante o, ciò che è lo stesso, la relazione tra la rotazione del sistema di riferimento e la variazione (apparente) di un vettore, rimandiamo a [1], pag. 163.

Le velocità dei punti che sono fermi su Marte, come la mosca sulla lente del cannocchiale, assumono il nome speciale di *velocità di trascinamento*

$$\mathbf{v}_{\text{tr}} = \dot{\mathbf{d}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}_M , \quad (3.4)$$

ovviamente variabile da punto a punto del sistema relativo. La rimanente componente si chiama *velocità relativa*

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\mathbf{s}}_M , \quad (3.5)$$

che, sommata alla precedente, permette di ottenere la *velocità assoluta* del Sole

$$\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{tr}} . \quad (3.6)$$

### 3.3 L'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS

Giunti sin qui, sapendo che ogni derivata che provenga dal sistema relativo va depurata aggiungendo il termine opportuno, i due astronomi provano a sostituire i loro dati di accelerazione del Sole nella derivata della 3.3

$$\ddot{\mathbf{s}}_T = \ddot{\mathbf{d}} + \ddot{\mathbf{s}}_M + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{s}}_M + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{s}_M + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{s}}_M + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}_M) ; \quad (3.7)$$

la quale sostituzione riempie di gioia i due astronomi perché la 3.7 viene soddisfatta: essi battezzano questa formula *teorema di Coriolis*. D'altra parte, una volta imparato a correggere le derivate provenienti dall'osservatore relativo, la 3.7 si ottiene meccanicamente e senza impiego di gran ragionamenti derivando la 3.3. Anche in questo caso, come abbiamo fatto per le velocità, conviene dare un nome speciale all'accelerazione dei punti fermi costantemente rispetto al sistema relativo (la mosca di poco fa ferma sulla lente del cannocchiale), e chiameremo *accelerazione di trascinamento* la seguente

$$\mathbf{a}_{\text{tr}} = \ddot{\mathbf{d}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{s}_M + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{s}_M) . \quad (3.8)$$

Nella 3.8 compaiono solamente i termini della 3.3 che non contengono grandezze cinematiche relative, né velocità né accelerazioni (la mosca è ferma e rimane ferma). L'*accelerazione relativa* è naturalmente

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{\mathbf{s}}_M , \quad (3.9)$$

ed è l'unica che l'osservatore relativo è in grado di misurare. Della 3.3 restano due monomi, uguali, contenenti grandezze relative e grandezze assolute mescolate. L'espressione

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{s}}_M = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} \quad (3.10)$$

si chiama *accelerazione di Coriolis*, in onore al matematico francese *Gaspard-Gustave de Coriolis* che l'ha scoperta. A questo punto, possiamo finalmente scrivere l'espressione dell'*accelerazione assoluta* nel modo seguente

$$\mathbf{a}_{\text{ass}} = \mathbf{a}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{tr}} + \mathbf{a}_{\text{cor}} . \quad (3.11)$$

### 3.4 RIEPILOGO

Quando due osservatori, in moto tra loro, indagano sulla cinematica di un terzo oggetto ne traggono quantità distinte. Per potere confrontare tali quantità occorre che uno degli osservatori (assoluto) misuri anche le quantità cinematiche assolute attribuibili al sistema relativo cioè  $\mathbf{d}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  e le loro derivate. Alla velocità di una formica (punto osservato), misurata dall'osservatore relativo, l'osservatore assoluto dovrà aggiungere la componente di trascinamento che è la velocità assoluta del punto del sistema relativo dove la formica appoggia le zampe in quel momento. Con le accelerazioni le cose vanno diversamente: non è sufficiente sommare la componente del trascinamento all'accelerazione relativa per ottenere l'accelerazione assoluta. La velocità relativa provoca nei sistemi rotanti un'altra accelerazione, detta di *Coriolis*, da aggiungere a quella relativa e di trascinamento, della quale daremo nel seguente capitolo qualche ulteriore delucidazione.



## CAPITOLO 4

### Esempi di Moti Relativi

#### 4.1 PRECISAZIONI SULL'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS



Figura 4.1: *La giostra dei cavalli.*

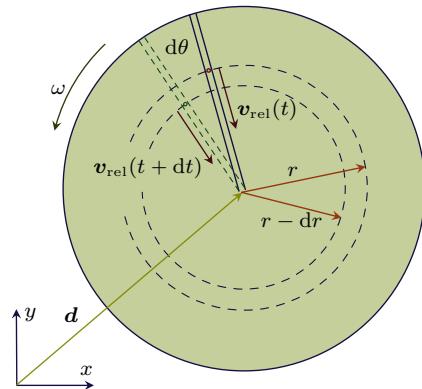


Figura 4.2: *Versione schematica.*

La “giostra dei cavalli” sembra un laboratorio appositamente costruito per fare esercizio coi moti relativi. Essa ci riconduce innanzitutto ai nostri moti piani, dove l'intuito può meglio padroneggiare la situazione. Divertimento per bambini (e non) molto conosciuto, questa giostra si presenta come un grande piatto rotante, normalmente pavimentato in legno, dove un paio di ranghi di sedili, cavalli, carrozze e altro ospitano i turisti portandoli in rotazione. Credo che i modelli più lussuosi muovano i cavalli anche verticalmente, ma questo non importa al nostro scopo, tant’è che ciò di cui misureremo le quantità cinematiche, cioè il nostro punto osservato, sarà una formica intenzionata a esplorare la giostra. L’osservatore assoluto potrebbe essere il bigliettaio ed è rappresentato dal riferimento  $(x, y)$ , coincidente con la sua edicola. È appena il caso di chiarire che il vettore  $\mathbf{d}$  è costante perché il centro della giostra è fermo rispetto alla piazza, per questo motivo  $\mathbf{d}$  non giocherà alcun ruolo nei ragionamenti che seguiranno. Un turista seduto sulla giostra è nei panni dell’osservatore relativo e, indagando il movimento

della formica, riuscirà a misurare la velocità e l'accelerazione relative dell'insetto. La velocità e l'accelerazione del punto del pavimento dove si trova la formica forniscono subito le diverse componenti del trascinamento: tali quantità cinematiche appartengono ai punti del disco rotante. Supponiamo ora che la formica si incammini lungo una fessura radiale della pavimentazione, comune nelle giostre col *parquet*, come mostrato in figura 4.2. Nell'istante di tempo considerato, sia  $\mathbf{v}_{\text{rel}}(t)$  la velocità relativa della formica, cioè la velocità con cui sta percorrendo l'interstizio rettilineo. Si può osservare nella stessa figura che la circonferenza del piatto della giostra dove si troverà la formica dopo un intervallo infinitesimale di tempo  $dt$  avrà un raggio minore. È naturale pertanto pensare che, con riferimento ai due istanti considerati, si avrà una differenza tra le due velocità di trascinamento cui sarà soggetta la formica.

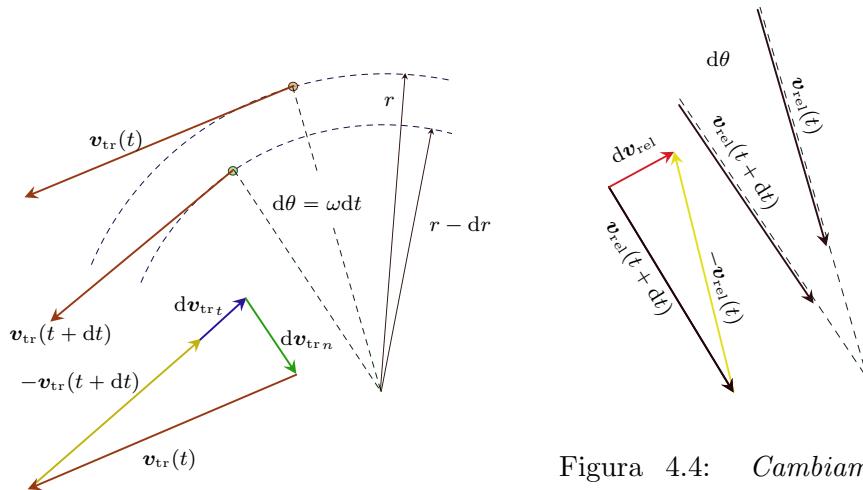


Figura 4.3: Effetto della differenza radiale.

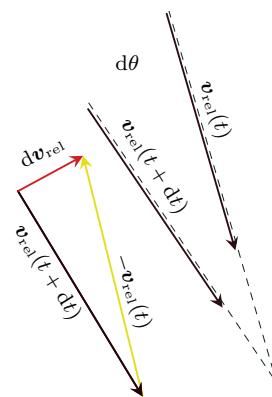
Nella figura 4.3 sono rappresentate le due componenti infinitesimali frutto della differenza tra la velocità di trascinamento al tempo  $t + dt$  e al tempo  $t$ . Non ci occupiamo della componente normale  $d\mathbf{v}_{\text{tr}n}$ , in quanto a noi già nota. Il lettore più diligente può tornare alla figura 2.3 e ricavare anche in questo caso la formula della accelerazione centripeta 2.20. La velocità infinitesimale  $d\mathbf{v}_{\text{tr}t}$  è invece di nostro interesse: tale variazione della velocità tangenziale si esprime come

$$d\mathbf{v}_{\text{tr}t} = \omega[(r - dr) - (r)]\hat{\mathbf{t}}, \quad (4.1)$$

dove  $\hat{\mathbf{t}}$  è il versore tangente, già altre volte incontrato (equazione 2.13). Sapendo poi che che la differenza tra i raggi dopo un intervallo di tempo  $dt$  sarà  $dr = |\mathbf{v}_{\text{rel}}|dt$ , possiamo scrivere

$$d\mathbf{v}_{\text{tr}t} = -\omega(|\mathbf{v}_{\text{rel}}|dt)\hat{\mathbf{t}}, \quad (4.2)$$

Figura 4.4: Cambiamento di direzione della velocità relativa.



o anche

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{trt}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{a}_{\text{cor}}}{2}. \quad (4.3)$$

Abbiamo così individuato la natura di metà dell'accelerazione di *Coriolis*: essa deriva dalla costrizione subita dal nostro punto osservato a cambiare raggio sul disco del pavimento, e di conseguenza velocità di trascinamento. Questo dà conto di uno dei monomi dell'espressione dell'accelerazione di *Coriolis*. Veniamo ora alla figura 4.4 e consideriamo che la velocità relativa, nell'intervallo di tempo  $dt$ , cambia direzione, ruotando di un angolo pari a  $d\theta = \omega dt$ . La variazione della velocità relativa risulta pertanto essere

$$d\mathbf{v}_{\text{rel}} = -\omega dt |\mathbf{v}_{\text{rel}}| \hat{\mathbf{t}}, \quad (4.4)$$

quindi

$$\frac{d\mathbf{v}_{\text{rel}}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = \frac{\mathbf{a}_{\text{cor}}}{2}, \quad (4.5)$$

che è il secondo (o il primo?) monomio dell'accelerazione di *Coriolis*. Così tale accelerazione, dapprima introdotta mediante un calcolo formale (derivando la 3.3 si è ottenuta la 3.7), si ricava ora mediante le osservazioni testé svolte e si intravede la giustificazione dei suoi due monomi identici: essi sono da ricondurre a due diverse conseguenze provocate e subite dalla velocità relativa durante la rotazione del sistema di riferimento relativo. Possiamo aggiungere che tale chiarimento è stato molto caro all'autore una volta scovato, stampato con tipi minori e con stile incomparabilmente più elegante del nostro, su [9], pag. 11. Ma anche queste delucidazioni possono lasciare un po' di amaro in bocca per via di ulteriori dubbi che possono sorgere: cosa succede ai due pluricitati monomi quando la velocità relativa è tangente alle circonferenze del piatto della giostra anziché essere radiale? Che fine fa in tal caso il monomio che esiste in virtù della diminuzione o dell'aumento delle circonferenze percorse nel sistema relativo? Si riduce forse a zero? Proprio così! E l'altro monomio, quello dovuto al cambiamento di direzione della velocità relativa, raddoppia: la dimostrazione di questa affermazione è lasciata come esercizio al lettore. E cosa succede nelle situazioni intermedie? Cioè quando la velocità relativa non è né radiale né tangenziale? Conviene qui tagliar corto: i procedimenti matematici servono proprio a questo: la 3.7 è stata ricavata correttamente dalla 3.3 perciò risulta sempre valida. Le altre considerazioni, meno rigorose, basate su circostanze particolari, servono a stimolare e svegliare l'intuito, ci fanno conoscere gli attori, solitamente austeri e scontrosi, della matematica con maggior confidenza.

## 4.2 ULTERIORI PRECISAZIONI

Ancora qualche parola su questa particolare grandezza cinematica. Anche se non è qui il luogo per trattare argomenti di *dinamica*, tutti conosciamo gli

effetti delle accelerazioni sulle masse: esse fanno nascere le *forze di inerzia*. Benché i fisici chiamino queste forze, e non senza ragione, “apparenti”, i loro effetti sono ben noti ai passeggeri che stanno spesso in piedi, anziché seduti sugli autobus. Bene, le forze di inerzia legate alle accelerazioni di *Coriolis* provocano particolari azioni dinamiche: sono quelle che al ritrarre o allo stendere delle braccia del pattinatore ne aumentano o ne diminuiscono la sua velocità angolare quando piroetta; esse provocano la circolazione dei venti sul nostro pianeta, i vortici dei cicloni, e tanti altri effetti analoghi.

### 4.3 DUE ESEMPI SIGNIFICATIVI

Abbiamo visto che la soluzione del problema dei moti relativi si trova in due equazioni che riguardano rispettivamente velocità e accelerazioni, 3.6 e 3.11, ciascuna delle quali mette d'accordo le osservazioni svolte nei rispettivi sistemi di riferimento, quello assoluto e quello relativo. Tutte le volte che disponiamo di relazioni di uguaglianza siamo autorizzati a trasformarle in altrettante equazioni nelle quali qualche termine potrà essere incognito. D'altra parte sappiamo che, dato un sistema di equazioni tra loro indipendenti, possiamo ricavare il valore delle incognite se il loro numero uguaglia quello delle relazioni che le legano tra loro. Desideriamo provare a sfruttare questa attitudine delle uguaglianze 3.6 e 3.11 per ricavare alcune grandezze cinematiche incognite nei due problemi raffigurati nelle figure 4.5 e 4.6. Andiamo con ordine e cominciamo dalla scala a pioli appoggiata a un muro che scivola sul pavimento con velocità e accelerazione date,  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{a}_A$ , come rappresentato in figura 4.5.

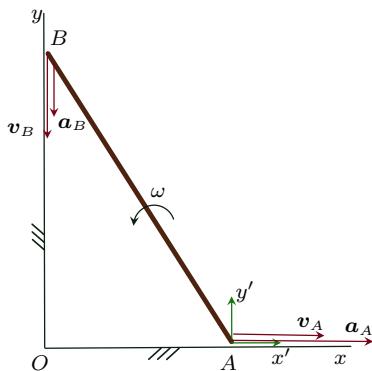


Figura 4.5: *Slittamento di una scala appoggiata a un muro.*

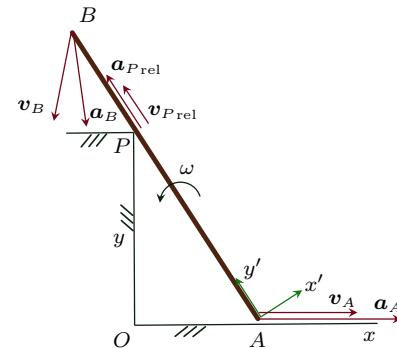


Figura 4.6: *Slittamento di una scala sopra la sommità di un muro.*

Ci poniamo il problema di trovare velocità e accelerazione del punto  $B$ , cioè  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{a}_B$ , conoscendo  $\mathbf{v}_A$  e  $\mathbf{a}_A$ , ossia le grandezze cinematiche del punto  $A$ . Esprimiamo le grandezze cinematiche assolute di  $B$  tramite le grandezze re-

lative appartenenti al sistema di riferimento  $(x', y')$ . Assumiamo in questo caso (ma su questa scelta torneremo) che il sistema relativo trasli e si mantenga centrato in  $A$ . Nel sistema relativo  $(x', y')$  si osserva  $B$  percorrere degli archi di circonferenza con centro  $A$ . Riprendendo la 3.6 possiamo scrivere

$$\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{tr}}, \quad (4.6)$$

cioè

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{B\text{rel}} + \mathbf{v}_A. \quad (4.7)$$

L'equazione 4.7 contiene due incognite, i vettori  $\mathbf{v}_B$  e  $\mathbf{v}_{B\text{rel}}$ . Ma tali grandezze non sono completamente sconosciute in quanto la loro direzione è nota. Siamo pertanto di fronte a un'equazione vettoriale (che nel piano vale due equazioni scalari) che contiene due incognite, i moduli dei vettori che non conosciamo. Stabilito quindi che il numero delle incognite non eccede il numero delle equazioni, potremmo lasciare al lettore il compito di individuare uno dei vari metodi per risolvere la 4.7. Preferiamo però dare un cenno del metodo grafico che si potrebbe seguire, metodo forse non molto efficiente ma a nostro parere molto istruttivo. Con riferimento alla figura 4.7 tracciamo dapprima il vettore noto  $\mathbf{v}_A$ . Si tracciano quindi per i suoi estremi le due direzioni cospicue indicate nella stessa figura. Non ha alcuna importanza se la direzione parallela a  $OB$  viene riportata sulla coda del vettore noto oppure sulla sua testa e naturalmente lo stesso vale per l'altra direzione nota. La soluzione consta nell'ammettere che l'unica configurazione in cui i vettori incogniti giacciono sulle direzioni tracciate e soddisfino la relazione 4.7 risulta essere quella riportata in figura, e la chiusura del triangolo costituisce la soluzione dell'equazione vettoriale. Una volta determinate le velocità incognite

si può senza fatica ricavare il modulo della velocità angolare della scala dalla relazione  $|\mathbf{v}_{B\text{rel}}| = \omega |\overrightarrow{AB}|$ ; tenendo quindi presente che la sua direzione non può che essere ortogonale al piano del moto, il suo verso dovrà soddisfare la relazione  $\mathbf{v}_{B\text{rel}} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ .

Passiamo alle accelerazioni. In virtù del fatto che il sistema di riferimento relativo trasla, scrivendo la 3.11 il termine dell'accelerazione di *Coriolis* sarà assente. Avremo pertanto

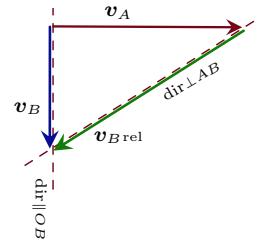


Figura 4.7: Soluzione grafica di un'equazione vettoriale.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_{B\text{rel}} + \mathbf{a}_A. \quad (4.8)$$

Conviene però scrivere il termine  $\mathbf{a}_{B\text{rel}}$  come somma delle sue due componenti: quella avente direzione parallela alla scala e diretta verso  $A$  (componente normale) e quella ortogonale alla scala stessa

$$\mathbf{a}_B = -\omega^2 \overrightarrow{AB} + \dot{\omega} |\overrightarrow{AB}| \widehat{\perp AB} + \mathbf{a}_A, \quad (4.9)$$

dove il versore  $\widehat{\perp AB}$  sta ad indicare che la direzione del penultimo termine, al contrario del suo modulo, è nota e proviene dal prodotto vettoriale  $\mathbf{a}_{B\text{rel}(t)} = \dot{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ , pertanto essa risulta perpendicolare alla nostra scala. Anche la direzione del vettore incognito  $\mathbf{a}_B$  è nota ed è l'unica che il moto di strisciamento sul muro verticale gli consenta. Gli altri due termini,  $\mathbf{a}_A$  e  $\mathbf{a}_{B\text{rel}(n)} = -\omega^2 \overrightarrow{AB}$ , sono invece completamente noti. Ricadiamo così ancora nel caso di un'equazione vettoriale dove le incognite sono i moduli di due vettori; in questo frangente, numerando i termini senza badare al segno di uguaglianza, risultano essere il primo e il terzo. Una possibile soluzione è quindi di nuovo lo schema grafico di figura 4.7, magari con l'avvertenza di produrre in anticipo la somma dei due vettori noti. Occorre solo accennare che una volta ricavato il terzo termine,  $\mathbf{a}_{B\text{rel}(t)} = \dot{\omega} |\overrightarrow{AB}| \widehat{\perp AB}$ , risulterà noto anche il modulo dell'accelerazione angolare della scala  $\dot{\omega}$ ; la sua direzione sarà ortogonale al piano del moto e il suo verso dovrà essere tale da produrre il valore corretto di  $\mathbf{a}_{B\text{rel}(t)}$  tramite il prodotto vettoriale con  $\overrightarrow{AB}$ .

Esaminiamo ora la scala della figura 4.6 che, anziché appoggiarsi al muro verticale mediante il suo estremo  $B$ , appoggia in un suo punto imprecisato sulla sommità del muro nel punto (del muro)  $P$ . Abbiamo scelto di relazionarci con un osservatore relativo che, oltre a traslare con il punto  $A$ , ruota mantenendo uno dei suoi assi diretto lungo la scala. Anche qui, le incognite sono velocità e accelerazione del punto  $B$ , note la velocità e l'accelerazione del punto  $A$ <sup>1</sup>. Ancora una volta partiamo dalle velocità ma, anziché tentare di coinvolgere subito la grandezza incognita  $\mathbf{v}_B$ , proviamo a calcolare la velocità del punto  $P$ , che deve essere nulla essendo  $P$  un punto appartenente al muro. In tal caso, la 3.6 diventa

$$\mathbf{v}_P = 0 = \mathbf{v}_{P\text{rel}} + \mathbf{v}_A + \omega |\overrightarrow{AP}| \widehat{\perp AP}, \quad (4.10)$$

dove  $\mathbf{v}_{P\text{rel}}$  ha modulo incognito e direzione lungo la scala,  $\mathbf{v}_A$  è un vettore noto e l'altra componente di trascinamento  $\mathbf{v}_{tr(n)} = \omega |\overrightarrow{AP}| \widehat{\perp AP}$  ha modulo incognito e direzione ortogonale la scala. Di nuovo una equazione vettoriale dove le direzioni sono tutte note mentre sono incogniti due dei tre moduli. Si possono quindi ricavare sia la velocità relativa di  $P$ ,  $\mathbf{v}_{P\text{rel}}$ , sia il modulo della velocità angolare  $\omega$ ; il vettore  $\omega$  sarà come al solito ortogonale al piano del

---

<sup>1</sup>Il lettore, qualora fosse interessato, può provare a scambiare le grandezze incognite con quelle note e viceversa, per rendersi conto che, non solo la soluzione non cambia a livello concettuale, ma persino nelle equazioni e nei disegni le grandezze coinvolte rimarranno invariate nella sostanza.

moto e il suo verso dovrà soddisfare la relazione vettoriale  $\mathbf{v}_{\text{tr(n)}} = \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AP}$ . La velocità del punto  $B$  sarà

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{AB}. \quad (4.11)$$

Passando alle accelerazioni dovremo in questo caso fare i conti anche con l'accelerazione di *Coriolis*, in quanto il sistema relativo ruota con velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$ , ormai nota. Al fine di riportare le espressioni delle accelerazioni ci avvarremo, anche in questo caso, delle loro componenti, quando queste saranno più semplici da calcolare. Dunque, con riferimento alla 4.1, avremo per l'accelerazione del punto  $P$

$$\mathbf{a}_P = 0 = \mathbf{a}_{P_{\text{rel}}} + \mathbf{a}_A - \omega^2 \overrightarrow{AP} + \dot{\omega} |\overrightarrow{AP}| \widehat{\perp AP} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P_{\text{rel}}}, \quad (4.12)$$

dove il prodotto vettoriale del termine di *Coriolis* ha il solo scopo di indicarne la direzione e il verso. Quando la rotazione  $\omega$  segue le dita della mano destra, il pollice dà la direzione e il verso di  $\boldsymbol{\omega}$ . Diamo ora all'indice direzione e verso della velocità relativa: tenendo le tre dita reciprocamente ortogonali tra loro, il dito medio fornirà la direzione e il verso dell'accelerazione di *Coriolis*. Il procedimento ora indicato si chiama *regola della mano destra* per il prodotto vettoriale. Dei cinque termini della 4.12 tre sono completamente noti

$$\text{termine noto} \equiv \mathbf{a}_A - \omega^2 \overrightarrow{AP} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{P_{\text{rel}}}, \quad (4.13)$$

mentre l'accelerazione relativa di  $P$  e la componente tangenziale dell'accelerazione di trascinamento presentano modulo incognito e direzione nota. Ancora una volta, il riferimento per la soluzione può essere lo schema di figura 4.7, che permette di ricavare i moduli delle due accelerazioni incognite e di conseguenza ci consentirà di conoscere il modulo dell'accelerazione angolare della scala  $\dot{\omega}$  prima e poi  $\boldsymbol{\omega}$ . Infine si può ottenere l'accelerazione dell'estremo  $B$  della scala dalla seguente

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A - \omega^2 \overrightarrow{AB} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \overrightarrow{AB}. \quad (4.14)$$

A conclusione di questo breve esempio di applicazione del teorema di *Coriolis* sorge spontanea una domanda: gli esercizi di figura 4.5 e di figura 4.6 appaiono molto simili; comeabbiamo dunque fatto ad affibbiare un sistema relativo traslante al primo, mentre nel secondo caso scegliamo un sistema relativo traslante-rotante? La decisione da prendere in tal senso sta forse alla nostra discrezione? Purtroppo no. Se utilizzassimo un sistema relativo rotante anche nel primo caso, ci accorgeremmo subito che la sua rotazione non sarebbe di utilità alcuna. Nel secondo caso, introducendo un riferimento relativo che trasla senza ruotare, non sarebbe possibile giungere alla soluzione. Una linea guida per scegliere tra il sistema relativo semplicemente traslante e quello che ruota “incollato” a qualche corpo rigido può essere la

seguinte: tutte le volte che le grandezze relative non possono in alcun modo essere rappresentate come prodotte dal trascinamento (un classico esempio è la velocità radiale della formica sul piatto della giostra) è indispensabile l'introduzione di un sistema di riferimento relativo che, oltre eventualmente a traslare, ruoti.

#### 4.4 ULTERIORI CONSIDERAZIONI SUI MOTI RELATIVI

Nelle applicazioni pratiche è uso comune riferire i moti a sistemi che si qualificano come assoluti quando sono in qualche modo fissati a qualche cosa di molto grande, in generale il nostro pianeta, mentre si qualificano come relativi sistemi di riferimento che sono in moto rispetto alla Terra. Al fine di contrastare (in modo pacifico) tale punto di vista, oltre a tirare in ballo il valido argomento, che quasi tutti conoscono, che la Terra si muove, ci preme sottolineare che gli unici moti sperimentalmente rintracciabili sono quelli relativi. Un insieme di corpi rigidi è un teatro nel quale (quando i vincoli lo permettono) i vari attori posseggono campi di velocità misurabili soltanto rispetto agli altri corpi.

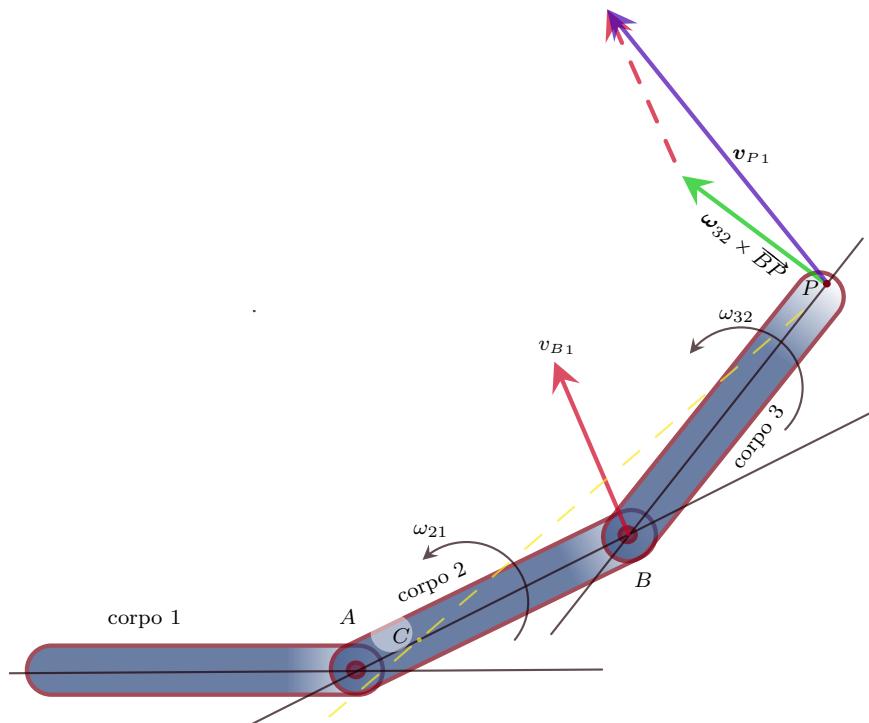


Figura 4.8: Allineamento dei tre centri di rotazione.

Cosicché, considerando la figura 4.8, possiamo riferire il moto di ciascuno dei tre corpi a ciascuno dei due rimanenti. In figura si nota che il corpo 1) e il corpo 2) sono tra loro uniti da un giunto rotoidale e così accade per il corpo 2) e il corpo 3). Sappiamo quindi che il moto di 2) relativamente a 1) sarà rotatorio con centro  $A$  (e naturalmente lo stesso vale per il moto di 1) rispetto a 2)), così come il moto di 3) attorno a 2) sarà anch'esso rotatorio con centro  $B$ . Volendo descrivere il moto di 3) rispetto a 1) richiamiamo la regola della composizione delle velocità (3.6):

$$\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{tr}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}.$$

Pensando come assoluta la velocità di  $P$ , punto appartenente al corpo 3), relativa al corpo 1),  $\mathbf{v}_{P_1}$ , con ovvio significato dei simboli avremo

$$\mathbf{v}_{P_1} = \mathbf{v}_{B_1} + \mathbf{v}_{P_2}. \quad (4.15)$$

La 4.15 ci dice che la stessa  $\mathbf{v}_{B_1}$ , componente di trascinamento, è anche la velocità del particolare punto del corpo 3) coincidente con  $B$ . Questa informazione, da sola, ci dà la certezza che il centro di istantanea rotazione del corpo 3) nel moto relativo a 1), dovendo stare sulla normale a tale vettore, giacerà da qualche parte sulla retta che passa per i punti  $A$  e  $B$ . Se desideriamo individuare il centro di istantanea rotazione  $C$  del corpo 3) rispetto al corpo 1) (e viceversa), sempre tramite la 4.15 calcoliamo la velocità del generico punto  $P$  del corpo 3) rispetto al corpo 1). Una volta identificato il vettore  $\mathbf{v}_{P_1}$ , come in figura, basterà condurre la perpendicolare al suo piede e  $C$  risulterà determinato dall'intersezione con la retta che passa per i punti  $A$  e  $B$ . Il punto  $C$  è il centro di rotazione istantaneo del moto relativo tra 1) e 3)<sup>2</sup>. In questa analisi, l'esistenza dei vincoli rotoidali  $A$  e  $B$  è stata sfruttata solamente per scrivere la 4.15, la quale sarebbe corretta anche se  $A$  fosse il centro istantaneo di rotazione di 2) rispetto a 1) e  $B$  il centro istantaneo del moto relativo tra 2) e 3). Questo notevole risultato, che vede i tre centri istantanei dei moti relativi di tre corpi sempre allineati tra loro, costituisce il *teorema di Aronhold-Kennedy*. La tesi di questo teorema viene spesso utilizzata nell'analisi cinematica che gli ingegneri civili eseguono sulle strutture: se tre corpi, tra loro connessi, presentano centri istantanei di rotazione relativi allineati, tali corpi hanno una possibilità (almeno in quell'istante) di muoversi l'uno rispetto all'altro, situazione questa quasi sempre da evitarsi nelle costruzioni.

---

<sup>2</sup>Risulta essere *istantaneo* in quanto non abbiamo premesso alcuna ipotesi circa la costanza o meno della velocità angolare  $\omega_{32}$ , per questo la posizione di  $C$  relativa ai tre corpi può variare nel tempo. Se tale velocità angolare fosse costante, il centro  $C$  non si sposterebbe.



PARTE II

TRASMISSIONE E  
TRASFORMAZIONE DEL  
MOVIMENTO



## CAPITOLO 5

### Breve Introduzione

La movimentazione delle macchine, dei macchinari e degli impianti avviene, nella stragrande maggioranza dei casi, tramite i *motori*. La situazione di gran lunga più diffusa vede la sorgente primaria di moto in uno o più motori che presentano, in generale, un albero cilindrico tramite il quale mettono a disposizione dell'utilizzatore la potenza meccanica necessaria sotto forma di rotazione di tale albero e di un momento torcente ad esso applicato. Mi preme tranquillizzare subito quei lettori che iniziassero a fremere pensando a eccezioni illustri ai motori rotativi, e dico loro che il periodo sopra riportato ci fornisce soltanto un sistema di riferimento per inquadrare il problema, e nulla toglie alla sua generalità. Presenteremo infatti in questa parte del volume la cinematica di alcuni dispositivi che permettono di mettere in relazione reciproca movimenti geometricamente simili, ovvero geometricamente eterogenei tra loro. Partiremo quindi considerando i casi più semplici di trasformazione di movimenti rotatori in movimenti ancora rotatori, e ci spingeremo fino a studiare il comportamento cinematico di dispositivi che, sfruttando un movimento di ingresso rotatorio (spesso a velocità costante), producono in uscita leggi di movimento o traiettorie molto particolari. Tali leggi di moto e tali particolari traiettorie saranno ottenute tramite *sistemi articolati* ed *eccentrici* che, in gergo, prendono il nome di *camme*.

Più nello specifico si parlerà di *trasmissioni* nei casi frequentissimi di generazione di un moto rotatorio da uno simile. Si annoverano in questa famiglia di dispositivi meccanici le *ruote dentate*, delle quali un esemplare è mostrato in figura 5.1, e gli *ingranaggi* che esse costituiscono, le *cinghie di trasmissione* con le relative *pulegge*, le *catene*, i *giunti* omocinetici e non ecc. ma anche, di nuovo, quadrilateri e altri sistemi articolati. Il che mostra che la trasmissione del moto e la generazione di particolari movimenti costituiscono, in fondo, un'unica problematica della Meccanica Applicata alle Macchine, anche se i due temi, quello delle trasmissioni e quello dei meccanismi che generano movimenti peculiari, posseggono specificità così profonde da esser tratti, nei libri, quasi sempre in capitoli disgiunti, quando non occupano trattazioni specialistiche distinte. Siccome questo volume

è dedicato alla Cinematica, per quanto riguarda la trasmissione del moto rotatorio studieremo soltanto le ruote dentate, sorvolando sulle cinghie di trasmissione che, benché rappresentino un dispositivo meccanico molto frequentemente impiegato e manifestino interessanti problematiche dinamiche, dal punto di vista cinematico non offrono spunti di particolare spicco. Quando parliamo di “generazione di particolari movimenti” intendiamo, in generale, la possibilità di produrre moti le cui leggi temporali dello spostamento o delle sue derivate abbiano determinate caratteristiche, oppure di generare opportune traiettorie a partire da moti rotatori. I meccanismi atti a questi particolari scopi verranno quindi analizzati in ambito cinematico e tali studi, stante lo scopo di questi appunti e lo spazio limitato, non avranno alcuna pretesa di completezza né di profondità. Introdurremo così i *sistemi articolati*, in particolare i quadrilateri, che possono trasformare un moto rotatorio con velocità angolare costante in moti con velocità angolare variabile, oppure condurre qualche loro punto, normalmente appartenente alla biella, che chiameremo pertanto *punto di biella*, a percorrere traiettorie speciali, le quali possono, ad esempio, approssimare spostamenti rettilinei: traiettorie queste molto pregiate nell’ambito delle macchine automatiche per impiego manifatturiero. Vi sono poi i *manovellismi* (casi degeneri dei quadrilateri) che trasformano il moto rettilineo in moto rotatorio e viceversa. Essi imperniano da più di cent’anni nel settore dei motori a combustione interna, e tuttora tengono banco essendo presenti (in genere a quaterne) nei motori delle nostre attuali automobili. Esiste, infine, la sofisticata possibilità di provvedere un *cedente* di precise *leggi di moto*. Spesso tale cedente consiste in un’asta guidata da due collari, azionata tramite dispositivi meccanici eccentrici, opportunamente profilati: le *camme*. Ciascuna delle famiglie di dispositivi appena citati merita, e di fatto possiede, trattazioni specialistiche monotematiche e il loro approfondimento in un corso di Meccanica Applicata di base risulterebbe eccessivamente tecnico, perciò fuori luogo. La nostra intenzione è quella di mostrare, in questa parte del presente tomo, alcuni (pochi) membri appartenenti alle tipologie citate di meccanismi, passandoli in rassegna e tentando di fornire, ove possibile, qualche spunto per la loro analisi cinematica e per la loro sintesi.



Figura 5.1: *Ruota dentata*.

## CAPITOLO 6

### Trasmissione del Moto mediante Ruote Dentate

#### 6.1 LE RUOTE DI FRIZIONE

Credo che a ben pochi lettori sfugga, almeno da un punto di vista meramente visivo, cosa sia una *ruota dentata*.

Le ruote dentate sono comparse alla maggior parte di noi in contesti eterogenei che vanno dai giochi per bambini agli elettrodomestici, ad alcuni strumenti da cartoleria, senza parlare dell'emblema della Repubblica Italiana. Qualche privilegiato ha potuto vedere le ruote dentate impiegate nella meccanica delle automobili e dei motoveicoli. Tutti possono agevolmente immaginare (qualora non ne avessimo contezza diretta) il relativo ingranamento di una ruota dentata con una sua simile.

Lasciamo per il momento da parte la caratteristica fondamentale di queste ruote, che si manifesta tramite una serie di sporgenze opportune, chiamate denti. Fissiamo invece le idee su due cilindri, che presentino raggi adeguati ai nostri scopi, pensando di calettarli sui rispettivi alberi, paralleli e liberi di ruotare attorno ai propri assi. Possiamo fare in modo che le superfici cilindriche siano tra loro a contatto e che tale contatto sia mantenuto da una data forza  $\mathbf{F}$ . La figura 6.1 rappresenta i due cilindri coi rispettivi alberi. Ipotizzando che il moto relativo di una ruota rispetto all'altra sia di puro rotolamento, possiamo affermare che le velocità

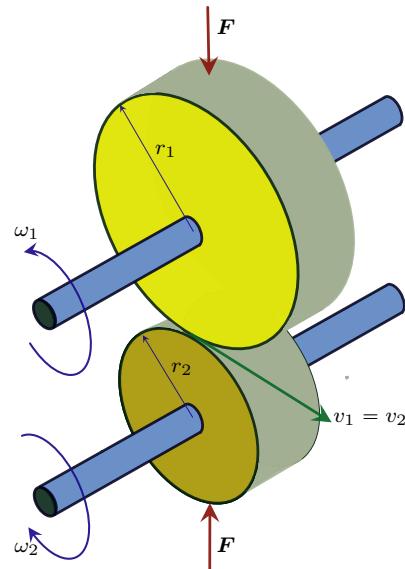


Figura 6.1: *Ruote di frizione.*

angolari dei due alberi dovranno essere tali da produrre velocità periferiche uguali tra loro sulle due ruote. Cioè dovrà valere  $v_1 = \omega_1 r_1 = v_2 = \omega_2 r_2$ , relazione che permette di ricavare subito il *rapporto di trasmissione* della coppia di *ruote di frizione*,

$$\tau = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (6.1)$$

I due alberi ruotano pertanto con velocità angolari differenti tra loro e in strettissima relazione coi raggi delle due ruote che trasmettono il moto. Nonostante le ruote di frizione siano realmente esistite nel mondo della meccanica<sup>1</sup>, e si trovino ancora in applicazioni dove le potenze in gioco sono sia molto grandi sia molto piccole, credo che il loro più grave inconveniente potenziale, cioè la possibilità che il loro moto relativo di puro rotolamento venga contaminato dallo strisciamento, sia evidente anche ad occhi non particolarmente esperti. Non riteniamo opportuno chiarire in questa sede il meccanismo dell'attrito (in prevalenza statico) necessario a trasmettere correttamente il moto in determinate condizioni, né illustreremo come possono essere realizzate, nella pratica, le coppie di ruote di frizione, che tuttavia si fabbricano ancora, come abbiamo appena affermato, anche nel contesto di rilevanti potenze da trasmettere. In questo luogo, ci basta osservare che la trasmissione corretta del moto, tramite questi dispositivi, è condizionata dal valore della forza  $\mathbf{F}$  mediante la quale le ruote sono costrette a mantenere il contatto tra loro. In cascata, il valore efficace di tale forza è subordinato al coefficiente di attrito tra le due superfici, a sua volta soggetto a variazioni non leggere del suo valore, a causa dell'usura e delle condizioni, probabilmente mutevoli, di lubrificazione delle ruote stesse. La garanzia del rapporto di trasmissione teorico, derivante dal rapporto tra i diametri delle ruote, è perciò negata dai probabili scorrimenti tra le due primitive nel punto di contatto.

## 6.2 PERCORSO INTUITIVO VERSO LE RUOTE DENTATE

Riprendendo il filo dal precedente paragrafo, siamo naturalmente tentati di impedire lo slittamento della trasmissione ponendo su una delle ruote alcune sporgenze e ricavando sulla seconda ruota degli incavi, tali da accogliere le suddette sporgenze. Inizieremo a breve un cammino che possiamo definire *induttivo*, a valle del quale riteniamo che la soluzione, adottata nella pratica come *standard* per la creazione delle ruote dentate, dovrebbe essere ricevuta senza perplessità. Premettiamo però alcune considerazioni che riguardano il taglio che abbiamo desiderato dare all'esposizione del presente argomento. Le ruote dentate rappresentano nella meccanica gli organi maggiormente

---

<sup>1</sup>Un curioso esempio di applicazione: il FERMIAC era un calcolatore analogico basato su ruote di frizione.

diffusi nell'ambito della trasmissione e della trasformazione del moto, in genere rotatorio. Si comprende perciò facilmente la loro centralità in quasi tutte le applicazioni industriali. Crediamo di non esagerare dicendo che esse rappresentano l'oggetto simbolo della meccanica e del funzionamento delle macchine. Pertanto, anche se nella Meccanica Applicata alle Macchine esse godono di una posizione privilegiata, il loro studio si incontra anche in altre discipline dell'ingegneria: nel Disegno di Macchine, nella Costruzione di Macchine e nella Tecnologia Meccanica. Naturalmente, ciò accade anche per altri argomenti di particolare interesse nella nostra materia. Tuttavia, ci è sembrato di notare che le ruote dentate vengano esposte anche altrove con molta attenzione persino ai loro aspetti cinematici e geometrici che ne determinano un buono o cattivo funzionamento: cosa strana, questa, perché l'aspetto cinematico legato all'ingranamento è un argomento piuttosto intricato ma, forse per questo, si ritiene che non sia mai chiarito a sufficienza. Cercheremo, come sempre in queste note, di rimanere circoscritti ai soli aspetti cinematico-geometrici di questi dispositivi, divagando solamente quando qualche altra loro caratteristica (resistenza, facilità di realizzazione e possibilità di impiego) sarà determinante nel condizionarne la forma. Per tale motivo, questo volume, che tratta esclusivamente la cinematica, non include una porzione massiccia di particolarità e di connotazioni delle ruote dentate, alcune anche molto comuni, altre maggiormente tecniche, fondamentali per il loro effettivo impiego. Un esempio che crediamo significativo: non tratteremo le ruote con dentatura elicoidale, di grande importanza nella pratica ma cinematicamente non dissimili dalle loro sorelle a denti diritti. Assicuriamo coloro i quali volessero investigare le ruote dentate nei loro aspetti più profondi e nella loro varietà di tipologie e applicazioni che testi molto più completi, autorevoli e dettagliati del nostro non mancano. A nostro parere, ad esempio, questo argomento è esposto in modo rigoroso ed esaustivo in [10]; indichiamo anche un manuale, a livello di scuola superiore, che riporta un numero notevole di esempi utili per il progettista: [11]. La "Bibbia" in questo campo, ad oggi, rimane [12].

Come abbiamo già accennato, riteniamo che da un punto di vista didattico sia efficace seguire una sorta di sentiero, percorrendo il quale saremo costretti ad ammettere che la possibilità di proseguire sia condizionata dall'accettazione di alcuni "precetti", più o meno tassativi, dettati da particolari e stringenti circostanze. Lungo tale percorso incontreremo pertanto precetti forti e precetti deboli, e queste due qualità saranno indicate tra parentesi. Un precetto forte non potrà ammettere eccezioni, mentre uno debole potrà essere in qualche caso disatteso, e quando lo sarà, cercheremo di chiarire il perché. Inizieremo il nostro cammino dalle ruote di frizione introdotte poco sopra, proponendo un tentativo per la loro modifica, in modo da assicurarle dal pericolo di scorrere l'una sull'altra. L'esperimento (mentale) che si può condurre è quello di dotare una delle due ruote di alcune sporgenze che, in-

serendosi in opportuni incavi ricavati sull'altra ruota, riescano a trasmettere la componente tangenziale della forza, che le due ruote si scambiano, senza basarsi sul fenomeno dell'attrito. Potremmo pensare alla ruota che deve essere incavata come fatta di plastilina o di un qualunque materiale plastico e tenero, che possa poi indurire. In questa materia plastica la ruota recante le asperità potrà pertanto operare un'azione di incisione. Questo procedimento di taglio deve essere condotto pensando che le due circonferenze delle ruote di frizione, che chiameremo *circonferenze primitive*, rotolino l'una sull'altra senza strisciare. Si intuisce che, i due profili, quello della ruota creatrice unitamente a quello tagliato nella plastilina, una volta indurito, saranno in grado di trasmettere il moto allo stesso modo delle due primitive rotolanti, cioè con rapporto di trasmissione costante.

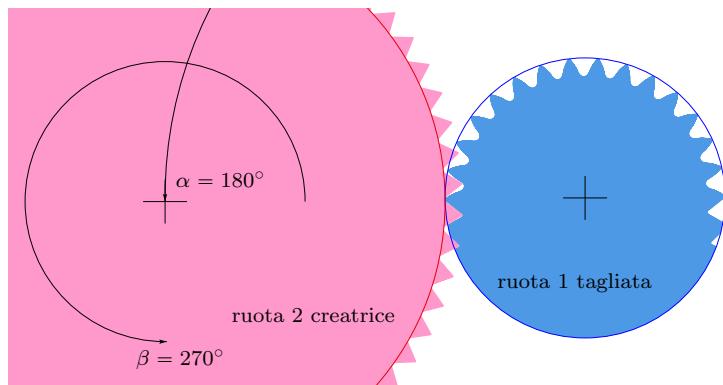


Figura 6.2: *Dentatura ingenua, ottenuta mediante l'applicazione di sporgenze triangolari alla ruota di sinistra.  $\alpha$  è l'arco di dentatura della ruota azzurra,  $\beta$  la rotazione della ruota rosa.*

La figura 6.2 rappresenta una ruota creatrice, di colore rosa, recante delle sporgenze a triangolo isoscele all'esterno della propria circonferenza primitiva, esterne cioè alla circonferenza della ruota di frizione. Tale ruota, di colore rosa, "intaglia", tramite le sue sporgenze, i denti sulla ruota azzurra. Il primo precezzo che emerge (forte) esige un lieto fine per la dentatura della ruota tagliata (azzurra). In altre parole, risulta fondamentale che, una volta completato il taglio sui  $360^\circ$  di tale ruota, essa presenti un numero intero di denti. Riteniamo inutile commentare questa indicazione. Aggiungiamo solamente che, se il numero di denti sulla ruota azzurra risultasse frazionario, la sua dentatura verrebbe distrutta da ulteriori passaggi della ruota creatrice. Allo scopo di prevenire il citato inconveniente e di ottemperare a questo precezzo, la progettazione delle ruote dentate si basa principalmente sul loro numero di denti e non sui loro diametri, rendendo così di fatto impossibili rapporti di trasmissione rappresentati da frazioni stravaganti o,

peggio, da numeri irrazionali. Per fortuna il mondo della tecnica non richiede di tali prestazioni! Scelta quindi una coppia di numeri di denti che meglio si adatta al rapporto di trasmissione che vogliamo realizzare, giungeremo poi alla reale dimensione delle ruote introducendo un numero dimensionale che chiamiamo *modulo*,  $m$ , misurato in millimetri, legato al diametro della ruota nel modo seguente:  $D = zm$ , con  $z$  numero di denti della ruota e  $D$  diametro primitivo (quello della corrispondente ruota di frizione). Va da sé che il *passo*, cioè la misura dell'arco di circonferenza primitiva che separa i due fianchi attigui e omologhi, sinistri o destri, di due denti vale  $p = \pi m$ . Un secondo precezzo (debole) è la richiesta, per le asperità del creatore, di simmetria speculare rispetto a un raggio. In effetti, le nostre sporgenze sono triangoli isosceli e ciò permette di ottenere condizioni geometriche pari nei due sensi di marcia. Questa è una restrizione che viene, in particolarissimi e rari casi, disattesa. Ci accorgiamo però, a questo punto, che la ruota azzurra ora tagliata non potrà facilmente generare altri *partner*. La via più breve per renderci conto di ciò consiste nel tentativo di tagliare una gemella della ruota azzurra (magari con ugual numero di denti) utilizzando lei stessa come creatore. Purtroppo, trovandosi in questo caso le sporgenze della ruota creatrice (la azzurra di figura 6.2) al di sotto della primitiva, essa non sarà in grado di incidere alcunché sul disco grezzo, lasciandoci perplessi circa la nostra scelta. Tuttavia ci accorgiamo che tagliare la *partner* della ruota azzurra di figura 6.2 tramite lei stessa non è il solo metodo che abbiamo a disposizione. La

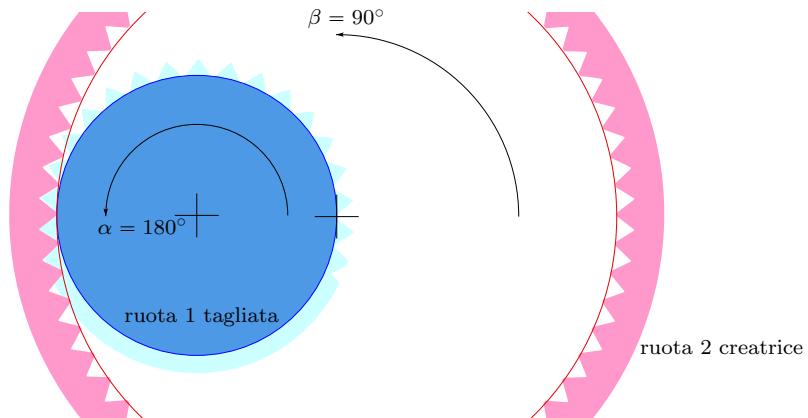


Figura 6.3: Tentativo di dentatura complementare con dentiera a curvatura negativa. La dentatura risulta impossibile.

ruota rosa (creatrice) di figura 6.2 possiede un utensile “duale” che consiste nella stessa ruota con curvatura opposta. Questa inversione, necessaria, della curvatura del creatore non può essere chiarita a dovere in questo luogo. Rassicuriamo il lettore che, nel paragrafo dove si tratta l’ottenimento dei profili coniugati di assortimento, ciò risulterà perfettamente illustrato. Qui

basta dire che questo utensile “duale”, rappresentato in rosa in figura 6.3, sarebbe perfettamente in grado, come si intuisce dal suo aspetto, di creare la ruota rosa di figura 6.2. Ma anche in questo caso, rappresentato appunto in figura 6.3, si nota che la ruota creatrice non trova materiale da incidere sullo stesso disco grezzo dalla quale abbiamo ottenuto la ruota azzurra. In tale figura viene riportato, con colore tenue, il sovra-metallo necessario per poter tagliare questa benedetta *partner*. Ma è chiaro che l’obbligo di impiegare dischi grezzi differenti prelude alla necessità di tollerare l’esistenza di due famiglie di ruote, i membri di una delle quali, probabilmente, ingraneranno coi membri dell’altra. Si giunge così a un terzo precetto (forte) che è quello di potere creare ruote, magari di due generi diversi che chiamiamo a) e b), in cui tutte le ruote appartenenti alla famiglia a) possano ingranare con quelle appartenenti alla famiglia b)<sup>2</sup>. L’idea che ci viene in mente per ottemperare a tale precetto, quello cioè di far sì che esistano due famiglie di ruote, che chiameremo di *assortimento* e che siano simmetriche dal punto di vista del sovra-metallo che il disco grezzo deve presentare all’esterno della circonferenza primitiva, consta nel creare sulla dentatrice un profilo che stia a cavallo della sua stessa primitiva. Il secondo tentativo, rappresentato in figura 6.4,

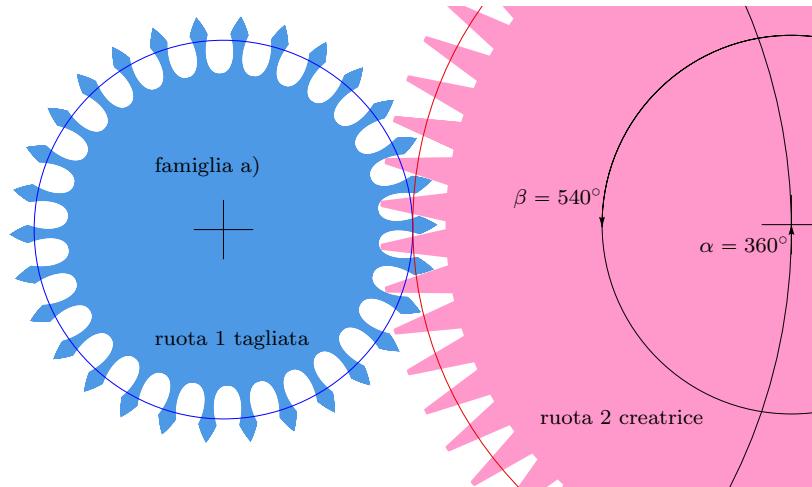


Figura 6.4: *Dentatura ottenuta da sporgenze a “dente di squalo”.* I denti creatori misurano, sulla primitiva, quanto gli spazi vuoti. I numeri di denti valgono  $z_1 = 30$  e  $z_2 = 60$ .

mostra una dentatrice a “denti di pescecano” che taglia la ruota azzurra. La dentatura è in questo caso presentata completa, sottolineando così il rispetto del precetto che impone numeri di denti interi sulle due ruote,  $z_1$  e  $z_2$ . Anche

---

<sup>2</sup>Questo requisito minimo per quanto riguarda l’assortibilità delle ruote dentate viene quasi sempre abbondantemente rispettato, anzi, nelle dentature ad evolvente, come vedremo, le due famiglie si riducono a una.

se confessiamo che le stesse figure 6.2 e 6.3 presenterebbero, sia sulla ruota creatrice sia su quella tagliata, un numero intero di denti qualora tali ruote fossero rappresentate complete: non abbiamo avuto il coraggio di scrivere una procedura che ammettesse le frazioni di dente. In figura 6.5 si accenna

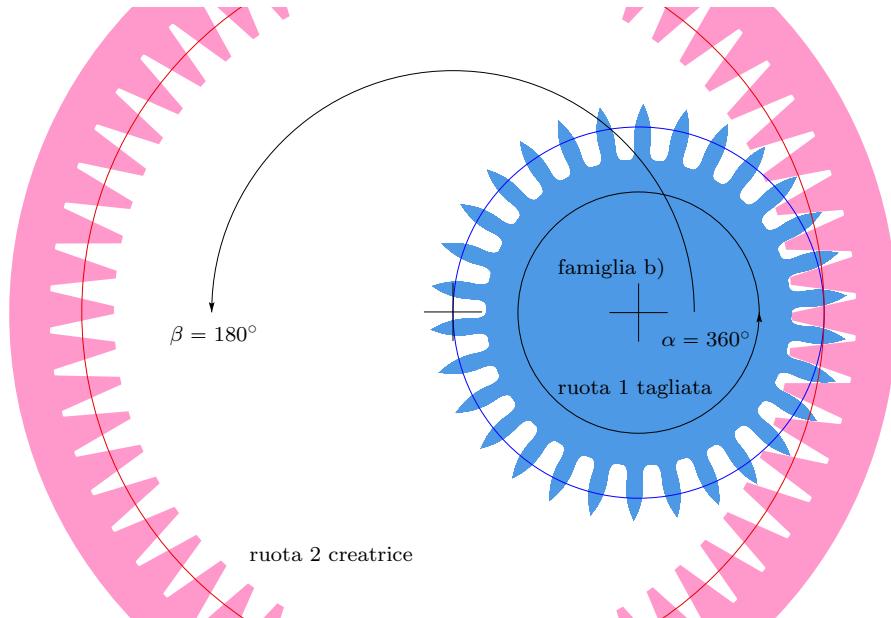


Figura 6.5: *Dentatura ottenuta dall'utensile della figura 6.4 con curvatura opposta. I numeri di denti valgono  $z_1 = 30$  e  $z_2 = 60$ .*

alla dentatura che si otterrebbe per la famiglia b) di ruote complementari alla ruota azzurra della famiglia a) di figura 6.4. Ovviamente, la ruota appartenente a questa seconda famiglia b), recante numero di denti pari alla ruota dentatrice (rosa) di figura 6.4, coinciderebbe con la dentatrice stessa e di questa famiglia risulterebbe la maggiore<sup>3</sup>. Ripetiamo che non siamo ancora in grado di valutare se tutte le ruote della famiglia a) siano o meno le *partner* cinematiche ideali delle ruote b), ma il nostro fiuto ci convince che siamo sulla buona strada. Aggiungiamo, a questi procedimenti ingenui di taglio delle ruote dentate, due precisazioni. La prima: il taglio della maggior parte delle ruote dentate avviene, da un punto di vista concettuale, proprio nel modo in cui noi le abbiamo tagliate nell'esperimento mentale, con qualche opportuno accorgimento pratico. Siccome il materiale da tagliare, che è nella gran parte

<sup>3</sup>Naturalmente, per la famiglia di ruote b) si potrebbero ottenere ruote più grandi della dentatrice di figura 6.5 utilizzando come utensile una qualsiasi ruota appartenente alla famiglia a). Non presentiamo in queste note le dentature interne, ma quello ora esposto rappresenta l'*escamotage* che consente di eseguire dentature interne derivanti dalla dentiera creatrice *standard*, che è una cremagliera, quindi sicuramente di diametro maggiore rispetto alla dentatura interna da eseguire.

dei casi acciaio al carbonio, non è “morbido”, il processo di taglio deve avvenire per asportazione di truciolo. Nei nostri due casi si dovrebbe operare spostando la ruota creatrice, rosa, fuori dal piano, per poi accostarla a quella da tagliare; a questo punto riportarla nel piano, asportando in tal modo il materiale in eccesso sulla ruota azzurra. Questo procedimento va ripetuto molte volte e a piccoli passi, così da simulare, durante il taglio, l’effettivo processo di inviluppo continuo che avremmo col rotolamento, l’una sull’altra, delle due primitive (le circonferenze delle ruote di frizione riportate in colore rosso e blu). Da qui deriva la seconda precisazione. Il movimento alternato dell’utensile, che è costretto, uscendo dal piano, ad uscire di scena, ci consente di avere delle fasi oziose dove siamo liberi di imporre, alla ruota creatrice, spostamenti non basati sul rotolamento delle primitive, ma che risultano utili per i nostri fini di taglio. Infatti, normalmente, una volta guadagnato sulla ruota creatrice un angolo  $\Delta\beta$  corrispondente a  $360/z_2$ , si torna indietro con questa ruota di tale quantità. Operando in tale maniera, non siamo costretti ad avere un utensile creatore con un numero di denti elevato, anzi in genere basta un numero di denti modesto per creare ruote in un vasto intervallo di numeri di denti. Anche noi ci siamo comportati in questo modo per disegnare numericamente le nostre figure, assicurandoci così di non rendere il codice che le genera troppo pesante. Inoltre, il semplice movimento di creazione per inviluppo, che consiste nel rotolamento delle due primitive, può essere sostituito da qualsiasi movimento che rispetti tale moto relativo: nelle nostre figure si è scelto di tenere ferma la ruota azzurra e di movimentare la ruota creatrice di conseguenza. Gli angoli rappresentati nelle figure 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 si riferiscono esclusivamente al movimento del creatore, in particolare alla sua rotazione  $\beta$  e all’angolo della porzione di ruota tagliata  $\alpha$ .

Non è necessaria un’esperienza da meccanico consumato per constatare che i denti tagliati sulla ruota 1) di figura 6.4 sono estremamente scavati alla base. Notiamo anche che i contatti tra ruota tagliata e creatore e presumibilmente tra ruote a) e ruote b) si manifestano sia su superfici (le ruote dentate possiedono uno spessore) sia su segmenti singolari, come mostrato in figura 6.4. Tali contatti singolari sono in grado, da un punto di vista teorico, di garantire il corretto e costante rapporto di trasmissione, che è un altro precetto (forte), il quarto. Detti contatti non sono però idonei a trasferire forze da un elemento all’altro; veniamo dunque al quinto precetto (forte): nella trasmissione del movimento devono necessariamente essere implicati contatti di strisciamento tra superfici aventi raggio di curvatura del loro profilo, nel punto di contatto, ben diverso da zero. Vedremo a breve che questo precetto ci porterà a considerare utili, al fine della costruzione delle ruote dentate, esclusivamente opportune coppie di profili coniugati, la cui definizione viene rimandata al prossimo paragrafo.

Altre due intuizioni potrebbero balenarci in mente: per prima cosa, ci sembra

probabile che una riduzione dell'altezza dei "denti di squalo" nella dentatrice possa essere un rimedio per la forma dei denti troppo sotto-tagliata alla base della ruota 1); la seconda osservazione riguarda il raggio della ruota creatrice. Infatti, qualora utilizzassimo una dentatrice che rimanesse inalterata una volta cambiata di segno la sua curvatura, non avremmo più due famiglie di ruote, ma una soltanto, le quali potrebbero (forse) ingranare tutte quante tra loro e questo, quello cioè di ridurre le famiglie di ruote da due a una, lo diamo come sesto precetto (debole)<sup>4</sup>. Tale simmetria dell'utensile creatore si chiama *auto-complementarità* e ci conduce a un creatore a dentiera rettilinea coi fianchi dei denti pure costituiti da segmenti di retta. Ma tutte queste intuizioni, che vengono in mente per lo più a chi le ruote dentate già le conosce, andrebbero poste in ordine. Per questo siamo costretti a toglierci dal nostro comodo sentiero intuitivo e addentrarci, per poi uscirne il prima possibile, nel più impervio cammino che porta alla costruzione dei cosiddetti *profili coniugati di assortimento*.

### 6.3 COSTRUZIONE DI PROFILI CONIUGATI DI ASSORTIMENTO

Questo paragrafo tratta un problema di cinematica riportato sulla maggior parte dei libri di Meccanica Applicata alle Macchine, ma anche su alcuni testi di Meccanica Razionale. Prima di impostare la definizione dei profili coniugati e di presentare una soluzione per il loro ottenimento, una volta date le primitive del moto, avvertiamo il lettore che di tutto questo studio si utilizzeranno soltanto un paio di conclusioni, legate a due casi molto particolari, e che tali risultati saranno esposti, in riassunto, all'inizio del prossimo paragrafo, al quale rimandiamo i lettori che non sentono particolare inclinazione per questo argomento.

Ma cosa sono due *profili coniugati*? Due curve regolari qualsiasi possono essere messe tra loro in una infinità di relazioni reciproche le quali, determinando il loro posizionamento e il loro movimento relativo, le rendono tra loro coniugate. Come vedremo a breve, ciascuna di queste infinite possibili relazioni, di natura matematica, che determina il movimento di una curva rispetto all'altra, deve però possedere alcune caratteristiche (poche) particolari. Siano  $\sigma_1(t) \equiv [\sigma_1(t)_x, \sigma_1(t)_y]^T$  e  $\sigma_2(\tau) \equiv [\sigma_2(\tau)_x, \sigma_2(\tau)_y]^T$ , nel piano cartesiano  $(x, y)$ , due curve continue e prive di singolarità in due dati intervalli dei loro parametri,  $t$  e  $\tau$ . Si scelga ora una funzione,  $\tau = f(t)$  definita negli intervalli di interesse, che mette in corrispondenza biunivoca due intervalli finiti di coppie di punti appartenenti alle due curve. La relazione tra i due parametri,  $f()$ , lega pertanto tra loro i punti  $\sigma_1(t)$  e  $\sigma_2(f(t))$  che saranno i candidati alla coniugazione andando, dopo opportune trasformazioni, a

---

<sup>4</sup>Chi vuole può trovare nel capitolo 11 la descrizione di particolari ruote a profilo cicloidale per le quali si tollera (o si richiede) la presenza di due famiglie di ruote.

coincidere. Inoltre, la stessa funzione  $f()$  metterà naturalmente in relazione anche le inclinazioni delle tangenti alle curve stesse, che indicheremo con  $\alpha_1(t)$  e  $\alpha_2(f(t))$ : anche questi due valori dovranno coincidere nel punto di coniugazione tra i profili. Per ora, richiediamo soltanto che  $f()$  sia continua e vedremo in seguito se a tale funzione siano da richiedere o meno altre restrizioni. Utilizziamo la relazione tra i due parametri per eseguire alcune *trasformazioni piane* di una delle due curve. In questa sede si è deciso ad arbitrio di operare su  $\sigma_2$ , per ottenere da tali trasformazioni (continue) la sua coniugata  $\sigma_1$ . Procediamo nel modo seguente; disegnata  $\sigma_1(t)$ , proponiamo la famiglia di curve  $\sigma_2(\tau)_t$ , che invilupperà  $\sigma_1$ , mediante la seguente relazione che consta di quattro trasformazioni piane, le quali legano tra loro le due curve

$$\sigma_2(\tau)_t = \mathbf{T}[\sigma_1(t)] \cdot \mathbf{R}[\alpha_1(t)] \cdot \mathbf{R}[-\alpha_2(f(t))] \cdot \mathbf{T}[-\sigma_2(f(t))] \cdot \sigma_2(\tau). \quad (6.2)$$

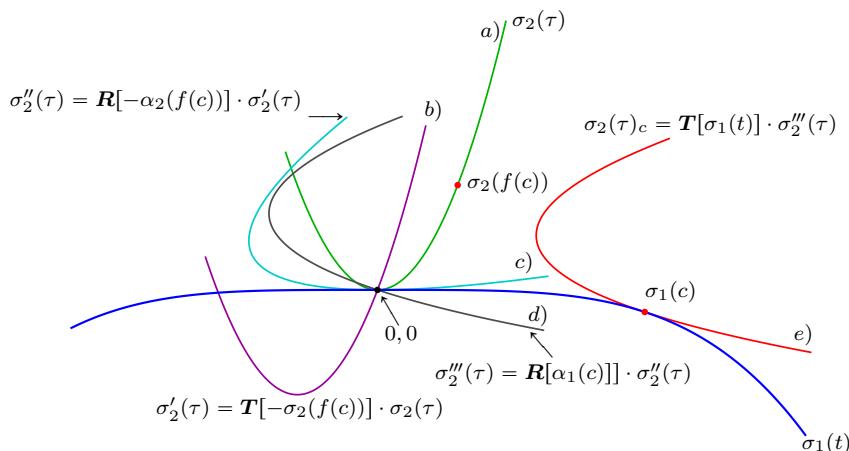


Figura 6.6: Le quattro trasformazioni della formula 6.2.

Le trasformazioni  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{R}$  sono rispettivamente le traslazioni e le rotazioni nel piano. Esse agiscono sui vettori colonna dei punti di  $\sigma_2$ . In particolare, le traslazioni  $\mathbf{T}$  accetteranno due parametri, dati dai punti  $[x, y]^T$  della curva che contengono come argomento, mentre le rotazioni  $\mathbf{R}$  ne accetteranno uno solo: tale parametro è l'angolo compreso tra la tangente alla curva, cui l'argomento della rotazione si riferisce, e una direzione arbitraria e fissa (nelle nostre figure, quella verticale). Allo scopo di chiarire la trasformazione operata in 6.2 illustriamo in figura 6.6 un esempio dove la curva  $\sigma_1$ , riportata in blu, è, nella fattispecie, una parabola di quarto grado rovesciata con vertice nell'origine, mentre la  $\sigma_2$ , verde, consiste in una parabola di secondo grado, sempre col vertice nell'origine e asse verticale. Infine, la funzione che lega i due parametri è semplicemente data da  $\tau = 0.3t$ . Rimarchiamo

che, nonostante tutte le scelte arbitrarie operate al fine di ottenere la figura 6.6 riflettano una decisa semplicità (parabole centrate, funzione lineare che lega i due parametri), ciò non inficia la generalità dell'esempio, come vedremo più avanti, dove lo stesso codice che genera la figura appena citata viene impiegato per la generazione di profili coniugati più complessi. Consideriamo la trasformazione 6.2 per un valore del parametro  $t = c$ . Tale parametro individua i punti  $\sigma_1(c)$  e  $\sigma_2(f(c))$ , in rosso nella figura 6.6. Analizziamo la 6.2 partendo da destra e mettendo in fila le operazioni necessarie per avere le due curve coniugate nel punto di  $\sigma_1(c) \equiv \sigma_2(f(c))$ . Il termine più a destra,  $\sigma_2(\tau)$ , sarà semplicemente la curva mobile a), di colore verde, già citata poc'anzi. La trasformazione  $T[-\sigma_2(f(c))]$  è una traslazione che porta il punto di  $\sigma_2$  destinato ad essere coniugato (col punto "c-esimo" di  $\sigma_1$ ) nell'origine degli assi. Il risultato è rappresentato dalla curva di colore violetto b) e nome  $\sigma'_2(\tau)$ . L'allineamento degli spazi tangenti alle due curve, nei punti di coniugazione (di parametri  $c$  e  $f(c)$ ), avviene in due fasi. Applichiamo alla  $\sigma'_2(\tau)$  una prima rotazione di segno contrario alla tangente a  $\sigma'_2$  in  $\tau = f(c)$ , ottenendo in tal modo  $\sigma''_2(\tau) = R[-\alpha_2(f(c))] \sigma'_2(\tau)$ , parabola c), riportata in colore azzurro chiaro. Applichiamo quindi una seconda rotazione, pari all'inclinazione della tangente a  $\sigma_1$  in  $c$ , ottenendo così  $\sigma'''_2(\tau) = R[\alpha_1(c)] \cdot \sigma''_2(\tau)$ , che è la parabola in colore grigio d). Finalmente,

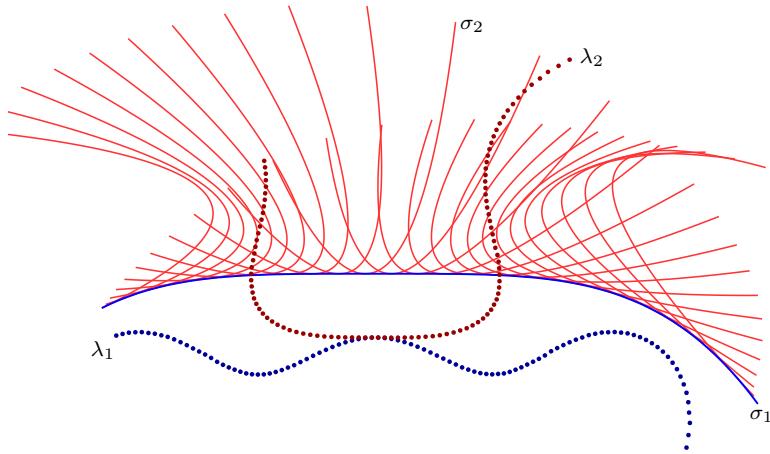


Figura 6.7: *Profili coniugati: inviluppo e relative polari.*

non rimane che traslare la curva  $\sigma'''_2(\tau)$ , la quale si trova ora col suo "c-esimo" punto in  $(0,0)$  e con la tangente in quel punto inclinata come la tangente a  $\sigma_1(c)$ , sul punto di coniugazione con  $\sigma_1$ , e questo si esegue mediante la traslazione  $\sigma_2(\tau)_c = T[\sigma_1(c)] \sigma'''_2(\tau)$ , ottenendo in tal modo la parabola e). Il risultato di queste operazioni, al variare del punto di coniugazione, cioè al variare di  $c$ , è quello mostrato in figura 6.7. La parabola di colore rosso,

che crea l'inviluppo di  $\sigma_1$ , viene rappresentata, onde evitare un eccessivo appesantimento dell'immagine, soltanto in una ventina di posizioni, rendendo comunque perfettamente l'idea del processo di inviluppo. Da un punto di vista matematico, le condizioni necessarie e sufficienti affinché la  $\sigma_2$ , durante il suo movimento, inviluppi la curva  $\sigma_1$  sono due, e precisamente è richiesto che i punti omologhi delle due curve coincidano per tutti i valori omologhi dei due parametri (nei due intervalli di interesse) e che, in tali punti, anche le tangenti alle due curve siano la stessa retta<sup>5</sup>.

Si intuisce facilmente che entrambe queste condizioni sono assicurate dal procedimento descritto dalla 6.2 e illustrato in figura 6.7 ma, rischiando di passare per pedanti, ne riportiamo comunque la dimostrazione. Quanto alla prima condizione, cioè la prescrizione che le due curve  $\sigma_2$  e l'inviluppo creato dalla 6.2, coincidano, essa deriva con semplicità da ciò che abbiamo discusso circa la struttura della 6.2 stessa. Considerando infatti un valore del parametro  $t = c$  e, di conseguenza,  $\tau = f(c)$ , avremo

$$\sigma_2(f(c))_c = \mathbf{T}[\sigma_1(c)] \cdot \mathbf{R}[\alpha_1(c)] \cdot \mathbf{R}[-\alpha_2(f(c))] \cdot \mathbf{T}[-\sigma_2(f(c))] \cdot \sigma_2(f(c)). \quad (6.3)$$

Ma considerando la prima (si parte sempre da destra) delle trasformazioni della 6.3 abbiamo

$$\mathbf{T}[-\sigma_2(f(c))] \cdot \sigma_2(f(c)) = (0, 0)^T. \quad (6.4)$$

Pertanto, tenendo presente che le rotazioni non hanno effetto sul vettore nullo, avremo

$$\sigma_2(f(c))_t = \mathbf{T}[\sigma_1(c)] \cdot \mathbf{R}[\alpha_1(c)] \cdot \mathbf{R}[-\alpha_2(f(c))] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}[\sigma_1(c)] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_1(c). \quad (6.5)$$

Poco più laboriosa è la dimostrazione della coincidenza delle tangenti alle due curve nel punto di coniugazione. Analizziamo, a tale proposito, in che modo la 6.3 trasforma il punto infinitamente vicino a quello di parametro  $c$  della curva  $\sigma_2$ . Tale punto risulta individuato dalla seguente espressione differenziale

$$\sigma_2(f(c) + d\tau) = \sigma_2(f(c)) + \frac{d\sigma_2}{d\tau}|_{(f(c))} d\tau, \quad (6.6)$$

dove il termine  $\frac{d\sigma_2}{d\tau}|_{(f(c))} d\tau$  rappresenta un vettore infinitesimo diretto come la tangente alla  $\sigma_2$  nel punto  $\sigma_2(f(c))$ . Chiamiamo con  $\delta_c$  il vettore infinitesimo

$$\delta_c = \sigma_2(f(c) + d\tau)_c - \sigma_2(f(c))_c, \quad (6.7)$$

intendendo con i due addendi a destra del segno di uguaglianza l'applicazione della 6.3 sia al punto  $\sigma_2(f(c) + d\tau)$ , sia al punto  $\sigma_2(f(c))$ . Data la linearità degli operatori presenti nella 6.3 vale, per gli operandi, la proprietà distributiva

$$\mathbf{T}() \cdot \mathbf{R}() \cdot \mathbf{R}() \cdot \mathbf{T}() \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{T}() \cdot \mathbf{R}() \cdot \mathbf{R}() \cdot \mathbf{T}() \cdot \mathbf{a} + \mathbf{T}() \cdot \mathbf{R}() \cdot \mathbf{R}() \cdot \mathbf{T}() \cdot \mathbf{b}. \quad (6.8)$$

Ciò che rimane dall'applicazione della 6.3 risulta quindi essere

$$\delta_c = \mathbf{T}[\sigma_1(c)] \cdot \mathbf{R}[\alpha_1(c)] \cdot \mathbf{R}[-\alpha_2(f(c))] \cdot \mathbf{T}[-\sigma_2(f(c))] \cdot \left( \frac{d\sigma_2}{d\tau}|_{(f(c))} d\tau \right). \quad (6.9)$$

<sup>5</sup>L'inviluppo di una curva, espressa come  $\phi(x, y, \lambda) = 0$  dove  $\lambda$  è il parametro che la muove nel piano, si ottiene eliminando il parametro stesso dal sistema

$$\begin{cases} \phi(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \phi(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0, \end{cases}$$

il che è del tutto equivalente a quanto da noi richiesto.

Sarebbe tedioso ripercorrere per gradi le operazioni illustrate in figura 6.6, pertanto ci limitiamo qui a seguire velocemente le trasformazioni del vettore tangente infinitesimo  $\frac{d\sigma_2}{d\tau}|_{(f(c))} d\tau$ . Ricordando che si parte sempre da destra, esso si muove, mediante il primo operatore di traslazione, nell'origine degli assi. Quindi, tramite le due rotazioni, tale vettore si dispone come la tangente alla curva  $\sigma_1$  nel punto  $t = c$ . Infine, mediante l'ultima traslazione  $\delta_c$ , esso si ritroverà proprio in tale punto di  $\sigma_1$ . Risulta così provato che anche i vettori tangenti alla  $\sigma_2$  diventano, dopo il procedimento di coniugazione, altrettanti vettori tangenti alla curva  $\sigma_1$ .

Abbiamo già ammesso che le due dimostrazioni, testé sviluppate e stampate con tipi minori, si presentano come leggermente superflue, essendo il procedimento contenuto nella 6.2, ed esposto graficamente in figura 6.6, intrinsecamente volto ad ottenere la coniugazione dei profili. Tali dimostrazioni ci sono però utili per meglio circoscrivere i vincoli matematici ai quali  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $f()$  devono sottostare. Affinché si possa manifestare la coincidenza nei punti di coniugazione, il che equivale alla possibilità di scrivere la 6.3, la funzione  $\tau = f(t)$ , che lega i parametri delle due curve, deve essere definita per tutti i valori di  $t$  nell'intervallo di interesse. Solo questo? Sì, soltanto questo. Ad essa non è chiesto né di essere monotona né di sottostare a restrizioni sulle sue derivate, anzi non è richiesta neppure la sua derivabilità. Deve essere chiaro però che ragionando in questo modo, cioè ammettendo che  $f()$  possa manifestare qualsiasi bizzarria, è probabile che non si ottengano profili coniugati con caratteristiche adatte all'impiego nella meccanica delle macchine. Per quanto riguarda la possibilità di scrivere la 6.6, che costituisce la base della seconda dimostrazione, circa la coincidenza delle tangenti ai profili, è richiesto che  $\sigma_2$ , e di conseguenza  $\sigma_1$ , siano differenziabili, e nulla più. Certo, si intuisce con facilità che aggiungendo altre restrizioni sia ai profili (immaginandoli ad esempio curve regolari e lisce), sia alla funzione che lega tra loro i due parametri (che si potrebbe ipotizzare continua e monotona), si intuisce, dicevamo, che le speranze di ottenere profili coniugati lisci, privi di singolarità e interferenze sarebbe superiore. Ma, come vedremo, tutte queste apprensioni circa la bontà dei profili e della relazione cinematica che li fa scorrere l'uno sull'altro sono fuori luogo nella meccanica applicata, dove saremo costretti ad ammettere che i (il?) soli profili interessanti sono anche estremamente semplici. Una volta nota, tramite la 6.2, la traiettoria di due punti qualsiasi appartenenti alla curva  $\sigma_2$ , chiamiamoli  $\sigma_2(\tau_1)$  e  $\sigma_2(\tau_2)$ , mentre essa inviluppa  $\sigma_1$ , possiamo individuare, al variare del parametro  $t$ , le normali a tali traiettorie. Per ciascun valore di  $t$ , dall'intersezione di dette normali, otterremo il centro istantaneo di rotazione di  $\sigma_2$ . Il luogo geometrico delle tracce dei centri istantanee di rotazione di  $\sigma_2$  si chiama *polare fissa* e verrà indicata con  $\lambda_1$ . La *polare mobile*,  $\lambda_2$ , si ottiene invece lasciando che, una volta individuato il centro istantaneo di rotazione per un dato valore di  $t$ , tale punto venga trascinato dal piano mobile. È sottinteso che, come sempre accade coi moti relativi, le parti possono essere invertite tenendo ferma

$\sigma_2$  e facendo muovere  $\sigma_1$ . Durante tale moto le polari verranno a scambiarsi tra loro ottenendo, in questo caso, la precedente polare mobile come attuale polare fissa. Polare fissa e polare mobile sono a contatto tra loro nel centro istantaneo di rotazione corrispondente ad un dato valore del parametro  $t$  e il loro movimento relativo è di puro rotolamento. In figura 6.7 sono rappresentate le polari del moto di  $\sigma_2$ , fissa e mobile, mediante un centinaio di punti scelti dal migliaio a nostra disposizione tramite il codice che genera la stessa figura 6.7 e le altre 6.8 e 6.9 e che, qualora fossero tutti disegnati, avrebbero reso continue tali curve. La rappresentazione di un minor numero di punti consente di rendere l'idea, tramite le distanze reciproche tra i punti stessi, della equivalenza delle lunghezze di tratti omologhi delle due polari, equivalenza implicata dal rotolamento. In generale le polari sono curve poco intuitive e possono presentare discontinuità e contenere punti impropri.

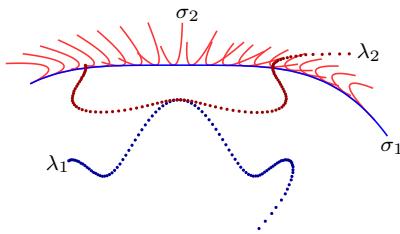


Figura 6.8: *Curva  $\sigma_2$  in scala ridotta e nuove polari.*

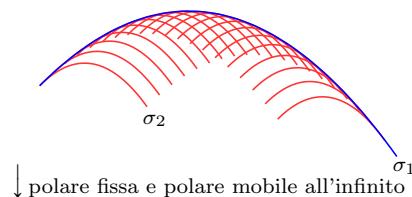


Figura 6.9: *Profili coniugati traslanti.*

Una situazione non molto dissimile da quella di figura 6.7 è quella rappresentata in 6.8, dove la curva  $\sigma_2$  è riportata in scala minore e  $\tau = 0.07t$ , allo scopo di mostrare quale cambiamento macroscopico subiscono le due polari del moto a fronte di un cambiamento, apparentemente leggero, di uno dei due profili coniugati. In figura 6.9 viene invece mostrata una curva  $\sigma_2$  che inviluppa, tramite un moto esclusivamente traslatorio, la curva  $\sigma_1$ , sua simile ma in scala maggiore. Per questo esempio è stata infatti scelta una funzione  $f()$ , che lega i due parametri, tale da portare a coniugazione i punti delle due curve aventi, a priori, la stessa tangente. È proprio questo il motivo che rende traslatorio il moto di inviluppo e che manda le polari del moto all'infinito rendendole due segmenti di rette improprie la cui direzione coincide con quella di spostamento del profilo  $\sigma_2$ . I profili coniugati che abbiamo finora analizzato sono stati ottenuti tramite curve  $\sigma_2(\tau)$  molto semplici, in pratica delle parabole. Altrettanto semplici sono i legami  $\tau = f(t)$  che definiscono, tramite la  $\sigma_1(t)$ , le leggi degli spostamenti di  $\sigma_2$ . In questo modo, gli inviluppi ottenuti somigliano a oggetti effettivamente utilizzabili nella meccanica delle macchine. Comeabbiamo però ripetuto altre volte, la teoria dei profili coniugati non mette restrizioni, se non molto blande, alle tre entità matematiche testé menzionate. Per esempio, le curvature di  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  possono essere

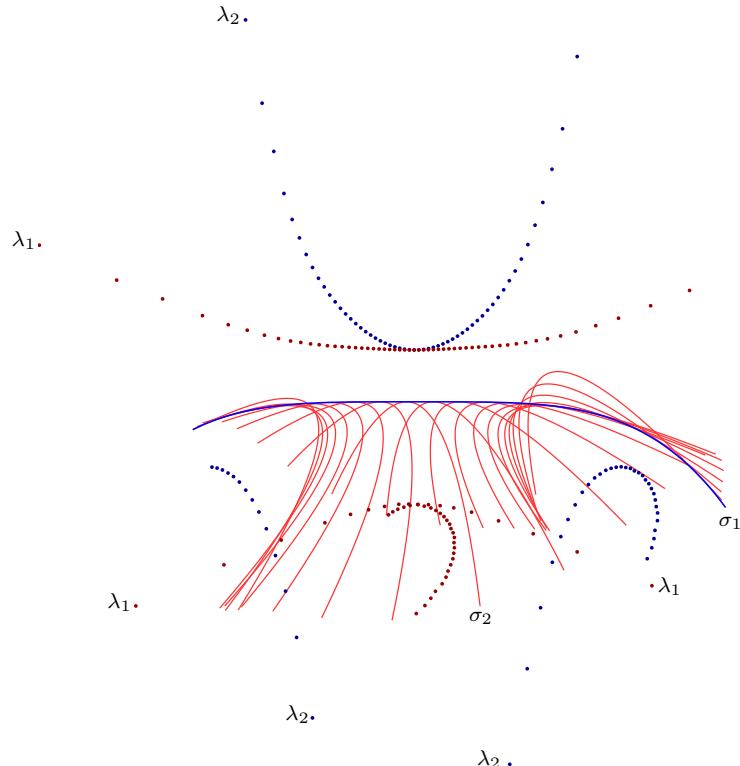


Figura 6.10: *Profili coniugati che si intersecano e polari discontinue.*

tali che, combinate alla funzione  $f()$ , producano inviluppi che si intersecano con le curve che li generano. In questi casi, le polari del moto presentano spesso discontinuità e punti all'infinito, come mostra la figura 6.10. Nel caso riportato in figura, le curve  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  sono ancora parabole, quindi curve semplici e regolari, e la funzione che lega i parametri delle due curve è ancora  $\tau = 0.3t$ . Ma le curvature dei due profili risultano tra loro “incompatibili”. Ben inteso, da un punto di vista puramente matematico tutto fila liscio come sempre. Nella tecnica, però, tali profili non possono essere utilizzati per trasmettere il movimento o per altre funzioni concrete quindi, per noi ingegneri, rimangono curiosità che appartengono alla teoria. Nella figura si possono anche vedere tutti gli spezzoni delle due polari per le quali si intravedono gli asintoti che indicano le direzioni dei loro punti impropri. Capovolgiamo il problema. Supponiamo di conoscere le polari del moto relativo, e investighiamo la possibilità di trovare due profili tra loro coniugati. Dettando le polari la legge geometrica del moto relativo del piano mobile rispetto a quello fisso, ad ogni curva appartenente al primo corrisponderà il relativo inviluppo sul secondo, il quale, del profilo mobile, sarà anche il profilo coniugato.

Notiamo infatti che le trasformazioni contenute nella 6.2 possono essere riferite a qualsiasi altra coppia di profili coniugati compatibili con il moto relativo esplicitato dalla stessa formula. Tra queste coppie di profili coniugati vi è, come caso particolare, quella formata alle polari, per le quali la legge che lega i due parametri è semplicemente  $\tau = t$ . Indicando così le polari del moto con  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , figura 6.11, la relazione 6.2 è perfettamente equivalente a

$$\sigma_2(\tau)_\eta = T[\lambda_1(\eta)] \cdot R[\beta_1(\eta)] \cdot R[-\beta_2(\eta)] \cdot T[-\lambda_2(\eta)] \cdot \sigma_2(\tau), \quad (6.10)$$

con ovvio significato degli angoli  $\beta_1$  e  $\beta_2$ . L'espressione 6.10 indica la famiglia di curve  $\sigma_2$  rappresentata in figura 6.11 in colore violetto. Basta, in questo caso, un solo parametro  $\eta$  a determinare in quale dei loro punti le polari sono a contatto, in quanto esse rotolano l'una sull'altra senza strisciare. Riteniamo superfluo dimostrare che la famiglia di curve  $\sigma_2(\tau)_\eta$  inviluppa il profilo  $\sigma_1$ , che nella figura 6.11 non viene tracciato in modo esplicito, in quanto dovremmo nuovamente ripetere la dimostrazione svolta tramite le formule da 6.3 fino a 6.9 e i relativi commenti. I parametri di  $\sigma_1(t)$  e di  $\sigma_2(\tau)$  saranno legati al parametro  $\eta$  da due relazioni imposte dal processo di inviluppo,  $t = f(\eta)$  e  $\tau = g(\eta)$ , le quali naturalmente richiederanno che per qualunque valore del parametro  $\eta$  si abbia  $\sigma_1(f(\eta)) = \sigma_2(g(\eta))$ . Nella figura 6.11 i due profili  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  si toccano in  $\sigma_1(f(\eta_0)) = \sigma_2(g(\eta_0))$ , e, ad arbitrio, abbiamo imposto  $\lambda_1(\eta_0) = \lambda_2(\eta_0) = (0, 0)^T$ , cioè che le due polari si tocchino, in quel caso, nell'origine delle coordinate cartesiane del piano fisso. Le trasformazioni contenute nella 6.10 dovrebbero ormai risultare famigliari; partendo, come le altre volte, da destra: imponiamo una traslazione del punto della polare  $\lambda_2$  di parametro  $\eta$  in  $(0, 0)$ , segue una rotazione della stessa di un angolo pari all'opposto dell'inclinazione della  $\lambda_2$  in  $\eta$ ,  $-\beta_2(\eta)$ , ancora una rotazione pari all'inclinazione della  $\lambda_1$ , sempre nel punto di parametro  $\eta$ ,  $\beta_1(\eta)$ . Infine, la traslazione nel punto di  $\lambda_1(\eta)$  completerà la trasformazione; rimandiamo il lettore alla figura 6.6 per maggior chiarezza. Rimane sottinteso che, in tutti questi spostamenti e rotazioni, la polare mobile trascina con sé il piano mobile e quindi  $\sigma_2$ . Un caso di grande interesse, anzi, il caso che giustifica ampiamente il procedere, che ammettiamo essere piuttosto laborioso, di questo paragrafo, è quello in cui la polare  $\lambda_2$  rotola su due

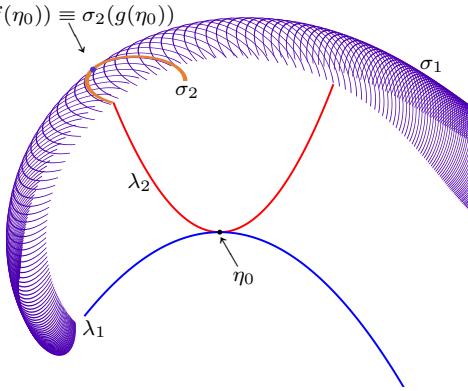


Figura 6.11: Profilo  $\sigma_1$  coniugato a  $\sigma_2$  ottenuto dall'inviluppo di  $\sigma_2$ , trascinata dalla polare mobile  $\lambda_2$  che rotola su  $\lambda_1$ .

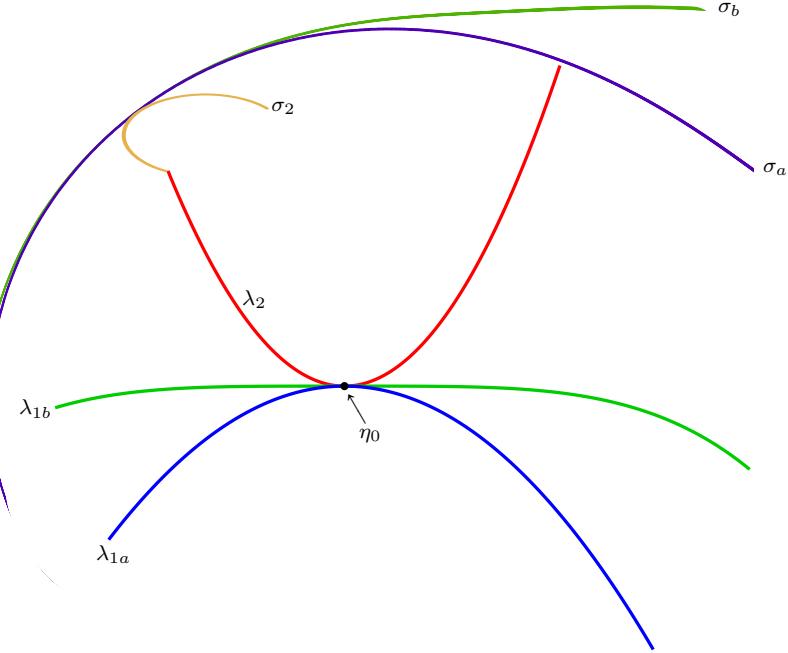


Figura 6.12: *Profili coniugati inviluppati dalla curva  $\sigma_2$  trascinata dalla polare  $\lambda_2$  che rotola sia su  $\lambda_{1a}$ , sia su  $\lambda_{1b}$ .*

diverse polari: identifichiamole coi nomi  $\lambda_{1a}$  e  $\lambda_{1b}$  e coi colori verde e blu, come rappresentato in figura 6.12. Anticipiamo, tanta è l'importanza che attribuiamo a questo passo, che una volta ottenuti i due inviluppi, mediante il rotolamento di  $\lambda_2$  su  $\lambda_{1a}$  e  $\lambda_{1b}$ , sarà  $\lambda_{1a}$  a rotolare su  $\lambda_{1b}$ , permettendoci così di osservare che i due inviluppi, precedentemente ottenuti, sono coniugati tra loro. Le relazioni che descrivono le famiglie delle  $\sigma_2$  che inviluppano  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$ , seguendo 6.10, saranno date dalla seguente coppia di relazioni

$$\sigma_{2a}(\tau)_\eta = \mathbf{T}[\lambda_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_2(\eta)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_2(\eta)] \cdot \sigma_2(\tau), \quad (6.11)$$

$$\sigma_{2b}(\tau)_\eta = \mathbf{T}[\lambda_{1b}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1b}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_2(\eta)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_2(\eta)] \cdot \sigma_2(\tau). \quad (6.12)$$

Come premesso, procederemo ora in questo modo: anziché fare rotolare la  $\lambda_2$  sulle altre due primitive, facciamo rotolare la polare  $\lambda_{1a}$  sulla  $\lambda_{1b}$ . Il rotolamento di  $\lambda_{1a}$  trascinerà naturalmente le  $\sigma_{2a}(\tau)_\eta$ , cioè le curve che stanno a primo membro nella 6.11 e che definiscono l'inviluppo di  $\sigma_a$ . Desideriamo dimostrare che tali curve, trascinate dal movimento di  $\lambda_{1a}$ , inviluppano anche le  $\sigma_b$ , ovvero che la  $\sigma_a$  inviluppa la  $\sigma_b$  durante il rotolamento di  $\lambda_{1a}$  su  $\lambda_{1b}$ . Tale inviluppo sarà indicato con  $\sigma_{2ab}(\tau)_{\eta_\mu}$  e, non avendo direttamente a disposizione l'espressione di  $\sigma_a$ , utilizzeremo la famiglia di curve che ne

definisce l'inviluppo, esplicitate dalla 6.11, ottenendo

$$\begin{aligned}\sigma_{2ab}(\tau)_{\eta\mu} &= \mathbf{T}[\lambda_{1b}(\mu)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1b}(\mu)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_{1a}(\mu)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_{1a}(\mu)] \cdot \sigma_{2a}(\tau)_\eta = \\ &= \mathbf{T}[\lambda_{1b}(\mu)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1b}(\mu)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_{1a}(\mu)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_{1a}(\mu)] \cdot \\ &\quad \mathbf{T}[\lambda_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_2(\eta)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_2(\eta)] \cdot \sigma_2(\tau). \quad (6.13)\end{aligned}$$

Ricordando che le polari rotolano l'una sull'altra senza strisciare, selezioniamo da questa doppia famiglia di curve quella di parametro  $\mu = \eta$  e poniamo le trasformazioni, scritte in colore rosso, contenute nella 6.13 nel seguente modo

$$\begin{aligned}\mathbf{R}[\beta_{1b}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{T}[\lambda_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1a}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_2(\eta)] = \\ = \mathbf{R}[\beta_{1b}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_2(\eta)], \quad (6.14)\end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente

$$\sigma_{2ab}(\tau)_{\eta\eta} = \mathbf{T}[\lambda_{1b}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[\beta_{1b}(\eta)] \cdot \mathbf{R}[-\beta_2(\eta)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_2(\eta)] \cdot \sigma_2(\tau). \quad (6.15)$$

Le espressioni del secondo membro delle 6.15 e 6.12 si equivalgono, pertanto la famiglia di curve ora ottenuta coincide con quella che si trova facendo rotolare la  $\lambda_2$  sulla  $\lambda_{1b}$ :  $\sigma_{2ab}(\tau)_{\eta\eta} \equiv \sigma_{2b}(\tau)_\eta$ , come si evince anche dalla figura 6.13, che rappresenta la situazione in cui la polare  $\lambda_{1a}$  rotola sulla  $\lambda_{1b}$  tocandola nel punto  $\lambda_{1a}(\eta_c) \equiv \lambda_{1b}(\eta_c)$ <sup>6</sup>. Nella stessa figura sono riportate, con colori meno marcati, anche la  $\sigma_2(\tau_i)$  e la polare  $\lambda_2$  che rimangono al proprio posto. Possiamo quindi affermare che, dati un insieme di polari  $\lambda_i$  e un profilo  $\sigma_0$  collegato ad una di queste, diciamo  $\lambda_0$ , i profili coniugati  $\sigma_i$ , che otterremo dagli inviluppi generati da  $\sigma_0$  quando  $\lambda_0$  rotola sull'insieme delle  $\lambda_i$ <sup>7</sup>, risultano tutti coniugati tra loro a coppie rispetto al moto generato dal rotolamento delle due polari associate a ciascuna di tali coppie. Questo importantissimo risultato costituisce lo scopo del presente paragrafo. Da esso discende la possibilità di creare *profili coniugati di assortimento*, questione di estrema importanza nella fabbricazione di famiglie di ruote dentate che, a primitive date, possano ingranare l'una con l'altra.

<sup>6</sup>Tutte le figure che rappresentano inviluppi sono state ottenute numericamente mediante l'applicazione diretta, nel codice, delle relative formule. Ad esempio, la curva  $\sigma_a$  di figura 6.13 è stata ottenuta dalla implementazione numerica della relazione 6.15. L'aspetto diverso di tale figura rispetto alla precedente 6.11, dove sono rappresentate tutte le curve inviluppanti, dipende dal seguente stratagemma. Oltre alle curve che creano l'inviluppo, disegnate col colore opportuno, viene tracciato un secondo insieme di curve, con lo stesso procedimento, in scala leggermente minore e di colore bianco, cioè quello del foglio. In tal modo si ottiene, visivamente, il solo inviluppo. Questo artificio potrebbe essere percepito da un occhio esperto.

<sup>7</sup>Anche se quanto affermiamo non presenta ricadute pratiche, possiamo lasciare, nell'insieme di polari sulle quali rotola  $\lambda_0$ , anche essa stessa. Così operando  $\sigma_0$  invilupperà sé stessa.

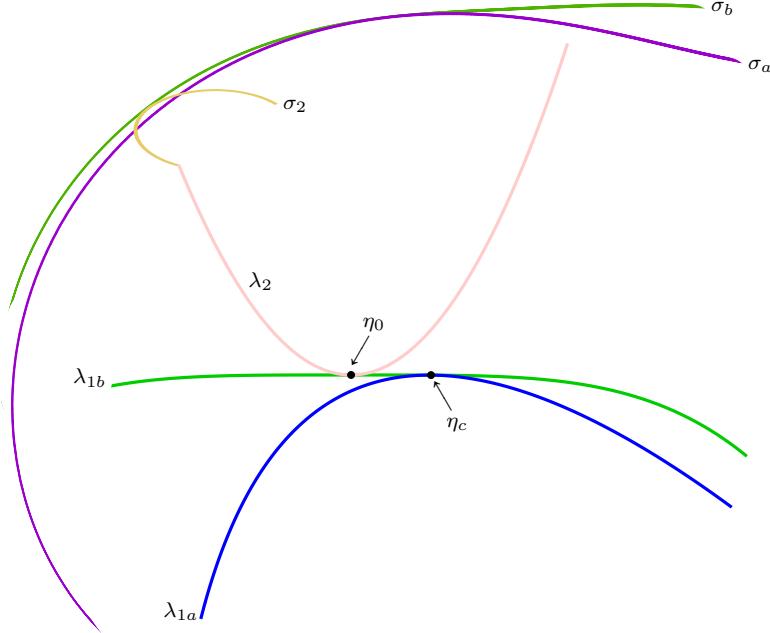


Figura 6.13: I profili  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  risultano a loro volta coniugati quando la polare  $\lambda_{1a}$  rotola sulla  $\lambda_{1b}$  tocandola in  $\mu_c = \eta_c$ .

Prendiamo di nuovo in considerazione la trasformazione 6.2 e la figura 6.6. Se omettessimo le ultime due delle quattro trasformazioni presenti (si parte sempre da destra), cioè se ci fermassimo alla parabola c), rappresentata in azzurro chiaro,  $\sigma''_2(\tau)$ , potremmo ridisegnare la stessa figura applicando alla  $\sigma_1$ , con segno opposto, le trasformazioni non effettuate sulla  $\sigma_2$ . Ovviamente la nuova figura risulterebbe traslata verso sinistra della quantità  $\mathbf{T}[-\sigma_1(t)]$  e la  $\sigma_1$  sarebbe ruotata di  $\mathbf{R}[-\alpha_1(t)]$ , ma la coniugazione tra i due profili risulterebbe perfettamente equivalente. Più in generale, riconsiderando la famiglia di polari  $\lambda_i$  e i relativi profili coniugati  $\sigma_i$  possiamo scrivere, per un dato parametro  $\eta_c$ ,

$$\sigma''_i(\tau)_{\eta_c} = \mathbf{R}[-\beta_i(\eta_c)] \cdot \mathbf{T}[-\lambda_i(\eta_c)] \cdot \sigma_i(\tau), \quad (6.16)$$

dove si riconosce una generalizzazione della 6.10 priva però delle ultime due trasformazioni a sinistra. Il vantaggio offerto da questo punto di vista è quello di trattare tutte le polari e i relativi profili coniugati mediante trasformazioni aventi la medesima struttura, le quali contengono soltanto informazioni circa quella stessa polare o profilo coniugato. Agendo in questo modo, il punto di contatto tra tutte le polari rimane fisso rispetto a un osservatore assoluto e perde di senso parlare di polari fisse e mobili. In figura 6.14 sono riportati i profili coniugati e le rispettive polari, coincidenti nei

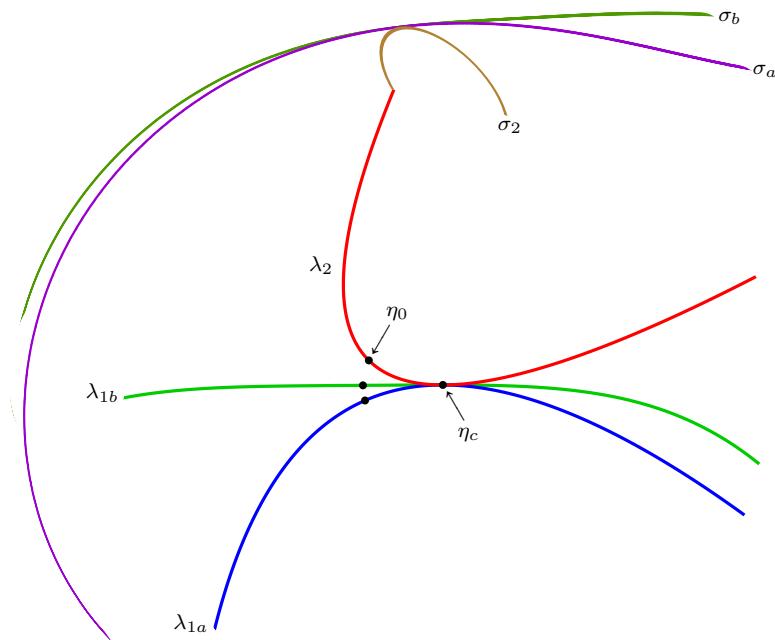


Figura 6.14: *Le primitive del moto rotolano l'una sull'altra in modo tale da mantenere fisso, rispetto all'osservatore assoluto, il loro punto di contatto.*

punti di parametro  $\eta_c$  tramite il punto di vista testé descritto e rappresentato dalla relazione 6.16. Il risultato vede ancora i profili tra loro coniugati (tutti e tre), mentre il punto di contatto tra tutte le polari, come abbiammo anticipato, rimane inalterato rispetto a un osservatore assoluto. Le tre polari si muovono in modo tale da evocare il funzionamento di un laminatoio. In questa rappresentazione del moto relativo le polari cambiano nome e diventano le *primitive del moto*. Nelle figure 6.12, 6.13 e 6.14 abbiamo scelto  $\sigma_2$  che genera gli altri profili coniugati, di forma ellittica. Se tale curva, rimpicciolandosi, degenerasse in un punto tutto l'impianto della generazione dei profili coniugati rimarrebbe inalterato. Le figure 6.15, 6.16 e 6.17 sono quelle che in tal caso si ottengono. Le riportiamo prive di commento, in quanto dovremmo ripetere i medesimi ragionamenti che abbiammo svolto poc'anzi senza alcuna aggiunta. Possiamo quindi affermare che anche i profili generati come traiettoria di un punto solidale a una delle polari o primitiva del moto, durante il suo rotolamento sulle rimanenti, sono tra loro coniugati. I profili coniugati di assortimento ottenuti come inviluppo di una linea saranno utilizzati nel prossimo paragrafo per disegnare le ruote dentate con denti profilati a evolvente di cerchio, le quali costituiscono la quasi totalità delle ruote dentate di uso comune nelle applicazioni tecniche. I profili provenienti invece dalla traiettoria di un punto possono generare ruote con denti a

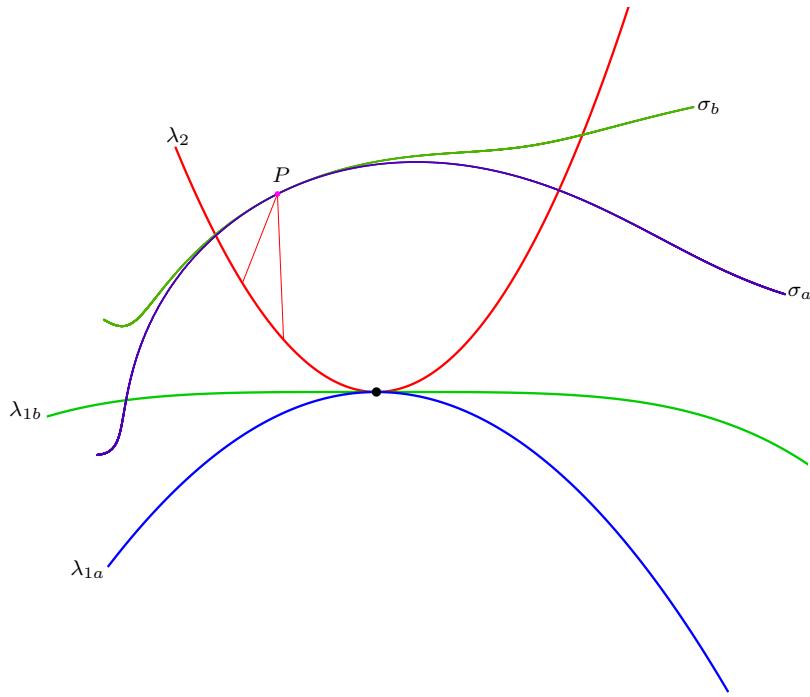


Figura 6.15: *Profili coniugati inviluppati come traiettorie di un punto  $P$  trascinato dalla polare  $\lambda_2$  che rotola sia su  $\lambda_{1a}$ , sia su  $\lambda_{1b}$ .*

profilo cicloidale. Queste, unitamente ad alcune loro applicazioni, verranno descritte brevemente, come già segnalato, nel capitolo 11. A conclusione di questo laborioso paragrafo possiamo affermare che le figure 6.12 e 6.15, insieme alle loro evoluzioni cinematiche, sono riportate su quasi tutti i testi di Meccanica Applicata alle Macchine. Citando il solito [9], esse si trovano tra le pagine 71 e 74. Ma tali figure risultano reperibili in un gran numero di testi dove campeggiano con aspetti spesso molto simili tra loro. Anche le dimostrazioni associate, le quali assicurano la possibilità di ottenere profili coniugati di assortimento, si somigliano tutte e probabilmente sono maggiormente valide ed eleganti, confrontate con quella che abbiamo proposto. Di sicuro sono molto più sintetiche.

#### 6.4 PROFILI CONIUGATI A EVOLVENTE

Torniamo ora volentieri al percorso intrapreso, dal quale qualche perplessità di troppo ci aveva costretto a una deviazione, per andare dritti allo studio della cinematica delle ruote dentate. Abbiamo lasciato il sentiero quando i dubbi circa la bontà delle soluzioni che ci proponeva via via l'intuito hanno

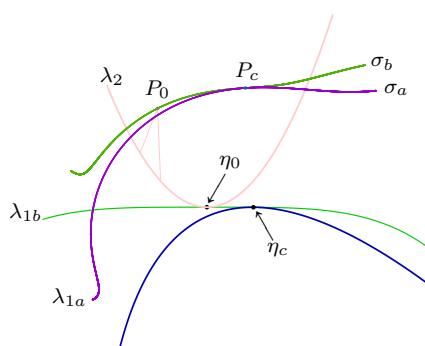


Figura 6.16: I profili  $\sigma_a$  e  $\sigma_b$  risultano a loro volta coniugati quando la polare  $\lambda_{1a}$  rotola sulla  $\lambda_{1b}$  tocandola in un punto con parametro  $\mu = \eta = c$ .

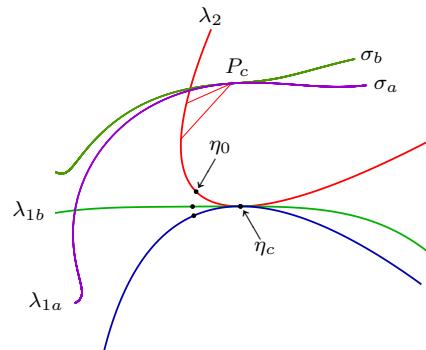


Figura 6.17: Le primitive del moto rotolano l'una sull'altra in modo tale da mantenere fisso, rispetto all'osservatore assoluto, il loro punto di contatto.

avvolto un punto chiave: le ruote delle due famiglie, a) e b), rappresentate nelle figure 6.4 e 6.5, di colore azzurro, ingraneranno tra loro correttamente? Le notizie contenute nel precedente paragrafo ci assicurano che i profili dei denti delle ruote a), ottenuti dall'inviluppo di quelli della dentatrice di figura 6.4 e quelli dei denti delle b), creati invece dalla dentatrice a curvatura opposta di figura 6.5, sono tutti tra loro coniugati. Del resto, essi sono ottenuti

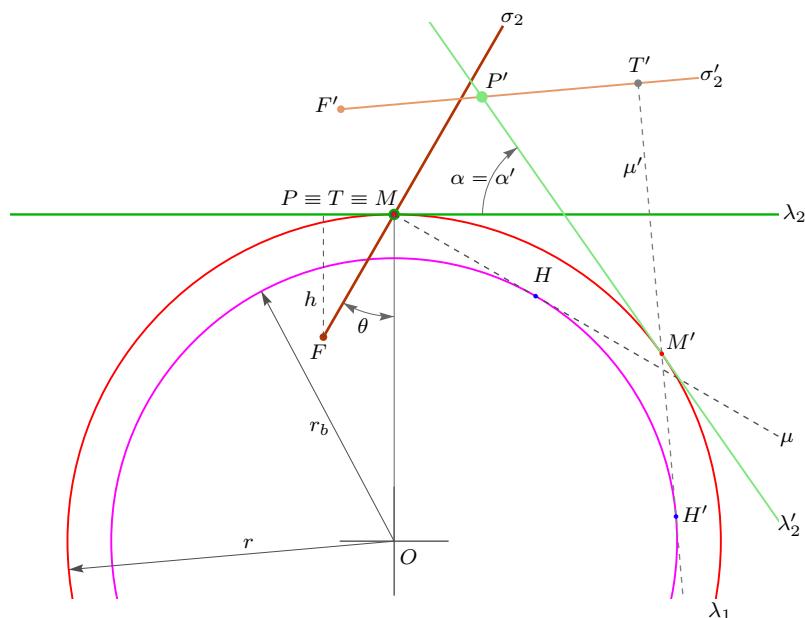


Figura 6.18: Impianto geometrico per la costruzione dell'evolvente (i).

come involuppo di un segmento di retta (un fianco del dente della dentatrice) che viene trascinato dalla stessa primitiva mentre rotola sia su una primitiva qualsiasi delle ruote a) sia su una appartenente alle b), involuppando così i profili dei loro denti. Tutte le ruote a) saranno pertanto ingranabili con le b), con l'ovvio limite, del quale abbiamo già fatto cenno in precedenza, che la dimensione di queste ultime non può superare quella della ruota dentatrice. Tale limite ci spinge a considerare, per il diametro della ruota di colore rosa di figura 6.4, valori molto grandi: e se pensassimo a una dentatrice di diametro infinito? In questo modo, oltre il problema di dentare le ruote b) di grandi dimensioni, si risolverebbe felicemente, come vedremo a breve, anche la noiosa questione delle due famiglie. Ricordiamo che, a suo tempo, tra i vari precetti da rispettare nella costruzione delle ruote dentate era emerso, in forma debole, quello di avere una sola famiglia di ruote di assortimento. Ci si rende facilmente conto che, trasformando la dentatrice in una *cremagliera*, con denti a fianco rettilineo, tale precetto viene automaticamente rispettato. Infatti, una circonferenza di raggio infinito presenta curvatura pari a zero e, stante il profilo rettilineo dei suoi denti, la dentatrice con curvatura opposta risulterebbe essere sempre la cremagliera di partenza. Tale caratteristica è conosciuta come *auto-complementarità* (dell'utensile). Ma andiamo per gradi e consideriamo la figura 6.18. Sia  $\lambda_1$  la primitiva circolare di raggio  $r$  della ruota che desideriamo costruire. Su di essa facciamo rotolare, rigorosamente in assenza di strisciamento, la primitiva  $\lambda_2$ , che è la retta disegnata in verde, alla quale è solidale la "curva"  $\sigma_2$ , il segmento marrone inclinato di  $\theta$  rispetto ad una retta ortogonale a  $\lambda_2$ <sup>8</sup>: questo segmento, trascinato dalla primitiva  $\lambda_2$  mentre rotola sulla circonferenza  $\lambda_1$ , creerà l'involuppo che stiamo cercando. La figura stabilisce che, per un valore dell'angolo  $\alpha = 0$ , la retta  $\lambda_2$  si trovi in posizione orizzontale e sia tangente alla circonferenza primitiva  $\lambda_1$  nel punto  $P$ . Il processo di involuppo, dal quale si otterrà il profilo coniugato a  $\sigma_2$ , consta nel fare appunto rotolare la  $\lambda_2$  sulla  $\lambda_1$ . A una rotazione generica  $\alpha = \alpha'$  corrisponderanno la retta  $\lambda'_2$  e il segmento  $\sigma'_2$ . È interessante individuare, su tale segmento, il punto attivo nella creazione del profilo coniugato, cioè il punto  $T'$  in cui il segmento risulterà tangente all'involuppo che stiamo creando.  $T'$  sarà perciò determinato dalla intersezione della retta che, passando dal centro istantaneo di rotazione  $M'$ , taglia ortogonalmente il segmento  $\sigma'_2$ , imponendo così che  $T'$  possieda velocità parallela al segmento  $\sigma'_2$  stesso. L'individuazione di tale punto porta con sé conseguenze profonde. I due triangoli  $\triangle P'T'M'$  e  $\triangle M'H'O$  sono simili, pertanto il secondo, al di

<sup>8</sup>La primitiva  $\lambda_2$ , indicata qui seguendo la tradizione come una retta, sarà, per ovvie motivazioni tecniche, un segmento di lunghezza opportuna, sufficiente ad ottenere il tratto di involuppo che formerà il fianco del dente. Il segmento  $\sigma_2$  viene tradizionalmente trattato come una semiretta la quale partendo dall'estremo  $F$  si estende all'infinito, permettendo in questo modo di disegnare l'intera evolvente. Anche in questo caso ci accontentiamo di un segmento, avendo già in mente che esso costituirà il fianco dei denti dell'utensile creatore.

là della sua posizione, rimane lo stesso per ogni valore di  $\alpha$ . Ciò significa che la lunghezza del segmento  $(H'M')$  (indicheremo d'ora in poi la lunghezza dei segmenti tramite le lettere che li individuano poste tra parentesi tonde) risulterà costante al variare di  $\alpha$  e precisamente avremo  $(H'M') = r \sin(\theta)$ . La retta  $\mu'$  risulta perciò tangente alla circonferenza di raggio  $r_b = r \cos(\theta)$  per qualsiasi valore di  $\alpha$ , dove  $r_b$ , grandezza di importanza rilevantissima, è il raggio della *circonferenza di base*. Inoltre, la lunghezza  $(H'T')$  sarà data dalla quantità  $(M'T')$ , variabile con  $\alpha$ , sommata alla quantità fissa  $(H'M')$ . Per  $\alpha = 0$  abbiamo  $P \equiv T \equiv M$  e naturalmente  $(H'M') = (HM)$ . Si osserva che risulta sempre  $(M'T') = (M'P') \cos(\theta)$  quindi, dato il rotolamento di  $\lambda_2$  su  $\lambda_1$ ,  $(M'P') = r\alpha$  e  $(M'T') = r\alpha \cos(\theta) = r_b\alpha$ . Questo indica altresì che la lunghezza dell'arco  $H'H$ , che sottende un angolo pari ad  $\alpha$ , equivale a  $(M'T')$  e che il segmento  $H'T'$  della retta  $\mu'$  si comporta, al variare di  $\alpha$ , come un filo che si svolge dalla circonferenza di base.

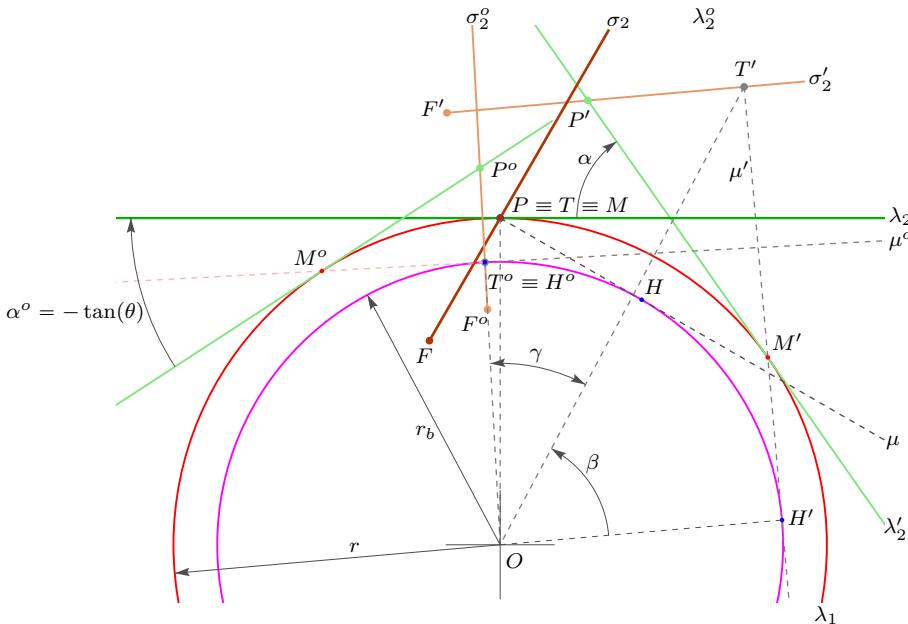


Figura 6.19: Impianto geometrico per la costruzione dell'evolvente (ii).

In questo intreccio di angoli, rette e segmenti riteniamo opportuno, riferendoci ora alla figura 6.19, individuare il valore dell'angolo  $\beta$  dato un generico valore di  $\alpha$ . Da semplici considerazioni trigonometriche otteniamo subito

$$\tan(\beta) = \frac{(H'T')}{(OH')} = \frac{(H'M') + (M'T')}{(OH')} = \frac{r \sin(\theta) + \alpha r \cos(\theta)}{r \cos(\theta)} = \tan(\theta) + \alpha. \quad (6.17)$$

Il capo del filo che si svolge dalla circonferenza di base si individua ponendo  $(H^oT^o) = 0$ , ottenendo in questo modo anche il valore dell'angolo  $\alpha^o$ , tale da fare coincidere  $H^o \equiv T^o$ :  $r \sin(\theta) + \alpha r \cos(\theta) = 0 \rightarrow \alpha^o = -\tan(\theta)$ .

Consideriamo ora la lunghezza del filo svolto dalla posizione  $H^o$  alla posizione  $H'$ , la lunghezza dell'arco  $H'H^o$  sarà

$$\widehat{(H'H^o)} = (H'T') \rightarrow (\beta + \gamma)r_b = r_b \tan(\beta), \quad (6.18)$$

ottenendo pertanto

$$\gamma(\beta) = \tan(\beta) - \beta. \quad (6.19)$$

La quantità ora ricavata, unitamente alla distanza

$$\rho(\beta) = (OT') = \frac{r_b}{\cos(\beta)}, \quad (6.20)$$

forma la coppia delle coordinate polari del punto generico  $T'$  dell'inviluppo che risulta essere l'*evolvente* della circonferenza di base con inizio nel punto  $H^o$ . Questa curva è riportata in vari manuali di Matematica, e può essere definita proprio come luogo dei punti dell'estremo di un filo che si svolge da una determinata circonferenza a partire da un punto iniziale. L'angolo  $\beta$  riveste i panni di parametro delle coordinate polari di questa curva ed è legato al nostro angolo di rotolamento  $\alpha$  dalla relazione 6.17. Tale formula permetterebbe, invertendo la tangente, di sostituire  $\beta$  con  $\alpha$  nelle 6.19 e 6.20. Ma questa operazione non viene in genere eseguita, forse perché, come vedremo a breve, in quel poco (o molto) utilizzo che si fa delle coordinate polari dell'evolvente, l'angolo  $\beta$  si comporta egregiamente.

Riepiloghiamo. La costruzione di profili di assortimento per i denti ci porta a una primitiva comune a tutti gli inviluppi che è una retta,  $\lambda_2$ , che roolerà sulle primitive delle ruote da tagliare. Ulteriori considerazioni, legate alla simmetria, ci indicano come curva inviluppante un segmento di retta,  $\sigma_2$ , solidale a  $\lambda_2$  e inclinato rispetto a questa di un angolo opportuno,  $\pi/2 - \theta$ . L'angolo  $\alpha$ , mediante il quale la  $\lambda_2$  rotola sulla circonferenza di raggio  $r$ , governa il processo di inviluppo. Tramite i ragionamenti sopra esposti perveniamo alla definizione di tale inviluppo che risulta essere un'evolvente della circonferenza di base, di raggio  $r_b = r \cos(\theta)$ . Pur riconoscendo l'elevato valore culturale di questa scoperta, del fatto cioè che il profilo dei denti, ottenuti tramite il taglio con una dentiera rettilinea a fianchi pure rettilinei, sia un'evolvente della circonferenza di base, non dedicheremo nel presente lavoro molto spazio a questa affascinante curva geometrica. Come riportato in [13], dal quale confessiamo di avere preso diversi spunti: "Il fatto che il profilo attivo sia una evolvente di cerchio è, in fondo, una fortunata coincidenza". Ci troviamo d'accordo con questa affermazione, riservandoci di valutare meglio l'epiteto. Torneremo a breve su alcune (poche) applicazioni delle formule relative all'evolvente, nel paragrafo che tratta la correzione delle ruote mediante lo spostamento dei profili, in particolare quando opereremo con variazione di interasse. Prima di passare agli inviluppi veri e propri, che definiranno la forma dei denti, è bene fare ancora qualche considerazione

sulla figura 6.19. Quando la retta  $\lambda_2$  si trova nella posizione  $\lambda_2^o$  il punto  $T^o \equiv H^o$  cade sulla circonferenza di base. Tale posizione rappresenta, sul segmento  $\sigma_2$ , l'estremo oltre il quale quest'ultimo risulta inefficace nel creare l'inviluppo. Pertanto, una posizione dell'estremo  $F$  esterna a tale punto, come quella riportata nelle nostre figure, è disutile in quanto la frazione in eccesso, non partecipando all'inviluppo, avrebbe come unico effetto quello di distruggere una porzione del materiale da tagliare: una situazione analoga a quella di figura 6.10, innocua nella teoria, inaccettabile nella pratica. La distanza  $(T^oP^o)$  ha perciò un significato tecnico importante e vale

$$(T^oP^o) = \frac{r}{\cos(\theta)} \sin^2(\theta), \quad (6.21)$$

come si deduce facilmente considerando i due triangoli simili  $\triangle OP^oM^o$  e  $\triangle M^oP^oT^o$ . In figura 6.18 è stata indicata con  $h$  la lunghezza della proiezione di  $FP$  su una direzione ortogonale all'epiciclo  $\lambda_2$ . Tale lunghezza rappresenta, come vedremo a breve, una porzione dell'altezza dei denti dell'utensile che stiamo cercando.

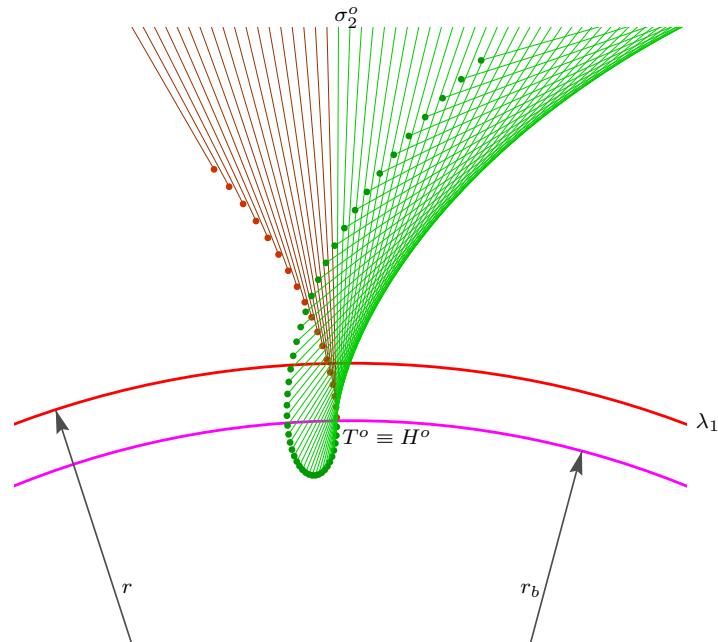


Figura 6.20: *Inviluppo dell'evolvente e relativo arco di trocoide. Sporgenza di  $\sigma_2$  uguale ad  $h_{\max}$ ,  $\theta = 20^\circ$ .*

Risulta perciò ancora più rilevante specificare la lunghezza della proiezione di  $(T^oP^o)$  sulla direzione ortogonale a  $\lambda_2^o$ , che fornirà la massima altezza utile, a partire da  $\lambda_2$ , dei denti della nostra dentiera generatrice:

$$h_{\max} = r \sin^2(\theta). \quad (6.22)$$

La figura 6.20 mostra un fianco di dente, inviluppato dal segmento  $\sigma_2$ , proprio in questa condizione limite, quando cioè  $(FP) = (T^o P^o)$ . Si può notare che, affinché l'evolvente sia completa, partendo dalla circonferenza di base, il fianco della dentiera scava ulteriormente al di sotto di questa, costruendo un raccordo alla base del fianco del dente stesso. La medesima figura ci mostra che, al variare di  $\alpha$ , l'estremo del segmento generatore non sconfini mai al di là del prolungamento ideale di  $\sigma_2^o$  verso il centro della ruota, essendo  $\sigma_2^o$  l'ultima posizione utile nell'inviluppo dell'evolvente stessa. Le ulteriori posizioni di  $\sigma_2$ , riportate in colore marrone, rappresentano l'uscita di scena del profilo creatore. Sull'estremo inferiore di quest'ultimo abbiamo evidenziato un minuscolo cerchio, rispettando la coerenza del suo colore e quello del segmento che lo porta. Tali cerchi definiscono graficamente l'arco di *trocoide*<sup>9</sup> che, come si vede, delinea un raccordo del profilo del dente con una possibile circonferenza interna a quella di base: la *circonferenza di piede*.

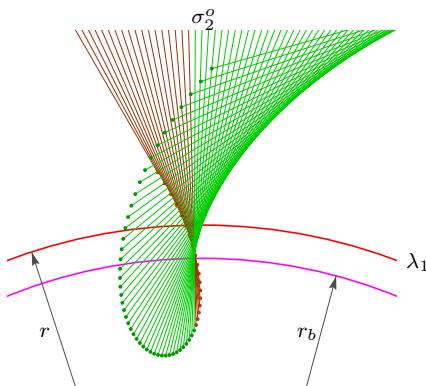


Figura 6.21: *Inviluppo con  $\theta = 20^\circ$*   
e  $(FP) = 2(T^o P^o)$ .

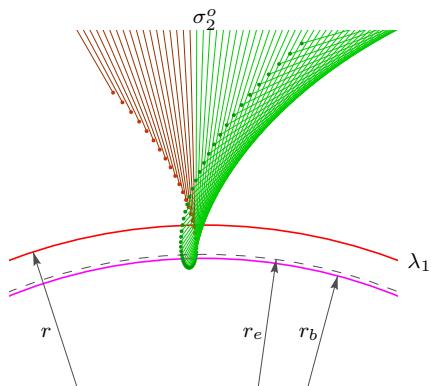


Figura 6.22: *Inviluppo con  $\theta = 20^\circ$*   
e  $(FP) = 0.66(T^o P^o)$ .

Il raggio della circonferenza di piede si deduce considerando che la proiezione del segmento  $FP$  sulla direzione ortogonale a  $\lambda_2$  è la massima profondità, in direzione radiale, alla quale arriverà la trocoide e vale

$$r_p = r - (FP) \cos \theta = r - h . \quad (6.23)$$

La figura 6.21 rappresenta l'inviluppo creato da un segmento  $\sigma_2$  di lunghezza eccessiva (verso la ruota da tagliare). L'evolvente risulta completa e tocca la circonferenza di base, ma il fianco del dente viene scavato alla base e una piccola parte della evolvente stessa viene distrutta: situazione questa che viene indicata col nome di *sottotaglio dei denti*. La figura 6.22 rappresenta invece

<sup>9</sup>Si chiamano trocoli le curve disegnate da punti esterni all'epiciclo e solidali con esso durante il rotolamento di quest'ultimo sulla circonferenza che percorre. Nel nostro caso l'epiciclo (o ipociclo: nella teoria è possibile far rotolare circonferenze più grandi all'interno di quelle più piccole) è la retta  $\lambda_2$  che rotola sulla primitiva  $\lambda_1$ .

il profilo ottenuto quando il segmento  $\sigma_2$  ha una lunghezza insufficiente a inviluppare tutta l'evolvente, alla quale mancherà un arco in prossimità della circonferenza di base. La coordinata polare radiale del punto dell'evolvente  $T'$ , già riportata nella formula 6.20, si può anche ricavare, con riferimento alla figura 6.19, applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $\Delta OT'H'$ . Al fine quindi di individuare il raggio della circonferenza da cui partirà l'evolvente, sostituiamo il punto  $T'$  con l'estremo di  $F$  di  $\sigma_2$  prestando attenzione al segno opportuno per la porzione di segmento  $PF$ . Stanti queste premesse, l'evolvente partirà da una circonferenza di raggio

$$r_e = \sqrt{r_b^2 + \left( \frac{r_b \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{(FP) \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2}, \quad (6.24)$$

e in termini di sporgenza dei denti della dentiera (utensile)  $h$

$$r_e = \sqrt{r_b^2 + \left( \frac{r_b \sin \theta}{\cos \theta} - \frac{h}{\sin \theta} \right)^2}. \quad (6.25)$$

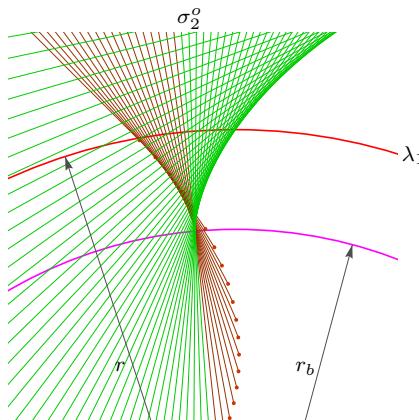


Figura 6.23: *Involuppo con  $\theta = 35^\circ$  e  $(FP) = 2(T^oP^o)$ .*

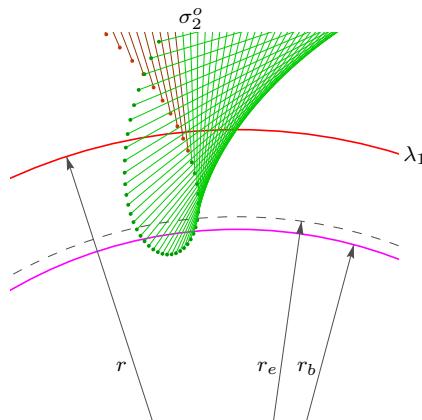


Figura 6.24: *Involuppo con  $\theta = 35^\circ$  e  $(FP) = 0.66(T^oP^o)$ .*

Giusto per dare un'idea dell'influenza che il valore dell'angolo di pressione  $\theta$  esercita su quello che sarà il profilo dei denti riportiamo le figure 6.23 e 6.24 per le quali, anziché assumere  $\theta = 20^\circ$ , che è il valore *standard* dell'angolo di pressione, si è posto  $\theta = 35^\circ$ . La differenza più rilevante tra queste ultime due figure e le loro precedenti omologhe consta in una significativa riduzione del raggio di base. Ciò permette, aumentando l'angolo di pressione, di poter considerare altezze utili della dentiera più elevate, come del resto è evidente anche dalla formula 6.22. Ci si può chiedere se due profili, generati con angoli  $\theta$  diversi, siano tra loro coniugati. Formulata in questo modo la domanda e di conseguenza la risposta necessitano di qualche precisazione. La

risposta è negativa qualora intendessimo far rotolare, l'una sull'altra, le due circonferenze primitive (assegnate) e ottenere i due profili tramite due diversi epicicli. È la teoria dei profili coniugati a escluderlo: deve necessariamente essere lo stesso epiciclo a rotolare su tutte le primitive per poter ottenere i cosiddetti *profili di assortimento*. Qualora invece ci si interroghi circa la possibilità di coniugare i due profili a evolvente tramite circonferenze primitive diverse da quelle di partenza la risposta è affermativa. Infatti le due curve saranno le evolventi di due circonferenze di base di raggi  $r_{b_1}$  e  $r_{b_2}$ . Se tali circonferenze vengono affacciate, mantenendo i loro centri a distanza  $i > r_{b_1} + r_{b_2}$ , si avranno due possibili raggi primitivi e un possibile angolo di pressione dati da

$$r_1 = \frac{r_{b_1}i}{r_{b_1} + r_{b_2}}, \quad r_2 = \frac{r_{b_2}i}{r_{b_1} + r_{b_2}} \text{ e } \theta = \arccos \frac{r_{b_1} + r_{b_2}}{i}. \quad (6.26)$$

Lasciamo la verifica di queste formule alla volontà di qualche studente. Anticipiamo solamente che i valori dei due raggi primitivi presentano scarso interesse applicativo, mentre quello dell'angolo di pressione per un interasse dato risulta molto rilevante per gli ingranaggi con ruote corrette, come vedremo, in succinto, in un prossimo paragrafo. Il fatto che i profili a evolvente siano, entro limiti ragionevoli, tutti fra loro potenzialmente coniugati mediante primitive circolari risulta di grandissima importanza. Da ciò deriva infatti la facoltà di variare, sempre entro i limiti menzionati, l'interasse di progetto nella fase di montaggio delle ruote che portano tali profili: vantaggio notevole, che permette di assorbire eventuali errori di fabbricazione e messa in opera. Un risultato ancora più importante della flessibilità derivante dalla 6.26 è la possibilità di tagliare le cosiddette ruote a profilo corretto nelle quali, sacrificando senza alcun rimorso la geometria "normale" di tali ruote e spostando opportunamente l'utensile creatore, si ovvia al grave problema del sottotaglio, chiamato spesso *interferenza* che, come vedremo in un prossimo paragrafo, pone un limite inferiore al numero di denti dei pignoni; ma soprattutto offre al progettista l'opportunità di individuare una strategia di ottimizzazione degli ingranaggi, quasi sempre basata sull'utilizzo di interassi diversi da quelli che imporrebbe il taglio di ruote "normali".

## 6.5 PROPORZIONAMENTO MODULARE DELLE RUOTE

Si è già accennato altrove che, in ottemperanza al primo preceitto che abbiamo ammesso, cioè il vincolo che impone un numero intero di denti per le ruote dentate, nel progetto di queste ultime si parte dal loro numero di denti, e non dai loro diametri o dai loro raggi. Il numero di denti  $z$  di una ruota rappresenta però solamente una "situazione" geometrica angolare. In pratica,  $z$  impone il numero di spicchi mediante il quale si desidera dividere la torta. La dimensione effettiva della ruota deve pertanto essere legata a un

fattore di scala dimensionale. Tale parametro si chiama *modulo*,  $m$ , ed è a sua volta legato al numero di denti e al raggio della circonferenza primitiva dalla relazione

$$2r = mz, \quad (6.27)$$

già riportata in precedenza, ma di importanza tale da non farci sentire in imbarazzo ripetendola. Il modulo  $m$  viene espresso, nei paesi in cui si usa il sistema metrico decimale, in mm. Abbiamo già fatto cenno anche al *passo* della ruota che è la lunghezza dell'arco di primitiva che separa due fianchi, destri o sinistri, attigui:

$$p = \pi m. \quad (6.28)$$

Dalla 6.28 si deduce immediatamente che la possibilità di ingranare di due ruote dentate è condizionata dal loro modulo: soltanto ruote con moduli uguali tra loro potranno formare ingranaggi. L'unificazione impone per il modulo  $m$  una certa successione di valori normalizzati, della quale riportiamo i più usuali  $m = 1, 1.25, 1.5, 2, 2.5, 3, 4, 5, 6$  mm. Si riduce, in questo modo, la varietà di scelta di questo fondamentale parametro a fronte di notevoli vantaggi, evidenti nella fase di progettazione, ma ancora di più se si pensa alla fase di taglio. A ciascun valore del modulo corrisponde infatti un certo numero di utensili, *in primis* la dentiera tagliente (o l'utensile creatore) e a seguire le mole di rettifica, ove necessario. Per passare dai profili rappresentati nelle precedenti figure agli effettivi fianchi dei denti delle ruote da tagliare occorre estendere l'impianto teorico della primitiva  $\lambda_2$  equipaggiata di un solo segmento  $\sigma_2$  aggiungendo altre parti e apportando qualche leggera modifica a tali elementi.

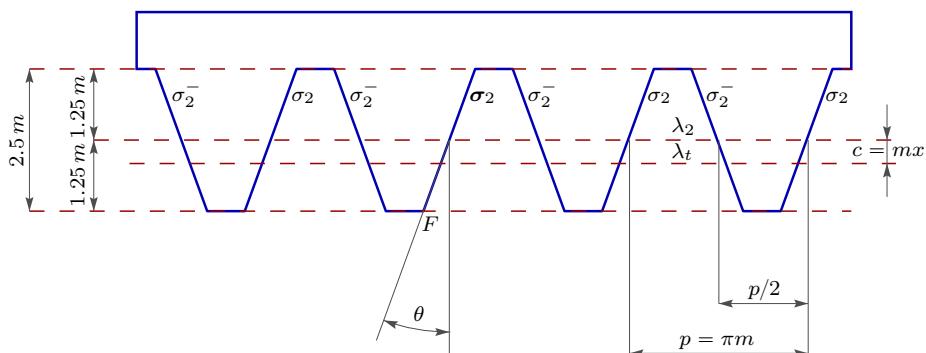


Figura 6.25: *Dentiera normalizzata di riferimento.*

In figura 6.25 si possono notare la primitiva  $\lambda_2$  e il segmento  $\sigma_2$  contornati da altri oggetti dei quali definiremo, in breve, natura e scopo. Innanzitutto,

notiamo che, a parte il numero di denti dell'utensile<sup>10</sup> e l'angolo  $\theta$ , tutte le altre grandezze sono facilmente rapportabili al modulo  $m$ . Il profilo  $\sigma_2$ , che nelle figure 6.18 e 6.19 terminava in basso col punto  $F$ , e che veniva volutamente lasciato di lunghezza indefinita all'altro capo, viene ora troncato in modo speculare (non invertito) rispetto a  $\lambda_2$ , sapendo già che i denti, dovendo avere altezza finita, non beneficierebbero del prolungamento dell'evolvente oltre quella che, con nome significativo, si chiama *circonferenza di testa*. Tale segmento viene poi ripetuto diverse volte e precisamente il doppio del numero di denti di cui si vuole dotare l'utensile creatore. La metà di tali segmenti, segnati coi nomi  $\sigma_2^-$ , è orientata in modo da creare un angolo  $-\theta$  con una linea perpendicolare  $\lambda_2$ . Questi fianchi dell'utensile sono necessari per costruire, in una sola passata, entrambi i fianchi dei denti: le ruote dentate trasmettono il moto in tutte e due le direzioni possibili e per tali direzioni il loro comportamento deve essere equivalente<sup>11</sup>. Per una *dentiera normalizzata* valgono le seguenti relazioni, una parte delle quali è riportata anche nella figura: l'altezza dei denti è legata al modulo e vale  $2.5m$ , ugualmente ripartita tra *addendum* e *dedendum*, che pertanto valgono entrambi  $1.25m$ ; i denti e i vani hanno la medesima forma e il passo tra due fianchi consecutivi e omologhi, misurato su una qualunque retta orizzontale che intercetti tali fianchi, vale  $p = \pi m$ . Il valore dell'angolo di pressione che, in Europa, si ritiene normalizzato vale  $\theta = 20^\circ$ . Oltre alla primitiva  $\lambda_2$ , sempre in figura 6.25, troviamo la retta orizzontale  $\lambda_t$  che chiameremo *primitiva di taglio*, e che individua l'effettiva primitiva usata durante il moto di taglio: essa, rotolando sulla primitiva della ruota da tagliare, crea, tramite i profili  $\sigma$ , i profili dei denti. Tale retta, rappresentata a distanza  $c = mx$  da  $\lambda_2$ , si troverà a coincidere con questa ( $c = 0$ ) nel taglio di *ruote normali non corrette*:  $x$  si chiama *fattore di correzione adimensionale*, del quale daremo qualche ulteriore notizia in un prossimo paragrafo.

## 6.6 TAGLIO DELLE RUOTE DENTATE PER INVILUPPO

Siamo ormai dotati dell'utensile opportuno per poter eseguire di nuovo le dentature delle figure 6.4 e 6.5. Chiediamo al lettore di pazientare ancora un momento, in modo da poter ritoccare il nostro utensile e renderlo somigliante a quelli che realmente si usano nel processo industriale del taglio delle

<sup>10</sup>Il numero di denti  $z_c$  dell'utensile creatore (*Maag*) è normalmente contenuto tra i limiti  $1 \leq z_c \leq 8$ , riservando il valore maggiore, in generale, al taglio di ruote con numero di denti  $z > 60$ .

<sup>11</sup>Ricordiamo i precetti introdotti: il secondo (debole) prescrive proprio questa simmetria. Esso viene talvolta disatteso, sia per particolari applicazioni che richiedono asimmetria di comportamento dell'ingranaggio rispetto alle direzioni del flusso di potenza, sia per ottenere vantaggi circa la riduzione di rumorosità della trasmissione, come testimoniato da alcune specifiche e recenti ricerche. Stando alla nostra modesta esperienza, confessiamo però di non aver mai toccato con mano *ruote asimmetriche*.

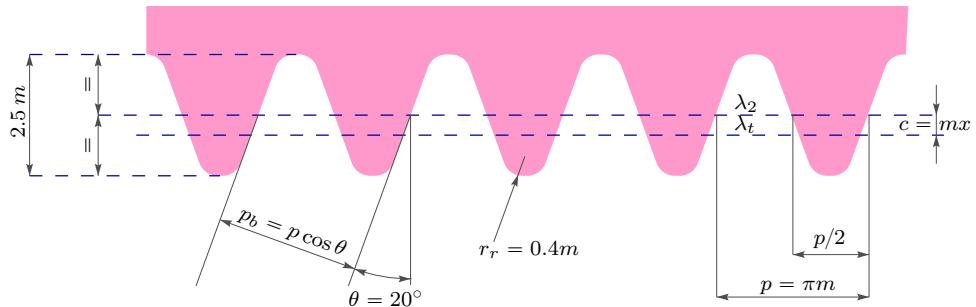


Figura 6.26: Utensile Maag.

ruote dentate. Chiariamo subito che la dentiera rappresentata in figura 6.26 corrisponde solo teoricamente a quelle che si usano nel processo di taglio per inviluppo delle ruote dentate e che portano il nome *Maag*. Infatti, tali utensili a forma di pettine devono possedere, oltre alle qualità geometriche che interessano la nostra disciplina, molti altri accorgimenti, come quelli che permettano il loro afferraggio sulla macchina dentatrice e altri che facilitino il processo tecnologico del taglio mediante asportazione di truciolo: i taglienti affilati e gli angoli di spoglia, irrinunciabili in tali processi<sup>12</sup> e non facilmente rappresentabili nel piano dove giacciono i profili dei denti. La differenza più evidente tra la dentiera di riferimento di figura 6.25 e l'utensile Maag, è la forma arrotondata delle teste e del fondo dei denti. Questo accorgimento si rende necessario per due ordini di difficoltà che l'uso di una dentiera con spigoli vivi comporterebbe. La prima di tali difficoltà risiede in ambito tecnologico e si può riassumere dicendo che i taglienti spigolosi (benché ammissibili) sono estremamente più fragili rispetto a quelli che presentano spigoli arrotondati. Il secondo vantaggio offerto dallo smusso dei denti riguarda la possibilità di costruire pignoni recanti un minor numero di denti, cioè di ovviare in parte a quello che tradizionalmente si chiama *problema dell'interferenza*, alla soluzione del quale dedicheremo, appena più avanti, uno spazio adeguato. Crediamo sia istruttivo fare un confronto tra gli inviluppi prodotti dalla dentiera di riferimento e dall'utensile *Maag* sullo stesso pignone con  $z = 17$ , che, come vedremo, presenta il minimo numero di denti possibili, al di sotto del quale si manifesta il sottotaglio alla base dei denti. Come mostrato in figura 6.27, la quale riporta l'inviluppo ottenuto da una dentatrice con spigoli vivi, lo sconfinamento verso l'asse del dente

<sup>12</sup>Nella pratica è molto frequente mettere diversi pettini come quelli di figura 6.26 adagiati sulle generatrici di un cilindro, ottenendo così quello che in gergo si chiama *creatore*. Il creatore taglia i denti tramite un movimento rotatorio e traslatorio e il moto di rotolamento tra le due primitive avviene con continuità. Per quest'ultimo motivo, l'asse dei denti di ciascun pettine deve essere un'elica, e l'insieme di queste schiere di denti conferiscono all'utensile l'aspetto di una vite.

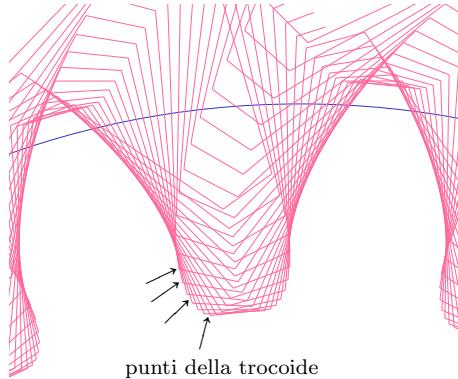


Figura 6.27: *Profilo dei denti generati dalla dentiera di riferimento:  $z = 17$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $r_r = 0$ .*

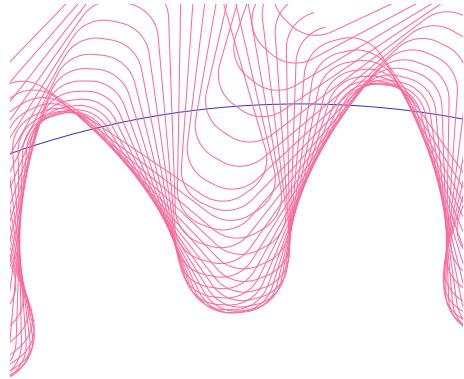


Figura 6.28: *Profilo dei denti generati da dentiera Maag:  $z = 17$ ,  $\theta = 20^\circ$ ,  $r_r = 0.4m$ .*

dei punti del raccordo di piede (l'arco di trocoide) rende la base del dente stesso sottotagliata. Questo comporta una sua diminuzione della resistenza a flessione, comportandosi il dente, dal punto di vista strutturale, come una mensola sollecitata da un carico collocato a distanza variabile dall'incastro. Del resto il sottotaglio era prevedibile in quanto, stando al proporzionamento modulare della dentiera di riferimento, abbiamo per l'altezza dei suoi denti  $h = 1.25m$ . Sostituendo questo valore nella 6.22 otteniamo

$$z_{\min} = \frac{2.5}{\sin^2(\theta)}, \quad (6.29)$$

e per  $\theta = 20^\circ$  si ottiene  $z_{\min_{20^\circ}} = 22$ . Già in questo luogo, desideriamo mettere in evidenza, alla buona, cioè mediante il calcolo diretto della 6.29 per  $\theta = 25^\circ$ , la sensibilità del risultato di tale formula alla variazione dell'angolo di pressione: abbiamo, ad esempio,  $z_{\min_{25^\circ}} = 14$ . La figura 6.28 riporta invece il profilo dei denti di un pignone con  $z = 17$  e  $\theta = 20^\circ$  ottenuto però tramite utensile *Maag*, a spigoli smussati, con raggio di raccordo delle creste dei denti  $r_r = 0.4m$ . In quest'ultimo caso, si nota che le teste dei denti dell'utensile sono molto vicine al limite del sottotaglio<sup>13</sup>, pertanto si ammette in generale, e nelle condizioni ora menzionate, che il numero minimo di denti per un pignone (senza correzione) è  $z_{\min_{20^\circ}} = 17$ . Nelle due figure ora citate riportiamo anche un arco della circonferenza di testa o di troncatura della ruota da tagliare, circonferenza che delimita l'estremità esterna dei denti. Notiamo che in questo caso la presenza di uno smusso alla base dei denti della dentiera non incide sulla forma della testa dei denti della ruota: tale raccordo è un mero accorgimento costruttivo. In figura 6.29 riportiamo fi-

<sup>13</sup>Quanto qui asserto ( $z_{\min_{20^\circ}} = 17$ ) si ricava facilmente osservando che nella formula 6.29, nel caso di utensile con denti smussati, il numeratore passerebbe da 2.5 a 2.

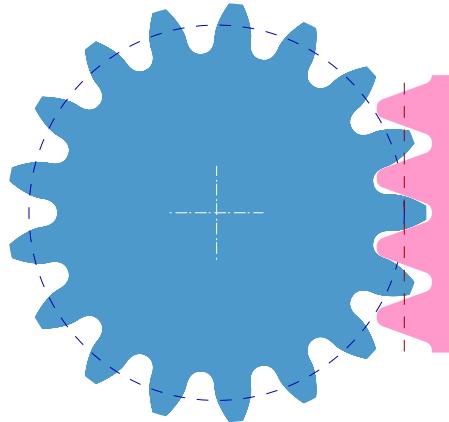


Figura 6.29: Pignone con  $z = 17$ ,  $\theta = 20^\circ$ : assenza di sottotaglio.

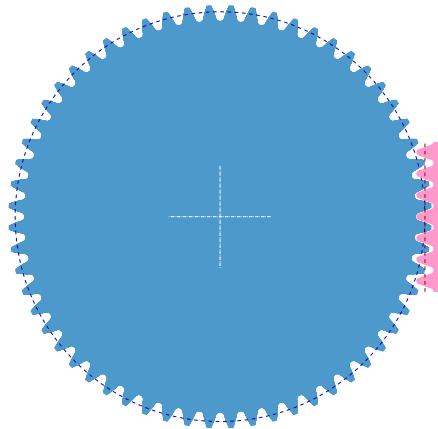


Figura 6.30: Ruota dentata con  $z = 60$ ,  $\theta = 20^\circ$ : fianchi dei denti somiglianti a quelli di una cremagliera.

nalmente ciò che si ottiene tagliando una ruota con la dentiera *Maag* quando le due primitive, quella della dentiera e quella della ruota, coincidono. Il pignone raffigurato ha numero di denti  $z = 17$ , angolo di pressione  $\theta = 20^\circ$  e, come si può notare visivamente, ci troviamo al limite del sottotaglio, anche se il numero di denti è inferiore a 22 che, ripetiamo, rappresenta il minimo teorico per un utensile con spigoli vivi. La figura 6.30 mostra invece una ruota con  $z = 60$  e angolo di pressione sempre  $\theta = 20^\circ$ . In questo caso si nota che, trovandoci molto lontani dal numero minimo di denti, la circostanza del sottotaglio è ben lungi dal presentarsi e i denti appaiono molto robusti alla base. Si può osservare inoltre che i fianchi dei denti, pur essendo (ovviamente) degli archi di evolvente, assomigliano molto a quelli rettilinei della cremagliera. Crediamo sia istruttivo rappresentare l'ingranaggio di queste due ruote, che naturalmente le riconduce nella stessa scala (figura 6.31).

Siamo finalmente giunti alla fine del nostro percorso che, rispettando i vincoli “naturali” che a mano a mano si sono palesati, ha portato a una soluzione che appare quasi unica. Rimane ancora una verifica da effettuare, che sottintende un preccetto forte (l’ultimo): l’ingranaggio di due ruote dentate deve essere in grado di trasmettere il moto con continuità. Questo significa che le coppie di denti a contatto devono sempre essere in numero maggiore dell’unità. Con riferimento alla figura 6.31, ricordando che i punti di contatto (coniugati) tra due fianchi di evolvente giacciono sulla perpendicolare alle evolventi stesse in tali punti, possiamo affermare che i contatti tra i denti avvengono solo sulla retta  $\mu$ , tangente alle due circonferenze di base di raggi  $r_{b_1}$  e  $r_{b_2}$ , e chiamata *retta delle pressioni*. Più in dettaglio, le posizioni dei contatti saranno interne alle due circonferenze di testa delle ruote, le quali delimitano il tratto  $AB$

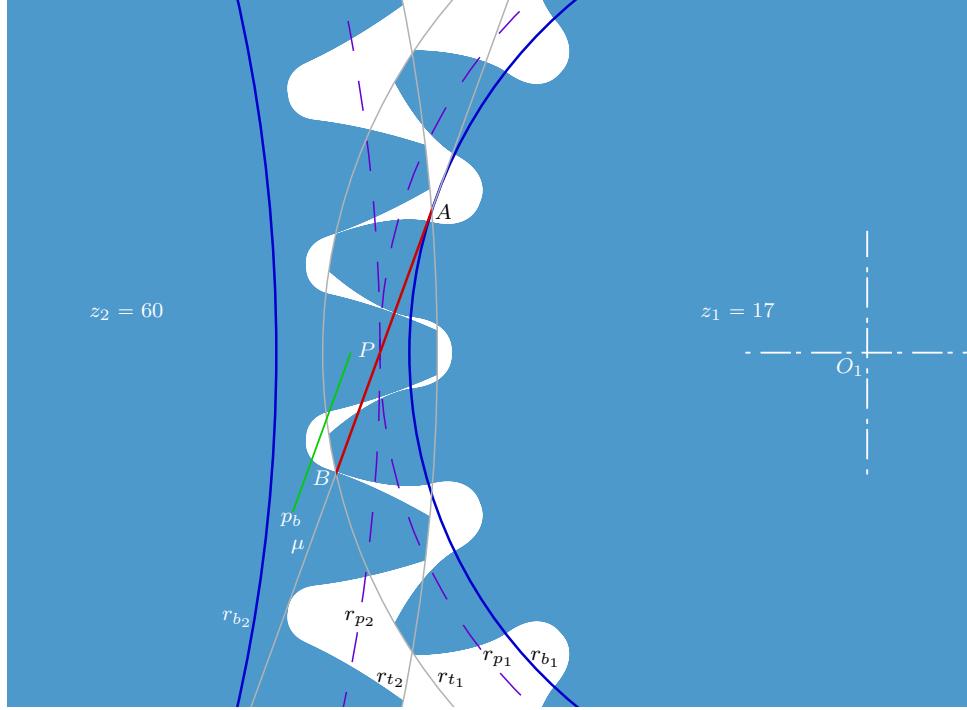


Figura 6.31: *Ingranaggio con  $z_1 = 17$ ,  $z_2 = 60$ ,  $\theta = 20^\circ$ .*

che, nella figura 6.31, è rappresentato in rosso. Affinché la trasmissione del moto avvenga con continuità, sul segmento  $AB$  devono essere presenti uno o più punti di contatto. Sulla retta delle pressioni i profili dei denti si succedono col passo che si misura sulle circonferenze di base, dalle quali “nascono” le evolventi, destre o sinistre, e che naturalmente coincide con il passo della successione dei fianchi, destri o sinistri, dei denti dell’utensile, misurato in direzione normale ai fianchi stessi. Tale misura, indicata in figura 6.26, vale  $p_b = \pi m \cos \theta$ . Anche questa lunghezza è riportata in figura 6.31, giusto per un confronto visivo, mediante un segmento verde. Riepilogando, la trasmissione del moto sarà continua se il *fattore di ricoprimento*  $f_c$ , dato dal rapporto tra la lunghezza del segmento  $AB$  e il passo di base, è maggiore dell’unità:  $f_c = (AB)/p_b > 1$ . La lunghezza del segmento  $PB$  (come del resto quella del segmento  $PA$ ) si determina applicando il teorema del coseno al triangolo  $\triangle O_1BP$  (oppure  $\triangle O_2AP$ ). Per  $(PB)$  si ha

$$(PB)^2 + 2r_{p1} \sin(\theta)(PB) + r_{p1}^2 - r_{t1}^2 = 0. \quad (6.30)$$

Pertanto, indicando le lunghezze  $(PA)$  e  $(PB)$  semplicemente con  $\eta$  e togliendo i pedici che identificano una delle due ruote, possiamo scrivere

$$\eta = -r_p \sin(\theta) \pm \sqrt{r_p^2 \sin^2(\theta) - r_p^2 + r_t^2}. \quad (6.31)$$

Introducendo le grandezze legate al proporzionamento normale e facendo il rapporto tra  $\eta$  e il passo base  $p_b$  abbiamo

$$\frac{\eta}{p_b} = \frac{-(z/2) \sin(\theta) \pm \sqrt{(z/2)^2 \sin^2(\theta) + z + 1}}{\pi \cos(\theta)}. \quad (6.32)$$

La formula 6.32 fornisce, con  $z = 17$ , un fattore di ricoprimento, nel tratto di competenza  $PB$ ,  $f_c = \eta/p_b = 0.75$ . La qual cosa significa che, nel caso peggiore (ammisibile per non avere sottotaglio), cioè quando l'ingranaggio è costituito da due pignoni da diciassette denti, essi possono ingranare tra loro con continuità essendo, in questo caso,  $f_c = 1.5$ .

## 6.7 RUOTE CORRETTE MEDIANTE SPOSTAMENTO DEL PROFILO I

Le proporzioni della dentiera di riferimento di figura 6.25 risultano sicuramente ragionevoli ma, rappresentando un compromesso esteso a tutte le ruote, qualsiasi sia il loro numero di denti e quello della ruota accoppiata, si intuisce facilmente che esse potrebbero non rappresentare la scelta ottimale. In figura 6.32 è riportato l'ingranaggio di un pignone con  $z_1 = 11$  denti e  $z_2 = 60$  denti. Si nota subito che i denti del pignone si presentano scavati

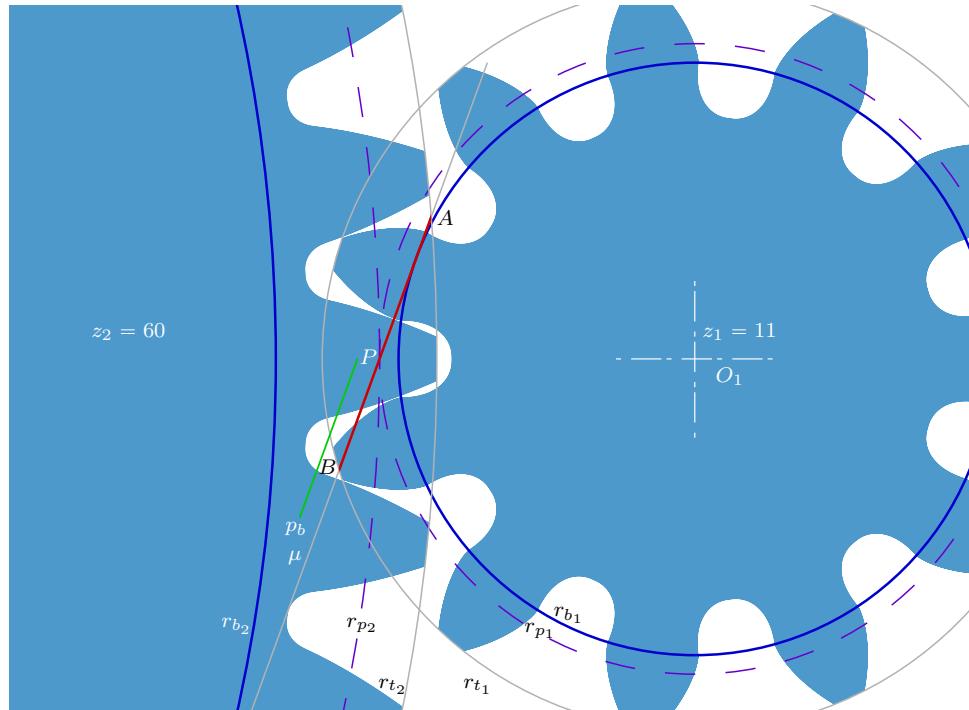


Figura 6.32: *Ingranaggio con  $z_1 = 11$ ,  $z_2 = 60$ ,  $\theta = 20^\circ$  senza correzioni.*

alla base. Ciò era ampiamente prevedibile in quanto la 6.29, pur considerando l’arrotondamento dei taglienti dell’utensile creatore, non permette di scendere sotto il numero  $z_{\min} = 17$ , senza che il sottotaglio si manifesti. La scarnitura del dente alla base è una circostanza molto grave? Certamente la resistenza a flessione del dente stesso ne risente. E dal punto di vista della nostra disciplina? Apparentemente, in quest’ambito, le cose vanno meglio: la cinematica dell’ingranaggio è comunque corretta. Ma l’impegno dell’evolvente di cerchio fino alla sua radice fa sorgere un’altra preoccupazione, dovuta al fatto che in quel punto, com’è noto, il raggio di curvatura del profilo è pari a zero, e da ciò possono emergere altre problematiche di carattere strutturale. Però, la grande produttività delle dentatrici di ruote a evolvente, la relativa semplicità di costruzione degli utensili necessari, la possibilità di affilare tali utensili senza compromettere la loro forma “operativa” ci convincono, in un ragionamento un po’ fantastico, che il mondo della meccanica avrebbe accettato tranquillamente anche le ruote sottotagliate qualora, a tale problema, non ci fosse stato rimedio e anzi, in talune applicazioni, cui faremo cenno alla fine del prossimo paragrafo, tali ruote si accettano appunto. Ma il rimedio esiste, ed è uno di quei “toccasana” che non comporta spese, al contrario, oltre a determinare la scomparsa del sottotaglio, le *correzioni tramite lo spostamento del profilo* portano una serie di vantaggi tali da essere impiegate anche quando il sottotaglio non si manifesta affatto. In aggiunta, mentre da un punto di vista didattico le dentature corrette presentano per lo studente un ulteriore (l’ultimo) piccolo grattacapo, nella pratica esse si progettano e si eseguono con estrema disinvoltura: se si dovesse progettare l’ingranaggio di figura 6.31 e il pignone di  $z_1 = 17$  denti fosse la ruota motrice ben difficilmente esso non verrebbe corretto. Ricordiamo che nelle due figure 6.25 e 6.26 abbiamo riportato una retta tratteggiata indicata con  $\lambda_t$ , chiamata *primitiva di taglio*, distante dalla primitiva della dentiera di una quantità  $c = mx$ . Quando le ruote vengono tagliate facendo rotolare  $\lambda_t$  sulla primitiva teorica delle ruote stesse con  $c \neq 0$  esse si dicono *corrette*. Riferendoci all’utensile *Maag* (ma la questione rimane identica anche per utensili creatori a vite), si tratta semplicemente di spostare la dentiera di una quantità  $c$  verso l’esterno della ruota da tagliare se  $c > 0$ , oppure verso l’interno qualora la correzione fosse negativa. In figura 6.33 rappresentiamo l’ingranaggio  $z_1 = 11$  e  $z_2 = 60$ , le cui ruote sono state realizzate spostando la primitiva di taglio dei due utensili delle quantità adimensionali  $x_1 = 0.5$  e  $x_2 = -0.5$ . Anche i raggi delle due circonferenze di testa dovranno subire un incremento  $\delta r_{1t} = 0.5m$  e un decremento  $\delta r_{2t} = -0.5m$ . Notiamo con facilità il cambiamento di forma della base dei denti del pignone, che non palesano più alcun sottotaglio, a fronte della riduzione modesta e probabilmente accettabile dello spessore alla base di quelli dell’altra ruota. Come riportato in figura 6.33, l’angolo di pressione vale ancora  $\theta = 20^\circ$ , mantenendo il valore di quello dell’utensile, e l’interasse vale  $i = (z_1 + z_2)m/2$ . Queste ultime

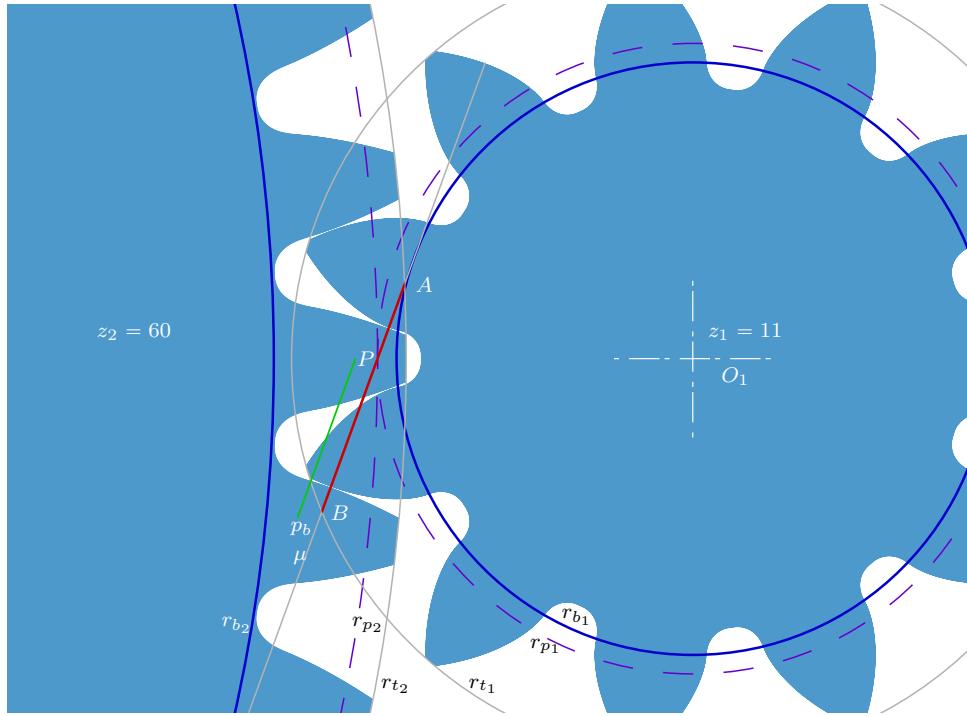


Figura 6.33: Ingranaggio con  $z_1 = 11$ ,  $z_2 = 60$ ,  $\theta = 20^\circ$ , con correzioni  $x_1 = 0.5$  e  $x_2 = -0.5$ .

affermazioni sono meno ovvie rispetto a ciò che a prima vista si potrebbe ritenere. In particolare la seconda (dalla quale però dipende la prima), e cioè che le ruote corrette possano formare ingranaggi senza variazione di interasse rispetto a quello teorico. Infatti, quando la somma  $c_1 + c_2 \neq 0$ , l'interasse di funzionamento, cioè la distanza che deve separare i centri delle ruote corrette affinché ingranino correttamente, non corrisponde al valore di tale somma aggiunta all'interasse teorico, come dimostreremo a breve. Intanto osserviamo ancora che l'ingranaggio di figura 6.33 presenta fattore di ricoprimento  $f_c > 1$ , fatto che andrebbe calcolato tramite la formula 6.30 e le successive, opportunamente modificate, anche se, in questa sede, ci accontentiamo di ciò che si manifesta visivamente. Appare anche chiaro che il tratto  $PA$ , che si chiama *accesso*, risulta alquanto più corto di  $PB$ , che si chiama *recesso*. I due nomi presuppongono che il pignone funga da motore, altrimenti tali nomi devono essere invertiti. Senza entrare nel merito delle considerazioni dinamiche che supportano l'affermazione che formuliamo, affermiamo che è sempre conveniente avere un tratto di accesso ridotto rispetto a quello di recesso. L'ingranaggio di figura 6.33 è pertanto formato da due ruote corrette mediante lo spostamento dei loro profili in due sensi opposti, e il filo logico sottinteso alle correzioni potrebbe essere così riassunto: si corregge il pigno-

ne, in senso positivo, fino alla eliminazione del sottotaglio; lo stesso valore della correzione, cambiato di segno, si applica all'altra ruota, sperando di non spostare su quest'ultima il sottotaglio e mantenendo invariato l'interasse teorico. Anche se questa soluzione appare elegante, di solito non viene scelta. Come chiarito anche in [14], il ragionamento sviluppato appena sopra sembra presupporre che il proporzionamento normale rifletta condizioni di funzionamento ottimali e pertanto sia opportuno derogare alle sue leggi il meno possibile. Gli spostamenti dei profili si dimostrano invece vantaggiosi a prescindere dal problema del sottotaglio. È tutt'altro che infrequente progettare le ruote dentate sacrificando l'interasse teorico a favore dell'ottenimento di altre caratteristiche, oppure imponendo un interasse funzionale a geometrie particolari. Quest'ultimo caso si presenta spesso per gli assi paralleli dei cambi delle automobili sui quali si devono calettare quattro o più coppie di ruote dentate, sempre in presa, aventi somme dei denti leggermente diverse tra loro e caratteristiche geometriche tali (si tratta quasi sempre di ruote elicoidali) da non poter garantire un interasse comune senza essere corrette. Non entreremo nell'ambito dei criteri di scelta delle correzioni che si apportano per ottimizzare, sotto svariati aspetti, il funzionamento degli ingranaggi. Diciamo solamente che il caso di figura 6.33 potrebbe essere approssimato da un progettista correggendo solo il pignone e lasciando la ruota da sessanta denti con geometria normale. Di seguito analizzeremo appunto questo caso, dove la correzione sarà apportata solamente sul pignone, con la conseguenza di dover determinare un nuovo angolo di pressione e un nuovo interasse, diversi da quelli normali.

## 6.8 RUOTE CORRETTE MEDIANTE SPOSTAMENTO DEL PROFILO II

Ricordiamo che, durante il taglio delle ruote corrette, nonostante lo spostamento della primitiva della dentiera, tale primitiva dovrà rotolare sulla primitiva teorica della ruota da tagliare, inviluppando, in questo modo, evolventi di circonferenze di base ancora di raggio  $r_{1b} = z_1 m / 2 \cos \theta$  e  $r_{2b} = z_2 m / 2 \cos \theta$ . Di conseguenza, qualsiasi siano le correzioni dei profili, il *passo base*  $p_b$ , già riportato in figura 6.26, non cambia. La figura 6.34 riporta l'ingranaggio di due ruote dentate, sempre con  $z_1 = 11$  denti e  $z_2 = 60$  denti. Come si legge nella didascalia, la correzione positiva è stata applicata solamente al pignone, con  $x = 0.5$ , mentre la seconda ruota non è corretta. Prima di rispondere alla legittima domanda: come sono stati determinati l'interasse effettivo di funzionamento e il nuovo angolo di pressione? Riteniamo opportuno ribadire che la teoria, e in particolare le premesse alle formule 6.26, ci assicurano che i nostri profili a evolvente sono ancora coniugati. In quest'ambito, quello cioè delle correzioni con variazione di interasse, si hanno due casi emblematici. Esporremo per primo quello che porta all'individuazione dell'interasse di funzionamento  $i_f$  e del corrispon-

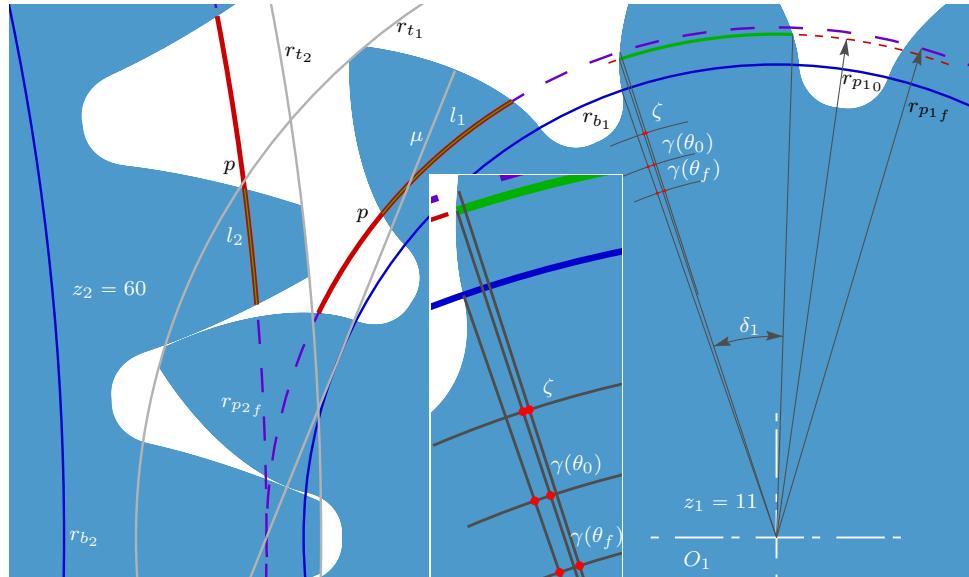


Figura 6.34: *Ingranaggio con  $z_1 = 11$ ,  $z_2 = 60$ ,  $\theta_0 = 20^\circ$ ,  $\theta_f = 22^\circ$ ,  $i_0 = 142$ ,  $i_f = 143.9$ , con le correzioni  $x_1 = 0.5$  e  $x_2 = 0$ .*

dente angolo di pressione  $\theta_f$ , date le due correzioni arbitrarie delle ruote. Il secondo caso fa invece riferimento all'individuazione di quelle correzioni necessarie a produrre un interasse di funzionamento dato. Riprendiamo dalla figura 6.34 e cerchiamo di individuare un criterio, date le correzioni delle due ruote, per potere stabilire l'effettivo interasse di funzionamento e l'effettivo angolo di pressione. Da un punto di vista cinematico, l'ingranaggio della figura appena citata funzionerebbe egregiamente anche con l'interasse dato dalla somma dei raggi delle primitive teoriche più la somma delle correzioni:  $i_g = (z_1 + z_2)m/2 + (x_1 + x_2)m$ . Se montassimo in questo modo le ruote, noteremmo però un certo gioco che, in generale, non può essere tollerato nelle trasmissioni di potenza, onde evitare che i denti "sbattano" a causa delle eventuali (frequentissime nelle varie applicazioni) inversioni della direzione del flusso di potenza. Ecco quindi il criterio cercato: le ruote devono essere montate senza gioco<sup>14</sup>. Riferendoci ancora alla figura 6.34, quanto appena stabilito si traduce nella seguente relazione  $p = l_1 + l_2$ . Questa relazione afferma che il passo sulle primitive di funzionamento  $p$ , il quale ovviamente, affinché le ruote possano ingranare, deve essere lo stesso su entrambe, è dato

<sup>14</sup>Un minimo gioco tra le ruote deve sempre sussistere, per evitare ai cuscinetti di supporto di funzionare in regime di carico gravoso e non previsto, ma soprattutto per consentire la lubrificazione dei denti. La quantificazione di tale gioco è una questione delicata che dipende da un numero rilevante di fattori: condizione di impiego della coppia di ruote, precisione e finitura delle ruote stesse, tipo di lubrificazione, e molti altri. Rimandiamo gli studenti desiderosi di approfondire alla letteratura specializzata, come ad esempio [12].

dalla somma dello spessore dei denti sulle primitive stesse. È questo uno dei casi in cui scopriamo l'utilità della rappresentazione analitica dell'evolente e, in particolare, della 6.19. Cominciamo col calcolare la lunghezza dell'arco della primitiva teorica, o di riferimento, che attraversa un dente. A questo proposito notiamo che, quando la dentiera viene spostata della quantità  $c = mx$ , il vano sulla primitiva di taglio, che sarà pari allo spessore del dente sulla primitiva di riferimento della ruota, vale

$$l_0 = m \left( \frac{\pi}{2} + 2x \tan(\theta_0) \right), \quad (6.33)$$

dove l'addendo di destra non è altro che la base di un triangolo isoscele di altezza pari a  $c = mx$  e angolo di apertura uguale al doppio dell'angolo dei profili della dentiera. La 6.33 va specializzata per le due ruote, in quanto le correzioni  $x_1$  e  $x_2$  saranno, in generale, diverse. La conoscenza di  $l_{01}$  e  $l_{02}$  ci fornisce con facilità il valore degli angoli sottesi da tali archi:

$$\delta_1 = l_{01}/r_{p1_0} \quad \text{e} \quad \delta_2 = l_{02}/r_{p2_0}. \quad (6.34)$$

Le lunghezze degli archi  $l_1$  e  $l_2$  si otterranno considerando gli effettivi valori del raggio primitivo di funzionamento delle due ruote e l'aumento degli angoli  $\delta$  dovuti all'angolo  $\zeta$ , come riportato in figura 6.34. Quanto a  $\zeta$ , sempre dalla figura, abbiamo

$$\zeta = \gamma(\theta_0) - \gamma(\theta_f), \quad (6.35)$$

e tale valore<sup>15</sup> sarà lo stesso per le due ruote. Finalmente ricaviamo

$$l_1 = r_{p1_f}(\delta_1 - 2\zeta) \quad \text{e} \quad l_2 = r_{p2_f}(\delta_2 - 2\zeta), \quad (6.37)$$

quindi, per il passo  $p = l_1 + l_2$ , misurato sulle primitive di funzionamento possiamo scrivere

$$\begin{aligned} p = l_1 + l_2 &= 2r_{p1_f} \left[ \frac{1}{z_1} (\pi/2 + 2x_1 \tan(\theta_0)) + \zeta \right] + \\ &\quad + 2r_{p2_f} \left[ \frac{1}{z_2} (\pi/2 + 2x_2 \tan(\theta_0)) + \zeta \right]. \end{aligned} \quad (6.38)$$

A valle di alcune semplici sostituzioni, tenendo presente che  $r_{p1_f} = z_1 p / \pi$  e  $r_{p2_f} = z_2 p / \pi$ , esplicitando  $\zeta$  tramite la 6.35, otteniamo

$$\gamma(\theta_f) = 2 \frac{x_1 + x_2}{z_1 + z_2} \tan(\theta_0) + \gamma(\theta_0). \quad (6.39)$$

---

<sup>15</sup>Per la coordinata polare dell'evolente abbiamo mantenuto la nomenclatura esposta nella formula 6.19,  $\gamma()$ , benché il nome più comunemente usato nella letteratura sia *involute function*. Pertanto, con un'abbreviazione a nostro parere infelice, abbiamo

$$\text{inv}(\theta) = \tan(\theta) - \theta, \quad (6.36)$$

come si trova, ad esempio, in [12].

La funzione  $\gamma(\theta)$ , col nome citato nella 6.36, è riportata, tabulata, in diversi trattati: citiamo [12] dove, dalla pagina 72 alla pagina 79,  $\theta$  spazia da  $10^\circ$  a  $50^\circ$ . Tale funzione è regolare e monotona crescente, pertanto, senza scomodare metodi di ricerca degli zeri recanti nomi altisonanti, il comune metodo di bisezione (che abbiamo usato per ottenere le nostre figure) porta, con estrema rapidità, a soluzioni apprezzabili della 6.39. Una volta individuato il valore di  $\theta_f$ , che sarà l'effettivo angolo di pressione, ricordando che in ogni caso il raggio della circonferenza di base non cambia, come abbiamo già altrove sottolineato, avremo

$$r_{p1f} \cos(\theta_f) = r_{p10} \cos(\theta_0) \quad \text{e} \quad r_{p2f} \cos(\theta_f) = r_{p20} \cos(\theta_0), \quad (6.40)$$

dalle quali si ottiene

$$i_f = r_{p1f} + r_{p2f} = (r_{p20} + r_{p10}) \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta_f)} = m(z_1 + z_2) \frac{\cos(\theta_0)}{2 \cos(\theta_f)}. \quad (6.41)$$

Ci sembrano opportune le seguenti due considerazioni. La prima:  $\cos(\theta_f)$ , e perciò anche l'interasse di funzionamento  $i_f$ , dipende soltanto dalla somma delle correzioni quindi, come già ammesso nel precedente paragrafo, se  $x_1 + x_2 = 0$  risulta  $\theta_f = \theta_0$  e  $i_f = i_0$ , cioè angolo di pressione e interasse rimangono inalterati. La seconda osservazione può essere elaborata come risposta alla domanda: l'interasse di funzionamento sarà dato da  $i_f = i_0 + m(x_1 + x_2)$ ? La risposta è no, e per convincerci di ciò studiamo l'andamento del rapporto tra l'interasse effettivo e la somma delle correzioni addizionata all'interasse teorico, che chiamiamo  $\exists$

$$\exists = \frac{i_f}{i_0 + m(x_1 + x_2)}, \quad (6.42)$$

in funzione della variazione adimensionale dell'interasse  $\delta_i = 1 - i_f/i_0$ . La figura 6.35 mostra quindi il grafico di  $\exists$  al variare di  $\delta_i$ , che per  $0 \leq \delta_i \leq 0.1$  evidenzia una riduzione di  $i_f$  rispetto all'interasse che si sarebbe individuato a intuito  $i_0 + m(x_1 + x_2)$ . Tale situazione dovrà, peraltro, risultare compatibile con i giochi tra testa e piede dei denti e richiede pertanto una specifica verifica.

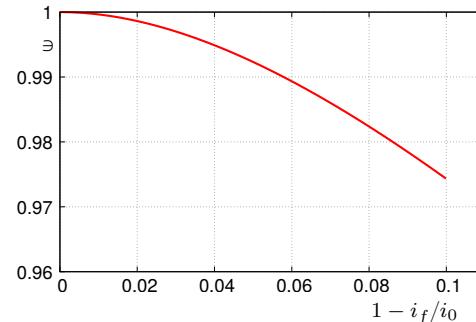


Figura 6.35: Rapporto tra interasse effettivo  $i_f$  e interasse intuitivo  $i_0 + m(x_1 + x_2)$ .

Veniamo ora al secondo dei due casi emblematici per le correzioni con variazione di interasse, che è quello in cui le correzioni incognite devono risultare compatibili con un interasse dato. Stabilito quindi il valore di  $i_f$ , dalla 6.41 ricaviamo  $\theta_f$ , come già accennato con la formula 6.26. Dalla 6.39 ricaviamo poi, con facilità, la somma delle correzioni  $x_1 + x_2$  ammissibile con l'interasse di funzionamento assegnato. Il tema della ripartizione delle correzioni sulle due ruote è complesso e rientra nell'ambito dello studio dei criteri di scelta delle correzioni stesse. Ribadiamo che decidere di dare al pignone la minima correzione necessaria a scongiurare il sottotaglio dei denti e quindi regolarci di conseguenza circa la correzione della seconda ruota, magari con una correzione di segno opposto, così da lasciare inalterato l'interasse di progetto, è molto riduttivo e anacronistico. Una guida alla scelta delle correzioni tramite percorsi volti all'ottimizzazione degli ingranaggi (percorsi e criteri a volte in contesa tra loro) è riportata in [14]. Riteniamo però fuori dallo scopo di queste note approfondire ulteriormente questo tema che, come abbiamo anticipato, è materia decisamente specialistica.

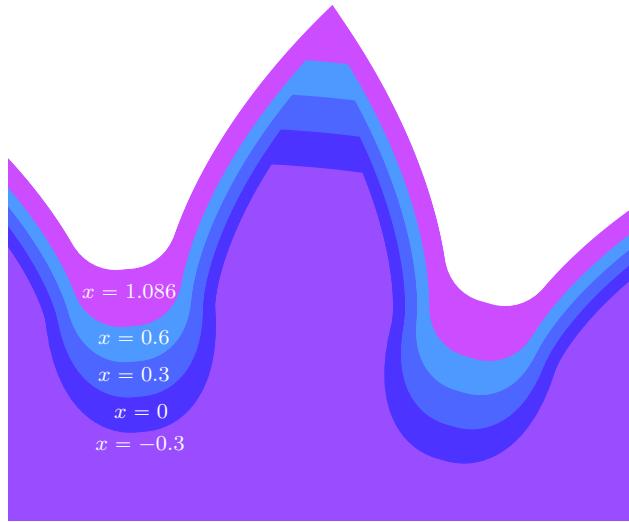


Figura 6.36: *Variazione della forma dei denti di una ruota con  $z = 17$  e correzioni  $x = -0.3, x = 0, x = 0.3, x = 0.6$  e  $x = 1.086$ .*

Riepiloghiamo l'argomento della correzione del profilo dei denti sottolineando tre punti che ci sembrano importanti. Il primo riguarda la forma del dente, sensibilmente modificata dallo spostamento del profilo, come riportato in figura 6.36. Al crescere della correzione si passa infatti dalla condizione di sottotaglio a quella che vede l'irrobustimento della base dei denti, fino all'appuntimento dei denti stessi quando si adottano valori di correzione eccessivi. Nella figura è appunto riportato, per una ruota con  $z = 17$ , il caso

di appuntimento del dente, quando le due evolventi si incrociano esattamente sulla circonferenza di testa. La situazione dei denti a punta, ma anche con spessore di testa troppo piccolo, è da evitarsi per ragioni di resistenza meccanica.

Il secondo punto saliente riguarda il fattore di ricoprimento  $f_c$ . Esso, in sostanza, dipende dalla somma delle correzioni  $x_1 + x_2$ , e diminuisce al crescere di questa somma, mentre non è molto sensibile ai valori delle singole correzioni. Con  $x_1 + x_2 = 0$ , il fattore di ricoprimento è compreso tra  $1.4 < f_c < 2$ , che ovviamente è anche l'intervallo dove spazia tale fattore per le ruote non corrette. Adottando correzioni la cui somma è negativa si possono ottenere elevati valori del fattore di ricoprimento, a beneficio della silenziosità dell'ingranaggio. Quando invece  $x_1 + x_2 > 0$  il fattore di ricoprimento diminuisce e questo può arrivare a compromettere la continuità della trasmissione. Pertanto, nel caso di correzioni a somma algebrica maggiore di zero, cioè con aumento dell'interasse, bisogna sempre verificare il valore di  $f_c$ .

Il terzo punto riguarda l'allontanamento del segmento dei contatti *AB* dalle ruote con correzione positiva. Ridurre la porzione di accesso sulla linea dei contatti porta un netto miglioramento del rendimento degli ingranaggi. Per tale motivo ai pignoni motori, che sono una buona parte di quelli che si costruiscono, si applicano volentieri correzioni positive che, eliminando il sottotaglio e irrobustendo la base del dente a favore della sua resistenza strutturale, ne migliorano anche il rendimento diminuendo il tratto di accesso, come mostra il confronto tra i tratti *PA* e *PB* della figura 6.33. Le cose vanno diversamente per i moltiplicatori di velocità, dove la ruota motrice non necessiterebbe, di per sé, correzioni positive con lo scopo di eliminare il sottotaglio. In tali casi, i diagrammi che ci guidano nel ripartire la somma delle correzioni  $x_1 + x_2$  sulle due ruote possono allocare una correzione positiva maggiore alla ruota motrice, cioè, in questo caso, quella con maggiore numero di denti, come mostrato in [14], pag. 52, e, in alcuni casi, persino tollerare un leggero sottotaglio sulla ruota condotta, quella cioè con numero di denti minore.

## 6.9 NOTE CONCLUSIVE SULLE RUOTE DENTATE

A conclusione di questo lungo capitolo, proponiamo un'analisi ad elevatissima velocità del percorso che, altrove, abbiamo seguito con la giusta cautela in modo da poter essere sviluppato senza incertezze. Tale traccia ci ha condotto, quasi attraverso alcuni passaggi obbligati, alle ruote con denti profilati a evolvente che dominano interamente il panorama degli ingranaggi. Ad esempio, anche se non ne abbiamo fatto cenno esplicito in questo lavoro, le ruote con denti ad asse elicoidale, cioè le *ruote elicoidali*, pur possedendo caratteristiche specifiche, che un tecnico deve conoscere perfettamente per poterle inserire correttamente nel progetto di una macchina, non presenta-

no, dal punto di vista della loro cinematica, nulla di diverso dalle ruote che abbiamo studiato. Anzi, la loro fabbricazione si ottiene semplicemente inclinando di un certo angolo l'utensile *Maag* di cui abbiamo parlato diffusamente (oppure l'asse della ruota da tagliare). Quindi profilo a evolente ovunque, sulle ruote coniche, che possono trasmettere il moto tra alberi concorrenti, sulle dentature interne, e così via. Tale profilo si ottiene “automaticamente”, come abbiamo visto, dal processo di inviluppo tramite il taglio con utensili molto semplici. In pratica, l'utilizzo dell'utensile più semplice da realizzare e da affilare, cioè della dentiera riportata in figura 6.26, ci fornisce direttamente e senza sforzo le ruote dentate a evolente, assortibili, facilmente adattabili a modeste variazioni di interasse, facili da correggere per il raggiungimento di determinati scopi, come l'eliminazione del sottotaglio dei denti.

E questa è la conclusione alla quale ci premeva arrivare. Il successo di una tecnologia è spesso legato alla sua semplicità e alla sua attuabilità. Per questo tipo di ruote non ha gran senso neppure lo studio numerico del loro profilo come invece risulta d'obbligo, da quando i calcolatori sono entrati a far parte degli strumenti del progettista, nella profilatura delle camme. Infatti, come abbiamo ormai troppe volte ripetuto, l'ottenimento del loro sofisticato profilo segue un processo indiretto rappresentato dall'inviluppo creato dall'utensile dentiera, processo che abbiamo usato anche noi per le nostre figure. Anni fa, soprattutto in fase prototipale, alcune ruote dentate si lavoravano mediante l'impiego di frese a disco che, scavando nel cilindro grezzo della futura ruota dentata il vuoto tra un dente e il successivo, modellavano i fianchi dei denti stessi. Può darsi che qualche meccanico affezionato alla *fresatura di forma* dei denti si possa ancora trovare presso le officine che eseguono riparazioni e restauro di oggetti particolari. La forma delle frese impiegate in questo procedimento dipende naturalmente dal modulo della dentatura che si desidera ottenere, ma anche, come è ovvio, dal numero dei denti della ruota. Anzi, a ben vedere, sarebbe necessario impiegare una fresa per ogni ben preciso numero di denti. Nella pratica però bastano una decina di utensili (di un certo modulo) per avere risultati soddisfacenti con  $z$  che spazia in un largo intervallo. Tagliando in questo modo il profilo dei denti si perde però completamente il controllo circa la capacità della dentatura ottenuta di ospitare correttamente i denti dell'altra ruota. È qui infatti che nasceva il problema dell'interferenza propriamente detta, la quale invece si manifesta come sottotaglio dei denti quando questi si ottengono da un inviluppo. Rispetto alla fresatura di forma, il processo di taglio con creatore o dentiera *Maag* è talmente più comodo, più preciso, più flessibile (si pensi alle correzioni) da avere dato, dopo la sua comparsa, una propulsione violenta a questo settore e allo sviluppo della meccanica dello scorso secolo. Ma cosa ci riserva il futuro? Si potrebbe pensare di fabbricare le ruote dentate tagliandone direttamente il profilo con macchine a controllo numerico, come potrebbe fare un'elettroerosione a filo? Oppure, si potrebbe concepire

di ottenerle tramite deposizione controllata di materiale? È chiaro che se si considerano queste opportunità, l'ottenimento dell'evolvente non è automatico e dovremmo basarci su opportuni codici di calcolo che ci forniscano la geometria del dente stesso. Su questo campo da gioco, poco conosciuto, sospettiamo però che il profilo a evolvente avrebbe più di un concorrente.

## CAPITOLO 7

### Cenni ai Sistemi Articolati

#### 7.1 INTRODUZIONE

Due o più corpi rigidi possono essere collegati tra loro mediante *coppie rotoidali*<sup>1</sup>. Le catene cinematiche che si ottengono in questo modo prendono il nome di *sistemi articolati* e tale denominazione viene mantenuta anche nei casi in cui una o più coppie rotoidali sia sostituita da una sua degenerazione che, portando l'asse della coppia all'infinito, diventa una *coppia prismatica*. Questa vasta famiglia di meccanismi trova estese e notevolissime applicazioni: ogni motore a combustione interna contiene almeno un sistema articolato (il manovellismo ordinario) e svariate sono le applicazioni dei *quadrilateri articolati* nelle macchine automatiche, nelle presse, nelle macchine per cucire; l'elenco completo delle applicazioni risulterebbe molto lungo. Esistono sistemi articolati con coppie rotoidali i cui assi sono orientati in direzioni sghembe tra loro oppure concorrenti in un punto e qualcuno di questi *sistemi articolati spaziali* ha notevoli applicazioni, come il *giunto di Cardano*. La stragrande maggioranza dei sistemi articolati presenta invece coppie rotoidali con assi tra loro paralleli. I movimenti relativi tra i vari membri si realizzeranno perciò solo in piani paralleli tra loro e ortogonali a tali assi e questo ci permette di identificarli come *sistemi articolati piani*, gli unici di cui accenniamo lo studio.

Dato un sistema articolato piano, senza perdita di generalità, possiamo considerare i moti piani dei suoi membri, che in realtà hanno sempre luogo in piani paralleli tra loro, ma distinti, come contenuti in un solo piano. Le tracce degli assi delle coppie rotoidali che intersecano questo piano costituiscono perciò un insieme di  $n$  punti, tanti quanti sono gli snodi, e tali punti sono tra loro collegati tramite  $m$  corpi rigidi. Ogni punto nel piano gode di due

---

<sup>1</sup>In questi appunti non si descrivono le coppie rigide elementari; quale esempio di tali scorrimenti di superfici di corpi rigidi l'una sull'altra citiamo la coppia rotoidale che collega le due lame delle comuni forbici mediante un perno, precisando che le superfici combacianti sono quella del cilindro del perno e le due superfici cilindriche dei fori che lo ospitano. Rimandiamo il lettore che desideri approfondire l'argomento a [9], pagg. 22-24, o anche [15], pagg. 9-10, o ancora [16] che tratta numerosi casi di notevole interesse.

gradi di libertà di movimento, mentre i collegamenti rigidi, che mantengono invariata la distanza tra questi punti, assorbono un grado di libertà ciascuno. Ne consegue che, quando non si presentano situazioni anomale nelle quali una o più parti del meccanismo risulti sovra-vincolata e magari altre parti labili, il numero di gradi di libertà residuo  $g$  per un sistema articolato piano risulta essere  $g = 2n - m$ .

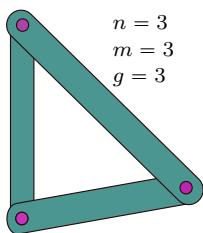


Figura 7.1: *Sistema articolato con tre coppie rotoidali e tre membri.*

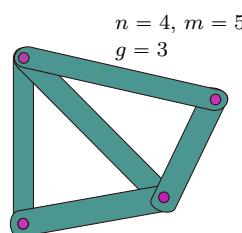


Figura 7.2: *Sistema articolato con quattro coppie rotoidali e cinque membri.*

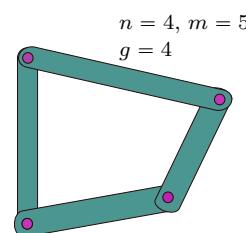


Figura 7.3: *Sistema articolato con quattro coppie rotoidali e quattro membri.*

In figura 7.1 è riportato il più semplice sistema articolato non banale. I gradi di libertà residua per tale sistema sono  $g = 3 \times 2 - 3 = 3$ . Tre gradi di libertà, nel piano, sono quelli posseduti da qualsiasi corpo rigido svincolato, e il nostro sistema comportandosi come un corpo indeformabile viene classificato e studiato nella scienza delle costruzioni come sistema reticolare. Anche il sistema articolato riportato in figura 7.2 presenta un numero di gradi di libertà pari a tre. Anch'esso si comporta come un corpo rigido e fa quindi parte delle *strutture reticolari*. Il sistema riportato in figura 7.3 presenta invece  $g = 4$ , quindi conserva un grado di deformabilità interna e per questo fa parte dei meccanismi articolati.

## 7.2 QUADRILATERI ARTICOLATI: VELOCITÀ E ACCELERAZIONI

Il *quadrilatero articolato piano* sarà il solo oggetto di questa breve trattazione, in questo capitolo. La condizione più comune è quella che vede uno dei suoi quattro membri fungere da telaio: in figura 7.4 il membro *AD* è il telaio. Il membro *BC*, sul quale non si trovano coppie rotoidali vincolate a terra, prende il nome di *biella*. Gli altri due membri, *AB* e *DC*, si chiamano *manovelle* oppure *bilancieri* a seconda che la circostanza di potere compiere l'intero giro sia o meno verificata.

Fissato il lato che fungerà da telaio e quindi la biella, la condizione degli altri due membri viene determinata dalla seguente *regola di Grashof* che riportiamo pari pari e senza dimostrazione da [9], pag. 99: *il quadrilatero*

*articolato piano può essere a doppia manovella o a manovella-bilanciere, soltanto se la somma del più piccolo e del più grande dei suoi lati non è maggiore della somma degli altri due. In tal caso si ha una doppia manovella, se l'asta fissa è la più corta, una manovella e un bilanciere se l'asta fissa è una delle contigue alla più corta (essendo la manovella il lato più corto). In tutti gli altri casi il quadrilatero è a doppio bilanciere.*

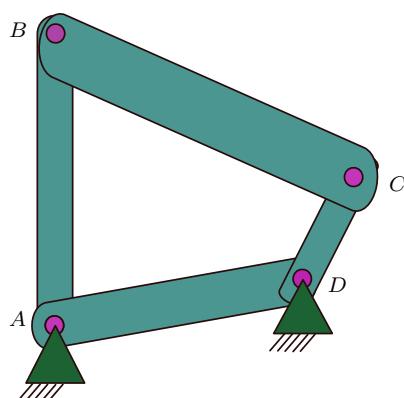


Figura 7.4: *Quadrilatero con telaio vincolato a terra.*

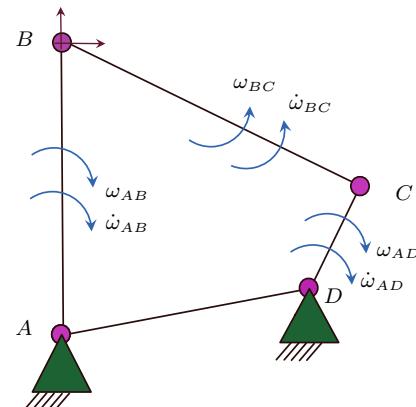


Figura 7.5: *Rappresentazione schematica del quadrilatero.*

Ad esempio nel caso di figura 7.4 abbiamo  $|\vec{DC}| + |\vec{BC}| < |\vec{AB}| + |\vec{AD}|$ , quindi avremo tre possibilità: due manovelle scegliendo  $DC$  come telaio, una manovella e un bilanciere quando il telaio è  $AD$  oppure  $BC$ , infine due bilancieri con telaio  $AB$ . Nel caso riportato in figura 7.4 il telaio risulta essere un lato contiguo al lato più corto: il membro  $CD$  fungerà, in questo caso, da manovella mentre il lato  $AB$  sarà un bilanciere.

La cinematica del quadrilatero articolato si può studiare mediante le nozioni, esposte in un capitolo precedente, circa i moti relativi. In particolare, ricordando l'esempio di figura 4.5 e la relativa soluzione, possiamo anche in questo caso esprimere il moto di un membro rispetto a un riferimento fisso e a uno mobile e imporre che le quantità cinematiche coinvolte, velocità e accelerazione, corrispondano tra loro.

Riferiamoci alla rappresentazione schematica di figura 7.5, dove oltre al quadrilatero sono rappresentate velocità angolari e accelerazioni angolari della manovella  $DC$  che si supporranno note. Se ci proponessimo di trovare le analoghe grandezze cinematiche per il bilanciere  $AB$ , potremmo scrivere la seguente relazione che esprime la velocità del punto  $C$ , sia in termini assoluti, sia in termini relativi, nel suo moto attorno al punto  $B$ . Qui immaginiamo incardinato il sistema di riferimento relativo che trasla, mantenendo perciò

i suoi assi sempre nelle medesime direzioni. Avremo

$$\mathbf{v}_{\text{ass}} = \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{v}_{\text{tr}}, \quad (7.1)$$

cioè

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{C\text{rel}} + \mathbf{v}_B. \quad (7.2)$$

Riferendoci alle quantità indicate in figura 7.5, possiamo riscrivere la 7.2 nel modo seguente

$$\mathbf{v}_C = \omega_{BC} |\overrightarrow{BC}| \widehat{\perp BC} + \omega_{AB} |\overrightarrow{AB}| \widehat{\perp AB}, \quad (7.3)$$

dove i versori  $\widehat{\perp BC}$  e  $\widehat{\perp AB}$  indicano che la direzione dei due termini incogniti a destra del segno di uguaglianza è nota. L'equazione 7.3 contiene pertanto due termini vettoriali di modulo incognito e direzione conosciuta. Si può dunque seguire (in linea di principio) lo schema grafico riportato in figura 4.7, e lo svolgimento riportato nel medesimo contesto che ci permette di determinare la velocità angolare del bilanciere e della biella,  $\omega_{AB}$  e  $\omega_{BC}$ . Consideriamo ora le accelerazioni. Dato che il sistema di riferimento relativo trasla, scrivendo la 3.11 il termine dell'accelerazione di Coriolis sarà assente:

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{C\text{rel}} + \mathbf{a}_B. \quad (7.4)$$

Risulta conveniente scrivere i termini  $\mathbf{a}_{C\text{rel}}$  e  $\mathbf{a}_B$  come somma delle loro componenti: normale e tangenziale

$$\mathbf{a}_C = -\omega_{BC}^2 \overrightarrow{BC} + \dot{\omega}_{BC} |\overrightarrow{BC}| \widehat{\perp BC} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB} + \dot{\omega}_{AB} |\overrightarrow{AB}| \widehat{\perp AB}, \quad (7.5)$$

dove, ancora una volta, i versori  $\widehat{\perp BC}$  e  $\widehat{\perp AB}$  indicano che la direzione di questi due termini incogniti è conosciuta. Gli altri termini risultano essere tutti noti, quindi ricadiamo ancora nel caso di una equazione vettoriale dove le incognite sono i moduli del secondo e del quarto termine a destra del segno di uguaglianza della 7.5 e per la soluzione ci riferiamo, una volta di più, al procedimento di figura 4.7, dal quale otterremo anche  $\dot{\omega}_{AB}$  e  $\dot{\omega}_{BC}$ .

### 7.3 APPLICAZIONI DEI QUADRILATERI

Abbiamo già ricordato che il quadrilatero articolato si presta a svariatissime applicazioni. Nella sua versione con doppia manovella esso può trasmettere il moto rotatorio tra due alberi paralleli, nella configurazione in cui le tracce degli assi di tali alberi siano i centri delle rispettive coppie rotoidali sul telaio. In questo caso, se il quadrilatero presenta i lati opposti uguali tra loro, la trasmissione del moto sarà *omocinetica* con rapporto di trasmissione unitario e il meccanismo prende il nome di *parallelogramma articolato*, famoso per aver collegato, un tempo, le ruote delle locomotive a vapore in modo tale da

renderle tutte motrici. La trasmissione del moto tramite un quadrilatero generico non sarà più, in generale, omocinetica e si potranno avere due casi di particolare interesse: manovella-manovella, oppure manovella-bilanciere. In entrambi i casi, il progetto (sintesi) del quadrilatero mira a ottenere un particolare movimento rotatorio o oscillatorio sulla manovella o sul bilanciere in uscita, tale da rendere diverse tra loro le velocità di percorrenza ciclica delle due fasi che questo membro attraversa durante il moto a velocità angolare costante della manovella motrice.

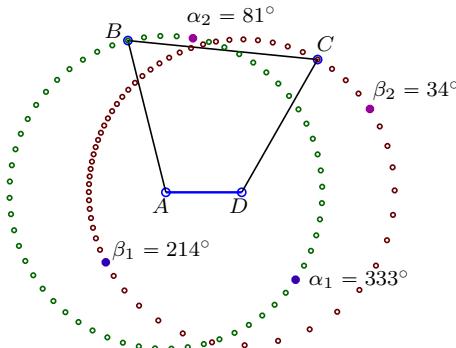


Figura 7.6: Quadrilatero a doppia manovella.

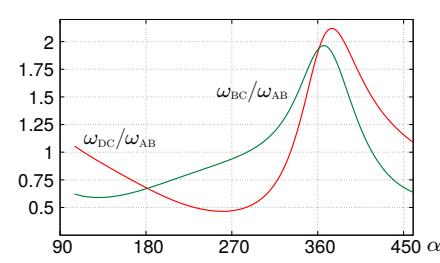


Figura 7.7: Velocità angolare della manovella  $CD$  e della biella  $BC$ .

La figura 7.6 riporta un quadrilatero con doppia manovella:  $AB$  e  $CD$  compiono intere rotazioni, mentre l'asta  $BC$  funge da biella. In tale figura sono riportate alcune posizioni occupate dalle cerniere  $B$  e  $C$  durante la rotazione a velocità angolare costante della manovella  $AB$ . Analizzando tali posizioni si nota che la spaziatura dei punti generati dalla cerniera  $B$ , che è l'estremo della manovella motrice, è appunto costante mentre la spaziatura delle tracce relative alla cerniera  $C$ , che è l'estremo della manovella condotta, è variabile. Ciò rende perfettamente conto delle velocità angolari delle due manovelle: come abbiamo detto, costante per quella motrice e variabile per la manovella cedente. La figura 7.7 riporta la velocità angolare della manovella  $CD$  e, per completezza-curiosità, quella della biella  $BC$ , rapportate alla velocità angolare della manovella motrice.

La velocità angolare variabile della manovella  $DC$  può essere a sua volta utilizzata per azionare un secondo meccanismo come, ad esempio, il manovellismo ordinario di una pressa, al quale sarebbe in tal modo possibile un funzionamento con *ritorno rapido*. Consideriamo infatti l'ipotesi di muovere quest'ultimo manovellismo mediante la rotazione della manovella  $DC$  (che fisicamente potrebbe coincidere in parte con quella del manovellismo stesso). Scegliendo opportunamente la posizione del punto morto di tale manovellismo, cioè il punto di partenza per gli angoli di manovella, potremmo avere, per il cursore del manovellismo mosso, una corsa di andata più lenta rispetto

a quella di ritorno o viceversa. Con riferimento alla figura 7.6 scegiamo come angolo di partenza  $\beta_1$ . Il cursore del manovellismo invertirà il suo moto in  $\beta_2$ , distante  $180^\circ$  da  $\beta_1$ , a valle di una rotazione della manovella  $AB$  di un angolo di “andata” pari a  $\alpha_a = \alpha_2 - \alpha_1$ . Parimenti, il movimento di ritorno si estenderà sull’arco percorso sempre di  $AB$  pari a  $\alpha_r = 360^\circ - (\alpha_2 - \alpha_1)$ . I tempi di andata e di ritorno,  $t_a$  e  $t_r$ , saranno perciò diversi tra loro e proporzionali ai due angoli percorsi dalla manovella motrice durante le rispettive fasi:

$$\alpha_a = 360^\circ \frac{t_a}{t_a + t_s}, \quad \alpha_r = 360^\circ \frac{t_s}{t_a + t_s}. \quad (7.6)$$

Il rapporto  $s = \frac{\alpha_a}{\alpha_r}$  viene talvolta indicato come *squilibrio del quadrilatero* e, come abbiamo già accennato, dipende anche dalla scelta della posizione iniziale  $\alpha_1$ . Lo squilibrio si ritiene tanto più elevato quanto più esso si scosta dall’unità. In pratica, accade raramente che il rapporto tra gli angoli di andata e ritorno, cioè lo squilibrio, sia maggiore di tre o minore di un terzo. In figura 7.6 sono indicate le coppie di angoli  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  che per questo quadrilatero realizzano il *massimo squilibrio*:

$$s = \frac{333^\circ - 81^\circ}{360^\circ - 333^\circ + 81^\circ} = 2.3. \quad (7.7)$$

Evidenziamo, sperando di contribuire in modo positivo alla chiarezza dell’argomento, che esiste sempre la possibilità di scegliere l’inizio delle rotazioni della manovella  $DC$ ,  $\beta_1$ , in modo tale da rendere lo squilibrio minimo, cioè pari a uno. Con dubbia utilità pratica, vedremo in tal caso compiere alla manovella cedente un mezzo giro dopo che la motrice ha compiuto anch’essa  $180^\circ$ , rimanendo tuttavia variabile il rapporto di trasmissione tra le due manovelle. In figura 7.8 è rappresentato un quadrilatero il cui membro  $DC$  non compie intere rotazioni ma oscilla percorrendo archi di  $54.2^\circ$  che, anche in questo esempio, assumono i nomi di andata e ritorno. Nella stessa figura sono evidenziate, tramite la traccia della cerniera  $C$ , le differenti velocità con le quali vengono descritti tali archi. Anche qui i tempi di percorrenza dell’andata e del ritorno,  $t_a$  e  $t_b$ , saranno proporzionali ai corrispondenti angoli percorsi, a velocità costante, dalla manovella  $AB$ . Perciò, appoggiandoci alle precedenti notazioni, lo squilibrio di questo quadrilatero diventa

$$s = \frac{263^\circ - 51^\circ}{360^\circ - 263^\circ + 51^\circ} = 1.43. \quad (7.8)$$

In questo caso, gli angoli sottesi dal bilanciere nei quali avviene l’inversione della sua corsa risultano inequivocabili e lo squilibrio massimo, riportato nella 7.8, è l’unico squilibrio del quale abbia senso parlare.

Interessanti applicazioni di meccanismi con tempi di andata e ritorno diversi tra loro si possono realizzare mediante l’impiego di particolari quadrilateri

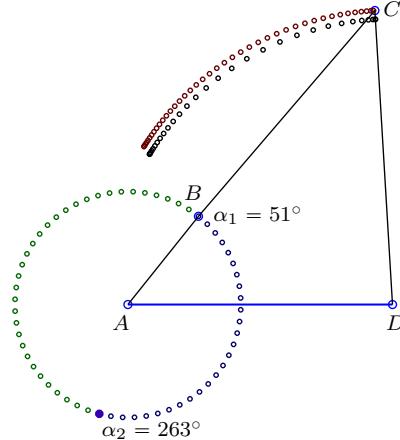


Figura 7.8: Quadrilatero a manovella e bilanciere.

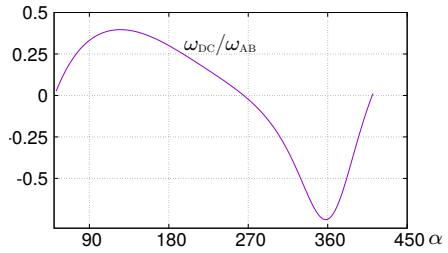


Figura 7.9: Velocità angolare della manovella  $CD$ .

nei quali una coppia rotoidale ha asse improprio. Tali meccanismi si chiamano *manovellismi* e, data la loro importanza e diffusione, verranno trattati nel successivo capitolo, a loro completamente dedicato.

Il problema di ottenere particolari quadrilateri, a doppia manovella oppure a manovella e bilanciere, che realizzino un dato squilibrio tra i tempi di andata e ritorno può essere risolto tramite specifici metodi grafici i quali, se coadiuvati da una buona dose di esperienza del progettista, portano al risultato desiderato. A tali metodi di sintesi non facciamo cenno, ritenendoli fuori luogo in questi appunti e ottimamente collocati in libri specialistici come il pluricitato [17], pagg. 215–220. Aggiungiamo che la sintesi dei quadrilateri avviene molto frequentemente tramite analisi ripetute, partendo da geometrie iniziali che solitamente il progettista porta con sé nel suo bagaglio di esperienza.

#### 7.4 CURVE DI BIELLA

Fin qui, poco si è detto del moto della biella eccezion fatta per la figura 7.7 dove è riportata la velocità angolare della biella  $BC$  rapportata a quella della manovella  $AB$ . D'altra parte lo studio del moto della biella di un quadrilatero articolato ha applicazioni pratiche molto rilevanti. Per un dato quadrilatero, i punti del piano su cui giace la biella (pensato solidale con essa) percorrono, durante il movimento di questa, una doppia infinità di curve. Al variare del *punto di biella* considerato, tali *curve di biella* assumono forme diversissime tra loro e possono risultare appetibili quando appunto servono movimentazioni cicliche e peculiari. Le curve di biella presentano infatti una grande varietà di archi e intrecci e vengono spesso prese in considerazione

in diversi contesti del progetto di macchine automatiche. In tempi passati, il progettista interessato all'impiego di una curva di biella si affidava per la sua scelta ai cosiddetti *atlanti*. Tra queste opere, la più completa è quella di Hrones e Nelson [18], che presenta, tramite un ingegnoso ordine sistematico, più di settemila curve di biella.

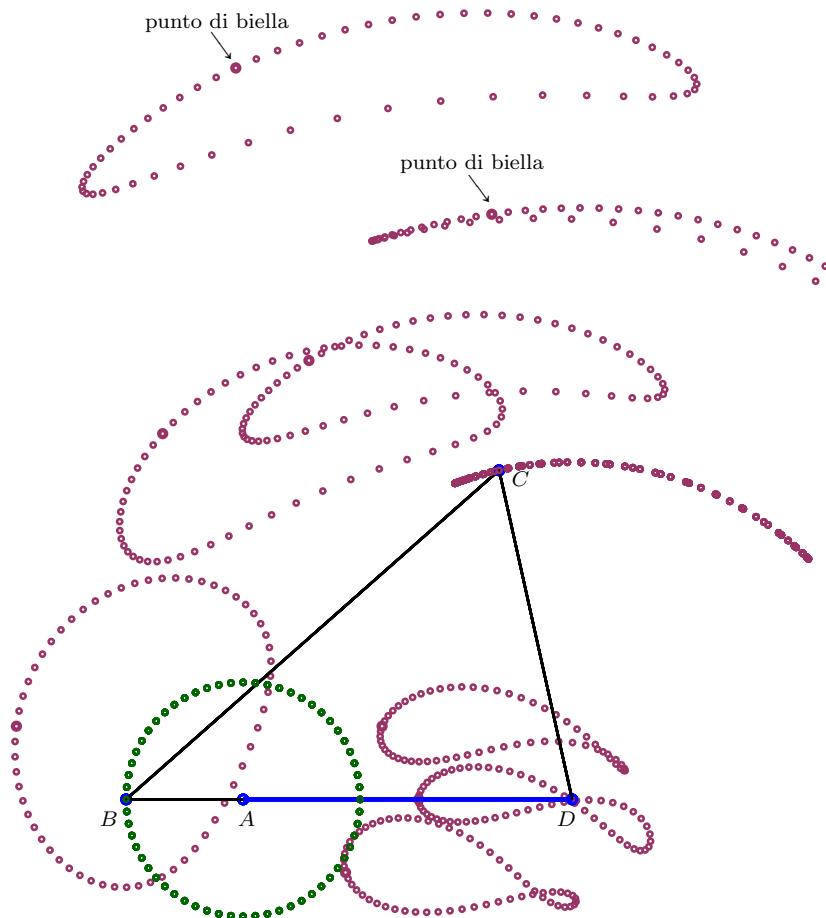


Figura 7.10: *Alcune curve di biella di un quadrilatero articolato manovella-bilanciere. I punti di biella sono evidenziati.*

Oggi giorno, non è difficile trovare “pagine di calcolo” che contengono analizzatori di quadrilateri i quali, a fronte dei dati che identificano il meccanismo da studiare e della scelta del punto di biella, forniscono immediatamente la relativa curva. Il progettista, guidato dall'esperienza e dalle analisi numeriche ripetute, può così avvicinarsi per passi alla soluzione del proprio problema di progetto. Naturalmente esistono interi programmi commerciali di calcolo che possono analizzare i quadrilateri arti-

colati, i quali programmi spesso sono molto generali e pensati per l'analisi di meccanismi anche molto complessi. Diciamo però, per esperienza, che un tecnico, qualora si accinga all'utilizzo delle curve di biella, difficilmente rinuncia a trarre ispirazione dai casi riportati sugli atlanti, se non altro per generare l'embrione di quello che poi costituirà la soluzione finale.

A titolo di esempio riportiamo in figura 7.10 le traiettorie di alcuni punti di biella del quadrilatero a manovella-bilanciere  $ABCD$ . Anche in questo caso, la distanza tra le tracce lasciate dal punto di biella dà un'idea precisa della velocità mediante la quale tale punto percorre la propria traiettoria (accorgimento grafico, questo, riportato con precisione sugli atlanti tramite linee a tratteggio di lunghezza diversificata). Non deve sorprendere se particolari curve di biella, che, da un punto di vista teorico, rettilinee non sono, vengano invece sfruttate nella pratica come generatori di spostamenti rettilinei o *guide rettilinee approssimate*.

La figura 7.11 mostra una di queste guide approssimata dal movimento del punto centrale  $E$  della biella  $BC$ . Il quadrilatero  $ABCD$  prende il nome dal suo inventore e si chiama quadrilatero di Watt (talvolta parallelogramma di Watt, anche se le applicazioni che lo vedono in tal veste sono molto rare). Nella nostra figura, le tracce del punto di biella  $E$  non sono equidistanti, infatti la figura è stata ottenuta mediante il movimento a velocità costante del bilanciere  $AB$ ; inoltre, sempre nella figura citata, viene riportato un pezzo molto esteso della curva che il punto  $E$  può percorrere. Normalmente però questo meccanismo viene impiegato sfruttando la guida rettilinea approssimata, fornita dal punto mediano della biella, a fronte di un azionamento direttamente applicato allo stesso punto  $E$ . Tale azionamento può essere l'oscillazione verticale del telaio di un'automobile quando, ad esempio, il quadrilatero di Watt viene utilizzato nelle sospensioni. Ma il movimento oscillatorio verticale della scocca di un veicolo è limitato nella propria corsa dai vincoli geometrici della sospensione stessa, pertanto va da sé che il punto di biella percorrerà soltanto una porzione, quella quasi rettilinea, della sua traiettoria possibile.

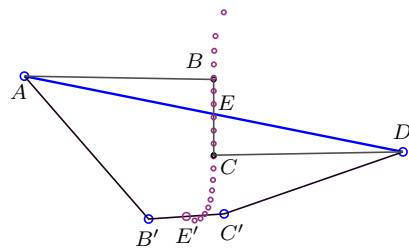


Figura 7.11: *Quadrilatero di Watt*.



## CAPITOLO 8

# Manovellismi

### 8.1 INTRODUZIONE

I meccanismi che si identificano col nome di manovellismi non sono altro, da un punto di vista cinematico, che casi particolari di quadrilateri articolati. Essi sarebbero potuti entrare a pieno titolo nel capitolo precedente, visto che le tecniche per il loro studio, siano queste grafiche, analitiche o numeriche, non differiscono da quelle che si impiegano nell’analisi dei loro progenitori. Il presente capitolo, dedicato esclusivamente allo studio dei manovellismi, si giustifica valutando l’importanza industriale che tali meccanismi hanno avuto e quindi anche la profondità e la mole di studi che li riguarda. Affermiamo, senza timore di esagerare, che il *manovellismo ordinario* o *di spinta* è stato il cuore della Rivoluzione Industriale, essendo un componente essenziale del motore a vapore. Anche ai giorni nostri, nel settore del trasporto su strada, tale meccanismo entra, con numero variabile di esemplari, praticamente in tutti i motori endotermici, tralasciando pochissime eccezioni.

Richiamiamo la nomenclatura delle quattro cerniere di un quadrilatero ricordando la figura 7.5 ovvero prendendo visione della figura 8.1. Ciascuna delle quattro cerniere  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , e  $D$  può essere mandata all’infinito seguendo una precisa direzione e divenendo una di quelle entità che la geometria definisce come *punti impropri* del piano. È scontato che, affinché una (alla volta, per il momento) delle cerniere si trovi infinitamente distante dalle altre tre, è necessario che le due aste che vi concorrono siano a loro volta di lunghezza infinita. Data la ovvia equivalenza cinematica dei punti  $A$  e  $D$  e dei punti  $B$  e  $C$  si può intuire che pensare situato all’infinito l’uno o l’altro dei punti di tali coppie produca, a livello cinematico, lo stesso effetto, e così è.

Affermiamo che allo spostarsi all’infinito delle cerniere  $A$  oppure  $D$  il quadrilatero dà origine ai *manovellismi ordinari*, naturalmente dopo avere mutato la cerniera “fuori uso” con un altro tipo di vincolo, in generale costituito da un *cursore* che scorre in un *glifo*.

Nel secondo caso, quando ad andare all’infinito è una delle cerniere  $B$  oppure  $C$ , avremo i *manovellismi non ordinari*. Andiamo con ordine.

## 8.2 IL MANOVELLISMO ORDINARIO

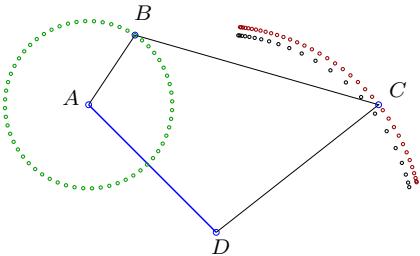


Figura 8.1: *Generico quadrilatero manovella-bilanciere.*

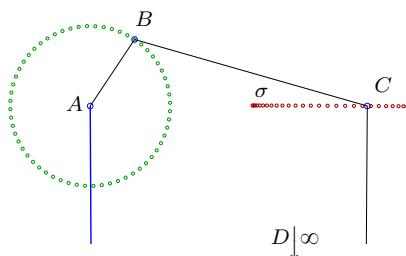


Figura 8.2: *Manovellismo ordinario centrato ottenuto spostando la cerniera D a distanza “infinita”.*

In figura 8.2 è riportato il quadrilatero degenere che si ottiene mandando all'infinito la cerniera  $D$ , una delle due vincolate al telaio, del quadrilatero di figura 8.1. La direzione secondo la quale la cerniera  $D$  diventa un punto improprio è, in questo caso, quella ortogonale al segmento  $AC$ : otteniamo in questo modo un *manovellismo ordinario centrato*. Si ottiene invece un *manovellismo ordinario deviato* scegliendo, per la cerniera  $D$ , una direzione diversa<sup>1</sup>. Il percorso della cerniera  $C$  diventa il segmento  $\sigma$ , che può essere una scanalatura (glifo) in cui scorre un cursore di forma opportuna. Ad esempio, nei motori endotermici, i cilindri costituiscono i glifi e gli stantuffi hanno la funzione di cursore. È però chiaro che l'elemento che funge da guida cava può essere invertito con l'elemento che funge da cursore, trasformando quest'ultimo in un glifo, e questa opportunità si presenta per tutti i

<sup>1</sup>Dal punto di vista cinematico, si ottiene un meccanismo perfettamente equivalente a quello di figura 8.2 mandando all'infinito la cerniera  $A$  anziché la  $D$ . Per dare un po' di vitalità a questa nota, sceglieremo in questo caso di rendere mobile il glifo e tenere ferma la cerniera  $B$ . Il dispositivo pratico che ne risulta è piuttosto diverso nei due frangenti. Nella stragrande maggioranza dei casi, il manovellismo ordinario centrato viene progettato e realizzato tenendo fisso il glifo. Nell'altro caso si ottiene invece il sistema articolato che [9] riporta a pag. 107, Fig. IV-4 (e che noi riportiamo in figura 8.3), dichiarando che “tale meccanismo non trova notevoli applicazioni”; anche all'autore non risultano applicazioni rilevanti di questo manovellismo, neppure ai nostri giorni. La figura riportata su queste note appare però piuttosto diversa da quella che si trova in [9]. Questo perché abbiamo preferito privilegiare, in questo caso, la coerenza con la precedente figura 8.1, mantenendo perciò gli stessi rapporti dimensionali tra i membri del quadrilatero e gli stessi orientamenti relativi, piuttosto che garantire alla manovella  $CD$  di potere compiere intere rotazioni.

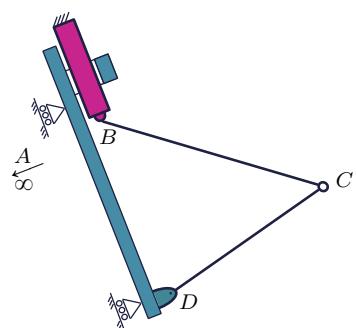


Figura 8.3: *Manovellismo ordinario centrato a glifo mobile.*

manovellismi, ordinari e non. In ambito industriale il manovellismo si studia e si progetta, come è ovvio, tramite l'ausilio dei programmi di calcolo per l'analisi di sistemi articolati. Tuttavia il manovellismo ordinario centrato è talmente diffuso, specialmente in ambito *automotive* (ogni vettura a combustione interna ne ospita in media quattro) e gli studi che lo hanno riguardato all'inizio del secolo scorso sono così rilevanti e fecondi di risultati, da imporre alla coscienza di chi insegna Meccanica Applicata l'esposizione, magari in breve, di quella che si può chiamare "trattazione analitica del manovellismo"; e così faremo noi. Cominciamo col dare uno sguardo al moto

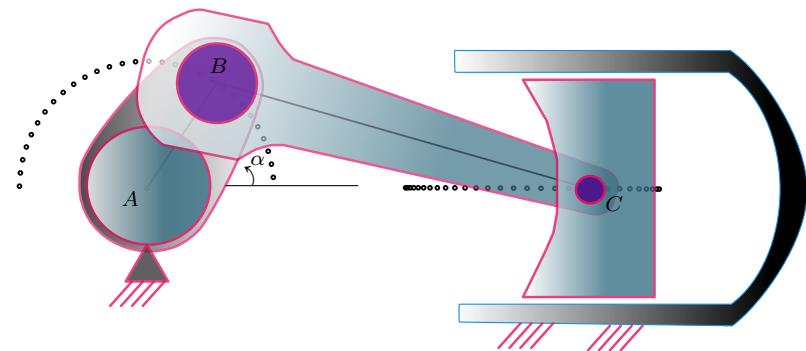


Figura 8.4: *Manovellismo ordinario centrato*.

del *piede di biella*  $C$ , senza pretese di esattezza, giusto per renderci conto in modo qualitativo del suo movimento alternativo. Riportiamo a tal fine di nuovo il manovellismo di figura 8.2 nella nuova figura 8.4, e le quantità cinematiche del punto  $C$ , ottenute da un'analisi numerica, in figura 8.5. In

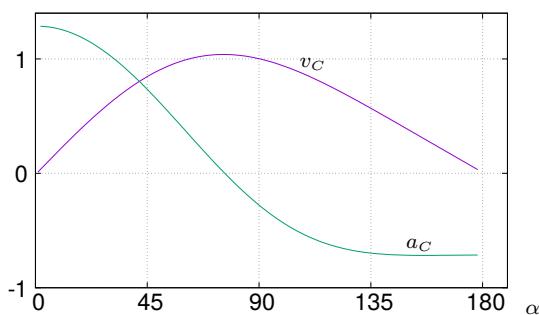


Figura 8.5: *Velocità e accelerazione nel manovellismo ordinario centrato*.

figura 8.4 si possono vedere le tracce del *bottone di manovella*  $B$  e del piede di biella  $C$ , mentre in figura 8.5 sono riportati i grafici di velocità e accelerazione del punto  $C$ , assumendo per la velocità angolare della manovella  $AB$ , di lunghezza unitaria,  $\omega_{AB} = 1$ . Notiamo subito, sia esaminando le

tracce del piede di biella, sia dal grafico della velocità, che il punto  $C$  deve rallentare nei punti morti (manovella con  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 180$ ) fino a fermarsi: presupposto ovvio affinché il moto di  $C$  si possa invertire.

### 8.3 ESPRESSIONI ANALITICHE DI VELOCITÀ E ACCELERAZIONE DEL PIEDE DI BIELLA

Con riferimento alla figura 8.6 possiamo innanzitutto considerare che la distanza  $\overline{AC}$  è pari a

$$\overline{AC} = r \cos(\alpha) + l \cos(\beta). \quad (8.1)$$

È facile perciò scrivere per la coordinata  $x$ , che indica lo spostamento del piede di biella ( $C$ ) dal punto morto esterno,

$$x = r + l - r \cos(\alpha) - l \cos(\beta). \quad (8.2)$$

È opportuno (e tradizionale) introdurre a questo punto un parametro che caratterizza fortemente il manovellismo: si tratta del rapporto tra il raggio di manovella e la lunghezza della biella:

$$\lambda = \frac{r}{l}. \quad (8.3)$$

Benché questo rapporto possa, in teoria, spaziare in un intervallo ampio-simo, esso è soggetto a restrizioni quando si desidera una manovella libera di compiere intere rotazioni. In tal caso  $\lambda < 0.28^{2,3}$  risulta essere un limite ragionevole per i manovellismi ordinari centrati impiegati nei motori a combustione interna e nei compressori. Tale limitazione non vale per manovellismi dove la manovella si comporta in realtà da bilanciere, come accade

<sup>2</sup>Valore di lambda per i manovellismi del motore Alfa Romeo 1600 cc della Giulia GTA Sprint.

<sup>3</sup>Al di là degli ovvi problemi che nascerebbero aumentando  $\lambda$ , problemi principalmente dovuti alle possibili interferenze tra organi in moto alterno, di solito gli stantuffi, il rapporto  $\lambda$  si tiene comunque piuttosto distante dal limite teorico  $\lambda = 0.5$ , cioè da quello che vedrebbe la biella di lunghezza doppia della manovella e che consentirebbe la completa rotazione di quest'ultima. Dalla figura 8.6 risulta  $\lambda = \sin \beta_{(\alpha=90^\circ)}$ . Pertanto, nelle posizioni  $\alpha = 90^\circ$  e  $\alpha = 270^\circ$  le forze che agiscono sullo stantuffo solleciteranno la biella moltiplicate per  $\frac{1}{\cos \beta_{\max}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$ ; è evidente che valori elevati di  $\lambda$  renderebbero la trasmissione del moto inefficiente, dando luogo a ingenti spinte laterali sul glifo e pregiudicando dal punto di vista strutturale gli organi meccanici coinvolti.

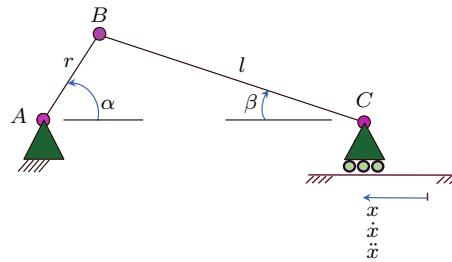


Figura 8.6: Rappresentazione schematica del manovellismo ordinario centrato.

nella maggior parte delle presse a ginocchiera, dove  $\lambda$  può persino superare l'unità. Osserviamo che  $r \sin \alpha = l \sin \beta$ , e che  $\cos \beta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha}$ . Tramite queste relazioni la 8.2 diventa

$$x = r[1 - \cos \alpha + \frac{1}{\lambda}(1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha})]. \quad (8.4)$$

Derivare rispetto al tempo una prima, quindi una seconda volta la 8.4, allo scopo di ottenere velocità e accelerazione del piede di biella, non presenta certo difficoltà. Tale calcolo però somiglierebbe a un esercizio meramente didattico di studio “a livello liceale” delle operazioni di derivazione di semplici funzioni. Come è noto, infatti, le derivate di radicali portano radicali, e le funzioni  $\dot{x}$  e  $\ddot{x}$ , ottenute per questa via, dovrebbero essere graficate con grande sforzo di calcolo, oppure per via numerica, circostanza quest'ultima che vanificherebbe lo spirito di questo percorso.

Si preferisce pertanto partire da una formula più semplice, che approssimi lo spostamento del piede di biella, e ricavare da quest'ultima le quantità cinematiche derivate. La strada è quella di esprimere il radicando della 8.4 tramite i primi due termini del suo sviluppo in serie, sviluppo eseguito considerando  $\lambda$  (e non già  $\alpha$ ) come variabile indipendente:

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \alpha} \simeq 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \alpha.$$

Otteniamo così l'espressione arrestata al secondo ordine per lo spostamento del piede di biella, che risulterà tanto più approssimato quanto più piccolo sarà il rapporto  $\lambda$ :

$$x = r[1 - \cos \alpha + \frac{1}{2}\lambda \sin^2 \alpha]; \quad (8.5)$$

essendo poi

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \quad (8.6)$$

otteniamo finalmente

$$x = r[1 + \frac{\lambda}{4} - \cos \alpha - \frac{\lambda}{4} \cos 2\alpha]. \quad (8.7)$$

La velocità “approssimata al second'ordine” si trova derivando rispetto al tempo la 8.7, tenendo presente che  $d\alpha/dt = \omega$ :

$$\dot{x} = r\omega[\sin \alpha + \frac{\lambda}{2} \sin 2\alpha], \quad (8.8)$$

mentre per l'accelerazione avremo

$$\ddot{x} = r\omega^2[\cos \alpha + \lambda \cos 2\alpha]. \quad (8.9)$$

Le espressioni 8.8 e 8.9 mostrano chiaramente un andamento delle due grandezze cinematiche composto da due armoniche.

Tramite le seguenti due osservazioni, proviamo a evidenziare il lato a nostro avviso più significativo di questo studio analitico del manovellismo ordinario. In primo luogo notiamo che per  $\lambda$  molto piccoli (biella molto lunga in rapporto al raggio di manovella), il moto del piede di biella risulta coincidere sostanzialmente col moto armonico:

$$r - x = r \cos \alpha, \quad \dot{x} = \omega r \sin \alpha \quad \text{e} \quad \ddot{x} = \omega^2 r \cos \alpha. \quad (8.10)$$

È interessante esprimere velocità e accelerazione del piede di biella in funzione della coordinata  $x$  anziché dell'angolo  $\alpha$ , figura 8.7. In tal caso, posto  $\omega = 1$ , quadrando e sommando membro a membro le formule che esprimono velocità e spostamento approssimati al primo ordine abbiamo

$$(r - x)^2 + \dot{x}^2 = r^2. \quad (8.11)$$

La 8.11 rappresenta l'equazione di una circonferenza di raggio  $r$  e centrata a una distanza  $r$  dal punto morto esterno: tale risulterà quindi l'andamento della velocità, graficata prendendo  $x/r$  come ascissa. Questo andamento verrà ovviamente modificato da valori di  $\lambda$  non trascurabili, quando cioè il moto del piede di biella si scosterà sensibilmente dal moto armonico. La figura 8.7 mostra l'andamento effettivo di  $\dot{x}(x)$ , che tiene conto anche delle successive armoniche, per  $\lambda = 0.28$ .

La seconda osservazione riguarda l'accelerazione. Il grafico di  $\ddot{x}(x)$  è anch'esso riportato nella figura appena citata e ha una forma che somiglia a quella di una parabola. Fermadoci però al primo ordine, tale grafico sarebbe una retta. Infatti dalle 8.10 otteniamo subito  $\cos \alpha = (r - x)/r$  e poi  $\ddot{x} = \omega^2(r - x)$ . Ponendo quindi come al solito  $\omega = 1$ , il grafico di  $\ddot{x}(x)$  sarà una retta a quarantacinque gradi, passante dallo zero a distanza  $r$  dal punto morto esterno. In prima approssimazione, possiamo pertanto attribuire al piede di biella una accelerazione che varia linearmente tra i due punti morti: considerazione questa che porta con sé una decisa facilità

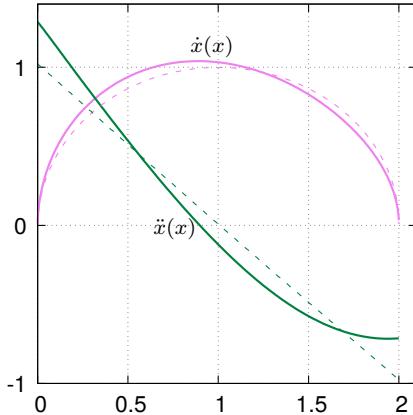


Figura 8.7: *Velocità e accelerazione del piede di biella in funzione del suo spostamento normalizzato per  $r$  (1° ordine tratteggiato).*

di calcolo. Un'ultima osservazione riguarda la possibilità di calcolare i due valori di accelerazione nei punti morti tramite la formula 8.9: otteniamo  $\ddot{x}(0^\circ) = \ddot{x}(0) = r\omega^2(1 + \lambda)$  e  $\ddot{x}(180^\circ) = \ddot{x}(2r) = r\omega^2(1 - \lambda)$ . Lasciamo al paziente e volenteroso lettore il compito di mostrare che questi due valori dell'accelerazione del piede di biella nei punti morti sono esatti: essi non risentono cioè dell'approssimazione introdotta nello spostamento dalla 8.7.

#### 8.4 VELOCITÀ E ACCELERAZIONE DEL PIEDE DI BIELLA: ANALISI MEDIANTE I MOTI RELATIVI

Come nello studio del quadrilatero, è possibile, anche in questo caso, esprimere le quantità cinematiche dei diversi punti del manovellismo mediante le relazioni che legano queste grandezze quando si considerano i moti relativi che avvengono tra i vari membri.

Con riferimento alla figura 8.8, posizioniamo un sistema di riferimento traslante centrato nel *bottone di manovella*  $B$ . Possiamo così esprimere la velocità del piede di biella come somma delle due componenti: quella relativa e quella di trascinamento

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_{C\text{rel}} + \mathbf{v}_B, \quad (8.12)$$

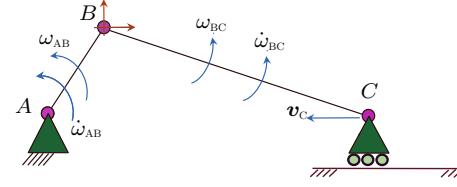


Figura 8.8: *Velocità e accelerazioni nei moti relativi del manovellismo.*

ovvero esprimendo i due addendi di destra tramite le loro relazioni con le velocità angolari di biella e manovella,

$$\mathbf{v}_C = \omega_{BC} |\overrightarrow{BC}| \perp \widehat{\overrightarrow{BC}} + \mathbf{v}_B. \quad (8.13)$$

La 8.13 è un'equazione vettoriale nella quale la direzione di tutti e tre i termini è nota mentre  $|\mathbf{v}_C|$  e  $\omega_{BC}$  risulteranno incogniti, supponendo data la velocità angolare della manovella. Si ripropone quindi lo schema risolutivo illustrato in figura 4.7, dal quale ricaveremo il valore della velocità del piede di biella e la velocità angolare della biella. Per quanto riguarda le accelerazioni possiamo scrivere

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_{C\text{rel}} + \mathbf{a}_B. \quad (8.14)$$

Come abbiamo già chiarito altrove, conviene scrivere il termine  $\mathbf{a}_{C\text{rel}}$  come somma delle sue due componenti: quella avente direzione parallela alla biella e diretta verso  $B$  (componente normale) e quella ortogonale alla biella stessa. Anche il termine  $\mathbf{a}_B$  si può scrivere mediante la somma delle sue componenti, quella radiale e quella tangenziale, le quali risulteranno note supponendo di

conoscere la velocità e la accelerazione angolari della manovella. Otteniamo in questo modo

$$\mathbf{a}_C = -\omega_{BC}^2 \overrightarrow{BC} + \dot{\omega}_{BC} |\overrightarrow{BC}| \widehat{\overrightarrow{BC}} - \omega_{AB}^2 \overrightarrow{AB} + \dot{\omega}_{AB} |\overrightarrow{AB}| \widehat{\overrightarrow{AB}}. \quad (8.15)$$

Ancora una volta siamo di fronte a una equazione vettoriale dove le incognite sono il modulo dell'accelerazione del piede di biella  $|\mathbf{a}_C|$  e l'accelerazione angolare della biella  $\dot{\omega}_{BC}$ , essendo note le direzioni di tutti i vettori. Una possibile soluzione è quindi, anche qui, lo schema grafico di figura 4.7; per inciso, la 8.15 è formalmente identica alla 7.5, la qual cosa non ci stupisce visto che stiamo di nuovo trattando la cinematica di un quadrilatero, sia pure degenere. Riteniamo di dover ribadire che il ruolo dei termini noti e di quelli incogniti possono essere scambiati a discrezione: se considerassimo assegnate la velocità e l'accelerazione del piede di biella potremmo ricavare, dalle 8.13 e 8.15, le quantità  $\omega_{AB}$  e  $\dot{\omega}_{AB}$  della manovella  $AB$ .

## 8.5 MANOVELLISMI NON ORDINARI

Come è stato accennato nel paragrafo introduttivo, se ad andare all'infinito è una delle due cerniere mobili di un quadrilatero si ottengono, sostituendo opportunamente le aste e le cerniere degeneri con membri appropriati, i *manovellismi non ordinari*. Questi manovellismi, ovviamente *cinematicamente equivalenti* ai quadrilateri degeneri che li originano, vengono spessissimo chiamati, con ragione, meccanismi *a glifo rotante* ovvero *a glifo oscillante*, dando per scontato che un preciso membro di tali meccanismi sia un glifo. Non ci stanchiamo di ripetere che, a rigore, i due membri dell'accoppiamento glifo-cursore possono sempre essere scambiati tra loro senza alcuna mutazione della cinematica del sistema. Prima di entrare nel vivo di questo paragrafo, desideriamo esporre una breve precisazione, che per la verità avrebbe potuto precedere anche la trattazione dei manovellismi ordinari, ma che si rende ancora più necessaria in questa sede: cosa intendiamo, esattamente, con la locuzione *equivalenza cinematica*? Ancora più esplicitamente, quando assieriamo che la cerniera  $D$  e il bilanciere  $DC$  del quadrilatero degenere di figura 8.2 vengono sostituiti dalla coppia glifo-cursore  $\sigma$ , ottenendo in tal modo il manovellismo ordinario equivalente, di quale equivalenza parliamo? Nello studio dei manovellismi si parla di meccanismo equivalente quando la biella (o un corpo che la sostituisce) sarà interessata dallo stesso moto piano, mantenendo per tutti i punti di biella le stesse traiettorie, le stesse velocità e le stesse accelerazioni. Nel caso che abbiamo studiato dei manovellismi ordinari l'equivalenza del comportamento della biella di figura 8.2 con la cerniera  $D$  a grande distanza o con la coppia glifo-cursore  $\sigma$  sembra all'autore sufficientemente evidente. Qualche attenzione in più è richiesta nello studio dei manovellismi non ordinari.

Giusto per fissare qualche idea circa il comportamento di un quadrilatero che degenera tramite l'allontanamento di una delle due cerniere (perfettamente equivalenti)  $B$  oppure  $C$ , eseguiamo un tentativo di analisi qualitativa tramite i nostri consueti (e rudimentali) strumenti di indagine numerica. Abbiamo scelto, con criterio del tutto arbitrario, di rendere improprio l'asse

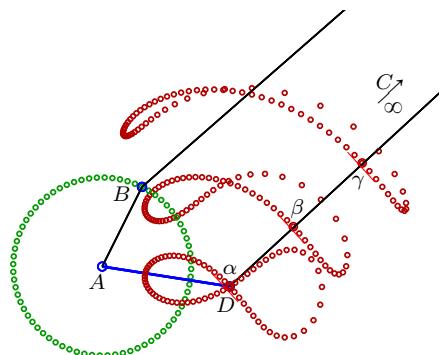


Figura 8.9: Quadrilatero degenere ottenuto mandando la cerniera  $C$  a distanza infinita.

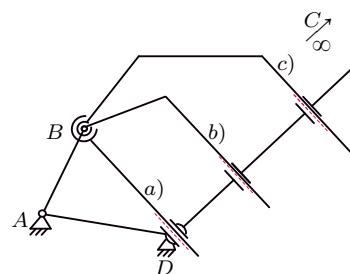


Figura 8.10: Possibili meccanismi a glifo mobile derivati dalla figura a lato.

della cerniera  $C$ . Come nel caso dei manovellismi ordinari, la scelta della direzione secondo la quale mandare tale cerniera a grande distanza non è indifferente. Quando la cerniera, come in questo caso, è mobile tale direzione muta durante il movimento del meccanismo. Notiamo però che, scelta in un dato istante la direzione del punto improprio  $C$ , essa rimarrà, durante il movimento, costante rispetto alla direzione del segmento  $BD$ ; in altre parole l'angolo tra la direzione del punto improprio e  $BD$  si manterrà costante. Ciò accade in quanto il triangolo  $\triangle BCD$  presenta angolo costante e nullo in  $C$ . Ritenendo quindi le lunghezze dei lati  $BC$  e  $CD$  costanti, anche se infinite, rimarranno invariati durante il movimento anche gli altri suoi angoli<sup>4</sup>. Nel caso delle figure 8.9 e 8.10 la direzione scelta coincide con la perpendicolare al segmento  $BD$ , scelta che consente di ottenere *manovellismi non ordinari centrati*. In figura 8.9 sono riportate tre curve di biella relative a tre punti che giacciono sul membro  $DC$ . Lo scopo di tale figura è quello di rendere maggiormente evidente il moto del piano di biella nei pressi del bilanciere “improprio”. Da questa analisi si può notare che nei punti di intersezione con il bilanciere  $DC$ , le curve di biella sono ortogonali ad esso. La figura, rimarcando questa circostanza, facilita l'intuizione. Tali direzioni erano peraltro prevedibili a valle di semplici ragionamenti geometrici, osservando che

<sup>4</sup>La lunghezza del lato  $BD$ , ovviamente, non si mantiene costante. Essa però risulta infinitesimale rispetto alle lunghezze degli altri due lati, pertanto la sua variazione provoca alterazioni infinitesimali e trascurabili del triangolo  $\triangle BCD$ .

tutti i punti di biella che giacciono su  $DC$  descrivono, nel loro moto relativo a tale membro, delle circonferenze di centro  $C$ , le cui tracce sono in figura rappresentate da brevi segmenti:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . La condizione poi che il punto  $C$  si trovi a grande distanza ci autorizza, come abbiamo appena sopra chiarito, a ritenere costante l'angolo compreso tra  $DC$  e il segmento  $DB$ , pari nel nostro caso a  $90^\circ$ . Queste considerazioni ci consentono di sostituire la cerniera in  $C$  con gli accoppiamenti prismatici che danno origine alla figura 8.10. I tre meccanismi a), b) e c) sono, da un punto di vista cinematico, un solo meccanismo, essendo il piano di biella lo stesso per le tre soluzioni e rendendo ridondante la distinzione della cerniera in  $B$  in tre cerniere separate. I tre sistemi articolati presentano un glifo sul bilanciere  $CD$  dove scorre la relativa biella. Oltre a ripetere (lo abbiamo detto già troppe volte) che il ruolo di chi porta la scanalatura (glifo) e di chi invece fa da cursore possono indifferentemente essere scambiati, osserviamo che tali accoppiamenti prismatici possono essere dislocati in qualsiasi punto della biella equivalente. In particolare, considerando il meccanismo a) di figura 8.10, che riteniamo maggiormente significativo, possiamo ottenere i sistemi articolati equivalenti di figura 8.11.

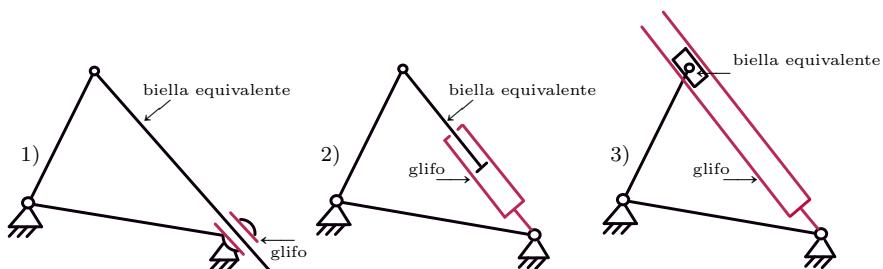
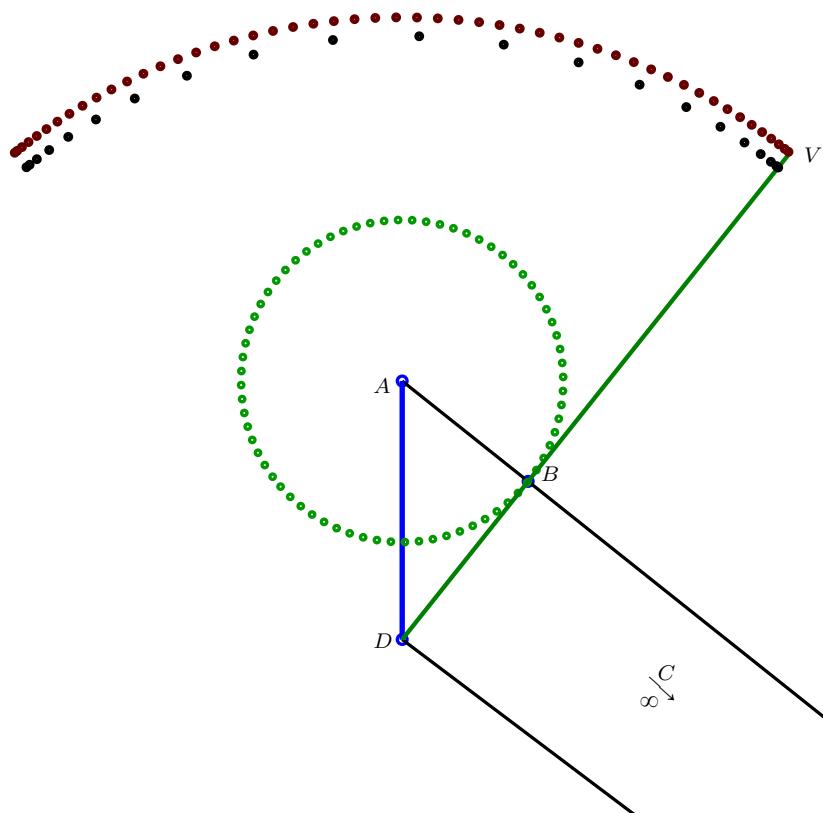


Figura 8.11: *Manovellismi non ordinari centrati equivalenti.*

I tre meccanismi qui riportati presentano glifi oscillanti attorno alla cerniera  $D$ , dove essi sono incernierati. La lunghezza della “biella” è, dalla configurazione 1) alla configurazione 3), via via decrescente fino ad annullarsi. Nel meccanismo 3) il piano di biella con tutte le sue curve va pensato infatti solidale al cursore che scorre nel glifo. Occorre però precisare che, quando si parla di glifi oscillanti e ci si riferisce appunto alla figura 8.11, caso 3), ancora più delle curve dei punti di biella interessa il movimento del glifo stesso, il quale è un bilanciere, e come tale si muove.

## 8.6 MECCANISMO A RITORNO RAPIDO

La figura 8.12 riporta nuovamente il meccanismo di figura 8.11, caso 3), ruotato di un angolo opportuno, in modo da porre il suo telaio in verticale. A

Figura 8.12: *Meccanismo a ritorno rapido.*

una rotazione completa della manovella  $AB$ , di solito a velocità  $\omega$  costante, corrispondono un'oscillazione di andata del glifo e una di ritorno che si svolgono impiegando tempi diversi fra loro. In particolare, come abbiamo già visto nello studio dei quadrilateri, pagina 96, tali tempi saranno proporzionali ai rispettivi angoli di manovella. Nella figura poc'anzi citata, ottenuta da un'analisi numerica, non trova espressione grafica il pattino che deve permettere al punto  $B$  di scorrere in una apposita scanalatura dell'asta  $DV$ , che per questo assume generalmente il nome di glifo. Con la speranza di porre rimedio a tale lacuna grafica, riportiamo la prossima illustrazione, nella quale si può anche apprezzare l'utilizzo concreto di questo manovellismo. La *guida di Fairbairn*, rappresentata in figura 8.13, si ottiene dal meccanismo di figura 8.12 con l'aggiunta di una bielleta (o biscottino) di snodo oppure di un opportuno accoppiamento prismatico ([9], Fig. IV-8, pag. 108, ma anche [19], pag. 168) in modo tale da permettere alla sommità del glifo di azionare una slitta rettilinea. Tale soluzione costituiva, fra l'altro, il cuore di

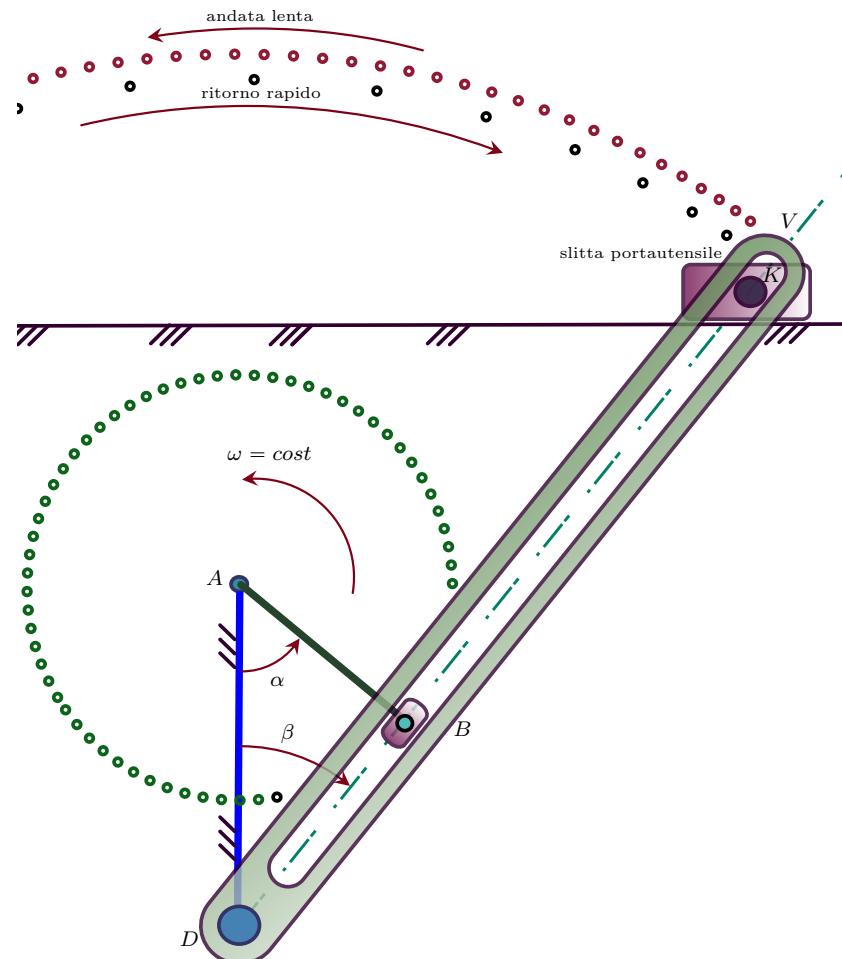


Figura 8.13: Meccanismo di Fairbairn.

una ben nota macchina utensile che necessita di una corsa di andata “lenta” e di un ritorno “rapido”. Le tracce lasciate dalla sommità del glifo, durante il suo movimento, dovrebbero dare conto, mediante la loro spaziatura, delle differenti velocità di  $V$  durante un ciclo di manovella. Le stesse spaziature, proiettate in pianta, dovrebbero altrettanto rendere l’idea della velocità del punto  $K$ , quindi della velocità del portautensile. Anche qui, come nel caso del manovellismo ordinario centrato, è possibile impostare le equazioni che legano l’angolo  $\beta$  percorso dal glifo all’angolo  $\alpha$  di manovella; derivando queste equazioni rispetto ad  $\alpha$  oppure rispetto al tempo si otterranno infine le equazioni della cinematica del glifo oscillante centrato. Analogamente, non presenterebbe certo difficoltà alcuna mettere in relazione l’angolo di oscillazione del glifo con lo spostamento della slitta portautensile, della quale si

otterrebbero finalmente velocità e accelerazione, come mostrano importanti autori, ad esempio [19], pag. 168. Non ce la sentiamo però di seguirli in tale percorso, e ci accontentiamo dell'analisi numerica riportata in modo qualitativo nelle figure 8.12 e 8.13, mediante le tracce del bottone di manovella e della estremità del particolare glifo che abbiamo scelto di proporre come esempio.

A nostro parere, dalla trattazione analitica del glifo non emergono importanti spunti didattici, al di là dei meri passaggi trigonometrici: i volenterosi e curiosi studenti sapranno agilmente trovare tali calcoli nella citata bibliografia, se interessati. Per contro, colui che si vedrà assegnato il compito di progettare realmente un meccanismo a ritorno rapido si affiderà ai contemporanei codici numerici di simulazione di meccanismi che forniscono, con precisione, tutte le grandezze cinematiche in gioco. Inoltre sottolineiamo di nuovo che l'importanza di questo meccanismo risiede nella possibilità di avere tempi di andata e ritorno sensibilmente diversi fra loro, in modo da non sprecare tempo prezioso nella fase oziosa del moto dell'utensile, più che nella conoscenza puntuale della velocità o della accelerazione di quest'ultimo. Nel nostro caso, invero un po' estremo, abbiamo  $\alpha_a = 257^\circ$  e  $\alpha_r = 103^\circ$  che permettono al tempo di andata, corrispondente al tempo di lavoro dell'utensile, di essere più che doppio rispetto al tempo "morto" del ritorno. Ai tempi in cui le macchine utensili venivano realizzate tramite pregiate fusioni in ghisa, il glifo di *Fairbairn* era l'azionamento principale della *limatrice*. A proposito di questa applicazione, sottolineiamo che la velocità massima, raggiunta dalla slitta durante la fase di andata (lenta), si manifesta quando il punto *K* è allineato coi punti *A*, *D* e *B*. Essa è facilmente calcolabile e vale, con *K* in tale posizione,  $|v_{max}| = |\omega| |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{KD}| / |\overrightarrow{BD}|$ ; essa rappresenta la velocità di taglio nominale dell'utensile.

Mi si permetta (tanto tempo è trascorso quindi mi sento al sicuro da rivendicazioni o proteste di carattere commerciale) di citare la "gloriosa e indistruttibile" limatrice Garavaglia. Tutte le officine meccaniche rispettabili ne avevano almeno una a disposizione. L'autore però confessa che, già trent'anni or sono, queste macchine beneficiavano di notevolissimi periodi di riposo.

## 8.7 CINEMATICA DEL MECCANISMO A RITORNO RAPIDO: ANALISI MEDIANTE I MOTI RELATIVI

La soluzione grafica che abbiamo esposto per l'analisi cinematica di quadrilateri e manovellismi ordinari si può naturalmente estendere anche al caso del meccanismo a ritorno rapido. Riferendoci alla figura 8.14 posizioniamo, in questo caso, un sistema di riferimento relativo (al quale cioè verranno riferite le grandezze relative) che ruota solidalmente con il glifo ed è centrato in *D*. Siamo in grado ora di esprimere la velocità del punto *B* (bottone di

manovella) mediante la somma delle due componenti: quella relativa e quella di trascinamento:

$$\mathbf{v}_{B\text{ass}} = \mathbf{v}_{B\text{rel}} + \mathbf{v}_{B\text{tr}}, \quad (8.16)$$

ovvero,

$$\mathbf{v}_{B\text{ass}} = \mathbf{v}_{B\text{rel}} + \omega_g |\overrightarrow{DB}| \perp \widehat{DB}. \quad (8.17)$$

La 8.13 è un'equazione vettoriale nella quale la direzione di tutti e tre i termini è nota mentre  $|\mathbf{v}_{B\text{rel}}|$  e  $\omega_g$  sono incogniti, una volta data la velocità angolare della manovella. Anche qui riproponiamo quindi lo schema risolutivo illustrato in figura 4.7, mediante il quale ricaveremo i valori delle incognite.

Per quanto riguarda le accelerazioni scriviamo

$$\mathbf{a}_{B\text{ass}} = \mathbf{a}_{B\text{rel}} + \mathbf{a}_{B\text{tr}} + \mathbf{a}_{B\text{cor}}, \quad (8.18)$$

dove si nota la presenza del termine dell'accelerazione di *Coriolis* dovuta alla rotazione del sistema di riferimento relativo. Come al solito sostituiamo alle accelerazioni le loro componenti tangenziali e normali ottenendo

$$\mathbf{a}_{B\text{ass}} = \mathbf{a}_{B\text{rel}} - \omega_g^2 \overrightarrow{DB} + \dot{\omega}_g |\overrightarrow{DB}| \perp \widehat{DB} + 2\omega_g \times \mathbf{v}_{B\text{rel}}. \quad (8.19)$$

Osserviamo che risultano note le direzioni di tutti i termini di questa equazione. Contando poi i termini della 8.19 da sinistra, affermiamo che gli unici moduli incogniti sono quelli dei vettori che occupano il primo e il terzo posto dopo il degno di uguaglianza. Perciò otteniamo ancora un'equazione vettoriale dove le incognite sono il modulo dell'accelerazione relativa di  $B$ ,  $|\mathbf{a}_{B\text{rel}}|$ , e il modulo dell'accelerazione angolare del glifo  $\dot{\omega}_g$ . Il riferimento per una soluzione grafica resta dunque il solito, cioè lo schema grafico di figura 4.7. Ammettiamo che, passando dall'esempio di pagina 35 all'approccio grafico alla cinematica dei quadrilateri e infine alla stessa analisi operata sui manovellismi, ammettiamo dicevo che la nostra esposizione si è fatta via via più succinta, sottacendo di passo in passo alcune precisazioni presenti nei primi esempi. Il motivo di questa progressiva reticenza sta nel pudore, forse ingiustificato, che nasce quando si è costretti a ripetere molte volte contenuti non molto dissimili da quelli espressi poco addietro. Siamo certi che lo studente

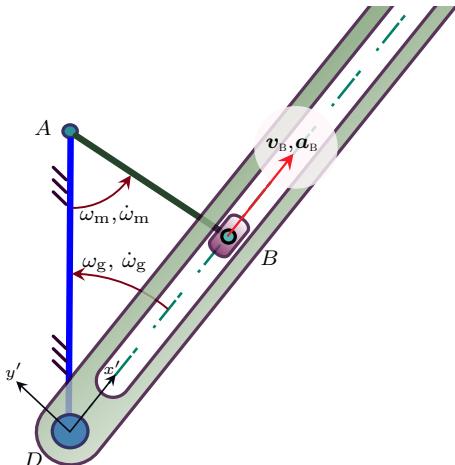


Figura 8.14: *Velocità e accelerazioni nei moti relativi del meccanismo a ritorno rapido.*

volenteroso saprà rintracciare in questo percorso tutte le informazioni che sono state via via tralasciate.

### 8.8 MANOVELLISMI NON ORDINARI CON DUE MEMBRI ROTANTI

Nel precedente paragrafo abbiamo analizzato il meccanismo a ritorno rapido nel quale, stante l'opportunità di realizzare il glifo sull'asta *DV*, figura 8.13, abbiamo ottenuto un glifo oscillante, che si comporta cioè come un bilanciere, e abbiamo citato una delle sue più famose applicazioni che consiste nella movimentazione di utensili da taglio. Non è difficile, adottando opportune configurazioni, ottenere per tale meccanismo un glifo rotante (sempre che la volontà del progettista lo voggi come un glifo). L'analisi qualitativa di tali meccanismi sarà oggetto di questo paragrafo. Mandiamo all'infinito la cerniera *B* di un opportuno quadrilatero di partenza, avente geometria tale da poter funzionare (si riveda la regola di *Grashof*) a "doppia-manovella". Abbiamo scelto la cerniera *B* anziché la *C* semplicemente per mostrare al lettore la completa equivalenza, in questa circostanza, delle due cerniere.

Nella nostra analisi, che svolgeremo come abbiamo fatto altre volte tramite l'approccio numerico, la manovella a velocità costante è sempre la *AB*, che lascia le sue tracce equispaziate; questo ci consentirà di avere sulla manovella *DC*, l'elemento che di solito è costituito da un glifo come in figura 8.17, la velocità variabile.

In particolare, la figura 8.15 riporta l'andamento del rapporto tra la velocità angolare del glifo,  $\omega_{DC}$ , e quella della manovella (presente nella figura 8.17),  $\omega_{AK}$ . Se volessimo valorizzare il massimo squilibrio che si può ottenere tra la rotazione della manovella e quella del glifo, come abbiamo esposto nel paragrafo 7.3, dovremmo anche qui trovare una posizione ben precisa "di montaggio" di questo meccanismo. Quest'ultimo quindi, se opportunamente sfruttato, potrà presentare, a fronte di due semi-rotazioni contigue di  $180^\circ$  del glifo, due angoli di manovella sensibilmente diversi tra loro. Riferendoci all'esempio di figura 8.16, figura sulla quale si basa quella successiva, 8.17, troviamo indicate le coppie di angoli  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$  che realizzano in questo caso il *massimo squilibrio* pari a

$$s = \frac{292^\circ - 68^\circ}{360^\circ - 292^\circ + 68^\circ} = 1.6. \quad (8.20)$$

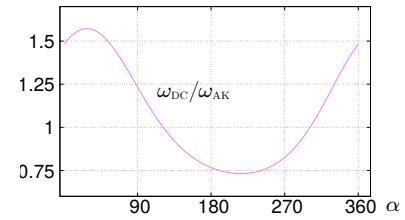


Figura 8.15: Velocità del membro *DC*.

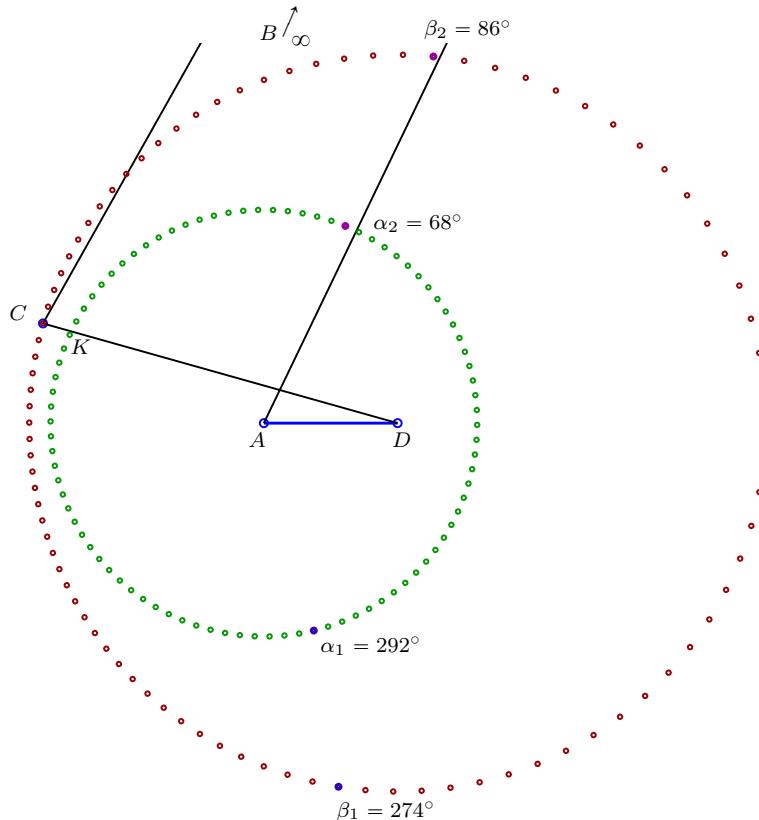


Figura 8.16: *Manovellismo non ordinario che permette la rotazione completa di due membri.*

A una rotazione completa della manovella *AK*, a velocità costante, corrisponderanno quindi due semi-rotazioni del glifo che si completeranno in tempi diversi tra loro con  $t_a/t_r = 1.6$ . Si potrebbe quindi impiegare questo glifo come manovella di un manovellismo ordinario centrato, per il quale le corse di andata e ritorno si svolgerebbero in tempi il cui rapporto reciproco è stato ora indicato. Questa soluzione è stata talvolta adottata (glifo di *Whitworth*) in sostituzione del glifo di *Fairbairn*, [9], pag. 109.

## 8.9 QUADRILATERI DOPPIAMENTE DEGENERI E ALTRE CONSIDERAZIONI

Tratteremo brevemente soltanto il caso in cui, spostando le due cerniere mobili, *B* e *C*, in due punti impropri distinti del piano, si dà luogo a un interessante meccanismo di discreta importanza nelle applicazioni pratiche: il *giunto di Oldham*. La figura 8.18 mostra un quadrilatero a doppia-manovella dove il telaio *AD* misura circa la ventesima parte delle altre aste. Siamo costretti, si fa per dire, a svelare ora l'arcano che sta alla base delle figure dei

manovellismi riportati in questo capitolo. Di fatto, le analisi numeriche che danno origine alle figure 8.2, 8.9, 8.12 e 8.16 sono state eseguite mediante lo stesso (semplice e imperfetto) codice che genera anche le analisi dei quadrilateri del precedente capitolo dedicato allo studio dei quadrilateri articolati. In ambito numerico, esiste infatti la possibilità di analizzare, a volte con un certo agio, anche quelle situazioni limite lasciate giustamente dalla matematica nella sfera delle idee astratte, come sono in generale le grandezze che tendono all'infinito. Inoltre, le scienze ingegneristiche, pur abbracciando senza perplessità il concetto di distanza infinita, possono in altri casi permettersi il lusso di accontentarsi di qualcosa di meno e magari più a portata di mano. È il nostro caso, quando pretendiamo di trattare numericamente le lunghezze, teoricamente infinite, delle aste  $AD$  e  $CD$  del quadrilatero di figura 8.2 sostituendo tali membri con aste di lunghezza finita, benché cinquanta o sessanta volte maggiore rispetto alle altre due. Del resto, a nessun ingegnere di buon senso verrebbe in mente di obiettare che la traiettoria del cursore, in figura 8.2, indicata con  $\sigma$ , sia un arco di circonferenza anziché un segmento di retta. Torniamo alla figura 8.18 e notiamo che la manovella  $CD$  è omocinetica alla  $AB$  (nell'approssimazione numerica adottata per le

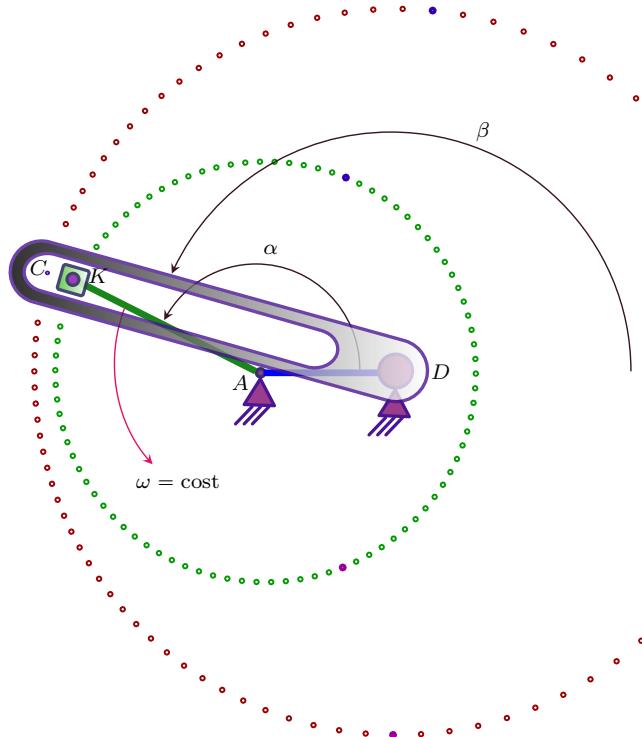


Figura 8.17: Manovellismo non ordinario con glifo rotante.

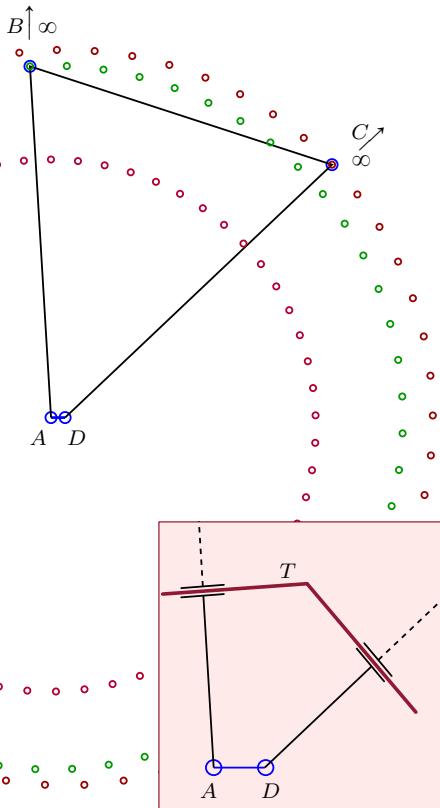


Figura 8.18: Quadrilatero doppiamente degenere e relativo meccanismo equivalente.

lunghezze infinite delle tre aste  $AB$ ,  $BC$ , e  $CD$ ), cioè le due manovelle hanno la stessa velocità angolare. La curva percorsa dal generico punto di biella  $P$  approssimerà tanto meglio una circonferenza quanto più distante si troverà dal telaio (come nella figura) e anch'essa risulta percorsa con velocità di modulo costante. Risulta poi evidente che le curve di biella dei punti giacenti (punti non rappresentati in figura per evitare confusione nel disegno) sulle manovelle, taglieranno queste ultime seguendo direzioni ad esse ortogonalì<sup>5</sup>. Nel riquadro in basso a destra della figura 8.18 è riportato un meccanismo equivalente al quadrilatero doppiamente degenere che stiamo analizzando e la trave  $T$  di tale figura riproduce quindi il comportamento della biella  $BC$ . Si intravede così la possibilità di trasmettere omocineticamente il moto tra

<sup>5</sup>È facile convincersi che passando a lunghezze delle tre aste  $AB$ ,  $BC$  e  $CD$  cento volte superiori a quelle rappresentate nella figura, i punti  $A$  e  $D$  verrebbero a coincidere nel disegno in un punto  $V$ . Il meccanismo diventerebbe così un triangolo  $\triangle VBC$  che ruota attorno al suo vertice trascinando in questa rotazione, oltre alle due manovelle, tutto il piano di biella.

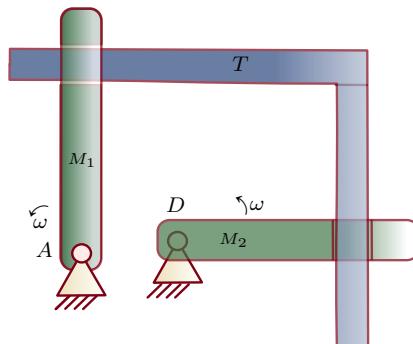


Figura 8.19: Rappresentazione funzionale del giunto di Oldham.



Figura 8.20: Giunto di Oldham commerciale che permette disassamenti tra gli alberi fino a 5 mm.

due alberi paralleli e tra loro disassati. In figura 8.19 è riportato un *giunto di Oldham* che presenta la trave  $T$  come una squadra. Questa soluzione è suggerita dal fatto che appare come privo di senso privilegiare particolari direzioni radiali in un dispositivo il cui funzionamento spazia su giri completi. D'altra parte anche la posizione delle due "chiavi" può essere ottimizzata in modo da diminuire l'ingombro complessivo. La figura 8.20 mostra un piccolo giunto di *Oldham* commerciale, dove i glifi sono stati ricavati sulla trave  $T$  e non sulle due manovelle; la figura mostra i tre componenti disgiunti, le due manovelle e la trave di collegamento, nonché il giunto assemblato che dovrebbe convincere il lettore della sua semplicità e compattezza.

Come promesso nel titolo del presente paragrafo, esponiamo qualche ulteriore considerazione circa i manovellismi e la loro classificazione in ordinari e non ordinari. Nel percorso che abbiamo seguito in questo lavoro viene evidenziata la differente genesi delle due tipologie di manovellismo: quando a divenire un punto improprio è una delle due cerniere fisse si ottiene un manovellismo ordinario, viceversa si ottiene un manovellismo non ordinario quando a diventare impropria è una delle altre due cerniere. Mentre nella sfera delle applicazioni pratiche la scelta del "membro telaio" è tutt'altro che indifferente (a ben pochi è venuto in mente di costruire un motore dove a ruotare fosse il blocco dei cilindri), nell'ambito della cinematica teorica possiamo individuare soltanto i moti relativi tra le varie parti di un quadrilatero o di un manovellismo. In altre parole, considerando di nuovo il manovellismo ordinario di figura 8.4 e tirando in ballo la nostra ormai affezionata formica esploratrice (ve la ricordate? Quella della giostra dei cavalli...), potremmo affermare che tale insetto vedrebbe un manovellismo ordinario quando sta fermo sul glifo (il cilindro), un manovellismo non ordinario come quello di figura 8.11- 3) quando sta fermo sulla manovella  $AB$  e un meccanismo equi-

valente a quello di figura 8.11- 1) quando la formica sta ferma sulla biella  $BC$ . Questo punto di vista circa i diversi manovellismi, che riteniamo chiarificatore e didattico, viene esposto in molti libri che trattano questo argomento come, ad esempio, [9], pag. 107.

## CAPITOLO 9

### Leggi di Moto e Profilatura delle Camme

#### 9.1 INTRODUZIONE

Nell'ambito delle macchine automatiche con elevata cadenza di funzionamento, dedicate alla produzione su vasta scala di manufatti, si incontrano sovente organi meccanici che eseguono movimenti ripetitivi, composti da ben precise successioni di salite, soste e discese, nomi che tendono a essere conservati anche quando i movimenti non sono verticali. La legge temporale di tali movimenti è solitamente dettata dal particolare processo tecnologico che la macchina o una parte di essa è chiamata a svolgere. Sono frequentissimi i casi

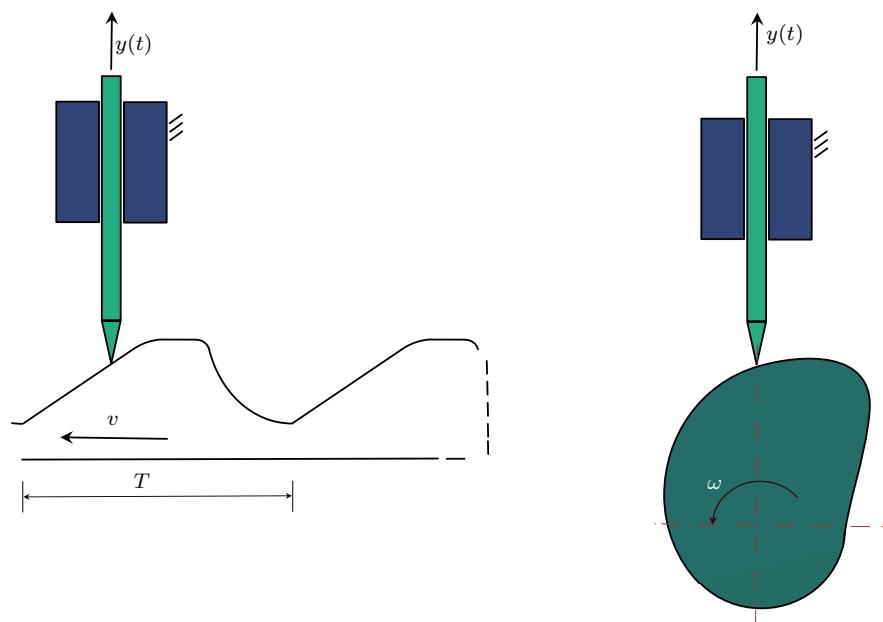


Figura 9.1: *Movimentazione di un cedente mediante sagoma di traslazione.*

Figura 9.2: *Sagoma di traslazione avvolta su un tamburo cilindrico.*

di presse e fustelle montate in cosiddette “stazioni” a bordo di una macchina che eseguendo particolari *leggi di moto* taglano, sagomano, incollano i vari pezzi di materiale cosicché, alla fine di un “ciclo macchina”, otterremo il manufatto finito. Giusto per intenderci, è tipico incontrare in questo perimetro macchine automatiche che producono quantità elevate di stoviglie in carta o alluminio, di semplici calzature, di tessuti, di contenitori per la cosmetica, di bottiglie realizzate in svariate materie plastiche vuote o riempite contestualmente alla loro formatura, e chi più ne ha più ne metta. La cadenza di tali macchine può raggiungere e superare quella di due “colpi” al secondo. La figura 9.1 riporta una idea *naïve* di un cedente che, tastando con una punta (o coltello) una sagoma che trasla, viene azionato verticalmente, quindi costretto a compiere la legge costituita dal profilo della sagoma stessa. La *camma lineare* così ottenuta viene normalmente “avvolta”, come in figura 9.2, su un tamburo il quale, ruotando generalmente a velocità costante, può riprodurre automaticamente ad ogni giro la legge di moto senza la necessità di ripeterla molte volte in sequenza, come sarebbe necessario fare sulla sagoma traslante. Nella stragrande maggioranza delle macchine automatiche la generazione di movimenti opportuni rispettando tempi precisi è di fondamentale importanza. Questo perché i movimenti di fustelle, presselli, spruzzatori, togli-metti foglio, e altri dispositivi, frequenti in questo ambito, necessitano di tempi e luoghi precisi per soddisfare il processo tecnologico al quale sono adibiti: processo che può essere rappresentato da una operazione di imbutitura, di formatura, di incollaggio ecc. Unitamente a ciò, i movimenti di questi dispositivi devono spesso rispettare sincronizzazioni temporali tra le operazioni stesse e movimenti di altri organi della medesima macchina. Questi movimenti ripetitivi possono essere rappresentati in un grafico che prende il nome di *diagramma temporale delle alzate*, del quale un esempio è riportato in figura 9.3. Abbiamo poc’anzi accennato al fatto che normalmente la generazione delle alzate avviene tramite la trasformazione del moto rotatorio di un albero, il quale ruota a velocità angolare  $\omega$  costante: ad ogni rotazione completa dell’albero *a camme*, sul quale sarà presente la *camma*, si completerà un intero ciclo del diagramma delle alzate. Entreremo tra poco nel cuore di una descrizione, certamente non esaustiva, dei dispositivi a camma che operano la suddetta trasformazione; anteponiamo qui solo qualche considerazione generale sulle leggi di movimento. Tali considerazioni, peraltro, hanno applicazioni ben più estese

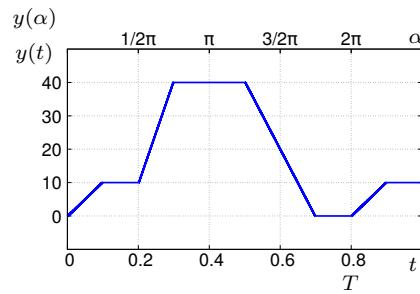


Figura 9.3: *Diagramma delle alzate*.

rispetto al solo ambito delle camme meccaniche. Riteniamo tuttavia che i meccanismi a camma offrano un generoso campo di esempi che aiutano a comprendere l'argomento.

## 9.2 LE LEGGI DI MOTO

Fissiamo le idee sulla movimentazione della mazza di una pressa la quale dovrà eseguire gli spostamenti ciclici indicati in figura 9.3 con una alzata massima del cedente pari a 40 mm. Se si conviene di indicare con  $T$  il *periodo* di tempo entro il quale si completa un *ciclo macchina*, pari nel nostro caso a 0.8 s, la velocità angolare costante dell'albero che genera tale movimento sarà  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.85$  rad/s che corrisponde a 75 giri al minuto. Dato il legame tra l'angolo percorso dall'albero a camme e il tempo trascorso,  $d\alpha = \omega dt$ , possiamo sostituire alla variabile temporale della funzione  $y(t)$  la variabile angolare  $\alpha$ , considerando che in un ciclo macchina sarà  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ . Si chiama *diagramma delle alzate* il grafico di  $y(\alpha)$  che mostra il legame geometrico tra le alzate di una camma e la sua rotazione. Si noti che la sovrapposizione del diagramma temporale delle alzate con il diagramma in funzione dell'angolo  $\alpha$  è possibile soltanto quando  $\omega$  è costante, condizione questa, come abbiamo già affermato, generalmente soddisfatta. La velocità e l'accelerazione del cedente hanno quindi un loro corrispondente di natura geometrica. Infatti derivando la funzione  $y(t)$  rispetto al tempo otteniamo per la velocità

$$\frac{dy(t)}{dt} = \dot{y} = \omega \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} = \omega y', \quad (9.1)$$

e per l'accelerazione

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \ddot{y} = \dot{\omega} \frac{dy(\alpha)}{d\alpha} + \omega^2 \frac{d^2y(\alpha)}{d\alpha^2} = \dot{\omega} y' + \omega^2 y'', \quad (9.2)$$

che, nel caso di velocità angolare costante, si riduce a

$$\ddot{y} = \omega^2 y''. \quad (9.3)$$

Essendo le *quantità cinematiche geometriche*, legate esclusivamente alla forma della camma (più in generale legate al particolare meccanismo che le produce utilizzando un moto rotatorio), e indipendenti dal regime di rotazione dell'albero, esse risultano estremamente comode per confrontare tra loro *leggi di moto* diverse, nel processo di sintesi progettuale della camma stessa. In moltissimi casi, il diagramma delle alzate presenta una certa libertà interpretativa. Spesso, ciò che sostanzialmente importa nella movimentazione dell'utensile sono i valori delle successive alzate e le loro durate temporali, nonché le durate delle varie soste: la legge di moto  $y(t)$  che collega due posizioni di alzata invece non è quasi mai fissata in maniera stringente. Nel caso

del diagramma delle alzate di figura 9.3, ad esempio, contiamo tre leggi di moto distinte sugli intervalli di tempo:  $0 - 0.1$ ,  $0.2 - 0.3$  e  $0.5 - 0.7$ , frammiste a tre soste:  $0.1 - 0.2$ ,  $0.3 - 0.5$  e  $0.7 - 0.8$ . La mancanza di vincoli rigidi per i tratti di salita e discesa, cui abbiamo testé accennato, ci consente la possibilità di scegliere, a parità sostanziale del diagramma delle alzate, leggi di moto diverse che soddisfacendo tale diagramma possono sottostare anche ad alcuni altri criteri che sceglieremo e imporremo in modo opportuno. Il più costrittivo di tali criteri è quello che permette al cedente di giungere nei tratti di sosta effettivamente fermo. Indicando perciò con  $t_s$  il tempo in cui si svolge la legge di salita deve essere

$$\int_0^{t_s} \ddot{y}(t) dt = 0. \quad (9.4)$$

Oppure, considerando la variabile angolare anziché il tempo e indicando con  $\alpha_s$  l'angolo di rotazione della camma sul quale si estende quel tratto di salita, dovrà essere

$$\int_0^{\alpha_s} y''(\alpha) d\alpha = 0. \quad (9.5)$$

Una volta scelta la “forma” della legge di accelerazione che soddisfa le relazioni 9.4 e 9.5, dovranno essere verificate le seguenti relazioni

$$\int_0^{t_s} dt \int_0^{t_s} \ddot{y}(t) dt = \int_0^{\alpha_s} d\alpha \int_0^{\alpha_s} y''(\alpha) d\alpha = h, \quad (9.6)$$

o anche

$$\int_0^{t_s} \dot{y}(t) dt = \int_0^{\alpha_s} y'(\alpha) d\alpha = h, \quad (9.7)$$

in maniera che tale legge produca effettivamente l’alzata richiesta. Segnaliamo che, nella parte dedicata agli approfondimenti, al capitolo 12, è presente una breve nota circa un’ulteriore proprietà notevole delle leggi di moto.

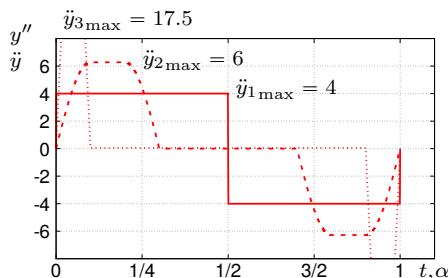


Figura 9.4: Diverse leggi di accelerazione.

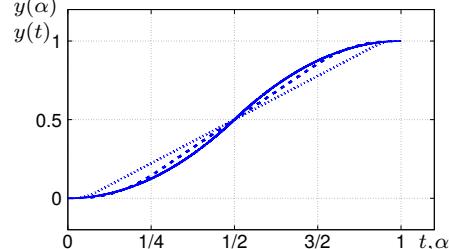


Figura 9.5: Corrispondenti diagrammi dell’alzata.

In figura 9.5 sono riportate tre diverse leggi di spostamento che producono la stessa alzata,  $h = 1$ , durante una rotazione dell’albero di un radiante, oppure

dopo il tempo di un secondo (si sottintende perciò  $\omega = 1$ ), terminando la corsa con velocità nulla. Mentre la discrepanza tra i diagrammi dello spostamento,  $y(t)$  ovvero  $y(\alpha)$ , risulta essere modesta, si può osservare che i tre diagrammi di accelerazione, riportati in figura 9.4 unitamente ai loro valori massimi, sono molto diversi tra loro. Ci si può chiedere: è sensato scegliere la legge di moto 1) che, a parità di alzata, presenta la minima accelerazione massima? La risposta è sì e no. Infatti, il processo di sintesi di una legge di moto per camme deve tenere conto di molte circostanze, e la scelta di una legge che privilegi le basse accelerazioni può presentarsi mediocre sotto altri aspetti. Cercheremo nel seguito di dare un quadro, peraltro parziale, del complesso di vincoli che guidano la progettazione di una legge di moto e di una camma. Riportiamo in figura 9.7 il confronto tra le velocità associate alle precedenti tre leggi di moto in cui si nota che la velocità più elevata viene raggiunta dalla legge con accelerazione massima minore e viceversa.

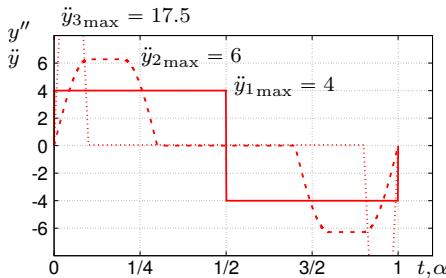


Figura 9.6: Diverse leggi di accelerazione.

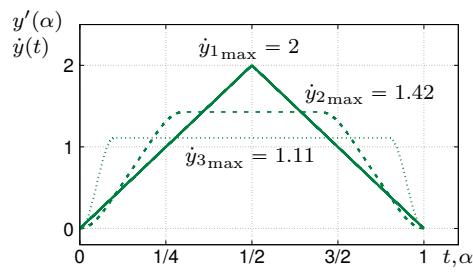


Figura 9.7: Corrispondenti diagrammi della velocità.

L'importanza di evitare picchi troppo elevati di accelerazione deriva dal diretto collegamento tra questa grandezza e l'entità delle forze d'inerzia che insorgono durante il funzionamento della macchina. Ed è questo il motivo che induce il progettista a disegnare la camma partendo proprio dalle leggi di accelerazione, tenendo così sotto controllo tale grandezza. La legge con *accelerazione costante* riportata in figura 9.8 è la legge di moto più “semplificata” che si possa adottare. In tale figura, come nelle precedenti 9.4–9.7, e nelle seguenti, riguardanti le leggi di moto, le ascisse riportano sia il tempo  $t$ , sia l'angolo  $\alpha$ . Pertanto, queste leggi possono essere qui interpretate come eseguite in un tempo unitario oppure in un angolo unitario, ponendo così  $\omega = 1$  rad/s. Le stesse leggi producono tutte una alzata unitaria. La scelta di rappresentare leggi di moto che producono alzata unitaria in tempi o angoli unitari, leggi che chiameremo *unitarie*, agevola il confronto tra accelerazioni “di forme diverse”, in quanto tale confronto può avvenire semplicemente tra alcuni dei valori notevoli che le grandezze cinematiche, di tali leggi unitarie, assumono. Per passare da questi valori, cioè quelli relativi alle grandezze

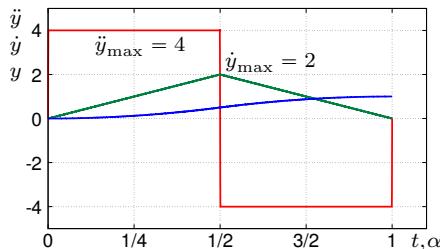


Figura 9.8: Legge di moto con accelerazione costante.

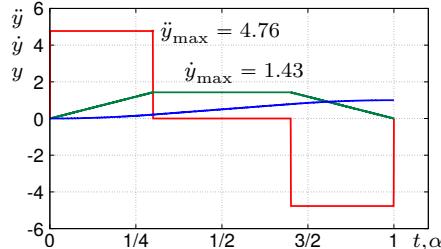


Figura 9.9: Legge di moto con accelerazione costante tagliata.

cinematiche delle leggi unitarie e che, limitatamente a questo capoverso, indicheremo con pedice  $u$ , alle grandezze cinematiche effettive (pedice  $e$ ) di una legge di uguale forma, la quale però produce un'alzata pari a  $h$  in un tempo  $t_s$  o in un angolo  $\alpha_s$ , con riferimento agli integrali 9.6 e 9.7, si ha

$$\ddot{y}_e = \ddot{y}_u \frac{h}{t_s^2}, \quad y_e'' = y_u'' \frac{h}{\alpha_s^2}, \quad \dot{y}_e = \dot{y}_u \frac{h}{t_s}, \quad y_e' = y_u' \frac{h}{\alpha_s}. \quad (9.8)$$

Ad esempio, si può notare che per la legge ad accelerazione costante che si compie in un tempo unitario e fornisce una alzata  $h$  unitaria, si ha accelerazione massima  $\ddot{y}_{\max} = 4$ , come riportato nella figura 9.8. Chiamando questa grandezza, cioè la massima accelerazione raggiunta da una legge unitaria, *coefficiente di accelerazione*  $c_a$ , avremo per l'effettiva accelerazione fornita da una legge di moto qualsivoglia

$$\ddot{y}_{\max} = c_a \frac{h}{t_s^2} \quad \text{e} \quad y_{\max}'' = c_a \frac{h}{\alpha_s^2}. \quad (9.9)$$

È facile osservare che per una legge di moto di forma qualsiasi, che fornisca al suo termine  $\dot{y} = 0$  e che sia simmetrica rispetto alla metà dell'angolo sul quale si svolge, risulta  $c_a \geq 4$ , essendo il valore quattro riservato proprio al caso di accelerazione costante simmetrica. Sempre richiamando la figura 9.8 notiamo che la velocità massima raggiunta dal cedente è  $\dot{y}_{\max} = 2$ . Questo valore è il *coefficiente di velocità*  $c_v$  di questa legge di moto. Analogamente a quanto esposto per le accelerazioni si ha

$$\dot{y}_{\max} = c_v \frac{h}{t_s} \quad \text{e} \quad y'_{\max} = c_v \frac{h}{\alpha_s}. \quad (9.10)$$

Il coefficiente di velocità, che qualifica la legge di moto rispetto alla velocità massima raggiunta, è altrettanto importante nella sintesi delle camme in quanto, come vedremo tra poco, influenza direttamente una grandezza di primaria importanza nella trasmissione del movimento. In figura 9.9 sono riportati i grafici di accelerazione velocità e spostamento per una legge cosiddetta con *accelerazione costante tagliata* dove si nota che, rispetto alla legge

ad accelerazione costante, il coefficiente di accelerazione cresce, mentre diminuisce quello di velocità. In figura 9.10 è riportata una legge che presenta un

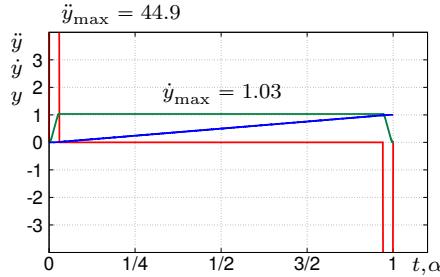


Figura 9.10: *Legge di moto a basso coefficiente di velocità.*

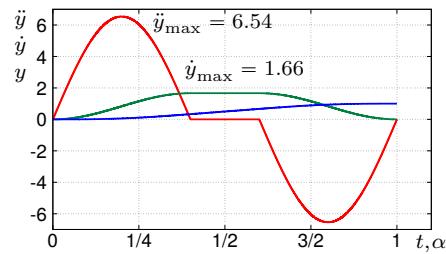


Figura 9.11: *Legge di moto con accelerazione sinusoidale tagliata.*

bassissimo coefficiente di velocità  $c_v = 1.03$  (il limite inferiore teorico è uno), a discapito dei valori dell'accelerazione che risultano essere elevati, con coefficiente di accelerazione  $c_a = 44.9$ . La legge con *accelerazione sinusoidale tagliata* di figura 9.11 soddisfa le esigenze del progettista che è preoccupato delle vibrazioni che possono insorgere durante il funzionamento della camma e che sono influenzate da cambiamenti repentina di accelerazione: [17], pag. 45. La derivata terza dello spostamento, grandezza che peraltro compare assai raramente nella meccanica, è in certo modo responsabile delle vibrazioni che insorgono nella catena cinematica del cedente durante il funzionamento delle camme veloci. La legge sinusoidale citata poc'anzi presenta bassi valori di *jerk* (così viene talvolta chiamata  $\dddot{y}(t)$ ). Purtroppo tale legge presenta, a parità di altre circostanze, valori di  $c_v$  più elevati della legge ad accelerazione

costante. In un'ottica di compromesso si potrebbe modificare la legge ad accelerazione costante rendendo le sue due "gobbe" di forma trapezoidale, come in figura 9.12, passando così da valori molto alti di *jerk* (teoricamente infiniti) a valori finiti e controllabili. Anche qui però non è tutto rose e fiori: le rampe inclinate di questa legge di moto si traducono in una partenza della salita poco decisa e, quel che è peggio, in una difficoltà materiale di realizzazione in officina di queste rampe con precisione tale da garantire l'esattezza della legge di moto dato che, per un certo tratto, si discostano troppo poco dalla circonferenza. Una legge di moto raffinata e spesso adottata per la sintesi delle camme, è senza dubbio la cosiddetta *legge di moto*

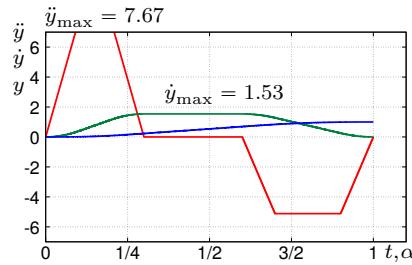


Figura 9.12: *Legge trapezoidale tagliata (asimmetrica).*

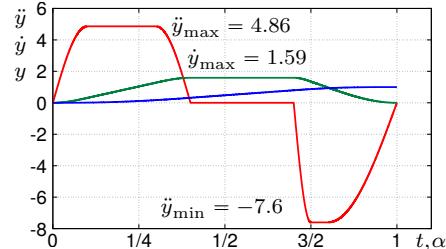
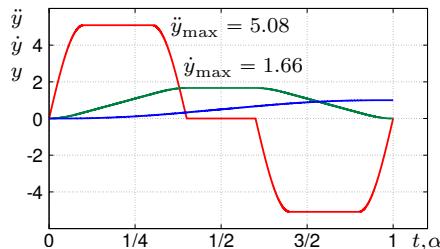


Figura 9.13: Legge di moto con accelerazione trapezoidale modificata. Figura 9.14: Legge di moto con accelerazione asimmetrica.

*trapezoidale modificata*, figura 9.13. Si compone di sette tratti: sinusoida, costante, sinusoida, nulla, sinusoida, costante, sinusoida. Ciascuno di questi intervalli può essere lungo a piacere permettendo in tal modo di dare origine eventualmente a leggi non simmetriche, come quella di figura 9.14.

In figura 9.15 si riporta, a parità di alzata e di lunghezza del “taglio”, il confronto tra una legge ad accelerazione costante e una legge trapezoidale modificata. Sebbene una tale analisi sia già stata illustrata in figura 9.4, si desidera qui esplicitarla di nuovo tramite l’impiego di due leggi molto più usate nella pratica, in quanto la presenza del taglio assicura  $c_v$  meno elevati: caratteristica, questa, molto apprezzabile, come vedremo. Rimar-

chiamo ancora una volta la sostanziale equivalenza delle due leggi a livello del diagramma delle alzate, praticamente indistinguibili nella figura. L’inconveniente presentato dalla legge trapezoidale modificata di avere un  $c_a$  leggermente più elevato è ben assorbito dalla maggiore “dolcezza di movimento” che essa garantisce. Infine riportiamo nelle figure 9.16 e 9.17 rispettivamente il diagramma delle accelerazioni completo per progettare la nostra camma e il corrispondente diagramma delle alzate. Tale diagramma, già illustrato in figura 9.3, qui ottenuto però partendo da leggi di accelerazione trapezoidal modificate tagliate è il candidato idoneo a essere “avvolto” sul tamburo della camma. Un’ultima considerazione circa la progettazione delle leggi di moto dovrebbe mettere in luce la delicatezza di questo processo e l’atteggiamento di compromesso necessario. Diamo uno sguardo alla seconda legge di acce-

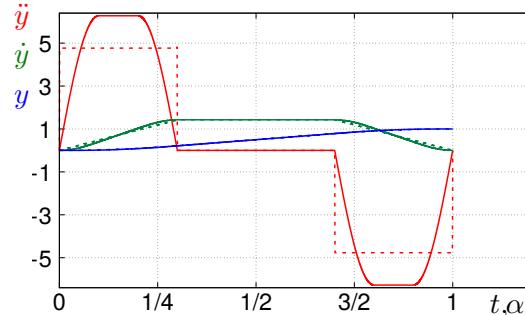


Figura 9.15: Confronto tra legge ad accelerazione costante e legge a sette tratti con lo stesso tempo di taglio.

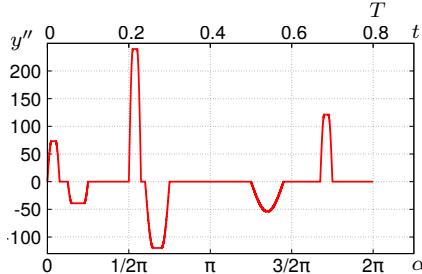


Figura 9.16: *Legge completa con tratti di accelerazione trapezoidali modificate.*

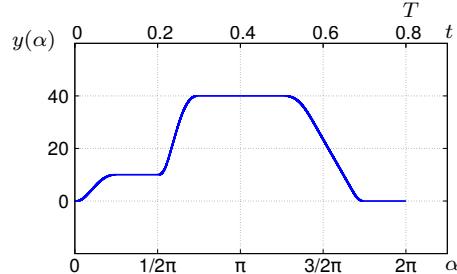


Figura 9.17: *Legge completa delle alzate ottenuta da tratti di accelerazione trapezoidali modificate.*

lerazione presente nella figura 9.16. Tale legge produce in un angolo di  $45^\circ$  un’alzata di 30 mm e, delle tre, è quella con le caratteristiche più esasperate. Essa si presenta più “squadra” rispetto alle altre in modo da contenere i valori di  $c_{a+}$  (coefficiente di accelerazione considerando  $\ddot{y}_{\max}$ ) e di  $c_{a-}$  (coefficiente di accelerazione considerando  $\ddot{y}_{\min}$ ). Tali valori sarebbero ancora inferiori se si eliminasse il taglio ma questa scelta peggiorerebbe il valore dell’angolo di pressione  $\theta$  aumentandolo e compromettendo, come vedremo a breve, il buon funzionamento del meccanismo.

Da un diverso punto di vista, contenere il valore di  $c_{a-}$  significa aumentare il valore del minimo raggio di curvatura convessa  $\rho_{\min}$ . Questo risulta essere un beneficio, come cercheremo di spiegare più avanti; tuttavia, eccedere in tal senso (aumentando il tempo su cui si estende la “gobba” negativa dell’accelerazione) produrrebbe il pessimo risultato di aumentare  $c_{a+}$ , parametro che governa le forze d’inerzia durante l’alzata.

### 9.3 PROFILATURA DELLE CAMME

Come accennato all’inizio di questo capitolo, la legge di spostamento  $y(\alpha)$  viene (salvo casi particolari) avvolta su di un tamburo in modo da generare una camma piana. Nel processo di sintesi della camma le grandezze in gioco sono molte e tra queste il raggio del tamburo testé citato, che si chiama *raggio di base* e che verrà indicato con  $R_b$ , gioca il ruolo più importante. All’aumentare del raggio di base scompaiono infatti dalla camma le problematiche principali di profilatura, cui accenneremo fra poco. Di contro, col crescere di  $R_b$ , aumentano le dimensioni della camma stessa rendendola scomoda da utilizzare nel progetto organico di una macchina<sup>1</sup>. Si intravede

<sup>1</sup>Ci preme precisare che il raggio di base può essere riferito a entità geometriche diverse dal profilo fisico della camma. In particolare, vedremo che le camme tastate da una rotella presentano un importantissimo luogo geometrico “virtuale”, il *profilo del centro rotella*,

quindi un percorso di progetto che ha come obiettivo quello di trovare una soluzione che, evitando eventuali criticità derivanti da dimensioni geometriche mal scelte (quasi sempre valore di  $R_b$  insufficiente), soddisfino anche requisiti di compattezza, limitazione dell'ingombro e funzionalità. La figura 9.18 ci aiuta a riconoscere una delle grandezze geometriche fondamentali di un meccanismo a camma: l'*angolo di pressione*  $\theta(\alpha)$ , funzione i cui valori, in generale, variano nell'arco dell'angolo giro. Notiamo subito che  $\theta$  è anche l'angolo compreso tra la retta tangente al profilo nel punto di contatto col cedente e una retta generica ortogonale al cedente stesso. La forza  $F$

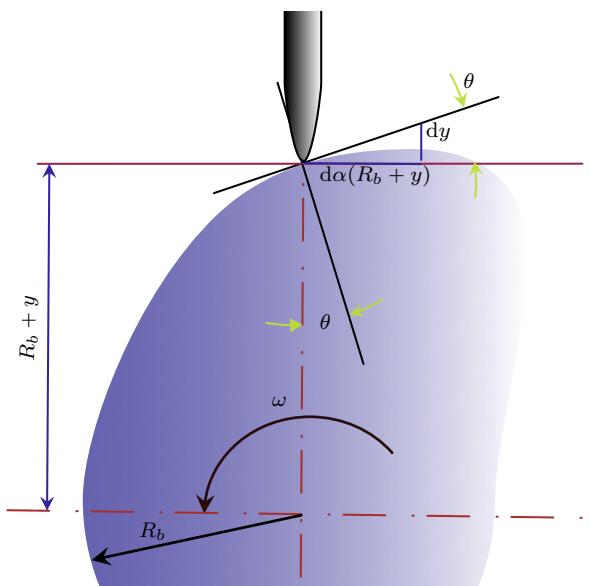


Figura 9.18: *Angolo di pressione*  $\theta$ .

che la camma deve trasmettere al cedente, soggetto a una spinta assiale  $S$ , risulta essere  $F = S/\cos(\theta)$ , relazione dalla quale si evince l'importanza di mantenere l'angolo  $\theta$  entro stretti limiti. Angoli  $\theta > 30^\circ - 35^\circ$  non sono in genere accettabili nei tratti di salita, dove cioè la camma spinge la punteria, riservando il valore limite più elevato a soluzioni che prevedono guide di scorimento per la punteria con attriti particolarmente ridotti, [20], pagg. 131-132. È frequente, nell'ambito delle macchine automatiche, l'utilizzo di punterie costituite da colonne a sezione circolare, rettificate, che scorrono in

---

che coincide con il profilo di una camma tastata da una punta che esegue le stesse leggi di moto. In questo caso  $R_b$  sarà il raggio della circonferenza minima tangente al tracciato del centro rotella, in quanto difficilmente risulterà utile tirare in ballo il raggio di base del profilo fisico. Pertanto, nonostante molteplici trattazioni più autorevoli della nostra introducano per il raggio di base del profilo del centro rotella il simbolo  $R_{b0}$ , siamo convinti di non creare equivoci accontentandoci di usare soltanto  $R_b$ .

manicotti a ricircolo di sfere con attrito molto limitato. Pertanto poniamo il massimo angolo di pressione tollerato al valore  $\theta_{\lim} = 35^\circ$ , osservando che angoli di pressione maggiori genererebbero una forza ortogonale al cedente troppo elevata col pericolo di impuntamento di quest'ultimo, oppure di una trasmissione del movimento poco efficiente. Poniamoci dal punto di vista relativo a un osservatore solidale con la camma. In tale riferimento la punta percorrerà, durante una rotazione infinitesima  $d\alpha$  dell'albero, un tratto infinitesimo della tangente nel punto di contatto. Questo tratto infinitesimo si scomponete facilmente sui cateti del triangolo rettangolo  $dy$  e  $d\alpha(R_b + y)$ , dalla quale scomposizione risulta

$$\tan(\theta) = \frac{dy}{(R_b + y)d\alpha} = \frac{y'}{R_b + y}. \quad (9.11)$$

Affinché il meccanismo funzioni correttamente il valore massimo di questa espressione dovrà essere contenuto al di sotto del valore prescritto. Purtroppo è alquanto probabile che il massimo valore di  $y'(\alpha)$  e il minimo di  $y(\alpha)$  non si verifichino per lo stesso angolo  $\alpha$ , quindi occorrerebbe cercare il massimo della funzione 9.11. Ricordiamo che  $y'_{\max} = c_v h / \alpha_s$ , cioè il massimo valore della velocità geometrica è dato dal coefficiente di velocità della legge di moto moltiplicato per l'alzata e diviso per l'angolo di salita. In via cautelativa si può asserire che affinché la trasmissione del moto dalla camma al cedente non sia critica dovrà essere

$$\tan(\theta_{\lim}) > \frac{c_v h}{\alpha_s (R_b + y)}. \quad (9.12)$$

Cautelandoci ulteriormente si può porre  $y(\alpha) = 0$  e scrivere

$$\tan(\theta_{\lim}) > \frac{c_v h}{\alpha_s R_b}, \quad (9.13)$$

ottenendo in questo modo un'indicazione per la scelta del raggio di base:

$$R_b > \frac{c_v h}{\alpha_s \tan(\theta_{\lim})}. \quad (9.14)$$

Dalla 9.14 emerge appieno l'importanza di utilizzare leggi di moto a basso valore di coefficiente di velocità: da tale grandezza dipende infatti linearmente la dimensione e quindi l'ingombro della camma. Si può anche osservare come alzate  $h$  importanti basate su angoli di salita  $\alpha_s$  modesti comportino elevati valori del raggio di base. A questo proposito chiamiamo che nell'ambito delle macchine automatiche è tutt'altro che infrequente lavorare con salite che si svolgono in  $20^\circ$  o  $30^\circ$ . La figura 9.19 riporta una camma con *cedente a punteria*. La punta (o coltello visto che le camme hanno spessore diverso da zero) tasta, in questo caso, direttamente il profilo della camma e segue

la legge di figura 9.17. Diciamo per inciso che, tanto la camma di figura 9.19 quanto tutte le altre che seguiranno nelle varie illustrazioni, sono state ottenute da questa medesima legge di moto che trae origine dal progetto di una pressa reale, tuttora funzionante in una fabbrica cartotecnica. Molto raramente il profilo della camma viene però tastato da una punta come nelle figure 9.18 e 9.19. Per evidenti questioni tribologiche si preferisce affidare lo scorrimento del cedente al rotolamento di una rotella sopra un secondo profilo tracciato in modo che il centro di tale rotella segua il profilo generato dalla legge delle alzate. Normalmente, le rotelle sono cuscinetti a sfere o a rulli appositamente costruiti per questo scopo.

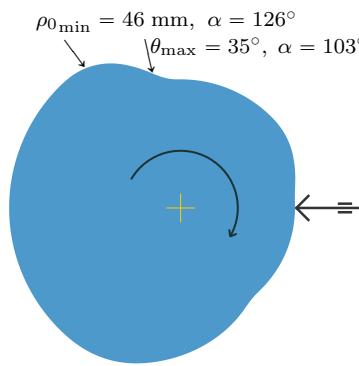


Figura 9.19: *Camma tastata da una punta,  $R_b = 80$  mm.*

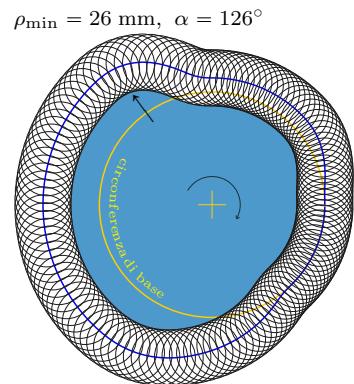


Figura 9.20: *Profilo della camma inviluppato dal moto relativo della rotella di raggio  $r_r = 20$  mm.*

In figura 9.20 viene riportata la camma con il suo profilo effettivo ottenuto dall'inviluppo della rotella il cui centro segue il tracciato blu sul quale è posizionata, cioè il *profilo del centro rotella*. Le figure 9.19 e 9.20 evidenziano un'altra grandezza di elevato rilievo nel progetto di una camma: la *curvatura* del suo profilo. Nelle due figure appena citate sono infatti riportati i valori minimi di  $\rho_0(\alpha)$  e  $\rho(\alpha)$ , che sono rispettivamente il raggio di curvatura del profilo seguito dal centro della rotella e il raggio di curvatura del profilo fisico della camma, valori variabili ovviamente da punto a punto. Come nel caso dell'angolo di pressione, anche il controllo del raggio di curvatura è di importanza fondamentale durante la fase di progetto. Il profilo inviluppato dalla rotella, cioè l'effettivo profilo della camma, presenterà raggi di curvatura che saranno dati da  $\rho = \rho_0 - r_r$ , dove  $r_r$  rappresenta il raggio della rotella stessa. È chiaro quindi che il raggio di curvatura del profilo effettivo può diventare nullo o persino negativo nel caso in cui il raggio della rotella sia maggiore del minimo raggio di curvatura delle zone convesse del profilo del centro rotella. Perciò, valori di  $\rho_0$  eccessivamente bassi, nei tratti convessi di tale profilo, possono causare le situazioni di *sottotaglio* rappresentate in

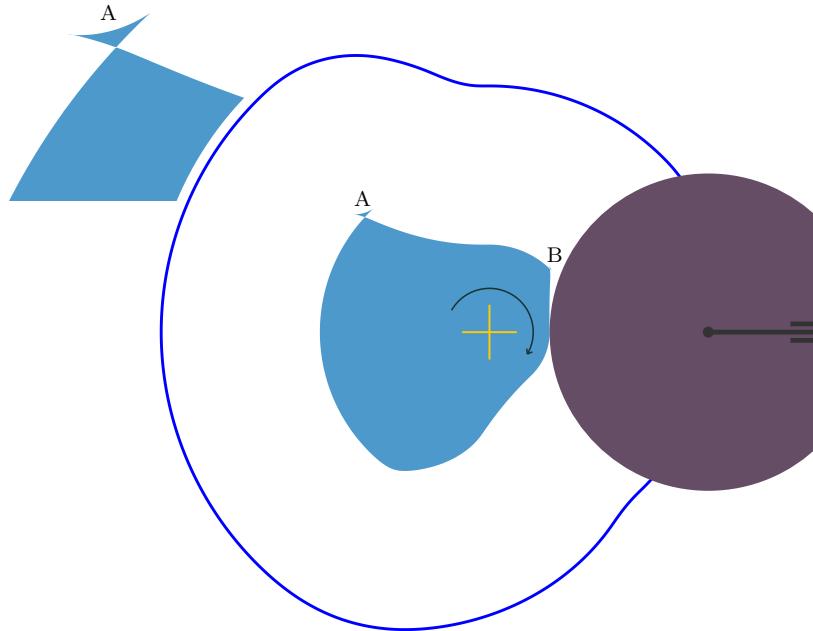


Figura 9.21: *Camma con evidente sottotaglio, raggio rotella  $r_r = 58$  mm.*

figura 9.21, e contrassegnate con le lettere  $A$  e  $B$ . In tali zone si verifica che l'inviluppo generato dalla rotella porta a un profilo intrecciato a coda di rondine, quindi impossibile da seguire con un normale cedente. Va però detto che occorre tenere il valore di  $\rho_{\min}$  ben lontano anche dallo zero, cioè dallo spigolo vivo che si verificherebbe se il centro della rotella seguisse una curva di raggio uguale a quello della rotella stessa. La trasmissione delle forze, a volte ingenti, tra camma e punteria a rotella si basa sul contatto tra una generatrice del “cilindroide” della camma e una del cilindro della rotella stessa. Le pressioni di contatto che si generano in questi casi si possono ricavare dalla *teoria di Hertz* per i contatti tra solidi elastici. In particolare, nel nostro caso il contatto avviene tra due cilindri aventi raggio  $\rho$  per la camma e  $r_r$  per la rotella, quindi possiamo affermare che la pressione di contatto  $p_c$  sarà [21], pagg. 418-419<sup>2</sup>,

$$p_c \propto \sqrt{\frac{\rho + r_r}{\rho r_r}}, \quad (9.15)$$

che esplicita la proporzionalità inversa tra tale pressione e la radice quadrata del prodotto dei due raggi. Risulta quindi chiaro che il desiderio di non far nascere pressioni troppo elevate, le quali potrebbero compromettere la forma della camma deformandola plasticamente, ci porta a desiderare un

---

<sup>2</sup>Questo testo ha rappresentato per molto tempo un utile riferimento per tutti i problemi inerenti il comportamento elastico dei solidi.

raggio minimo per il profilo percorso dalla rotella ben lontano dallo zero (lo spigolo). Raramente si progettano camme in cui si trovi nelle convessità del profilo un raggio minore alla metà di quello della rotella che lo tasta. A questo proposito, mostriamo in figura 9.22 una camma correttamente profilata, la quale rappresenta con più dettagli la stessa di figura 9.20. Si nota che il valore dell'angolo di pressione massimo non cambia rispetto alla situazione di cedente a punta, [20], pag. 61, e il raggio minimo di curvatura del profilo risulta accettabile. Anche qui, come abbiamo fatto per l'angolo di pressione, ci si potrebbe incamminare alla ricerca del legame che intercorre tra le leggi di moto, il raggio di base della camma, il raggio della rotella e il minimo raggio di curvatura (convessa) che si otterrà sul profilo. Il volume [17] riporta, a mio avviso, una delle più ampie e utili trattazioni della sintesi di meccanismi a camma. Su questo libro si trova, a pagina 59, una formula che lega il raggio del percorso del centro della rotella con i valori del raggio di base, della salita  $y(\alpha)$  e delle sue derivate, prima e seconda. Si ha per il raggio del percorso del “centro rotella”

$$\rho_0 = \frac{[y'^2 + (R_b + y)^2]^{3/2}}{(R_b + y)^2 - (R_b + y)y'' + 2y'^2}. \quad (9.16)$$

Pertanto elevati valori di accelerazione negativa generano raggi di curvatura modesti, come anche eccessivi valori per la velocità  $y'(\alpha)$ , mentre, ancora una volta, a un aumento del raggio di base  $R_b$  corrisponde un aumento del raggio di curvatura del profilo, ma come sempre anche un poco desiderabile aumento dell'ingombro. Nonostante ricavare la 9.16 non presenti difficoltà insormontabili, abbiamo preferito evitare la sua dimostrazione che sarebbe risultata lunghetta anziché no, e avrebbe aggiunto poco alla comprensione del problema che stiamo trattando. Oggigiorno la profilatura delle camme si esegue totalmente con tecniche numeriche e l'individuazione dei punti cospicui, cioè quelli che presentano il valore più elevato dell'angolo di pressione e il minore raggio di curvatura, risulta essere piuttosto semplice: normalmente i programmi di calcolo li rendono facilmente rintracciabili evidenziandoli. Le figure 9.23 e 9.24 dovrebbero dare l'idea della variazione delle due grandezze fondamentali,  $\theta$  e  $\rho$ , per la camma di figura 9.22. Mentre il grafico di  $\theta$  è contenuto entro precisi limiti, quello di  $\rho$  può assumere valori assoluti molto grandi ( $\rho$  è infinito nei punti di flesso del profilo), pertanto una parte di tale grafico è escluso dalla figura. Mediante opportune maggiorazioni e minorazioni dei termini della 9.16 si può ottenere, anche in questo caso, una formula di progetto per  $R_b$ , come mostrato in [17], pag. 72, formula che non riportiamo. Aggiungiamo, tuttavia, qualche considerazione qualitativa circa l'individuazione del raggio di base, mettendolo maggiormente in luce nella

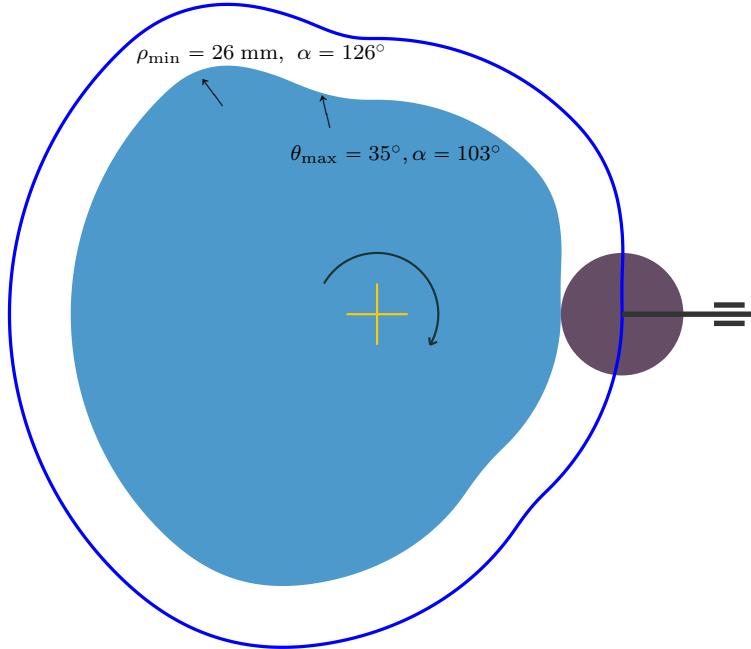


Figura 9.22: *Camma correttamente profilata,  $R_b = 80 \text{ mm}$ ,  $r_r = 20 \text{ mm}$ .*

9.16, riscrivendola nel seguente modo

$$\rho_0 = \frac{\left[ \frac{y'^2}{(R_b+y)^2} + 1 \right]^{3/2} (R_b + y)}{1 - \frac{y''}{(R_b+y)} + \frac{2y'^2}{(R_b+y)^2}}. \quad (9.17)$$

Notiamo che, a un aumento del raggio di base  $R_b$ , il valore assoluto del termine del denominatore che contiene  $y''$  diminuisce, e con esso cala la possibilità che il denominatore (nel caso di valori negativi di  $y''$ ) diventi troppo grande e tale da compromettere il raggio di curvatura della camma. Ma soprattutto osserviamo una squisita “quasi proporzionalità” tra  $\rho_0$  e  $R_b$  essendo

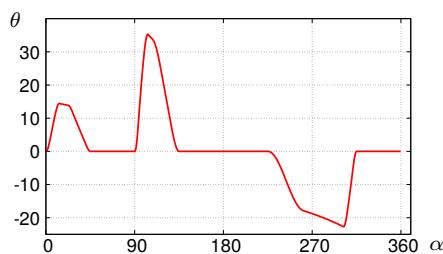


Figura 9.23: *Andamento di  $\theta$  per la camma di figura 9.22.*

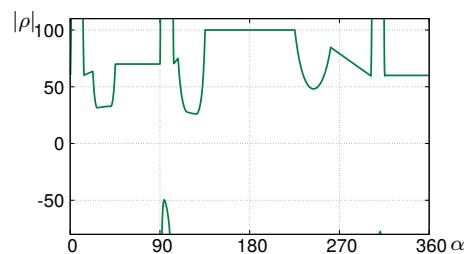


Figura 9.24: *Andamento di  $|\rho|$  per la camma di figura 9.22.*

$\rho_0 \propto (R_b + y)$ , la quale proporzionalità ci garantisce che all'aumentare del raggio di base spariscono i problemi legati a raggi di curvatura troppo piccoli del profilo. Perciò, aumentando il raggio di base ci togliamo sia dall'impaccio di angoli di pressione troppo elevati sia dal pericolo di curvature eccessive del profilo della camma.

Nonostante la presenza di una formula che può guidarci durante il progetto verso un valore di  $R_b$  rispettoso dei limiti da imporre alla curvatura, la sintesi delle camme, come si è detto, si esegue sempre più spesso per tentativi ripetuti, mediante codici dedicati che rendono veloce ed efficace il confronto tra soluzioni diverse: a un angolo di pressione massimo troppo grande o a un raggio di curvatura del profilo eccessivamente ridotto segue un nuovo tentativo con  $R_b$  aumentato, oppure anche con modifiche (tollerabili) alle leggi di moto.

Anche se in questa sede abbiamo ritenuto di fornire soltanto un'infarinatura generale che renda chiari i concetti e le difficoltà che stanno alla base della progettazione delle camme, in un perimetro di studi più vasto si trova qualche altro "trucco" che permette di non aumentare, oltre il ragionevole, l'ingombro di questi eccentrici e allo stesso tempo di non eccedere coi valori dell'angolo di pressione. Uno di tali *escamotage* è quello di costruire un dispositivo camma-cedente in cui l'asse di quest'ultimo non passi per il centro della camma stessa. Il disassamento del cedente è in qualche modo equivalente a inclinare il cedente di un dato angolo che si sottrarrà all'angolo di pressione durante la salita, sommandosi invece a questo nei tratti di discesa. Una discreta percentuale delle camme che si realizzano sono di questo tipo: *camme a punteria deviata* oppure, con terminologia anglosassone, *camme offset*. Un breve cenno alla progettazione di questi dispositivi si trova nel capitolo di approfondimento 12.

Le camme possono azionare cedenti che non traslano, come mostrato in figura 9.25. Sono diffusissimi meccanismi in cui la camma impone al cedente a bilanciere un moto rotatorio. Mutando opportunamente ciò che nel ragionamento si deve mutare e in particolare sostituendo l'alzata  $y(t)$  con l'angolo che descrive il bilanciere nella sua rotazione,  $\beta(t)$ , tutto quanto esposto circa le precauzioni nel progetto della camma rimane invariato: le leggi di moto con i loro coefficienti di velocità e di accelerazione si scelgono con gli stessi criteri e nella profilatura della camma si devono fare i soliti conti con curvatura e angolo di pressione. Anche qui, rimandiamo il lettore desideroso di approfondire un poco la progettazione delle camme tastate da cedente a bilanciere al capitolo 12, oppure a [17], pag. 74.

La trasmissione del movimento tra camma e cedente non avviene sempre tramite il rotolamento di una rotella sul profilo della camma. Benché tastare una camma con un *piattello*, come in figura 9.26, sia ormai raro nell'ambito delle macchine automatiche, in altri domini della meccanica la soluzione camma-piattello è molto usata. Anzi, a dire il vero, vi è un vastissimo re-

pertorio di camme tastate esclusivamente da piattelli che, strisciando sul profilo, in questo caso rigorosamente convesso di quest'ultime, aziona cedenti a punteria o a bilanciere: le camme dei motori endotermici a quattro tempi. Si tratta in genere di camme di dimensioni modeste alle quali calza naturalmente tutta la teoria qui esposta.

Una breve introduzione alla progettazione delle camme tastate da piattelli si trova nel capitolo di approfondimento 12 e, per esteso, in [17], pag. 65. I problemi legati alla progettazione di queste camme sono però di natura così diversa da quelli che si incontrano nelle macchine automatiche, la loro progettazione segue dettami così intimamente legati alla legge delle alzate, a sua volta legata al percorso dei gas nei condotti fluidodinamici che esse aprono e chiudono, che ci sembra meglio lasciare questi piccoli e sofisticati eccentrici al loro mondo, cioè quello motoristico, e tornare alle nostre camme per macchine automatiche.

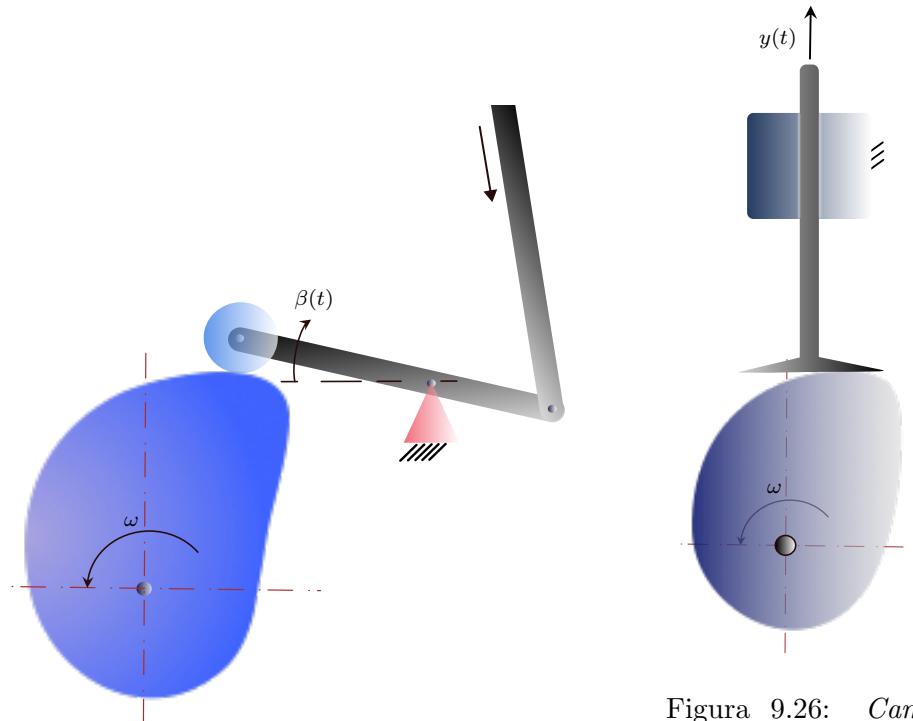
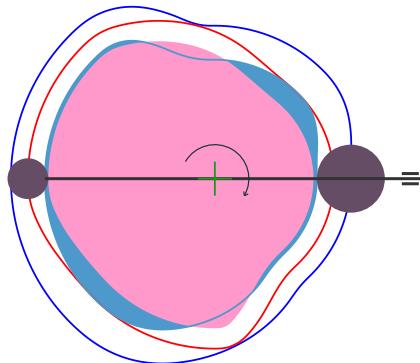
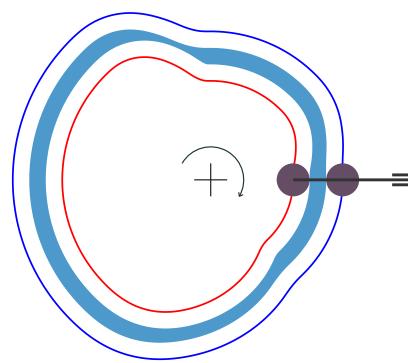


Figura 9.25: *Camma con cedente a bilanciere.*

Figura 9.26: *Camma tastata da un piattello.*

Figura 9.27: *Camma desmodromica.*Figura 9.28: *Camma a costola.*

#### 9.4 CAMME CONIUGATE

L'accoppiamento, cioè il contatto tra camma e cedente, può essere garantito nelle fasi di discesa<sup>3</sup> in due diversi modi: imponendo che la punteria prema sulla camma durante tutto l'angolo giro, oppure facendo in modo, mediante una camma accoppiata a quella primaria, che la punteria sia costretta a seguire il profilo di questa anche nei tratti che presentano  $y$  negative. Nel primo caso si parla di *accoppiamento di forza* e molto spesso tale forza viene esercitata da una molla (quasi sempre pre-caricata) che, deformata durante le fasi di salita, garantisce mediante la sua elasticità il contatto anche durante la discesa. Questa soluzione è raramente impiegata nell'ambito delle macchine automatiche, l'autore non ne ha mai vedute (ma il mondo è grande...), mentre trova largo impiego nelle piccole camme ad uso motoristico. Nel secondo caso si impone il contatto mediante un *accoppiamento di forma*, cioè progettando una camma “negativa” detta *camma coniugata* o *camma desmodromica*, riportata in colore rosa nella figura 9.27. La generazione di questa camma potrebbe in linea di principio seguire il percorso per la progettazione della camma “primaria” avendo, in questo caso, l'avvertenza di invertire i segni delle leggi di moto. Di fatto, una volta disegnata la camma primaria, basterà considerare il prolungamento del cedente fino al luogo ove si desidera tastare la camma desmodromica e riportare una seconda rotella. Tale rotella, durante il movimento generato dalla camma primaria (sottintendendo il contatto costante tra cedente e profilo), “taglierà” la camma desmodromica o *camma coniugata*, e questo modo di procedere è anche quello utilizzato dal nostro codice per produrre le illustrazioni 9.27 e 9.28. Delle due citate figure, la seconda rappresenta una soluzione molto elegante di ac-

<sup>3</sup>Ribadiamo che il termine discesa si riferisce al movimento contrario a quello generato dalla camma mentre compie il suo lavoro funzionale. Esso non si riferisce quindi in alcun modo all'avvicinamento alla Terra.

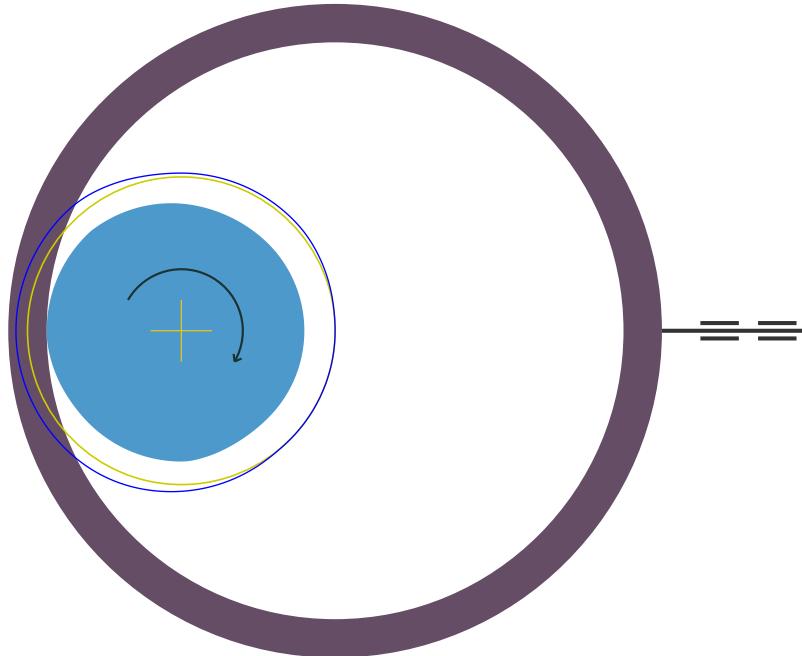


Figura 9.29: *Camma tastata dall'anello interno di un cuscinetto.*

coppiamento desmodromico, dove le rotelle tastano una costola. Purtroppo, questa soluzione non è di facilissima realizzazione in officina. Normalmente le camme coniugate sono più sottili delle relative primarie e le loro rotelle sono di minori dimensioni. Questo è dovuto alla funzione “di servizio” da loro svolta, che semplicemente consiste nel mantenere il contatto tra la punteria e la camma primaria e nel riportare il cedente nella posizione di partenza: esse svolgono molto raramente azioni di lavoro. Persino le cautele sull’angolo di pressione massimo e sul minimo raggio di curvatura convessa, ammesse per queste camme (parliamo sempre delle fasi attive), possono essere leggermente rilassate.

Anche la fantasia può partecipare con successo nella progettazione delle camme. Riportiamo, in figura 9.29, una soluzione poco comune di camma-punteria dove il profilo della camma viene tastato dall’anello interno di un cuscinetto (a rulli). In tale figura, il meccanismo viene rappresentato nel momento in cui la camma ha svolto  $180^\circ$  della sua rotazione e, stanti le leggi proposte per questa camma, la punteria si trova alla massima estensione dell’alzata. Le due curvature, quella della camma e quella della rotella, sono, in questo caso, concordi. Pertanto, nella 9.15 uno dei due raggi cambia segno e la pressione andrebbe addirittura ad annullarsi nel caso (da non contemplarsi) di raggi di curvatura uguali tra loro. La pressione di contatto risulta quindi notevolmente ridotta in questo tipo di camme che possono

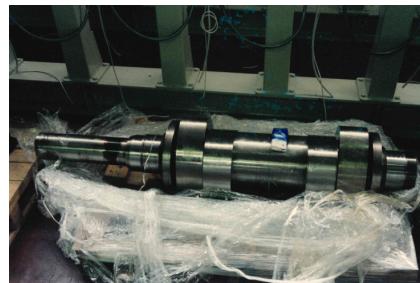


Figura 9.30: *Albero a camme per pressa di grandi dimensioni, tastato dall'anello interno di un cuscinetto.*



Figura 9.31: *Rotella costituita da cuscinetto a rulli che tasta la camma mediante il suo anello interno.*

essere usate quando le forze da trasmettere sono ingenti. Nelle figure 9.30 e 9.31 riportiamo una realizzazione della tipologia di camme appena descritte e di una delle quattro rotelle, con il desiderio di mostrare al lettore quali ragguardevoli dimensioni possono essere raggiunte da un albero a camme e da una rotella.

PARTE III

## APPROFONDIMENTI



## CAPITOLO 10

### Moto Rigido Tridimensionale

#### 10.1 IL MOTO NELLE TRE DIMENSIONI DELLO SPAZIO

Il moto di un corpo nello spazio tridimensionale rappresenta il caso generale della *cinematica del corpo rigido*. Lo si studia con lo scopo, come avviene nel caso piano, di mettere in relazione tra loro le varie grandezze cinematiche che vi partecipano, riferendole, in generale, a un osservatore fisso. Costui sarà nel seguito surrogato da una *terna orientata*  $\mathbf{G}$ . Ci occuperemo, in prima battuta (e in coda), di uno spostamento finito, del quale sarà protagonista il nostro corpo rigido, che nelle figure è rappresentato da una clavetta. Tale spostamento farà passare la clavetta da una posizione iniziale, nella quale la terna  $\Gamma$ , ad essa rigidamente collegata, coincide con la terna  $\mathbf{G}$ , a una seconda posizione, nella quale la terna  $\Gamma$  si troverà in un altro punto dello spazio e avrà un diverso orientamento: in questa nuova posizione, ci riferiremo ad essa col nome  $\Lambda$ .

Consideriamo le terne  $\mathbf{G}$  e  $\Gamma$  costituite ciascuna da tre versori ortogonali, come in figura 10.1, che si possono assumere quali *vettori di base* per gli spazi fisso e mobile. Come abbiamo già accennato, la terna  $\Gamma$ , vincolata alla clavetta, accompagnerà quest'ultima nei suoi spostamenti e un osservatore ad essa solidale vedrà il punto  $P$ , appartenente alla clavetta stessa, stare fermo. Evidenziamo che, una volta nota la posi-

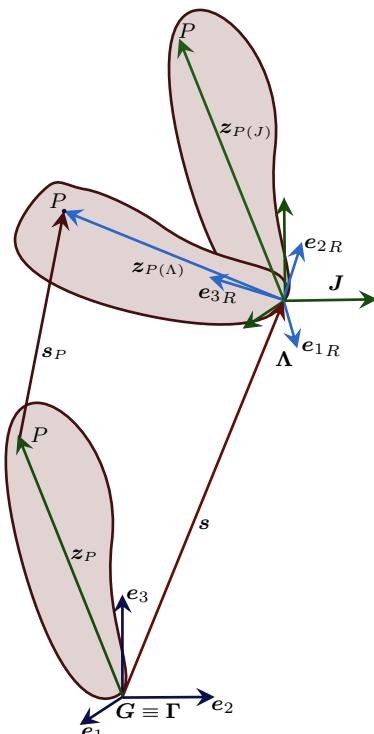


Figura 10.1: *Moto tridimensionale di una clavetta.*

zione dell'origine di  $\Gamma$ , si potrà conoscere la posizione di tutti i punti della clavetta, cioè dello spazio mobile, conoscendo la posizione di un suo punto generico, che abbiamo già indicato con  $P$ . Consideriamo ora lo spostamento generico della clavetta come idealmente composto da due distinte fasi. Durante la prima di queste due fasi portiamo semplicemente la terna  $\Gamma$  a sovrapporsi alla terna  $J$ . La seconda fase dello spostamento vede invece il vettore  $z_{P(J)}$  andare a coincidere con  $z_{P(\Lambda)}$ , e  $J$  stessa sovrapporsi a  $\Lambda$ , lasciando fisso il centro di  $J$ . Pertanto, queste due operazioni forniscono una “ricetta” per conoscere la posizione “assoluta” di  $P$ . Ma esse presentano difficoltà di grado diverso. Infatti, per portare la terna  $\Gamma$  nella terna  $J$  basterà aggiungere a tutti i punti dello spazio mobile, riferiti a  $G$ , il vettore  $s$ . Invece, per orientare gli assi di  $J$  in modo che essi si sovrappongano a quelli di  $\Lambda$  si intuisce che occorrerà operare mediante “opportune rotazioni” della stessa terna  $J$ : ma quali sono queste rotazioni? Lasciamo questa domanda in sospeso e risolveremo qualche strumento di cui ci siamo dotati seguendo il corso di Algebra Lineare.

Consideriamo la trasformazione del vettore  $z_{P(J)}$  che lo porta a coincidere col vettore  $z_{P(\Lambda)}$ . A tale scopo, chiamiamo con  $R$  un operatore di trasformazione dei vettori nello spazio tale per cui

$$z_{P(\Lambda)} = R z_{P(J)} . \quad (10.1)$$

Affinché  $R$  rappresenti una rotazione rigida, la sua applicazione a due vettori qualsiasi dovrà lasciare inalterato l'angolo tra le direzioni dei due vettori stessi; inoltre essa non dovrà né dilatare né restringere i loro moduli. Tutto questo, sinteticamente, si esprime dicendo che la trasformazione  $R$  deve mantenere invariante il *prodotto scalare* tra due vettori qualsiasi, prima e dopo la sua applicazione<sup>1</sup>. Quindi, posto che, tramite  $R$ ,  $v \rightarrow v_R$  e  $u \rightarrow u_R$ , possiamo scrivere l'uguaglianza (tra le rappresentazioni di questi oggetti)

$$u_R^T v_R = u^T R^T R v . \quad (10.2)$$

Ma per quanto appena affermato circa l'invarianza del prodotto scalare tra due vettori dovrà essere

$$R^T R = I . \quad (10.3)$$

Quando la trasposta (coniugata, nel caso di matrici complesse) di una matrice si comporta come la sua inversa sappiamo, sempre dall'Algebra Lineare,

<sup>1</sup>Ci siamo riferiti all'operatore  $R$  come, appunto, a un'operazione sui vettori dello spazio tridimensionale. A questo operatore, come anche ai vettori sui quali esso opera, compete ovviamente una rappresentazione matriciale legata ai vettori di base: matrici  $1 \times 3$  saranno le rappresentazioni dei vettori, mentre la rappresentazione dell'operatore  $R$  considererà in una matrice  $3 \times 3$ . Speriamo di non ingenerare dubbi nei lettori in conseguenza della scelta di mantenere inalterati i nomi dei vettori, degli operatori e delle loro rappresentazioni.

che tale matrice è *unitaria* e che il suo determinante vale uno. Vale poi anche

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}. \quad (10.4)$$

Pertanto, se  $\mathbf{R}$  rispetta la 10.3, essa ruota lo spazio a cui si applica e lascia invariati gli angoli e le dimensioni degli oggetti. Restringendo le nostre considerazioni a uno spazio con solo due dimensioni, giusto per proporre qualcosa di facilmente verificabile a quei lettori poco desiderosi di accordare tutta questa confidenza all'Algebra Lineare, tale matrice assume la forma

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

dove  $\theta$  rappresenta l'unico possibile angolo di rotazione nel piano. La situazione è concettualmente analoga, benché sia più complessa, nello spazio tridimensionale. In questo caso infatti la matrice<sup>2</sup>  $\mathbf{R}^T$ , formata dalle colonne della rappresentazione dei vettori  $(\mathbf{e}_{1R}, \mathbf{e}_{2R}, \mathbf{e}_{3R})$  sulla base  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ , è tale per cui

$$(\mathbf{e}_{1R}, \mathbf{e}_{2R}, \mathbf{e}_{3R}) = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \quad (10.6)$$

e, dato un ben preciso orientamento di  $\Lambda$ , essa può essere ottenuta seguendo diversi percorsi. Fatta salva quindi l'unicità della matrice  $\mathbf{R}$ , esistono diverse composizioni di rotazioni successive della terna  $\mathbf{J}$  che la portano a coincidere con  $\Lambda$ . Tali procedimenti di rotazione tengono naturalmente conto degli angoli via via coinvolti e prendono il nome dal loro primo proponente ovvero dal particolare ambito nel quale il loro uso è prevalente. Abbiamo così gli *angoli di Eulero: precessione, nutazione e rotazione*, normalmente indicati coi simboli  $\theta$ ,  $\phi$  e  $\psi$ , [4], pagg. 8–12, gli *angoli di Cardano*, meno noti e non molto dissimili da quelli di *Eulero* e talvolta chiamati col nome di *angoli nautici* e spesso indicati coi nomi di *imbardata, rollio e beccheggio*, e altri ancora.

## 10.2 ROTAZIONI INFINITESIMALI

Se restringiamo il campo delle rotazioni a quelle infinitesimali, che ormai sappiamo essere strettissime parenti delle velocità angolari, una volta rapportate al tempo infinitesimale durante il quale esse si manifestano, le cose marciano con maggior semplicità. Consideriamo la 10.1 e differenziamola:

$$d\mathbf{z}_{P(\Lambda)} = (d\mathbf{R}) \mathbf{z}_{P(J)} + \mathbf{R} (d\mathbf{z}_{P(J)}) . \quad (10.7)$$

Si nota che, in virtù della condizione di corpo rigido,  $d\mathbf{z}_{P(J)} = 0$ , perché la posizione del punto  $\mathbf{P}$  nel sistema di riferimento mobile con la clavetta è costante. Dobbiamo quindi osservare attentamente il termine  $(d\mathbf{R}) \mathbf{z}_{P(J)}$ , nel quale

---

<sup>2</sup>Sarebbe  $\mathbf{R}^{-1}$  ad essere così composta, ma  $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$ .

compare il differenziale della matrice di rotazione  $\mathbf{R}$ . Premettiamo che le prossime mosse potrebbero apparire un po' artificiose, benché il loro senso sia contenuto nel seguente *modus operandi*: costruire una "matrice derivata" che operi sul vettore che identifica il punto  $P$  già ruotato,  $\mathbf{z}_{P(\Lambda)}$ , anziché su  $\mathbf{z}_{P(J)}$ . Per la proprietà di  $\mathbf{R}$  espressa da 10.3, riscriviamo la 10.7 interponendo tra i due fattori la matrice identità  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$  ottenendo così la seguente relazione:

$$d\mathbf{z}_{P(\Lambda)} = (d\mathbf{R}) \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{z}_{P(J)}, \quad (10.8)$$

cioè

$$d\mathbf{z}_{P(\Lambda)} = (d\mathbf{R}) \mathbf{R}^T \mathbf{z}_{P(\Lambda)}. \quad (10.9)$$

Ma derivando la 10.4, notiamo che

$$(d\mathbf{R}) \mathbf{R}^T + \mathbf{R} (d\mathbf{R})^T = 0, \quad (10.10)$$

o anche

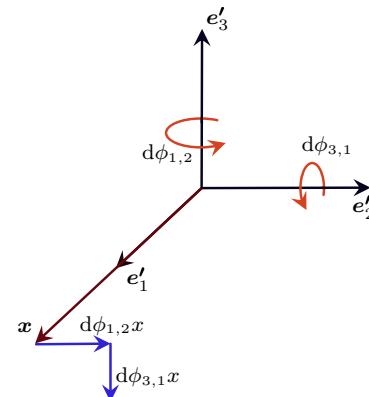


Figura 10.2: *Rotazioni infinitesimali.*

$$(d\mathbf{R}) \mathbf{R}^T = -\mathbf{R} (d\mathbf{R})^T, \quad (10.11)$$

La matrice  $(d\mathbf{R}) \mathbf{R}^T$  è quindi una matrice antisimmetrica e infinitesimale (prodotto di una matrice infinitesimale per una finita) che chiameremo  $d\Phi = (d\mathbf{R}) \mathbf{R}^T$ . È facile convincersi che tale matrice contiene i tre angoli infinitesimali di rotazione nei tre piani individuati da ciascuna coppia di vettori di base di  $\Lambda$ :

$$d\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_{1,2} & d\phi_{3,1} \\ d\phi_{1,2} & 0 & -d\phi_{2,3} \\ -d\phi_{3,2} & d\phi_{2,3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.12)$$

Ai suoi elementi abbiamo dato nomi evocativi e segni disparati: conviene ora fare una prova per renderci conto se tali nomi e tali segni siano o meno opportuni. Applichiamo la matrice  $d\Phi$  al vettore  $\mathbf{x}$  di modulo costante rappresentato in figura 10.2, la cui giacitura coincide con quella del versore  $e'_1$  con lo scopo di trovare  $d(\mathbf{x})$ . Avremo

$$d \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -d\phi_{1,2} & d\phi_{3,1} \\ d\phi_{1,2} & 0 & -d\phi_{2,3} \\ -d\phi_{3,2} & d\phi_{2,3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d\phi_{1,2}x \\ -d\phi_{3,1}x \end{pmatrix}, \quad (10.13)$$

che, confrontato con la figura 10.2, ci conforta alquanto. Il procedimento si può ripetere (con successo) per i vettori che giacciono sulle altre due

direzioni, così avremo provato “alla buona” che gli elementi della matrice  $d\Phi$  sono le rotazioni infinitesime. Dividendo poi tale matrice per  $dt$  si ottiene la matrice (finita) delle velocità angolari

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{1,2} & \omega_{3,1} \\ \omega_{1,2} & 0 & -\omega_{2,3} \\ -\omega_{3,1} & \omega_{2,3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.14)$$

Siamo ora in grado di rispondere al nostro quesito iniziale, cioè di conoscere posizione e velocità del punto  $P$  sapendo come si muove la terna  $\Lambda$ . Per gli spostamenti avremo

$$\mathbf{s}_P = \mathbf{s} + \mathbf{R}\mathbf{z}_P - \mathbf{z}_P, \quad (10.15)$$

e per quanto riguarda le velocità

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Lambda + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{z}_P. \quad (10.16)$$

### 10.3 ASSE DEL MOZZI E ALTRE CONSIDERAZIONI

Ci chiediamo a questo punto se, come nel caso piano, vi siano dei punti o dei luoghi privilegiati che, a fronte del movimento tridimensionale della clavetta, non subiscono spostamenti, oppure siano sottoposti soltanto a movimenti particolarmente semplici. Come ora sappiamo, l'equazione 10.15 fornisce lo spostamento di un generico punto dello *spazio mobile*. Imponendo che lo spostamento di un punto incognito, che chiameremo  $Q$ , sia nullo

$$0 = \mathbf{s} + \mathbf{R}\mathbf{z}_Q - \mathbf{z}_Q, \quad (10.17)$$

potremmo trovare un punto fisso della trasformazione considerata. Ma la possibilità di risolvere la 10.17 con soddisfazione, fuori cioè da circostanze molto particolari, è remota: basti pensare al caso semplicissimo (che implica una traslazione) dove la matrice di rotazione  $\mathbf{R} \equiv \mathbf{I}$ , caso in cui il sistema di equazioni summenzionato risulta impossibile per  $\mathbf{s} \neq 0$ . Osserviamo però che nella 10.17 compare una somma notevole:  $\mathbf{R}\mathbf{z}_Q - \mathbf{z}_Q$ . Come sappiamo, possono esistere alcuni vettori  $\mathbf{u}_i$ , che sono gli *autovettori* della matrice  $\mathbf{R}$ , che soddisfano sempre la relazione

$$\mathbf{R}\mathbf{u}_i - \lambda\mathbf{u}_i = 0. \quad (10.18)$$

Asseriamo, senza dimostrarlo<sup>3</sup>, che la matrice di rotazione  $\mathbf{R}$  possiede sempre un *autovettore*  $\mathbf{u}_3$  reale corrispondente all'*autovalore*  $\lambda_3 = 1$ . È tradizione

---

<sup>3</sup>Si consideri che, se  $\mathbf{u}$  e  $\lambda$  soddisfano l'equazione  $\mathbf{R}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ , si ha  $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R}\mathbf{u} = \lambda^2 \mathbf{u}^T \mathbf{I} \mathbf{u}$ . Tenendo poi conto che  $\mathbf{R}$  è una matrice unitaria, abbiamo  $|\lambda|^2 = 1$ . Un'equazione secolare di terzo grado ammette sempre almeno una soluzione reale e, affinché sia verificato quanto appena asserito, unitamente al fatto che il determinante della matrice  $\mathbf{R}$  sia positivo, i tre valori di lambda possono essere:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , oppure  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$  o, ancora,  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = a + ib, \lambda_3 = a - ib$ , dove  $|a + ib| = 1$ , e i pedici 1, 2 e 3 possono naturalmente essere scambiati a piacimento.

indicizzare tramite il pedice “tre” sia l’autovalore reale sia il corrispondente autovettore reale<sup>4</sup>. Parallelamente a questo autovettore esiste quindi una retta i cui punti, a causa dello spostamento tridimensionale finito dello spazio mobile, traslano, rimanendo però sulla stessa direttrice. È intuitivo pensare che, nei piani ortogonali a tale retta, lo spostamento dello spazio mobile sia di rotazione, fornendo allo spostamento complessivo una possibile connotazione *elicoidale*. Possibile nel senso che uno spostamento equivalente “può” essere ottenuto tramite un moto elicoidale: di come l’effettivo spostamento tra posizione iniziale e finale sia realmente avvenuto, nulla abbiamo affermato, quindi nulla possiamo dire.

Rimangono da chiarire due fondamentali circostanze. La prima riguarda la giacitura della retta parallela all’autovettore  $\mathbf{u}_3$  che, nel possibile spostamento elicoidale, funge da asse dell’elica. La seconda circostanza riguarda l’entità della rotazione dello spostamento elicoidale. L’angolo di rotazione  $\xi$  emerge immediatamente dalla soluzione della 10.18. Infatti, accanto all’autovettore reale  $\mathbf{u}_3$  associato a  $\lambda_3 = 1$  troviamo altri due autovettori complessi corrispondenti agli autovalori complessi coniugati  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Affermiamo, ancora una volta senza dimostrarlo, che

$$\xi = \text{atan}2(\Im(\lambda_1), \Re(\lambda_1)) \quad (10.19)$$

rappresenta la componente di rotazione dello spostamento elicoidale. L’individuazione dell’asse del moto elicoidale risulta leggermente più laboriosa. Essa può essere condotta in un piano passante per l’origine della terna fissa e ortogonale alla direzione dell’asse incognito, direzione che conosciamo, in quanto coincidente con quella dell’autovettore reale  $\mathbf{u}_3$  della matrice di rotazione. Su questo piano, che chiameremo con la lettera greca  $\sigma$ , esisterà (se la componente rotatoria dello spostamento non è nulla) un punto fisso: tale punto apparterrà all’asse di rotazione, che risulterà in questo modo identificato. Per lavorare nel piano summenzionato conviene adottare come “nuovi” vettori di base i tre autovettori dell’operatore di rotazione  $\mathbf{R}$ . Procediamo con ordine. Gli autovettori dell’operatore di rotazione  $\mathbf{R}$  risulteranno, come già osservato,  $\mathbf{u}_1$  e  $\mathbf{u}_2$  complessi coniugati, mentre  $\mathbf{u}_3$  reale: tutti con norma unitaria. Associati ai primi due autovettori ci sono due autovalori complessi coniugati, l’ultimo autovalore vale uno. La matrice  $\mathbf{H}$ , che contiene, per colonna, i tre autovettori, sarà la matrice che permette di passare dalle rappresentazioni nella vecchia base dei vettori e degli operatori, alle loro rappresentazioni nella nuova. La nuova rappresentazione dell’operatore

---

<sup>4</sup>Operando in questo modo l’asse dello spostamento elicoidale coincide con il terzo asse (cioè  $z'$ ) di una terna levogira e, in questo nuovo riferimento, gli spostamenti dovuti alla rotazione avvengono in piani paralleli e ortogonali a tale asse.

$\mathbf{R}$  sarà data da

$$\mathbf{R}' = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{R} \mathbf{H} = \mathbf{H}^* \mathbf{R} \mathbf{H} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 & 0 \\ 0 & a - ib & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.20)$$

dove col simbolo \* indichiamo la trasposta coniugata. I valori di  $a$  e  $b$  compongono i due autovalori complessi di  $\mathbf{R}$  e sono legati, come abbiamo già accennato, all'angolo  $\xi$  di rotazione elicoidale:  $b = \sin(\xi)$ . L'altro oggetto al quale dobbiamo cambiare base è la rappresentazione del vettore  $\mathbf{s}$ , il quale separa le origini delle due terne. Nella nuova base risulterà

$$\mathbf{s}' = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{s} = \mathbf{A}^* \mathbf{s}. \quad (10.21)$$

Abbiamo già fatto cenno alla volontà di operare limitandoci al piano  $\sigma$ , ortogonale alla direzione di  $\mathbf{u}_3$ . Nella base fornita dagli autovettori di  $\mathbf{R}$ , il proiettore sul sottospazio generato da  $\mathbf{u}'_3$  sarà dato da

$$\mathbf{P}_{u_3} = \mathbf{u}'_3 (\mathbf{u}'_3)^* \mathbf{u}'_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (10.22)$$

mentre il proiettore sul piano  $\sigma$ , ortogonale all'autovettore reale, vale

$$\mathbf{P}_\sigma = (\mathbf{I} - \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10.23)$$

Chiamiamo con  $\mathbf{s}'_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{s}'$  la proiezione, sul piano  $\sigma$ , del vettore che distanza le due terne. Si osserva senza difficoltà che l'applicazione dell'operatore di proiezione  $\mathbf{P}_\sigma$ , a qualsiasi vettore (rappresentazione), oscura l'ultima componente di tale vettore, autorizzandoci pertanto a lavorare con le sole prime due componenti. Chiamiamo  $\tilde{\mathbf{s}}' = (\mathbf{s}'_\sigma[1], \mathbf{s}'_\sigma[2])^T$  la proiezione su  $\sigma$  del vettore  $\mathbf{s}'$  privata dell'ultima componente nulla. Allo stesso modo, proiettiamo l'operatore di rotazione  $\mathbf{R}'_\sigma = \mathbf{P}_\sigma \mathbf{R}'$ . Anche in questo frangente rileviamo che la proiezione su  $\sigma$  annulla la terza riga e la terza colonna di  $\mathbf{R}'_\sigma$ . Riduciamo quindi la rappresentazione di tale operatore alla sola rotazione nel piano ortogonale all'asse dell'elica

$$\tilde{\mathbf{R}}'_\sigma = \begin{pmatrix} \mathbf{R}'_\sigma[1][1] & \mathbf{R}'_\sigma[1][2] \\ \mathbf{R}'_\sigma[2][1] & \mathbf{R}'_\sigma[2][2] \end{pmatrix}, \quad (10.24)$$

ottenendo una matrice  $2 \times 2$ . Indicata quindi la posizione incognita dell'asse dell'elica con  $\tilde{\mathbf{x}}'$ , vettore bidimensionale che giace su tale piano, possiamo scrivere

$$\tilde{\mathbf{x}}' - \tilde{\mathbf{R}}'_\sigma(-\tilde{\mathbf{x}}') = \tilde{\mathbf{s}}'_\sigma, \quad (10.25)$$

la quale afferma semplicemente che, se ci portassimo nella posizione  $\tilde{\mathbf{x}}'$ , e applicassimo una rotazione  $\tilde{\mathbf{R}}'_\sigma$  all'opposto di tale vettore, ci ritroveremmo nel punto dove si proietta il vettore  $\mathbf{s}'$ . L'incognita  $\tilde{\mathbf{x}}'$  si determina risolvendo il sistema lineare di due equazioni 10.25. Abbiamo

$$\tilde{\mathbf{x}}' = (\mathbf{I} - \tilde{\mathbf{R}}'_\sigma)^{-1} \tilde{\mathbf{s}}'_\sigma. \quad (10.26)$$

Torniamo nello spazio tridimensionale, aggiungendo al vettore  $\tilde{\mathbf{x}}'$  la terza componente,  $\mathbf{x}' = ((\tilde{\mathbf{x}}')^T, 0)^T$ , e riportiamoci agli originali vettori di base mediante la trasformazione  $\mathbf{x} = \mathbf{H}\mathbf{x}'$ . La retta

$$\mu = \mathbf{x} + \alpha \mathbf{u}_3, \quad (10.27)$$

dove  $\alpha$  è un numero reale qualsiasi, coincide con l'asse del moto elicoidale, stabilito dal teorema di *Chasles*, oppure con l'*asse del Mozzi*<sup>5</sup>. Riportiamo di nuovo, data la sua importanza, il contenuto di tale teorema, già enunciato in ristretto per i moti piani: “Ogni spostamento rigido, non traslatorio, si riduce in infiniti modi ad uno spostamento roto-traslatorio, sempre però con lo stesso vettore rotazione del componente rotatorio. Si riduce poi in un unico modo ad uno *spostamento elicoidale*”, [1], pag. 119.

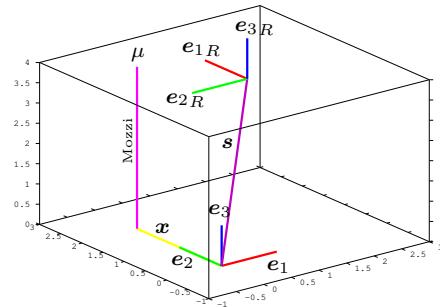


Figura 10.3: *Asse del Mozzi* con  $\mathbf{s} = (2, 2, 4)^T$ ,  $\theta = \psi = 0$ ,  $\phi = 90^\circ$ . Posizione asse  $\mathbf{x} = (0, 2, 0)^T$ , angolo di rotazione elicoidale  $\xi = 90^\circ$ .

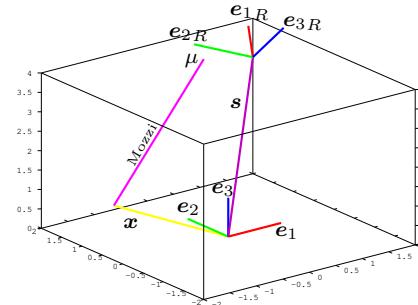


Figura 10.4: *Asse del Mozzi* con  $\mathbf{s} = (2, 2, 4)^T$ ,  $\theta = \psi = \phi = 30^\circ$ . Posizione asse  $\mathbf{x} = (-1.19, 1.26, 0.64)^T$ , angolo di rotazione elicoidale  $\xi = 66.45^\circ$ .

Le figure 10.3 e 10.4 dovrebbero dare un'idea dell'asse dello spostamento elicoidale  $\mu$  per due casi di spostamento rigido tridimensionale. Il primo caso, quello rappresentato in figura 10.3, riporta una traslazione della terna e una rotazione molto semplice, la quale avviene nel piano  $x - y$ , attorno all'asse  $z$ , ed è pari a  $90^\circ$  in senso antiorario. In questo caso, la retta  $\mu$  giace in una posizione ragionevolmente intuitiva, e questo ci serve da conforto dopo tutte

<sup>5</sup>Astronomo italiano, autore dell'opera (non visionata dall'autore) *Discorso Matematico Sopra il Rotamento Momentaneo dei Corpi*, 1763.

le avventure matematiche affrontate. La situazione rappresentata invece in figura 10.4, a fronte di una traslazione dalla terna di riferimento identica a quella del caso precedente, prevede di applicare a tale terna le rotazioni, esprimibili in termini di angoli di Eulero,  $\theta = \psi = \phi = 30^\circ$ . In questo frangente, l'intuizione, almeno di chi scrive, si perde. È vero che, in questa figura, l'asse del *Mozzi* somiglia a quello dei “mappamondi” sferici, e il vettore  $\mathbf{x}$  al supporto di tale asse, ma siamo comunque obbligati ad accordare molta fiducia alla formulazione matematica che abbiamo utilizzato per concedere, alla retta  $\mu$ , le caratteristiche di asse dello spostamento elicoidale.

I calcoli eseguiti per disegnare le figure 10.3 e 10.4 ci mettono a disposizione, in versione numerica, gli oggetti che compaiono nelle relazioni matematiche testé esposte, e ci sembrava un peccato non riportane alcuni, che potrebbero essere di aiuto a qualche studente volenteroso di percorrere lo stesso cammino. Proponiamo esclusivamente le quantità legate alla figura 10.4, che riteniamo maggiormente significative. Per gli angoli di Eulero, precessione, nutazione e rotazione, come già accennato, abbiamo  $\theta = \psi = \phi = 0.52360$  rad. Quindi

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0.53349 & -0.80801 & 0.25000 \\ 0.80801 & 0.39952 & -0.43301 \\ 0.25000 & 0.43301 & 0.86603 \end{pmatrix}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0.62325i & -0.62325i & 0.47235 \\ 0.70711 & 0.70711 & 0 \\ -0.3340i & 0.33400i & 0.88141 \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori sono  $\lambda_1 = 0.39952 + 0.91672i$ ,  $\lambda_2 = 0.39952 - 0.91672i$  e  $\lambda_3 = 1$ . Il vettore di traslazione, che vale  $\mathbf{s} = (2, 2, 4)^T$ , nella base costituita dagli autovettori di  $\mathbf{R}$  vale  $\mathbf{s}' = (1.4142 - 0.2445i, 1.4142 + 0.2445i, 3.5889)^T$ . Dopo le proiezioni su  $\sigma$  abbiamo

$$\tilde{\mathbf{s}}'_\sigma = \begin{pmatrix} 1.4142 - 0.2445i \\ 1.4142 + 0.2445i \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{R}}'_\sigma = \begin{pmatrix} 0.39952 + 0.91672i & 0 \\ 0 & 0.39952 - 0.91672i \end{pmatrix}.$$

Infine abbiamo, per la posizione di  $\mu$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}' = (0.89374 + 0.95725i, 0.89374 - 0.95725i)^T$  e  $\mathbf{x} = (-1.19322, 1.26394, 0.63945)^T$ .

Le cose non vanno diversamente quando gli spostamenti sono infinitesimali, e in tal caso l'asse del *Mozzi* si chiama anche *asse d'istantanea rotazione*. Le superfici rigate disegnate dalla sequenza degli assi d'istantanea rotazione, sia nel sistema fisso sia in quello mobile, godono di interessanti proprietà, analoghe a quelle delle polari nel moto piano, [9], pag. 86.

Proponiamo un'ultima considerazione, di importanza marginale in questa già troppo lunga digressione. Anche nel caso del moto in tre dimensioni, come già visto per il caso piano, le velocità si possono esprimere surrogando il prodotto  $\boldsymbol{\Omega} \mathbf{z}_{P(\Gamma)}$  con un prodotto vettoriale e si può riscrivere la 10.16 come segue

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_\Gamma + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}_P, \quad (10.28)$$

dove il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  ha le seguenti componenti

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_{2,3} \\ \omega_{3,1} \\ \omega_{1,2} \end{pmatrix}. \quad (10.29)$$

L’equivalenza del prodotto matriciale della 10.16 col prodotto vettoriale della 10.28 dipende strettamente dalla forma particolare di  $\boldsymbol{\Omega}$ , e la verifica di questa affermazione è lasciata al paziente lettore. Rimarchiamo semplicemente che la comodità insita nell’introduzione del vettore velocità angolare  $\boldsymbol{\omega}$  rende il suo uso frequentissimo. La possibilità di rappresentare le rotazioni infinitesime, quindi le velocità angolari, mediante un vettore è ristretta però allo spazio tridimensionale. Infatti con solo due dimensioni, l’angolo di rotazione è unico e occuperebbe le caselle libere della matrice antisimmetrica  $2 \times 2$  di rotazione. Ci sarebbe perciò troppo spazio in un vettore a due dimensioni. È vero che abbiamo utilizzato la rappresentazione vettoriale della velocità angolare anche nel caso di moto piano, ma il vettore  $\boldsymbol{\omega}$  risulta non appartenere al piano stesso. Del resto risulta così difficile concepire uno spazio che non sia quello tridimensionale! Viene sempre la tentazione di trattare gli spazi con numero di dimensioni inferiore a tre come se fossero immersi nel tridimensionale stesso. Qualora poi il numero delle dimensioni  $n$  dello spazio fosse maggiore di tre, si otterrebbe, per la matrice di rotazione, un numero di componenti “libere” pari a  $(n^2 - n)/2$ . Quindi, per uno spazio quadridimensionale si dovrebbero considerare sei componenti di rotazione, numero decisamente eccessivo per potere entrare in un vettore quadridimensionale.

## CAPITOLO 11

### Dentature con Profilo Cicloidale

#### 11.1 UNA PROPRIETÀ NOTEVOLE DELLA CICLOIDE

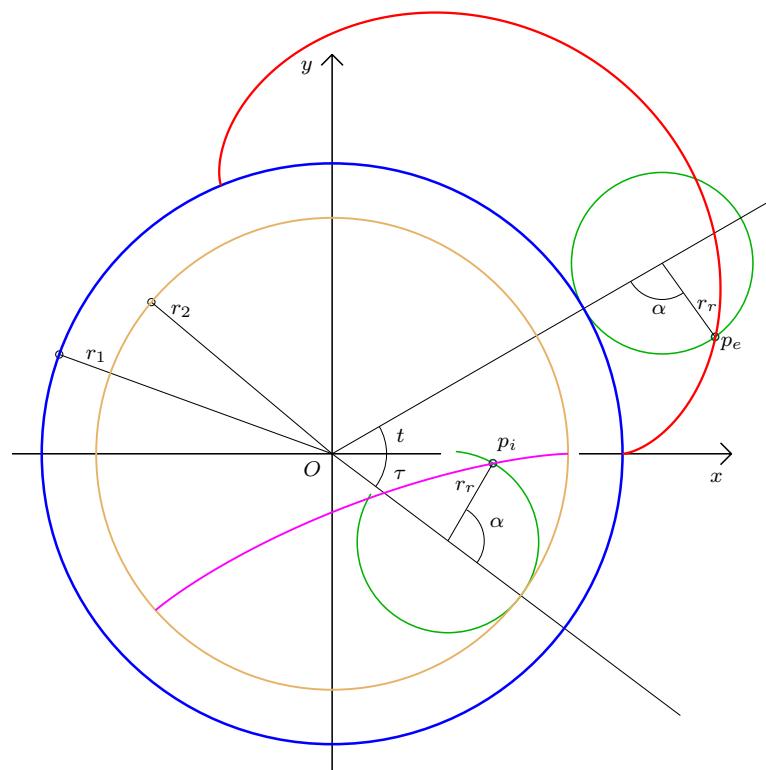


Figura 11.1: *Epicicloide* (rosso) e *ipocicloide* (indaco); le circonferenze in verde, *epiciclo* e *ipociclo*, svolgono, rotolando, un angolo di  $2\pi$ .

La curve rappresentate in figura 11.1 di colore rosso e indaco si chiamano rispettivamente *epicicloide* e *ipocicloide* delle circonference di raggio  $r_1$  e  $r_2$ , di colori blu e arancione. La *cicloide* può essere considerata come il caso limite di queste due curve qualora la circonferenza, sulla quale rotola l'*epiciclo*, sia

di raggio infinito. L'epicicloide, rappresentata in rosso, si ottiene facendo rotolare senza strisciamento la circonferenza verde, che si chiama epiciclo, oppure rolletta, o anche rotella, di raggio  $r_r$  all'esterno della circonferenza di raggio  $r_1$  (colore blu) e tenendo traccia delle posizioni via via raggiunte da un punto di tale rolletta, individuato col nome  $p_e$ . Lo stesso vale per l'ipocicloide (in indaco), con la differenza che la rolletta, ancora di raggio  $r_r$ , rotola all'interno della circonferenza di raggio  $r_2$  e di colore arancione: in questo caso il punto di cui si tiene traccia si chiama  $p_i$ . Abbiamo scelto di rappresentare in figura 11.1 la porzione delle due curve che si ottiene tramite il rotolamento delle due rollette lungo un tratto di lunghezza pari a quella della loro circonferenza. Abbiamo altresì assunto arbitrariamente che ipociclo ed epiciclo abbiano lo stesso raggio  $r_r$  perché, soltanto in questo caso, epicicloide e ipocicloide saranno dotate di una interessante proprietà, utile nella Meccanica delle Macchine. Al fine di descrivere l'epicicloide tramite equazioni parametriche, sceglieremo come parametro l'angolo  $t$ . Le coordinate  $x(t)$  e  $y(t)$  del generico punto  $p_e$  si ricavano quindi tramite semplici proiezioni

$$\begin{cases} x_e(t) = (r_1 + r_r) \cos(t) + r_r \cos(\pi - t - \alpha) \\ y_e(t) = (r_1 + r_r) \sin(t) - r_r \sin(\pi - t - \alpha) \end{cases} \quad (11.1)$$

Tenendo poi conto che l'angolo  $\alpha$  si può esprimere come  $\alpha = \frac{r_r}{r_1}t$  si ottiene

$$\begin{cases} x_e(t) = (r_1 + r_r) \cos(t) - r_r \cos\left(\frac{r_1 + r_r}{r_r}t\right) \\ y_e(t) = (r_1 + r_r) \sin(t) - r_r \sin\left(\frac{r_1 + r_r}{r_r}t\right) \end{cases} \quad (11.2)$$

Nel caso dell'ipocicloide sceglieremo come parametro  $\tau$ , che è un angolo crescente in direzione opposta a  $t^1$ . Avremo

$$\begin{cases} x_i(\tau) = (r_2 - r_r) \cos(\tau) + r_r \cos(\alpha - \tau) \\ y_i(\tau) = -(r_2 - r_r) \sin(\tau) + r_r \sin(\alpha - \tau) \end{cases} \quad (11.3)$$

quindi

$$\begin{cases} x_i(\tau) = (r_2 - r_r) \cos(\tau) + r_r \cos\left(\frac{r_2 - r_r}{r_r}\tau\right) \\ y_i(\tau) = -(r_2 - r_r) \sin(\tau) + r_r \sin\left(\frac{r_2 - r_r}{r_r}\tau\right) \end{cases} \quad (11.4)$$

---

<sup>1</sup>È usuale trovare le formule per l'ipocicloide scritte in modo analogo a quanto si fa per l'epicicloide, cioè col parametro che cresce nella direzione positiva degli angoli. In tale modo, il primo tratto della curva occuperà, come avviene per l'epicicloide, il primo quadrante. L'insolita direzione crescente, che abbiamo scelto per  $\tau$ , meglio si presta alla trasformazione di coordinate che ci permetterà di mettere in relazione le due curve come profili coniugati.

Desideriamo ora mostrare che queste due curve, epicicloide e ipocicloide, costituiscono una coppia di profili coniugati quando le circonferenze di raggi  $r_1$  e  $r_2$ , alle quali debbono pensarsi solidali, rotolano l'una sull'altra realizzando in tal modo le primitive di una coppia cinematica. Per la verità, questa dimostrazione è già stata svolta, in modo rigoroso, nel capitolo che tratta le ruote dentate e, in particolare, nel paragrafo che descrive l'ottenimento di profili coniugati di assortimento. Tale dimostrazione è riassunta dalle figure 6.15, 6.16 e 6.17, che mostrano la coniugazione dei profili tracciati da un punto trascinato da una primitiva che rotola su un qualsivoglia numero di altre primitive. Ma le dimostrazioni tanto generali, come quella riportata alla pagina citata, nelle quali le curve in gioco sono generiche, dove i procedimenti matematici tendono piuttosto all'astrazione, dicevamo, tali dimostrazioni hanno sempre lasciato a chi scrive un certo grado di insoddisfazione. Qui riportiamo una prova diretta, sviluppata tramite il calcolo,

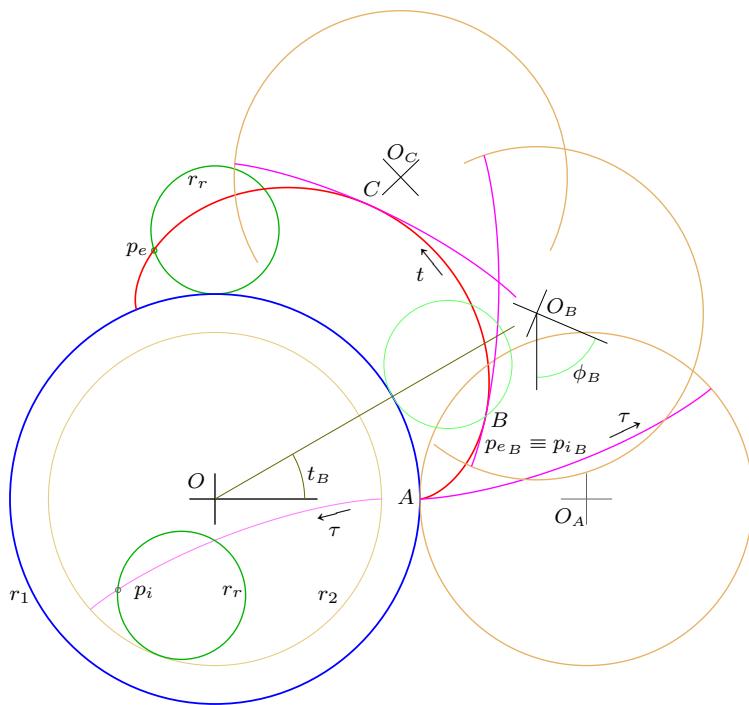


Figura 11.2: La ruota di raggio  $r_2$  rotola su quella di raggio  $r_1$  inviluppando tramite l'ipocicloide a essa solidale (indaco) la epicicloide (rosso).

della coniugazione tra le due curve, l'epicicloide e l'ipocicloide, nel caso in cui il raggio dell'ipociclo sia uguale a quello dell'epiciclo, suggerendo, a chi è già pago e convinto della dimostrazione svolta altrove e poco interessato a questo approfondimento, di saltare direttamente al prossimo paragrafo.

Mostreremo infatti che, scegliendo di tenere ferma la circonferenza di raggio  $r_1$ , dove si svolge la epicicloide (ma tale scelta è ovviamente arbitraria), e facendo rotolare su di essa la circonferenza di raggio  $r_2$ , l'ipocicloide solidale alla  $r_2$  inviluppa proprio la epicicloide solidale alla  $r_1$ . Per chiarire quanto appena affermato introduciamo la figura 11.2, della quale la descrizione non potrà essere brevissima. Cominciamo col presentare gli attori che metteremo in campo, dando qualche indicazione circa il ruolo che essi svolgeranno. La circonferenza di raggio  $r_1$  e centro in  $O$  (di colore blu) ospita la porzione di epicicloide (di colore rosso) svolta dalla rolletta di raggio  $r_r$  quando, rotolando all'esterno della prima, percorre una lunghezza pari alla propria circonferenza. Il parametro  $t$ , dal quale dipendono le formule 11.2, spazierà quindi nell'intervallo  $t \in [0, 2\pi r_r/r_1]$ . Circonferenza blu ed epicicloide rossa saranno ritenute fisse, aggrappate cioè al foglio del libro. Una seconda circonferenza, di raggio  $r_2$ , reca la porzione di ipocicloide generata da un punto dell'ipociclo che percorre anch'esso un cammino pari alla lunghezza della propria circonferenza, quindi il parametro  $\tau$  dell'ipocicloide assumerà valori compresi nell'intervallo  $\tau \in [0, -2\pi r_r/r_2]$ . Tale circonferenza col relativo ipociclo è rappresentata in quattro diverse posizioni con centri  $O$ ,  $O_A$ ,  $O_B$  e  $O_C$ . La circonferenza di raggio  $r_2$  con centro in  $O$ , non entrando direttamente nel processo di inviluppo, viene riportata con tratto meno marcato insieme alla propria ipocicloide, e posizionata nel luogo dove vale la formula 11.4. Le altre circonferenze di raggio  $r_2$  sono invece traslate e rotolate in modo opportuno e come vedremo invilupperanno, tramite l'ipocicloide, l'epicicloide solidale alla  $r_1$ . Chiamiamo punti *omologhi* sulla epicicloide e sulla corrispondente ipocicloide le posizioni dei punti  $p_e$  e  $p_i$  corrispondenti a percorsi della rolletta di uguale lunghezza. Nel nostro caso avremo  $r_1 t = r_r \alpha$  e  $r_2 \tau = r_r \alpha$  da cui segue immediatamente il legame tra i due parametri  $\tau = \frac{r_1}{r_2} t$ . La posizione della ruota di raggio  $r_2$  con centro in  $O_A$  si ottiene, dalla stessa di centro  $O$ , mediante una rotazione di un angolo pari a  $\pi$ , composta con uno spostamento verso destra pari all'interasse  $i = r_1 + r_2$ . Più in generale, affinché la circonferenza mobile e la relativa ipocicloide si trovino in una posizione precisa come quelle indicate in successione con le lettere  $B$  e  $C$ , sono necessari una rotazione e uno spostamento degli assi a cui la 11.4 fa riferimento. Coerentemente coi simboli già impiegati nel paragrafo dedicato ai profili coniugati, pag. 53, scriviamo la seguente trasformazione per i punti della ipocicloide che la conduce nella posizione  $B$ , a partire dalla posizione centrata

$$\begin{pmatrix} x_i^*(\tau) \\ y_i^*(\tau) \end{pmatrix} = \mathbf{T}(x_B, y_B) \mathbf{R}(\phi_B + \pi) \begin{pmatrix} x_i(\tau) \\ y_i(\tau) \end{pmatrix}, \quad (11.5)$$

avendo indicato con  $x_i(\tau)$  e  $y_i(\tau)$  i punti della ipocicloide centrata in  $O$ , mentre con  $x_i^*(\tau)$  e con  $y_i^*(\tau)$  indichiamo le loro trasformazioni. Una delle

condizioni che deve essere soddisfatta, affinché le due curve risultino coniugate, risiede nella coincidenza, nella posizione  $B$ , dei punti delle due curve. In altri termini, deve essere verificato che

$$\begin{pmatrix} x_e(t_B) \\ y_e(t_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i^*(\tau_B) \\ y_i^*(\tau_B) \end{pmatrix} = \mathbf{T}(x_B, y_B) \mathbf{R}(\phi_B + \pi) \begin{pmatrix} x_i(\tau_B) \\ y_i(\tau_B) \end{pmatrix}, \quad (11.6)$$

dove  $x_e(t_B)$  e  $y_e(t_B)$  sono le coordinate dell'epicicloide nel punto di interesse. Scriviamo la 11.6 in forma esplicita

$$\begin{pmatrix} x_i^*(\tau_B) \\ y_i^*(\tau_B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi_B + \pi) & -\sin(\phi_B + \pi) \\ \sin(\phi_B + \pi) & \cos(\phi_B + \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i(\tau_B) \\ y_i(\tau_B) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (r_1 + r_2) \cos(t_B) \\ (r_1 + r_2) \sin(t_B) \end{pmatrix}, \quad (11.7)$$

nella quale la matrice, che compare appena a destra del segno di uguaglianza, opera la rotazione piana di un angolo pari a  $\phi_B + \pi$ . Mostriamo ora che i punti  $p_{eB}$  e  $p_{iB}$  coincidono a valle della roto-traslazione, fatto peraltro evidente dalla figura composta per via numerica. Utilizziamo a questo scopo la 11.7, inserendo per  $x_i(\tau_B)$  e  $y_i(\tau_B)$  quelli forniti dalla 11.4, e avendo cura di sostituire, al parametro  $\tau$ , il suo omologo  $t$ , che origina la posizione  $B$ . Ponendo quindi  $\tau_B = \frac{r_1}{r_2}t_B$  e  $\phi_B = \frac{r_1+r_2}{r_2}t_B$ , per la prima riga delle 11.7 avremo

$$\begin{aligned} x_i^*(\tau_B) = & [ - (r_2 - r_r) \cos \left( \frac{r_1}{r_2} t_B \right) \cos \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2} t_B \right) + \\ & - r_r \cos \left( \frac{r_2 - r_r}{r_r} \frac{r_1}{r_2} t_B \right) \cos \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2} t_B \right) + \\ & - (r_2 - r_r) \sin \left( \frac{r_1}{r_2} t_B \right) \sin \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2} t_B \right) + \\ & + r_r \sin \left( \frac{r_2 - r_r}{r_r} \frac{r_1}{r_2} t_B \right) \sin \left( \frac{r_1 + r_2}{r_2} t_B \right) ] + \\ & + (r_1 + r_2) \cos(t_B), \quad (11.8) \end{aligned}$$

e facendo buon uso delle formule di somma per gli archi otteniamo infine

$$x_i^*(\tau_B) = (r_1 + r_r) \cos(t_B) - r_r \cos \left( \frac{r_1 + r_r}{r_r} t_B \right) = x_e(t_B). \quad (11.9)$$

Crediamo inutile riportare anche l'espressione di  $y_i^*(\tau_B)$  che coincide naturalmente con la  $y_e(t_B)$  riportata nelle 11.2, per  $t = t_B$ . Tali espressioni per le coordinate del punto della ipocicloide ci assicurano che  $p_{iB} \equiv p_{eB}$ , e la coincidenza testé dimostrata vale naturalmente per tutti i punti omologhi dell'epicicloide e dell'ipocicloide. Ciò però non è sufficiente per mostrare che

la ipocicloide inviluppa, durante il suo moto, la curva epicicloide: a tale scopo occorre infatti provare che, nei punti omologhi, anche le tangenti alle due curve coincidono, circostanza anche questa evidente dalla figura. Le derivate delle coordinate dell'epicicloide risultano essere

$$\begin{cases} \frac{dx_e(t)}{dt} = (r_1 + r_r) [-\sin(t) + \sin\left(\frac{r_1 + r_r}{r_r}t\right)] \\ \frac{dy_e(t)}{dt} = (r_1 + r_r) [\cos(t) - \cos\left(\frac{r_1 + r_r}{r_r}t\right)] \end{cases}, \quad (11.10)$$

mentre quelle delle derivate dell'ipocicloide sono

$$\begin{cases} \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} = (r_2 - r_r) [-\sin(\tau) - \sin\left(\frac{r_2 - r_r}{r_r}\tau\right)] \\ \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} = (r_2 - r_r) [-\cos(\tau) + \cos\left(\frac{r_2 - r_r}{r_r}\tau\right)] \end{cases}. \quad (11.11)$$

Ruotando queste ultime derivate, calcolate in  $B$ , dell'angolo  $\phi_B + \pi$  otteniamo

$$\left( \begin{pmatrix} \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} \\ \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} \end{pmatrix}_B \right)^* = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \pi) & -\sin(\phi + \pi) \\ \sin(\phi + \pi) & \cos(\phi + \pi) \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} \frac{dx_i(\tau)}{d\tau} \\ \frac{dy_i(\tau)}{d\tau} \end{pmatrix}_B \right), \quad (11.12)$$

dove si può notare l'assenza del termine relativo alla traslazione in quanto trattandosi di trasformare delle differenze tra coordinate essa avrebbe effetto nullo. Sostituendo, come si è fatto in precedenza,  $\tau_B = \frac{r_1}{r_2}t_B$  e

$\phi_B = \frac{r_1 + r_2}{r_2}t_B$  otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(\tau)}{d\tau}|_B^* = & [(r_2 - r_r) \sin\left(\frac{r_1}{r_2}t_B\right) \cos\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}t_B\right) + \\ & + (r_2 - r_r) \sin\left(\frac{r_1 r_2 - r_r}{r_r}t_B\right) \cos\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}t_B\right) + \\ & - (r_2 - r_r) \cos\left(\frac{r_1}{r_2}t_B\right) \sin\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}t_B\right) + \\ & + (r_2 - r_r) \cos\left(\frac{r_1 r_2 - r_r}{r_r}t_B\right) \sin\left(\frac{r_1 + r_2}{r_2}t_B\right)], \end{aligned} \quad (11.13)$$

cioè

$$\frac{dx_i(\tau)}{d\tau}|_B^* = (r_2 + r_r) [-\sin(t_B) + \sin\left(\frac{r_1 + r_r}{r_r}t_B\right)], \quad (11.14)$$

mentre, ripetendo il precedente calcolo, che preferiamo non riportare esplicitamente, per la coordinata  $y$  otterremmo

$$\frac{dy_i(\tau)}{d\tau}|_{B^*} = (r_2 + r_r) [\cos(t_B) - \cos\left(\frac{r_1 + r_r}{r_r}t_B\right)]. \quad (11.15)$$

Le espressioni 11.14 e 11.15 coincidono, a meno di un fattore moltiplicativo, con le espressioni delle derivate dell'epicicloide 11.10 calcolate in  $B$ . La differenza tra i fattori che moltiplicano le derivate dipende dal fatto che  $t$  e  $\tau$  sono parametri in generale diversi tra loro e generano quindi differenti rapporti incrementali. Questa circostanza però nulla toglie alla nostra dimostrazione, in quanto si avrà

$$\frac{\frac{dx_e(t)}{dt}|_B}{\frac{dy_e(t)}{dt}|_B} = \frac{\frac{dx_i(\tau)}{d\tau}|_B^*}{\frac{dy_i(\tau)}{d\tau}|_B^*}, \quad (11.16)$$

che prova la coincidenza delle tangenti alla curva inviluppante e al relativo inviluppo nel generico punto  $B$ . Abbiamo così mostrato che, durante il rotolamento di una ruota di raggio  $r_2$  su una di raggio  $r_1$ , che possiamo immaginare ferma, l'ipocicloide, trascinata dalla ruota mobile, inviluppa un tratto di epicicloide della ruota fissa corrispondente al medesimo epiciclo. In definitiva, pensando alle circonferenze in gioco come alle polari del moto, i due tratti di epicicloide e ipocicloide si comporteranno come profili coniugati essendo costantemente a contatto e possedendo la stessa tangente<sup>2</sup>.

## 11.2 RUOTE CON DENTI A PROFILO CICLOIDALE

Dalle conclusioni del precedente paragrafo, come anche dalle conclusioni del paragrafo 6.3, emerge con chiarezza la possibilità di usare i profili cicloidi per modellare i fianchi dei denti di ruote, aventi primitive circolari, che garantiscono la trasmissione omocinetica del moto. Contrariamente però a quanto visto per le ruote i cui denti presentano un profilo a evolvente di cerchio, trattando i profili cicloidi siamo costretti a dividere i profili coniugati in due porzioni: considerando il punto di contatto tra le primitive, una di queste si troverà dalla parte della prima ruota mentre l'altra porzione si troverà dalla parte della seconda ruota. Contenendo, poi, ciascuna delle due porzioni dei profili ora citate, due tratti distinti, un primo di epicicloide e un secondo di ipocicloide, il numero di spezzoni (i quali costituiranno la sagoma dei denti) da considerare sarà in definitiva quattro. Ad esempio, volendo usare una porzione della epicicloide e della ipocicloide rappresentate in figura 11.2, il tratto appartenente alla epicicloide potrà rappresentare la sporgenza del dente sulla ruota  $r_1$ , mentre un tratto sulla ipocicloide costituirà la rientranza sulla ruota  $r_2$ . Non rimane quindi altra scelta che ripetere quanto fatto per le due primitive a ruoli invertiti: generare cioè una epicicloide sulla ruota  $r_2$  e una ipocicloide sulla  $r_1$ . Ci preme sin d'ora sottolineare tre aspetti importanti delle ruote a profilo cicloidale, che ci indirizzano sulla

---

<sup>2</sup>Nessuna ipotesi riguardante i raggi delle circonferenze è stata messa in campo quindi il raggio della rolletta  $r_r$  potrebbe superare quello delle circonferenze sulle quali sviluppa le cicloidi. Nel caso di  $r_r$  di lunghezza infinita otteniamo per le due curve archi di evolvente.

strada della loro costruzione. La prima considerazione riguarda proprio la coniugazione a tratti dei profili dei denti: teste e fianchi sono tra loro coniugati, ma non lo sono i profili nella loro interezza. Ciò ci convince facilmente che l'interesse di progetto dovrà essere rigidamente rispettato e che le due circonferenze primitive potranno solo coincidere con quelle di raggi  $r_1$  e  $r_2$ : le relative coppie di profili coniugati si scambieranno il testimone proprio quando il loro punto di contatto cadrà su queste circonferenze. La seconda considerazione è una diretta conseguenza della prima: gli epicicli usati per ottenere le due coppie di profili possono essere tra loro diversi, circostanza questa che, come vedremo più avanti, semplifica la costruzione di queste ruote in un determinato perimetro di applicazione che è quello dell'orologeria. È chiaro che risulteranno “di assortimento” soltanto quelle ruote aventi il medesimo passo  $o$ , ciò che è equivalente, lo stesso modulo, costruite mediante lo stesso epiciclo o mediante coppie di epicicli uguali tra loro. Da ultimo notiamo che l'inconveniente del numero minimo di denti – il quale nel caso di ruote con denti a evolvente deriva dall'impossibilità di estendere il fianco dei denti stessi oltre le circonferenze di base, in questo caso, scegliendo opportunamente il raggio delle rollette – non si manifesta, essendo entrambe le coppie di profili prolungabili (entro certi limiti) a volontà.

### 11.3 PROPORZIONAMENTO DELLE RUOTE CICLOIDALI

Rimane valido anche per queste ruote il proporzionamento dei denti legato al modulo della ruota stessa? Ancora, è necessario, oppure utile, introdurre anche qui tale concetto? Come sappiamo, nell'ambito della progettazione delle ruote ad evolvente, una stretta disciplina che lega la forma dei denti, in particolare *addendum* e *dedendum*, al modulo  $m$  rende la loro progettazione più semplice. Si può sicuramente definire, anche nel caso di profilo cicloidale, il modulo  $m = 2r/z$ , pari cioè, come al solito, al diametro primitivo diviso il numero di denti. Una volta definito tale modulo, saremmo in grado di riferire ad esso l'*addendum* e il *dedendum* dei denti utilizzando proporzioni che si ispirino a quelle delle ruote a evolvente. Ciò che si ottiene in tal caso, per un ingranaggio  $z_1 = 11$  e  $z_2 = 60$ , è riportato in figura 11.3.

La scelta dei numeri di denti, per l'ingranaggio di questa figura, non è casuale: la figura 6.32, che riporta un ingranaggio tra ruote a evolvente recanti gli stessi numeri di denti, mette infatti in evidenza, sul pignone, la problematica che si chiama sottotaglio dei denti, oppure interferenza. Dalla figura 11.3 risulta invece evidente che tale problema non si manifesta per le ruote cicloidali, per le quali è persino possibile un numero di denti pari a due. A dire il vero però, l'ingranaggio cicloidale, sopra riportato, ci convince fino a un certo segno. Intanto, come è esplicitato nella didascalia, siamo costretti a evidenziare i raggi degli epicicli utilizzati che, nel nostro caso, a fronte di un raggio primitivo del pignone pari a  $r_1 = 40$ , valgono  $r_e = r_i = 10$  (le

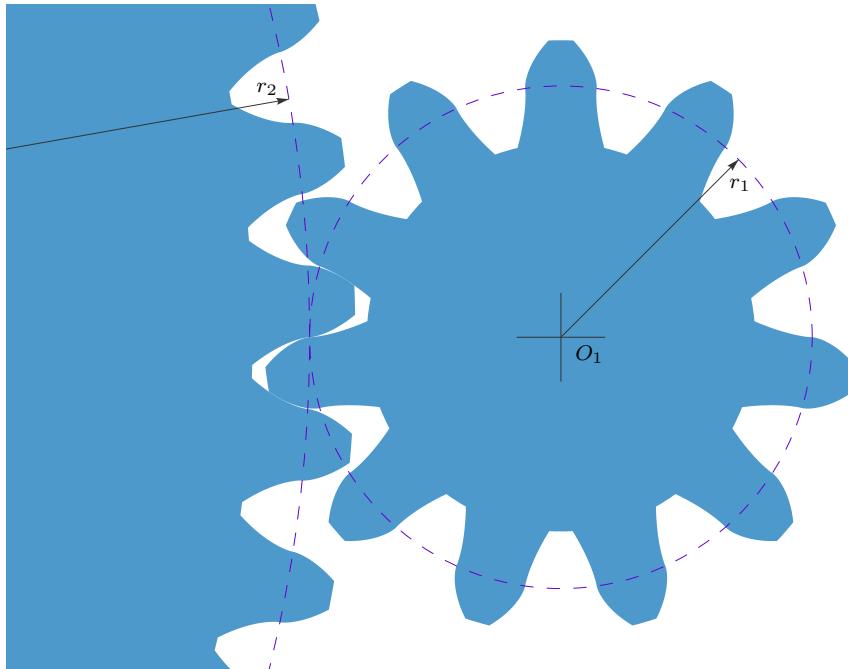


Figura 11.3: Generico ingranaggio cicloidale con  $r_1 = 40$ ,  $z_1 = 11$ ,  $z_2 = 60$  e raggio degli epicicli  $r_i = r_e = 10$ .

unità di misura sono qui volutamente omesse). Il raggio unico dell'epiciclo e dell'ipociclo sulla prima ruota equivale naturalmente a quello dell'ipociclo e dell'epiciclo sulla seconda. Il valore di tale raggio giunge da una raccomandazione contenuta in [11], la quale segnala che la proporzione ottimale tra il raggio della rolletta e il modulo della ruota è  $r_e = r_i = 1.375m$ , risultando così possibile tagliare pignoni con pochi denti senza incorrere nell'indebolimento della base dei suoi denti. In teoria, potremmo quindi affermare che tutte le generiche ruote disegnate in questo modo e aventi lo stesso modulo risulterebbero essere “di assortimento”. Ma è subito chiaro che, nell’ambito di queste dentature, la scelta tutto sommato arbitraria dei raggi di epiciclo e ipociclo, i raggi dei quali si adattano forzatamente ad essere rapportati al modulo della ruota, indebolisce molto il concetto di assortimento, e con esso quello stesso di modulo che invece, nel caso delle ruote ad evolvente, lega bensì il loro numero di denti al loro diametro primitivo, ma soprattutto seleziona un utensile, usando il quale si possono tagliare ruote che risultano tutte compatibili tra loro. Quindi, modulo sì, ma segnatamente in quanto passo diametrale, il quale individua, in sostanza, le dimensioni dell’oggetto che stiamo considerando. Vedremo a breve uno *standard* che riguarda la fabbricazione di ruote per orologeria, dove il concetto di modulo non solo è usato

ma porta con sé un folto numero di relazioni tra le quantità geometriche che modellano, in quell'ambito, i denti. Ciononostante, anche in quel mondo il concetto di assortimento è molto più sfumato rispetto a quello che si trova studiando le ruote ad evolvente. Tornando all'ingranaggio di figura 11.3, chi scrive non è sicuro che il proporzionamento di generiche ruote cicloidali si esegua seguendo quella via. Non siamo neppure sicuri che ruote come quelle di figura 11.3 siano mai state tagliate (nel caso, ovviamente, con fresatura di forma), e ammettiamo senza difficoltà di non averle mai viste dal vero.

#### 11.4 INTERESSANTI CASI DI RUOTE CICLOIDALI

L'epilogo, relativamente privo di entusiasmo, del precedente paragrafo non deve disincentivare la nostra indagine circa le eventuali applicazioni di questi ingranaggi, meno comuni dei loro "cugini" a evolvente. Toccheremo infatti brevemente gli aspetti geometrici di tre tipologie particolari di ruote con denti a profilo cicloideale, ciascuno dei quali presenta interessanti applicazioni concrete nella tecnica. La terza, in ordine di presentazione, di queste famiglie di ruote gode anzi di diffusione copiosa e capillare perché riguarda gli ingranaggi presenti negli orologi.

Un primo caso peculiare di dentatura cicloideale emerge dalla possibilità che gli ipocicli siano le stesse circonferenze primitive. Le ipocicloidi si riducono, in tal caso, a un punto, mentre le epicicloidi saranno tracciate dai punti di una delle due primitive che rotola sull'altra. Generalmente, si sceglie di far seguire a un certo numero di punti della primitiva del pignone, punti che corrisponderanno ai suoi "denti", le traiettorie di epicicloide disegnate dalla circonferenza primitiva del pignone stesso mentre rotola sulla circonferenza primitiva dell'altra ruota. I punti individuati sul pignone dovrebbero, in teoria, seguire fisicamente i fianchi dei denti con profilo epicicloideale, ma essi non potrebbero offrire che contatti singolari, poco idonei a trasmettere forze e, in generale, inutilizzabili nelle applicazioni tecniche. Per questo motivo, si sostituiscono tali punti con idonee rotelle di raggio opportuno e, di conseguenza, si modifica la forma del fianco cicloideale dei denti della ruota condotta in modo che tali fianchi siano l'inviluppo delle rotelle stesse quando il loro centro segue l'epicicloide. Si ottengono in questo modo le cosiddette *ruote a lanterna*, il cui nome deriva dalla particolare forma del pignone dell'ingranaggio che può ricordare una lanterna. Un esempio di queste ruote è riportato in figura 11.4. Gli ingranaggi a lanterna vengono impiegati per movimentare ruote condotte di grandi diametri e possono sopportare condizioni di lavoro gravose. Quando il raggio della ruota condotta diventa infinito il pignone a lanterna muove una cremagliera. In questo caso i centri delle rotelle percorrono dei tratti di cicloide. Quest'ultima soluzione si trova in alcuni nastri trasportatori soggetti a carichi ingenti.

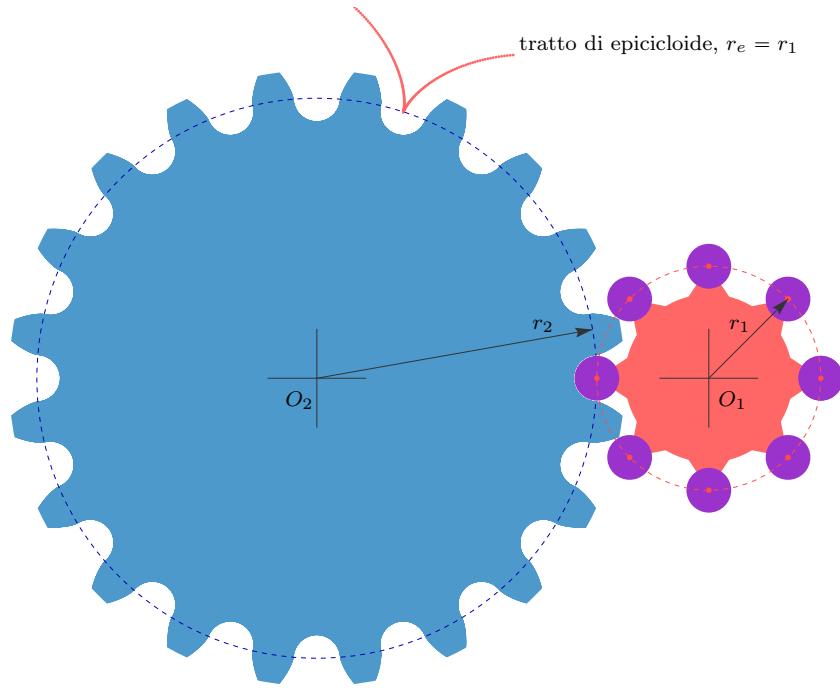


Figura 11.4: *Ruota cicloideale con pignone a lanterna*,  $z_1 = 8$ ,  $z_2 = 20$ .

Abbiamo accennato alla possibilità di ottenere ruote cicloidali con numero di denti ridottissimo. Un particolare dispositivo atto a comprimere o pompare fluidi si ottiene dall'ingranaggio di ruote con denti cicloidali a due o a tre denti. Descriviamo il caso di ruote con due denti, che riportiamo in figura 11.5, specificando che le proporzioni da rispettare per ottenere tale meccanismo sono le seguenti:  $z = 2$ ,  $r_1 = r_2$  e  $r_e = r_i = r_1/4$ . Le ruote, disegnate mediante il proporzionamento proposto, non sono certo in grado di trasmettere tra loro il moto con continuità. Tuttavia, qualora la loro rotazione venga garantita da una adeguata coppia di ruote dentate esterne, esse ingranano, da un punto di vista puramente cinematico, correttamente. Tali *ruote a lobi*, alterando periodicamente i volumi a loro disposizione nel corpo della pompa, assicurano fino ad un certo grado la tenuta stagna, quindi la possibilità di comprimere o di pompare i fluidi. Esistono diverse versioni commerciali di questi dispositivi che prendono il nome di *pompe a lobi*, quando elaborano fluidi incomprimibile, oppure di *compressori volumetrici a lobi* quando trattano gas compressibili. Una nota casa automobilistica installava, fino a non molto tempo fa, questo tipo di compressore per sovralimentare diversi dei suoi modelli di motore a combustione interna.

Vi è un ambito della meccanica, molto particolare, dove le ruote cicloidali la

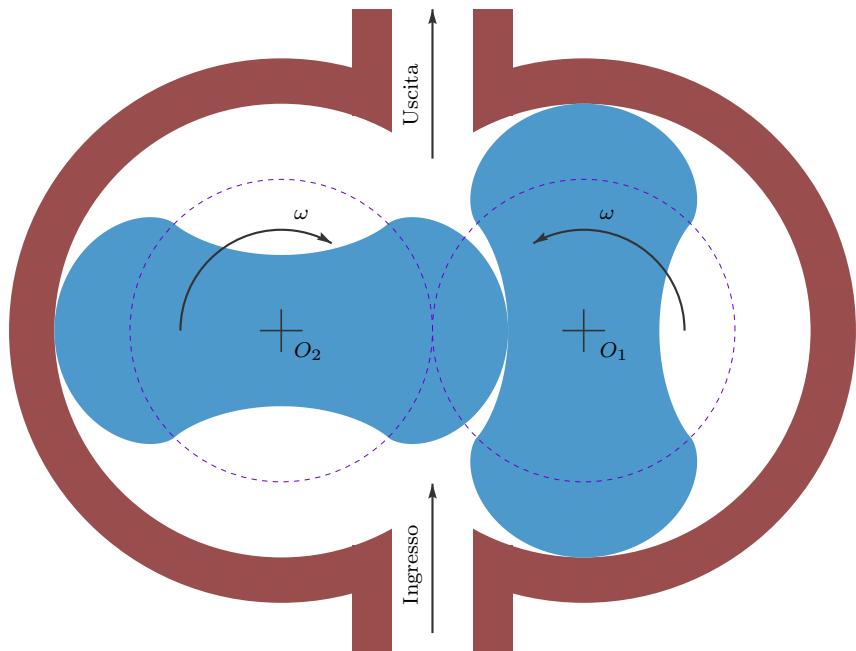


Figura 11.5: *Compressore a lobi ottenuto dall'ingranaggio di due ruote cicloidali a due denti.*

fanno da padrone, ed è quello dei *meccanismi per orologeria*. Si tratta, come è facile intuire, di un mondo piuttosto distante da quello della meccanica delle macchine. L'ingombro delle ruote dentate per orologeria deve essere infatti compatibile con le dimensioni degli orologi che le ospitano, quindi il loro diametro spesso non supera i 10–15 millimetri. Altre caratteristiche salienti di questo speciale settore degli ingranaggi sono l'assenza sistematica di lubrificazione e i valori minuscoli dei flussi di potenza, flussi che, non presentando mai inversioni di direzione, rendono tollerabili (quando non prescritti) giochi rilevanti tra le dentature. Una volta scritta la procedura numerica dalla quale otteniamo le figure 11.3 e 11.5, la curiosità di vedere tale codice all'opera con le ruote per orologeria era elevata. La fortuna e la casualità ci hanno fatto imbattere in un testo che potrebbe aver rappresentato per un bel po' di tempo il riferimento degli orologiai: [22]. Per la verità il libro ora citato, nell'opportuno capitolo dedicato agli ingranaggi, considera anche le ruote con profilo ad evolvente. Ma è subito abbastanza chiaro che lo fa per completezza, e che le ruote a profilo cicloidale saranno al centro di tutte le successive considerazioni. Siamo certi che la norma [23], la quale propone una standardizzazione delle ruote per orologeria, sia stata, in larga parte, elaborata seguendo [22]. Nel paragrafo 6.2 tra i precetti che abbia-

mo messo in campo, nel nostro percorso intuitivo, ve ne era uno, debole, il quale prescriveva che ci fosse una sola famiglia di ruote di assortimento, e non due. Ma tale precezzo veniva appunto etichettato come debole, anzi, in quello stesso luogo indicavamo questo capitolo di approfondimento come la sede dove si descrive una serie di ingranaggi formata da due famiglie diverse di ruote. In orologeria, di fatto, pignoni e ruote non possono essere confusi tra loro e l'ingranamento pignone-pignone o ruota-ruota non è mai possibile. Addirittura, la nomenclatura delle loro sporgenze è eterogenea: i pignoni ospitano le foglie, le ruote i denti. Queste due famiglie di ruote dentate nascono dalla volontà di ottenere, sia per i pignoni, sia per le ruote, denti il cui profilo risulti il più semplice possibile da tagliare. Per questo motivo, si fa in modo di utilizzare sia sul pignone sia sulla ruota un ipociclo di raggio esattamente pari alla metà del loro raggio primitivo. L'ipocicloide così ottenuta coincide con un diametro della primitiva, pertanto si presenta rettilineo e radiale. Ovviamente le epicicloidi, che costituiranno il profilo delle teste dei denti, saranno ottenute dalle stesse rollette, già utilizzate per gli ipocicli, a primitiva invertita. La figura 11.6 riporta un ingranaggio con  $z_1 = 6$  e  $z_2 = 60$  in cui risultano evidenti i fianchi rettilinei delle foglie del pignone e

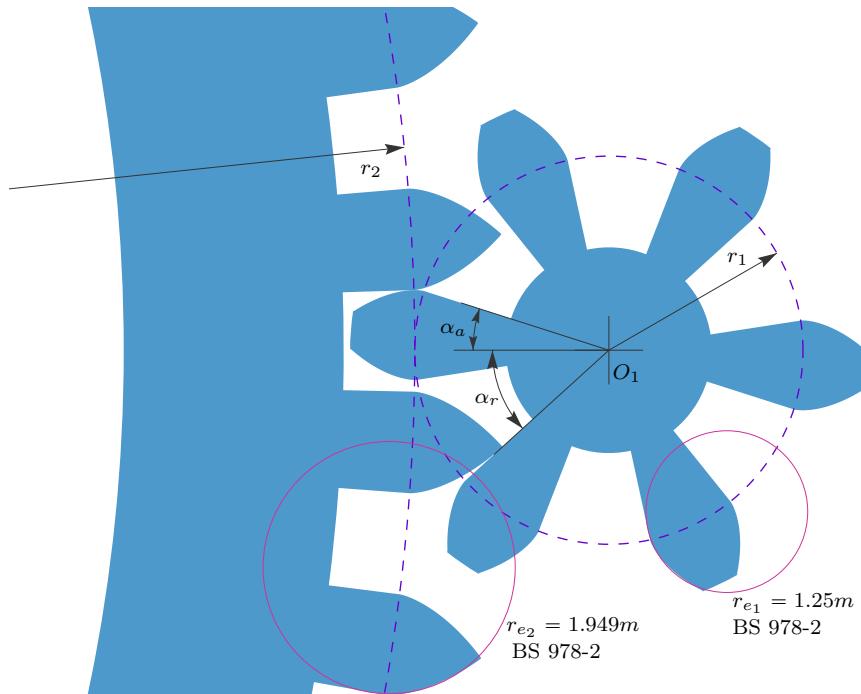


Figura 11.6: *Ingranaggio cicloidale da orologeria, pignone con  $z_1 = 6$  foglie, ruota da  $z_2 = 60$  denti. Accesso  $\alpha_a = 17^\circ 44'$ , recesso  $\alpha_r = 42^\circ 16'$ .*

dei denti della ruota. Non è difficile comprendere che i fianchi rettilinei dei denti risultano di facile lavorazione, potendo essere tagliati da sottili fese a disco con taglienti piani. In altre parole non è necessario che la sezione della fresa abbia la forma del vuoto tra i denti. Sembra che gli appassionati di questo settore riescano a tagliare queste minuscole ruote persino con utensili più o meno hobistica, certamente aiutati da opportuni apparecchi divisorì. Le teste (*addendum*) delle foglie del pignone e dei denti della ruota meritano invece considerazioni distinte. Cominciamo con l'osservare che i rapporti di trasmissione utili in orologeria sono una manciata. In [22] ne sono specificati sedici e l'autore dice esplicitamente di averne riportati più di quelli realmente in uso. Le moltipliche che si eseguono sono ancor meno delle coppie trattate, ad esempio la moltiplica per dieci si può ottenere con gli ingranaggi 60–6, 70–7 e 80–8. Parliamo di moltiplica perché, in generale, in quest'ambito, sono le ruote a muovere i pignoni. Da quest'ultima considerazione, dal fatto cioè che siano le ruote ad essere motrici, si identificano naturalmente il tratto di accesso e quello di recesso, i quali si toccano sulla linea immaginaria che congiunge il centro della ruota a quello del pignone. Nel paragrafo 6.7 abbiamo accennato alla dissimmetria di cui soffrono accesso e recesso rispetto al rendimento dell'ingranaggio: durante il recesso, il rendimento è sempre più elevato. In un ambito dove la ridottissima quantità di energia disponibile proviene da una molla, o da un peso che scende, oppure da una piccola batteria, e tale energia deve muovere il meccanismo dell'orologio il più a lungo possibile, risulta quindi naturale la tendenza ad avere il minimo arco di accesso e il massimo arco di recesso, compatibili con la geometria delle ruote coinvolte. L'angolo di recesso maggiormente esteso si ottiene con la massima altezza realizzabile per i denti della ruota. Il profilo dei denti viene pertanto esteso fino ad appuntire il dente stesso. L'ultima posizione utile del dente nel recesso si ha quando la tangente sulla punta dell'*addendum* è parallela al fianco rettilineo della foglia, come mostrato in figura. Nella pratica costruttiva di queste ruote, tali fianchi che, teoricamente, dovrebbero essere epicicloidali, vengono approssimati da archi di circonferenza, facili da improntare direttamente sulla fresa a disco che taglia la ruota. Lo *standard* B.S. 978, [23], che raccoglie in compendio le raccomandazioni di una vasta parte dell'industria svizzera di orologi, raccomanda di sostituire la porzione epicicloidale del fianco del dente con un arco di circonferenza di raggio medio rispetto all'epicicloide stessa. Mentre in [22] il proporzionamento delle ruote e dei pignoni avviene con riferimento al loro diametro e al loro numero di denti, nelle raccomandazioni raccolte in [23], immaginiamo con l'intento di dare maggiore sistematicità ai parametri che regolano la geometria di queste ruote, si parte da una tabella di moduli, in mm, dove su circa sessanta valori standardizzati, spiccano in grassetto 0.08, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1.0. Giusto per rendere l'idea del perimetro entro il quale ci muoviamo, una ruota con 60 denti e modulo 0.1 mm avrà un diametro

primitivo pari a 6 mm. Parlando dei denti delle ruote, sempre in [23], si trova la tabella 2 che lega i loro dettagli geometrici, come *addendum*, *dedendum*, raggio e posizione del centro dell'arco di circonferenza che sostituisce lo spezzone di epicicloide e spessore del dente, al modulo della ruota stessa. Alcune di queste dimensioni, in particolare il raggio dell'arco di circonferenza che costituirà l'*addendum*, dipendono però, oltre che dal modulo, anche dal rapporto di trasmissione e dal numero di foglie del pignone col quale la ruota è destinata a ingranare. Fortunatamente, come abbiamo già accennato, sia i rapporti di trasmissione, sia i numeri delle foglie che si usano sono limitati. Per questo motivo risulta agevole costruire la tabella 3 di [23], che riporta per nove numeri delle foglie del pignone, da 6 a 16 saltando 11 e 13, e per 14 valori del rapporto di trasmissione, i valori che identificano geometricamente il dente della ruota in questione. Nella nostra figura 11.6, la ruota ha sessanta denti mentre il pignone presenta sei foglie, e abbiamo lasciato, sia per l'*addendum* della ruota, sia per quello del pignone, i tratti di epicicloide calcolati. Riportiamo comunque in figura anche le circonferenze approssimanti indicate in [23], in modo da avere un riscontro visivo circa la loro effettiva bontà. Una volta calcolato, tramite la nostra procedura nume-

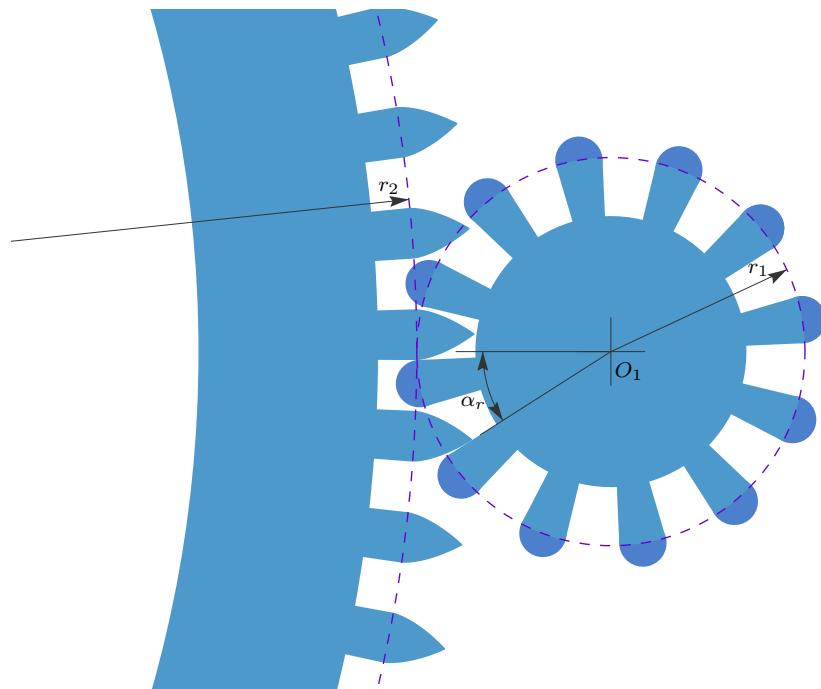


Figura 11.7: *Ingranaggio cicloidale da orologeria, pignone con  $z_1 = 12$  foglie, ruota da  $z_2 = 90$  denti. Ingranaggio a tutto recesso  $\alpha_r = 32.5^\circ$ .*

rica, oppure consultando [22], pag. 175, il massimo angolo di recesso,  $\alpha_r$ , dobbiamo garantire un angolo di accesso che sia  $\alpha_a > 2\pi/z_1 - \alpha_r$ , in modo da poter assicurare la continuità della trasmissione. Nel nostro caso abbiamo un recesso molto più esteso dell'accesso. L'epicicloide dell'*addendum* delle foglie del pignone sarà pertanto impegnata in un suo breve tratto vicino alla circonferenza primitiva. Per questo motivo l'approssimazione del tratto di epicicloide sulle foglie dei pignoni è ancora più facile di quella che si esegue sui denti delle ruote. Tanto è vero che in molti casi, come quello che riportiamo in figura 11.7, l'*addendum* sulle foglie non lavora. Per tale ingranaggio l'arco di accesso è nullo e l'arco di recesso vale  $\alpha = 32.5$ , già superiore ai necessari  $30^\circ$ . La sommità delle foglie presenta quindi arrotondamenti senza alcuna funzione cinematica, ma che rendono i pignoni maggiormente compatibili con l'ingranamento: non sarebbero apprezzabili gli spigoli vivi sulla cima delle foglie, qualora fossero terminate alla fine dell'ipociclo rettilineo. Tali arrotondamenti oziosi vengono messi in evidenza, in colore più scuro, nella stessa figura. In entrambe le figure, 11.6 e 11.7, si può notare un gioco notevole tra le dentature, funzionale alla robustezza dell'ingranaggio nei confronti della possibile intrusione di corpi estranei (polvere), il cui valore è stato determinato seguendo le raccomandazioni di [23]. Come già accennato altrove, tale gioco non suscita inconvenienti, in quanto la potenza trasmessa è minuscola e oltretutto, in generale, il suo flusso non presenta inversioni.

## CAPITOLO 12

### Ulteriori Considerazioni sulla Profilatura delle Camme

#### 12.1 UNA PROPRIETÀ DEL DIAGRAMMA DELLE ACCELERAZIONI

Vista l'importanza che il diagramma delle accelerazioni riveste nel progetto dei meccanismi, ci preme mettere in evidenza una sua proprietà, derivante da una condizione sussistente nella stagrande maggioranza dei casi nell'ambito delle camme: la velocità del cedente deve annullarsi in corrispondenza dell'inizio ( $t = 0$ ) e della fine ( $t = t_s$ ) dell'intervallo di avanzamento. Si avrà quindi

$$\int_0^{t_s} \ddot{y} dt = |\dot{y}|_0^{t_s} = 0. \quad (12.1)$$

L'integrale 12.1 evidenzia il fatto che la funzione  $\ddot{y}(t)$  deve avere valor medio nullo. Svolgiamo ora il seguente integrale, per parti

$$\int_0^{t_s} \ddot{y} t dt = |\dot{y}t|_0^{t_s} - \int_0^{t_s} \dot{y} dt = 0 - |\dot{y}|_0^{t_s} = -h. \quad (12.2)$$

Le relazioni 12.2 assumono particolare evidenza alla luce della seguente analogia: immaginando il diagramma delle accelerazioni  $\ddot{y}$  come quello di un carico distribuito lungo una trave incastrata a un estremo e di lunghezza  $t_s$ , le precedenti relazioni equivalgono, in tal caso, a imporre che tale carico debba avere risultante nulla e momento all'incastro  $M_i = h$ .

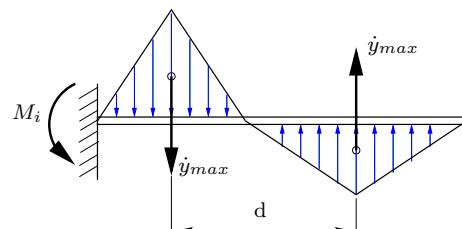


Figura 12.1: Analogia fra diagramma delle accelerazioni e diagramma dei carichi.

## 12.2 UN METODO PER RIDURRE L'INGOMBRO DELLE CAMME

Come è stato esposto a pagina 130, l'angolo di pressione massimo costituisce spesso un limite gravoso nel progetto di una camma, costringendo il progettista ad aumentare le dimensioni dell'eccentrico, e spesso anche quelle della macchina, onde evitare gli inconvenienti dovuti alle elevate forze laterali che nascono e i conseguenti pericoli di impuntamento.

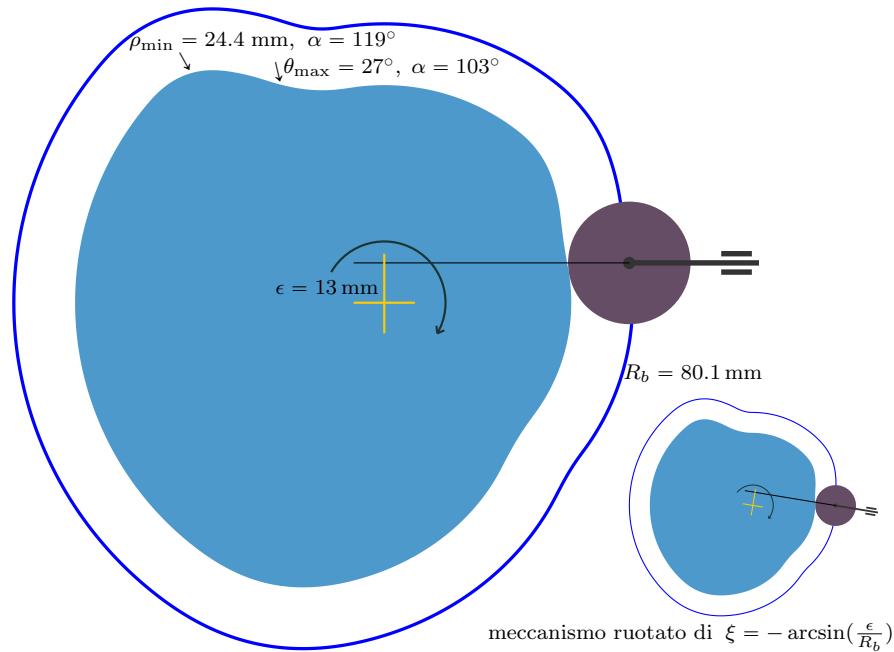


Figura 12.2: *Camma con punteria deviata.*

Va detto però che, mentre il contenimento di  $\theta_{\max}$ , nelle fasi di lavoro (di solito chiamate salite), deriva dalle cautele atte a evitare una trasmissione inefficiente delle forze, pericoli di impuntamenti e reazioni vincolari eccessive, tali precauzioni si possono lasciare cadere nei tratti di riposo della camma, cioè nelle fasi di discesa. Pertanto, se inclinassimo il cedente in modo da diminuire l'angolo di pressione nelle fasi di salita, potremmo tollerare l'aumento di  $\theta$  nelle fasi in cui tale cedente è scarico. In figura 12.2 è riportata una camma tastata da un cedente a punteria con rotella. Per inciso, tale camma è la stessa di figura 9.22, dove però il cedente è disassato di una quantità  $\epsilon = 13$  mm rispetto al centro della camma stessa<sup>1</sup>. In basso a destra,

---

<sup>1</sup>Si è preferito lasciare inalterata la distanza del centro della rotella rispetto al centro della camma in direzione orizzontale, che risultava essere 80 mm; per tale motivo il raggio di base attuale risulta leggermente più grande.

nella stessa figura, mostriamo il medesimo meccanismo ruotato di  $\xi = 9.34^\circ$ , che dovrebbe mettere in luce la sostanziale equivalenza della punteria deviata con la scelta, per il suo movimento, di una direzione inclinata rispetto alle alzate fornite dalla sagoma di traslazione, cioè dalla legge delle alzate. Per la precisione, l'angolo  $\xi$  è variabile dovendo essere  $\sin \xi(\alpha) = \epsilon/(R_b + h(\alpha))$ , dove  $h(\alpha)$  è, come sempre, l'alzata all'angolo  $\alpha$ . Utilizzando quindi il *cedente deviato*, i valori di  $\theta_{\max}$  differiscono di poco meno di  $7^\circ$ , come si può notare osservando le figure 9.22 e 12.2; tale differenza ci permetterà, come vedremo a breve, di diminuire l'ingombro della camma. Per maggiore chiarezza, in figura 12.3 sono riportati i grafici dell'angolo di pressione della camma con cedente centrato unitamente a quello della camma con punteria deviata, e la differenza tra i due varia tra valori di poco inferiori a  $7^\circ$  e valori di poco superiori a  $9^\circ$ .

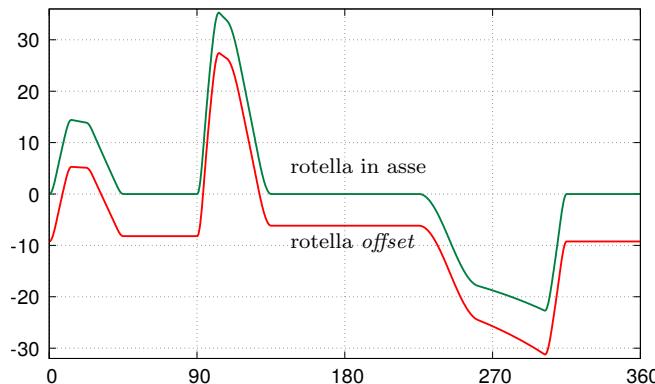


Figura 12.3: *Confronto tra gli angoli di pressione.*

Ancora dalla figura 12.3 apprendiamo che l'*escamotage* della soluzione *offset* si ripercuote in modo negativo sull'angolo di pressione non solo nelle fasi di discesa, ma anche nelle soste, cioè quando il profilo della camma è circolare. Mentre il valore assunto da  $\theta$  durante le discese è in generale indifferente, dobbiamo considerare che spesso, durante le soste, la camma sta esercitando il valore massimo della forza (situazione tipica nelle presse), quindi un valore di  $\theta$  diverso da zero in queste fasi va attentamente valutato. Ciononostante, i benefici tecnici che si ottengono con la riduzione dell'ingombro della camma, quindi dell'intero corpo della macchina, mediante disassamento del cedente vengono sovente ritenuti irrinunciabili. Tale riduzione delle dimensioni della camma si opera naturalmente ridimensionando il raggio di base nella soluzione *offset* fino a che uno dei due limiti costituiti dall'angolo di pressione massimo e dal minimo raggio di curvatura convessa non viene raggiunto. La figura 12.4 riporta tale compromesso:  $\theta_{\max} = 31^\circ$  e  $\rho_{\min} = 13$  mm. Questi

due valori offrono sufficienti garanzie per il buon funzionamento del meccanismo e la camma che li esprime ha un raggio di base ridotto del 25% rispetto a quella non ottimizzata. Quest'ultima è presente nella figura in colore tenue.

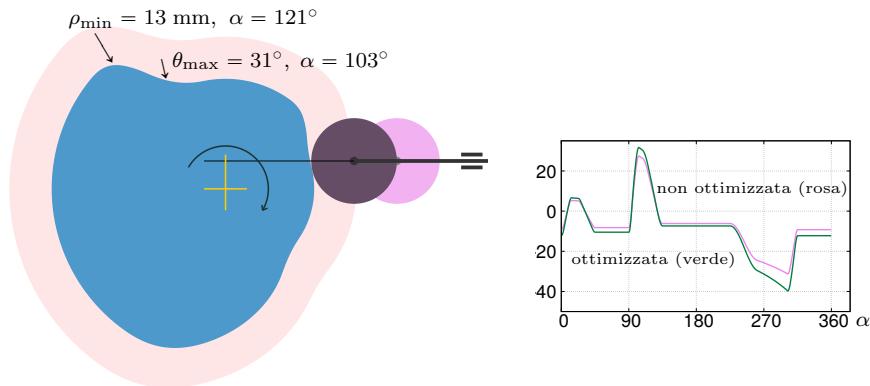


Figura 12.4: *Camma offset con ingombro gli angoli di pressione prima e dopo l'ottimizzazione.*

Stiamo via via approcciando la soluzione tecnica ottimale della profilatura delle camme che entrano nel progetto di una pressa. Occorre ora pensare alla camma coniugata o desmodromica che dovrà garantire il ritorno della mazza. La figura 12.6 riporta il gruppo camma primaria, camma coniugata e il telaio dei cedenti con le relative rotelle. Si può notare che la soluzione *offset* interessa anche la camma desmodromica che presenta, laddove si trova impegnata nel ritorno della punteria, angoli di pressione modesti, come mostrato in figura 12.7. La figura 12.6 evidenzia anche due caratteristiche particolari della camma desmodromica: un raggio di curvatura eccessivamente ridotto e un angolo di pressione troppo elevato. Tale circostanza però non desta alcun timore, presentandosi in zone dove l'eccentrico non è impegnato da alcuna forza<sup>2</sup>.

### 12.3 CENNI ALLA PROFILATURA DI CAMME CON CEDENTE A BILANCIERE

Come accennato a pagina 137, il cedente a punteria traslante viene talvolta sostituito da un bilanciere che, anziché traslare, ruota. Questa soluzione tec-

<sup>2</sup>Il gruppo desmodromico di figura 12.6 è stato prodotto in quattro esemplari. Le otto camme di spessore pari a 25 mm sono state ritagliate, tramite una macchina a *elettroerosione a filo* e controllo numerico, direttamente da una lastra di acciaio 35 NiCrMo 15, già bonificato. Esse azionano due piccole presse la cui forza è pari a circa una tonnellata.

nica offre il vantaggio costruttivo di eliminare le guide di scorrimento della punteria e di offrire in modo nativo l'opportunità di posizionare, in cascata all'azionamento a camma, un sistema articolato, spesso un manovellismo, la cui manovella può essere costituita direttamente dal bilanciere che tasta la camma. È evidente che, a valle del manovellismo o del quadrilatero azionato tramite un cedente a bilanciere, otterremo delle leggi di moto diverse rispetto a quelle implementate sulla camma stessa. La qual cosa non deve apparire in una luce negativa. Spesso infatti il sistema articolato posto in serie all'azionamento a camma favorisce l'ottenimento di una legge delle alzate che soddisfa ancora meglio le esigenze del processo tecnologico che dà origine al progetto. Entrare nel merito della progettazione di un sistema complesso, come può essere un sistema articolato azionato da una camma, esula completamente dallo scopo di questo lavoro. Segnaliamo solo che la maggior parte dei programmi di calcolo commerciali che assistono il progettista di meccanismi permette di affrontare questo tipo di analisi.

Torniamo quindi alla nostra camma a bilanciere, consapevoli di esporre un argomento "zoppo", in quanto molto difficilmente il tema assegnato consiste solo nella rotazione di un bilanciere sia pure con leggi ben precise. In questo caso, la legge di moto  $\beta(\alpha)$  riguarderà la rotazione del bilanciere a partire dalla sua configurazione di riposo. Giusto per fornire un'idea del percorso di progetto per questo tipo di camma abbiamo confezionato una legge di moto tale che, applicata alle rotazioni del bilanciere, non produce movimenti della rotella troppo dissimili rispetto alla legge delle alzate di figura 9.17 se non per la natura diversa dei suoi spostamenti, che in questo caso seguono traiettorie circolari anziché rettilinee. Il risultato della sintesi di tale camma (e della sua coniugata) è riportato in figura 12.8.

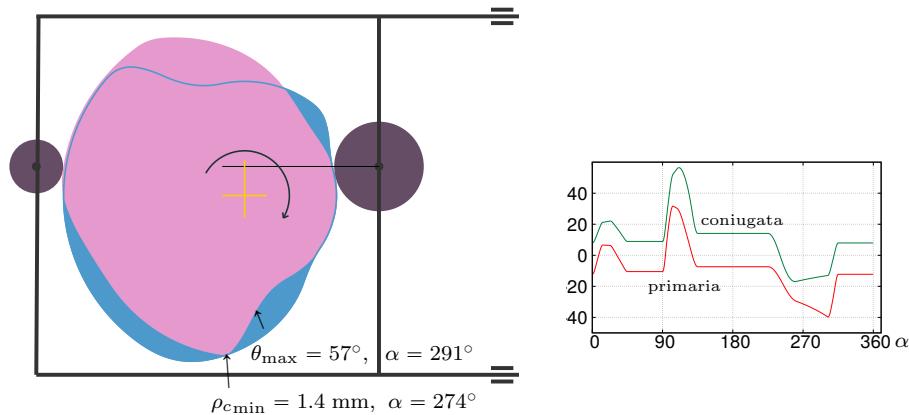


Figura 12.6: Gruppo camma-desmodromica ottimizzato.

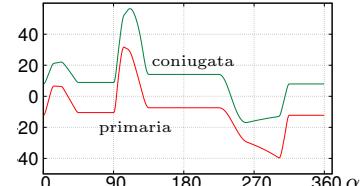


Figura 12.7: Confronto tra gli angoli di pressione.

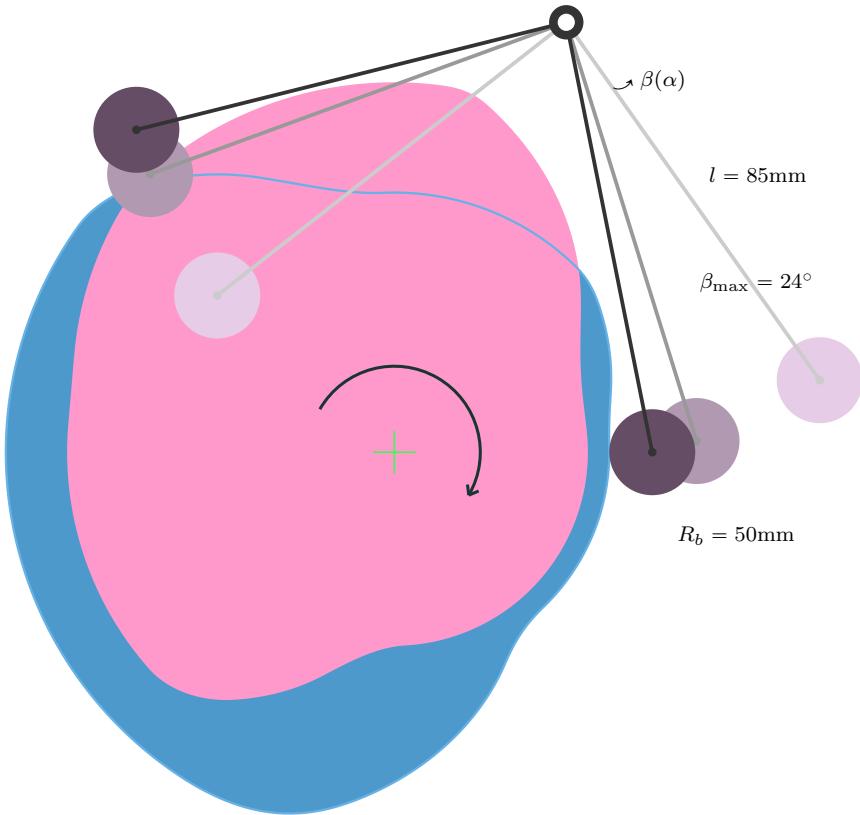


Figura 12.8: *Camma desmodromica con cedente a bilanciere.*

La figura 12.9 mostra la legge di  $\beta(\alpha)$  e quella di accelerazione  $\beta''(\alpha)$ , espresse rispettivamente in gradi sessagesimali e gradi sessagesimali su gradi radianti al quadrato. L’azionamento della camma comporta dunque un movimento oscillatorio del bilanciere che spazia in un arco di  $24^\circ$ . Tale oscillazione consente alla rotella di tracciare un arco di circa 40 mm tastando una camma avente raggio di base  $R_b = 50$  mm tramite un bilanciere di lunghezza  $l = 85$  mm, il che equivale all’incirca all’azionamento operato dalla camma di figura 9.22 con ingombro leggermente più contenuto. Naturalmente è quasi sempre necessario, anche per le camme a bilanciere, progettare la camma coniugata che permette il cosiddetto *positive drive*, cioè l’azionamento sempre condotto da forze di pressione positive. Come abbiamo già accennato, la figura 12.8 riporta anche la camma coniugata e il relativo bilanciere. I due bilancieri, che devono essere considerati come un unico corpo rigido, sono rappresentati con tinte più tenui anche nelle due posizioni di sosta, appena a valle delle due alzate prodotte dalla legge di moto.

Mentre le cautele che riguardano il raggio di curvatura minimo del profilo nella parte convessa rimangono fondamentali anche per queste camme, le

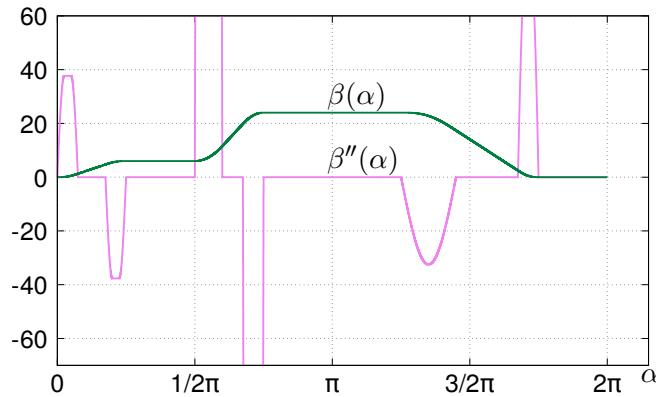


Figura 12.9: Leggi di moto del bilanciere.

restrizioni che riguardano l'angolo di pressione sono in generale più lasche. Il motivo di questa maggiore tolleranza, soprattutto quando la camma, girando come di consueto in senso orario, è disposta rispetto al cedente a bilanciere nella configurazione riportata in figura, cioè quando la camma viene “accarezzata dal cedente”, risiede nella notevole diminuzione del pericolo di impuntamento e di scarso rendimento che si verifica nelle guide di scorrimento di punterie impegnate da notevoli azioni laterali. Rimane tuttavia da considerare l'inefficienza di trasmettere forze fuori asse rispetto alla direzione del moto.

#### 12.4 CENNI ALLA PROFILATURA DI CAMME TASTATE DA PIATTELLO

Come già accennato a pagina 137, si trova nella tecnica una vasta famiglia di camme tastate da un cedente che striscia mediante una porzione di superficie, generalmente piana, sul profilo della camma stessa: le camme tastate da piattello. Queste camme popolano il mondo dell'*automotive* essendo normalmente responsabili dell'apertura e della chiusura dei condotti di aspirazione e di scarico dei gas nei motori a quattro tempi. Il loro ingombro raramente eccede i 40 mm; il cedente può essere una punteria traslante oppure un bilanciere e il contatto tra camma e cedente è quasi sempre garantito da una molla pre-caricata, anche se esistono esempi notevoli di azionamenti a camme, per valvole di motori endotermici, di tipo desmodromico. Il percorso che abbiamo seguito per la sintesi delle camme tastate da rotella rimane valido anche in quest'ambito benché non sempre i progettisti di camme per motori partono dalla legge dell'accelerazione. Quest'ultima rimane comunque una caratteristica importantissima dell'azionamento in quanto anche da essa dipendono i malfunzionamenti del motore ad alti regimi di rotazione; quando cioè le valvole, trascinate dalle loro forze d'inerzia, si staccano dalla

camma nonostante la presenza delle molle, causando il cosiddetto *sfarfallamento*. Ciononostante, in ambito motoristico, non è infrequente privilegiare la legge delle alzate partendo nel processo di sintesi da questa, e verificare a posteriori che essa non produca accelerazioni inaccettabili.

Se tentassimo di disegnare una camma per motore a quattro tempi provvista delle proporzioni geometriche caratteristiche in questo campo, ed eseguissimo questo tentativo adagiando ingenuamente sul tamburo della camma una legge di moto ottenuta disponendo in serie un paio delle solite leggi trapezoidali modificate, come quelle di figura 12.11<sup>3</sup>, otterremmo il pessimo risultato già illustrato in figura 9.21 e di nuovo proposto in figura 12.10.

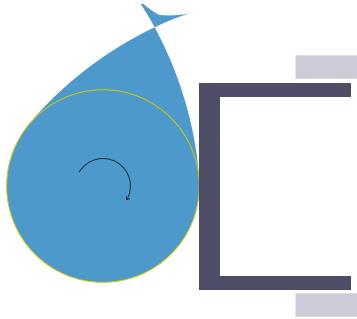


Figura 12.10: *Camma a piattello inservibile.*

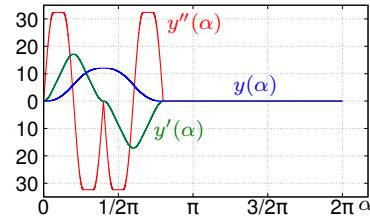


Figura 12.11: *Approccio ingenuo alla camma con piattello.*

L'esperimento numerico è stato condotto rispettando i seguenti parametri: raggio della porzione circolare della camma  $R_c = 14 \text{ mm}^4$ , alzata massima  $h = 12 \text{ mm}$ , angolo di salita  $\alpha_s = 75^\circ$  e angolo di discesa  $\alpha_d = 75^\circ$ . Questi dati corrispondono all'incirca a quelli delle camme di aspirazione di un motore Alfa Romeo che equipaggiava la Giulia 1600 cc GTA. Il marcato sottaglio, che la figura 12.10 evidenzia, si spiega pensando il piattello come una rotella di raggio  $r_r$  infinito che tasta una camma di raggio di base  $R_b$  altrettanto infinito dove la differenza  $R_b - r_r = R_c$ . È opportuno a questo punto ricordare la formula 9.16 che fornisce il raggio di curvatura del profilo della camma, una volta sottratto quello della rotella. Avremo

$$\rho = \frac{\left[ \frac{y'^2}{(R_b+y)^2} + 1 \right]^{3/2} (R_b + y)}{1 - \frac{y''}{(R_b+y)} + \frac{2y'^2}{(R_b+y)^2}} - (R_b - R_c), \quad (12.3)$$

<sup>3</sup>In questa e nelle figure analoghe che seguiranno è sottintesa la misura delle accelerazioni in millimetri su secondo quadro, delle velocità in millimetri al secondo e infine dell'alzata in millimetri.

<sup>4</sup>Ricordiamoci la scelta, operata a suo tempo, di chiamare raggio di base  $R_b$  quello del percorso del centro della rotella. Come abbiamo detto in altro luogo moltissimi autori chiamano raggio di base quello della porzione circolare ad alzata zero del profilo fisico. Qui viene indicato con  $R_c$ .

quindi per elevati valori di  $R_b$

$$\lim_{R_b \rightarrow \infty} \rho = \lim_{R_b \rightarrow \infty} \frac{(R_b + y)}{1 - \frac{y''}{(R_b + y)}} - (R_b - R_c). \quad (12.4)$$

Mediante pochi passaggi, che lasciamo al lettore, otteniamo

$$\lim_{R_b \rightarrow \infty} \rho = R_c + y + y'', \quad (12.5)$$

riportata con altri simboli anche in [17], pag. 67. Il pericolo di profilo intrecciato si manifesterà dunque per valori negativi di  $y''$  e, come sempre, tale pericolo è scongiurato dal crescere delle dimensioni della camma, cioè di  $R_c$ . Occorre quindi ricercare leggi di moto con bassi valori assoluti di accelerazione negativa, compatibilmente con l'esigenza di avere valori non eccessivi di accelerazione positiva. In figura 12.13 è rappresentata una legge idonea a ottenere la camma che stiamo cercando e che rappresentiamo in figura 12.12. Si noti che le due leggi di accelerazione sono profondamente asimmetriche e che i bassi valori assoluti di accelerazione negativa risultano indispensabili laddove anche il valore dell'alzata è modesto, come si evince facilmente dalla formula 12.5.

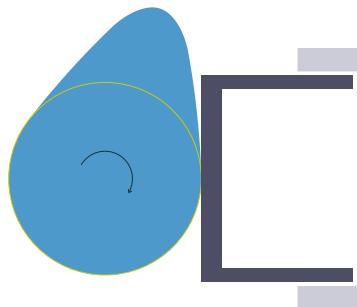


Figura 12.12: *Camme tastata da piattello ottenuta da leggi trapezoidalmente modificate.*

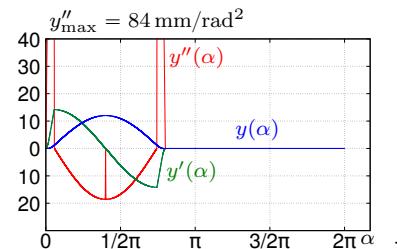


Figura 12.13: *Legge di moto composta da due leggi trapezoidali modificate adatta per camma-piattello.*

Il cedente con piattello non è azionato, in generale, dal punto del profilo che si trova sull'asse del cedente, perché il contatto tra il profilo stesso e il piattello può trovarsi altrove. È il caso di avvertire il lettore che per le camme tastate da piattello l'angolo di pressione è sempre costante e, nel solo caso che abbiamo trattato, vale a dire quello che presenta l'asse della punteria ortogonale alla superficie del piattello stesso, risulta essere  $\theta = 0$ . Da alcuni rilievi, eseguiti sulla camma della nota casa automobilistica, possiamo affermare che essa non coincide con quella di figura 12.12, anzi a un occhio appena allenato le due camme appaiono alquanto difformi. Ci è

sembrato così di qualche interesse eseguire un tentativo numerico volto alla interpolazione dei pochi valori rilevati dal profilo della camma originale e tratti da un vecchio disegno a nostra disposizione. Tale interpolazione, svolta tramite *spline cubiche*, fornisce il profilo della camma<sup>5</sup> riportato in figura 12.14, dove le crocette indicano i pochi punti misurati.

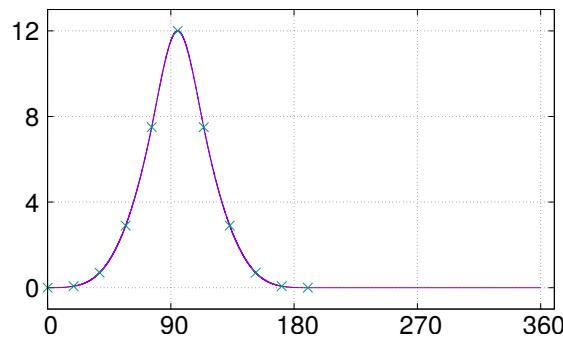


Figura 12.14: Spline del profilo della camma.

Aggiungendo questa “finta” sagoma di traslazione ad un tamburo con  $R_b = 14$  mm, comportandoci cioè come se la camma dovesse essere in seguito tastata da una punta, otteniamo la figura 12.15 che mostra un eccentrico praticamente identico a quello realmente impiegato nella citata automobile.

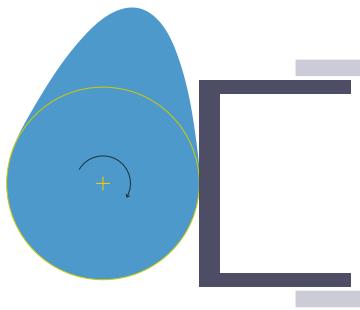


Figura 12.15: Camma con profilo ottenuto dalla spline di fig. 12.14.

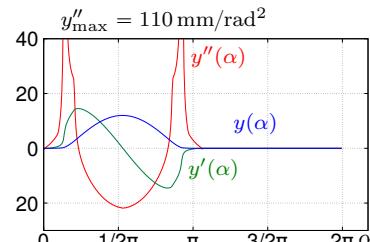


Figura 12.16: Effettive leggi di moto.

La camma in questione è però tastata da un piattello anziché da una punta. È interessante perciò ricavare le leggi di moto effettivamente ottenute, che

<sup>5</sup>Si tratta del profilo effettivo della camma, cioè di una sagoma di traslazione che aggiunta al tamburo della camma stessa produrrà lo stesso contorno dell'eccentrico rilevato dal disegno che abbiamo a disposizione. Questa sagoma di traslazione non coincide pertanto con la legge delle altezze del piattello che in seguito riporteremo.

riportiamo in figura 12.16. Pur riconoscendo in tali leggi molte somiglianze con quelle canoniche di figura 12.13, prendiamo atto che la loro forma contiene variazioni impossibili da ottenere sfruttando solamente le possibilità offerte dalla legge di moto trapezoidale modificata. È il caso di aggiungere che la corretta lubrificazione gioca un ruolo fondamentale nelle camme tastate da piattello. Mentre si possono trovare meccanismi camma-rotella sia immersi in bagno d'olio, sia lubrificati con maggior superficialità, è praticamente impossibile pensare a una coppia camma-piattello che non sia fornita di lubrificazione forzata e costante, come effettivamente avviene nei motori a combustione interna a quattro tempi.



## Bibliografia

- [1] **Bruno Finzi**, *Meccanica Razionale*, 1 Vol., terza edizione, Zanichelli, Bologna, 1959.
- [2] **Herbert Goldstein**, *Classical Mechanics*, second edition, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1980.
- [3] **Tullio Levi-Civita, Ugo Amaldi**, *Compendio di Meccanica Razionale*, 2 Voll., seconda edizione riveduta, Zanichelli, Bologna, 1938.
- [4] **Edmund T. Whittaker**, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, fourth edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1947.
- [5] [Aristotele], *Meccanica*, a cura di Maria Fernanda Ferrini, Bompiani, Milano, 2010.
- [6] **Ernst Mach**, *La Meccanica nel suo Sviluppo Storico-Critico*, Bollati Boringhieri, Torino, 1977.
- [7] **Franco Giordana**, *Lezioni di Meccanica delle Macchine*, Edizioni Spiegel, Milano, 2001.
- [8] **Richard S. Hartenberg, Jacques Denavit**, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill, New York, 1964.
- [9] **Ottorino Sesini**, *Meccanica Applicata alle Macchine, Parte Prima, Cinematica*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1964.
- [10] **Massimo Callegari, Pietro Fanghella, Francesco Pellicano**, *Mecanica Applicata alle Macchine*, seconda edizione, Città Studi Edizioni, Milano, 2017.
- [11] **Giovanni Battista Punzi**, *Corso Superiore Completo di Meccanica Generale ed Applicata, Volume Secondo*, seconda edizione riveduta, Hoepli, Milano, 1978.
- [12] **Georges Henriot**, *Ingranaggi. Trattato teorico e pratico*, Vol. 1 e Vol. 2, Tecniche Nuove, Milano, 1977.

- [13] **Massimo Guiggiani**, *Generazione per Inviluppo di Ruote Dentate ad Evolvente*, in <<http://docenti.ing.unipi.it/guiggiani-m/guiggiani-ruote-dentate.pdf>>.
- [14] **Guido Ruggieri, Paolo Righettini**, *Ruote Dentate con Spostamento del Profilo*, McGraw-Hill, Milano, 2003.
- [15] **George H. Martin**, *Kinematics and Dynamics of Machines*, second edition, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [16] **Ottorino Sesini**, *Meccanica Applicata alle Macchine, Parte Terza, Le Coppie Elementari nelle Macchine*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1964.
- [17] **Pier Luigi Magnani, Guido Ruggieri**, *Meccanismi per Macchine Automatiche*, UTET, Torino, 1986.
- [18] **John A. Hrones, George L. Nelson**, *Analysis of the Four-Bar Linkage. Its Application to the Synthesis of Mechanisms*, The MIT Press, Cambridge (MA), 1951.
- [19] **Jacob Pieter Den Hartog**, *Mechanics*, Dover Publications, New York, 1948.
- [20] **Samuel Molian**, *The Design of Cam Mechanisms and Linkages*, Constable, London, 1968.
- [21] **Stephen P. Timoshenko, James N. Goodier**, *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, New York, 1951.
- [22] **Jules Grossmann, Hermann Grossmann**, *Lessons in Horology*, 1 Vol., The Keystone, Philadelphia, 1905.
- [23] **BS 978, Part 2**, *British Standard for Gears for Instruments and Clockwork Mechanisms, Part 2, Cycloidal type Gears*, London, 1952.

## Indice Analitico

- accelerazione
  - assoluta, 28
  - centripeta, 21
  - di Coriolis, 28
  - di trascinamento, 28
  - geometrica, 123
  - normale, 20
  - relativa, 28
  - tangenziale, 20, 21
- accesso, 82
- accoppiamento
  - di forma, 138
  - di forza, 138
- addendum, 75
- albero a camme, 122
- angoli
  - di Cardano, 145
  - di Eulero, 145
  - nautici, 145
- asse
  - del Mozzi, 150
  - di istantanea rotazione, 151
- atlanti di quadrilateri, 98
- atto di moto, 17
- auto-complementarità, 53, 67
- autovettore, 147
- beccheggio, 145
- biella, 11, 92
  - curve di, 97
  - punto di, 44, 97
- bilanciere, 11, 92
- bottone di manovella, 103, 107
- camme, 43, 121, 122, 129, 170
- a bilanciere, 173
- cedente a piattello, 175
- coniugata, 138
- desmodromica, 138
- lineari, 122
- offset, 136, 170
- cedente, 44
  - a punteria, 131
  - deviato, 171
- centro
  - delle accelerazioni, 20
  - di istantanea rotazione, 17
  - istantaneo di rotazione, 17
- Chasles, teorema di, 14
- ciclo macchina, 123
- cicloide, 153
- cinematica del corpo rigido, 143
- cinghie di trasmissione, 43
- circonferenza
  - di base, 68
  - di piede, 71
  - di testa, 75
  - primitiva, 48
- coefficiente
  - di accelerazione, 126
  - di velocità, 126
- coppia
  - prismatica, 91
  - rotoidale, 91
- corpo rigido, 2, 11
- correzione
  - adimensionale, 75
  - con variazione interasse, 83
  - profilo, 81

- creatore, 76
- cremagliera, 67
- cursore, 101
- curvatura
  - del profilo, 132
  - della traiettoria, 23
  - formula, 134
- dedendum, 75
- dentiera
  - di riferimento, 74
  - Maag, 76
  - normalizzata, 75
- diagramma delle alzate, 122, 123
- doppio prodotto vettoriale, 20
- eccentrici, 43, 121
- epiciclo, 153
- epicicloide, 153
- equivalenza cinematica, 108
- evolvente, 69
- Fairbairn, guida di, 111
- fattore di ricoprimento, 79
- fresatura di forma, 89
- giunto di Oldham, 116
- glifo, 101
  - di Fairbairn, 111
  - oscillante, 108
  - rotante, 108, 114
- GPS, 13
- Grashof, regola di, 92
- guida di Fairbairn, 110
- guide rettilinee approssimate, 99
- imbardata, 145
- ingranaggi, 43
- involute function, 85
- ipocicloide, 153
- jerk, 127
- legge
  - accelerazione costante, 127
  - accelerazione sinusoidale, 127
  - trapezoidale modificata, 128
- leggi di moto, 44, 122
  - unitarie, 125
- limatrice, 113
- macchina, 6
- manovella, 11, 92
- manovellismo, 44, 97
  - di spinta, 101
  - non ordinario, 101, 108, 109
  - ordinario, 101, 102
  - ordinario deviato, 102
- meccanica classica, 1
- meccanismo a ritorno rapido, 110
- modulo, 49, 74
- moti piani, 13
- motori, 43
- numero minimo di denti, 77
- nutazione, 145
- osservatore
  - assoluto, 27
  - relativo, 27
- parallelogramma articolato, 94
- passo, 49, 74
  - base, 83
- piano mobile, 15
- piattello, 136
- piede di biella, 103
- polare
  - fissa, 17, 57
  - mobile, 17, 57
- pompe a lobi, 163
- posizione, 12
- precessione, 145
- primitiva
  - del moto, 64
  - di taglio, 75, 81
- problema dei moti relativi, 26
- prodotto vettoriale, 16
- profili

- coniugati, 53
  - di assortimento, 53, 62, 73
- profilo centro rotella, 132
- punteria deviata, 136
- quadrilateri
  - articolati, 91
  - articolati piani, 92
- quadrilatero
  - squilibrio, 96
- raggio di base, 129
- rapporto di trasmissione, 46
- recesso, 82
- regola della mano destra, 17, 37
- retta delle pressioni, 78
- ritorno rapido, 95
- Rivals, teorema di, 20
- rollio, 145
- rotazione, 14, 145
- ruote
  - a lanterna, 162
  - a lobi, 163
  - asimmetriche, 75
  - corrette, 81
  - dentate, 11, 43, 45
  - di assortimento, 50
  - di frizione, 46
  - elicoidali, 88
  - non corrette, 75
  - per orologeria, 164
- sbattimento, 84
- segmento orientato, 16
- sfarfallamento, 176
- sistema di riferimento, 14
- sistemi
  - articolati, 43, 44, 91
  - articolati piani, 91
  - sottotaglio, 133
  - sottotaglio dei denti, 71
  - spline, 178
  - spostamento, 13, 14
    - elicoidale, 150
  - strutture reticolari, 92
- tachimetro, 12
- telaio, 11
- teorema
  - di Chasles, 14, 150
  - di Coriolis, 28
  - di Kennedy, 39
  - di Rivals, 20
- teoria dei modelli, 12
- terna
  - intrinseca, 22
  - orientata, 143
- traiettoria, 22
- trasformazioni piane, 54
- traslazione, 15
- trasmissione
  - del moto, 43
  - omocinetica, 52, 94
- trocoide, 71
- velocità, 12–14
  - angolare, 14
  - assoluta, 28
  - di trascinamento, 28
  - geometrica, 123
  - relativa, 27, 28
- versore
  - binormale, 22
  - normale, 21
  - tangente, 21