Równania różniczkowe

Równania różniczkowe zwyczajne I-go rzędu to równaie postaci

$y'=f(x,y)$ gdzie $y'=dy/dx$, a f jest funkcję dwóch zmiennych x oraz y

Szukamy rozwiązania czyli funkcji postaci $y=y(x)$, która jest różniczkowalna na przedziale <a,b> (bo tylko taka moze być rozwiazaniem równania rózniczkowego). Takich rozwiazań jest nieskończenie wiele (jeśli mamy y(x) to również funkcja g(x)=y(x)+stała bedzie rozwiązaniem równania różniczkowego.
Numerycznie nie znajdziemy wzoru na y(x), ale możemy znaleźć wartości y odpowiadające x-som z przedziału <a,b>. W analitycznym rozwiazaniu równań różniczkowych zawsze pojawia nam sie stała całkowania, którą wyznaczamy w oparciu o warunek początkowy (czyli mamy daną wartość $y(a)= y_a$). Podobnie w numerycznym rozwiązaniu potrzebujemy warunku początkowego albo tzw warunków brzegowych czyli $z(y(a),y(b))=0$

$y'(x)=f(x,y)$

Metoda Rungego-Kutta

Wartości funkcji y (x) w punktach kolejnych [zaczynając od początku przedziału „a”, gdzie mamy warunek poczatkowy y(a) czyli znana wartość] wyznaczamy w oparciu o wartości funkcji f(x,y) w kilku punktach (podobnie jak w poprawionej metodzie Eulera czy też Heuna).

Zakładamy, że wartości funkcji bedziemy szukać w punktach $x_{i+1} = a+(i+1)*h$ (dla i=0,1,2,..., N-1). Wartość $h=(b-a) / N$

Ogólnie rozwiązanie w metodzie rzędu (M-1) możemy zapisac w postaci:

$$y_{i+1}=y_i + h \left(\Sigma \left(c_j k_j\right) \right)$$ - suma od j=1 do M

Gdzie

$k_1= f(x,y)$

..

$k_j= f(x+a_j h, y+a_j k_{j-1})$ są funkcjami określonymi przez równanie różniczkowe

Do rozwiązania potrzebna jest więc tylko znajomość współczynników a_j, c_j

Metoda Rungego-Kutta 3-go rzędu

Wartości współczynników a_j oraz c_j podaje się najcześciej w postaci macierzy Butchera.

Dla M=4 mamy macierz postaci

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \color{blue}{a_j} & & & \\
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \quad \color{red}{c_j}
\end{array}
$$

Stąd wartości k

$$k_1 = f\left(x,\ y\right)$$

$$k_2 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x + \tfrac{1}{2}h,\ y + \tfrac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f\left(x + h,\ y + hk_3\right)$$

Metoda Rungego-Kutty – 4tego i 5-go rzędu

Wartości współczynników a_j oraz c_j podaje się najczęściej w postaci macierzy Butchera.

Dla M=5 oraz M=6 mamy macierz/e postaci

a

$$
\begin{array}{c|cccccc}
0 & 0 & & & & & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & & & & \\
\frac{3}{8} & \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & & & & \\
\frac{12}{13} & \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & & & \\
1 & \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & & \\
\frac{1}{2} & -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{4104} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & \\
\hline
 & \frac{25}{216} & 0 & \frac{1408}{2565} & \frac{2197}{4104} & -\frac{1}{5} & \\
\hline
 & \frac{16}{135} & 0 & \frac{6656}{12825} & \frac{28561}{56430} & -\frac{9}{50} & \frac{2}{55}
\end{array}
$$

C do 5-go rzedu

C do 6-go rzedu

Metoda RKF45

Metoda Rungego-Kutta-Fehlberga wykorzystywana w MATLAB.
Najpierw liczymy y_{i+i} z metody niższego rzędu (np.4) i tę wartość traktujemy jako yi prz podstawieniu do metody wyższego rzędu

Zaleta – prosty wzór na błąd pozwala szybko skorygować wybrana wartośc kroku h

$$\varepsilon = \frac{1}{36}k_1 - \frac{128}{4275}k_3 - \frac{2197}{75240}k_4 + \frac{1}{50}k_5 + \frac{2}{55}k_6$$