Numerične metode 2, 2016/2017

2. domača naloga

Nalogo rešite v programu Matlab ali Octave. Datoteke, uporabljene pri reševanju, oddajte v ZIP datoteki `ime_priimek_vpisnastevilka_dn2.zip` v spletni učilnici najkasneje do 31. maja 2017.

1. Dane so točke $x_i = ih$, $i = -1, 0, \ldots, 21$, z razmikom $h = 1/20$. Z uporabo simetričnih diferenc
$$S_1 f(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}, \qquad S_2 f(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})}{h^2}$$
aproksimirajte prvi in drugi odvod funkcije $f(x) = e^{-2x} + \cos(5x)$ v točkah iz $\boldsymbol{x} = \{x_i;\ i = 0, 1, \ldots, 20\}$. Narišite odsekoma linearni funkciji, ki interpolirata izračunane približke, ter ju primerjajte z grafoma prvega in drugega odvoda f. Izračunajte tudi napaki $\|f' - S_1 f\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$ in $\|f'' - S_2 f\|_{\infty,\boldsymbol{x}}$.

2. Izračunajte približke za vrednosti integralov
$$\int_0^1 x\, e^x \,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^3 xy\, e^{x+y} \,\mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^3 \mathrm{d}y \int_{-\frac{1}{2}}^0 xyz\, e^{x+y+z} \,\mathrm{d}z$$
z uporabo sestavljenega Simpsonovega pravila. Na intervalu $[0, 1]$ uporabite deset osnovnih pravil, na intervalu $[1, 3]$ petnajst osnovnih pravil in na intervalu $[-1/2, 0]$ sedem osnovnih pravil. Dobljene rezultate primerjajte s točnimi vrednostmi.

3. Runge–Kutta metoda je podana z Butcherjevo shemo
$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/3 & 1/3 & & & \\ 2/3 & -1/3 & 1 & & \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \\ \hline & 1/8 & 3/8 & 3/8 & 1/8 \end{array}$$
Uporabite jo za reševanje diferencialne enačbe $y'(x) = 1 + (x - y)^2$, $x \in [3, 4]$, pri razmiku $1/10$.
   (a) Poiščite približek za $y(4)$ pri začetnem pogoju $y(3) = 1$.
   (b) S pomočjo ukaza `fzero` poiščite približek za $y(3)$ pri končnem pogoju $y(4) = 5$.

4. Koeficient matrike $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ na mestu (i, j), $i, j \in \{1, 2, \ldots, 10\}$, je podan z $(-1)^{1-i-j}\,|i - j|$. Z uporabo inverzne potenčne metode pri začetnem vektorju $(1, 0, \ldots, 0)$ poiščite približke za lastne vrednosti matrike A, ki se po absolutni vrednosti najmanj razlikujejo od 0, 2/3, 3/2 in 3. Napravite vsaj toliko korakov metode, da se izračunani približki za manj kot 10^{-8} razlikujejo od tistih, ki jih dobite z ukazom `eig`.