On va utiliser la méthode d'Euler pour approximer la courbe d'une fonction f (si elle existe) telle que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\begin{cases} f'(x) = f(x)\,, & \forall x \in \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Cette méthode utilise l'approximation affine d'une fonction dérivable. Graphiquement cela revient à confondre la courbe de la fonction avec sa tangente sur un petit intervalle. La longueur de cet intervalle est le *pas* de la méthode, on le note h. On fera ensuite tendre le pas vers zéro. On va construire une suite de points A_0, A_1, A_2, ...dont on notera les coordonnées $A_n(x_n\,;y_n)$ et telle que la ligne polygonale joignant ces points approxime la courbe de la fonction f cherchée.

Méthode

① **Point de départ :** Comme $f(0) = 1$ on place le premier point A_0 de coordonnées $A_0(0;1)$. Comme $f'(0) = f(0)$, on trace sur l'intervalle $[0\,;h]$ la droite passant par A_0 et de coefficient directeur : $y_0 = 1$.

② **Récurrence :** À chaque fois on trace la droite passant par A_n de coefficient directeur y_n (car $f'(x_n) = f(x_n) = y_n$) sur un intervalle de longueur h. Alors A_{n+1} est le point de cette droite d'abscisse : $x_{n+1} = x_n + h$

---

1. Commençons avec un pas assez grossier : $h = 1$.

a. Placer A_0 et tracer sur l'intervalle $[0\,;1]$ la droite passant par A_0 et de coefficient directeur $y_0 = 1$.

b. Le point A_1 est l'autre extrémité de ce segment. Donner les coordonnées de A_1 (ce sont donc x_1 et y_1 qui vous relevez graphiquement)

c. On recommence, en partant de A_1 : Tracer sur l'intervalle $[1\,;2]$ la droite passant par A_1 et de coefficient directeur y_1. Le point d'abscisse 2 sur cette droite est A_2.

d. Selon la même méthode, placer A_3.

e. Prouver que la suite des ordonnées est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , y_{n+1} = 2y_n \quad \text{et} \quad y_0 = 1$$

f. En déduire que pour n dans $\mathbb{N}$: $f(n) \simeq 2^n$.

2. Reprendre la même procédure pour $h = 0,5$. On complètera aussi « dans l'autre sens » vers les réels négatifs, en utilisant un pas de $-0,5$ (toujours en partant de A_0).

3. Prouver de manière générale que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ , \frac{y_{n+1} - y_n}{h} = y_n$$

4. En déduire l'expression du terme général de la suite y_n.

5. Comme la suite des abscisses vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ x_{n+1} = x_n + h \quad \text{et} \quad x_0 = 0$$

Déterminer l'expression du terme général x_n pour n dans $\mathbb{N}$.

6. Par cette méthode, y_n est censé donner une valeur approchée de $f(x_n)$. Soit un réel x. On veut obtenir une valeur approchée de $f(x)$, alors on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $h = \frac{x}{n}$.

a. Déterminer l'expression de x_n dans ce cas, et jusftier que le pas h tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini.

b. Prouver que :

$$y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Bilan

On n'a pas prouvé que la méthode d'Euler était une « bonne méthode » c'est à dire qu'on obtient bien ainsi une approximation de la fonction cherchée. Mais si la méthode converge bien, alors notre fonction f existe et elle vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$