Resume en Mathematiques de T$^{\text{ale}}$

Paul PLANCHON

Version du 23 septembre 2016

Table des matières

Chapitre I

Les suites, rappels de premiere

A Generalitees sur les suites

A.1 Definitions

Propriété 1. *Un raisonnement par recurrence ne s'applique que pour une proposition construite sur $\mathbb{N}$. Elle se passe en 2 etapes :*

1. *L'initialisation : On verifie que la proposition est vraie pour la premiere valeur de l'entier naturel. (en general, $n = 0$, parfois $n = 1$ ou $n = 2$).*
2. *L'heredite : cette etape se coupe en 2 etapes :*
   - **a.** *L'hypothese de recurence : On suppose que la proposition est vraie pour k.*
   - **b.** *On demontre que la proposition est vraie pour le successeur de k, $k + 1$.*

A.2 Suites bornees

— $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant M$
— $\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant m$
— $\exists (m; M) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant U_n \leqslant M$

A.3 Monotomie d'une suite

Définition 1. Soit (U_n) une suite,

1. On dit que (U_n) est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \geqslant 0$
2. On dit que (U_n) est decroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \leqslant 0$

(Si les inegalites sont strictes, on dit que la suite sera, respectivement, strictement croissante et strictement decroissante).

Remarque :
Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors :

1. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$, alors la suite est croissante
2. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$, alors la suite est decroissante

A.4 Representation graphique d'une suite explicite

Définition 2. Une suite est definie de maniere explicite si (U_n) s'exprime directement en fonction de n, cad, $U_n = f(n)$.

A.5 Theoremes divers

Propriété 2. *On considere une suite (U_n) qui est definie de maniere explicite, cad $U_n = f(n)$, alors :*

si f est croissante alors (U_n) aussi.

si f est decroissante alors (U_n) aussi.

si f est constante alors (U_n) aussi.

ATTENTION, LES RECIPROQUES SONT FAUSSES

Propriété 3. *Toute suite croissante est minoree par son premier terme.*

Toute suite decroissante est majoree par son premier terme.

B Suites arithmetiques et geometriques

$\exists n \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r$

B.1 Theoremes Somme

Propriété 4. *Soit (U_n) une suite de raison r et de premier terme U_0.*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nr$

2. $\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{(nombre\ de\ terme)(premier\ terme\ +\ dernier\ terme)}{2}$

Propriété 5. *Soit (U_n) une suite s.a. de raison r et de premier terme U_a alors,*

1. $U_n = U_0 + (n-a)r$

2. $U_a + U_{a+1} + ... + U_n = \frac{(n-a+1)(U_a+U_n)}{2}$

$\exists n \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q * U_n$

Propriété 6. *Soit U_n une suite geo. de raison q ($q \neq 1$ et $q \neq 0$) et de premier terme U_0.*

1. $U_n = U_0 * q^n$

2. $\sum_{k=0}^{n} U_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 * \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Cas particuliers :

1. *pour $q = 1$, $U_n = U_0$, donc, $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1)U_0$.*

2. *pour $q = 0$, $U_n = 0$ avec $n \geqslant 1$, $U_0 + U_1 + ... U_n = U_0$*

B.2 Formules importantes a savoir

Propriété 7. *Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ alors $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$*

Chapitre II

Convergence et divergence des suites

A Convergence d'une suite

A.1 Partie entiere d'une suite

Propriété 8. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entiere de x, notee, $E(x)$, l'unique entier verifiant :*

$$E(x) \leqslant x < 1 + E(x)$$

Propriété 9. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ / \ (\forall n \in \mathbb{N}),\ n \geqslant n_0)\ |U_n - l| < \varepsilon$

A.2 Beaucoup de theoremes

Propriété 10. *Si une suite est convergente, alors sa limite est* ***unique****.*

Propriété 11. *Si une suite est convergente, alors elle est bornee.*

Propriété 12. *On considere une suite u_n qui converge vers l alors,*

1. *si (u_n) est croissante, on aura $\forall n \ \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant l$*
2. *si (u_n) est decroissante, on aura $\forall n \ \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant l$*

Propriété 13. *Toute suite constante est convergente.*

Propriété 14. *On considere deux suites (u_n) et (v_n). On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$, on ait, $u_n \leqslant v_n$*
On suppose que (u_n) converge vers l et (v_n) vers l'. Alors, $l \leqslant l'$.

Propriété 15. *Soit (u_n) une suite arithmetique,*

1. *On suppose que u_n est majoree par M et qu'elle converge vers l. Alors, $l \leqslant M$.*
2. *On suppose que u_n est minoree par m et qu'elle converge vers l. Alors, $l \geqslant M$.*

A.3 Theoreme fondamental

Propriété 16.

1. *Toute suite croissante et majoree est alors convergente.*
2. *Toute suite decroissante et minoree est alors convergente.*

Propriété 17. *On considere 3 suites u_n, v_n, w_n. On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0$.*
On a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
On suppose que les suites extremes u_n et w_n sont convergente vers l, alors v_n converge aussi vers l.

A.4 Les limites fondamentales

Propriété 18. *Limites a connaitre :*

1. $\lim_{n\to\infty}(\frac{k}{n}) = 0$ *avec* k *une constante.*
2. $\lim_{n\to\infty}(\frac{k}{n^2}) = 0$ *avec* k *une constante.*
3. $\lim_{n\to\infty}(\frac{k}{n^p}) = 0$ *avec* k *une constante et* $p \in \mathbb{N}^*$.
4. $\lim_{n\to\infty}(\frac{k}{\sqrt{n}}) = 0$ *avec* k *une constante.*

Propriété 19. *Soit* (u_n) *une suite, si* $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ *alors* $\lim_{n\to\infty} u_{n+1} = l$ $\lim_{n\to\infty} u_{n+p} = l$ *(avec* $p \in \mathbb{N}^*$*)*