Cours de Mathematiques en T$^{\text{ale}}$

Paul PLANCHON

VERSION DU 18 SEPTEMBRE 2016

Table des matières

Chapitre I

Les Suites, revisions de Premiere

A Les suites et raisonnement par recurrence

Définition 1. On appelle suite numerique ou suite une fonction definie sur $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$).
On ecrit : $U : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $n \to U(n)$ note U_n.

Exemple:

1. $U_n = n^2 - 2n + 5$ est une suite definie de maniere explicite.
2. $U_m = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 1}$ et $U_0 = 1$ est une suite definie de maniere recurente.

Dans le premier cas, on ecrit : "$U_n = f(n)$"

Dnas le second cas, on ecrit : "$U_n + 1 = g(U_n)$"

A.1 Raisonnement par recurence

Propriété 1. *Un raisonnement par recurrence ne s'applique que pour une proposition construite sur $\mathbb{N}$. Elle se passe en 2 etapes :*

1. *L'initialisation : On verifie que la proposition est vraie pour la premiere valeur de l'entier naturel. (en general, $n = 0$, parfois $n = 1$ ou $n = 2$).*
2. *L'heredite : cette etape se coupe en 2 etapes :*
   a. *L'hypothese de recurence : On suppose que la proposition est vraie pour k.*
   b. *On demontre que la proposition est vraie pour le successeur de k, $k + 1$.*

Exemple: On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + ... + n$, montrer que $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$:

- Initialisation : pour $n = 0$, $S_0 = 0$ et $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = 0$, donc $S_0 = 0$.
- Heredite : On suppose qu'il existe un entier nature p / $S_p = \frac{p(p+1)}{2}$, alors :
  - $S_{p+1} = 0 + 1 + 2 + ... + (p - 1) + p + (p + 1)$
  - $S_{p+1} = S_p + (p + 1)$
  - $S_{p+1} = \frac{p(p+1)}{2} + (p + 1)$
  - $S_{p+1} = (p + 1)[\frac{p}{2} + 1]$
  - $S_{p+1} = (p + 1)[\frac{p+2}{2}]$
  - $S_{p+1} = \frac{(p+1)[(p+1)+1]}{2}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

A.2 Suites bornees

Définition 2. Soit (U_n) une suite.

1. On dit que la suite (U_n) est majoree s'il existe un reel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n) \leqslant M$

2. On dit que la suite (U_n) est minoree s'il existe un reel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}, (U_n) \geqslant m$

3. On dit que la suite est bornee si elle est majoree et minoree.

IMPORTANT :

— $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant M$
— $\exists m \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant m$
— $\exists (m; M) \in \mathbb{R}^2 / \forall n \in \mathbb{N}, m \leqslant U_n \leqslant M$

Remarque. $(m; M) \in \mathbb{R}^2$ signifie que $m \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$

Exemple: Ces trois suites sont bornees par -1 et 1.
— $U_n = \sin(n)$
— $V_n = \cos(n)$
— $W_n = (-1)^n$
Preuve :

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$

$\Rightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} (-1)^n = 1 \text{ si n est pair} \\ (-1)^n = -1 \text{ si n est impair} \end{cases}$
donc $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$

Exemple: $U_n = \frac{2U_n+1}{U_n+2}$ et $U_0 = 0$,
Montrer que la suite est bornee par 0 et 1.

$\Rightarrow$ Raissonement par recurrence :

$\hookrightarrow$ Methode 1 :

* On part de $0 \leqslant 0 \leqslant 1$ et $U_0 = 0$ donc, $0 \leqslant U_0 \leqslant 1$, donc vrai pour $n = 0$

* On suppose qu'il existe un naturel k tel que $0 \leqslant U_k \leqslant 1$.

Montrons qu'alors on a : $0 \leqslant U_n + 1 \leqslant 1$

* $U_{k+1} - 0 = U_k + 1 = \frac{2U_k+1}{U_k+2} \geqslant 0$ car $U_k \geqslant 0$, donc $2U_k \geqslant 0$ puis $2U_k + 1 \geqslant 1 > 0$. D'apres la regle des signes, $\frac{2U_k+1}{U_k+2} > 0$. Donc $U_{k+1} > 0$.

* $U_{k+1} - 1 = \frac{2U_k+1}{U_k+2} - 1 = \frac{2U_k+1-(U_k+2)}{U_k+2} = \frac{U_k-1}{U_k+2} \leqslant 0$ car $U_k \leqslant 1$ donc $U_k - 1 \leqslant 0$ et $U_k + 2 \geqslant 0$, RDS $\Rightarrow U_{k+1} - 1 \leqslant 0$.

Conclusion : $U_k \leqslant 1$ donc $U_{k+1} \leqslant 0$ et $U_{k+2} > 0$, donc on a bien $0 \leqslant U_{k+1} \leqslant 1$.

$\hookrightarrow$ Methode 2 :

$\Rightarrow$ meme initialisation que pour la methode 1.

$\Rightarrow$ Dans cette methode, on introduit une fonction generatrice :

On pose alors $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$, alors, $U_{n+1} = f(U_n)$,
puis $f'(x) = \frac{2(x+2)-(1)(2x+1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ car $3 > 0$ et $(x+2)^2 > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$., donc a fortiori, sur $[0; 1]$.
Or, $0 \leqslant U_k \leqslant 1$
alors, $f(0) \leqslant f(U_k) \leqslant f(1)$ car f croissante sur $[0; 1]$.
or, $f(0) = \frac{1}{2}, f(1) = \frac{2*1+1}{1+2} = 1$ donc, $\frac{1}{2} \leqslant f(U_k) \leqslant 1$ donc $\frac{1}{2} \leqslant U_{k+1} \leqslant 1$.
or, $\frac{1}{2} > 0$ donc, $0 \leqslant U_{k+1} \leqslant 1$.

Remarque. Faire attention :

— $\exists M \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant M$
— $\forall m \in \mathbb{R} / \exists n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant m$

Dans la ligne 1, M ne depend pas de n

Dans la ligne 2, M depend de ce qu'il y a apres.

Une erreur "classique" :
par exemple, nous arrivons a : $\forall n \in \mathbb{N}, n-1 \leqslant U_n \leqslant 2n+3$.
Ici, on ne peut pas dire que (U_n) est bornee par $n-1$ et $2n+3$. En effet, les minorants et majorants doivent etre des nombres ne dependants pas de n. Cependant, on peut dire que (U_n) est dominee par $2n+3$.

A.3 Monotomie d'une suite

Définition 3. Soit (U_n) une suite,

1. On dit que (U_n) est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \geqslant 0$

2. On dit que (U_n) est decroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n \leqslant 0$

(Si les inegalites sont strictes, on dit que la suite sera, respectivement, strictement croissante et strictement decroissante).

Exemple: $U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2}$ et $U_0 = 0$. $\Rightarrow$: etudier la monotomie de la suite.

$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n+1}{U_n+2} - U_n = \frac{(2U_n+1)-U_n(U_n+2)}{U_n+2}$
$\frac{2U_n+1-U_n^2+2U_n)}{U_n+2} = \frac{(1-U_n^2}{U_n+2} = \frac{(1-U_n)(1+U_n)}{U_n+2}$

Or, on a vu que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant U_n \leqslant 1$. donc,

$1 - U_n \geqslant 0$

$1 + U_n \geqslant 1 > 0$

$0 \leqslant U_n \leqslant 1$ donc $2 \leqslant U_{n+1} \leqslant 3$ donc, $U_{n+1} > 0$.
D'apres la regle des signes,
$U_{n+1} - U_n \geqslant 0$ donc (U_n) est croissante sur $\mathbb{N}$

IMPORTANT :

Si tous les termes de la suite sont strictement positifs, alors :

1. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant 1$, alors la suite est croissante

2. $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leqslant 1$, alors la suite est decroissante

Démonstration. $U_{n+1} - U_n = U_n(\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1)$, donc le signe de $UI_{n+1} - U_n$ est alors le signe de $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1$:

1. si on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \geqslant 0$, la suite est alors croissante

2. si on a : $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \leqslant 0$, la suite est alors decroissante

□

Exemple: $V_n = \frac{2^n}{n^2}, n \geqslant 1$, il est evident que $V_n = \frac{2^n}{n^2} \geqslant 0$ car $2^n > 0$ et $n^2 > 0$ (RDS).
Donc, on pose : $U_n = \frac{2^n}{n^2}$,

$$U_n = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1} * n^2}{2^n * (n+1)^2} = \frac{2 * 2^n * n^2}{2^n (n+1)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^2}$$

Ensuite, $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = \frac{2n^2}{(n+1)^2} - 1 = \frac{2n^2-(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{2n^2-n^2-2n-1}{(n+1)^2} = \frac{n^2-2n-1}{(n+1^2)}$, ici $(n+1)^2 > 0$.

$\Rightarrow$ Cherchons $n^2 - 2n - 1, \Delta = 4 + 4 = 8 > 0$, donc,

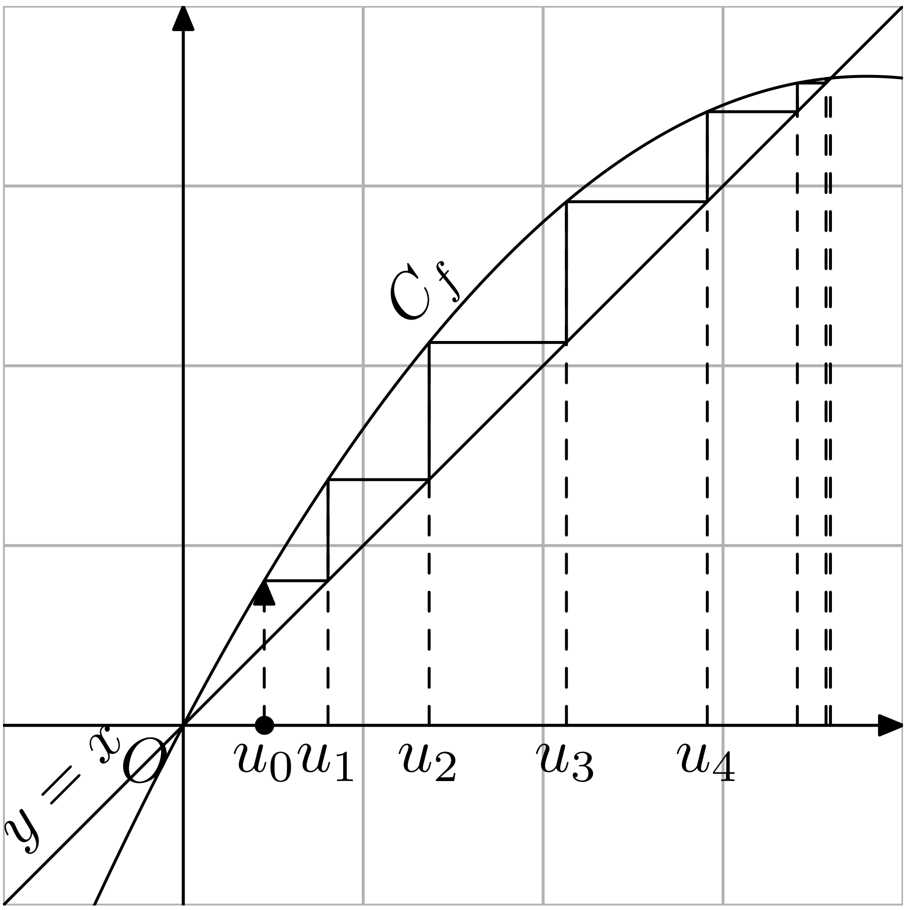
$$n_1 = \frac{2-\sqrt{8}}{2} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1-\sqrt{2})}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$n_2 = \frac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Ensuite, d'apres le tableau de signe,
$\forall n \geqslant 3, \frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 > 0$ donc la suite est strictement croissante a partir de $n = 3$,
puis, $U_1 = \frac{2^1}{1^2} = 2, U_2 = \frac{2^2}{1^2} = 1, U_1 = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$.
Comme $U_3 < U_2$, la suite n'est croissante qu'a partir de $n = 3$. Cependant, si on avait trouve $U_3 = 1,2$, on aurrait put dire que (U_n) etait croissante a partir de $n = 2$.

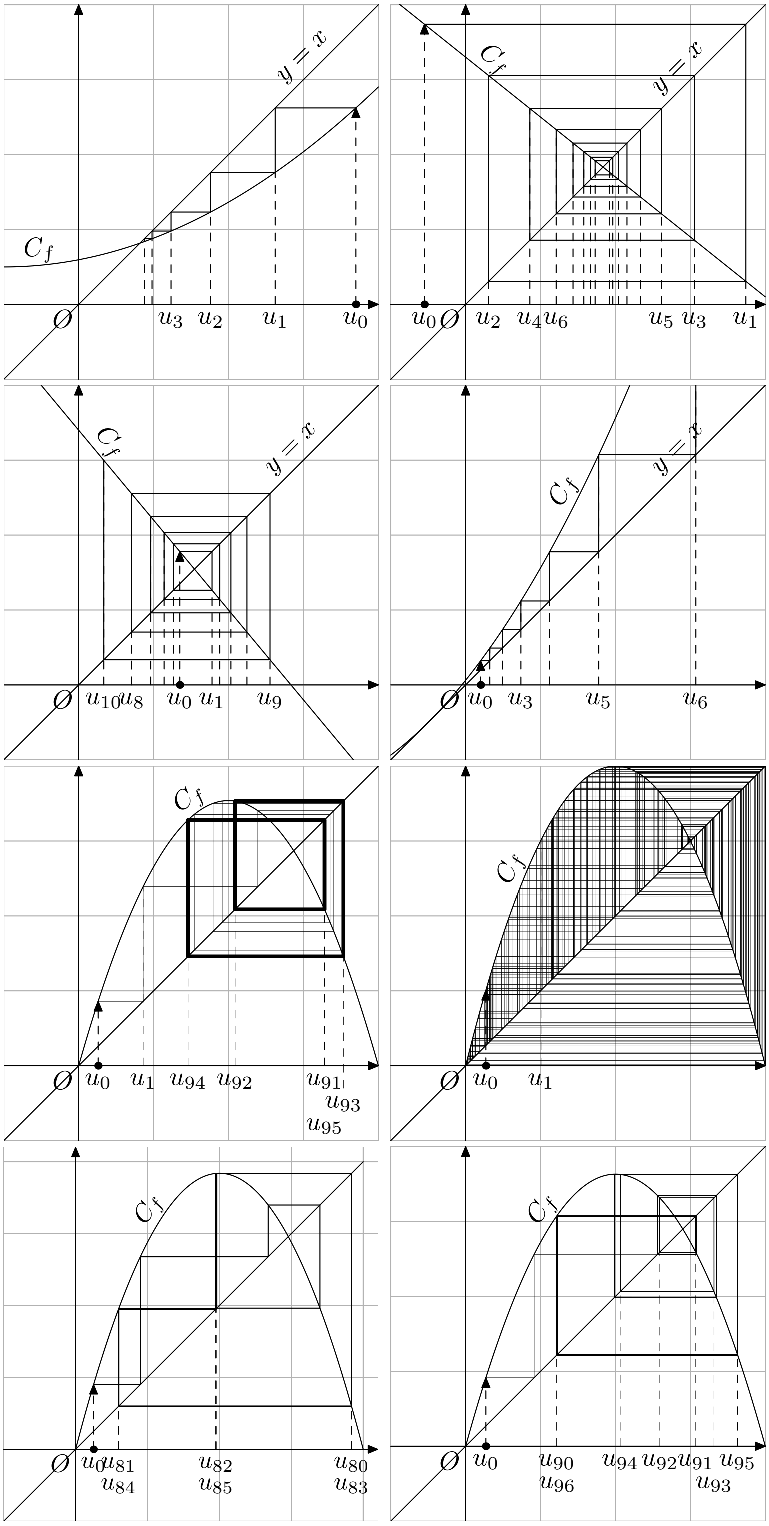
A.4 Representation graphique des termes d'une suite recurrente

Soit $U_{n+1} = \frac{2U_n+1}{U_n+2}$
Introduction :
On introduit $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$, on sait que f est croissante sur $]-\infty;-2[\cup]-2;+\infty[$.



1. Conjecture 1 : la suite est bornee entre 0 et 1.
2. Conjecture 2 : la suite est croissance
3. Conjecture 3 : la suite converge vers 1. (c'est a dire l'abscisse du point d'intersection de f avec $\Delta : y = x$, support).

D'autres dessins :



A.5 Representation graphique d'une suite explicite

Définition 4. Une suite est definie de maniere explicite si (U_n) s'exprime directement en fonction de n, cad, $U_n = f(n)$.

On construit la courbe representative de f puis tous les points de cette courbe dont les abscisses sont des entiers naturels. Tous ces points vont constituer un nuage de points et leurs ordonnees seront les termes U_0, U_1, U_2 ... U_n.
Pour construire les termes de la suite sur l'axe des abscisses, on utilise la droite d'equation $y = x$.

A.6 Theoremes divers

Propriété 2. *On considere une suite (U_n) qui est definie de maniere explicite, cad $U_n = f(n)$, alors :*

si f est croissante alors (U_n) aussi.
si f est decroissante alors (U_n) aussi.
si f est constante alors (U_n) aussi.

ATTENTION, LES RECIPROQUES SONT FAUSSES

Démonstration. On part de $\forall n \in \mathbb{N}$ et $U_n \in Df \subset \mathbb{R}^+, n \leqslant n + 1$,

1. alors $f(n) \leqslant f(n + 1)$ car f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $(\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{N})$, donc $U_n \leqslant U_{n+1}$ donc la suite est croissante.
2. alors $f(n) \geqslant f(n + 1)$ car f est decroissante sur $\mathbb{R}^+$. $(\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{N})$, donc $U_n \geqslant U_{n+1}$ donc la suite est decroissante.

□

Remarque. En effet, $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}^+$, il faut que f soit definie sur $\mathbb{R}^+$ afin de calculer $f(n)$ cad (U_n).

Exemple: Une suite $U_n = f(n)$ qui est croissante sans pour cela avoir f croissant
prendre $f(x) = \sin(2\pi x) + x$

Propriété 3. *Toute suite croissante est minoree par son premier terme.*
Toute suite decroissante est majoree par son premier terme.

Démonstration.
1. Prendre $U_0 \leqslant U_1 \leqslant U_2 \leqslant U_3 \leqslant ... \leqslant U_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant U_0$.
2. Prendre $U_0 \geqslant U_1 \geqslant U_2 \geqslant U_3 \geqslant ... \geqslant U_n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leqslant U_0$.

□

B Suites arithmetiques et geometriques

B.1 Definitions de la suite arithmetique

Définition 5. On considere une suite (U_n), s'il existe un reel r tel que pour tout naturel, on sait que $U_{n+1} = U_n + r$ alors (U_n) sera dite arithmetique de raison r et de premier terme U_0.

IMPORTANT :

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = U_n + r}$$

Remarque. de part cette ecriture, r est independant de n.
$U_{n+1} = U_n + 2n - 3$, ici on ne dit pas que la suite a une raison de $2n - 3$, ici, il est dependant de n ! Il doit etre constant.

Exemple:

La liste des nombres entiers est une suite arithmetique avec, $r = 1$ et $U_0 = 0$.
En prenant, $U_0 = 0$ et $r = 2$, on obtient les nombres pairs.
En prenant, $U_0 = 1$ et $r = 2$, on obtient les nombres impairs.
Pour $r = 0$, la suite est constante car $U_{n+1} = U_n + 0 = U_n$, par recurence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}n, U_n = U_0$

B.2 Theoreme

Propriété 4. *Soit (U_n) une suite de raison r et de premier terme U_0.*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0 + nr$
2. $\sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = \frac{(n+1)(U_0+U_n)}{2} = \frac{(nombre\ de\ terme)(premier\ terme\ +\ dernier\ terme)}{2}$

Démonstration. (par recurrence)

1. Methode 1 :
   a. Initialisation :
   pour $n = 0, U_n + nr = U_0 + 0r = U_0$ donc vrai pour U_0.
   b. Heredite :
   On suppose qu'il $\forall k \in \mathbb{N}, U_k = U_0 + kr$ (HR).
   $U_{n+1} = U_k + r$
   $U_{n+1} = (U_0 + kr) + r$
   $U_{n+1} = U_0 + (k+1)r$
   c. donc vrai pour $n + 1$.
2. Methode 2 :
   a. Initialisation :
   pour $\sum_{k=0}^{0} U_k = U_0$, et le terme de droite prend $\frac{(0+1)(U_0+U_0)}{2} = \frac{2U_0}{2} = U_0$. Donc vrai pour n = 0.
   b. Heredite :
   On suppose qu'il $\forall p \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^{0} U_p = \frac{(p+1)(U_0+U_p)}{2}$ (HR).
   $S_n = U_0 + U_1 + ... + U_p + U_{p+1}$
   $S_n = \frac{(p+1)(U_0+U_p)}{2} + U_{p+1}$
   $S_n = \frac{(p+1)(U_0+U_{p+1}-r)}{2} + U_{p+1}$
   $S_n = \frac{(p+1)(U_0+U_{p+1}-r)(2)(U_{p+1})}{2}$
   $S_n = \frac{(p+1)U_0+(p+3)(U_{p+1}-(p+1))}{2}$
   $S_n = \frac{(p+2)U_0-U_0+(p+2)U_{p+1}-(p+1)+U_{p+1}}{2}$
   $S_n = \frac{(p+2)U_0+(p+2)U_{p+1}+U_{p+1}-U_0-(p+1)}{2}$
   $S_n = \frac{(p+2)(U_0+U_p+1)}{2}$
   c. donc vrai pour $n + 1$.

□

Propriété 5. *Soit (U_n) une suite s.a. de raison r et de premier terme U_a alors,*

1. $U_n = U_0 + (n-a)r$
2. $U_a + U_{a+1} + ... + U_n = \frac{(n-a+1)(U_a+U_n)}{2}$

Démonstration. admise. □

B.3 Definition de la suite geometrique

Définition 6. Soit U_n une suite s'il existe un reel q tel que pour tout entier naturel n on ait, $U_{n+1} = q * U_n$, la suite est dite geometrique de raison q (et U_0 est donnÃ©).

$$\boxed{\exists n \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = q * U_n}$$

Remarque. Cas particuliers :

1. $q = 0$: la suite est constante Ã partir du second terme. U_0 puis $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = 0$
2. $q = 1, \forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_0$

Propriété 6. *Soit U_n une suite geo. de raison q ($q \neq 1$ et $q \neq 0$) et de premier terme U_0.*

1. $U_n = U_0 * q^n$

2. $\sum_{k=0}^{n} U_n = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 * \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Cas particuliers :

1. *pour* $q = 1$, $U_n = U_0$, *donc*, $U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n = (n+1)U_0$.

2. *pour* $q = 0$, $U_n = 0$ *avec* $n \geqslant 1$, $U_0 + U_1 + ...U_n = U_0$

Démonstration. *(par recurrence) :*

1. Methode A :

  a. Init : pour $n = 0$, $U_0 * q^n = U_0 * q^0 = U_0 * 1 = U_0$, donc vrai pour $n = 0$.

  b. Heredite :

   On suppose que $\forall p \in \mathbb{N}/U_p = U_0 * q^p$

   alors, $U_{p+1} = q * U_p = q * U_0 * q^p = U_0 * q^{p+1}$, vrai pour $p + 1$.

2. Methode B :

  a. Initialisation : pour $k = 0, \sum_{k=0}^{p} U_k = U_0 * \frac{1-q^{p+1}}{1-q} = U_0 * 1 = U_0$ donc vrai pour $k = 0$

  b. Heredite :

   On suppose $\forall p \ \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{p} = U_0 * \frac{1-q^{p+1}}{1-q}$

   or, $U_0 + U_1 + ...U_n + U_{n+1}$

   $= U_0 * \frac{1-q^{p+1}}{1-q} + U_{p+1}$

   $= U_0 * (\frac{1-q^{p+1}}{1-q}) + U_0 * q^{p+1}$

   $= U_0[\frac{1-q^{p+1}}{1-q} + q^{p+1}]$

   $= U_0[\frac{1-q^{p+1}+(1-q)(q^{p+1})}{1-q}]$

   $= U_0[\frac{1-q^{p+1}+q^{p+1}+q^{p+2}}{1-q}]$

   $= U_0[\frac{1-q^{p+2}}{1-q}]$

   $= U_0[\frac{1-q^{(p+1)+1}}{1-q}]$

   donc vrai pour $p + 1$.

□

B.4 Formule importante a savoir

Propriété 7. *Soit* $q \ \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *alors* $1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Démonstration. Prenons (U_n), une suite geo. avec $U_0 = 1$ et de raison q alors

$\forall k \in \mathbb{N}, U_k = U_0 * q^k = q^k$

$U_0 + U_1 + U_2 + ...U_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n$

$= U_0 * (\frac{1-q^{n+1}}{1-q})$

$1 * (\frac{1-q^{n+1}}{1-q}) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

□

Chapitre II

Convergence (et divergence) des suites

A Convergence d'une suite

Partie entiere d'une suite

Propriété 8. *Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle partie entiere de x, notee, $E(x)$, l'unique entier verifiant :*

$$E(x) \leqslant x < 1 + E(x)$$

Exemple:

$E(\sqrt{2}) = 1$
$E(-3\pi) = -10$
$E(-1.6) = -2$
$E(4) = 4$
$E(0) = 0$
$E(-2\sqrt{3}) = -4$

A.1 Definition de la convergence

Définition 7. Soit (U_n) une suite numerique.
On dit que (U_n) converge vers le reel l si tout interval ouvert contenant l contient tous les termes de la suite Ã partir d'un certain rang. On ecrit alors :

$$\lim_{n\to\infty}(U_n) = l$$

Remarque. Dessin explicatif dans le cahier de cours, flemme quoi.

A.2 Autre traduction de la def.

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N}) \ / \ (\forall n \in \mathbb{N}),\ n \geqslant n_0)\ |U_n - l| < \varepsilon$$

Exemple: $U_n = \frac{2n+1}{n-1}$ avec $n \neq 1$
Montrer que (U_n) converge vers 2
On prend ε positif (au hasard). On cherche $n_0 \in \mathbb{N} \ / \ n \geqslant n_0$,
la distance entre U_n et l ne depasse pas ε.
$|U_n - 2| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{2n+1}{n-1} - 2| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{2n+1-2(n-1)}{n-1} - 2| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{3}{n-1}| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|3|}{|n-1|} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow 3 \leqslant \varepsilon|n-1|$
(car $|n-1| \geqslant 0$) $3 \leqslant |n-1|$, or par necessite, $n \geqslant 2$
donc, $n - 1 \geqslant 1 > 0$
d'ou, $\frac{3}{\varepsilon} < n - 1$

d'ou, $n > \frac{3}{\varepsilon} + 1$

$|U_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > 1 + \frac{3}{\varepsilon}$

Comme ε est quelquonque, a priori, $1 + \frac{3}{\varepsilon}$ n'a pas de chance d'etre entier. C'est la qu'intervient la partie entiere.

$E(1 + \frac{3}{\varepsilon}) \leqslant 1 + \frac{3}{\varepsilon} \leqslant 1 + E(1 + \frac{3}{\varepsilon})$

Reprise de la demonstration :

Prenons le nombre $n_0 = E(1 + \frac{3}{\varepsilon}) + 1 \in \mathbb{N}$
alors des que $n \geqslant E(1 + \frac{3}{\varepsilon}) + 1$, on est assure d'avoir $n \geqslant 1 + \frac{3}{\varepsilon}$ (car $1 + \frac{3}{\varepsilon} \leqslant 1 + E(1 + \frac{3}{\varepsilon})$).
Donc grace au travail precedent, $|U_n - 2| < \varepsilon$

Application numerique :

$\varepsilon = 0.00037$
alors $1 + \frac{3}{\varepsilon} = 8109.1...$
donc, $1 + \frac{3}{\varepsilon} = 1 + 8109 = 8110$, alors $n \geqslant 8110$ on aura : $|U_n - 2| = |\frac{2n+1}{n-1} - 2| = \frac{|3|}{|n-1|} = \frac{3}{|n-1|}$, or $n \geqslant 8110$ alors, $n - 1 \geqslant 8109$.
$0 < \frac{1}{n-1} \leqslant \frac{1}{8109} \Leftrightarrow \frac{3}{n-1} \leqslant \frac{3}{8109} \Leftrightarrow \frac{3}{|n-1|} \leqslant 3.6995 * 10^-4$
$\frac{3}{|n+1|} < 0.00036995 < 0.00037$