

SMUO 2024

lista 7

1. **(Quasi-lewostronna ciągłość)** Ustalmy $x \in S$. Niech $(T_n)_{n \geq 1}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem czasów zatrzymania, a $T = \lim_n T_n$. Zakładamy, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że $T \leq C$. Celem ćwiczenia jest pokazanie, że $X_{T-} = X_T$, \mathbf{P}_x -prawie wszędzie.

1. Niech $f \in \mathcal{D}(L)$ oraz $h = Lf$. Pokaż, że dla każdego $n \geq 1$,

$$\mathbf{E}_x [f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] = f(X_{T_n}) + \mathbf{E}_x \left[\int_{T_n}^T h(X_s) ds \mid \mathcal{F}_{T_n} \right].$$

2. Przypominamy z RP2R, że

$$\mathbf{E}_x [f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}] \rightarrow \mathbf{E}_x [f(X_T) \mid \tilde{\mathcal{F}}_T]$$

prawie pszędzie i w L_1 , gdzie

$$\tilde{\mathcal{F}}_T = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{T_n}.$$

Wnioskuj z punktu (a), że

$$\mathbf{E}_x [f(X_T) \mid \tilde{\mathcal{F}}_T] = f(X_{T-}).$$

3. Pokaż, że teza punktu (b) pozostaje prawdziwa, jeśli przyjmiemy jedynie, że $f \in C_0(S)$, oraz wywnioskuj, że dla każdych $f, g \in C_0(S)$,

$$\mathbf{E}_x [f(X_T)g(X_{T-})] = \mathbf{E}_x [f(X_{T-})g(X_{T-})].$$

Wnioskuj, że $X_{T-} = X_T$, \mathbf{P}_x -prawie wszędzie.

2. **(Operacja zabijania)** W tym ćwiczeniu zakładamy, że X ma ciągle trajektorie. Niech A będzie zwartym podzbiorem S oraz

$$T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

1. Dla każdego $t \geq 0$ i każdej funkcji $\varphi \in C_0(S)$, definiujemy

$$Q_t^* \varphi(x) = \mathbf{E}_x [\varphi(X_t) \mathbf{1}_{\{t < T_A\}}], \quad x \in S.$$

Sprawdź, że $Q_{t+s}^* \varphi = Q_t^*(Q_s^* \varphi)$, dla każdych $s, t \geq 0$.

2. Definiujemy $\bar{S} = (S \setminus A) \cup \{\Delta\}$, gdzie Δ jest punktem dodanym do $S \setminus A$ jako punkt izolowany. Dla każdej $\varphi \in C_0(\bar{S})$ i każdego $t \geq 0$, definiujemy

$$\bar{Q}_t \varphi(x) = \mathbf{E}_x [\varphi(X_t) \mathbf{1}_{\{t < T_A\}}] + \mathbf{P}_x [T_A \leq t] \varphi(\Delta), \quad \text{jeśli } x \in S \setminus A$$

oraz $\bar{Q}_t \varphi(\Delta) = \varphi(\Delta)$. Pokaż, że $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ jest półgrupą.

3. Pokaż, że pod miarą prawdopodobieństwa \mathbf{P}_x proces \bar{X} zdefiniowany jako

$$\bar{X}_t = \begin{cases} X_t & \text{jeśli } t < T_A \\ \Delta & \text{jeśli } t \geq T_A \end{cases}$$

jest procesem Markowa z półgrupą $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$, (spełnia postulaty (PF1, 2, 4) definicja procesu Feller'a).

4. Zakładamy, że $(\bar{Q}_t)_{t \geq 0}$ jest półgrupą Feller'a i oznaczamy jej generator przez \bar{L} . Niech $f \in \mathcal{D}(\bar{L})$ będzie taka, że f oraz Lf zanikają na zbiorze otwartym zawierającym A . Oznaczmy przez \bar{f} dla obcięcia f do $E \setminus A$, i rozważamy \bar{f} jako funkcję na \bar{E} przez położenie $\bar{f}(\Delta) = 0$. Pokaż, że $\bar{f} \in \mathcal{D}(\bar{L})$ oraz $\bar{L}\bar{f} = Lf$ na $E \setminus A$.