

SMUO 2024

wykład 9: Konstrukcja systemów spinowych

Dla $x \in V$ oraz $\eta \in \{0, 1\}^V$ definiujemy $\eta^{(x)} \in \{0, 1\}^V$ wzorem

$$\eta^{(x)}(y) = \begin{cases} \eta(y), & y \neq x \\ 1 - \eta(x), & y = x \end{cases}.$$

Dla f pochodzącego z odpowiedniego podzbioru $C_0(\{0, 1\}^V)$ chcemy położyć

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in V} c(x, \eta) \left[f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right]. \quad (0.1)$$

Okazuje się, że dokładne napisanie dziedziny jest problematyczne. Aby obejść tę trudność rozważmy

$$D = \left\{ f \in C(\{0, 1\}^V) : \|f\|_o := \sup_{\eta} \sum_x \left| f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right| < \infty \right\}. \quad (0.2)$$

Konstrukcja systemów spinowych cd.

Aby sprawdzić (GI4) musimy wyprowadzić ograniczenie dla rozwiązań równania $f - \lambda Lf = g$. Niech

$$\epsilon = \inf_{u, \eta} [c(u, \eta) + c(u, \eta_u)] \quad \text{oraz} \quad \gamma(x, u) = \sup_{\eta} |c(x, \eta_u) - c(x, \eta)|.$$

Zauważmy, że $\gamma(x, u)$ mierzy stopień, w jakim intensywność zmiany w miejscu x zależy od konfiguracji w miejscu u . Niech $\ell_1(V)$ będzie przestrzenią Banacha funkcji $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$, które spełniają

$$\|\alpha\| := \sum_x |\alpha(x)| < \infty.$$

Macierz γ definiuje operator Γ na $\ell_1(S)$ przez

$$\Gamma\alpha(u) = \sum_{x: x \neq u} \alpha(x) \gamma(x, u).$$

Operator ten jest dobrze zdefiniowany i ograniczony, pod warunkiem że

$$M := \sup_x \sum_{u: u \neq x} \gamma(x, u) < \infty,$$

a wtedy $\|\Gamma\| = M$.

Dla $f \in C(\{0, 1\}^V)$ i $x \in S$, niech

$$\Delta f(x) = \sup_{\eta} \left| f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right|.$$

Wtedy $\|f\|_o = \|\Delta f\|_{\ell_1(V)}$. Oto oszacowanie, którego potrzebujemy.

Fakt 0.1. Załóżmy, że spełniony jest jeden z warunków

- (a) $f \in D$,
- (b) f jest ciągła i

$$c(x, \cdot) \equiv 0 \text{ dla wszystkich oprócz skończonej liczby } x \in V. \quad (0.3)$$

Wówczas jeśli $f - \lambda Lf = g \in D$, $\lambda > 0$, oraz $\lambda M < 1 + \lambda\epsilon$, to

$$\Delta f \leq [(1 + \lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma]^{-1} \Delta g, \quad (0.4)$$

gdzie nierówność zachodzi współrzędna po współrzędnej, a odwrotność jest zdefiniowana przez nieskończony szereg

$$[(1 + \lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma]^{-1} \alpha = \frac{1}{1 + \lambda\epsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda\epsilon} \right)^k \Gamma^k \alpha. \quad (0.5)$$

Dowód. Zauważmy, że szereg w (??) jest zbieżny dla $\alpha \in \ell_1(V)$ na mocy założenia $\lambda M < 1 + \lambda\epsilon$. Pisząc $f - \lambda Lf = g$ w punktach η oraz $\eta^{(u)}$, odejmując i zauważając że $(\eta^{(u)})^{(u)} = \eta$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} [f(\eta^{(u)}) - f(\eta)][1 + \lambda c(u, \eta) + \lambda c(u, \eta^{(u)})] &= [g(\eta^{(u)}) - g(\eta)] \\ + \lambda \sum_{x: x \neq u} \left\{ c(x, \eta^{(u)})[f((\eta^{(u)})^{(x)}) - f(\eta^{(u)})] - c(x, \eta)[f(\eta^{(x)}) - f(\eta)] \right\}. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Ponieważ wartości $f(\eta^{(u)}) - f(\eta)$, gdy η zmienia się a u jest ustalone, tworzą zbiór symetryczny, a ta różnica jest funkcją ciągłą η , dla każdego u istnieje takie η , że

$$f(\eta^{(u)}) - f(\eta) = \sup_{\zeta} |f(\zeta^{(u)}) - f(\zeta)| = \Delta f(u).$$

Stąd,

$$f(\zeta^{(u)}) - f(\zeta) \leq f(\eta^{(u)}) - f(\eta)$$

dla każdej ζ . Stosując to dla $\zeta = \eta^{(x)}$ i przekształcając, otrzymujemy

$$f((\eta^{(u)})^{(x)}) - f(\eta^{(u)}) = f((\eta^{(x)})^{(u)}) - f(\eta^{(u)}) \leq f(\eta^{(x)}) - f(\eta),$$

Używając tej nierówności w (??),

$$\begin{aligned} \Delta f(u)(1 + \lambda\epsilon) &\leq \Delta f(u)[1 + \lambda c(u, \eta) + \lambda c(u, \eta^{(u)})] \\ &\leq \Delta g(u) + \lambda \sum_{x: x \neq u} [c(x, \eta^{(u)}) - c(x, \eta)] [f(\eta^{(x)}) - f(\eta)] \\ &\leq \Delta g(u) + \lambda \sum_{x: x \neq u} \gamma(x, u) \Delta f(x). \end{aligned} \quad (0.7)$$

Jeśli (??) zachodzi, to tylko skończona liczba wyrazów po prawej stronie jest niezerowa, więc przy któregokolwiek z założeń faktu $\Gamma\Delta_f$ jest dobrze określona. Dlatego (??) można zapisać jako

$$(1 + \lambda\epsilon)\Delta f \leq \Delta g + \lambda\Gamma\Delta f.$$

Iteracja tej nierówności prowadzi to do

$$\Delta f \leq \frac{1}{1 + \lambda\epsilon} \sum_{k=0}^n \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda\epsilon} \right)^k \Gamma^k \Delta g + \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda\epsilon} \right)^{n+1} \Gamma^{n+1} \Delta f.$$

Jeżeli rozważymy teraz $n \rightarrow \infty$, dostaniemy (??). □

Twierdzenie 0.2. Załóżmy, że $M < \infty$. Wtedy \bar{L} jest generatorem nieskończonej półgrupy Feller'a $T = (T(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$. Ponadto,

$$\Delta T(t)f \leq e^{-t\epsilon} e^{t\Gamma} \Delta f. \quad (0.8)$$

W szczególności, jeśli $f \in D$, to $T_t f \in D$ oraz

$$\|T(t)f\|_o \leq e^{(M-\epsilon)t} \|f\|_o. \quad (0.9)$$

Dowód. Własności (GI1), (GI2), (GI3) i (GI5) z Definicji ?? zachodzą dla (L, D) są i są dziedziczone przez \bar{L} z Faktu ?. Aby sprawdzić warunek (GI4) weźmy wstępujący ciąg $V_n \subseteq V$ taki, że $\bigcup_n V_n = V$. Niech

$$L_n f(\eta) = \sum_{x \in V_n} c(x, \eta) \left[f(\eta^{(x)}) - f(\eta) \right], \quad f \in C(\{0, 1\}^V). \quad (0.10)$$

To jest generator dla systemu spinowego, w którym współrzędne

$$(\eta(x) : x \notin V_n)$$

są stałe w czasie. Ponieważ L_n jest ograniczonym generatorem, spełnia

$$\mathcal{R}(I - \lambda L_n) = C(\{0, 1\}^V)$$

dla dostatecznie małych $\lambda > 0$. Dla $g \in D$, możemy zdefiniować $f_n \in C(\{0, 1\}^V)$ przez $f_n - \lambda L_n f_n = g$. Ponieważ L_n spełnia (??), jeśli λ jest wystarczająco małe, tak że $\lambda M < 1 + \lambda\epsilon$, wtedy $f_n \in D$ zgodnie z Faktem ?. W związku z tym możemy położyć

$$g_n = f_n - \lambda L_n f_n \in \mathcal{R}(I - \lambda L).$$

Niech $K = \sup_{x, \eta} c(x, \eta) < \infty$, wtedy z Faktu ??,

$$\begin{aligned} \|g_n - g\| &= \lambda \|(L - L_n)f_n\| \leq \lambda K \sum_{x \notin V_n} \Delta f_n(x) \\ &\leq \lambda K \sum_{x \notin V_n} [(1 + \lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma]^{-1} \Delta g(x). \end{aligned} \quad (0.11)$$

Ponieważ $\Delta g \in \ell_1(V)$, prawa strona (??) dąży do zera, gdy $n \rightarrow \infty$, więc $g_n \rightarrow g$. Stąd $g \in \text{cl}(\mathcal{R}(I - \lambda L))$, więc wnioskujemy, że $D \subseteq \text{cl}(\mathcal{R}(I - \lambda L))$. Ponieważ D jest gęste w $C(\{0, 1\}^V)$, widzimy, że $\mathcal{R}(I - \lambda L)$ jest również gęste. Zgodnie z Faktem ??, $\mathcal{R}(I - \lambda \bar{L})$ musi być domkniętym podzbiorem $C(\{0, 1\}^V)$. Zatem

$$\mathcal{R}(I - \lambda \bar{L}) = C(\{0, 1\}^V)$$

To kończy weryfikację, że \bar{L} jest generatorem infinitesimalnym.

Przechodząc do drugiego stwierdzenia, zapiszmy (??) jako

$$\Delta_{(I - \lambda L)^{-1}} g \leq [(1 + \lambda \epsilon)I - \lambda \Gamma]^{-1} \Delta g,$$

a następnie iterujemy, aby uzyskać

$$\Delta_{(I - \frac{t}{n} L)^{-1}} g \leq \left[\left(1 + \frac{t}{n} \epsilon \right) I - \frac{t}{n} \Gamma \right]^{-n} \Delta g.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy (??). □