SMUO 2024
wykład 10: Procesy dualne

Procesy dualne

Często zdarza się, że wartość oczekiwaną związaną z jednym skomplikowany procesem jesteśmy w stanie wyrazić jako wartość oczekiwaną związaną z innym procesem, który jest o wiele poostrzy. Tego typu relacje pozwalają na przydatne reprezentacje wielkości występujących w procesach Fellera.

Definicja 0.1. Niech $X_1 = (X_1(t))_{t\in\mathbb{R}}$ i $X_2 = (X_2(t))_{t\in\mathbb{R}}$ będą procesami Fellera odpowiednio na przestrzeniach S_1 i S_2. Dla mierzalnej i ograniczonej funkcji H na $S_1 \times S_2$, procesy te są nazywane dualnymi względem H, jeśli

$$\mathbf{E}_{x_1}[H(X_1(t), x_2)] = \mathbf{E}_{x_2}[H(x_1, X_2(t))] \tag{0.1}$$

dla każdego $t \geq 0$ oraz $x_i \in S_i$.

Powyższe pojęcie w zupełnej ogólności jest problematyczne. Naturalnym jest oczekiwać, że (**??**) mówi coś o relacji między X_1 oraz X_2. Zauważmy, że każde dwa procesy są dualne względem funkcji stałej. Jednakże charakter relacji między X_1 a X_2 zależy bardzo mocno od konteksty i podyktowany jest prze funkcję H.

Przyklad 0.2. Niech X_a oraz X_r będą ruchami Browna na $S_1 = S_2 = [0, +\infty)$ odpowiednio zabitymi i odbitymi w zerze. Procesy te są dualne względem funkcji

$$H(x, y) = \mathbf{1}_{\{x\leq y\}}.$$

Wówczas relacja (**??**) zapisuje się jako

$$\mathbf{P}_{x_1}[X_1(t) \leq x_2] = \mathbf{P}_{x_2}[x_1 \leq X_2(t)].$$

W przypadku wspomnianych wersji ruchu Browna

$$\mathbf{P}_x[X_a(t) \leq y] = \mathbf{P}_y[x \leq X_r(t)].$$

Oba prawdopodobieństwa są równe

$$\mathbb{P}[B_t \geq x - y] + \mathbb{P}[B_t \geq x + y],$$

gdzie $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest standardowym ruchem Browna na $\mathbb{R}$. Dokładne sprawdzenie wspomnianej równości pozostawiamy jako zadanie.

Załóżmy teraz, że H jest ciągła. W świetle definicji procesy Fellera X_1 oraz X_2 z półgrupami Fellera odpowiednio $T_1 = (T_1(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ oraz $T_2 = (T_2(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$ są H-dualne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$T_1(t)H(\cdot, s_2)(s_1) = T_2(t)H(s_1, \cdot)(s_2)$$

dla wszystkich $t \geq 0$, $s_1 \in S_1$ oraz $s_2 \in S_2$. W przypadku, gdy definiujemy procesy Fellera przez ich opis infinitezymalny wygodniejsze jest kryterium wyrażone w terminach generatorów.

Twierdzenie 0.3. Niech X_1 i X_2 będą generowane odpowiednio przez $(L_1, \mathcal{D}(L_1))$ oraz $(L_2, \mathcal{D}(L_2)$, Załóżmy, że dla każdych $s_1 \in S_1$ oraz $s_2 \in S_2$

$$H(\cdot, s_2) \in \mathcal{D}(L_1) \quad \text{oraz} \quad H(s_1, \cdot) \in \mathcal{D}(L_2).$$

Jeżeli dodatkowo

$$L_1 H(\cdot, s_2)(s_1) = L_2 H(s_1, \cdot)(s_2)$$

dla wszystkich $x_1 \in S_1$ oraz $x_2 \in S_2$. Wówczas X_1 i X_2 są dualne względem H.

Dowód. Rozumowanie przeprowadzimy jedynie w przypadku przeliczalnej S_2 i ograniczonego L_2. Wówczas X_2 jest łańcuchem Markowa z q-macierzą $q = (q(x,y))_{x,y \in S_2}$. Przypomnijmy, że wówczas

$$T_2(t) f(s_2) = \mathbf{E}_{s_2}[f(X_2(t)] = \sum_{y \in S_2} \mathbf{P}_{s_2}[X_2(t) = y] f(y).$$

Generator L_2 zadany jest wówczas przez

$$L_2 f(s_2) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} T_2(t) f(s_2) = \sum_{y \in S_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} \mathbf{P}_{s_2}[X_2(t) = y] f(y) = \sum_{y \in S_2} q(s_2, y) f(y).$$

Rozważmy

$$u(t, x_1, x_2) = \mathbf{E}_{x_1} H(X_1(t), x_2) = T_1(t) H(\cdot, x_2)(x_1) \tag{0.2}$$

Na mocy Twierdzenia **??**,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(t, x_1, x_2) &= T_1(t) L_1 H(\cdot, x_2)(x_1) = T_1(t) L_2 H(x_1, \cdot)(x_2) \\ &= \sum_{y \in S_2} q(x_2, y) T_1(t) H(\cdot, y)(x_1) = \sum_{y} q(x_2, y) u(t, x_1, y) = L_2 u(t, x_1, \cdot)(x_2). \end{aligned} \tag{0.3}$$

Dodatkowo $u(0, x_1, x_2) = H(x_1, x_2)$. Z drugiej strony funkcja

$$v(t, x_1, x_2) = T_2(t) H(x_1, \cdot)(x_2)$$

również spełnia $v(0, x_1, x_2) = H(x_1, x_2)$. Wystarczy zatem uzasadnić jedyność tego zagadnienia. Rozważmy w tym celu $h = v - u$. Wówczas

$$h(t, x_1, x_2) = \int_0^t L_2 h(s, x_1, \cdot) \mathrm{d}s$$

Niech

$$h^*(t, x_1) = \sup_{s \le t, x_2 \in S_2} h(s, x_1, x_2).$$

Wówczas

$$h^*(t, x_1) \le \int_0^t \|L_2\| h^*(s, x_1) \mathrm{d}s.$$

Powyższa nierówność zwija się do

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-\|L_2\|t}\int_0^t h^*(s,x_1)\mathrm{d}s\right) \le 0.$$

Co po całkowaniu daje

$$e^{-\|L_2\|t}\int_0^t h^*(s,x_1)\mathrm{d}s \le 0.$$

Skoro lewa strona jest niewątpliwie nieujemna, to $h \equiv 0$ za co za tym idzie $u \equiv v$. Ostatnie równość jest równoważna z dowodzoną tezą. $\square$

Przyklad 0.4. Niech X_1 i X_2 będą spacerami losowymi na $\mathbb{Z}$ z q-macierzami odpowiednio

$$q_1(x,x+1) = \beta, \quad q_1(x,x-1) = \delta$$

oraz

$$q_2(x,x+1) = \delta, \quad q_1(x,x-1) = \beta$$

1 The Voter model

Niech V będzie przeliczalnym zbiorem z topologia dyskretną. Chcemy modelować proces rozwoju opinii wśród osobników reprezentowanych przez elementy V. Zakładać będziemy, że w każdej chwili czasu $t \ge 0$ każdy osobnik $x \in V$ reprezentuje jedną z dwóch opinii $\eta_t(x) \in \{0,1\}$ na zadany temat. Załóżmy, że dane są nieujemne liczby $q(x,y)$ dla $x \neq y$. Wielkość $q(x,y)$ będzie intensywnością z jaką x przejmuje opinię y o ile oba osobniki reprezentują różne opinie. Zakładać będziemy, że

$$M = \sup_{x\in V}\sum_{u:u\neq x} q(x,u) < \infty.$$

Model głosowania (the Voter model) η_t to system spinowy z

$$c(x,\eta) = \sum_{y:\eta(y)\neq\eta(x)} q(x,y).$$

Innymi słowy jest to proces Fellera generowany przez

$$Lf(\eta) = \sum_{x\in V} c(x,\eta)\left(f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta)\right).$$

Techniczne szczegóły związane z dziedziną L zostały przedyskutowane w poprzednim rozdziale. Najważniejsze jest, że z Twierdzenia **??** wiemy, że proces ten jest dobrze określony (domknięcie L jest generatorem infinitezymalnym).

Przyklad 0.5. Załóżmy, że V jest wyposażone w strukturę grafu o ograniczonym stopniu. Chcemy modelować przypadek w którym każdy z wierzchołków $x \in V$ może wchodzić w interakcję jedynie ze swoimi bezpośrednimi sąsiadami (i to od nich zapożycza opinie). Rozważmy $q(x, y) = \mathbf{1}_{x \sim y}$. Wówczas

$$M = \sup_{x \in V} \sum_{u : u \neq x} q(x, u) = \sup_{x \in V} \deg(x) < \infty.$$

Zauważmy, że model głosowania posiada dwa stany stacjonarne $\eta \equiv 1$ oraz $\eta \equiv 0$. Naszym głównym celem jest sprawdzenie, czy istnieją inne (nietrywialne) rozkłady stacjonarne.

Aby tego dokonać posłużymy się procesem dualnym do $(\eta_t)_t$. Ustalmy $t \geq 0$ i $x \in V$. Skoro przy zmianach opinia w x jest zapożyczana od innych osobników, chcąc zbadać wartość $\eta_t(x)$ rozważmy t_1-moment ostatniej zmiany opinii przez x, czyli

$$t_1 = \sup_{s \leq t} \{\eta_{s-}(x) \neq \eta_s(x)\}$$

Jeżeli zbiór czasów pod kresem górnym jest pusty, to x nie zmienił zdania na odcinku czasu $[0, t]$, więc $\eta_t(x) = \eta_0(x)$. W chwili t_1, x przyjął tę samą opinię co pewien x_1 (co się dzieje z intensywnością $q(x, x_1)$), czyli $\eta_t(x) = \eta_{t_1}(x_1)$. Chcąc ustalić wartość $\eta_{t_1}(x_1)$ rozważamy ostatni moment, w którym x_1 zmienił opinię

$$t_2 = \sup_{s \leq t} \{\eta_{s-}(x_1) \neq \eta_s(x_1)\}$$

Jeżeli zbiór pod kresem górnym jest pusty, to x_1 na przedziale czasowym $[0, t_1]$ nie zmienił zdania i $\eta_t(x) = \eta_{t-1}(x_1) = \eta_0(x_1)$. Postępując iteracyjne dostajemy ciąg czasów $t \geq t_1 > t_2 > \ldots > t_N$ taki, że

$$\eta_t(x) = \eta_{t_1}(x_1) = \ldots = \eta_{t_N}(x_N) = \eta_0(x_N).$$

Przy czym przejście z x_k do x_{k+1} dzieje się z intensywnością $q(x_k, x_{k+1}$. Skonstruowana w ten sposób ścieżka $(x, x_1, \ldots, x_N)$ ma taki sam rozkład jak ścieżka łańcucha Markowa $Y_x = (Y_x(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ z q-macierzą $(q(x, y))_{x,y \in V}$. Oznacza to, że

$$\eta_t(x) \stackrel{d}{=} \eta_0(Y_x(t)).$$

Chcąc zbadać teraz rozkład łączny $(\eta_t(x), \eta_t(y)$ dla $x, y \in V$ możemy wykonać podobną konstrukcję na podstawie zmian opinii któregokolwiek z elementów pary. Dostaniemy w ten sposób ciąg czasów $t \geq s_1 > s_2 > \ldots > s_M \geq 0$ taki, że

$$\eta_t(x) = \eta_{s_1}(x_1) = \ldots = \eta_{s_M}(x_M) = \eta_0(x_M).$$

oraz

$$\eta_t(y) = \eta_{s_1}(y_1) = \ldots = \eta_{s_M}(y_M) = \eta_0(y_M).$$

Kluczowa jest następująca własność. Jeżeli $x_j = y_j$ dla pewnego $j \geq 1$, to $x_k = y_k$ dla wszystkich $k \geq j$. Istotnie, jeżeli j jest najmniejszą taką liczbą, że $x_j = y_j$, to oznacza to że x_{j-1} przejął opinię x_j. Po czym zanim x_j zmienił opinię, to y_{j-1} przejął opinię x_j. Oznacza to, że

$$(\eta_t(x), \eta_y(y)) \stackrel{d}{=} (\eta_0(Y_x(t)), \eta_0(Y_y(t))),$$

gdzie Y_x i Y_y są łańcuchami Markowa na V z zadaną q-macierzą takimi, że jeżeli w pewnym momencie się spotkają, to od tego momentu zaczynają się poruszać się razem. Podobny komentarz możemy napisać dla wektora $\eta_x(t)$ dowolnej długości: jego rozkład będziemy mogli wyrazić przez kolekcję spacerów losowych na V, które się zlewają w momencie spotkania. Aby wprowadzić ten proces bardziej formalnie, rozważmy $S_2(N)$ - zbiór wszystkich $A \subseteq V$ o liczebności nie większej niż N. Rozważmy $\{Q(A,B)\}_{A,B\in S_2}$ dane przez

$$Q(A, (A \setminus \{x\}) \cup \{y\}) = q(x,y), \quad x \in A,\ y \notin A;$$

oraz

$$Q(A, A \setminus \{x\}) = \sum_{y\in A, y\neq x} q(x,y), \quad x \in A.$$

Taki wybór instancyjności przejść odpowiada dokładnie zlewającym się spacerom losowym. Generator takiego procesu jest ograniczony z normą

$$\sum_{B\neq A} Q(A,B) = \sum_{x\in A}\sum_{y\neq x} q(x,y) \leq MN.$$

Pokażemy, że zlewające się spacery losowe $A = (A_t)_{t\in\mathbb{R}}$ (proces o intensywnościach danych powyżej) jest dualny do modelu głosowania $(\eta_t)_{t\in\mathbb{R}}$ z funkcją

$$H(\eta, A) = \prod_{x\in A} \eta(x) = 1_{\{\eta=1 \text{ on } A\}},$$

Trajektorie $|A_t|$ są nierosnące, co czyni go bardzo użytecznym w badaniu modelu głosowania,

Twierdzenie 0.6. Procesy $(\eta_t)_t$ i $(A_t)_t$ są dualne względem $H(\eta, A)$.

Dowód. Sprawdzimy, że zachodzą założenia Twierdzenia **??**. Niech L będzie generatorem modelu głosowania. Ponieważ $H(\eta, A)$ zależy od η tylko poprzez $\{\eta(x), x \in A\}$,

$$\begin{aligned}
LH(\cdot, A)(\eta) &= \sum_{\substack{x\in A, y\in S\\ \eta(y)\neq\eta(x)}} q(x,y)[H(\eta_x, A) - H(\eta, A)] \\
&= \sum_{\substack{x\in A, y\in S\\ \eta(y)\neq\eta(x)}} q(x,y)[1 - 2\eta(x)]H(\eta, A\setminus\{x\}) \\
&= \sum_{x\in A, y\in S} q(x,y)H(\eta, A\setminus\{x\})[\eta(y) - \eta(x)] \\
&= \sum_{x\in A, y\in S} q(x,y)[H(\eta, (A\setminus\{x\})\cup\{y\}) - H(\eta, A)] \\
&= \sum_{B} q(A,B)[H(\eta, B) - H(\eta, A)]. \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

$\square$