SMUO 2024
lista 7:

1. **(Quasi-lewostronna ciągłość)** Ustalmy $x \in S$. Niech $(T_n)_{n\geq 1}$ będzie ściśle rosnącym ciągiem czasów zatrzymania, a $T = \lim_n T_n$. Zakładamy, że istnieje stała $C < \infty$ taka, że $T \leq C$. Celem ćwiczenia jest pokazanie, że $X_{T-} = X_T$, $\mathbf{P}_x$-prawie wszędzie.

   (a) Niech $f \in \mathcal{D}(L)$ oraz $h = Lf$. Pokaż, że dla każdego $n \geq 1$,

   $$\mathbf{E}_x\left[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}\right] = f(X_{T_n}) + \mathbf{E}_x\left[\int_{T_n}^{T} h(X_s)\,\mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_{T_n}\right].$$

   (b) Przypominamy z RP2R, że

   $$\mathbf{E}_x\left[f(X_T) \mid \mathcal{F}_{T_n}\right] \to \mathbf{E}_x\left[f(X_T) \middle| \widetilde{\mathcal{F}}_T\right]$$

   prawie pszędzie i w L_1, gdzie

   $$\widetilde{\mathcal{F}}_T = \bigvee_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{T_n}.$$

   Wnioskuj z punktu (a), że

   $$\mathbf{E}_x\left[f(X_T) \middle| \widetilde{\mathcal{F}}_T\right] = f(X_{T-}).$$

   (c) Pokaż, że teza punktu (b) pozostaje prawdziwa, jeśli przyjmiemy jedynie, że $f \in C_0(S)$, oraz wywnioskuj, że dla każdych $f, g \in C_0(S)$,

   $$\mathbf{E}_x\left[f(X_T)g(X_{T-})\right] = \mathbf{E}_x\left[f(X_{T-})g(X_{T-})\right].$$

   Wnioskuj, że $X_{T-} = X_T$, $\mathbf{P}_x$-prawie wszędzie.

2. **(Operacja zabijania)** W tym ćwiczeniu zakładamy, że X ma ciągłe trajektorie. Niech A będzie zwartym podzbiorem S oraz

   $$T_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}.$$

   (a) Dla każdego $t \geq 0$ i każdej funkcji $\varphi \in C_0(S)$, definiujemy

   $$Q_t^*\varphi(x) = \mathbf{E}_x[\varphi(X_t)\,\mathbf{1}_{\{t<T_A\}}], \quad x \in S.$$

   Sprawdź, że $Q_{t+s}^*\varphi = Q_t^*(Q_s^*\varphi)$, dla każdych $s, t \geq 0$.

   (b) Definiujemy $\overline{S} = (S \setminus A) \cup \{\Delta\}$, gdzie Δ jest punktem dodanym do $S \setminus A$ jako punkt izolowany. Dla każdej $\varphi \in C_0(\overline{S})$ i każdego $t \geq 0$, definiujemy

   $$\overline{Q}_t\varphi(x) = \mathbf{E}_x[\varphi(X_t)\,\mathbf{1}_{\{t<T_A\}}] + \mathbf{P}_x[T_A \leq t]\varphi(\Delta), \quad \text{jeśli } x \in S \setminus A$$

   oraz $\overline{Q}_t\varphi(\Delta) = \varphi(\Delta)$. Pokaż, że $(\overline{Q}_t)_{t\geq 0}$ jest półgrupą.

(c) Pokaż, że pod miarą prawdopodobieństwa $\mathbf{P}_x$ proces $\overline{X}$ zdefiniowany jako

$$\overline{X}_t = \begin{cases} X_t & \text{jeśli } t < T_A \\ \Delta & \text{jeśli } t \geq T_A \end{cases}$$

jest procesem Markowa z półgrupą $(\overline{Q}_t)_{t\geq 0}$, (spełnia postulaty (PF1, 2, 4) definicjia procesu Fellera.

(d) Zakładamy, że $(\overline{Q}_t)_{t\geq 0}$ jest półgrupą Fellera i oznaczamy jej generator przez $\overline{L}$. Niech $f \in \mathcal{D}(L)$ będzie taka, że f oraz Lf zanikają na zbiorze otwartym zawierającym A. Oznaczmy przez $\overline{f}$ dla obcięcia f do $E \setminus A$, i rozważamy $\overline{f}$ jako funkcję na $\overline{E}$ przez położenie $\overline{f}(\Delta) = 0$. Pokaż, że $\overline{f} \in \mathcal{D}(\overline{L})$ oraz $\overline{Lf} = Lf$ na $E \setminus A$.