SMUO 2024
lista 6: Kilka zaginionych faktów

1. Niech $T = (T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie półgrupą Fellera na S. Pokaż, że dla każdego $x \in S$ i każdego $t \geq 0$ istnieje miara $\mu_{t,x}$ na S taka, że
$$T_t g(x) = \int g(y)\, \mu_{t,x}(\mathrm{d}y).$$
Wskazówka: Rozważ jednopunktowe uzwarcenie S.

2. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że $\|T_t\| \leq 1$.

3. Niech $T = (T_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ będzie półgrupą Fellera. Pokaż, że dla każdego $t \geq 0$,
$$\inf_{x\in S} T_t f(x) \geq \inf_{x\in S} f(x).$$

4. Niech $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ będzie procesem Fellera. Rozważmy ograniczoną funkcję mierzalną $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$. Pokaż, że dla $\mathbb{F}$-czasu zatrzymania τ zachodzi
$$\mathbf{E}_x\left[\varphi(\tau, \theta_\tau) | \mathcal{F}_\tau\right] = \Phi(\tau, X_\tau) \quad \mathbf{P}_x - p.w.$$
gdzie
$$\Phi(t, x) = \int_\Omega \varphi(t, \omega)\mathbf{P}_x(\mathrm{d}\omega).$$

5. Pokaż, że jeżeli $A\colon C_0(S) \to C_0(S)$ jest ograniczonym operatorem, to $\mathcal{R}(I - \epsilon A) = C_0(S)$ dla dostatecznie małych $\epsilon > 0$.

6. Niech $(L, \mathcal{D}(L))$ będzie generatorem infinitezymalnym. Dla $\epsilon > 0$ rozważmy
$$L_\epsilon = L(I - \epsilon L)^{-1}, \qquad T_\epsilon(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n L_\epsilon^n}{n!}.$$
Pokaż, że T_ϵ jest półgrupą Fellera z generatorem L_ϵ.