

SMUO 2024

lista 8: systemy niezależnych cząstek

1. Niech $X = (X_t)_{t \geq 0}$ będzie nieprzywiedlnym, powracającym łańcuchem Markowa na (przeliczalnym) zbiorze S z rozkładem stacjonarnym π i q -macierzą q . Rozważmy łańcuch $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, w którym skończenie wiele nierozróżnialnych cząsteczek porusza się niezależnie po S zgodnie z łańcuchem X . Przestrzenią stanów dla Y jest zbiór S^* wszystkich skończonych konfiguracji η cząsteczek na S . Opisz q -macierz Q dla Y .
2. Niech $\Pi = \{\Pi(x), x \in S\}$ będzie zbiorem niezależnych zmiennych losowych, gdzie $\Pi(x)$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda\pi(x)$. Udowodnij, że

$$\Pi^*(\eta \in S^* : \eta(x) = k_x \text{ dla } x \in T) = \prod_{x \in T} P(\Pi(x) = k_x)$$

dla skończonego zbioru $T \subset S$ oraz liczb naturalnych $k_x, x \in T$, wyznacza miarę probabilistyczną na S^* .

3. Wykaż, że Π^* jest rozkładem stacjonarnym dla procesu $Y(t)$.
4. Załóżmy, że na S porusza się dokładnie k_0 cząstek. Jaki jest rozkład stacjonarny dla $Y(t)$?
5. W procesie Y każda cząstka przebywająca w $x \in S$ zmienia położenie z intensywnością $c(x) = -q(x, x)$. Rozważmy teraz inny proces $Z = (Z_t)$ na S^* , w którym z intensywnością $c(x)$ pewna cząstka w x przemieszcza się. Opisz q -macierz Q_1 dla Z .
6. Niech $\{\Pi(x), x \in S\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym, gdzie $\Pi(x)$ ma parametr $p(x)$ dla pewnej funkcji $p: S \rightarrow \mathbb{R}_+$. Znajdź warunki, dla których odpowiadający Π^* , jest rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha.