

Contents

Wykład 2: Mocna własność Markowa	1
Czasy zatrzymania	1
Charakteryzacja	3

Wykład 2: Mocna własność Markowa

2024-10-10

Piotr Dyszewski

Pojęcie czasu zatrzymania odgrywa kluczową rolę w teorii procesów stochastycznych. Są to losowe momenty adaptowalne do z góry zadanej filtracji. Jest to kluczowa koncepcja w silnej własności Markowa. Będziemy korzystać z ciągłej filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Czasy zatrzymania

Przypomnijmy, że w czasie dyskretnym definicja czasu zatrzymania τ jest taka, że $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ dla każdego naturalnego n . Jest to równoważne z warunkiem, że $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ dla każdego naturalnego n . W czasie ciągłym ta równoważność nie zachodzi, ponieważ $[0, \infty)$ nie jest przeliczalne. Warunek analogiczny do tego drugiego jest naturalny do użycia w czasie ciągłym, ponieważ zazwyczaj zdarzenie $\{\tau = t\}$ ma zerowe prawdopodobieństwo dla każdego t .

Definicja 0.1. Zmienna losowa $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ nazywana jest \mathbb{F} -czasem zatrzymania, jeśli $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \geq 0$.

W niektórych kontekstach filtracja \mathbb{F} , z którą pracujemy, jest na tyle regularna, że ułatwia to weryfikację, czy zmienna jest czasem zatrzymania.

Definicja 0.2. Powiemy, że filtracja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest prawostronnie ciągła, jeżeli

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}, \quad \text{gdzie} \quad \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 0.1. Załóżmy, że filtracja \mathbb{F} jest prawostronnie ciągła. Wówczas τ jest czasem zatrzymania wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Zadanie 0.2. Pokaż, że jeśli τ_1 i τ_2 są czasami zatrzymania, to również $\tau_1 \wedge \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$ i $\tau_1 + \tau_2$ są czasami zatrzymania.

Zadanie 0.3. Udowodnij, że jeśli $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest ciągiem czasów zatrzymania, które maleją do τ , to τ jest czasem zatrzymania.

Własność Markowa dotyczy warunkowej wartości oczekiwanej względem \mathcal{F}_s dla ustalonego s . Mocna własność Markowa jest analogiczna, ale warunkowanie odbywa się względem σ -algebry \mathcal{F}_τ , gdzie τ jest czasem stopu. Składa się ona ze zdarzeń, które są określone przez przeszłość aż do czasu τ .

Definicja 0.3. Dla czasu zatrzymania τ kładziemy

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Zadanie 0.4. Pokaż, że:

- \mathcal{F}_τ jest σ -algebrą,
- Założmy, że \mathbb{F} jest prawostronnie ciągła. Pokaż, że

$$\mathcal{F}_\tau = \{A : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ dla każdego } t \geq 0\}.$$

Oto niektóre podstawowe własności \mathcal{F}_τ .

Twierdzenie 0.1. *Jeśli $\tau, \tau_n, n \in \mathbb{N}$ są czasami zatrzymania, to:*

- a. τ jest mierzalny względem \mathcal{F}_τ .
- b. Jeśli $\tau_n \downarrow \tau$, to $\mathcal{F}_\tau = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$.
- c. $\tau_1 \leq \tau_2$ implikuje $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Proof. Zadanie. □

Mocna własność Markowa

Twierdzenie 0.2. *Niech (\mathbb{P}, \mathbb{F}) będzie łańcuchem Markowa na przeliczalnej przestrzeni stanów S . Załóżmy, że Y jest ograniczoną zmienną losową oraz że τ jest czasem zatrzymania. Wówczas dla każdego $x \in S$,*

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau] = \mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \quad \mathbf{P}_x - \text{prawie na pewno na } \{\tau < \infty\}. \quad (1)$$

Silna własność Markowa jest zazwyczaj używana w następujący sposób: Przemnóż równość (1) przez $\mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}$, a następnie zastosuj \mathbf{E}_x . Wynik, z uwzględnieniem, że $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$, to:

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}] = \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \mathbf{1}_{\{\tau < \infty\}}].$$

Twierdzenia 0.2. Najpierw załóżmy, że τ przyjmuje wartości z przeliczalnego zbioru $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots$ oraz ∞ . W tym przypadku silna własność Markowa sprowadza się do własności Markowa, jak teraz pokażemy.

Zauważmy, że prawa strona (1) jest mierzalna względem \mathcal{F}_τ . Musimy więc sprawdzić, że jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$ oraz $A \subseteq \{\tau < \infty\}$, to

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \mathbf{1}_A].$$

Aby to wykazać, napiszmy:

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_A] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_x[Y \circ \theta_{t_n} \mathbf{1}_{A \cap \{\tau = t_n\}}] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X(t_n)}[Y] \mathbf{1}_{A \cap \{\tau = t_n\}}] = \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \mathbf{1}_A].$$

W drugim kroku skorzystaliśmy z własności Markowa, ponieważ

$$A \cap \{\tau = t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n}$$

zgodnie z definicją \mathcal{F}_τ .

W drugim kroku uzasadnimy tezę dla dowolnych τ i Y postaci

$$Y(\omega) = \prod_{j=1}^m f_j(\omega(t_j)), \quad (2)$$

dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+$ oraz ograniczonych funkcji $f_1, \dots, f_m: S \rightarrow \mathbb{R}$.

Czas τ przybliżamy go od góry czasami stopu $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zdefiniowanymi przez

$$\tau_n = \frac{k+1}{2^n} \quad \text{jeśli} \quad \frac{k}{2^n} \leq \tau < \frac{k+1}{2^n}.$$

dla dostatecznie dużych k . Weźmy teraz $A \in \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau_k}$ takie, że $A \subseteq \{\tau < \infty\}$. Z pierwszej części dowodu,

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_{\tau_k} \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_x[\mathbf{E}_{X(\tau_k)}[Y] \mathbf{1}_A].$$

Musimy przejść do granicy, gdy $k \rightarrow \infty$. Po prawej stronie, $\tau_k \downarrow \tau$ i z prawostronnej ciągłości $X(\tau_k) \rightarrow X(\tau)$ w S , czyli $X(\tau_k) = X(\tau)$ dla dostatecznie dużych k . Po lewej stronie, napiszmy

$$(Y \circ \theta_{\tau_k})(\omega) = \prod_{m=1}^n f_m(\omega(t_m + \tau_k)) \rightarrow \prod_{m=1}^n f_m(\omega(t_m + \tau)) = (Y \circ \theta_\tau)(\omega).$$

kiedy $k \rightarrow \infty$, dzięki prawostronnej ciągłości ścieżek. To pokazuje tezę:

$$\mathbf{E}_x [Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_A] = \mathbf{E}_x [\mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \mathbf{1}_A].$$

W ostatnim kroku dowodu pokażemy tezę dla dowolnego Y . Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+$ rozważmy $\pi_{t_1, \dots, t_m} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ dane wzorem

$$\pi_{t_1, \dots, t_m}(\omega) = (\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_m)).$$

Wówczas dla dowolnych $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq S$,

$$\pi_{t_1, \dots, t_m}^{-1} [A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m] = \{\omega \in \Omega : \omega(t_1) \in A_1, \dots, \omega(t_m) \in A_m\}.$$

Rozważmy teraz π -układ

$$\mathcal{B} = \{\pi_{t_1, \dots, t_m}^{-1} [A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m] : m \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}_+, A_1, \dots, A_m \subseteq S\}.$$

oraz λ -układ

$$\mathcal{L} = \{G \in \mathcal{F} : \mathbf{P}_x [\theta_\tau \in G, A] = \mathbf{E}_x [\mathbf{P}_{X(\tau)} [G] \mathbf{1}_A] \text{ dla } A \in \mathcal{F}_\tau, A \subseteq \{\tau < \infty\}\}.$$

Aproksymując $\mathbf{1}_{\pi_{t_1, \dots, t_m}^{-1} [A_1 \times \dots \times A_m]}$ zmiennymi Y postaci (2), dostajemy $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$. Z lematu o π - λ układach mamy $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}$. Czyli dla każdego $G \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{P}_x [\theta_\tau \in G, A] = \mathbf{E}_x [\mathbf{P}_{X(\tau)} [G] \mathbf{1}_A]$$

dla każdego $A \in \mathcal{F}_\tau$ takiego, że $A \subseteq \{\tau < \infty\}$. Jest to równoważne naszej tezie dla $Y = \mathbf{1}_G$. Z liniowości teza jest zatem prawdziwa dla każdego Y przyjmującego skończenie wiele wartości. Zastosowanie standardowego twierdzenia granicznego dowodzi tezy dla dowolnego ograniczonego Y . \square

Charakteryzacja

Zauważmy, że każda funkcja $\omega \in \Omega$ musi być następującego typu: Istnieje $t_1 \in (0, \infty]$, taki że $\omega(t) = \omega(0)$ dla każdego $t \in [0, t_1)$, następnie, jeśli $t_1 < \infty$, istnieje $t_2 \in (t_1, \infty]$ taki, że $\omega(t) = \omega(t_1) \neq \omega(0)$ dla każdego $t \in [t_1, t_2)$, i tak dalej. Powyższe czasy t_1, t_2, \dots zależą oczywiście od wyboru ω . Dla każdego $\omega \in \Omega$, istnieje zatem ciąg

$$T_0(\omega) = 0 < T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq T_3(\omega) \leq \dots \leq \infty,$$

taki, że $X_t(\omega) = X_0(\omega)$ dla każdego $t \in [0, T_1(\omega))$ oraz dla każdej liczby całkowitej $i \geq 1$, warunek $T_i(\omega) < \infty$ implikuje $T_i(\omega) < T_{i+1}(\omega)$, $X_{T_i(\omega)}(\omega) \neq X_{T_{i-1}(\omega)}(\omega)$ i $X_t(\omega) = X_{T_i(\omega)}(\omega)$ dla każdego $t \in [T_i(\omega), T_{i+1}(\omega))$. Co więcej, $T_n(\omega) \uparrow \infty$, gdy $n \rightarrow \infty$. Nietrudno jest sprawdzić, że T_0, T_1, T_2, \dots są czasami stopu. Na przykład,

$$\{T_1 \leq t\} = \{X(t) \neq X(0)\} \cup \bigcup_{q \in (0,1) \cap \mathbb{Q}} \{X_q \neq X_0\} \in \mathcal{F}_t.$$

Przypomnijmy, że dla $\lambda > 0$, dodatnia zmienna losowa U ma rozkład wykładniczy z parametrem λ , jeśli $\mathbb{P}[U > r] = e^{-\lambda r}$ dla każdego $r \geq 0$. W poniższym lemacie przyjmujemy konwencję, że zmienna losowa wykładnicza o parametrze 0 jest równa ∞ prawie na pewno.

Lemma 0.1. *Niech $x \in S$. Istnieje rzeczywista liczba $c(x) \geq 0$, taka że zmienna losowa T_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem $c(x)$ pod \mathbf{P}_x . Co więcej, jeśli $c(x) > 0$, to T_1 i X_{T_1} są niezależne pod \mathbf{P}_x .*

Proof. Niech $s, t \geq 0$. Mamy

$$\mathbf{P}_x [T_1 > s + t] = \mathbf{E}_x [\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}} \Phi \circ \theta_s],$$

gdzie $\Phi(\omega) = \mathbf{1}_{\{\omega(r) = \omega(0), \forall r \in [0, t]\}}$. Używając własności Markowa, dostajemy

$$\mathbf{P}_x [T_1 > s + t] = \mathbf{E}_x [\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}} \mathbf{E}_x [\Phi]] = \mathbf{E}_x [\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}} \mathbf{P}_x [T_1 > t]] = \mathbf{P}_x [T_1 > s] \mathbf{P}_x [T_1 > t],$$

co implikuje, że T_1 ma rozkład wykładniczy pod \mathbf{P}_x .

Załóżmy teraz, że $c(x) > 0$. Wówczas $T_1 < \infty$, \mathbf{P}_x prawie na pewno. Dla każdego $t \geq 0$ i $y \in S$,

$$\mathbf{P}_x[T_1 > t, X_{T_1} = y] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}} \Psi \circ \theta_t],$$

gdzie dla $\omega \in \Omega$, $\Psi(\omega) = 0$ jeśli ω jest stałe, a w przeciwnym razie $\Psi(\omega) = \mathbf{1}_{\{\gamma_1(\omega)=y\}}$, gdzie $\gamma_1(\omega)$ jest wartością ω po jego pierwszym skoku. Zatem mamy

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x[T_1 > t, X_{T_1} = y] &= \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}} \mathbf{E}_x[\Psi]] = \\ &= \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}} \mathbf{P}_x[X_{T_1} = y]] = \mathbf{P}_x[T_1 > t] \mathbf{P}_x[X_{T_1} = y], \end{aligned}$$

co daje pożądaną niezależność. \square

Punkty, dla których $c(x) = 0$, są stanami pochłaniającymi dla procesu Markowa, w tym sensie, że $\mathbf{P}_x[X_t = x, \forall t \geq 0] = 1$. Dla każdych $x, y \in S$ definiujemy

$$\Pi(x, y) = \begin{cases} \mathbf{P}_x[X_{T_1} = y] & c(x) > 0 \\ \delta_x(y) & c(x) = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że $\Pi(x, \cdot)$ jest miarą prawdopodobieństwa na S .

Twierdzenie 0.3. *Niech (\mathbf{P}, \mathbb{F}) będzie łańcuchem Markowa w czasie ciągłym takim, że $\sup_{x \in S} c(x) < \infty$. Wówczas*

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}_x[X_t = y]|_{t=0} = c(x) \Pi(x, y).$$

Proof. Jeśli $c(x) = 0$, to $\mathbf{P}_x[X_t = x] = \mathbf{P}_x[X_0 = x] = 1$, i stąd

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}_x[X_t = x] - 1}{t} = 0.$$

Załóżmy teraz, że $c(x) > 0$. Najpierw zauważmy, że

$$\mathbf{P}_x[T_2 \leq t] = O(t^2) \tag{3}$$

gdy $t \rightarrow 0$. Rzeczywiście, używając silnej własności Markowa w T_1 ,

$$\mathbf{P}_x[T_2 \leq t] \leq \mathbf{P}_x[T_1 \leq t, T_2 \leq T_1 + t] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}} \mathbf{E}_{X_{T_1}}[T_1 \leq t]],$$

i możemy oszacować

$$\mathbf{P}_{X_{T_1}}[T_1 \leq t] \leq \sup_{y \in S} \mathbf{P}_y[T_1 \leq t] \leq \sup_{y \in S} c(y),$$

co daje oczekiwany wynik, ponieważ mamy również $\mathbf{P}_x[T_1 \leq t] \leq c(x)t$. Z (3) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x[X_t = y] &= \mathbf{P}_x[X_t = y, T_1 > t] + \mathbf{P}_x[X_{T_1} = y, T_1 \leq t] + O(t^2) \\ &= \delta_x(y) e^{-c(x)t} + \left(1 - e^{-c(x)t}\right) \Pi(x, y) + O(t^2), \end{aligned}$$

używając niezależności T_1 i X_{T_1} oraz definicji $\Pi(x, y)$. Dochodzimy do wniosku, że skoro $\mathbf{P}_x[X_0 = y] = \delta_x(y)$, to

$$\frac{\mathbf{P}_x[X_t = y] - \mathbf{P}_x[X_0 = y]}{t} \rightarrow -c(x) \delta_x(y) + c(x) \Pi(x, y).$$

co kończy dowód. \square

Kolejne twierdzenie dostarcza pełnego opisu ścieżek procesu X pod \mathbf{P}_x . Dla uproszczenia zakładamy, że nie ma stanów pochłaniających, ale czytelnik łatwo rozszerzy stwierdzenie na przypadek ogólny.

Twierdzenie 0.4. Zakładamy, że $c(y) > 0$ dla każdego $y \in S$ i że $\sup_{y \in S} c(y) < \infty$. Niech $x \in S$. Wówczas, \mathbf{P}_x p.n., czasy skoku $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ są skończone, a ciąg $X_0, X_{T_1}, X_{T_2}, \dots$ pod \mathbf{P}_x jest dyskretnym łańcuchem Markowa z macierzą przejścia Π rozpoczętym w x . Ponadto, pod warunkiem $(X_0, X_{T_1}, X_{T_2}, \dots)$, zmienne losowe $T_1 - T_0, T_2 - T_1, \dots$ są niezależne, a dla każdej liczby całkowitej $i \geq 0$, rozkład warunkowy $T_{i+1} - T_i$ jest wykładniczy z parametrem $c(X_{T_i})$.

Proof. Zastosowanie silnej własności Markowa pokazuje, że wszystkie czasy stopu T_1, T_2, \dots są skończone \mathbf{P}_x -p.n. Następnie, niech $y, z \in S$, a $f_1, f_2: S \rightarrow \mathbb{R}$. Używając silnej własności Markowa w T_1 :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_1}=y\}} f_1(T_1) \mathbf{1}_{\{X_{T_2}=z\}} f_2(T_2 - T_1)] &= \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_1}=y\}} f_1(T_1) \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_2}=z\}} f_2(T_2 - T_1)]] \\ &= \Pi(x, y) \Pi(y, z) \int_0^\infty e^{-c(x)s_1} f_1(s_1) ds_1 \int_0^\infty e^{-c(y)s_2} f_2(s_2) ds_2. \end{aligned}$$

Postępując indukcyjnie, otrzymujemy dla każdych $y_1, \dots, y_p \in S$ oraz $f_1, \dots, f_p: S \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_1}=y_1\}} \mathbf{1}_{\{X_{T_2}=y_2\}} \dots \mathbf{1}_{\{X_{T_p}=y_p\}} f_1(T_1) f_2(T_2 - T_1) \dots f_p(T_p - T_{p-1})] \\ = \Pi(x, y_1) \Pi(y_1, y_2) \dots \Pi(y_{p-1}, y_p) \prod_{i=1}^p \left(\int_0^\infty e^{-c(y_{i-1})s} f_i(s) ds \right), \end{aligned}$$

gdzie $y_0 = x$. □

Z powyższego twierdzenia wynika charakteryzacja łańcucha Markowa w terminach Q -macierzy. Przez $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_t$ oznaczać będziemy najmniejszą możliwą filtrację, tj.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t).$$

Wniosek 0.1. Niech $q = (q(x, y))_{x, y \in S}$ będzie Q -macierzą taką, że $\sup_{x \in S} |q(x, x)| < \infty$. Wówczas istnieje jedyna rodzina miar \mathbf{P} taka, że $(\mathbf{P}, \mathbb{F}^X)$ jest łańcuchem Markowa stowarzyszonym z Q -macierzą q .