Wykład 2: Mocna własność Markowa

2024-10-10

Piotr Dyszewski

Pojęcie czasu zatrzymania odgrywa kluczową rolę w teorii procesów stochastycznych. Są to losowe momenty adaptowalne do z góry zadanej filtracji. Jest to kluczowa koncepcj w silnej własności Markowa. Będziemy korzystać z ciągłej filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Czasy zatrzymania

Przypomnijmy, że w czasie dyskretnym definicja czasu zatrzymania τ jest taka, że $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ dla każdego naturalnego n. Jest to równoważne z warunkiem, że $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$ dla każdego naturalnego n. W czasie ciągłym ta równoważność nie zachodzi, ponieważ $[0,\infty)$ nie jest przeliczalne. Warunek analogiczny do tego drugiego jest naturalny do użycia w czasie ciągłym, ponieważ zazwyczaj zdarzenie $\{\tau = t\}$ ma zerowe prawdopodobieństwo dla każdego t.

Zmienna losowa $\tau : \Omega \to [0,\infty]$ nazywana jest $\mathbb{F}$-czasem zatrzymania, jeśli $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \ge 0$.

W niektórych kontekstach filtracja $\mathbb{F}$, z którą pracujemy, jest na tyle regularna, że ułatwia to weryfikację, czy zmienna jest czasem zatrzymania.

Powiemy, że filtracja $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ jest prawostronnie ciągła, jeżeli

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t_+}, \qquad \text{gdzie} \qquad \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$$

dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Załóżmy, że filtracja $\mathbb{F}$ jest prawostronnie ciągła. Wówczas τ jest czasem zatrzymania wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.

Pokaż, że jeśli τ_1 i τ_2 są czasami zatrzymania, to również $\tau_1 \wedge \tau_2$, $\tau_1 \vee \tau_2$ i $\tau_1 + \tau_2$ są czasami zatrzymania.

Udowodnij, że jeśli $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem czasów zatrzymania, które maleją do τ, to τ jest czasem zatrzymania.

Własność Markowa dotyczy warunkowej wartości oczekiwanej względem $\mathcal{F}_s$ dla ustalonego s.
Mocna własność Markowa jest analogiczna, ale warunkowanie odbywa się względem σ-algebry $\mathcal{F}_\tau$, gdzie τ jest czasem stopu. Składa się ona ze zdarzeń, które są określone przez przeszłość aż do czasu τ.

Dla czasu zatrzymania τ kładziemy

$$\mathcal{F}_\tau = \left\{ A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \text{ dla każdego } t \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Pokaż, że:

a. $\mathcal{F}_\tau$ jest σ-algebrą,
b. Załóżmy, że $\mathbb{F}$ jest prawostronnie ciągła. Pokaż, że

$$\mathcal{F}_\tau = \{A : A \cap \{\tau < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ dla każdego } t \ge 0\}.$$

Oto niektóre podstawowe własności $\mathcal{F}_\tau$.

Jeśli τ, τ_n, $n \in \mathbb{N}$ są czasasmi zatrzymania, to:

a. τ jest mierzalny względem $\mathcal{F}_\tau$.
b. Jeśli $\tau_n \downarrow \tau$, to $\mathcal{F}_\tau = \bigcap_n \mathcal{F}_{\tau_n}$.
c. $\tau_1 \le \tau_2$ implikuje $\mathcal{F}_{\tau_1} \subseteq \mathcal{F}_{\tau_2}$.

Zadanie.

Mocna własność Markowa

Niech $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ będzie łańcuchem Markowa na przeliczalnej przestrzeni stanów S. Załóżmy, że Y jest ograniczoną zmienną losową oraz że τ jest czasem zatrzymania. Wówczas dla każdego $x \in S$,

$$\mathbf{E}_x[Y \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau] = \mathbf{E}_{X(\tau)}[Y] \quad \mathbf{P}_x - \text{prawie na pewno} \quad \text{na} \quad \{\tau < \infty\}.(\#eq:2-1-68) \tag{1}$$

Silna własność Markowa jest zazwyczaj używana w następujący sposób: Przemnóż równość @ref(eq:2-1-68) przez $\mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}$, a następnie zastosuj $\mathbf{E}_x$. Wynik, z uwzględnieniem, że $\{\tau < \infty\} \in \mathcal{F}_\tau$, to:

$$\mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right] = \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_{X(\tau)} \left[Y\right] \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}}\right].$$

Najpierw załóżmy, że τ przyjmuje wartości z przeliczalnego zbioru $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots$ oraz ∞. W tym przypadku silna własność Markowa sprowadza się do własności Markowa, jak teraz pokażemy.

Zauważmy, że prawa strona @ref(eq:2-1-68) jest mierzalna względem $\mathcal{F}_\tau$. Musimy więc sprawdzić, że jeśli $A \in \mathcal{F}_\tau$ oraz $A \subseteq \{\tau < \infty\}$, to

$$\mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_A\right] = \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_{X(\tau)} \left[Y\right] \mathbf{1}_A\right].$$

Aby to wykazać, napiszmy:

$$\mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_A\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_{t_n} \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=t_n\}}\right] = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_{X(t_n)} \left[Y\right] \mathbf{1}_{A\cap\{\tau=t_n\}}\right] = \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_{X(\tau)}[Y]\mathbf{1}_A\right].$$

W drugim kroku skorzystaliśmy z własności Markowa, ponieważ

$$A \cap \{\tau = t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n}$$

zgodnie z definicją $\mathcal{F}_\tau$.

W drugim kroku uzasadnimy tezę dla dowolnych τ i Y postaci

$$Y(\omega) = \prod_{j=1}^{m} f_j(\omega(t_j)), (\#eq:2-spec) \tag{2}$$

dla pewnego $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ oraz ograniczonych funkcji $f_1, \ldots, f_m : S \to \mathbb{R}$.

Czas τ przybliżamy go od góry czasami stopu $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zdefiniowanymi przez

$$\tau_n = \frac{k+1}{2^n} \quad \text{jeśli} \quad \frac{k}{2^n} \leq \tau < \frac{k+1}{2^n}.$$

dla dostatecznie dużych k. Weźmy teraz $A \in \mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau_k}$ takie, że $A \subseteq \{\tau < \infty\}$. Z pierwszej części dowodu,

$$\mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_{\tau_k} \mathbf{1}_A\right] = \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_{X(\tau_k)}[Y]\mathbf{1}_A\right].$$

Musimy przejść do granicy, gdy $k \to \infty$. Po prawej stronie, $\tau_k \downarrow \tau$ i z prawostronnej ciągłości $X(\tau_k) \to X(\tau)$ w S, czyli $X(\tau_k) = X(\tau)$ dla dostatecznie dużych k. Po lewej stronie, napiszmy

$$\left(Y \circ \theta_{\tau_k}\right)(\omega) = \prod_{m=1}^{n} f_m(\omega(t_m + \tau_k)) \to \prod_{m=1}^{n} f_m(\omega(t_m + \tau)) = \left(Y \circ \theta_\tau\right)(\omega).$$

kiedy $k \to \infty$, dzięki prawostronnej ciągłości ścieżek. To pokazuje tezę:

$$\mathbf{E}_x \left[Y \circ \theta_\tau \mathbf{1}_A\right] = \mathbf{E}_x \left[\mathbf{E}_{X(\tau)}[Y]\mathbf{1}_A\right].$$

W ostatnim kroku dowodu pokażemy tezę dla dowolnego Y. Dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$ oraz $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ rozważmy $\pi_{t_1,\ldots,t_m} : \Omega \to \mathbb{R}^m$ dane wzorem

$$\pi_{t_1,\ldots,t_m}(\omega) = (\omega(t_1), \omega(t_2), \ldots, \omega(t_m)).$$

Wówczas dla dowolnych $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq S$,

$$\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}[A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m] = \{\omega \in \Omega \,:\, \omega(t_1) \in A_1, \ldots, \omega(t_m) \in A_m\}.$$

Rozważmy teraz π-układ

$$\mathcal{B} = \left\{\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}[A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m] \,:\, m \in \mathbb{N}, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+,\ A_1, \ldots, A_m \subseteq S\right\}.$$

oraz λ-układ

$$\mathcal{L} = \left\{G \in \mathcal{F} \,:\, \mathbf{P}_x\left[\theta_\tau \in G, A\right] = \mathbf{E}_x\left[\mathbf{P}_{X(\tau)}\left[G\right]\mathbf{1}_A\right] \text{ dla } A \in \mathcal{F}_\tau,\ A \subseteq \{\tau < \infty\}\right\}.$$

Aproksymując $\mathbf{1}_{\pi^{-1}_{t_1,\ldots,t_m}[A_1\times\ldots\times A_m]}$ zmiennymi Y postaci @ref(eq:2-spec), dostajemy $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}$. Z lematu o π-λ układach mamy $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{L}$. Czyli dla każdego $G \in \mathcal{F}$,

$$\mathbf{P}_x\left[\theta_\tau \in G, A\right] = \mathbf{E}_x\left[\mathbf{P}_{X(\tau)}\left[G\right]\mathbf{1}_A\right]$$

dla każdego $A \in \mathcal{F}_\tau$ takiego, że $A \subseteq \{\tau < \infty\}$. Jest to równoważne naszej tezie dla $Y = \mathbf{1}_G$. Z liniowości teza jest zatem prawdziwa dla każdego Y przyjmującego skończenie wiele wartości. Zastosowanie standardowego twierdzenia granicznego dowodzi tezy dla dowolnego ograniczonego Y.

Charakteryzacja

Zauważmy, że każda funkcja $\omega \in \Omega$ musi być następującego typu: Istnieje $t_1 \in (0, \infty]$, taki że $\omega(t) = \omega(0)$ dla każdego $t \in [0, t_1)$, następnie, jeśli $t_1 < \infty$, istnieje $t_2 \in (t_1, \infty]$ taki, że $\omega(t) = \omega(t_1) \neq \omega(0)$ dla każdego $t \in [t_1, t_2)$, i tak dalej. Powyższe czasy $t_1, t_2, \ldots$ zależą oczywiście od wyboru ω. Dla każdego $\omega \in \Omega$, istnieje zatem ciąg

$$T_0(\omega) = 0 < T_1(\omega) \leq T_2(\omega) \leq T_3(\omega) \leq \cdots \leq \infty,$$

taki, że $X_t(\omega) = X_0(\omega)$ dla każdego $t \in [0, T_1(\omega))$ oraz dla każdej liczby całkowitej $i \geq 1$, warunek $T_i(\omega) < \infty$ implikuje $T_i(\omega) < T_{i+1}(\omega)$, $X_{T_i(\omega)}(\omega) \neq X_{T_{i-1}(\omega)}(\omega)$ i $X_t(\omega) = X_{T_i(\omega)}(\omega)$ dla każdego $t \in [T_i(\omega), T_{i+1}(\omega))$. Co więcej, $T_n(\omega) \uparrow \infty$, gdy $n \to \infty$. Nietrudno jest sprawdzić, że $T_0, T_1, T_2, \ldots$ są czasami stopu. Na przykład,

$$\{T_1 \leq t\} = \{X(t) \neq X(0)\} \cup \bigcup_{q \in (0,1)\cap\mathbb{Q}} \{X_q \neq X_0\} \in \mathcal{F}_t.$$

Przypomnijmy, że dla $\lambda > 0$, dodatnia zmienna losowa U ma rozkład wykładniczy z parametrem λ, jeśli $\mathbb{P}[U > r] = e^{-\lambda r}$ dla każdego $r \geq 0$. W poniższym lemacie przyjmujemy konwencję, że zmienna losowa wykładnicza o parametrze 0 jest równa ∞ prawie na pewno.

Niech $x \in S$. Istnieje rzeczywista liczba $c(x) \geq 0$, taka że zmienna losowa T_1 ma rozkład wykładniczy z parametrem $c(x)$ pod $\mathbf{P}_x$. C o więcej, jeśli $c(x) > 0$, to T_1 i X_{T_1} są niezależne pod $\mathbf{P}_x$.

Niech $s, t \geq 0$. Mamy

$$\mathbf{P}_x[T_1 > s + t] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}} \Phi \circ \theta_s],$$

gdzie $\Phi(\omega) = \mathbf{1}_{\{\omega(r) = \omega(0),\, \forall r \in [0,t]\}}$. Używając własności Markowa, dostajemy

$$\mathbf{P}_x[T_1 > s + t] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}}\mathbf{E}_x[\Phi]] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > s\}}\mathbf{P}_x[T_1 > t]] = \mathbf{P}_x[T_1 > s]\mathbf{P}_x[T_1 > t],$$

co implikuje, że T_1 ma rozkład wykładniczy pod $\mathbf{P}_x$.

Załóżmy teraz, że $c(x) > 0$. Wówczas $T_1 < \infty$, $\mathbf{P}_x$ prawie na pewno. Dla każdego $t \geq 0$ i $y \in S$,

$$\mathbf{P}_x[T_1 > t, X_{T_1} = y] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}} \Psi \circ \theta_t],$$

gdzie dla $\omega \in \Omega$, $\Psi(\omega) = 0$ jeśli ω jest stałe, a w przeciwnym razie $\Psi(\omega) = \mathbf{1}_{\{\gamma_1(\omega) = y\}}$, gdzie $\gamma_1(\omega)$ jest wartością ω po jego pierwszym skoku. Zatem mamy

$$\mathbf{P}_x[T_1 > t, X_{T_1} = y] = \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}}\mathbf{E}_x[\Psi]] = \\ \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{T_1 > t\}}\mathbf{P}_x[X_{T_1} = y]] = \mathbf{P}_x[T_1 > t]\mathbf{P}_x[X_{T_1} = y],$$

co daje pożądaną niezależność.

Punkty, dla których $c(x)=0$, są stanami pochłaniającymi dla procesu Markowa, w tym sensie, że $\mathbf{P}_x[X_t = x,\, \forall t \geq 0] = 1$. Dla każdych $x, y \in S$ definiujemy

$$\Pi(x,y) = \begin{cases} \mathbf{P}_x[X_{T_1} = y] & c(x) > 0 \\ \delta_x(y) & c(x) = 0 \end{cases}$$

Zauważmy, że $\Pi(x,\cdot)$ jest miarą prawdopodobieństwa na S.

Niech $(\mathbf{P}, \mathbb{F})$ będzie łańcuchem Markowa w czasie ciągłym takim, że $\sup_{x\in S} c(x) < \infty$. Wówczas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, \mathbb{P}_x[X_t = y]|_{t=0} = c(x)\Pi(x,y).$$

Jeśli $c(x)=0$, to $\mathbf{P}_x[X_t = x] = \mathbf{P}_x[X_0 = x] = 1$, i stąd

$$\lim_{t\to 0} \frac{\mathbf{P}_x[X_t = x] - 1}{t} = 0.$$

Załóżmy teraz, że $c(x) > 0$. Najpierw zauważmy, że

$$\mathbf{P}_x[T_2 \leq t] = O(t^2)(\#eq:2-6-1) \tag{3}$$

gdy $t \to 0$. Rzeczywiście, używając silnej własności Markowa w T_1,

$$\mathbf{P}_x[T_2 \leq t] \leq \mathbf{P}x[T_1 \leq t, T_2 \leq T_1 + t] = \mathbf{E}x[\mathbf{1}_{\{T_1 \leq t\}} \mathbf{E}_{X_{T_1}}[T_1 \leq t]],$$

i możemy oszacować

$$\mathbf{P}_{X_{T_1}}[T_1 \leq t] \leq \sup_{y\in S} \mathbf{P}_y[T_1 \leq t] \leq \sup_{y\in S} c(y),$$

co daje oczekiwany wynik, ponieważ mamy również $\mathbf{P}_x[T_1 \leq t] \leq c(x)t$. Z @ref(eq:2-6-1) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x[X_t = y] &= \mathbf{P}_x[X_t = y,\, T_1 > t] + \mathbf{P}_x[X_{T_1} = y,\, T_1 \leq t] + O(t^2) \\ &= \delta_x(y) e^{-c(x)t} + \left(1 - e^{-c(x)t}\right)\Pi(x,y) + O(t^2), \end{aligned}$$

używając niezależności T_1 i X_{T_1} oraz definicji $\Pi(x,y)$. Dochodzimy do wniosku, że skoro $\mathbf{P}_x[X_0 = y] = \delta_x(y)$, to

$$\frac{\mathbf{P}_x[X_t = y] - \mathbf{P}_x[X_0 = y]}{t} \to -c(x)\delta_x(y) + c(x)\Pi(x,y).$$

co kończy dowód.

Kolejne twierdzenie dostarcza pełnego opisu ścieżek procesu X pod $\mathbf{P}_x$. Dla uproszczenia zakładamy, że nie ma stanów pochłaniających, ale czytelnik łatwo rozszerzy stwierdzenie na przypadek ogólny.

Zakładamy, że $c(y) > 0$ dla każdego $y \in S$ i że $\sup_{y\in S} c(y) < \infty$. Niech $x \in S$. Wówczas, $\mathbf{P}_x$ p.n., czasy skoku $T_1 < T_2 < T_3 < \dots$ są skończone, a ciąg $X_0, X_{T_1}, X_{T_2}, \dots$ pod $\mathbf{P}_x$ jest dyskretnym łańcuchem Markowa z macierzą przejścia Π rozpoczętym w x. Ponadto, pod warunkiem $(X_0, X_{T_1}, X_{T_2}, \dots)$, zmienne losowe $T_1 - T_0, T_2 - T_1, \dots$ są niezależne, a dla każdej liczby całkowitej $i \geq 0$, rozkład warunkowy $T_{i+1} - T_i$ jest wykładniczy z parametrem $c(X_{T_i})$.

Zastosowanie silnej własności Markowa pokazuje, że wszystkie czasy stopu $T_1, T_2, \dots$ są skończone $\mathbf{P}_x$-p.n. Następnie, niech $y, z \in S$, a $f_1, f_2 \colon S \to \mathbb{R}$. Używając silnej własności Markowa w T_1:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_1}=y\}} f_1(T_1) 1_{\{X_{T_2}=z\}} f_2(T_2 - T_1)] &= \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_1}=y\}} f_1(T_1) \mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_2}=z\}} f_2(T_2 - T_1)]] \\ &= \Pi(x,y)\Pi(y,z) \int_0^\infty e^{-c(x)s_1} f_1(s_1)\mathrm{d}s_1 \int_0^\infty e^{-c(y)s_2} f_2(s_2)\mathrm{d}s_2. \end{aligned}$$

Postępując indukcyjnie, otrzymujemy dla każdych $y_1, \dots, y_p \in S$ oraz $f_1, \dots, f_p \colon S \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_x[\mathbf{1}_{\{X_{T_1}=y_1\}}\mathbf{1}_{\{X_{T_2}=y_2\}} \dots \mathbf{1}_{\{X_{T_p}=y_p\}} f_1(T_1) f_2(T_2 - T_1) \dots f_p(T_p - T_{p-1})] \\ &\qquad\qquad = \Pi(x, y_1)\Pi(y_1, y_2) \dots \Pi(y_{p-1}, y_p) \prod_{i=1}^{p} \left(\int_0^\infty e^{-c(y_{i-1})s} f_i(s) \mathrm{d}s \right),\end{aligned}$$

gdzie $y_0 = x$.

Z powyższego twierdzenia wynika charakteryzacja łańcucha Markowa w terminach Q-macierzy. Przez $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_t$ oznaczać będziemy najmniejszą możliwą filtrację, tj.

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s \,:\, s \le t).$$

Niech $q = (q(x,y))_{x,y \in S}$ będzie Q-macierzą taką, że $\sup_{x \in S} |q(x,x)| < \infty$. Wówczas istnieje jedyna rodzina miar $\mathbf{P}$ taka, że $(\mathbf{P}, \mathbb{F}^X)$ jest łańcuchem Markowa stowarzyszonym z Q-macierzą q.