SMUO 2024
lista 8: systemy niezależnych cząstek

1. Niech $X = (X_t)_{t\geq 0}$ będzie nieprzywiedlnym, powracającym łańcuchem Markowa na (przeliczalnym) zbiorze S z rozkładem stacjonarnym π i q-macierzą q. Rozważmy łańcuch $Y = (Y_t)_{t\geq 0}$, w którym skończenie wiele nierozróżnialnych cząsteczek porusza się niezależnie po S zgodnie z łańcuchem X. Przestrzenią stanów dla Y jest zbiór S^* wszystkich skończonych konfiguracji η cząsteczek na S. Opisz q-macierz Q dla Y.

2. Niech $\Pi = \{\Pi(x), x \in S\}$ będzie zbiorem niezależnych zmiennych losowych, gdzie $\Pi(x)$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda\pi(x)$. Udowodnij, że
$$\Pi^*(\eta \in S^* : \eta(x) = k_x \text{ dla } x \in T) = \prod_{x\in T} P(\Pi(x) = k_x) \tag{1}$$
dla skończonego zbioru $T \subset S$ oraz liczb naturalnych k_x, $x \in T$, wyznacza miarę probabilistyczną na S^*.

3. Wykaż, że Π^* jest rozkładem stacjonarnym dla procesu $Y(t)$.

4. Załóżmy, że na S porusza się dokładnie k_0 cząstek. Jaki jest rozkład stacjonarny dla $Y(t)$?

5. W procesie Y każda cząstka przebywająca w $x \in S$ zmienia położenie z intensywnością $c(x) = -q(x, x)$. Rozważmy teraz inny proces $Z = (Z_t)$ na S^*, w którym z intensywnością $c(x)$ pewna cząstka w x przemieszcza się. Opisz q-macierz Q_1 dla Z.

6. Niech $\{\Pi(x), x \in S\}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie geometrycznym, gdzie $\Pi(x)$ ma parametr $p(x)$ dla pewnej funkcji $p\colon S \to \mathbb{R}_+$. Znajdź warunki, dla których odpowiadający Π^*, zadany przez (1), jest rozkładem stacjonarnym dla tego łańcucha.