SMUO 2024

Wykład 1: Łańcuchy Markowa w czasie ciągłym

Piotr Dyszewski

2024-10-28

Celem tego rozdziału jest skonstruowanie procesów Markowa w czasie ciągłym na przeliczalnym (lub skończonym) zbiorze S w oparciu o jego opis infinitezymalny. W następnym rozdziale zbadamy problem konstrukcji dla procesów na bardziej ogólnej przestrzeni stanów. Na razie ograniczamy naszą uwagę do bardziej konkretnej sytuacji przeliczalnego S. W tym przypadku często używa się słowa "łańcuch" zamiast "proces".

Przypomnijmy, że łańcuchem Markowa w czasie dyskretnym nazywamy proces stochastyczny $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ takie, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dowolnych $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$ takich, że

$$\mathbb{P}\left[X_{n-1} = s_{n-1},\ X_{n-2} = s_{n-2}, \ldots, X_0 = s_0\right] > 0$$

zachodzi

$$\mathbb{P}\left[X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1},\ X_{n-2} = s_{n-2}, \ldots, X_0 = s_0\right] = \mathbb{P}\left[X_n = s_n \mid X_{n-1} = s_{n-1}\right].$$

Powyższa własność jest bardzo często przytaczana jako wyjściowa definicja łańcucha Markowa. Mimo swojej prostoty, która ułatwia czytelnikom pierwsze zetknięcie z własnością Markowa, własność ta ma jedną wadę, która ujawnia się przy bardziej zaawansowanych rozważaniach teoretycznych.

Jeżeli chcemy badać tylko procesy na **przeliczalnej** przestrzeni stanów, to jedno naturalne uogólnienie ma następującą formę. Proces stochastyczny w czasie ciągłym $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ nazwiemy łańcuchem Markowa w czasie ciągłym na przeliczalnej przestrzeni stanów S, jeżeli dla dowolnego n i dowolnych $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ i dowolnych $s_0, s_1, \ldots, s_n \in S$ takich, że

$$\mathbb{P}\left[X(t_{n-1}) = s_{n-1},\ X(t_{n-2}) = s_{n-2}, \ldots, X(t_0) = s_0\right] > 0$$

zachodzi

$$\mathbb{P}\left[X(t_n) = s_n \mid X(t_{n-1}) = s_{n-1},\ X(t_{n-2}) = s_{n-2}, \ldots, X(t_0) = s_0\right] = \mathbb{P}\left[X(t_n) = s_n \mid X(t_{n-1}) = s_{n-1}\right].$$

Powyższa własność nie jest zbyt przydatna, jeżeli chcemy badać procesy na nieprzeliczalnej przestrzeni stanów. Dla bardzo wielu naturalnych obiektów zmienne losowe $X(t)$ w badanym przez nas procesie mogą mieć rozkład ciągły. Oznacza to, że warunek powyższy nie jest spełniony dla dowolnego wyboru parametrów.

W celu znalezienia bardziej elastycznego warunku zauważmy, że własność Markowa dla jednorodnego łańcucha Markowa $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ w czasie dyskretnym z macierzą przejścia

$$p(i,j) = \mathbb{P}[X_1 = j \mid X_0 = i]$$

zapisuje się jako

$$\mathbb{P}[X_n = j \mid \mathcal{F}_n] = p(X_n, j),$$

gdzie $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$. Dokładne uzasadnienie powyższej własności pozostawiamy jako zadanie. Podobnie, dla dowolnego $m \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X_{n+m} = j \mid \mathcal{F}_n] = p^{(m)}(X_n, j),$$

gdzie $(p^{(m)(i,j)})_{i,j\in S}$ jest m-tą potęgą macierzy przejścia

$$p^{(m)}(i,j) = \mathbb{P}[X_m = j \mid X_0 = i].$$

Oznacza to, że dla dowolnej funkcji mierzalnej $f\colon S \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[f(X_{n+m}) \mid \mathcal{F}_n] = \sum_{s\in S} f(s)p^{(m)}(X_n, s).$$

Powyższa definicja względnie łatwo zapisuje się w czasie ciągłym

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t}) \mid \mathcal{F}_s] = \sum_{x\in S} f(x)p^{(t)}(X_n, x),$$

gdzie

$$p^{(t)}(y,x) = \mathbb{P}[X_t = x | X_0 = y].$$

Relacja powyższa daje się zapisać w przypadku nieprzeliczalnej przestrzeni stanów jako

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t}) \mid \mathcal{F}_s] = \int_S f(x)p^{(t)}(X_n, \mathrm{d}x),$$

gdzie

$$p^{(t)}(y, \mathrm{d}x) = \mathbb{P}[X_t \in \mathrm{d}x | X_0 = y]$$

jest rozkładem X_t pod warunkiem $\{X_0 = y\}$. To niesie ze sobą kolejne problemy, ponieważ jak wcześniej zauważyliśmy $\{X_0 = y\}$ może być zdarzeniem o prawdopodobieństwie zero. Przedstawione podejście jest do uratowania pod kątem formalnym przez odniesienie się do regularnych rozkładów warunkowych.

Zamiast tego podejdziemy do problemu od innej strony. Naszym punktem wyjścia będzie odpowiednia rodzina miar. Jak zobaczymy wkrótce, to podejście będzie również opierało się o odpowiednik powyższej relacji. Oznacza to, że w rezultacie będziemy opisywali tę samą klasę procesów stochastycznych bez konieczności obchodzenia się z warunkowaniem po zdarzeniach niemożliwych.

Podstawowe definicje

Zaczynamy od prezentacji definicji trzech obiektów, na których się skupimy w tym rozdziale. Przypomnijmy, że będziemy definiować łańcuchy Markowa w czasie ciągłym na dyskretnej przestrzeni stanów S. Topologia na S to oczywiście topologia dyskretna, względem której wszystkie funkcje są ciągłe.

Głównym obiektem naszych badań będą procesy stochastyczne. Ze względów technicznych pracować będziemy na bardzo konkretnej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Niech Ω będzie zbiorem prawostronnie ciągłych funkcji $\omega\colon [0,\infty) \to S$ ze skończoną liczbą skoków w dowolnym skończonym przedziale czasowym. Dla każdego $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ rozważmy funkcję $X_t\colon \Omega \to S$ zadaną przez

$$X_t(\omega) = \omega(t).$$

Niech σ-ciało $\mathcal{F}$ na Ω będzie najmniejszym takim, że odwzorowanie $\omega \mapsto \omega(t)$ jest mierzalne dla każdego $t \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Niech wreszcie dla $s \in \mathbb{R}_+$ oznaczmy przez θ_s odwzorowanie $\Omega \to \Omega$ zadane przez

$$\theta_s(\omega)(t) = \omega(t+s).$$

W szczególności $X_t \circ \theta_s = X_{t+s}$. O odwzorowaniu θ_s można myśleć jak o przesunięciu czasu o s. Zamiast utożsamiać własność Markowa z procesem stochastycznym $X = \{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, utożsamimy ją z rodziną miar probabilistycznych na Ω, względem której X będzie procesem Markowa.

Definicja: Łańcuch Markowa w czasie ciągłym na przestrzeni stanów S

Łańcuchem Markowa w czasie ciągłym na przestrzeni stanów S nazywamy parę uporządkowaną $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$ taką, że

- **(ŁM1)** $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest filtracją względem której $X = (X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest adaptowalny i $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$.
- **(ŁM2)** $\mathbb{P} = \{\mathbb{P}_x\}_{x \in S}$. Dla każdego $x \in S$, $\mathbb{P}_x$ jest miarą probabilistyczną na Ω taką, że

$$\mathbf{P}_x[X_0 = x] = \mathbb{P}_x[\omega \in \Omega : \omega(0) = x] = 1.$$

- **(ŁM3)** Spełniona jest własność Markowa

$$\mathbb{E}_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_{X(s)}[Y] \text{ p.n. } \mathbb{P}_x$$

  dla wszystkich $x \in S$ i wszystkich ograniczonych mierzalnych Y na Ω.

To jest przykładowa definicja.