Contents

1 SMUO 2024

1.1 wykład 9: Konstrukcja systemów spinowych

Piotr Dyszewski

28-11-24

Dla $x \in V$ oraz $\eta \in \{0,1\}^V$ definiujemy $\eta^{(x)} \in \{0,1\}^V$ wzorem

$$\eta^{(x)}(y) = \begin{cases} \eta(y), & y \neq x \\ 1 - \eta(x), & y = x \end{cases}.$$

Dla f pochodzącego z odpowiedniego podzbioru $C_0(\{0,1\}^V)$ chcemy położyć

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in V} c(x,\eta) \left[f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right].$$

Okazuje się, że dokładne napisanie dziedziny jest problematyczne. Aby obejść tę trudność rozważmy

$$D = \left\{ f \in C(\{0,1\}^V) : \|f\|_o := \sup_\eta \sum_x \left| f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right| < \infty \right\}.$$

Konstrukcja systemów spinowych cd.

Aby sprawdzić (GI4) musimy wyprowadzić ograniczenie dla rozwiązań równania $f - \lambda L f = g$. Niech

$$\epsilon = \inf_{u,\eta} [c(u,\eta) + c(u,\eta_u)] \quad \text{oraz} \quad \gamma(x,u) = \sup_\eta |c(x,\eta_u) - c(x,\eta)|.$$

Zauważmy, że $\gamma(x,u)$ mierzy stopień, w jakim intensywność zmiany w miejscu x zależy od konfiguracji w miejscu u. Niech $\ell_1(V)$ będzie przestrzenią Banacha funkcji $\alpha : V \to \mathbb{R}$, które spełniają

$$||\alpha|| := \sum_x |\alpha(x)| < \infty.$$

Macierz γ definiuje operator Γ na $\ell_1(S)$ przez

$$\Gamma\alpha(u) = \sum_{x : x \neq u} \alpha(x)\gamma(x,u).$$

Operator ten jest dobrze zdefiniowany i ograniczony, pod warunkiem że

$$M := \sup_x \sum_{u : u \neq x} \gamma(x,u) < \infty,$$

a wtedy $||\Gamma|| = M$.

Dla $f \in C(\{0,1\}^V)$ i $x \in S$, niech

$$\Delta f(x) = \sup_\eta \left| f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right|.$$

Wtedy $\|f\|_o = ||\Delta f||_{l_1(V)}$. Oto oszacowanie, którego potrzebujemy.

Załóżmy, że spełniony jest jeden z warunków

- $f \in D$,
- f jest ciągła i
$$c(x, \cdot) \equiv 0 \text{ dla wszystkich oprócz skończonej liczby } x \in V.$$

Wówczas jeśli $f - \lambda Lf = g \in D$, $\lambda > 0$, oraz $\lambda M < 1 + \lambda\epsilon$, to

$$\Delta f \leq \left[(1+\lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma\right]^{-1} \Delta g,$$

gdzie nierówność zachodzi współrzędna po współrzędnej, a odwrotność jest zdefiniowana przez nieskończony szereg

$$\left[(1+\lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma\right]^{-1} \alpha = \frac{1}{1+\lambda\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda\epsilon}\right)^k \Gamma^k \alpha .(\#eq:4.5)$$

Proof. Zauważmy, że szereg w @ref(#eq:4.5) jest zbieżny dla $\alpha \in \ell_1(V)$ na mocy założenia $\lambda M < 1 + \lambda\epsilon$. Pisząc $f - \lambda Lf = g$ w punktach η oraz $\eta^{(u)}$, odejmując i zauważając że $(\eta^{(u)})^{(u)} = \eta$, otrzymujemy

$$\begin{gathered}[f(\eta^{(u)}) - f(\eta)][1 + \lambda c(u,\eta) + \lambda c(u,\eta^{(u)})] = [g(\eta^{(u)}) - g(\eta)] \\ +\lambda \sum_{x:x\neq u}\left\{c(x,\eta^{(u)})[f((\eta^{(u)})^{(x)}) - f(\eta^{(u)})] - c(x,\eta)[f(\eta^{(x)}) - f(\eta)]\right\} .(\#eq:4.6)\end{gathered}$$

Ponieważ wartości $f(\eta^{(u)}) - f(\eta)$, gdy η zmienia się a u jest ustalone, tworzą zbiór symetryczny, a ta różnica jest funkcją ciągłą η, dla każdego u istnieje takie η, że

$$f(\eta^{(u)}) - f(\eta) = \sup_{\zeta} |f(\zeta^{(u)}) - f(\zeta)| = \Delta f(u).$$

Stąd,
$$f(\zeta^{(u)}) - f(\zeta) \leq f(\eta^{(u)}) - f(\eta)$$
dla każdej ζ. Stosując to dla $\zeta = \eta^{(x)}$ i przekształcając, otrzymujemy

$$f((\eta^{(u)})^{(x)}) - f(\eta^{(u)}) = f((\eta^{(x)})^{(u)}) - f(\eta^{(u)}) \leq f(\eta^{(x)}) - f(\eta),$$

Używając tej nierówności w @ref(eq:4.6),

$$\begin{aligned}\Delta f(u)(1+\lambda\epsilon) &\leq \Delta f(u)[1 + \lambda c(u,\eta) + \lambda c(u,\eta^{(u)})] \\ &\leq \Delta g(u) + \lambda \sum_{x:x\neq u}\left[c(x,\eta^{(u)}) - c(x,\eta)\right][f(\eta^{(x)}) - f(\eta)] \\ &\leq \Delta g(u) + \lambda \sum_{x:x\neq u}\gamma(x,u)\Delta f(x).(\#eq:4.7)\end{aligned}$$

Jeśli @ref(eq:4.3) zachodzi, to tylko skończona liczba wyrazów po prawej stronie jest niezerowa, więc przy któregokolwiek z założeń faktu $\Gamma\Delta_f$ jest dobrze określona. Dlatego @ref(#eq:4.7) można zapisać jako

$$(1+\lambda\epsilon)\Delta f \leq \Delta g + \lambda\Gamma\Delta f.$$

Iteracja tej nierówności prowadzi to do

$$\Delta f \leq \frac{1}{1+\lambda\epsilon}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda\epsilon}\right)^k \Gamma^k \Delta g + \left(\frac{\lambda}{1+\lambda\epsilon}\right)^{n+1}\Gamma^{n+1}\Delta f.$$

Jeżeli rozważymy teraz $n \to \infty$, dostaniemy @ref(eq:4.4). $\square$

Załóżmy, że $M < \infty$. Wtedy $\overline{L}$ jest generatorem infinitezymalnym półgrupy Fellera $T = (T(t))_{t\in\mathbb{R}_+}$. Ponadto,

$$\Delta T(t)f \leq e^{-t\epsilon}e^{t\Gamma}\Delta f.(\#eq:4.8)$$

W szczególności, jeśli $f \in D$, to $T_t f \in D$ oraz

$$\|T(t)f\|_o \leq e^{(M-\epsilon)t}\|f\|_o.(\#eq:4.9)$$

Proof. Własności (GI1), (GI2), (GI3) i (GI5) z Definicji **??** zachodzą dla (L, D) są i są dziedziczone przez $\overline{L}$ z Faktu **??**. Aby sprawdzić warunek (GI4) weźmy wstępujący ciąg $V_n \subseteq V$ taki, że $\bigcup_n V_n = V$. Niech

$$L_n f(\eta) = \sum_{x\in V_n} c(x,\eta)\left[f\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta)\right], \quad f \in C\left(\{0,1\}^V\right).(\#eq:4.10)$$

To jest generator dla systemu spinowego, w którym współrzędne

$$(\eta(x) : x \notin V_n)$$

są stałe w czasie. Ponieważ L_n jest ograniczonym generatorem, spełnia

$$\mathcal{R}(I - \lambda L_n) = C(\{0,1\}^V)$$

dla dostatecznie małych $\lambda > 0$. Dla $g \in D$, możemy zdefiniować $f_n \in C(\{0,1\}^V)$ przez $f_n - \lambda L_n f_n = g$. Ponieważ L_n spełnia @ref(eq:4.3), jeśli λ jest wystarczająco małe, tak że $\lambda M < 1 + \lambda\epsilon$, wtedy $f_n \in D$ zgodnie z Faktem @ref(prp:4.2). W związku z tym możemy położyć

$$g_n = f_n - \lambda L f_n \in \mathcal{R}(I - \lambda L).$$

Niech $K = \sup_{x,\eta} c(x,\eta) < \infty$, wtedy z Faktu @ref(prp:4.2),

$$\begin{aligned}\|g_n - g\| = \lambda||(L - L_n)f_n|| &\leq \lambda K \sum_{x\notin V_n} \Delta f_n(x) \\ &\leq \lambda K \sum_{x\notin V_n} \left[(1+\lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma\right]^{-1}\Delta g(x).(\#eq:4.11)\end{aligned}$$

Ponieważ $\Delta g \in \ell_1(V)$, prawa strona @ref(eq:4.11) dąży do zera, gdy $n \to \infty$, więc $g_n \to g$. Stąd $g \in \mathrm{cl}(\mathcal{R}(I - \lambda L))$, więc wnioskujemy, że $D \subseteq \mathrm{cl}(\mathcal{R}(I - \lambda L))$. Ponieważ D jest gęste w $C(\{0,1\}^V)$, widzimy, że $\mathcal{R}(I - \lambda L)$ jest również gęste. Zgodnie z Faktem **??**, $\mathcal{R}(I - \lambda\overline{L})$ musi być domkniętym podzbiorem $C(\{0,1\}^V)$. Zatem

$$\mathcal{R}(I - \lambda\overline{L}) = C(\{0,1\}^V)$$

To kończy weryfikację, że $\overline{L}$ jest generatorem infinitezymalnym.

Przechodząc do drugiego stwierdzenia, zapiszmy @ref(eq:4.4) jako

$$\Delta_{(I-\lambda L)^{-1}} g \leq \left[(1+\lambda\epsilon)I - \lambda\Gamma\right]^{-1}\Delta g,$$

a następnie iterujmy, aby uzyskać

$$\Delta_{(I-\frac{t}{n}L)^{-1}} g \leq \left[\left(1 + \frac{t}{n}\epsilon\right)I - \frac{t}{n}\Gamma\right]^{-n}\Delta g.$$

Przechodząc do granicy otrzymujemy @ref(eq:4.8). □