SMUO 2024
lista 10: Model epidemii

1. Niech V będzie zbiorem przeliczalnym. Rozważmy system spinowy z generatorem infinitezymalnym postaci

$$Lf(\eta) = \sum_{x \in V} c(x, \eta) \left[f(\left(\eta^{(x)}\right) - f(\eta) \right],$$

gdzie liczby $c(x, \eta)$ dla $x \in V$ oraz $\eta \in \{0, 1\}^V$ są takie, że

$$\epsilon = \inf_{x,\eta} \left[c(x, \eta) + c\left(x, \eta^{(x)}\right) \right], \quad \gamma(x, y) = \sup_{\eta} \left| c\left(x, \eta^{(x)}\right) - c(x, \eta) \right|$$

spełniają

$$M = \sup_{x \in V} \sum_{y \neq x} \gamma(x, y) < \epsilon.$$

   a. Pokaż, że dla każdych $\eta, \xi \in \{0, 1\}^V$ i $f \in D$ (patrzy wykład 9) mamy $|f(\eta) - f(\xi)| \leq \|f\|_o$. Wywnioskuj, że $|T_t f(\eta) - T_t f(\xi)| \leq e^{(M-\epsilon)t} \|f\|_o$, gdzie $(T_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ jest stowarzyszoną półgrupą Fellera.

   b. Niech π będzie rozkładem stacjonarnym dla rozważanego procesu Fellera $(\eta_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Pokaż, że dla każdej ciągłej i rzeczywistej f na $\{0, 1\}^V$ i dla każdej miary probabilistycznej ν na $\{0, 1\}^V$ mamy

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{E}_\nu \left[f(\eta_t) \right] = \int f(\eta)\, \pi(\mathrm{d}\eta).$$

2. Rozważmy model epidemii na grafie G. Pokaż, że jeżeli

$$1/\lambda > \max_x \deg(x),$$

to proces ten posiada tylko jedną miarę stacjonarną.

3. Niech $N = (N(t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie jednorodnym procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$. Niech E będzie niezależną od N zmienną losową. Pokaż, że $N(t + E) - N(E)$ jest jednorodnym procesem Poissona z parametrem $\lambda > 0$.

4. Niech $\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem iid z rozkładem wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Niech $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ i niech

$$\nu(t) = \inf\{k \,:\, S_k > t\}.$$

Pokaż, że dla każdego $t > 0$ zmienna $t - S_{\nu(t)-1}$ ma ten sam rozkład co $\xi_1 \wedge t$.