# Lista 4: Niezależność i lemat Borela-Cantelliego

Zadania na ćwiczenia: 2025-03-17

Lista zadań w formacie PDF

## Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Maciek rzuca dwiema kośćmi. Pierwsza kość jest dobrze wyważona. Na drugiej szóstka wypada dwa razy częściej niż pozostałe liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma oczek będzie większa niż 10? Odpowiedź
   5/42
2. Losujemy punkt $(x, y)$ z kwadratu $[0, 1]^2$. Niech $A = \{|x-y| \leq 1/3\}$, $B = \{x \leq 1/2\}$ oraz $C = \{y \geq 1/2\}$. Czy zdarzenia $A$, $B$ i $C$ są niezależne? Czy są niezależne parami? Odpowiedź
   Zdarzenia nie są niezależne. Są niezależne parami.
3. Niech $\Omega = [-2, 2]$ oraz $A_n = [(-1)^n - 1/n, (-1)^n + 1/n]$. Znajdź $\limsup_n A_n$
   Odpowiedź
   $\{-1, 1\}$.
4. Zdarzenia $A_1, A_2, \ldots, A_{2025}$ są niezależne i mają jednakowe prawdopodobieństwo $p$. Jaka jest szansa, że zajdzie dokładnie jedno? Odpowiedź
   $2025p(1-p)^{2024}$
5. Zdarzenia $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa.
   Jaka jest szansa, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń $A_n$? Odpowiedź
   Niech $\mathbb{P}[A_k] = p$. Jeżeli $p > 0$, to szukana szansa wynosi zero.
6. Rzucono 10 razy kostką. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania
   a. 6 oczek co najmniej raz?
   b. 5 oczek dokładnie 3 razy?

Odpowiedź

a. 0.8385, b. 0.214

## Zadania na ćwiczenia

7. Wykonujemy dwa eksperymenty: rzucamy kością, na której liczby parzyste wypadają dwa razy częściej niż liczby nieparzyste i losujemy liczbę z przedziału $[0, 1]$. Skonstruuj przestrzeń przestrzeń probabilistyczną opisująca wykonanie tych eksperymentów niezależnie. Jakie jest prawdopodobieństwo, że suma otrzymanych liczb jest mniejsza niż 5/2?

8. Pokaż, że zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma$-ciała $\mathcal{F}_j = \sigma(A_j) = \{\emptyset, \Omega, A_j, A_j^c\}$ dla $j \in [n]$ są niezależne.

9. Niech $\Omega = [0, 1]$. Rozważmy zdarzenia

$$\begin{aligned}
A_1 &= [0, 1/2), \\
A_2 &= [0, 1/4) \cup [1/2, 3/4), \\
A_3 &= [0, 1/8) \cup [2/8, 3/8) \cup [4/8, 5/8) \cup [6/8, 7/8), \ldots.
\end{aligned}$$

   Pokaż, że zdarzenia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są niezależne.

10. Student musi poprawić oceny niedostateczne z dwóch przedmiotów. Szansa poprawienia oceny z pierwszego przedmiotu w jednej próbie wynosi $p$, a z drugiego — $q$. Żeby móc poprawić drugą ocenę, trzeba najpierw poprawić pierwszą. Poszczególne próby poprawiania są niezależne. Wiadomo, że po piętnastu próbach poprawiania oceny student jeszcze nie poprawił oceny z drugiego przedmiotu. Jaka jest szansa – pod tym warunkiem – że nie poprawił jeszcze oceny z pierwszego przedmiotu?

11. Rzucamy $2n$ razy symetryczną monetą. Niech $O_{2n}$ (odpowiednio $R_{2n}$) oznacza liczbę orłów (odpowiednio reszek). Dla ustalonego $k$ obliczyć

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|O_{2n} - R_{2n}| \leq 2k).$$

12. Niech $A_n$ będą zdarzeniami niezależnymi, przy czym $\mathbb{P}(A_n) = p_n \in (0,1)$. Wykaż, że zachodzi co najmniej jedno ze zdarzeń $A_n$ wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń $A_n$.

13. Rzucamy nieskończenie wiele razy monetą, w której orzeł wypada w prawdopodobieństwem $p \geq 1/2$. Niech $A_n$ oznacza zdarzenie, że pomiędzy rzutem $2^n$ a $2^{n+1}$ otrzymano ciąg $n$ kolejnych orłów. Pokaż, że zdarzenia $A_n$ z prawdopodobieństwem 1 zachodzą nieskończenie wiele razy.

14. Niech $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zdarzeń.

    a. Pokaż, że jeśli $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ oraz
    $$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty,$$
    to
    $$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0.$$

    b. Znajdź przykład ciągu zdarzeń $A_n$, do którego można zastosować wynik z punktu a, ale nie można zastosować lematu Borela-Cantellego.

## Zadania dodatkowe

15. Rzucamy nieskończenie wiele razy symetryczną monetą. Niech $A_n$ oznacza zdarzenie, że w pierwszych $n$ rzutach było tyle samo orłów i reszek. Wykazać, że z prawdopodobieństwem 1 zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń $A_n$.