Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

Notatki do wykładu

Dariusz Buraczewski Piotr Dyszewski

2025-02-24

Contents

Rachunek prawdopodobieństwa

Dariusz Buraczewski, Piotr Dyszewski

2025-02-24

Notatki te powstały na potrzeby kursu o tej samej nazwie, prowadzonego w Instytucie Matematycznym Uniwersytetu Wrocławskiego w semestrze letnim 2024/2025. Pierwsza wersja tych notatek jak i plan merytoryczny wykładu zostały przygotowane przez DB w latach 2020-2024. Interaktywna wersja notatek została przygotowana przez PD w semestrze letnim roku akademickiego 2024/2025.

Interaktywny charakter notatek był zainspirowany książkami Complex Analysis autorstwa Juana Carlosa Ponce Campuzano oraz Collision Detection Jeffreya Thompsona.

Notatki te wciąż znajdują się we wstępnej fazie i mogą zawierać błędy. Jeśli zauważysz jakiekolwiek nieścisłości, niedociągnięcia lub inne problemy, gorąco zachęcam do ich zgłaszania na GitHubie.

Do napisania książki wykorzystałem bibliotekę bookdown z pakietu R, a symulacje zostały stworzone przy użyciu javascript lub p5.js. Rysunki w przeważającej większości są generowane przy użyciu TikZ.

Wrocław, luty 2025

Piotr Dyszewski

Sylabus

Dane dotyczące przedmiotu

- **Nazwa przedmiotu:** Rachunek Prawdopodobieństwa 1R

- **Jednostka oferująca przedmiot:** Instytut Matematyczny

- **Założenia:** Analiza i topologia R (28-MT-S-oAnTopR), (Kombinatoryka 28-MT-S-oKomb)
- **Strona www:** https://sites.google.com/site/piotrdyszewski/teaching/RPR1

- **Forma zajęć:** wykład + ćwiczenia

- **Punkty ECTS:** 7

Skrócony plan wykładu

W trakcie wykładu poruszymy następujące zagadnienia:

- **A) Przestrzeń probabilistyczna**: aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa, miara probabilistyczna, własności miary probabilistycznej, prawdopodobieństwo warunkowe, prawdopodobieństwo całkowite, wzór Bayesa, niezależność zdarzeń, lemat Borela-Cantelliego;
- **B) elementy losowe**: zmienne losowe, wektory losowe, niezależne zmienne losowe;
- **C) rozkłady prawdopodobieństwa**: rozkłady zmiennych losowych, dystrybuanty, rozkłady dyskretne i absolutnie ciągłe;
- **D) parametry rozkładów**: wartość oczekiwana, wariancja, kowariancja, funkcje charakterystyczne
- **E) twierdzenia graniczne**: zbieżność zmiennych losowych, prawa wielkich liczb, prawo 0-1 Kołmogorowa mocne i słabe prawo wielkich liczb, twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a, centralne twierdzenie graniczne

Podstawowa literatura do wykładu:

- Durrett, R. (2019). Probability: theory and examples (Vol. 49). Cambridge university press.
- Billingsley, P. (2017). Probability and measure. John Wiley & Sons.
- Jakubowski, J., & Sztencel, R. (2001). Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Script.

Szczegółowy plan wykładu

Wstępny plan tematów poruszanych na poszczególnych wykładach:

1. Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa
2. Prawdopodobieństwo warunkowe, niezależność zdarzeń
3. Lemat Borela-Cantelliego
4. Zmienne losowe
5. Rozkłady zmiennych losowych
6. Wektory losowe, niezależność zmiennych losowych
7. parametry rozkładów
8. Nierówności związane z momentami, słabe prawo wielkich liczb
9. Zbieżność zmiennych losowych, prawo $0-1$ Kołmogorowa
10. Mocne prawo wielkich liczb

11. Twierdzenie de Moivre'a-Laplace'a
12. Zbieżność według rozkładu
13. Funkcje charakterystyczne
14. Centralne twierdzenie graniczne
15. Zastosowania CTG, rozkłady stabilne

Efekty kształcenia

Po wykładzie student:

1. Wymienia i definiuje podstawowe obiekty teorii prawdopodobieństwa (**A**, **B**, **C**, **D**);
2. Podaje związki między podstawowymi obiektami teorii prawdopodobieństwa (**A**, **B**, **C**, **D**);
3. Wykorzystuje narzędzia teorii prawdopodobieństwa do opisu zmiennych losowych w terminach ich rozkładu i ich parametrów (**B**, **C**, **D**);
4. Formułuje twierdzenia graniczne (**D**);
5. Bada zmienne losowe pod kątem zależności (**A**, **B**);
6. Analizuje ciąg zmiennych losowych pod kątem różnych rodzajów zbieżności (**B**, **E**);
7. Stosuje twierdzenia graniczne do analizy ciągów zmiennych losowych (**B**, **E**);
8. Stosuje nierówności i lemat Borela-Cantelliego w analizie ciągów zmiennych losowych (**A**, **B**, **E**)
9. Stosuje metodę funkcji charakterystycznej do dowodzenia twierdzeń granicznych (**D**, **E**);

Sposób weryfikacji efektów kształcenia

Na zaliczenie składać się będą:

- Aktywność na ćwiczeniach;
- Dwa sprawdziany pisemne.

Metody i kryteria oceniania

Zaliczenie ćwiczeń na sprawdzianów pisemnych i aktywności w czasie zajęć. Ocena z egzaminu wystawiona jest na podstawie egzaminu pisemnego.

Warunkiem zaliczenia przedmiotu jest:

- Uzyskanie 30% punktów za zadania stanowiące bieżącą weryfikację efektów kształcenia;
- Uzyskanie pozytywnej oceny z egzaminu stanowiącego końcową weryfikację efektów kształcenia.

Kryteria ocen:

- **(dst)** student realizuje punkty 1-4 efektów kształcenia
- **(db)** student realizuje punkty 1-7 efektów kształcenia
- **(bdb)** student realizuje punkty 1-9 efektów kształcenia

Wrocław, luty 2025
Piotr Dyszewski

Part I

Notatki

1 Wprowadzenie

Każdy wykład z rachunku prawdopodobieństwa zaczyna się ogólnym stwierdzeniem, że jest to dział matematyki zajmujący się badaniem zdarzeń losowych. Ważne jednak jest doprecyzowanie o jaką analizę zdarzeń losowych chodzi i jakiego rodzaju aparat matematyczny jest do tego potrzebny. Jeżeli ograniczymy się jedynie do badania prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń takich jak jedenaście osób trafiło “szóstkę” w Lotto. Znajomość samej wartości liczbowej, na dodatek bardzo małej i trudnej do wyobrażenia, niezbyt wiele użytecznych informacji i nie pozwoli udzielić odpowiedzi na wiele naturalnych pytań. Jak często dochodzi do takich zdarzeń? Jakie powinny być stawki za poszczególne zakłady aby Lotto było opłacalne dla Totalizatora Sportowego?

Okazuje się, że mimo iż nie mamy sposobu na przewidzenie wyniki zdarzenia czy eksperymentu losowego, to jesteśmy w stanie opisać pewne deterministyczne zależności między nimi. Zależności te pozwalają między innymi dobrze zaplanować cennik Lotto. Omówimy teraz pokrótce kilka konkretnych przykładów aby dokładniej zobrazować zależności o których będziemy w trakcie wykładu mówić.

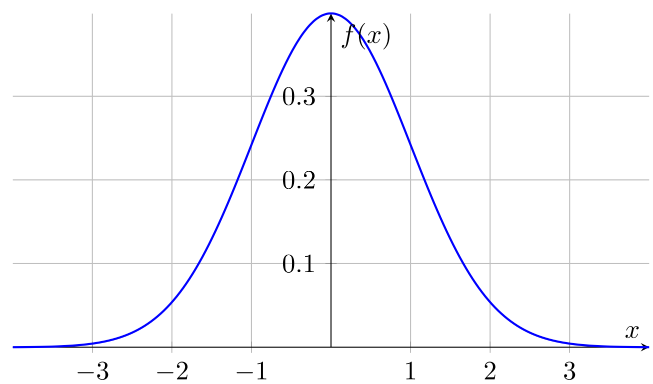
1.1 Krzywa dzwonowa

Pierwszy przykład pochodzi z Tokio, gdzie w październiku 2024 roku odbył się Hakone Ekiden Yosenkai - półmaraton (bieg na 21.0975 km) kwalifikacyjny do wyścigu Hakone Ekiden (bieg sztafetowy). Oczywiście spodziewamy się, że znakomita większość zawodników uplasuje w połowie stawki i kilka najszybszych lub najwolniejszych osób będzie odstawało odpowiednio na jej początku i końcu.

Okazuje się jednak, że dokładny rozkład biegaczy jest bardzo regularny. Zaobserwowana krzywa to funkcja dzwonowa, która jest równa

$$\exp\left(-x^2/(2\sigma^2)\right)/\sqrt{2\pi\sigma^2}$$

dla pewnego parametru $\sigma > 0$. W trakcie wykładu zobaczymy dokładnie skąd bierze się zaobserwowany kształt. Poniżej przedstawiamy wykres dla $\sigma = 1/2$.



$f(x)$
0.3
0.2
0.1
x
-3
-2
-1
1
2
3

1.2 Deska Galtona

Istnieje wiele innych przykładów, w których obserwujemy krzywą dzwonową. Aby zrozumieć jej pochodzenie warto przyjrzeć się najprostszym przykładom. Jednym z nich jest deska Galtona zaprezentowana poniżej. Kule spadają po kołkach za każdym razem odbijając się losowo w lewo bądź prawo. Poniżej widzimy histogram (znormalizowany wykres słupkowy) liczby kul, które opuściły deskę przez dane miejsce.

Numery na histogramie mówią ile razy kola odbiła się od kołka w prawo. Zauważmy, że po dłuższym czasie nasz histogram zaczyna przypominać krzywą dzwonową. Powyższe stanowi przykład *Twierdzenia granicznego*. Mimo, że nie jesteśmy w stanie przewidzieć wyniku pojedynczego eksperymentu (nie wiemy gdzie dokładnie wyląduje ustalona kula), to wiemy jak po uśrednieniu będzie zachowywał się cały system. W trakcie wykładu będziemy zajmować się opisem tego typu zjawisk.

1.3 Jeszcze jeden przykład

Ideą twierdzeń granicznych jest wyodrębnienie deterministycznego stwierdzenia o losowym układzie. Nie wszystkie twierdzenia graniczne muszą się wiązać z krzywą dzwonową. Losowe parkietaże, które teraz krótko omówimy, wiążą się z innym dobrze znanym kształtem.

Dla naturalnego n rozważmy szachownicę wymiarów $2n \times 2n$ z której usunięto cztery rogi (równoramienne trójkąty prostokątne o ramieniu $n-1$). Diament dla $n = 4$ wygląda następująco.

Dla naturalnego n chcemy pokryć diament kostkami domina o wymiarach 2×1 oraz 1×2. Poniżej znajduje się skrypt generujący losowy parkietaż diamentu rzędu n.

n=3

n=4

n=5

n=10

n=50

n=100

n=200

Strzałki Reset

Widzimy, że dużych wartości n parkietaż wygląda bardzo regularnie. Rogi parkietażu są monochromatyczne, co oznacza, że północny i południowy róg są wyłożone kostkami poziomymi a wschodni i zachodni pionowymi. Widzimy też. że kolorowy fragment parkietażu (tam, gdzie widzimy zarówno kostki poziome jak i kostki pionowe) zbiega do okręgu.

Dokładne opisanie powyższego zjawiska wykracza poza ramy tego wykładu. Zainteresowanym polecamy przeanalizowanie algorytmu generującego losowe permutacje (przycisk Auto). Algorytm ten tłumaczy dlaczego rogi diamentu są monochromatyczne.

1.4 Quiz

Niektóre sekcje w notatkach będą zakończone krótkim quizem aby czytelnik mógł sprawdzić swój poziom zrozumienia materiału. Prezentowane pytania będą zazwyczaj proste. Aby dokładnie zrozumieć materiał należy przerobić listy zadań.

2 (PART) Listy zadań

Lista 1: Rozgrzewka

Zadania na ćwiczenia: 2025-02-24

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Na szachownicy o wymiarach $n \times n$ umieszczono 8 nierozróżnialnych wież, w taki sposób aby żadne dwie się nie biły. Na ile sposobów można to zrobić? Jak zmieni się wynik, gdy wieże będą rozróżnialne? Odpowiedź

Jeżeli wieże nie są rozróżnialne $\binom{n}{8}^2 8!$ jeżeli wieże są rozróżnialne $\binom{n}{8}^2 (8!)^2$.

2. Na ile sposobów można rozmieścić n kul w k urnach jeżeli: (a) kule są rozróżnialne, (b) kule są nierozróżnialne. Odpowiedź
   a n^k b $\binom{n+k-1}{k-1}$
3. Ile jest liczb mniejszych od 1000 podzielnych przez jedną z liczb 3, 5, 7? Odpowiedź
   542
4. Na płaszczyznie danych jest pięć punktów kratowych (o obu współrzędnych całkowitych). Wykazać, ze środek jednego z odcinków łączacych te punkty również jest kratowy Odpowiedź
   Należy pokazać, że istnieje para punktów na płaszczyźnie, której współrzędne mają tę samą parzystość. Teza wynika z zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta.
5. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że w potasowanej talii 52 kart wszystkie cztery asy znajdują się koło siebie. Odpowiedź
   $4!/(52 \cdot 51 \cdot 50)$

Zadania na ćwiczenia

6. Na ile sposobów można ustawić 7 krzeseł białych i 3 czerwone przy okrągłym stole?

7. Zsumuj

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{j}$$

   gdzie $m, n, j \in \mathbb{N}$ są liczbami naturalnymi. Zapisz k^2 jako $a_2\binom{k}{2} + a_1\binom{k}{1} + a_0\binom{k}{0}$. Wykorzystaj to do policzenia $\sum_{k=0}^{n} k^2$

8. Wachlarzem rzędu n nazywamy graf o wierzchołkach $\{0, 1, \ldots, n\}$ z $2n - 1$ krawędziami zdefiniowanymi następująco: wierzchołek 0 połączony jest krawędzią z każdym z pozostałych wierzchołków i wierzchołek

k połączony jest krawędzią z wierzchołkiem $k+1$ dla każdego $1 \leq k < n$. Dla przykładu wachlarz rzędu 5 wygląda następująco

Przyjmując $S_0 = 0$, ile wynosi S_n liczba drzew rozpinających na takim grafie? Drzewem rozpinającym nazywamy spójny podgraf bez cykli zawierający wszystkie wierzchołki Wskazówka

Znajdź zależność rekurencyjną na S_n.

9. W klasie jest 15 uczniów. Na każdej lekcji odpytywany jest losowo jeden z nich. Oblicz prawdopodobieństwo, że podczas 16 lekcji zostanie przepytany każdy z nich.

10. W Totolotku losuje się 6 z 49 liczb. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żadne dwie nie będą dwiema kolejnymi liczbami naturalnymi?

11. Stefan Banach w każdej z kieszeni trzymał po pudełku zapałek. Początkowo każde z nich zawierało n zapałek. Za każdym razem kiedy Banach potrzebował zapałki sięgał losowo do jednej z kieszeni i wyciągał jedną zapałkę. Oblicz prawdopodobieństwo, że w momencie gdy sięgnął po puste pudełko, w drugim pozostało jeszcze k zapałek.

12. Oblicz
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

    Wskazówka

    Podnieś całkę do kwadratu i zastosuj współrzędne biegunowe.

13. Grupa składająca się z $2n$ pań i $2n$ panów została podzielona na dwie równoliczne grupy. Znaleźć prawdopodobieństwo, że każda z tych grup składa się z takiej samej liczby pań i panów. Przybliżyć to prawdopodobieństwo za pomocą wzoru Stirlinga.

Zadania dodatkowe

14. Pewien sułtan więził 100 osób. Pewnego dnia postanowił ich zgładzić. Jako, że był znany ze swego miłosierdzia dał im ostatnią szansę. Postawił przed nimi następujące zadanie. Każdemu więźniowi przyporządkował liczbę. Następnie w pokoju obok umieścił w rzędzie kolejno 100 pudełek i do każdego z nich włożył losową liczbę od 1 do 100 (w każdym pudełku inną). Wieźniowie po kolei, pojedynczo, wchodzą do pokoju z pudełkami. Mogą otworzyć 50 pudełek, aby znaleźć swój numer, ale pokój muszą pozostawić dokładnie w takim samym stanie w jakim go zastali. Następnie opuszczają pokój wychodząc innym wyjściem i nie mają możliwości skontaktowania się z pozostałymi osobami. Więźniowie zostaną ocaleni, jeżeli z nich każdy znajdzie swój numer. Jeżeli każdy z nich otwiera losowe 50 pudełek, to szanse ich przeżycia wynoszą $2^{-100} \approx 7,8 * 10^{-31}$. Czy mają oni lepszą strategię?