Lista 15: Funkcje charakterystyczne i centralne twierdzenie graniczne

Zadania na ćwiczenia: 2025-06-16

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Znajdź funkcje charakterystyczne rozkładów

   a. $\mathrm{Bin}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$
   b. $\mathrm{Geo}(p)$, $p \in (0, 1)$
   c. $\mathrm{Pois}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Odpowiedź

$$a.(pe^{it} + 1 - p)^n$$
$$b.\frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}$$
$$c.\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$$

2. Znajdź funkcję charakterystyczną zadanych rozkładów ciągłych

   a. $\mathcal{U}[a, b]$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$
   b. $\mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$

Odpowiedź

$$a.(e^{itb} - e^{ita})/(it(b - a))$$
$$b.\lambda/(\lambda - it)$$

3. Rzucono 1000 razy sześcienną kostką. Znaleźć przybliżenie prawdopodobieństwa, że suma oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

Odpowiedź

0.905

4. Zmienne losowe $X_1, \ldots, X_n$ są niezależne i mają ten sam rozkład. Wiedząc, że $\sum_{i=1}^n X_i$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$, wyznacz rozkład zmiennych X_i.

Odpowiedź

$$e^{-t^2/2} = \varphi_{\sum X_i}(t) = \varphi_{X_1}(t)^n$$

stąd $\varphi_{X_1}(t) = e^{-t/(2n)}$. Czyli $X_1 \sim \mathcal{N}(0, 1/n)$.

5. Załóżmy, że ciągi zmiennych losowych $\{X_n\}$ i $\{Y_n\}$ są niezależne oraz $X_n \Rightarrow X$ i $Y_n \Rightarrow Y$ przy czym X i Y są niezalezne. Pokaż, że
$$X_n + Y_n \Rightarrow X + Y.$$

Odpowiedź

Jest to nawiązanie do zadania z poprzedniej listy. Mamy

$$\varphi_{X_n+Y_n}(t) = \varphi_{X_n}(t)\varphi_{Y_n}(t) \to \varphi_X(t)\varphi_Y(t) = \varphi_{X+Y}(t)$$

Zadania na ćwiczenia

6. Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym $U[0,1]$, a Y niezależną od X zmienną losową o rozkładzie równomiernym na zbiorze $\{0,1,\ldots,n-1\}$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X+Y$.

7. Niech $\vec{X}$ będzie d-wymiarowym wektorem losowym o średniej zero i macierzy kowariancji Σ. Uzasadnij, że $\vec{X}$ ma d-wymiarowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0,\Sigma)$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\vec{t} \in \mathbb{R}^d$ zmienna losowa $\left\langle \vec{t}, \vec{X} \right\rangle$ ma jednowymiarowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, \langle \vec{t}, \Sigma^{-1}\vec{t} \rangle)$.

8. Udowodnić, że Jeżeli $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem zmiennych losowych o rozkładach dwumianowych $\mathcal{B}(n,p_n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$, to $X_n \Rightarrow \text{Pois}(\lambda)$.

9. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie z funkcją charakterystyczną φ. Niech N będzie (niezależną od ciągu $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$) zmienną losową o rozkładzie: $\mathbb{P}[N=n] = p_n$ dla $n \in \mathbb{N}$. Znaleźć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$. Wywnioskować *wzór Walda* $\mathbb{E}[S_N] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N]$.

10. Pokazać, że dla każdego $c \in \mathbb{R}$ zachodzi
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{j=0}^{n+c\sqrt{n}} \frac{n^j}{j!} = \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} \mathrm{d}s.$$
Wywnioskować, że
$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{j!} = \frac{1}{2}.$$

11. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\mathbb{V}ar[X_1] = 1$. Pokazać, że:
    a. $U_n = \frac{\sqrt{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$;
    b. $V_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

12. Niech $\left\{\vec{X}_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem niezależnych d-wymiarowych wektorów losowych o tym samym rozkładzie ze średnią $\vec{m}$ i macierzą kowariancji Σ. Pokaż, że
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\vec{X}_1 + \vec{X}_2 + \ldots + \vec{X}_n - n\vec{m}\right) \Rightarrow \mathcal{N}(\vec{0}, \Sigma).$$

13. Dany jest ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ niezależnych zmiennych losowych, przy czym dla $n \geq 1$,
$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$
$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Definiujemy schemat serii $X_{n,k} = X_k/\sqrt{n}$, $k = 1, \ldots, n$. Udowodnij, że nie jest spełniony warunek Lindeberga, ale mimo to ciąg
$$\sum_{k=1}^{n} X_{n,k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k}{\sqrt{n}}$$
zbiega według rozkładu do $\mathcal{N}(0,1)$.

Zadania dodatkowe

14. Pokazać, że warunek Lapunowa: dla wszystkich n, k naturalnych i pewnego $\delta > 0$ jest $\mathbb{E}|X_{n,k}|^{2+\delta} < \infty$ oraz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|X_{n,k} - \mathbb{E}X_{n,k}\right|^{2+\delta} = 0,$$

gdzie $s_n = \sum_k \mathbb{V}ar[X_{n,k}]$, pociąga za sobą warunek Lindeberga

15. Niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takim, że $\mathbb{E}[X_1] = 0$ oraz $\mathbb{V}ar[X_1] = \sigma^2$. Pokazać, że jeżeli f jest funkcją różniczkowalną w zerze, to

$$\sqrt{n}\left(f(S_n/n) - f(0)\right) \;\Rightarrow\; \mathcal{N}\left(0, (\sigma f'(0))^2\right) \;,$$

gdzie $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

16. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależne o rozkładach $\mathbb{P}[X_j = \pm j] = (2j)^{-1}$ i $\mathbb{P}[X_j = 0] = 1 - j^{-1}$. Dowieść,że $n^{-1}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ zbiegają słabo do rozkładu o funkcji charakterystycznej

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int_0^1 (\cos(tx) - 1)\frac{\mathrm{d}x}{x}\right\}.$$

17. Załóżmy, że $\{X_n\}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o takim samym rozkładzie i ich wspólna dystrybuanta jest funkcją ciągłą. Mówimy, że X_j jest rekordem, jeżeli $X_j > X_i$ dla każdego $i < j$. Niech Y_n będzie liczbą rekordów wśród pierwszych n zmiennych losowych. Pokaż, że

$$\frac{Y_n - \log n}{\sqrt{\log n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Wskazówka

Pokaż, że zdarzenia $\{X_n$ jest rekordem$\}$ są niezależne.