Lista 9: Niezależne zmienne

Zadania na ćwiczenia: 2025-04-28

Lista zadań w formacie PDF

Zadania do samodzielnego rozwiązania

1. Załóżmy, że $\xi_1, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi Bernoulliego, dla których

$$\mathbb{P}(\xi_k = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1 - p, \quad \text{dla } 1 \leq k \leq n.$$

   Wyznacz prawdopodobieństwo warunkowe, że pierwsza jedynka („sukces") pojawi się w m-tym kroku, pod warunkiem, że w ciągu n kroków sukces wystąpił dokładnie raz. Odpowiedź

   $1/n$

2. Zmienne X i Y są niezależne. X ma rozkład jednostajny na przedziale $[0, 1]$, a Y ma rozkład zadany przez $\mathbb{P}[Y = -1] = 1/3$, $\mathbb{P}[Y = 2] = 2/3$.
   a. Oblicz $\mathbb{P}[3X < Y]$.
   b. Wyznacz rozkład zmiennej XY. Odpowiedź
      a 4/9, b jednostajny na $[-1, 2]$

3. Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają rozkłady wykładnicze z parametrami odpowiednio λ i μ. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X + Y$. Odpowiedź

   Jeżeli $\mu \neq \lambda$, to jest to rozkład o gęstości $\mu\lambda(e^{-\mu x} - e^{-\lambda x})\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)/(\lambda - \mu)$ Jeżeli $\mu = \lambda$, to jest to rozkład o gęstości $\lambda^2 x e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)$.

4. Podaj przykład dwóch zależnych zmiennych losowych X i Y, dla których X^2 i Y^2 są niezależne. Odpowiedź

   $X = Y$ takie, że $\mathbb{P}[X = 1 = \mathbb{P}[X = -1] = 1/2$.

5. Załóżmy, że $\xi_1, \ldots, \xi_n$ są niezależnymi i identycznie rozłożonymi zmiennymi losowymi, dla których:

$$\mathbb{P}\{\xi_j = 1\} = p, \quad \mathbb{P}\{\xi_j = 0\} = 1 - p,$$

   dla pewnego $0 < p < 1$. Niech $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$, gdzie $k \leq n$. Udowodnij, że dla $1 \leq m \leq n$ zachodzi:

$$\mathbb{P}(S_m = k \mid S_n = l) = \frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{l-k}}{\binom{n}{l}}.$$

   Odpowiedź

   Zauważmy, że $S_n - S_m = \xi_{m+1} + \ldots + \xi_n$. Wobec tego zmienne S_m oraz $S_n - S_m$ są niezależne i mają rozkłady odpowiednio $\mathrm{Bin}(m, p)$ oraz $\mathrm{Bin}(n - m, p)$. Mamy więc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S_m = k,\, S_n = l] &= \mathbb{P}[S_m = k,\, S_n - S_m = l - k] \\ &= \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k} \binom{n-m}{l-k} p^{l-k} (1-p)^{n-m-l+k}\end{aligned}$$

   Podstawiając powyższe wyliczenie do wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy tezę.

Zadania na ćwiczenia

6. Niech X będzie zmienną losową posiadającą wartość oczekiwaną. Pokaż, że dla zdarzenia A o dodatnim prawdopodobieństwie

$$\mathbb{E}[X|A] = \frac{1}{\mathbb{P}[A]}\mathbb{E}\left[X\mathbf{1}_A\right].$$

7. Niech $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$, gdzie zmienne $X_1, \dots, X_n$ są niezależne z gęstościami odpowiednio $f_1, \dots, f_n$. Pokaż, że $X_1, \dots, X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektor losowy $\vec{X}$ ma rozkład o gęstości

$$f_{\vec{X}}(x_1, x_2 \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdots f_n(x_n).$$

8. Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem 1. Znajdź rozkład $Y = \min_{1 \le i \le n} X_i$. Czy X_n i Y są niezależne?

9. Niech X i Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wartościach całkowitych. Pokaż, że dla każdej wartości k zachodzi

$$\mathbb{P}[X + Y = k] = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathbb{P}[X = k - j]\mathbb{P}[Y = j].$$

10. Zmienne losowe $X_1, \dots, X_n$ są niezależne i mają rozkłady Poissona z parametrami λ_i. Pokaż, że $X_1 + \ldots + X_n$ ma rozkład Poissona z parametrem $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$.

11. Załóżmy, że X_1 i X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ i $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$. Znajdź rozkład zmiennej losowej $X_1 + X_2$.

12. Niech E_1 i E_2 będą niezaleznymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Znajdź rozkład E_1 pod warunkiem $\{E_1 \le t < E_1 + E_2\}$ dla $t > 0$.

13. Niech $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ będzie kołem jednostkowym. Rozważmy $\mathcal{F} = \mathcal{B}or(\Omega)$ oraz $\mathbb{P}$ jako unormowaną dwuwymiarową miarę Lebesgue'a. Rozważmy zmienne losowe $X(\omega) = \omega_1/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, $Y(\omega) = \omega_2/\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$ oraz $Z(\omega) = \omega_1^2 + \omega_2^2$ dla $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$.

    a. Czy zmienne X i Y są niezależne?
    b. Czy zmienne X i Z są niezależne?

14. Niech Z będzie zmienną losową o rozkładzie $\mathrm{Exp}(1)$. Niech $\{Z\}$ oznacza część ułamkową zmiennej Z, a $[Z]$ — jej część całkowitą.

    a. Udowodnij, że $\{Z\}$ i $[Z]$ są niezależne oraz wyznacz ich rozkłady jawnie.
    b. Rozważmy dodatnią zmienną losową X, której rozkład jest absolutnie ciągły z gęstością φ taką, że $\{X\}$ i $[X]$ są niezależne i $\{X\}$ ma rozkład jednostajny na $[0, 1]$. Znajdź φ.

Zadania dodatkowe

15. Z odcinka $[0, 1]$ losujemy niezależnie w sposób jednostajny liczby $X_1, X_2, \dots$. Uzasadnij, że z prawdopodobieństwem 1, ciąg $\{X_n\}$ jest gęsty w odcinku $[0, 1]$.

16. Scharakteryzuj gęstości doodatnich zmiennych losowych X dla których $[X]$ oraz $\{X\}$ są niezależne.

17. Niech $\Gamma \in \mathcal{F}$ i niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:

    a. Γ jest niezależny od $\mathcal{G}$ względem $\mathbb{P}$,
    b. dla każdego prawdopodobieństwa $\mathbb{Q}$ na $(\Omega, \mathcal{F})$, równoważnego z $\mathbb{P}$, takiego że $\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna, zachodzi $\mathbb{Q}(\Gamma) = \mathbb{P}(\Gamma)$.