

Technische Universität München

Fakultät für Mathematik



Bachelor-Arbeit

Diskret holomorphe Funktionen und diskrete Maximalflächen im Minkowskiraum

Patrick Wilson

Aufgabensteller: Prof. Dr. Tim Hoffmann

Betreuer: Prof. Dr. Tim Hoffmann

Abgabetermin: 1.2.2016

Ich erkläre hiermit, dass ich die Bachelor-Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe.

Garching, den

Abstract

Zusammenfassung

Es werden zwei Ansätze zur Diskretisierung holomorpher Funktionen vorgestellt und untersucht, inwiefern sie miteinander zusammenhängen. Darüber hinaus werden diskrete Maximalflächen mithilfe einer Weierstraß Darstellung aus diskret holomorphen Funktionen erzeugt. Der erste Ansatz diskretisiert die Cauchy-Riemann Gleichungen auf dem Gaußschen Zahlengitter. Diese Diskretisierung wird auf Quad-Graphen erweitert und es wird untersucht, wann eine Lösung des Gleichungssystems 3D-verträglich ist. Danach werden Lösungen des Doppelverhältnis Gleichungssystems als diskret holomorphe Funktionen betrachtet und auch diese werden auf 3D-Verträglichkeit geprüft. Es wird gezeigt, inwiefern der erste Ansatz eine Linearisierung des zweiten ist. Diskrete Maximalflächen können mithilfe von 3D-verträglichen Lösungen des Doppelverhältnissystems erzeugt werden. Die Betrachtung von Maximalflächen im dreidimensionalen Minkowskiraum unterscheidet sich zum euklidischen Fall, da die nichtdefinite Lorentzmetrik einige Sonderfälle mit sich bringt. Schließlich werden singuläre Facetten von Maximalflächen klassifiziert und Beispiele betrachtet.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Diskretisierung Holomorpher Funktionen	3
2.1	Diskrete Cauchy-Riemann Gleichungen	3
2.2	Diskret harmonische Funktionen	4
2.3	3D-Verträglichkeit	6
2.4	3D-Verträglichkeit der Cauchy-Riemann Gleichungen	8
2.5	Doppelverhältnis Gleichungen	10
2.6	3D-Verträglichkeit der Doppelverhältnis Gleichungen	11
2.7	Linearisierung	12
2.8	Kreismuster	13
3	Diskrete Maximalflächen im Minkowskiraum	15
3.1	Der kontinuierliche Fall	15
3.2	Das Doppelverhältnis im $\mathbb{R}^{2,1}$	16
3.3	Diskret isotherme Flächen im $\mathbb{R}^{2,1}$	17
3.4	Das Limit Doppelverhältnis	19
3.5	Konstruktion diskreter Maximalflächen	20
3.6	Klassifizierung singulärer Facetten	23
3.7	Beispiele diskret maximaler Flächen	28
4	Fazit und Ausblick	31

1 Einleitung

In der diskreten Differentialgeometrie wird versucht diskrete Modelle aufzustellen, die die Charakteristiken und Strukturen der korrespondierenden Objekte der klassischen Differentialgeometrie in einem diskreten Sinne widerspiegeln. Die diskreten Objekte können als Approximierung der glatten Objekte aufgefasst werden, die diese im besten Fall im Grenzwert annähern. Darüber hinaus kann man die diskreten Objekte auch unabhängig von dem kontinuierlichen Fall untersuchen. Oft weisen sie nämlich eigene interessante Eigenschaften auf. Zudem ist eine Diskretisierung selten eindeutig und von Anwendung zu Anwendung unterscheidet sich die Eignung der Diskretisierung. Anwendung findet die diskrete Differentialgeometrie unter anderem in Computergraphik, Architektur und mathematischer Physik.

Der Bereich der komplexen Analysis steht in Wechselbeziehung mit der Differentialgeometrie. Einerseits findet man geometrische Deutungen für die Funktionentheorie und andererseits stellen sich dessen Erkenntnisse als nützliche Mittel in der Differentialgeometrie heraus. Bei der Diskretisierung dieser Verbindung gibt es, wie so oft in der diskreten Differentialgeometrie, verschiedene Ansätze. Zwei dieser Ansätze, die beide die Eigenschaft der Holomorphie diskretisieren, werden in dieser Arbeit genauer betrachtet. Beide erhalten teils unterschiedliche Eigenschaften und Strukturen des kontinuierlichen Falls und stellen sich für verschiedene Anwendungen als nützlich heraus.

Der historischen Route folgend wird zunächst die lineare Theorie der Diskretisierung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen untersucht. Sogenannte *préholomorphe* Funktionen, die diese linearen Differentialgleichungen erfüllen, wurden schon seit den 1940er Jahren von Isaacs [Isa41] und Ferrand [Fer44] untersucht. Die Theorie wurde von Duffin [Duf56, Duf68] und Mercat [Mer01] sowie neulich auch von Günther [Gü14] erweitert.

Die von Thurston 1985 vorgestellten Ideen zur Verknüpfung von Circle Packings und winkeltreuen Abbildungen motivierten zu einem weiteren Ansatz zur Diskretisierung von Holomorphie. Diese Theorie wird als nichtlinear bezeichnet, da bestimmte Lösungen eines Doppelverhältnis Gleichungssystems von sogenannten Kreismustern stammen. [BMS05] Die beiden Ansätze können darüberhinaus in einen Zusammenhang gebracht werden. Von Funktionen, die das Doppelverhältnis lösen, lassen sich Funktionen, die die diskreten Cauchy-Riemann Gleichungen lösen, ableiten.

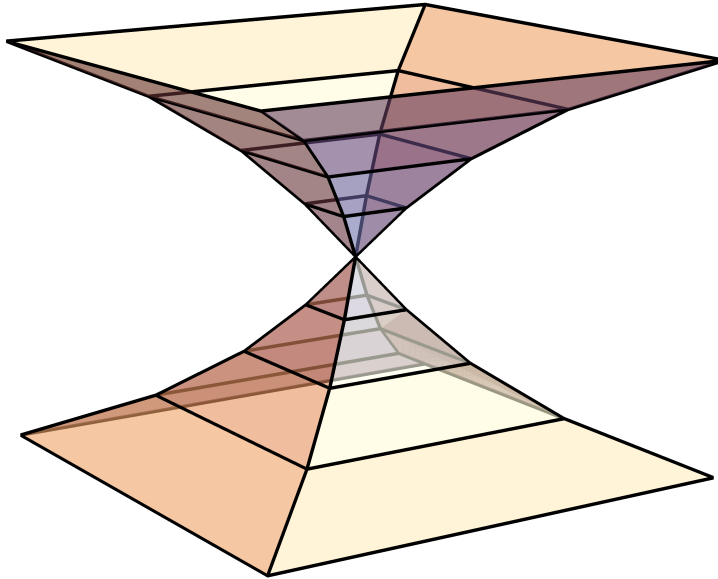


Abbildung 1: Eine diskrete Maximalfläche

Es ist bekannt, dass Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung (Maximalflächen) im Kontinuierlichen mit Hilfe von holomorphen Funktionen erzeugt werden. Im Diskreten lassen sich analog Flächen definieren, die von diskret holomorphen Funktionen aus dem nichtlinearen Ansatz erzeugt werden. Dieser Ansatz der Diskretisierung von Flächen ist für den euklidischen Raum \mathbb{R}^3 schon seit längerem bekannt [BP96] und wurde neu-lich [Yas15] auf Flächen im dreidimensionalen Minkowskiraum $\mathbb{R}^{2,1}$ angewandt. Diese Anwendung ist aufgrund der Struktur des Minkowskiraums nicht trivial. Nach der De-finition des Doppelverhältnisses in $\mathbb{R}^{2,1}$ kommt es zu Komplikationen mit lichtartigen Kanten, die berücksichtigt werden müssen. Zudem kommen bei der Betrachtung diskre-ter Maximalflächen besondere Arten von Facetten vor, die man verschiedenen Klassen zuordnen kann.

2 Diskretisierung Holomorpher Funktionen

Es werden zwei Ansätze zur Diskretisierung von holomorphen Funktionen betrachtet. Préholomorphe Funktionen erhalten die Eigenschaft, dass Real- und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch sind und dass das Wegintegral über geschlossene Kurven verschwindet. Der nichtlineare Ansatz fasst diskret holomorphe Funktionen als Lösungen des Doppelverhältnis Gleichungssystems auf. Es wird untersucht, inwiefern diese beiden Gleichungssysteme als integrierbar aufgefasst werden können und wie sie miteinander zusammenhängen. Dieser Abschnitt greift auf einige der in [BMS05] ausgeführten Konzepte zu.

2.1 Diskrete Cauchy-Riemann Gleichungen

Holomorphie ist eine Eigenschaft von Funktionen, die in der komplexen Analysis wie folgt definiert wird.

Definition 1. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ heißt auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{C}$ *holomorph*, falls für alle $z \in U$ der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$, wobei $h \in \mathbb{C}$, existiert. [Wol15]

Weiter kann man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifizieren und es gilt: Eine reell-differenzierbare Funktion $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann holomorph, wenn $f_x = -if_y$ ¹ für alle Punkte $x + iy \in U$. [BG15]

Wir betrachten nun das zweidimensionale Zahlengitter $\mathbb{Z}[i] = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$, das *Gaußsche Zahlengitter*. Für $z \in \mathbb{Z}[i]$ sei $(z, z + 1, z + 1 + i, z + i)$ ein *Einheitsquadrat*. Eine *Region* $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}[i]$ sei als eine einfach zusammenhängende Vereinigung aneinander anschließender Einheitsquadrate definiert.

Betrachtet man diskrete Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Region $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}[i]$, so kann man folgende Eigenschaft fordern:

$$f(x + 1) - f(x) = -i(f(x + i) - f(x)) \quad (1)$$

für alle $(x, x + 1, x + 1 + i, x + i) \in \mathbb{D}$.

Dies ist eine Diskretisierung der *Cauchy-Riemann Gleichungen*, die in jedem Einheitsquadrat $(x, x + 1, x + 1 + i, x + i) \in \mathbb{D}$ die Gleichheit des *diskreten Differenzenquotienten* $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ für $h = 1$ und $h = i$ fordert. Sie geht auf Rufus P. Isaacs zurück, der solche Funktionen als *monodrifftic* bezeichnete [Isa41]. Schon die Eigenschaft, dass Real und Imaginärteil einer solchen Funktion mit dem Standard Laplace Operator als diskret harmonisch aufgefasst werden können, funktioniert in diesem Setting jedoch nicht. [Duf56]

¹ $f_x := \frac{\delta f}{\delta x}$

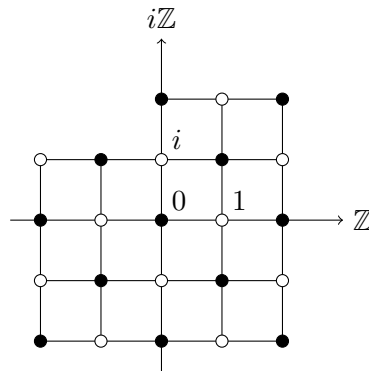


Abbildung 2: eine Region um $x = 0$

Eine weitere Diskretisierung der Cauchy-Riemann Gleichungen wurde von Jacqueline Ferrand betrachtet und stellt sich als fruchtbarer heraus:

$$f(x+i) - f(x+1) = i(f(x+1+i) - f(x)) \quad (2)$$

Ferrand nannte diese Art von diskret holomorphen Funktionen *préholomorph* [Fer44]. Die Symmetrie dieser Gleichung auf dem Gitter $\mathbb{Z}[i]$ motiviert dazu das Gitter bipartit in ein schwarzes und ein weißes Teilgitter G und G^* aufzuteilen. Markiert man von einem Punkt x ausgehend „schneckenförmig“ jeden Punkt abwechselnd weiß und schwarz, so erhält man ein schwarzes und ein weißes Gitter, wie in Abbildung 2. Beginnend bei $x \in \mathbb{Z}[i]$ als schwarzen Punkt wäre $x + 1$ weiß, $x + 1 + i$ schwarz, $x + i$ weiß, $x - 1 + i$ schwarz, $x - 1$ weiß, $x - 1 - i$ schwarz, $x - i$ weiß, $x - 1 - i$ schwarz, etc.

2.2 Diskret harmonische Funktionen

Wie in [Duf56] legen wir diskret *harmonische* Funktionen wie folgt fest:

Definition 2. Eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer Region $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}[i]$ ist *diskret harmonisch*, falls $Df(x) = 0$ mit

$$Df(x) := f(x+1+i) + f(x+1-i) + f(x-1-i) + f(x-1+i) - 4f(x) \quad (3)$$

Diese Definition macht natürlich nur Sinn, wenn die vier Einheitsquadrate um x Teil der Region \mathbb{D} sind. Man sieht außerdem, dass die diskrete Harmonie für ein $x \in \mathbb{Z}[i]$ von den Werten der Funktion auf dem „gleichfarbigen“ Gitter abhängt.

Erfüllt ein $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ nun die diskrete Cauchy-Riemann Gleichung 2 für x in den vier Einheitsquadraten um x in einer Region $\mathbb{D} \in \mathbb{Z}[i]$, so gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{mit (2) f\"ur } x: & f(x+1+i) - f(x) = -i(f(x+i) + f(x+1)) \\ \text{mit (2) f\"ur } x-1: & f(x-1+i) - f(x) = i(f(x+i) - f(x-1)) \end{array}$$

mit (2) für $x - 1 - i$: $f(x - 1 - i) - f(x) = i(f(x - 1) - f(x - i))$
 mit (2) für $x - i$: $f(x + 1 - i) - f(x) = -i(f(x + 1) - f(x - i))$

Somit ist $Df(x) = 0$. Insgesamt folgt

Lemma 1. Préholomorphe Funktionen nach (2) sind diskret harmonisch.

Wenn man andererseits diskrete Harmonie mit dem Standard Laplace Operator für Funktionen $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ auf Regionen $B \in \mathbb{Z}[i]$ festlegt:

$$D_0g(y) = g(y + 1) + g(y + i) + g(y - 1) + g(y - i) - 4g(y) \quad (4)$$

so kann man den Real- und Imaginärteil von $f = g_1 + ig_2$ auf die Gitter B_1 und B_2 aufteilen. Ein Gitter B_i lässt sich durch eine Transformation $A : B_i \rightarrow \mathbb{D}$ mit einer 45-Grad Drehung und einer Streckung mit Faktor $\sqrt{2}$ in gesamte Gitter \mathbb{D} als Teilgitter G bzw. G^* einbetten, indem für $y \in B_i$: $x := \text{Re}(y) + \text{Im}(y) + i(\text{Re}(y) - \text{Im}(y))$ und $A(y + 1) = (x + 1 + i)$, $A(y + i) = (x + 1 - i)$, $A(y - 1) = (x - 1 - i)$, $A(y - i) = (x - 1 + i)$. Somit ist $Df(x) = D_0g(y)$.

Lemma 2. Real- und Imaginärteile Préholomorpher Funktionen sind in diesem Sinne diskret harmonisch.

Wir erhalten also ein diskretes Analogon zu der Erkenntnis, dass Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen harmonisch sind. Auch die Umkehrung hiervon gilt (siehe dazu [Duf56]). Isaacs [Isa41] und auch Ferrand [Fer44] haben weitere Eigenschaften holomorpher Funktionen diskretisiert, wie das Verschwinden des Wegintegrals über geschlossenen Kurven (siehe auch [Kis08]).

Zu Beispielen préholomorpher Funktionen zählen Polynome mit $\deg \leq 2$, und $a^x b^y = e^{\alpha x + \beta y}$ für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $a, b \in \mathbb{C}$ wobei $(a + i)(b - i) = 2$ (siehe dazu [Kis08]).

Die Funktion $f(x) = x^3$ ist nicht préholomorph, da

$$f(x + 1 + i) - f(x) + i(f(x + i) - f(x + 1)) = i - 1.$$

Auch $x \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ ist $f(x) = \frac{1}{x}$ ist nicht préholomorph, da $f(x + 1 + i) - f(x) + i(f(x + i) - f(x + 1)) = \frac{1-i}{x(x+1+i)(x+i)(x+1)} \neq 0$. [Kis08]

Man kann das grundlegende Gitter, auf dem hier Funktionen definiert wurden, verallgemeinern und die Eigenschaften préholomorpher und diskret harmonischer Funktionen darauf erweitern. Die Definition nach J. Ferrand wurde von R. J. Duffin [Duf68] auf Graphen mit rautenförmigen Facetten und von C. Mercat [Mer01] auf diskrete Riemann-Flächen erweitert. Im Folgenden werden die von A. Bobenko, C. Mercat und Y. Suris in [BMS05] entwickelten Konzepte auf sogenannten *Quad-Graphen* ausgeführt.

2.3 3D-Verträglichkeit

Einige Eigenschaften von geometrischen Objekten, wie isothermen Flächen und Minimalflächen lassen sich auf die Integrierbarkeit (im Sinne integrierbarer Systeme) von Differentialgleichungen zurückführen. In [BMS05] wird die 3D-Verträglichkeit als korrespondierende Eigenschaft von Objekten im Diskreten aufgefasst. In diesem Abschnitt werden *Quad-Graphen* definiert, auf denen die 3D-Verträglichkeit von Gleichungssystemen festgelegt wird. Dieses Konzept verallgemeinert die Kombinatorik des $\mathbb{Z}^2 \cong \mathbb{Z}[i]$. Man kann sich vorstellen, dass beliebige Vierecke *aneinander geschweißt* werden, so dass sich auch mehr oder weniger als vier in einem Knoten treffen können.

Definition 3. (Quad-Graph)

- Eine **Zelle** ist ein Raum, der homeomorph zur Einheitskugel $B^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ist.²
- Eine **Zellzerlegung** ist eine Partitionierung von \mathbb{C} in eine disjunkte Vereinigung von Zellen.
- Ein **Quad-Graph** ist eine Zellzerlegung mit viereckigen Zellen.

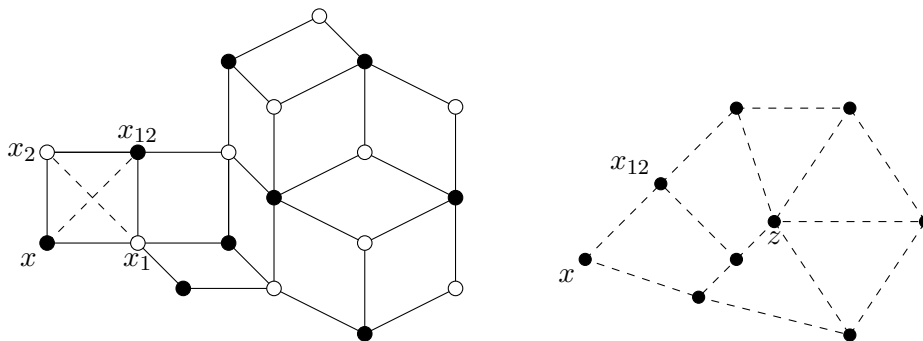


Abbildung 3: Bipartiter Quad-Graph \mathbb{D} und der schwarze Teilgraph G (gestrichelt)

Die Idee der bereits erwähnten schwarzen und weißen Teilgitter G und G^* können auf Quad-Graphen erweitert werden, so dass auch diese bipartit sind. Dazu sei zunächst G eine allgemeine Zellzerlegungen von \mathbb{C} . Wir wollen nun zu G eine *duale* Zellzerlegung G^* herleiten, so dass wir aus G und G^* einen Quad-Graph \mathbb{D} konstruieren können. Mit der Voronoi/Delaunay Konstruktion aus [BMS05] können wir G^* eindeutig festlegen.

Konstruktion des Dual G^*

Zunächst seien $V(G), F(G), E(G), \vec{E}(G)$ die Knoten, Facetten³, Kanten und gerichtete Kanten von G . Die Dualität zu G^* zeichnet sich durch die Entsprechung $F(G) \leftrightarrow V(G^*)$

²Es ist die euklidische Norm $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ für $z = x + iy$ gemeint.

³Viereckige Zellen, oder einfach Vierecke

und $V(G) \leftrightarrow F(G^*)$ aus. Eine Kante $e \in E(G)$ trennt zwei Facetten von G ; folglich verbindet die korrespondierende Kante $e^* \in E(G^*)$ die den Facetten entsprechenden Knoten in G^* . Andererseits seien e_1, \dots, e_n alle zu $x \in V(G)$ inzidenten Kanten in $E(G)$. Dann ist die zu x korrespondierende Facette in $F(G^*)$ von den Kanten e_1^*, \dots, e_n^* eingeschlossen. Man beachte, dass die dualen Kanten konsistent dieselbe Orientierung von \mathbb{C} beibehalten. So gilt $e^{**} = -e$.

Konstruktion des Double \mathbb{D}

Setzt man $V(\mathbb{D}) = V(G) \cup V(G^*)$, dann definiert jedes duale Kantenpaar $e = (x_1, x_2)$, $e^* = (x, x_{12})$ eine Facette $(x, x_1, x_{12}, x_2) \in F(\mathbb{D})$, wie in Abbildung 3 dargestellt, sowie die Kanten $(x, x_1), (x, x_2), (x_{12}, x_1), (x_{12}, x_2) \in \vec{E}(\mathbb{D})$. Unser Double \mathbb{D} ist also ein Quad-Graph. Darüber hinaus ist das Double automatisch bipartit, mit schwarzen Knoten aus G und weißen aus G^* . Wir definieren $star(x, G)$ als die Menge aller zu $x \in V(G)$ inzidenten (schwarzen) Kanten in $E(G)$. Analog ist $star(y, G^*)$ die Menge aller zu $y \in V(G^*)$ inzidenten Kanten in $E(G^*)$. Beispielsweise ist in Abbildung 3 $star(z, G)$ die Menge der fünf zu z inzidenten Kanten.

Sei eine komplexwertige Gewichtungsfunktion $v : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{C}$ auf den ungerichteten Kanten von G und G^* gegeben, für die gilt:

$$v(e^*) := 1/v(e) \text{ für } e \in E(G) \quad (5)$$

Definition 4. Auf einem Quad-Graph \mathbb{D} sei eine Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ *préholomorph* bezüglich v , falls für jede (positiv orientierte) Facette $(x, x_1, x_{12}, x_2) \in F(\mathbb{D})$ die *diskreten Cauchy-Riemann Gleichungen* gelten:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_{12}) - f(x)} = iv(x, x_{12}) = -\frac{1}{iv(x_1, x_2)}. \quad (6)$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der Holomorphie aus (2). Mit $v(e) = 1$ für alle $e \in E(G) \cup E(G^*)$ ist auf $\mathbb{D} = \mathbb{Z}[i]$ der Spezialfall der Holomorphie nach Ferrand gegeben.

Das in [BMS05] ausgeführte Konzept der *3D-Verträglichkeit* kann als diskretes Analogon zu Integrierbarkeit aufgefasst werden. Dieses wollen wir anhand der Cauchy-Riemann Gleichungen und der Doppelverhältnis Gleichungen im Folgenden ausführen. Diese Gleichungen sind Spezialfälle von allgemeinen Gleichungen auf den Facetten $(x, x_1, x_{12}, x_2) \in F(\mathbb{D})$ von Quad-Graphen:

$$\tau(f(x), f(x_1), f(x_{12}), f(x_2)) = 0, \quad (7)$$

wobei ein Wert $f(y)$ in τ bezüglich der anderen drei eindeutig festgelegt sei.

Dieser Gleichungstyp soll wie folgt in die dritte Dimension erweitert werden. Man definiere $\mathbb{D}' := \{x' : x \in \mathbb{D}\}$ als eine Kopie des Quadgraphen \mathbb{D} und verbinde die kor-

respondierenden Punkte $x \in \mathbb{D}$ mit $x' \in \mathbb{D}'$, so dass aus allen Facetten, *Quader* entstehen (siehe Abbildung 4). Auf diese Weise erhält man das dreidimensionale Gitter \mathbf{D} mit $V(\mathbf{D}) = V(\mathbb{D}) \cup V(\mathbb{D}')$, $E(\mathbf{D}) = E(\mathbb{D}) \cup E(\mathbb{D}') \cup \{(x, x') : x \in V(\mathbb{D})\}$ und $F(\mathbf{D}) = F(\mathbb{D}) \cup F(\mathbb{D}') \cup \{(x, y, y', x') : (x, y) \in E(\mathbb{D})\}$.

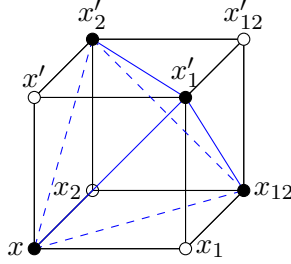


Abbildung 4: Quader von \mathbf{D} mit eingelegtem Tetraeder (blau) zu \mathbf{G}

Man betrachte die bereits erwähnten schwarzen und weißen Teilgitter G und G^* . Im kopierten Gitter \mathbb{D}' seien die korrespondierenden Teilgitter G' und G'^* . Die dreidimensionale Konstruktion \mathbf{D} kann dann als bipartit aufgefasst werden, indem man den x' die gegenteilige Farbe von x zuteilt. Man kann das schwarze Teilgitter also in 3D erweitern, mit $E(\mathbf{G}) := E(G) \cup E(G'^*) \cup \{(x, y) : x \in V(G), y \in V(G'^*), (x, y) \in E(\mathbb{D})\}$.

Die Diagonalen (x, x_{12}) , (x, x'_1) , (x, x'_2) , (x_{12}, x'_1) , (x_{12}, x'_2) , (x'_1, x'_2) bilden einen Tetraeder zu \mathbf{G} (siehe Abbildung 4). Analog erhält man einen weißen Tetraeder für \mathbf{G}^* .

Definition 5. Die Gleichung (7) heißt *3D-verträglich*, falls sie von \mathbb{D} auf die Quader von \mathbf{D} erweiterbar ist, so dass gegenüberliegende Facetten die gleiche Gleichung tragen.

Diese Definition kann man sich anhand von dem Quader in Abbildung 4 veranschaulichen. Falls die Funktion f bei x und dessen Nachbarn x' , x_1 und x_2 gegeben ist, so sind x_{12} , x'_1 , x'_2 eindeutig bestimmt. Die Gleichung ist dann 3D-verträglich, falls alle drei Facetten $(x_1, x_{12}, x'_{12}, x'_1)$, $(x_{12}, x_2, x'_2, x'_{12})$, und $(x', x'_1, x'_{12}, x'_2)$ denselben Wert für $f(x'_{12})$ ergeben.

2.4 3D-Verträglichkeit der Cauchy-Riemann Gleichungen

Die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind bezüglich einer komplexwertigen Gewichtungsfunktion v auf $E(G) \cup E(G^*)$ definiert, für die $v(x_1, x_2) := 1/v(x, x_{12})$ für $(x, x_1, x_{12}, x_2) \in F(\mathbb{D})$ gilt. Zusätzlich soll gelten, dass gegenüberliegende Diagonalen dieselben Werte von v tragen. Wir wollen in diesem Abschnitt untersuchen, wann die Cauchy-Riemann Gleichungen 3D-verträglich sind. Zunächst wollen wir auch die Kanten einer jeden Facette gewichten. Hier definieren wir, wie in [BMS05], eine gerichtete Gewichtungsfunktion auf den von $V(G)$ nach $V(G^*)$ gerichteten Kanten $\vec{E}(\mathbb{D})$.



Abbildung 5: Das gerichtete und ungerichtete Labeling einer Facette

Definition 6. (Labeling) Ein **gerichtetes Labeling** ist eine komplexwertige Gewichtungsfunktion $\alpha : \vec{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ auf den gerichteten Kanten $\vec{E}(\mathbb{D})$, für die gilt:

- (i) $\alpha(-a) = -\alpha(a)$ für alle $a \in \vec{E}(\mathbb{D})$
- (ii) gegenüberliegende und gleichgerichtete Kanten haben dasselbe Gewicht.

Für ein Labeling α ist $\alpha^2 : E(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ ein **ungerichtetes Labeling**, das auf den ungerichteten Kanten $E(\mathbb{D})$ definiert ist. Umgekehrt induziert jedes ungerichtete Labeling α^2 ein gerichtetes Labeling α . Hierfür gilt $\alpha^2(-a) = \alpha^2(a)$ für alle $a \in E(\mathbb{D})$ und gegenüberliegende Kanten haben dasselbe Gewicht.

Für $a = (x, y)$ ist $-a = (y, x)$. In einer Facette (x, x_1, x_{12}, x_2) gilt daher $\alpha_0 := \alpha(x, x_1) = -\alpha(x_1, x) = -\alpha(x_{12}, x_2)$ und $\alpha_1 := \alpha(x, x_2) = -\alpha(x_{12}, x_1)$ (siehe Abbildung 5).

Mit diesem Begriff können wir nun die 3D-Verträglichkeit préholomorpher Funktionen mit Erkenntnissen aus [BMS05] wie folgt charakterisieren.

Theorem 1. Eine Funktion $f : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann 3D-verträglich préholomorph bezüglich eines $v : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{C}$, wenn ein Labeling $\alpha : \vec{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass für alle Facetten

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_{12}) - f(x)} = iv(x, x_{12}) = -\frac{1}{iv(x_1, x_2)} = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 + \alpha_0}. \quad (8)$$

Hierbei ist α_0, α_1 wieder wie in Abbildung 5. Wir nennen ein solches f *3D-verträglich préholomorph*, da v bezüglich des Labelings festgelegt ist.

Beweisskizze. Zunächst muss man wie in [BMS05, Theorem 10] zeigen, dass $v : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann 3D-verträglich auf die Gitter $E(\mathbf{G}) \cup E(\mathbf{G}^*)$ erweitert werden kann, wenn:

$$\prod_{e \in \text{star}(x; G)} \frac{1 + iv(e)}{1 - iv(e)} = 1, \quad \prod_{e^* \in \text{star}(y; G^*)} \frac{1 + iv(e^*)}{1 - iv(e^*)} = 1 \text{ für alle } x \in G, y \in G^*. \quad (9)$$

Weiter zeigt man wie in [BMS05, Corollary 13], das (9) äquivalent zur Existenz eines Labelings $\alpha : \vec{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{D}$ mit Notationen wie in Abbildung 5 ist, welches Folgendes erfüllt:

$$\frac{1 + iv(e)}{1 - iv(e)} = \alpha_1/\alpha_0 \iff \frac{1 + iv(e^*)}{1 - iv(e^*)} = -\alpha_0/\alpha_1. \quad (10)$$

Somit folgt die Behauptung. \square

2.5 Doppelverhältnis Gleichungen

Eine weiterer Ansatz zur Diskretisierung von Holomorphie behandelt Funktionen, die ein *Doppelverhältnis Gleichungssystem* lösen. Auf $\mathbb{Z}[i]$ kann man Funktionen betrachten mit:

$$\frac{(f(x) - f(x+1))(f(x+1+i) - f(x+i))}{(f(x+1) - f(x+1+i))(f(x+i) - f(x))} = -1 \quad (11)$$

für alle $x \in \mathbb{Z}[i]$.

Auch diese Diskretisierung ist gerechtfertigt, da für analytische Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt: [BMS05]

$$\frac{(f(x) - f(x+\epsilon))(f(x+\epsilon+i\epsilon) - f(x+i\epsilon))}{(f(x+\epsilon) - f(x+\epsilon+i\epsilon))(f(x+i\epsilon) - f(x))} = -1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (12)$$

Definition 7. Das *Doppelverhältnis* (kurz: *DV*, engl.: *cross ratio*) für vier verschiedene komplexe Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ sei definiert als

$$cr(a, b, c, d) = \frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}. \quad (13)$$

Es ist bekannt, dass a, b, c, d genau dann auf einem Kreis liegen⁴, wenn ihr Doppelverhältnis in $\mathbb{R} \cup \infty$ liegt. Darüber hinaus wissen wir, dass das Viereck (a, b, c, d) genau dann eingebettet ist, wenn das Doppelverhältnis negativ ist. Für Beweise hierfür und weitere Eigenschaften des Doppelverhältnisses sei auf [RG11, Kap. 17] verwiesen.

Für eine Funktion $Q : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$Q(e^*) = 1/Q(e), \quad \forall e \in E(G). \quad (14)$$

setzen wir wie in [BMS05] folgende Definition fest.

⁴Hierbei ist eine Linie ein Sonderfall eines Kreises, den wir hier nicht betrachten werden.

Definition 8. Eine Funktion $z : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine *Lösung des Doppelverhältnis-Gleichungssystems (DV Lösung)* auf einem Quad-Graph \mathbb{D} für die Funktion Q , falls für jede positiv orientierte Facette (x, x_1, x_{12}, x_2) von $F(\mathbb{D})$ gilt:

$$cr(z(x), z(x_1), z(x_{12}), z(x_2)) = Q(x, x_{12}) = 1/Q(x_1, x_2) \quad (15)$$

Auch zu DV Lösungen gibt es auf $\mathbb{D} = \mathbb{Z}^2$ für $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ interessante Beispiele:

Die (skalierte) Identität $c(m + in)$ mit Doppelverhältnis von -1 .

Die Exponentialfunktion $exp(\alpha m + i\beta n)$ mit $c, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, wobei $\beta \notin \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$.

Wie in [Yas13] gilt:

$$\frac{((e^{\alpha m + i\beta n}) - (e^{\alpha(m+1) + i\beta n}))((e^{\alpha(m+1) + i\beta(n+1)}) - (e^{\alpha m + i\beta(n+1)}))}{((e^{\alpha(m+1) + i\beta n}) - (e^{\alpha(m+1) + i\beta(n+1)}))((e^{\alpha m + i\beta(n+1)}) - (e^{\alpha m + i\beta n}))} = \frac{(1 - e^\alpha)(e^{\alpha + i\beta} - e^{i\beta})}{(e^\alpha - e^{\alpha + i\beta})(e^{i\beta} - 1)} = -\frac{\sinh^2(\alpha/2)}{\sin^2(\beta/2)}.$$

Für $\tanh(\alpha m + i\beta n)$ mit $\beta \notin \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ ergibt sich das Doppelverhältnis mit dem Computeralgebrasystem *Mathematica* als $-\frac{\sinh^2(\alpha)}{\sin^2(\beta)}$.

2.6 3D-Verträglichkeit der Doppelverhältnis Gleichungen

Nun wollen wir die 3D-Verträglichkeit der Doppelverhältnis Gleichungen untersuchen. Mit Erkenntnissen aus [BMS05] erhalten wir ähnlich zu Theorem 1 folgende Charakterisierung.

Theorem 2. Die Funktion $z : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann eine 3D-verträgliche DV Lösung bezüglich $Q : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{C}$, wenn ein ungerichtetes Labeling $\alpha^2 : E(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so dass in jeder Facette gilt:

$$cr(z(x), z(x_1), z(x_{12}), z(x_2)) = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2}. \quad (16)$$

Auch hier ist Q bezüglich des Labelings α^2 festgelegt und wir bezeichnen solches z als *3D-verträgliche DV Lösung*.

Beweisskizze. Man betrachtet wieder zunächst, wann Q integrierbar ist. In [BMS05, Theorem 27] wird gezeigt, dass die Funktion $Q : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann auf $E(\mathbf{G}) \cup E(\mathbf{G}^*)$ 3D-verträglich erweitert werden kann, wenn:

$$\prod_{e \in \text{star}(x; G)} Q(e) = 1, \quad \prod_{e \in \text{star}(y; G^*)} Q(e^*) = 1, \quad \forall x \in G, y \in G^*. \quad (17)$$

Diese Bedingung (17) ist mit [BMS05, Corollary 28] äquivalent zur Existenz eines ungerichteten Labelings (siehe Definition 6) $\alpha^2 : E(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$Q(x, x_{12}) = \frac{1}{Q(x_1, x_2)} = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2}. \quad (18)$$

□

2.7 Linearisierung

Die (lineare) Theorie der préholomorphen Funktionen ist nach [BMS05] in einem gewissen Sinn eine Linearisierung der (nichtlinearen) Theorie der DV Lösungen. Diesen Zusammenhang wollen wir in diesem Abschnitt untersuchen. Mit dem *Hirota System* erhält man eine äquivalente Darstellung des Doppelverhältnis Systems. Wir können damit préholomorphe Funktionen ableiten und spezielle DV Lösungen, die von *Kreismustern* stammen, herausfiltern.

Lemma 3. (Parallelogramm Einbettung) Die Existenz eines Labeling $\alpha : \vec{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ ist äquivalent zur Existenz einer *Parallelogramm Einbettung* $p : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ des Quad-Graphen \mathbb{D} . [BMS05]

Beweis. Dies sieht man sofort mit der folgenden Identifikation für alle gerichteten Kanten $(x, y) \in \vec{E}(\mathbb{D})$:

$$\alpha(x, y) = p(y) - p(x) \quad (19)$$

Bei einer Parallelogramm Einbettung werden alle Facetten von \mathbb{D} auf Parallelogramme abgebildet. Falls $\alpha \in \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ dann sind die Parallelogramme sogar Rauten.

Definition 9. (Hirota Systeme) Für das Labeling $\alpha : \vec{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ mit korrespondierender Parallelogramm Einbettung $p : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ nach (19) sei eine Funktion $w : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ eine *Lösung des Hirota Systems*, falls für alle positiv orientierten Facetten $(x, x_1, x_{12}, x_2) \in F(\mathbb{D})$ gilt:

$$\alpha_0 w(x)w(x_1) + \alpha_1 w(x_1)w(x_{12}) - \alpha_0 w(x_{12})w(x_2) - \alpha_1 w(x_2)w(x) = 0 \quad (20)$$

mit Notationen α_0, α_1 wie in Abbildung 5.

Eine Lösung des Hirota Systems ist invariant unter *schwarz-weiß Skalierung*, die $w \rightarrow cw$ für $V(G)$ und $w \rightarrow c^{-1}w$ für $V(G^*)$ transformiert. Wir fassen Lösungen, die sich so in einander überführen lassen, zusammen.

Eine spezielle Lösung des Hirota Systems erzeugt nach [BMS05] 3D-verträgliche Lösungen der diskreten Cauchy-Riemann Gleichungen.

Theorem 3. Für die folgende Lösung des Hirota Systems

$$z_0(x) = p(x), \quad w_0(x) = 1, \quad \forall x \in V(\mathbb{D}) \quad (21)$$

lassen sich 3D-verträglich préholomorphe Funktionen $f : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ und $g : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ ableiten.

$$g = \frac{dz_\epsilon}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}, \quad f = (w_\epsilon^{-1} \frac{dw_\epsilon}{d\epsilon})_{\epsilon=0}. \quad (22)$$

Beweisskizze. Für eine Lösung des Hirota Systems $w : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ definiere:

$$z(y) - z(x) = \alpha(x, y)w(x)w(y) = w(x)w(y)(p(y) - p(x)), \quad \forall (x, y) \in \vec{E}(D). \quad (23)$$

Man erhält nach [BMS05, Proposition 34] eine (bis auf additiven Faktor) eindeutige Funktion $z : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$, die eine DV Lösung ist. Umgekehrt ist für jede Lösung z des Doppelverhältnis Systems durch (23) eine Funktion w definiert, die eine Lösung des Hirota Systems darstellt. Diese Lösung w ist eindeutig, bis auf schwarz-weiß Skalierung.

Setzt man nun z_0 und w_0 wie in (21) so erhält man eine (triviale) Lösung des Doppelverhältnis Gleichungssystems und des korrespondierenden Hirota Systems. Man betrachte die zu $z_0 : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ zugehörige differenzierbare 1-Parameter Familie von DV Lösungen $z_\epsilon : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$, $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$, $\epsilon > 0$ desselben Gleichungssystems und $w_\epsilon : V(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{C}$ die des korrespondierenden Hirota Systems. Nun lösen f und g aus (22) die diskreten Cauchy-Riemann Gleichungen aus Definition 4. Um dies zu zeigen, differenziert man (23) und erhält:

$$g(y) - g(x) = (f(x) + f(y))(p(y) - p(x)) \quad \forall (x, y) \in \vec{E}(\mathbb{D}). \quad (24)$$

Aus den Schließbedingungen für f und g folgt (8), da

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x) + g(x_{12}) - g(x_1) + g(x_2) - g(x_{12}) + g(x) - g(x_2) &= 0 \\ \iff \frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(x_{12}) - f(x)} &= \frac{p(x_2) - p(x_1)}{p(x_{12}) - p(x)} = \frac{\alpha_1 - \alpha_0}{\alpha_1 + \alpha_0}. \end{aligned}$$

Ähnlich gilt für f :

$$\begin{aligned} (f(x) + f(x_1)) - (f(x_1) + f(x_{12})) + (f(x_{12}) + f(x_2)) - (f(x_2) + f(x)) &= 0 \\ \iff \frac{g(x_1) - g(x)}{p(x_1) - p(x)} - \frac{g(x_{12}) - g(x_1)}{p(x_{12}) - p(x_1)} + \frac{g(x_2) - g(x_{12})}{p(x_2) - p(x_{12})} - \frac{g(x) - g(x_2)}{p(x) - p(x_2)} &= 0 \end{aligned}$$

was äquivalent zu (8) für $p(x_1) - p(x) = p(x_{12}) - p(x_2)$ ist.

Somit sind beide Funktionen 3D-verträglich préholomorph. \square

2.8 Kreismuster

Weiterhin stammen spezielle Lösungen des Hirota Systems von sogenannten *Kreismustern*, die interessante Eigenschaften innehaben. Wir definieren wie in [BS08, Kap. 6].

Definition 10. Für eine Zellzerlegung G definiert $z : V(G) \rightarrow \mathbb{C}$ ein **Kreismuster**, falls für alle Facetten $y \in F(G)$ die Punkte $z(x_1), \dots, z(x_n) \in \mathbb{C}$ zu den (orientiert geordneten) Eckpunkten x_1, \dots, x_n der Facette in einem Kreis liegen. Man erweitere z auf $V(G^*)$, indem man $z(y)$ die Mittelpunkte der Kreise zu $y \in F(G) \cong V(G^*)$ zuordnet.

So erhält man einen Quad-Graph \mathbb{D} , dessen z -Bild Facetten in Form von Drachenvierecken hat, wie in Abbildung 6.

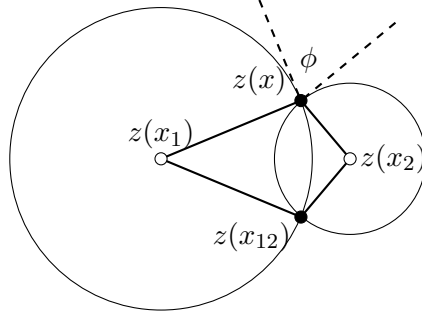


Abbildung 6: Der Schnittwinkel ϕ zweier Kreise zu einer Facette eines Kreismusters.

Lemma 4. Für die Facetten eines solchen Quad-Graphen gilt:

$$cr(z(x), z(x_1), z(x_{12}), z(x_2)) = \exp(2i\phi), \quad (25)$$

wobei ϕ der äußere Schnittwinkel der Kreise um $z(x_1)$ und $z(x_2)$ ist, wie in Abbildung 6.

Beweis. Da die Facette ein Drachenviereck ist, gilt: $cr(z(x), z(x_1), z(x_{12}), z(x_2)) =$

$$\frac{r_0 \exp(i\phi_0) r_1 \exp(i\phi_2)}{r_0 \exp(i\phi_3) r_1 \exp(i\phi_1)} = \exp(i(\phi_0 + \phi_2 - \phi_3 - \phi_1)) = \exp(2i\phi) \quad (26)$$

für den Vektoren des Drachenviereckes entsprechende Radii r_i der Kreise und Winkel ϕ_i der Vektoren der Facette. Es ist $\phi_3 = \pi - \phi_0$ und $\phi_2 = \pi - \phi_1$, so dass $\phi_2 - \phi_3 = \phi_0 - \phi_1 =: \phi$ \square

Ordnet man diesen Schnittwinkel ϕ der Kante $e = (x_1, x_2)$ zu, so kann man $\phi : E(G^*) \rightarrow (0, \pi)$ als Funktion auffassen und auf $E(G)$ per $\phi(e) = \pi - \phi(e^*)$ erweitern. Die Funktion z eines Kreismusters ist dann eine DV Lösung für $Q : E(G) \cup E(G^*) \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $Q(e) = \exp(2i\phi(e))$. Nach [BMS05, Proposition 32] ist diese DV Lösung genau dann 3D-verträglich, wenn ein Labeling α^2 existiert, so dass

$$\exp(2i\phi(e^*)) = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2} \quad \forall e^* \in V(G^*). \quad (27)$$

In diesem Fall ist $\alpha_0^2/\alpha_1^2 \in \mathbb{S}^1$, so dass $|\alpha_0^2| = |\alpha_1^2|$ und wir können annehmen, dass α^2 Werte in \mathbb{S}^1 annimmt. Wie in [BMS05, Proposition 35] gezeigt wird, korrespondieren Kreismuster zu speziellen Hirota System Lösungen mit $w(x) > 0$ für $x \in V(G)$ und $w(y) \in \mathbb{S}^1$ für $y \in V(G^*)$. Dieses Hirota System beschreibt hierbei das Kreismuster durch die Radii der Kreise und die Winkel der Konfiguration bei den Kreisschnittpunkten (mehr dazu in [BMS05] und [BS08]).

3 Diskrete Maximalflächen im Minkowskiraum

Nun widmen wir uns der Diskretisierung von Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung. Im Gegensatz zu den bekannteren Minimalflächen im euklidischen Raum stellen raumartige Maximalflächen im Minkowskiraum Maxima für Flächeninhaltvariationen da. Daher bezeichnet man sie als *Maximalflächen*. Im kontinuierlichen lassen sich diese Flächen mit der *Weierstraß Darstellung* aus holomorphen Funktionen erzeugen, siehe dazu [Kob83]. Die im vorherigen Abschnitt definierte Diskretisierung holomorpher Funktionen nach Definition 8 kann nun genutzt werden, um analog diskrete Maximalflächen zu erzeugen. Die ausgeführten Konzepte entspringen dem Artikel [Yas15] von M. Yasumoto und bauen teilweise auf der Vorlesung [Hof08] über diskrete Differentialgeometrie von T. Hoffmann auf.

3.1 Der kontinuierliche Fall

Zunächst benötigen wir einige grundlegende Definitionen und Begriffe aus [Yas15], [Kob83] und [Hof08].

Definition 11.

- a) Sei $\mathbb{R}^{1,2} := (\{(x_1, x_2, x_0)^t \mid x_j \in \mathbb{R}\}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ der **dreidimensionale Minkowskiraum mit Lorentzmetrik**

$$\langle (x_1, x_2, x_0)^t, (y_1, y_2, y_0)^t \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_0 y_0$$

mit quadrierter „Norm“ $\|(x_1, x_2, x_0)^t\|^2 = \langle (x_1, x_2, x_0)^t, (x_1, x_2, x_0)^t \rangle$, welche negativ sein kann und daher keine „echte“ Norm im Sinne der Definitheit ist.

- b) Ein Vektor $d \in \mathbb{R}^{2,1}$ heißt **raumartig**, **lichtartig** oder **zeitartig**, falls $\langle d, d \rangle$ größer als, gleich oder kleiner als 0 ist. [Hof08]

Eine Ebene $P = \{x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle x, n \rangle = d\}$ für ein $d \in \mathbb{R}$ heißt *raumartig*, *lichtartig* oder *zeitartig*, falls n entsprechend *zeitartig*, *lichtartig* oder *raumartig* ist. Eine Ebene ist also *raumartig*, falls ihr Normalenvektor *zeitartig* ist.

- c) Eine **Immersion** $f : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ ist eine unendlich oft (stetig) differenzierbare Abbildung, deren Differential in jedem Punkt injektiv ist.

Sie heißt **konform**, falls für $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ und $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ bei allen $(x, y) \in E$ gilt:
 $f_x \perp f_y$ und $\|f_x\| = \|f_y\|$.

Sie heißt darüberhinaus **isotherm**, falls zusätzlich $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in \text{span}\{f_x, f_y\}$.

Eine Immersion in $\mathbb{R}^{2,1}$ ist raumartig, falls ihre Tangentialebenen⁵ raumartig sind.

⁵Für einen Punkt p einer Immersion ist die Tangentialebene der Spann aller Tangentialvektoren von regulären Kurven durch p .

- d) Eine konforme Immersion $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, wobei $\mathbb{E} \subset \mathbb{C}$ ein einfach-zusammenhängendes Gebiet mit $z = u + iv \in \mathbb{E}$, ist eine **Maximalfläche**, falls sie raumartig ist und mittlere Krümmung 0 hat. Hierbei folgt aus Konformität sofort raumartig, da in den anderen Fällen nicht $\|f_u\| = \|f_v\|$ gelten kann.
- e) Glatte Maximalflächen ohne Nabelpunkte gehören zu den *isothermen* Flächen. Man kann ähnlich wie im \mathbb{R}^3 zeigen, dass eine raumartige Immersion $F = F(u, v)$ genau dann eine Maximalfläche ist, wenn eine **duale Fläche** F^* existiert, für die gilt: $F_u^* = \frac{F_u}{\|F_u\|^2}$ und $F_v^* = -\frac{F_v}{\|F_v\|^2}$ sind enthalten in $\mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2$, wobei: [Kob83]

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_+^2 &:= \{x = (x_1, x_2, x_0)^t \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \|x\|^2 = -1, x_0 > 0\} \\ \mathbb{H}_-^2 &:= \{x = (x_1, x_2, x_0)^t \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \|x\|^2 = -1, x_0 < 0\} \end{aligned} \quad (28)$$

Diese duale Fläche F^* ist die *Gaußabbildung* von F . Sie ist dadurch charakterisiert, dass sie jedem Punkt $p \in F$ den zugehörigen Normalenvektor zuordnet.

- f) Ein **translierter Lichtkegel** ist definiert als $\mathbb{L}_p^2 := \{x \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \|x - p\| = 0\}$.

In unserer Diskretisierung wollen wir die Zugehörigkeit von Maximalflächen zu isothermen Flächen beibehalten. Bevor wir diskret isotherme Flächen definieren können, muss das Doppelverhältnis in den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^{2,1}$ erweitert werden.

3.2 Das Doppelverhältnis im $\mathbb{R}^{2,1}$

Indem man $\mathbb{R}^{2,1}$ mit der Lie-Algebra $su(1, 1)$ der zugehörigen Lie-Gruppe $SU(1, 1)$ identifiziert, gilt: [Yas15]

$$\mathbb{R}^{2,1} \ni (x_1, x_2, x_0)^t \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} ix_0 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -ix_0 \end{pmatrix} \in su(1, 1). \quad (29)$$

Definition 12. Für vier verschiedene Punkte $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{R}^{2,1}$ betrachte man die Matrix

$$Q(X_1, X_2, X_3, X_4) := (X_1 - X_2)(X_2 - X_3)^{-1}(X_3 - X_4)(X_4 - X_1)^{-1} \quad (30)$$

Das ungeordnete Eigenwertepaar von Q sei nun das Doppelverhältnis $cr(X_1, X_2, X_3, X_4) := \{q, \hat{q}\}$. Ist $q = \hat{q} \in \mathbb{R}$ so ist $cr(X_1, X_2, X_3, X_4) := q$.

Wir halten einige Eigenschaften des Doppelverhältnisses fest. Für Details und Beweise siehe [Yas15] und für eine ausführliche Herleitung über das Clifford-Algebra Modell siehe

auch [HJ03, Kap. 6.5].

Lemma 5. (Eigenschaften des Doppelverhältnisses)

- a) Das so definierte Doppelverhältnis ist entweder komplex konjugiert oder reell.
- b) Wie in [Yas15] gezeigt wird, ist es invariant unter Drehung, Spiegelung, Translation und Streckung des $\mathbb{R}^{2,1}$.
- c) Weiterhin ist aus [Yas15] bekannt, dass das Doppelverhältnis von Punkten $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{L}_p^2$, die in einem verschobenen Lichtkegel liegen, einen reellen Wert hat und $Q(X_1, X_2, X_3, X_4)$ die durch $cr(X_1, X_2, X_3, X_4)$ skalierte Identitätsmatrix ist.

Seien andererseits $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{R}^{2,1}$ vier koplanare und nicht kollineare Punkte, für die das Viereck (X_1, X_2, X_3, X_4) keine lichtartigen Kanten enthält und deren Doppelverhältnis ein reeller Wert ist, so dass $Q(X_1, X_2, X_3, X_4)$ gleich dem Doppelverhältnis mal der Identitätsmatrix ist. Dann liegen die vier Punkte im Schnitt eines translierten Lichtkegels und einer Ebene oder in einer *außergewöhnlichen Hyperbel*, also einer Kurve in $\mathbb{R}^{2,1}$, die isometrisch zu $\mathbb{H}(p) := \{x = (x_1, 0, x_0)^t \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \|x\|^2 = p^{-2}\}$ mit $(p \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist.

- d) Mit $p \in \mathbb{R}$ gilt für $X_1, X_2, X_3, X_4 \in \mathbb{L}_p^2$: $cr(X_1, X_2, X_3, X_4) =$

$$\frac{\|X_1 - X_2\|^2 \|X_3 - X_4\|^2 - \|X_1 - X_3\|^2 \|X_2 - X_4\|^2 + \|X_1 - X_4\|^2 \|X_2 - X_3\|^2}{2\|X_1 - X_4\|^2 \|X_2 - X_3\|^2}. \quad (31)$$

Falls mindestens eine Kante von $X_1 - X_2, X_2 - X_3, X_3 - X_4, X_4 - X_1$ lichtartig ist funktioniert die Berechnung des Doppelverhältnisses nicht. Dieser Fall wird in Lemma 11 behandelt. So haben wir das Doppelverhältnis wohldefiniert in den dreidimensionalen Minkowskiraum erweitert und erhalten eine handliche Formel zur Berechnung für Punkte auf einem verschobenen Lichtkegel.

3.3 Diskret isotherme Flächen im $\mathbb{R}^{2,1}$

Mithilfe des Doppelverhältnisses können wir nun isotherme Flächen analog zu diskret isothermen Flächen im \mathbb{R}^3 aus [BP96] diskretisieren. Um isotherme Parametrisierung zu diskretisieren, müssen wir die zu Grunde liegende Kombinatorik auf Quad-Graphen \mathbb{D} festlegen. Hier betrachten wir den einfachsten Fall $\mathbb{D} = \mathbb{Z}^2$.

Notation. Wir schreiben für einen Punkt der Fläche F kürzer $F_{m,n} = F(m + in)$. Das (positiv orientierte) Viereck $(F_{m,n}, F_{m+1,n}, F_{m+1,n+1}, F_{m,n+1}) = (F, F_1, F_{12}, F_2)$ bezeichnen wir auch als eine *Facette*. Ähnlich ist $(g_{m,n}, g_{m+1,n}, g_{m+1,n+1}, g_{m,n+1}) = (g, g_1, g_{12}, g_2)$.

Definition 13. In einem Gebiet $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}^2$ sei $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ eine diskrete Fläche, die mit den diskreten Parametern $m, n \in \mathbb{Z}$ parametrisiert ist. F ist eine **diskret raumartig isotherme Fläche**, falls die Facetten (F, F_1, F_{12}, F_2) von F folgendes erfüllen:

- (i) Positiv orientiertes (F, F_1, F_{12}, F_2) liegt in $\mathbb{L}_p^2 \cap P$ für ein $p \in \mathbb{R}^{2,1}$ und eine raumartige Ebene $P \subset \mathbb{R}^{2,1}$ (p und P können für verschiedene Facetten unterschiedlich sein), und
- (ii) $cr(F, F_1, F_{12}, F_2) = -\frac{\alpha_m}{\beta_n}$, wobei α_m, β_n positive skalare Funktionen, α_m nur abhängig von m und β_n nur abhängig von n sind.

An dieser Stelle können wir diskret holomorphe Funktionen geeignet festlegen, indem wir den nichtlinearen Ansatz des ersten Abschnittes verfolgen und für eine integrierbare Lösung $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ des Doppelverhältnissystems $cr(g, g_1, g_{12}, g_2) = \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^2}$ mit $\alpha_0 \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $\alpha_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ wählen.

Definition 14. Eine Funktion $g : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ heißt **diskret holomorph**, falls für alle Facetten (x, x_1, x_{12}, x_2) mit $x \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $cr(g, g_1, g_{12}, g_2) = -\frac{\alpha_m}{\beta_n}$, wobei α_m, β_n positive skalare Funktionen, α_m nur abhängig von m und β_n nur abhängig von n sind.

Analog zum glatten Fall definieren wir eine duale diskret isotherme Fläche, wie in [Yas15].

Definition 15 (und Lemma). Für eine diskret isotherme Fläche $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ sei das Doppelverhältnis der Facetten gegeben durch $-\frac{\alpha_m}{\beta_n}$. Die Gleichungen

$$F_{m+1,n}^* - F_{m,n}^* = \alpha_m \frac{F_{m+1,n} - F_{m,n}}{\|F_{m+1,n} - F_{m,n}\|^2}, \quad (32)$$

$$F_{m,n+1}^* - F_{m,n}^* = -\beta_n \frac{F_{m,n+1} - F_{m,n}}{\|F_{m,n+1} - F_{m,n}\|^2} \quad (33)$$

erzeugen die **diskret duale Fläche** F^* . Diese ist auch diskret isotherm und hat dasselbe Doppelverhältnis.

Eine geometrisch motivierte Definition, ähnlich wie in [BP96], legt diskret isotherme Maximalflächen wie folgt bezüglich ihrer dualen Fläche fest.

Definition 16. (Diskret isotherme Maximalfläche) Eine diskret isotherme Fläche $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ ist *diskret maximal*, falls ihre duale Fläche F^* in $\mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2$ gewählt werden kann.

Die Wohldefiniertheit und Existenz der dualen Fläche für diskret isotherme Maximalflächen ergibt sich mit Theorem 6. Dort wird, ausgehend von der zugehörigen diskret holomorphen Funktion, eine Maximalfläche und eine duale Fläche nach Definition 15 angegeben. Umgekehrt wird zu jeder Maximalfläche nach Definition 16 eine zugehörige diskret holomorphe Funktion gefunden. Hierbei muss der Fall von lichtartigen Kanten der Facetten gesondert behandelt werden.

Neben dieser geometrischen Charakterisierung von diskret isothermen Maximalflächen kann man auch Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung als Maximalflächen betrachten. Dazu muss man einen diskreten Begriff der mittleren Krümmung definieren und sich mit diskreten CMC-Flächen (engl.: *constant mean curvature*) im 3D-Minkowskiraum beschäftigen. M. Yasumoto hat in [Yas15] gezeigt, wie verschiedene diskrete Definitionen einer mittleren Krümmung untereinander und mit unserer Definition diskreter Maximalität zusammenhängen.

Es stellt sich heraus, dass Facetten von diskret isothermen Maximalflächen nicht immer in einer raumartigen Ebene liegen und diese werden als singuläre Facetten definiert. Mit Theorem 7 werden wir sehen, dass bestimmte singuläre Facetten auftauchen, wenn die korrespondierende diskret holomorphe Funktion g , die die Fläche erzeugt, nahe bei \mathbb{S}^1 liegt. Dies ist eine natürliche Charakteristik, da im kontinuierlichen Fall von Maximalflächen Singularitäten bei $|g| = 1$ auftreten, siehe dazu [UY06].

3.4 Das Limit Doppelverhältnis

Definition 17. Für eine diskret maximale Fläche ist $F = (F, F_1, F_{12}, F_2)$ eine **singuläre Facette**, falls F in einer nicht-raumartigen Ebene liegt. Man unterscheidet zwischen GVP („Generic Vertex Placement“) singulären Facetten ohne lichtartigen Kanten und NVP („Non-generic Vertex Placement“) singulären Facetten mit lichtartigen Kanten.

NVP singuläre Facetten enthalten lichtartige Kanten, so dass das Doppelverhältnis nicht mit (31) berechnet werden kann. Mit infinitesimalen Variationen von Möbius Transformationen kann man das Doppelverhältnis von NVP singulären Facetten wie folgt sinnvoll definieren. Für den Beweis des Limit Doppelverhältnisses greifen wir auf das Theorem 6 zu, das man ohne das Limit Doppelverhältnis beweisen kann, falls keine NVP-singuläre Facetten vorkommen. Mithilfe des Limit Doppelverhältnisses werden wir im Anschluss auch diesen Fall miteinbeziehen und das Theorem in vollem Umfang zeigen können. Zunächst definieren wir den Begriff der Möbius Transformation aus [RG11].

Definition 18. (Möbius Transformation) Eine Möbiustransformation ist eine bijektive Abbildung $M : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, so dass

$$M : z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0 \quad (34)$$

Eine Familie an Möbius Transformationen $M_\epsilon : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) \subset \mathbb{R}$, für $\epsilon_0 > 0$ heißt **Möbius Transformation Variation** von $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, falls M_0 die Identität ist und M_ϵ kontinuierliche Änderung bezüglich ϵ hat.

Lemma 11. (Limit Doppelverhältnis) Für ein Viereck $G = (g, g_1, g_{12}, g_2)$ sei $S = (F, F_1, F_{12}, F_2)$ die zugehörige NVP singuläre Facette. Sei M_ϵ eine Möbius Transforma-

tion Variation mit:

$$g_\epsilon = M_\epsilon g, \quad g_{1,\epsilon} = M_\epsilon g_1, \quad g_{12,\epsilon} = M_\epsilon g_{12}, \quad g_{2,\epsilon} = M_\epsilon g_2 \notin \mathbb{S}^1 \text{ für } \epsilon \neq 0. \quad (35)$$

Da das Doppelverhältnis in \mathbb{C} invariant unter Möbiustransformationen ist (siehe [RG11, Kap. 17]), erhält diese Variation das Doppelverhältnis von (g, g_1, g_{12}, g_2) . Durch $G^\epsilon := (g_\epsilon, g_{1,\epsilon}, g_{12,\epsilon}, g_{2,\epsilon})$ lässt sich ein S^ϵ wohl-definieren mithilfe von Theorem 6. Nun definiert man das limit Doppelverhältnis als:

$$lcr(S) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} cr(S^\epsilon) \quad (= cr(S^\epsilon) \text{ für alle } \epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0) \setminus \{0\}), \quad (36)$$

Dies ist wohldefiniert, existiert und unabhängig von M_ϵ . Zusätzlich gilt $lcr(S) = cr(g, g_1, g_{12}, g_2) \in \mathbb{R}$.

Beweis. Da M_ϵ eine Familie von Möbius Transformationen ist, gilt $cr(G) = cr(G^\epsilon)$ für alle $\epsilon \in (-\epsilon_0, \epsilon_0)$. Für ein ϵ sei eine diskrete Fläche F_ϵ durch $M_\epsilon g$ mit Theorem 6 gegeben. Wie im Beweis von Theorem 6 ist die Facette S^ϵ wegen $\Delta_1 \Delta_2 F_\epsilon = \Delta_2 \Delta_1 F_\epsilon$ wohl-definiert und es folgt:

$$cr(F_\epsilon, F_{1,\epsilon}, F_{12,\epsilon}, F_{2,\epsilon}) = cr(g_\epsilon, g_{1,\epsilon}, g_{12,\epsilon}, g_{2,\epsilon}) = cr(g, g_1, g_{12}, g_2), \quad (37)$$

und S_ϵ hat keine lichtartigen Kanten, da wir $g_\epsilon, g_{1,\epsilon}, g_{12,\epsilon}, g_{2,\epsilon} \notin \mathbb{S}^1$ gewählt haben. S_ϵ ist als Facette der diskreten Maximalfläche F_ϵ koplanar. Folglich ist das Doppelverhältnis von S_ϵ unabhängig von der Wahl von $\epsilon \neq 0$ und somit:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_\epsilon = S, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} cr(S_\epsilon) = cr(g, g_1, g_{12}, g_2). \quad \square \quad (38)$$

3.5 Konstruktion diskreter Maximalflächen

Nach der Vorarbeit können wir uns der Konstruktion diskreter Maximalflächen aus diskret holomorphen Funktionen widmen. Das folgende Theorem stammt von [Yas15].

Theorem 6. (Weierstraß Darstellung) Eine diskret holomorphe Funktion $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ in einem Gebiet $\mathbb{D} \subset \mathbb{Z}^2$ erzeugt eine diskrete Maximalfläche $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ durch:

$$\Delta_1 F = \frac{\alpha_m}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1+g_{m+1,n}g_{m,n}}{\Delta_1 g}}{\frac{i(1-g_{m+1,n}g_{m,n})}{\Delta_1 g} - \frac{g_{m+1,n}+g_{m,n}}{\Delta_1 g}} \right), \quad \Delta_2 F = -\frac{\beta_n}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1+g_{m,n+1}g_{m,n}}{\Delta_2 g}}{\frac{i(1-g_{m,n+1}g_{m,n})}{\Delta_2 g} - \frac{g_{m,n+1}+g_{m,n}}{\Delta_2 g}} \right) \quad (39)$$

Hierbei sind α_m und β_n die das Doppelverhältnis faktorisierenden Funktionen zu g und $\Delta_1 F := F_{m+1,n} - F_{m,n}$, $\Delta_2 F := F_{m,n+1} - F_{m,n}$, und genauso $\Delta_1 g = g_{m+1,n} - g_{m,n}$, $\Delta_2 g = g_{m,n+1} - g_{m,n}$.

Umgekehrt erfüllt jede diskrete Maximalfläche (39) für eine diskret holomorphe Funktion g .

Beweis. Sei $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ eine diskret holomorphe Funktion mit $cr(g_{m,n}, g_{m+1,n}, g_{m+1,n+1}, g_{m,n+1}) = -\frac{\alpha_m}{\beta_n}$. Betrachtet man das Bild der inversen stereographischen Projektion $\psi^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2$ von einer Facette $G = (g, g_1, g_{12}, g_2)$ von g mit $cr(G) = -\frac{\alpha}{\beta}$, so ist

$$\psi^{-1} \circ g = F^* := \begin{pmatrix} \frac{-2\operatorname{Re}(g)}{|g|^2-1} \\ \frac{-2\operatorname{Im}(g)}{|g|^2-1} \\ \frac{|g|^2+1}{|g|^2-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}, \quad (40)$$

da $\|F^*\|^2 = -1$. Der Nordpol ist gegeben mit $\psi^{-1} \circ g(\infty) = (0, 0, 1)$.

Unter der Annahme, dass die betrachtete Facette nicht NVP singulär ist, kann man nachrechnen, dass

$$cr(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*) = cr(g, g_1, g_{12}, g_2). \quad (41)$$

Hierbei zeigt man zunächst $\|F_1^* - F^*\|^2 = \frac{4|g_1-g|^2}{(|g_1|^2-1)(|g|^2-1)}$. Mit Lemma 5 folgt, dass

$$cr(F^*) = \frac{|g-g_1|^2|g_{12}-g_2|^2 - |g-g_{12}|^2|g-g_2|^2 + |g-g_2|^2|g_1-g_{12}|^2}{2|g-g_2|^2|g_1-g_{12}|^2} = \frac{(g-g_1)(g_{12}-g_2)}{(g_1-g_{12})(g_2-g)}.$$

Falls NVP singuläre Facetten auftreten bekommt man hier Probleme, da mindestens eine Kante von F^* nicht sinnvoll definiert ist. Mit dem Limit Doppelverhältnis sind auch diese Fälle sinnvoll abgedeckt.

Die Fläche F wie in (39) definiert existiert genau dann, wenn die Kompatibilitätsbedingung $\Delta_1(\Delta_2 F) = \Delta_2(\Delta_1 F)$ gilt. Man sieht

$$\Delta_1(\Delta_2 F) = -\frac{\beta}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1+g_1 g_{12}}{\Delta_2 g_1} - \frac{1+g_2 g}{\Delta_2 g}}{\frac{i(1-g_1 g_{12})}{\Delta_2 g_1} - \frac{i(1-g_2 g)}{\Delta_2 g}} - \frac{g_{12}+g_1}{\Delta_2 g_1} + \frac{g_2-g}{\Delta_2 g} \right) \quad (42)$$

Mit der Identifikation $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ für eine komplexe Zahl z ist dies äquivalent zu

$$\Delta_1(\Delta_2 F) = -\frac{\beta}{4} \operatorname{Re} \left(\frac{\frac{1+g_1 g_{12}}{\Delta_2 g_1} + \frac{1+\bar{g}_1 \bar{g}_{12}}{\Delta_2 \bar{g}_1} - \frac{1+g_2 g}{\Delta_2 g} - \frac{1+\bar{g} \bar{g}_2}{\Delta_2 \bar{g}}}{\frac{i(1-g_1 g_{12})}{\Delta_2 g_1} - \frac{i(1-\bar{g}_1 \bar{g}_{12})}{\Delta_2 \bar{g}_1} - \frac{i(1-g_2 g)}{\Delta_2 g} + \frac{i(1-\bar{g} \bar{g}_2)}{\Delta_2 \bar{g}}} - \frac{g_{12}+g_1}{\Delta_2 g_1} - \frac{\bar{g}_{12}+\bar{g}_1}{\Delta_2 \bar{g}_1} + \frac{g_2-g}{\Delta_2 g} + \frac{\bar{g}_2-\bar{g}}{\Delta_2 \bar{g}} \right) \quad (43)$$

Mit der Äquivalenz $\frac{(g-g_1)(g_{12}-g_2)}{(g_1-g_{12})(g_2-g)} = -\frac{\alpha}{\beta} \iff \beta = -\alpha \frac{\Delta_2 g_1 \Delta_2 g}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} = -\alpha \frac{\overline{\Delta_2 g_1} \overline{\Delta_2 g}}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \Delta_1(\Delta_2 F) &= \frac{\alpha}{4} \left(\begin{array}{c} \frac{\Delta_2 g(1+g_1 g_{12})}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} + \frac{\overline{\Delta_2 g}(1+\bar{g}_1 \bar{g}_{12})}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}} - \frac{\Delta_2 g_1(1+g g_2)}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} - \frac{\overline{\Delta_2 g_1}(1+\bar{g} \bar{g}_2)}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}} \\ \frac{i \Delta_2 g(1-g_1 g_{12})}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} - \frac{i \overline{\Delta_2 g}(1-\bar{g}_1 \bar{g}_{12})}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}} - \frac{i \Delta_2 g_1(1-g g_2)}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} + \frac{i \overline{\Delta_2 g_1}(1-\bar{g} \bar{g}_2)}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}} \\ - \frac{\Delta_2 g(g_1+g_{12})}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} - \frac{\overline{\Delta_2 g}(\bar{g}_1+\bar{g}_{12})}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}} + \frac{\Delta_2 g_1(g+g_2)}{\Delta_1 g \Delta_1 g_2} + \frac{\overline{\Delta_2 g_1}(\bar{g}+\bar{g}_2)}{\overline{\Delta_1 g} \overline{\Delta_1 g_2}} \end{array} \right) \\
 &= \Delta_2 \left(\frac{\alpha}{2} \left(\begin{array}{c} \frac{1+g g_1}{\Delta_1 g} \\ \frac{i(1-g g_1)}{\Delta_1 g} \\ -\frac{g+g_1}{\Delta_1 g} \end{array} \right) \right) = \Delta_2(\Delta_1 F).
 \end{aligned} \tag{44}$$

Somit ist gezeigt, dass die Kompabilitätsbedingung gilt und F wohldefiniert ist.

Nun ist zu zeigen, dass F und F^* dual zueinander sind. Zunächst rechnet man nach, dass $\|\Delta_1 F^*\|^2 = \frac{4|g_1-g|^2}{(|g|^2-1)(|g_1|^2-1)}$. Betrachtet man die erste Komponente von $\alpha \frac{\Delta_1 F^*}{\|\Delta_1 F^*\|^2}$, so sieht man mithilfe der Identifikation $|z|^2 = z\bar{z}$ für komplexes z :

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\alpha(|g|^2-1)(|g_1|^2-1)}{4|g_1-g|^2} \left(\frac{-2\operatorname{Re}(g_1)(|g|^2-1) + 2\operatorname{Re}(g)(|g_1|^2-1)}{(|g|^2-1)(|g_1|^2-1)} \right) \\
 &= \frac{\alpha}{2|g_1-g|^2} (\operatorname{Re}(g)|g_1|^2 - \operatorname{Re}(g) - \operatorname{Re}(g_1)|g|^2 + \operatorname{Re}(g_1)) \\
 &= \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha}{2|g_1-g|^2} (g g_1 \bar{g}_1 - \bar{g} - g_1 g \bar{g} + \bar{g}_1) \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha}{2\Delta_1 g} (1 + g g_1) \right)
 \end{aligned} \tag{45}$$

Insgesamt ist

$$\frac{\alpha \Delta_1 F^*}{\|\Delta_1 F^*\|^2} = \operatorname{Re} \left(\frac{\alpha}{2\Delta_1 g} \begin{pmatrix} (1+g g_1) \\ i(1-g g_1) \\ -(g_1+g) \end{pmatrix} \right) = \Delta_1 F \tag{46}$$

und

$$\frac{-\beta \Delta_2 F^*}{\|\Delta_2 F^*\|^2} = -\operatorname{Re} \left(\frac{\beta}{2\Delta_2 g} \begin{pmatrix} (1+g g_2) \\ i(1-g g_2) \\ -(g_2+g) \end{pmatrix} \right) = \Delta_2 F. \tag{47}$$

Nun kann man nachrechnen, dass $cr(F, F_1, F_{12}, F_2) = cr(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$. Auch hier muss das Limit Doppelverhältnis benutzt werden, falls NVP singuläre Facetten auftreten, da sonst die Doppelverhältnisse nicht sinnvoll definiert sind. Somit sind F und F^* dual zu einander und haben dasselbe Doppelverhältnis. Es folgt schließlich, dass F diskret maximal nach Definition 16 ist.

Umgekehrt sei F eine diskrete Maximalfläche nach Definition 16. Dann existiert nach Definition eine diskrete duale Fläche F^* in $\mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2$. Die Punkte aus $\mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2$ können mit der stereographischen Projektion eindeutig in die komplexe Ebene abgebildet werden und man erhält $g := \psi \circ F^* : \mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2 \rightarrow \mathbb{C}$. Die Fläche F^* kann also wie in (40) dargestellt werden und unter der Berücksichtigung von Lemma 11 für NVP singuläre Facetten folgt mit (41), dass g diskret holomorph ist. Schließlich erzeugt g mit (39) die

Fläche F und wir sind fertig. \square

Bevor wir Beispiele solcher diskreter Maximalflächen betrachten, wollen wir die singulären Facetten in verschiedene Kategorien eingliedern.

3.6 Klassifizierung singulärer Facetten

Wie versprochen zeigen wir zunächst, wann singuläre Facetten auftreten. [Yas15]

Theorem 7. (singuläre Facetten) Sei $g : \mathbb{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine diskret holomorphe Funktion und F die dadurch erzeugte diskrete Maximalfläche. Die Facette $S = (F, F_1, F_{12}, F_2)$ ist genau dann eine singuläre Facette, wenn der Kreis C durch das zu F korrespondierende Viereck $G = (g, g_1, g_{12}, g_2)$ mit \mathbb{S}^1 Schnittpunkte hat.

Beweis. Sei $C \subset \mathbb{C}$ der Kreis durch G mit Mittelpunkt $a + ib \in \mathbb{C}$ und Radius $r > 0$. Die Facette $(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$ sei durch das Bild der inversen stereographischen Projektion von G gegeben. Für $p \in C \setminus \mathbb{S}^1$ gilt:

$$\mathbb{C} \ni p := x + iy \mapsto \left(-\frac{2x}{|p|^2 - 1}, -\frac{2y}{|p|^2 - 1}, \frac{|p|^2 + 1}{|p|^2 - 1} \right)^t \in \mathbb{H}_+^2 \cup \mathbb{H}_-^2 \quad (48)$$

und C sowie $(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$ liegen in der Ebene

$$P := \{(x_1, x_2, x_0)^t \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \langle (x_1, x_2, x_0)^t, n \rangle = -(a^2 + b^2 - r^2 - 1)\} \quad (49)$$

mit $n = (-2a, -2b, a^2 + b^2 - r^2 + 1)^t$.

P ist genau dann nicht raumartig, wenn n nicht zeitartig ist. Es muss also $0 \leq \|n\|^2 = -((a^2 + b^2) - (r - 1)^2)((a^2 + b^2) - (r + 1)^2)$, was bei $|r - 1| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \leq r + 1$ der Fall ist. Diese Bedingung ist nun äquivalent dazu, dass sich die Kreise C und \mathbb{S}^1 schneiden. \square

Für eine diskrete Maximalfläche F kann man sowohl bei GVP-singulären Facetten (ohne lichtartige Kanten) als auch bei NVP-singulären Facetten (mit lichtartigen Kanten) zwischen verschiedenen Arten unterscheiden. [Yas15]

Theorem 8. (Klassifizierung singulärer Facetten) Sei S eine singuläre Facette einer diskret maximalen Fläche F . Die vier Punkte einer GVP-singulären Facette liegen in einer Hyperbel oder einer Parabel und es gilt:

Fälle 1.-3. Die Punkte der Facette liegen im Schnitt eines translierten Lichtkegels und einer nicht-raumartigen Ebene. Hierbei ist die Facette nicht eingebettet wenn genau zwei Punkte in jedem Hyperbelast liegen, andernfalls ist sie eingebettet.

Fall 4. Die Facette liegt in einer außergewöhnlichen Hyperbel.

Ist die singuläre Facette NVP, so kommen genau die Fälle A-C vor:

Fall A. Die Facette degeneriert zu einem Punkt.

Fall B. Zwei Punkte der Facette fallen zusammen.

Fall C. Ein Punkt der Facette ist auf der Gerade, die von zwei anderen Punkten aufgespannt wird.

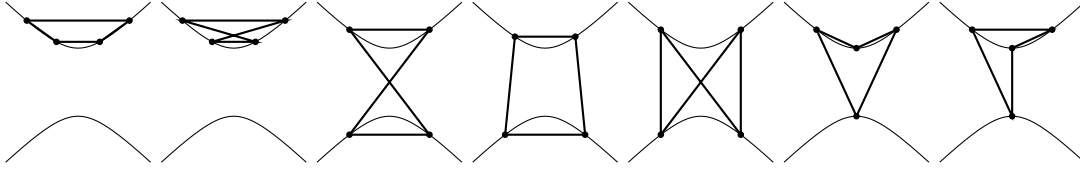


Abbildung 7: Mögliche Lagen dualer Facetten in nicht-raumartigen Ebenen

Beweis. Zunächst zeigen wir die Fälle für GVP-singuläre Facetten. Diese Facetten liegen in Ebenen mit entweder raumartigen oder lichtartigen Normalenvektoren. Da $cr(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*) < 0$ liegt die duale Facette zudem in einem translierten Lichtkegel \mathbb{L}_p^2 .

Fall 1. Drei Punkte von $(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$ liegen im Schnitt eines translierten Lichtkegels und einer lichtartigen Ebene.

In diesem Fall können wir die Punkte der dualen Facette F^* zu $X_i = (2t_i, t_i^2 - 1, t_i^2 + 1)^t \in \mathbb{L}^2$ für $t_i \in \mathbb{R}$ transformieren. Unter dieser Transformation ist unser Doppelverhältnis invariant, so dass:

$$CR := cr(X_1, X_2, X_3, X_4) = cr(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*) = cr(F, F_1, F_{12}, F_2)$$

$$\text{Ausrechnen mit Lemma 5 ergibt: } CR = \frac{(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)}{(t_2 - t_3)(t_4 - t_1)}$$

Mit $CR = cr(g, g_1, g_{12}, g_2) < 0$ für entsprechendes diskret holomorphes g aus Theorem 6 folgt nach einer Fallunterscheidung für die t_i , dass die Facette wie im linken Bild von Abbildung 8 eingebettet ist. Die Facette (F, F_1, F_{12}, F_2) liegt im Schnitt eines translierten Lichtkegels und einer lichtartigen Ebene. Die von $g(m + in) = (-1 + \frac{6}{5})m + i(-\frac{4}{5} + \frac{8}{5})n$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ erzeugte Maximalfläche liefert mit $(F_{2,0}, F_{3,0}, F_{3,1}, F_{2,1})$ ein Beispiel für diesen Fall.

Es ist anzumerken, dass sich in [Yas15] beim Doppelverhältnis ein Vorzeichenfehler eingeschlichen hat, die dort gezogenen Schlussfolgerungen stimmen mit den hier ausgeführten überein. Desweiteren ist nicht die dort erwähnte Facette $(F_{1,0}, F_{2,0}, F_{2,1}, F_{1,1})$, sondern die eben genannte das korrekte Beispiel für diesen Fall.

Fall 2. Die Punkte von $(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$ liegen in einem Hyperbelast.

Diese duale Facette liegt hier in einer zeitartigen Ebene. Wir transformieren wieder die Punkte der dualen Facette unter Erhaltung des Doppelverhältnisses. Diesmal setzen wir für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} X_1 &= (\sinh(a), 1, \cosh(a))^t, & X_2 &= (\sinh(b), 1, \sinh(b))^t, \\ X_3 &= (\sinh(c), 1, \epsilon_1 \cosh(c))^t, & X_4 &= (\sinh(d), 1, \epsilon_2 \cosh(d))^t. \end{aligned} \quad (50)$$

Setzt man hier $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$, so folgt: $CR = -\frac{\sinh(\frac{a-b}{2})\sinh(\frac{c-d}{2})}{\sinh(\frac{a-d}{2})\sinh(\frac{b-c}{2})}$.

Da unsere Maximalfläche nach Theorem 6 von einer diskret holomorphen Funktion g erzeugt wird, ist $CR = cr(g, g_1, g_{12}, g_2) < 0$. Eine Fallunterscheidung der Möglichkeiten für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ zeigt, dass (F, F_1, F_{12}, F_2) eingebettet ist, wie im linken Bild von Abbildung 8. Diese Facette liegt somit im Schnitt eines translierten Lichtkegels und einer zeitartigen Ebene liegt.

Fall 3. Zwei Punkte von $(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$ liegen in einem Hyperbelast, die anderen zwei liegen im anderen Hyperbelast.

Man wähle für (50) diesmal $\epsilon_1 = \epsilon_2 = -1$ und $CR = -\frac{\sinh(\frac{a-b}{2})\sinh(\frac{c-d}{2})}{\cosh(\frac{a+d}{2})\cosh(\frac{b+c}{2})}$.

Wiederum ist $CR < 0$. Da $\cosh > 0$ gibt es nur die Möglichkeiten $a > b, c > d$ oder $a < b, c < d$ die beide eine nicht eingebettete Facette wie im mittleren Bild von Abbildung 8 erzeugen. Wie in Fall 2 liegt (F, F_1, F_{12}, F_2) im Schnitt eines translierten Lichtkegels mit einer zeitartigen Ebene, ist jedoch nicht eingebettet.

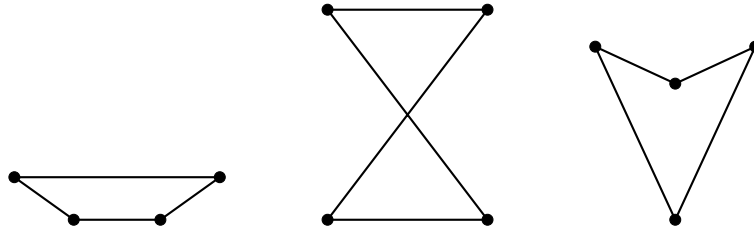


Abbildung 8: Die möglichen GVP singulären Facetten

Fall 4. Drei Punkte von $(F^*, F_1^*, F_{12}^*, F_2^*)$ liegen in einem Hyperbelast, der andere liegt im anderen Hyperbelast.

Dieses Mal folgt für (50)

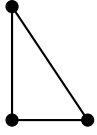
$$(a) \quad CR = \frac{\sinh(\frac{a-b}{2})\cosh(\frac{c+d}{2})}{\sinh(\frac{a-d}{2})\cosh(\frac{b+c}{2})} \quad \text{für } -\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1,$$

und (b) $CR = -\frac{\sinh(\frac{a-b}{2})\cosh(\frac{c+d}{2})}{\cosh(\frac{a-d}{2})\sinh(\frac{b-c}{2})}$ für $\epsilon_1 = -\epsilon_2 = 1$.

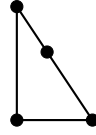
Da $CR < 0$ ist, muss für (a) $d < a < b$ oder $d > a > b$ und für (b) $a < b < c$ oder $a > b > c$, so dass in beiden Fällen (F, F_1, F_{12}, F_2) wie im rechten Bild von Abbildung 8 ist.

Bemerkung. Es stellt sich heraus, dass die Facette in diesem Setting nicht in einem translierten Lichtkegel, sondern in einer sogenannten *außergewöhnlichen Hyperbel* liegt. Damit ist eine Kurve in $\mathbb{R}^{2,1}$ gemeint, die isometrisch zu $\mathbb{H}(p) := \{x = (x_1, 0, x_0)^t \in \mathbb{R}^{2,1} \mid \|x\|^2 = p^{-2}\}$ mit $(p \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist. Eine solche Kurve ist „außerordentlich“, da sie in keinem verschobenen Lichtkegel \mathbb{L}_p^2 liegt (Beweis siehe [Yas15, Proposition 9.1]).

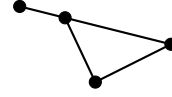
Es bleiben die NVP singulären Facetten mit lichtartigen Kanten zu betrachten. Wir unterscheiden zwischen drei Fällen.



Abbildungung 9: Facetten in Fall B



Abbildungung 10: Facetten in Fall C



Fall A. Alle Punkte von g liegen auf dem Einheitskreis \mathbb{S}^1 .

Da alle Kanten der korrespondierenden Facette nach Theorem 6 zu 0 werden, degeneriert hier die Facette zu einem Punkt.

Fall B. Zwei Punkte von g liegen auf \mathbb{S}^1 .

Auch in diesem Fall degeneriert die Facette. Wenn die zwei Punkte, die auf dem Einheitskreis \mathbb{S}^1 liegen benachbart sind und die anderen beiden *innerhalb* von \mathbb{S}^1 liegen, ist die Facette ein eindimensionales „V“ Abbildung 9 rechts. Wenn andererseits mindestens einer der Punkte außerhalb von des Einheitskreises liegt, so degeneriert die Facette zu einem Dreieck Abbildung 9 links.

Fall C. Ein Punkt von g liegt auf \mathbb{S}^1 .

Liegt genau ein Punkt auf dem Einheitskreis, so kommen Facetten wie in Abbildung 10 vor.

Wir zeigen zuletzt die Berechnungen des Doppelverhältnisses.

In Fall 1 ist $\|X_1 - X_2\|^2 = (2t_1 - 2t_2)^2$. Mit Lemma 5 sieht man: $cr(X_1, X_2, X_3, X_4) =$

$$\frac{(t_1 - t_2)^2(t_3 - t_4)^2 - (t_1 - t_3)^2(t_2 - t_4)^2 + (t_1 - t_4)^2(t_2 - t_3)^2}{2(t_1 - t_4)^2(t_2 - t_3)^2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_3 - t_4)}{(t_2 - t_3)(t_4 - t_1)}.$$

Für Fall 2 ist $\|X_1 - X_2\|^2 = 4\sinh^2(\frac{a-b}{2})$, wobei verwendet wurde, dass
 $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ und
 $\sinh(x) - \sinh(y) = 2\cosh(\frac{x+y}{2})\sinh(\frac{x-y}{2})$ sowie
 $\cosh(x) - \cosh(y) = 2\sinh(\frac{x+y}{2})\sinh(\frac{x-y}{2})$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Sei $A = \|X_1 - X_2\|\|X_3 - X_4\| = 2\sinh(\frac{a-b}{2})2\sinh(\frac{c-d}{2})$
 und analog $B = \|X_1 - X_3\|\|X_2 - X_4\|$, $C = \|X_1 - X_4\|\|X_2 - X_3\|$.

Dann ist mit Lemma 5 $cr(X_1, X_2, X_3, X_4) =$

$$= \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2C^2} = \frac{A}{C} \frac{A - \frac{B^2 + C^2}{A}}{2C} = \frac{A}{C} \frac{A^2 - B^2 + C^2}{2AC}.$$

Hier ist $A \neq 0$, da GVP-singuläre Facetten keine lichtartige Kante enthalten.

Es gilt $\frac{A^2 - B^2 + C^2}{2AC} = -1$ und somit: $CR = -\frac{A}{C} = -\frac{\sinh(\frac{a-b}{2})\sinh(\frac{c-d}{2})}{\sinh(\frac{a-d}{2})\sinh(\frac{b-c}{2})}.$

Fälle 3 und 4 lassen sich ähnlich zeigen. □

3.7 Beispiele diskret maximaler Flächen

Mit dem Theorem 6 können nun diskret maximale Flächen mit Hilfe der in Abschnitt besprochenen diskret holomorphen Funktionen erzeugt werden. In verschiedenen Beispielen tauchen die eben behandelten singulären Facetten auf. Die Beispiele für $g : \mathbb{Z}[i] \rightarrow \mathbb{C}$, $z = m + in \in \mathbb{Z}[i]$ entstammen [Yas15].

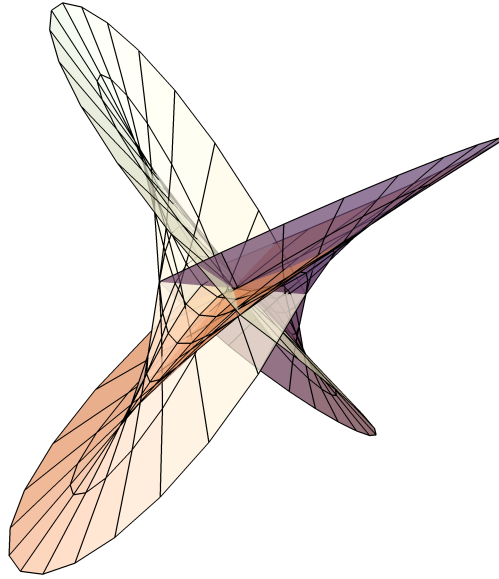
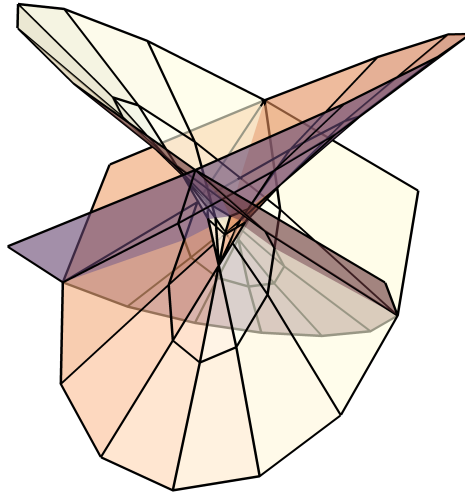


Abbildung 11: Eine Enneperfläche zu $g(m, n) := \frac{1}{5}(m + in)$

Beispiel 1. (Enneperfläche) Das einfachste Beispiel $g(z) = cz$ mit einer Konstante $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ erzeugt die diskret maximale *Enneperfläche*. Hier finden wir einige Beispiele singulärer Facetten:

- Die von $g(m, n) = (-1 + \frac{6}{5}m) + i(-\frac{4}{5} + \frac{8}{5}n)$ für $m, n \in \mathbb{Z}$ erzeugte Maximalfläche liefert mit $(F_{2,0}, F_{3,0}, F_{3,1}, F_{2,1})$ ein Beispiel einer eingebetteten lichtartigen Facette wie in Fall 1. Diese Facette liegt in der lichtartigen Ebene mit Normalenvektor $N = (1, 0, -1)^t$ und Norm $\|N\|^2 = 0$.
- Für $g(m, n) = \frac{1}{5}(m + in)$ ist $(F_{1,5}, F_{2,5}, F_{2,6}, F_{1,6})$ eine zeitartige eingebettete Facette wie in Fall 2. Sie liegt in einer zeitartigen Ebene mit Normalenvektor $N = (15, 55, -57)^t$ mit $\|N\|^2 = 1$.
- Mit $g(m, n) = \frac{1}{5}(m + in)$ ist $(F_{1,4}, F_{2,4}, F_{2,5}, F_{1,5})$ ein Beispiel einer zeitartigen nicht eingebetteten Facette wie in Fall 3. Hier hat die zeitartige Ebene den Normalenvektor $N = (15, 45, -47)^t$ mit Norm $\|N\|^2 = 41$.

- In der von $g(m, n) = \frac{1}{6}(m + in)$ erzeugten Enneperfläche kann ein Beispiel für Fall 4 bei $(F_{4,4}, F_{5,4}, F_{5,5}, F_{4,5})$ gefunden werden. Hier liegt die Facette in einer außergewöhnlichen Hyperbel in einer zeitartigen Ebene mit Normalenvektor $N = (-27, -27, 38)^t$ und $\|N\|^2 = 14$.
- Eine Facette, die wie in Fall A zu einem Punkt degeneriert, erhalten wir mit $g(m, n) := \sqrt{2}((m - \frac{1}{2}) + i(n - \frac{1}{2}))$.
- Eine degenerierte Facette in Form eines „V“ wie in Fall B sieht man für $g(m + in) = \frac{1}{5}(m + in)$ bei $(F_{3,3}, F_{4,3}, F_{4,4}, F_{3,4})$. Es ist $F_{3,3} = F_{4,4} = (\frac{28}{5}, \frac{-28}{5}, 0)$ und $F_{4,3} = (\frac{42}{5}, \frac{-7}{2}, \frac{7}{2})$, $F_{3,4} = (\frac{7}{2}, \frac{-42}{5}, \frac{7}{2})$.
- Wieder mit $g(m + in) = \frac{1}{5}(m + in)$ finden wir schließlich bei $(F_{4,2}, F_{5,2}, F_{5,3}, F_{4,3})$ und $(F_{4,3}, F_{5,3}, F_{5,4}, F_{4,4})$ je ein Beispiel für die beiden Möglichkeiten für Fall C.


 Abbildung 12: Eine diskrete Enneperfläche zu $g(m, n) = 1/2(m + in)$

Hinweis. Bei der Berechnung der Normalenvektoren wurde das hier nicht definierte *Wedge-Produkt* genutzt, da aufgrund der Lorentzmetrik nicht mit dem Kreuzprodukt gearbeitet werden kann. Siehe hierzu [Yas15].

Aus diskret holomorphen Funktionen der Form $g(z) := cz^\gamma$ mit $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ lassen sich weitere diskrete Maximalflächen erzeugen. Für $\gamma = \frac{2n-2}{n}$ und $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) erhält man Enneperflächen höherer Ordnung. Zu Abbildungen davon sei auf [Yas15] verwiesen. Wir haben also in Enneperflächen Beispiele zu allen singulären Facetten gefunden, außer dem degenerierten Dreieck von Fall B. Betrachten wir ein weiteres Beispiel.

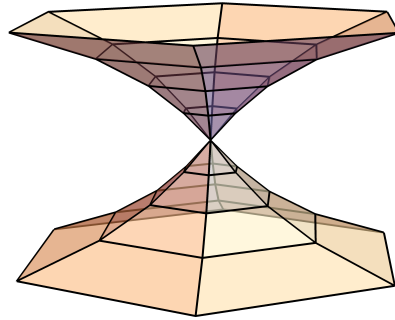


Abbildung 13: Ein diskreter Catenoid zu $g(m, n) := \exp(\frac{1}{2}m + \frac{i\pi}{3}n)$.

Beispiel 2. (Catenoide) Diskret maximale Catenoide können mit Hilfe von $g(m, n) = \exp(\alpha m + i\beta n)$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\beta \notin \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}$ erzeugt werden. Wie in [Yas13] lässt sich das Doppelverhältnis als $cr(g, g_1, g_{12}, g_2) = -\frac{\sinh^2(\alpha/2)}{\sin^2(\beta/2)}$ berechnen.

Sei $g(m, n) := \exp(\frac{1}{2}m + \frac{i\pi}{3}n)$, dann ist $cr(g, g_1, g_{12}, g_2) = -\frac{\sinh(1/4)^2}{\sin(\pi/6)^2}$. In dem von g erzeugten Catenoid ist $(F_{0,0}, F_{1,0}, F_{1,1}, F_{0,1})$ eine degenerierte Facette in Form eines Dreiecks wie in Fall B.

Ausgehend von den Catenoiden aus Beispiel 2 kann man weitere diskrete Maximalflächen erzeugen, die aus einer Rotation um eine Achse stammen. Mit raumartigen Achsen erhält man hyperbolische Catenoide, mit lichtartigen Achsen erhält man parabolische Catenoide. In [Yas15] werden diese beiden Flächen betrachtet. Im Gegensatz zu den vorherigen Beispielen, wird hierbei nicht von einer diskret holomorphen Funktion ausgegangen. Der Ansatz in [Yas15] untersucht eine dem kontinuierlichen Fall entsprechende Parametrisierung der zu erzeugenden Flächen.

Beispiel 3. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ergibt $g(m, n) = \tanh(\alpha m + i\beta n)$ weitere diskrete Maximalflächen. In Abbildung 14 ergibt sich das Doppelverhältnis $-\frac{\sinh^2(1/3)}{\sin^2(1/2)}$.

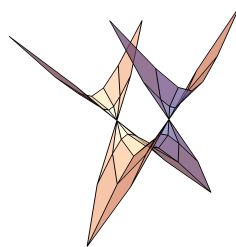


Abbildung 14: Eine von $g(m, n) := \tanh(\frac{1}{3}m + \frac{1}{2}in)$ erzeugte Fläche.

4 Fazit und Ausblick

Ziel dieser Arbeit war es, verschiedene Ansätze diskret holomorpher Funktionen vorzustellen, diese in einen Zusammenhang zu bringen und ausgehend von einem der Ansätze diskrete Maximalflächen im dreidimensionalen Minkowskiraum zu erzeugen und zu untersuchen.

Der historischen Route folgend wurde die Diskretisierung der Cauchy-Riemann Gleichungen als ein diskretes Analogon zu Holomorphie aufgefasst. Auf dem Gaußschen Zahlengitter konnte gezeigt werden, dass Real- und Imaginärteile diskret holomorpher Funktionen dieser Art und auch die Funktionen selbst in einem gewissen Sinne diskret harmonisch sind. Lassen sich mit diesen Ansatz noch weitere diskrete Analoga zu Erkenntnissen aus der Funktionentheorie finden?

Um die Kombinatorik des zweidimensionalen Zahlengitters zu verallgemeinern wurde der Begriff der Quad-Graphen eingeführt. Allgemeine Gleichungssysteme auf Quad-Graphen können auf 3D-Verträglichkeit untersucht werden, was ein diskretes Gegenstück zu Integrierbarkeit (im Sinne der integrablen Systeme) darstellt. Zunächst wurde die Integrierbarkeit der diskreten Cauchy-Riemann Gleichungen charakterisiert. Danach wurde das Doppelverhältnis Gleichungssystem auf 3D-Verträglichkeit untersucht. Welche weiteren Gleichungssysteme sind in diesem Sinne integrierbar?

Man kann außerdem betrachten, welche Strukturen ein in diesem Sinne integrierbares Gleichungssystem mit sich bringt. Die 3D-Verträglichkeit ermöglicht unter Anderem diskrete *zero curvature* Repräsentation des Systems, was in [BMS05] behandelt wird.

Funktionen, die das Doppelverhältnis Gleichungssystem lösen, können auch als diskret holomorphe Funktionen aufgefasst werden. Es wurde gezeigt, dass sich von dieser zweiten Art der diskret holomorphen Funktionen mit dem Hirota System Funktionen ableiten lassen, die das Cauchy-Riemann System 3D-verträglich lösen. Spezielle Lösungen des Hirota Systems stammen darüber hinaus von Kreismustern, die interessante geometrische Eigenschaften mit sich bringen. Welche weiteren Eigenschaften bringt die besondere geometrische Struktur von Kreismustern mit sich? Können auch mit den zweiten Ansatz diskrete Analoga von funktionentheoretischen Eigenschaften wie mit dem ersten Ansatz gefunden werden?

Mit 3D-verträglichen Lösungen des Doppelverhältnissystems lassen sich im Minkowskiraum mit Hilfe einer Weierstraß Darstellung diskrete Maximalflächen erzeugen. Diese gehören abgesehen von Nabelpunkten zu den diskret isothermen Flächen, welche auch bezüglich des Doppelverhältnisses definiert sind. Die Struktur des Minkowskiraums erfordert eine besondere Behandlung des Doppelverhältnisses. Nachdem dieses ins dreidimensionale erweitert wird, muss der Sonderfall von lichtartigen Kanten berücksichtigt und mit Infinitesimalvariationen behandelt werden. Darüber hinaus kommen analog zum kontinuierlichen Fall bei diskreten Maximalflächen Singularitäten in Form von singulären Facetten vor. Diese liegen nicht in raumartigen Ebenen und können lichtartige Kanten

enthalten. Nach einer Klassifizierung dieser Sonderfälle wurde anhand von Beispielen gesehen, dass alle diese singulären Facetten auch tatsächlich vorkommen.

In dieser Ausarbeitung wurden Maximalflächen mit Hilfe von 3D-verträglichen Lösungen des Doppelverhältnissystems, die auf dem speziellen Quad-Graph \mathbb{Z}^2 definiert wurden, erzeugt. Können weitere Maximalflächen erzeugt werden, wenn man von Funktionen auf komplizierteren Quad-Graphen ausgeht?

Alle Abbildungen in diesem Dokument stammen vom Autor selbst. Zur Erzeugung wurde das TEX-Paket TikZ und das Programm Mathematica verwendet.

Literatur

- [BG15] A. I. Bobenko and F. Günther. Discrete complex analysis on planar quad-graphs. *Advances in Discrete Differential Geometry* p. 57-132, 2015.
- [BMS05] A. Bobenko, C. Mercat, and Y. B. Suris. Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2005(583):117–161, 2005.
- [BP96] A. Bobenko and U. Pinkall. Discrete isothermic surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 475:187–208, 1996.
- [BS08] A. Bobenko and Y. Suris. *Discrete Differential Geometry. Consistency as Integrability*. Graduate Studies in Mathematics, Vol. 98. AMS, 2008.
- [Duf56] R. Duffin. Basic properties of discrete analytic functions. *Duke Math. J.*, 23(2):335–363, 06 1956.
- [Duf68] R. J. Duffin. Potential theory on a rhombic lattice. *Journal of Combinatorial Theory*, 5(3):258–272, 1968.
- [Fer44] J. Ferrand. Fonctions préharmoniques et fonctions préholomorphes. *Bull. Sci. Math*, 68(2):152–180, 1944.
- [Gü14] F. Günther. *Discrete Riemann Surfaces and Integrable Systems - Dissertation*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2014.
- [HJ03] U. Hertrich-Jeromin. *Introduction to Möbius differential geometry*, volume 300. Cambridge University Press, 2003.
- [Hof08] T. Hoffmann. Discrete differential geometry script, 2008.
- [Isa41] R. Isaacs. *A finite difference function theory*. PhD thesis, Columbia University, 1941.
- [Kis08] C. Kiselman. Functions on discrete sets holomorphic in the sense of ferrand, or monodiffic functions of the second kind. *Science in China Series A: Mathematics*, 51(4):604–619, 2008.
- [Kob83] O. Kobayashi. Maximal surfaces in the 3-dimensional Minkowski space. *Tokyo Journal of Mathematics*, 6(2):297–309, 1983.
- [Mer01] C. Mercat. Discrete riemann surfaces and the ising model, 2001.
- [RG11] J. Richter-Gebert. *Perspectives on Projective Geometry*. Springer, 2011.
- [UY06] M. Umehara and K. Yamada. Maximal surfaces with singularities in Minkowski space. *Hokkaido Math. J.*, 35(1):13–40, 02 2006.

- [Wol15] M. Wolf. Funktionentheorie Skript, 2015.
- [Yas13] M. Yasumoto. Weierstrass representation for semi-discrete minimal surfaces. *Journal of Math-for-Industry (2012B-5)*, 4:109—118, 2013.
- [Yas15] M. Yasumoto. Discrete maximal surfaces with singularities in minkowski space. *Differential Geometry and its Applications*, 43:130–154, 2015.