ДЗ №1

ДЗ 1

(5,2)-код с набором кодовых слов (КС):

ИС	КС
00	00000
01	10110
10	01011
11	11101

ИС = информационные символы

1. Найти вероятность ошибки при передаче по ДСК с переходной вероятностью $p = 10^{-3}$.
2. Найти порождающую и проверочную матрицы

1) Для того, чтобы посчитать вероятность ошибки, посчитаем вероятность не ошибки. В таком случае. Для 00 мы можем не ошибиться если получим коды.
00000
10000
01000
00100
00010
00001
Соответственно для первого кода вероятность будет (1-p)^5 Для каждого из 5 остальных вероятность (1-p)^4*p. Тогда общая вероятность не ошибиться будет (1-p)^5+5*(1-p)^4*p. А тогда вероятность ошибки будет
Pe=1-((1-p)^5+5*(1-p)^4*p)=1−0.995009990004999-5·0.996005996001·0.001
Pe=1−0.999990019985004=0.000009980014996
Аналогично для остальных информационных символов, мы можем исправить только одну или ноль ошибок.

2) Для данного кода, базисными векторами можно взять два вектора e1=[1,0,1,1,0] и e2=[1,1,1,0,1]. Два ненулевых вектора.
И тогда порождающей матрицей будет матрица:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Найдём проверочную матрицу.
Для этого найдём вектора h, их будет n-k=5-2=3.
Тогда нам подойдёт
h1=[0,0,1,1,1]
поскольку для второго кс 1*0+0*0+1*1+1*1+0*1=0
для третьего 0*0+1*0+0*1+1*1+1*1=0
для четвертого 1*0+1*0+1*1+0*1+1*1=0
h2=[0,0,1,1,1]
поскольку для второго кс 1*1+0*0+1*0+1*1+0*1=0
для третьего 0*1+1*0+0*0+1*1+1*1=0
для четвертого 1*1+1*0+1*0+0*1+1*1=0
h3=[1,1,0,1,0]
поскольку для второго кс 1*1+0*1+1*0+1*1+0*0=0
для третьего 0*1+1*1+0*0+1*1+1*0=0
для четвертого 1*1+1*1+1*0+0*1+1*0=0
Так же вектора линейнонезависимые.
Тогда проверочная матрица H ,будет :

$$H = \begin{bmatrix} 0,0,1,1,1 \\ 0,0,1,1,1 \\ 1,1,0,1,0 \end{bmatrix}$$

ДЗ №2

Показать, что расстояние Хемминга удовлетворяет аксиомам расстояния и может использоваться как метрика

Перечислим аксиомы расстояния которые должны выполнятся, чтобы можно было использовать его как метрику
1) Неотрицательность, как нетрудно заметить из определения расстояние равно количеству элементов которые отличаются друг от друга, а количество не может быть отрицательным.
2) Для двух слов x и y, d(x,y)=0 <=> x=y, докажем это.
Если d(x,y)=0, то это означает, что у двух слов нет отличий в элементах, а значит, что эти элементы просто напросто совпадают, из чего следует, что это верно, только когда x=y. Наоборот же, если два элемента совпадают, то у них нет отличий, а значит и расстояние Хемминга будет нулевым.
3)Симметрия d(x,y)=d(y,x). Логично, что если между x и y отличий к, то и между y и x тоже отличий k, а значит d(x,y)=d(y,x).
4)Неравенство треугольника d(X,Z)≤d(X,Y)+d(Y,Z). Рассмотрим одну фиксированную позицию i, тогда если Xi=Zi, то тогда отличий в этом элементе нет, и 0 меньше либо равно чем любое количество различий между Xi и Yi + Yi и Zi. Если же Xi не равно Zi, то тогда Yi совпадает ровно с одним из Xi или Zi, а значит 1 меньше либо равно 1.
Если по всем i пройтись и сложить. То мы получим d(X,Z)≤d(X,Y)+d(Y,Z)

ДЗ №3

ДЗ 3

Доказать теорему

Код с минимальным расстоянием d_{min} исправляет любые комбинации ошибок кратности $t \le \lfloor (d-1)\ /\ 2 \rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ - наибольшее целое, не превышающее x

Пусть было передано слово x, получено y. Предположим, что код не исправил комбинацию ошибок кратности t и предпочёл слово z, вместо x, это означает, что d(z,y)≤d(x,y)=t, как было доказано ранее для расстояния Хемминга верно, что
d(z,x)≤d(z,y)+d(y,x) => d(z,x)-d(y,x)≤d(z,y) => d(z,x)-t ≤ d(z,y)
Поскольку t≤⌊(d(z,x)-1)/2⌋≤((d(z,x)-1)/2)<d(z,x)/2, то d(z,x)-(d(z,x)/2) < d(z,x)-t ≤ d(z,y) => t≤d(z,x)/2 <d(z,y),
Что противоречит тому, что d(z,y)≤d(x,y)=t, следовательно допущение не верно, и код исправляет любые комбинации ошибок кратности t

ДЗ 4

ДЗ 4

Найти порождающую и проверочную матрицы для кода

ИС	КС
000	000000
100	110100
010	011010
110	101110
001	101001
101	011101
011	110011
111	000111

Поскольку у нас k=3, то базисных векторов будет так же 3, выберем например:

e1= 110100

e2= 011010

e3= 101001

Покажем, что из них можно получить все остальные.

0*e1+0*e2+0*e3=c1

1*e1+0*e2+0*e3=c2

0*e1+1*e2+0*e3=c3

0*e1+0*e2+1*e3=c5

0*e1+1*e2+1*e3=c7

1*e1+1*e2+0*e3=c4

1*e1+0*e2+1*e3=c6

1*e1+1*e2+1*e3=c8

Тогда порождающая матрица будет

$$\begin{bmatrix} 110100 \\ 011010 \\ 101001 \end{bmatrix}$$

Найдём проверочную матрицу. Для этого найдём вектора ортогональные базисным.

Пусть hi в общем виде будет. hi=(x1,x2,x3,x4,x5,x6)

Тогда

из 110100: x1+x2+x4=0

из 011010: x2+x3+x5=0

из 101001: x1+x3+x6=0

x1=x2+x4, x3=x2+x5 подставляем в 3 уравнение получаем (x2+x4)+(x2+x5)+x6=0

x4+x5+x6=0 значит x6=x4+x5.

Тогда общее решение

x=(x1,x2,x3,x4,x5,x6) = (x2+x4, x2, x2+x5, x4, x5, x4+x5), подставляем различные тройки x2,x4,x5.

Например 0,0,1 получаем вектор 001011

0,1,0 получаем вектор 100101

1,1,1 получаем вектор 010110

Тогда проверочная матрица H будет

$$\begin{bmatrix} 001011 \\ 010110 \\ 100101 \end{bmatrix}$$