

量化梯度 v2

slcju

波动率的重要性

摘要

在上一版的基础上，引入 bp 率和胜率在不同分段的波动率，合理化低出场高胜率英雄的得分，差异化不同分段的计分。低出场英雄的胜率波动大，顶端局的 bp 率和胜率都比 1350 分段的波动大。波动率越高的因素说服力越低，如同股市低成交量下的涨停/跌停。

1 上一版简述及其存在的问题

上一版只是设计了算法模型，没有对模型拟合任何参数。文档脚注里有提到一个 σ ，用于设置胜率的权重，但没有深入下去。一方面做出来感觉效果还行，另一方面也没有历史数据去学习参数。后来许多人反应一系列英雄的梯度有问题，又有幸得到苏苏的一份历史数据，便以此为出发点加以改进了。感谢各位的批评和建议。

一个英雄的实力由胜率与 bp 率联合决定，二者应为乘积的关系。下文中 w 指胜率， p 指出场率， b 指禁用率，单位均为百分点。根据这三个量，设计一个指标 S 对英雄¹进行排名。

首先根据非 ban 必选的含义，将 p 和 b 合为一个称为 bp 率的指标 P 。²

$$P_0(p, b) = \frac{p}{100 - b} \quad (1)$$

$$P = \frac{P_0}{\mu_{P_0}} \quad (2)$$

然后用函数将胜率和 bp 率的实际意义传达到总分 S 中。

$$S = f_w(w_t) \cdot f_P(P_t) \quad (3)$$

注意，这里使用了 w_t 和 P_t 而不是 w 和 P 。下标 t 表示标准化的值。**标准化用于解决两个指标尺度不一致的问题**，这是上一版没有深入考虑的。

分析了胜率的实际意义，选用 softplus 函数作为 f_w ：

$$f_w(w_t) = \log_2(1 + 2^{w_t}) \quad (4)$$

对于 bp 率，上一版相当于直接令 $f_P(P_t) = P$ ，引入标准化后，这应为

$$f_P(P_t) = P_t \quad (5)$$

¹或（英雄，分路，技能）组合，后文一般简称英雄。

²上一版中 μ_{P_0} 被记为 C 。这里将 P_0/μ_{P_0} （即上一版中的 P/C ）表示为一个整体 P ，是为了处理和表达上的方便。在梯度坐标图展示时，展示 P_0 而不是 P ，以尽可能让坐标图浅显易懂。

2 数据标准化

一个常用的方式是，将数据线性映射到标准正态分布，即减去均值，再除以标准差³：

$$w_t = \frac{w - \mu_w}{\sigma_w} \quad (6)$$

$$P_t = \frac{P - \mu_P}{\sigma_P} \quad (7)$$

这种方法的前提是，原始数据应大致符合或有充分的理由假定为正态分布。那么，胜率和 bp 率是否满足条件呢？这需要**对历史数据进行分析**。

截取 2021.1.1 至 2022.4.25 的数据，去除一些异常值⁴，计算 P^5 ，对 w 和 P 拟合概率分布如下⁶。图中横轴是 w 或 P 的取值，纵轴是取值的出现频率。

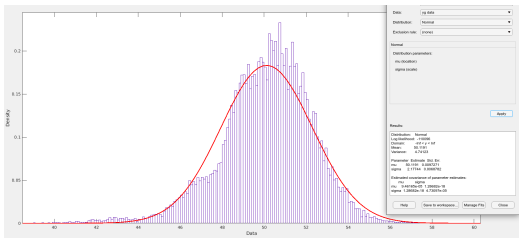


图 1: 1350 分段的胜率分布

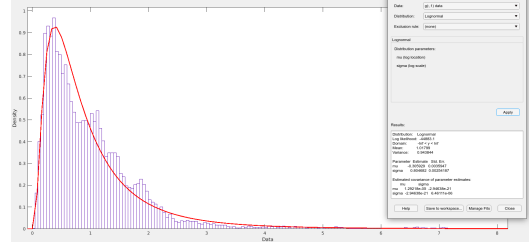


图 2: 1350 分段的 bp 率分布

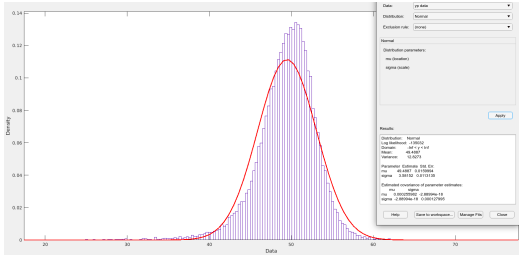


图 3: 顶端局的胜率分布

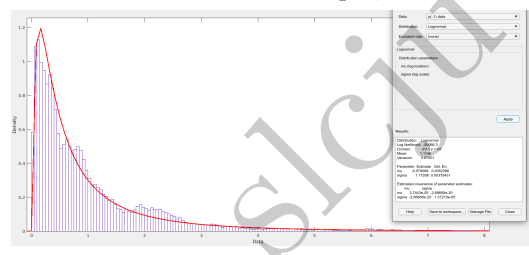


图 4: 顶端局的 bp 率分布

不论是从历史数据还是直觉来看，胜率符合正态分布都是合理的。bp 率则拟合了对数正态分布，即 bp 率取对数后符合正态分布。⁷ $\mu_w, \sigma_w, \mu_P, \sigma_P$ 都是拟合可以得到的常数。它们反映了英雄的胜率和 bp 率在不同分段（1350 分段和顶端局）的分布情况。

³Z-score 标准化。标准差也可叫波动率，是风险的度量。上一版相当于直接认定 $\mu_w = 50, \sigma_w = 1$ 。

⁴处理后一共 50110 个数据条目，对应于 480 天，一百零几个英雄。

⁵这里的计算有简化， μ_{P_0} 没有按分路计算，而是以日为单位，计算了每日所有英雄 bp 率的均值。因为这份历史数据并没有细致到分路。这不致有大的误差。

⁶文档中的图不太清楚，github 里有原图，见本文 6.6 节。

⁷bp 率取值为 1 表示某英雄的 bp 率等于该日全英雄 bp 率的均值，然而由图可见，数据分布明显左偏，大部分数据小于 1。这就像随便找二十个人跟四个王者策划一起计算薪水均值，那么大多数人的薪水是低于均值的。在王者里好比，顶端局中路火舞西施弈星玉环四人占去了七成的出场率，还有二十个左右的英雄分这剩下的三成，这二十位都会低于平均。另外，这种状况下，往往应该用中位数而不是平均数，但我考虑后还是使用了平均数，因为我想让 T2 以上筛选出足够强力的英雄（如上面例子中的四位），锁定 T2 的含义为“一般强势英雄”，T3 的含义为“大众英雄”。上一版文档中称“T3 的英雄已落后于中线”，应为“均线”，而均线是显著高于中线的。

顶端局的 σ_w 和 σ_P （胜率和 bp 率的波动）都比 1350 分段的大，这可以用顶端局的样本量小来解释。历史数据表明胜率波动大是顶端局环境的固有特征，那么，极高或极低的胜率在顶端局的说服力就比在 1350 分段弱。假如马可在顶端局和 1350 分段同样是 45 胜率，那么相比之下在 1350 分段他确实就比较烂了，在顶端局他或许没有那么烂（因为从历史数据来看，在 1350 分段 45 胜率已经是相当靠后了，而在顶端局则并没有那么靠后）。bp 率也有类似的效应。

3 bp 率的处理

bp 率符合对数正态分布，则式 (7) 应为

$$\ln P_t = \frac{\ln P - \mu_P}{\sigma_P} \quad (8)$$

即

$$P_t = \exp\left(\frac{\ln P - \mu_P}{\sigma_P}\right) \quad (9)$$

$$P_t = \exp\left(\frac{\ln P}{\sigma_P}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\mu_P}{\sigma_P}\right) \quad (10)$$

$$P_t = P^{1/\sigma_P} \cdot \exp\left(-\frac{\mu_P}{\sigma_P}\right) \quad (11)$$

由式 (3) 和式 (5)， $\exp(-\frac{\mu_P}{\sigma_P})$ 这个常数系数并不会对排行产生影响（所有的英雄得分按比例乘以一个正的常数不影响内部排序），因此将其丢弃。丢弃后，总分 S 中 bp 率这一项就比较简单了：

$$S = f_w(w_t) \cdot P^{1/\sigma_P} \quad (12)$$

相比上一版，多了一个指数，反映该分段下 bp 率的固有波动率⁸。bp 率波动越大，在总分中 bp 率的权重就越低，如同上一部分结尾对胜率的分析。

4 胜率的处理

对于胜率，是否将拟合得到的常数 μ_w, σ_w 直接代入式 (6) 再代入式 (4) 呢？且慢，观察一下胜率和 bp 率的联合分布（图 5 和图 6）。横轴为 bp 率，纵轴为胜率，每一个数据点代表历史数据中某日某英雄的胜率和出场率。

观察到，随着 bp 率的增加，胜率所覆盖的“敞口”有收窄的趋势。画一条竖直线，从左往右扫过去，数据点在竖直线上的分布会越来越窄。这表示，在 bp 率比较高的情况下，胜率一般不会偏离 50 太多；bp 率比较低时，胜率更可能出现比较大的偏离。这也是符合直觉的，一方面，出场率低意味着样本量小，波动自然会比较大；另一方面，顶端局 bp 率低的英雄，或是雅典娜狼狗（绝活哥专属），或是甄姬猴子（太弱而无人问津），这两种情况居多，胜率两极分化。

⁸或称历史波动率，历史数据得出的规律，与期权中的隐含波动率相对。隐含波动率是对未来波动率的预测，而一般情况下本文不认为未来短期内各波动率会急剧变化，就暂时不涉及这个概念。当然这是个可以继续探索的点，在某些特殊情况下，波动率会有急剧变化，比如严重超标英雄（沈梦溪、澜刚登正式服，两次专精张飞）出现、赛季大更新等，这些情况下使用历史波动率未必合适。

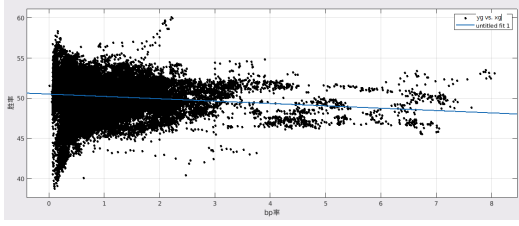


图 5: 1350 分段胜率-bp 率联合分布

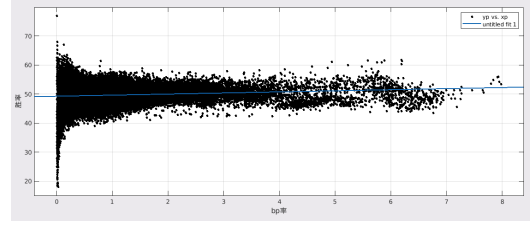


图 6: 顶端局胜率-bp 率联合分布

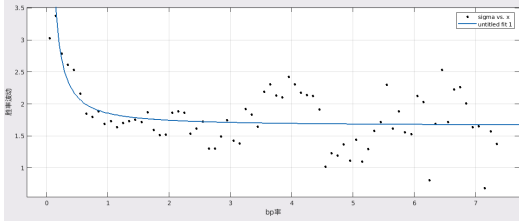


图 7: 1350 分段的胜率波动-bp 率关系

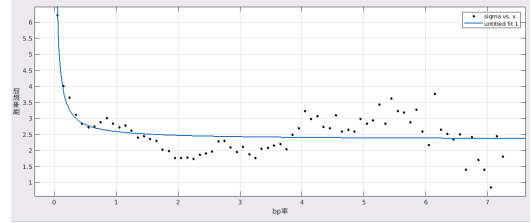


图 8: 顶端局的胜率波动-bp 率关系

这个“敞口”的宽度与 σ_w 有直接的关系。由以上观察可知， σ_w 不宜被视为一个常数，而是随 P 增大而减小的函数⁹。

以 0.1bp 率的宽度为窗口，从左向右滑动窗口（将上面零宽度的竖直线拓宽到 0.1 的宽度，如图 9 示意），统计窗口内数据点胜率的标准差，作为窗口中点 bp 率对应的 σ_w ，将得到的 (P, σ_w) 绘出并拟合函数，如图 7 和图 8 所示。拟合了形如 $\sigma_w(P) = a_w P^{b_w} + c_w$ 的函数，结果 b_w 接近于 -1 ，该函数近似于带常数的反比例。 P 较小时 σ_w 会较大，压低了低出场率英雄胜率的权重。假如雅典娜 56 胜率 0.25bp 率，露娜 54.7 胜率 1.5bp 率，那么仅在胜率这一项 ($f_w(w_t)$) 上，雅典娜的得分甚至不如胜率比她低的露娜，因为出场率太低， σ_w 会比较大，胜率的说服力低。

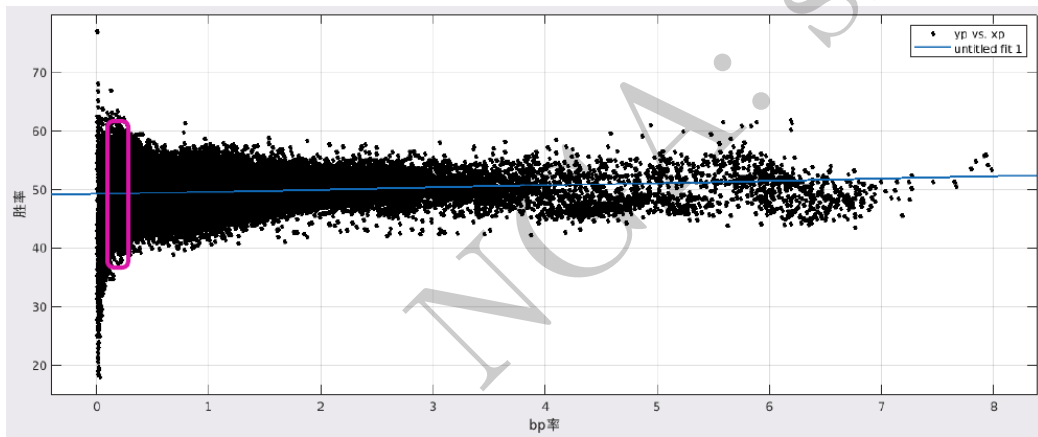


图 9: 胜率波动-bp 率关系的计算

此外，由图 5 和图 6 可知， μ_w 也可认为与 P 有线性关系，即 50 胜率附近横穿过数据点的那条略倾斜的蓝色直线，由该分段所有历史数据点线性拟合而得。1350 分段该直线向下倾斜，

⁹将 P 视为自变量， w 视为因变量比较符合常理，先 bp 再进入游戏决胜负。因此将 bp 率视为独立因素，先处理了 bp 率。

反映该分段的娱乐性，姐己甄姬这种低胜率弱势英雄用的人还是很多；顶端局该直线向上倾斜，反映分奴的环境，用的人多的英雄往往胜率较高（除去吕布马可澜，木兰张飞李元芳孙尚香火舞露娜这种胜率出场率双高的英雄更多）。但考虑后，我还是决定将 μ_w 固定为 50，因为 50 胜率有特殊意义，这个正负转换的位置不宜变动。

胜率分的计算方式总结为式 (4) 及：

$$w_t = \frac{w - 50}{\sigma_w(P)} \quad (13)$$

$$\sigma_w(P) = a_w P^{b_w} + c_w \quad (14)$$

a_w, b_w, c_w 都是从历史数据拟合得到的常数，1350 分段和顶端局数值不同。这样操作后，历史数据上， w_t 近似服从于标准正态分布，那么对于待排名的新数据，也可以做这样的操作将其映射到标准正态分布上。这样就与 bp 率尺度一致了。上一部分已分析，bp 率内部 ($\ln P_t$) 也是一个标准差为 1 的正态分布。胜率有 50 这个重要的分界线，bp 率则不存在（因此 μ_P 项可以被丢弃）。

5 总结

由式 (4)、式 (12-14)，梯度排名分 S 的计算方式如下：

$$S = \log_2(1 + 2^{w_t}) \cdot P^{1/\sigma_P} \quad (15)$$

$$w_t = \frac{w - 50}{a_w P^{b_w} + c_w} \quad (16)$$

式中 σ_P, a_w, b_w, c_w 都是从各分段历史数据中拟合得到的常数，列于下表。这几个“大盘指标”或许有特定的意义。 σ_P 就很明显，反映该分段各英雄出场均衡的程度：值越小，表示英雄出场越均衡，各英雄都有出场的机会，“盘面比较健康”。

	σ_P	a_w	b_w	c_w
1350 分段	0.805	0.201	-1.170	1.659
顶端局	1.173	0.249	-0.926	2.349

表 1: 参数表

与上一版相比，就是引入了两个波动率 $\sigma_w(P)$ 和 σ_P 。波动较大的因素，其权重应被压低，让各因素尺度一致，就是这一次改进的核心思想。这里的波动率从历史数据中归纳而来，与分段环境有关。梯度划分的方法与之前不变。

分段环境的影响有多大，从图 10 和图 11 可见。数据取于 2022.6.8。英雄在坐标中的分布状态差异显著，那么在做梯度排行时也不应该用同一套划分标准（参数）。这就像个股排行不能抛开所在的股票池去空谈。大盘都在涨的时候，个股 2% 的涨幅或许都不算强势。王者的英雄盘面一定是中性的（输赢相抵），但不同盘面的波动率差异仍不容忽视。

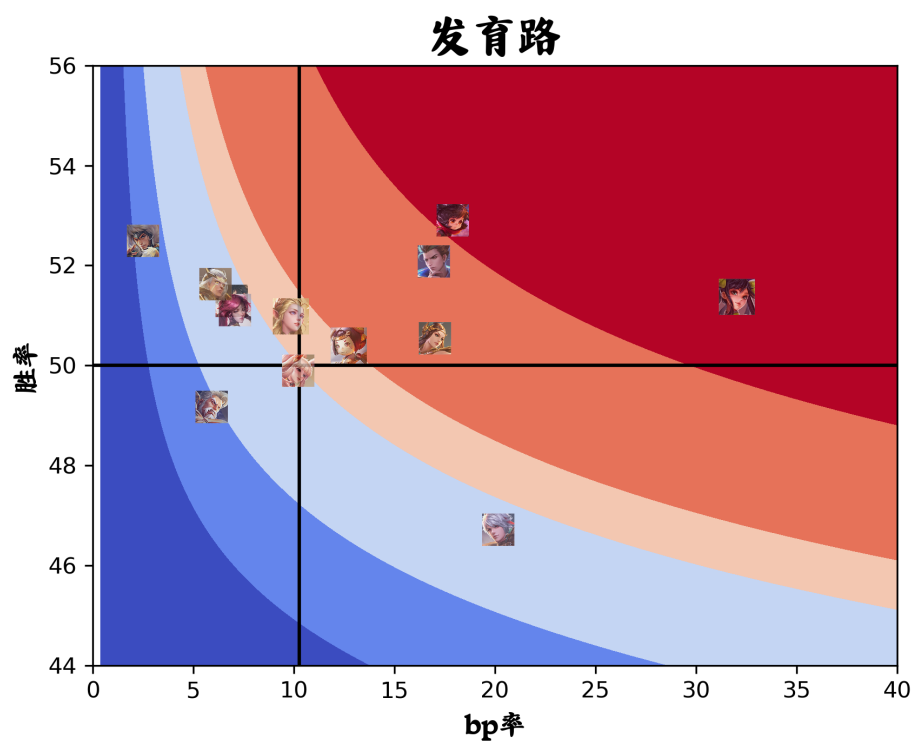


图 10: 1350 分段发育路梯度排行示例。马可的 bp 率超过 40 了，因此未显示。

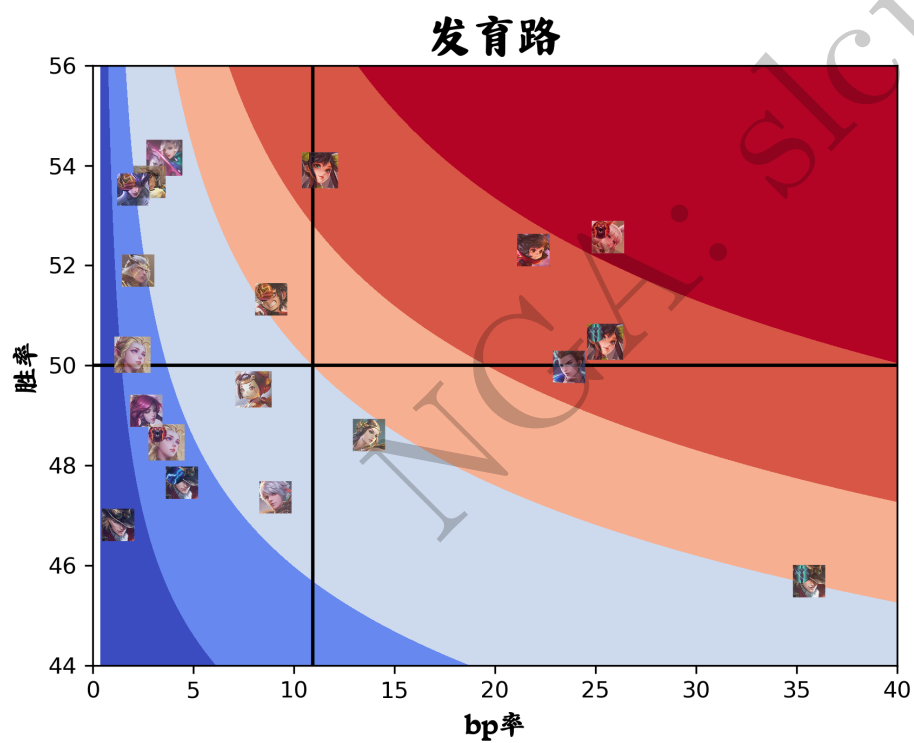


图 11: 顶端局发育路梯度排行示例

6 Q&A 和其他碎碎念

6.1 按你的算法，会不会出现一个负胜率的英雄，出场率越高梯度反而越低？

上一版的算法是非常明确的，梯度分 S 随 P 线性增长（因为 $f_w(w)$ 总是正的）。这一版情况有些复杂，计算并作图展示两个分段 $S(w, P)$ 在 $w = 46, 48, 50, 52, 54$ 时随 P 的变化情况，如图 12 和图 13。可以看到 S 随 P 单调增，胜率越高增长越快。顶端局的增长要慢一些，因为顶端局的 bp 率波动大，其权重就比 1350 分段要低。 $w = 44, 47, 50, 53, 56$ 的情况在 github 里有，完全类似。

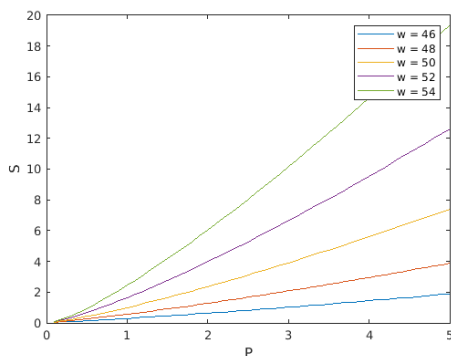


图 12: 1350 分段 S - P 图

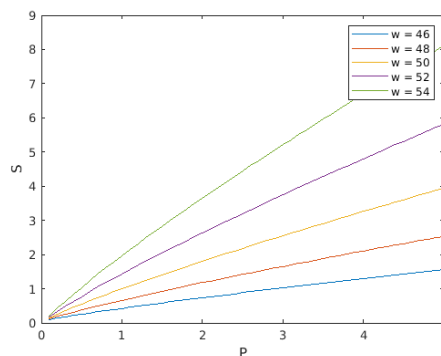


图 13: 顶端局 S - P 图

6.2 顶端局排行里，庄周打野、火舞对抗路，这类情况要不要处理一下？

这类情况我不方便做特殊处理，因为我不能主观上完全排除庄周直接走打野位的可能性（尽管大家都知道目前这个可能性极低）。如果庄周打野直接删了或者并到庄周辅助里面去了，那西施辅助呢？西施直接走辅助位的可能性同样比较低，但总比庄周打野高一些。这一类情况是不方便订定一个统一的处理规则的。我希望尽可能减少排行中的主观因素，把客观的数据呈现。

怎样去理解这类数据？惩戒庄周（张飞类似）是要在积极地在野区对抗或吃到很多野怪的情况下才会被判为打野，顺风才能入侵对方野区吃到很多野怪，胜率自然比较高，必须要结合出场率确认打出顺风的几率。火舞，要挂边很长时间才会被判为对抗路；西施，则是基本放弃中线才被判为游走。这两种情况胜率高，提示了两种优秀的打法。如果理解为火舞出门对抗路或者西施出门买宝石，那大概就走偏了。

6.3 1350 分段和顶端局，我该看哪一个排行？

从数据质量的角度来说，二者各有千秋。1350 分段样本量大，数据噪声小（分析历史数据才注意到），但不够详实，只能以英雄为单位来排，没有分路和召唤师技能的数据。

从适用面的角度来说，那当然是 1350 分段会更适合大多数玩家。但顶端局的一些打法和趋势可能会在一段时间后下沉到大众分段，因此也值得关注。反过来，大众分段的一些打法向上影响顶端局是比较少见的。

我的建议是都可以看看。分数打上去了，大众分段的排行对你的价值可能就不大了。

6.4 有没有类似的研究或项目？

看到一个国外做 LoL 的，<https://www.mobachampion.com/tier-list/>，网页最下部可以选中文语言，但翻译不完全。他们还考虑了 KDA、输出、承伤等数据，做得比我细致得多。

6.5 如何看待和其他梯度榜的关系？

主观的榜同样有他们的价值，尤其是当制订者在他们关注的分段有丰富的游戏经验时，比如梦归奇迹的榜。如果我制作出来的榜和大多数主观榜都不合，那就应该是我的模型有一些问题，脱离实际的理论模型难有意义。当然我不能为了迎合主观榜去强行凑一些参数，还是要从数学等角度，保证公式中的每一步、每一个值都有其数据上或实际中的意义。

很难有一个榜做到绝对的全面和客观，我们都只能看到王者峡谷生态的一个部分，各个榜从各自的视角相互补充。我不可能这么几个公式就把所有英雄的实力都概括进来了，理论总是有不完善之处。能从我的榜里发现其他榜所没有显示的东西，我这个榜就是有意义的吧。比如两周前我的榜就提示惩戒张飞是一支新势力，现在已经扫荡峡谷了。

6.6 开源代码和数据

<https://github.com/slcju/quantitative-T>。使用代码需要苏苏的荣耀助手帐号，代码注释里有写如何申请。使用到的历史数据和绘制的原图在 history_analysis 文件夹下。

6.7 与投资的关系

我差不多是在做一个量化选股的指标...

把每个英雄比作一支股票，胜率就像收益率，出场率有点成交量的意思。出场率在一定程度上反映风险：成交量低，流动性差的股票一般波动大，风险高。不能直接把收益率当做选股金标准，要看其背后的风险，考察单位风险的收益（夏普比率）。

式 (6) 就是夏普比率的公式。如果 μ_w 用图 5 图 6 中的直线（类比为无风险收益率）代入， w_t 就是夏普比率了。这个 w_t 或许可以作为上一期帖子最后几楼有人提到的，练英雄的推荐度。

投资这块我还是个外行，行家对此应该还可以更深入挖掘。

6.8 结语

这周我发最后一期量化梯度，因为我退游了... 一方面我的本命蔡文姬在可见的一段时间内预计都不会加强（蔡蔡和明明下水道了多久），现在真的太难了... 另一方面最近几个月体验服调整，数值策划尽整些离谱玩意儿，改得乱七八糟... 改动幅度比前几年大了太多，几乎每个赛季都要把一个分路拿来洗牌。专精装本来还觉得挺有创意，结果他们这平衡能力太让人失望...

退游后我对数据的理解也就会偏离版本，就不再适合维护这个项目了。感兴趣的朋友可以吧代码接过去。每隔几个月应该需要拉取较近的历史数据重新拟合 σ_P 和 $\sigma_w(P)$ ，版本变迁大环境会变；或者可以考察一下是否需要引入短期/隐含波动率的概念。

上一期帖子里有人戳中了我的痛点... 我大概就像孙策一样，一个人沉浸在自己的世界里做一些奇奇怪怪的研究... 王者带给我最大的礼物就是孙策这个角色吧，代入感太强了。