MENU

# Suffix Automaton Tutorial

06 NOVEMBER 2016 on Algorithm

## Preface

目前中英文站点上并没有很好的 Suffix Automaton (后缀自动机, 简称 SAM ) 教程. 比较知名的材料有两个, 一是陈立杰的 *营员交流资料* , 二是某俄国人的某 SAM 博文, 但这两个材料都不好懂. 在下反复啃了几天后, 略有所得, 在此记录一下.

## Introduction

较为靠谱的 SAM 资料:

- A short guide to suffix automata - Codeforces
- MAXimal :: algo :: Суффиксный автомат. Построение и применения, 用 Yandex 提供的机翻服务 勉强可以看懂.
- 后缀自动机：O(N)的构建及应用 - wmdcstdio的专栏 - 博客频道 - CSDN.NET, 上文的中文翻译, 翻译质量良好, 但是排版让人读起来比较痛苦.

TL;DR:

- SAM 与 suffix tree 是等价的.

- 建立 SAM 的 time/space complexity: $O(n)$ .
- 实现的代码很简单 (小于 40 行), 但理解起来有难度.

SAM 是处理 String 相关问题的有力工具, 可以解决包括但不限于以下问题:

- Verify $W$ is substring of $T$ .
- Verify $W$ is suffix of $T$ .
- Count the number of unique substrings in $T$ .
- Count the total length of unique substrings in $T$ .
- Count the number of $W$ in $T$ .
- Find the first position of $W$ in $T$ .
- Find all positions of $W$ in $T$ .
- Find the longest common substring of $T_1$ and $T_2$ .
- Find the longest common substring from $T_1$ to $T_k$ .
- Find the smallest cyclic shift of $T$ .
- Find the $kth$ smallest substring of $T$ .
- Find the shortest string that is not a substring of $T$ .

# Automaton: The Definition

Suffix Automaton 里的 *Automaton* 其实就是 DFA , 以下是 Wiki 中的定义:

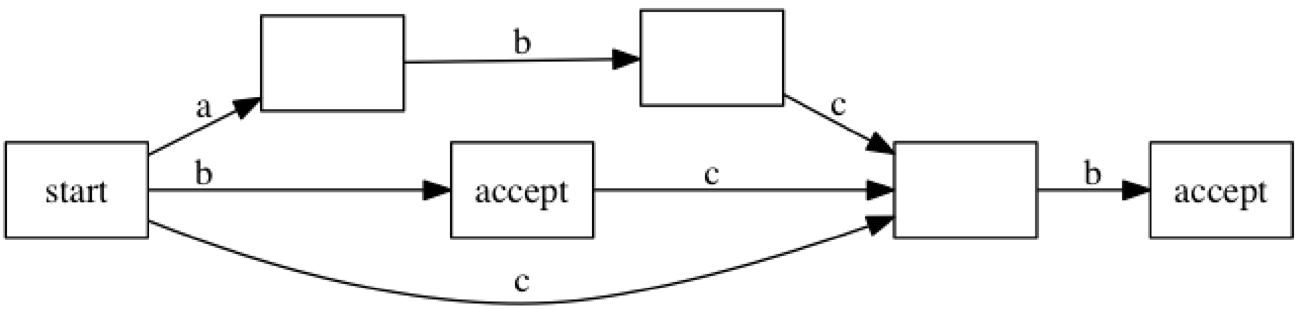
> *A **deterministic finite automaton** M is a 5-tuple, (Q, Σ, δ, q0, F), consisting of*
>
> - a finite set of states (Q)
> - a finite set of input symbols called the alphabet (Σ)

> - a transition function ($\delta : Q \times \Sigma \to Q$)
> - an initial or start state ($qo \in Q$)
> - a set of accept states ($F \subseteq Q$)

Suffix Automaton, 顾名思义就是可以识别 Suffix 的 Automaton, A short guide to suffix automata - Codeforces 中有如下的描述:

> *A **suffix automaton** A for a string s is a minimal finite automaton that recognizes the suffixes of s. This means that A is a directed acyclic graph with an initial node i, a set of terminal nodes, and the arrows between nodes are labeled by letters of s. To test whether w is a suffix of s it is enough to start from the initial node of i and follow the arrows corresponding to the letters of w. If we are able to do this for every letter of w and end up in a terminal node, w is a suffix of s.*

以下图为例, 下图是 *"abcb"* 的对应 SAM:




可以看到, 从 start state 出发的 paths, *"abcb"*, *"bcb"*, *"cb"*, *"b"*, 都能到达 accept state, 这些路径的集合即为 *"abcb"* suffixes 的集合.

# State Of SAM

一个关键的问题是, **SAM** 里的 **State** 到底有什么含义?

在介绍 State 的含义之前, 需要先了解一个定义. 给定 String $T$ 与 $s$ , 定义 $endpos(T, s) = \{end \mid T[begin : end] = s\}$ . 也就是说, $endpos(T, s)$ 表示了所有在 $T$ 中出现的 $s$ 的结束位置**(下标)**. 如果有两个 Strings, $s_1$ 与 $s_2$ , 如果有 $endpos(T, s_1) = endpos(T, s_2)$ , 则 $s_1$ 与 $s_2$ 是 **endpos-equivalent** 的.

在上一小节的例子中, 可以看到每个 state 可以有 $\geq 1$ 的 indegrees, 这意味着 state $u$ 可以识别 $T$ 的某个 substrings 集合, 设这个集合为 $substrings(u)$ . $substrings(u)$ 有如下的 property:

对于 SAM 中的任意 state $u$ , $substrings(u)$ 中的任意两个 substrings 必然是 **endpos-equivalent** 的. 以 $T =$" $abcb$ " 为例(见上小节的图例), 显然的, " $abc$ "," $bc$ "," $c$ " 是 endpos-equivalent 的, 他们的 $endpos$ 集合都是 $\{2\}$ .

所以, 可以根据 $endpos$ 的定义, 将 $T$ 的所有 substrings 分成若干个类, 使每个类中的 substrings 都是 endpos-equivalent 的, 这样的分类结果会与 SAM 中的 states 一一对应.

为了进一步明确 state 的含义, 我们先来思考一个问题: 对于 $T$ 的两个任意的 **substrings** $s_1$ 与 $s_2$ **,** 集合 $endpos(T, s_1)$ 与 $endpos(T, s_2)$ 的关系会是什么?

For generality, 假设 $length(s_1) \leq length(s_2)$ . 如果 $endpos(s_1) \cap endpos(s_2) \neq \emptyset$ , 也就是说, $s_1$ 与 $s_2$ 至少会

同时以 $T$ 某个字符作为结尾. 所以, $endpos(s_1) \cap endpos(s_2) \neq \emptyset \implies s_1 \sqsupset s_2$ , 即 $s_1$ 是 $s_2$ 的 suffix (注意, 包含 $s_1 = s_2$ 的情况).

显然的, 如果 $s_1 \sqsupset s_2$ , 则 $endpos(s_1) \supseteq endpos(s_2)$ , 毕竟 substring 越长, 对 $endpos$ 的限制就越多, 集合就越小. 再有, 如果 $endpos(s_1) \supseteq endpos(s_2)$ , 则必有 $length(s_1) \leq length(s_2)$ , 由此可推导出 $s_1 \sqsupset s_2$ . 综上, $endpos(s_1) \supseteq endpos(s_2) \Leftrightarrow s_1 \sqsupset s_2$ .

所以, 我们现在可以回答上面提出的那个问题了:

$$\begin{cases} endpos(s_1) \supseteq endpos(s_2), & \text{iff } s_1 \sqsupset s_2 \\ endpos(s_1) \cap endpos(s_2) = \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases}$$

让我们进一步来思考一个问题: 给定一个 **state $u$ , $substrings(u)$ 有什么特性?**

给定一个 state $u$ , 定义

- $longest(u)$ : $substrings(u)$ 中最长的 substring
- $shortest(u)$ : $substrings(u)$ 中最短 substring
- $maxlen(u)$ : $longest(u)$ 的长度
- $minlen(u)$ : $shortest(u)$ 的长度

由于 $endpos(shortest(u)) = endpos(longest(u))$ , 根据上一个问题的结论, 我们可以知道 $shortest(u) \sqsupset longest(u)$ . 同理, 对于任意的 $s_i \in substrings(u)$ , 必有 $s_i \sqsupset longest(u)$ , 也就是说, $substrings(u)$ 中所有的 substrings, 必然会是 $longest(u)$ 的 suffix!

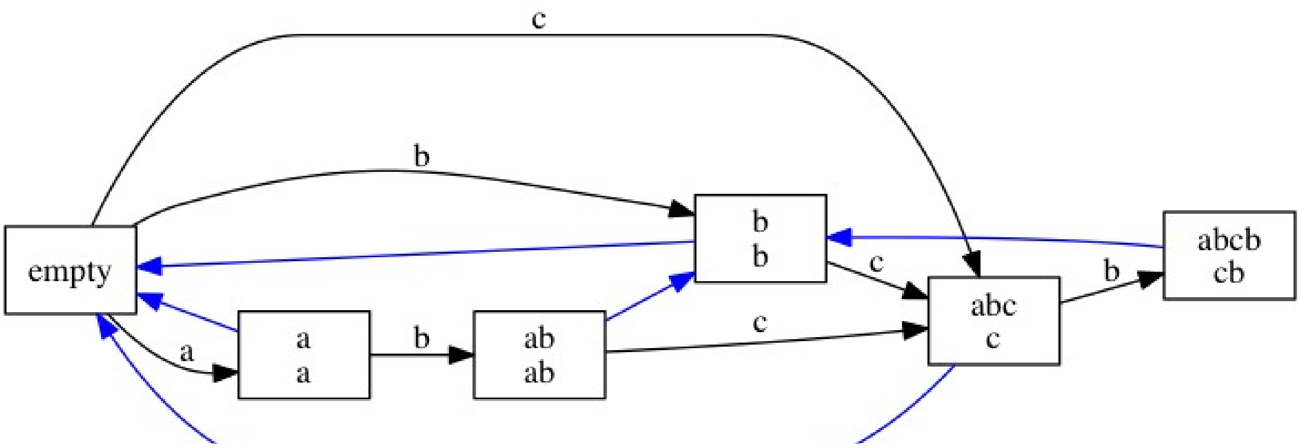
而且, 需要注意的是, 设 $s_i \sqsupset longest(u)$ 且 $minlen(u) \le length(s_i) \le maxlen(u)$ , 则必有 $s_i \in substrings(u)$ . 证明很简单, 因为 $endpos(shortest(u)) \supseteq endpos(s_i) \supseteq endpos(longest(u))$ , 由于 $endpos(shortest(u)) = endpos(longest(u))$ , 所以 $s_i \in substrings(u)$ , 得证.

直观来讲, 这意味这一个 state 会对应一个"连续的" suffix 集合, 例如 " $abc$ " , " $bc$ " , " $c$ " , 每个 substring 恰好是上一个 substring 的 suffix, 长度与上一个 substring 相差 1. 这真是一个美妙的特性呢!

# State's Suffix Link

除了通过 symbol (字符), SAM 的 state 之间还有另外一种状态变化方式, 也就是 suffix link. 上个小节谈到, 给定一个 state $u$ , $substrings(u)$ 可以通过 $longest(u)$ , $maxlen(u)$ , $shortest(u)$ , $minlen(u)$ 描述, 而且 $substrings(u)$ 是"连续"的. 我们将基于上述结论定义 suffix link.

给定 state $u$ , $v$ , 定义 $v = link(u)$ , 意为存在 from $u$ to $v$ 的 suffix link, 其中 $maxlen(v) + 1 = minlen(u)$ . 例如, 对于 $T =$" $abcb$ " , 有如下的 SAM 结构:



可以看到, 相比于之前的图例, 上图中加入了蓝色的 edges, 这些蓝色的 edges 就是 suffix links. 同时, 在图例中的每个 state $u$ 里标记了 $longest(u)$ 与 $shortest(u)$ , 以方便理解. 在上图中可以看到, state $["abcb","cb"]$ (也就是最右边的 state) 通过 suffix link 指向 state $["b","b"]$ , state $["b","b"]$ 再通过 suffix link 指向 start state. 其中,

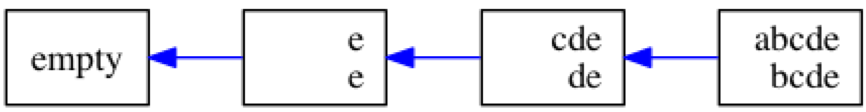
$$maxlen(["b","b"]) + 1 = minlen(["abcb","cb"])$$

.

为了简化表述, 引入以下与 suffix link 相关的符号与术语:

- $T_i$ : 表示 $T$ 中以 $T[i]$ 结尾的 prefix.
- **Suffix-link path** from $u$ to $v$ : 从 state $u$ 到 state $v$ 的, 一条使用 suffix link 相连的路径.

直观来讲, SAM 会把 $T_i$ 的 suffix 集合 (注意, 我这里用的不是 substring) $["", T_i]$ 切成几个区间, 每个区间可以视为一个 state, state 之间使用 suffix link 连接. 所以, 对于某个满足 $longest(u) = T_i$ 的 state $u$ , 考虑 suffix-link path from $u$ to start state 上的所有 states, 对这些 states 对应的 $substrings$ 集合做 union 操作, 即可得到 suffix 集合 $["", T_i]$ . 以下是 $longest(u) = "abcde"$ 的图例:



可以看到, suffix 集合 $["",'' abcde '']$ 被划分成 $["",""]$ , $['' e '',''e '']$ , $['' de '','' cde '']$ , $['' bcde '','' abcde '']$ 4 个区间, 其间通过 suffix link 相连.

# State's Transitions

现在我们来深入探讨一下 SAM 里面的 state transition 的含义. 需要注意的是, *就 DFA 的定义而言*, suffix link 与 state transition 是没有关系的, 原因是 suffix link 并没有被 symbol labeled, 这不符合 DFA 里 *transition function* 的定义. 这也是为什么我在上一小节使用"*状态变化*"来描述 suffix link, 因为 suffix link 并不是"*状态转移*". (但在 SAM 的结构里两者是有关系的, 本小节会讨论这一关系)

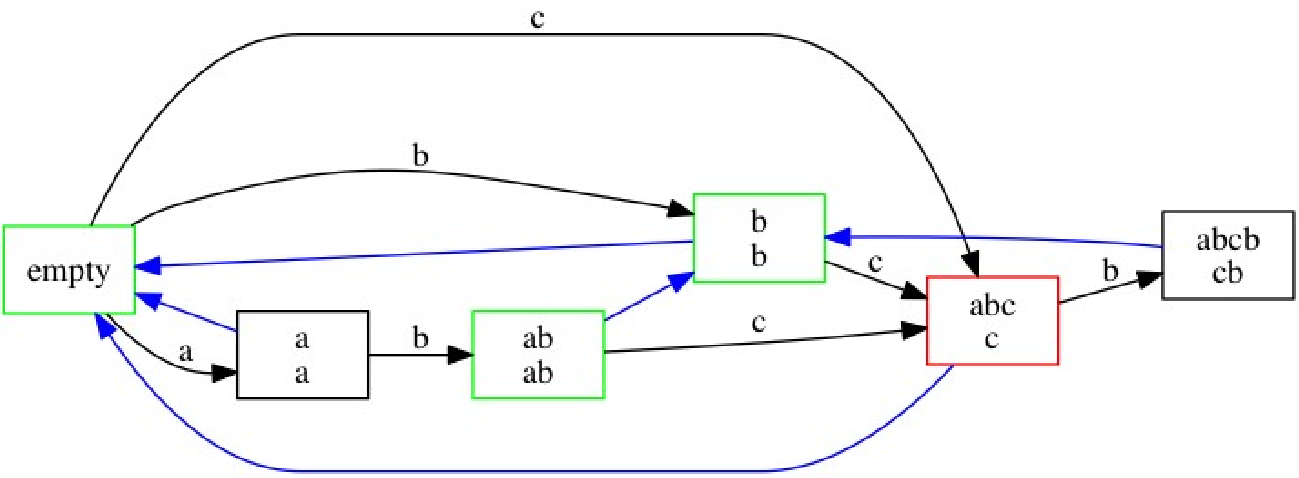
给定一个 state $u$ 与 symbol $c$ , 定义 $trans(u, c) = v$ , 表示从 state $u$ 到 state $v$ 存在 state transition 路径, 该路径通过 symbol $c$ 标识. 在本文的图例中, state transition 一律使用黑色的 edge 表示.

为了深入理解 SAM state transition 的含义, 需要思考一个问题: **如果存在 $trans(u, c) = v$ , state $v$ 与 state $u$ 有什么关系?**

由于有 $trans(u, c) = v$ , 那么必有 $\{s_i + c \mid s_i \in substrings(u)\} \subseteq substrings(v)$ , 也就是说, 往 state $u$ 的对应的 substrings 后面拼接 symbol $c$ , 得到的新 substrings 集合必然包含于 $substrings(v)$ .

而且, 考虑到 $substrings(v)$ 里的 substring 都是以某个 symbol $c$ 结尾的, 我们可以知道, 对于 SAM 里所有合法的 state transitions $trans(u_i, c_i) = v$ , 必有 $c_i = c$ , 也就是说, 所有以 $v$ 为终点的 transition , 必然带有相同的 symbol!

我们现在来考虑 indegrees $\geq 1$ 的情况, 还是以 $T =" abcb "$ 为例:




在上图中, 设

- $start$ : start state, 等价于 state $["",""]$ (最左, green 标记)
- $s_1$ : state $[" b "," b "]$ (green 标记)
- $s_2$ : state $[" ab "," ab "]$ (green 标记)
- $v$ : state $[" c "," abc "]$ (red 标记)

所以, 有 $trans(start," c ") = trans(s_1," c ") = trans(s_2," c ") = v$ . 可以看到, $substrings(v)$ 其实就是往集合 $substrings(start) \cup substrings(s_1) \cup substrings(s_2)$ 的所有 substrings 末尾拼接上 $" c "$ 之后得到的新集合! 由此可以引申得到以下性质:

对于 SAM 里的 state $v$ , 设 transition symbol 为 $c$ , 则有 $substrings(v) = \{s_i + c \mid s_i \in substrings(u_i), trans(u_i, c) =$

. 通俗来讲, 可以通过观察 state transitions 得到 state $v$ 的 $substrings(u)$ .

那么问题来了: 设 $U_v = \{u_i \mid trans(u_i, c) = v\}$ , $U_v$ 中的 **states 有什么关系呢?**

我们已经知道, 对于一个 state $v$ , $substrings(v)$ 中的 substrings 是"连续的". 由于到 state $v$ 的 transition 都带有相同的 symbol $c$ , 那么 $\{s_i \mid s_i \in substrings(u_i), u_i \in U_v\}$ 必然也是"连续的".

回想一下上一小节的 suffix link 定义, $v = link(u) \implies maxlen(v) + 1 = minlen(u)$ , 我们可以知道, $U_v$ 中的 states, 必然形成一条 **suffix-link path**! 以上图为例, 有 $U_v = \{start, s_1, s_2\}$ , $start = link(s_1)$ , $s_1 = link(s_2)$ .

到此, 我们已经基本理解了 SAM 的 state, suffix link, transition 的概念. 下面将会讲解如何构建 SAM.

# SAM Online Construction: The Principle

假设我们已经为 $T_i$ 构建了 SAM, 该 SAM 的结构使用两个 variables 追踪:

- $start$ : 指向 start state.
- $last$ : 指向"最后一个" state, $T_i \in substrings(last)$ .

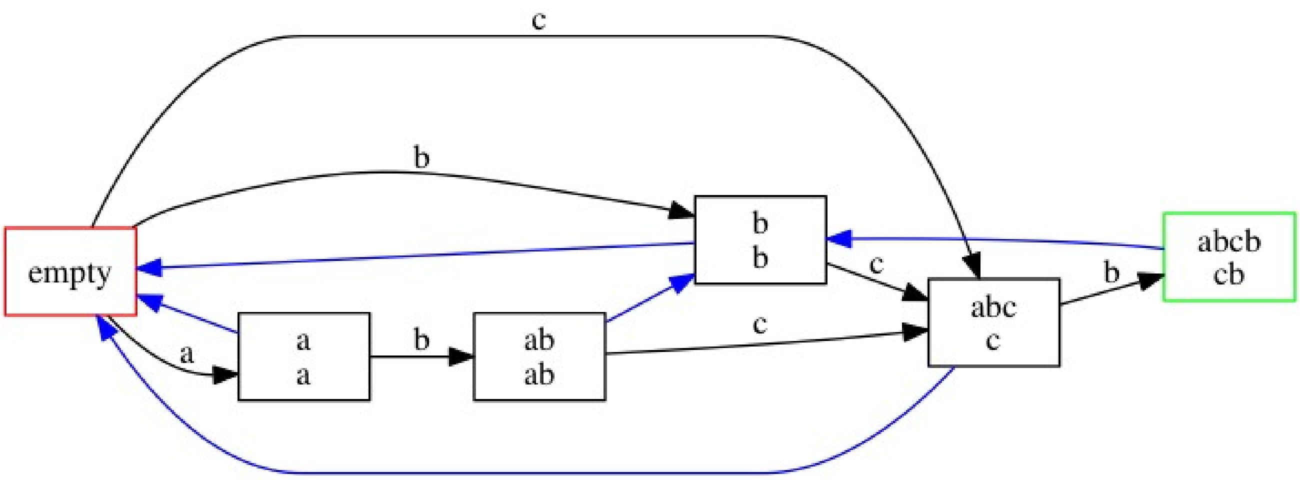
为了简化 construction, 在本小节中, SAM 中的每个 State $u$ 仅维护以下信息:

- $maxlen(u)$
- $link(u)$
- $trans(u, \Sigma)$ , 也就是以 $u$ 为起点的 state transitions

$start$ 作为一个特殊的 state, 有:

- $maxlen(u) = 0$
- $link(u) = null$

以下是一个简单的图例:




其中, $start$ 是 red state, $last$ 是 green state.

SAM online construction 的核心问题是: 如何将 $T[i+1]$ 插入到 $T_i$ 对应的 **SAM** 里, 插入 $c$ 会导致 **SAM** 的结构发生什么变化?

如果加入 $T[i+1]$ , 意味着更新后的 SAM 里必定有一个 state $u$ , 满足 $i+1 \in endpos(u)$ , 而更新前的 SAM 必然不存在这样的 state. 所以, 我们需要创建一个新的 state $cur$ 使

- $i + 1 \in endpos(cur)$
- $T_{i+1} \in substrings(cur)$

把 $T[i+1]$ 加入到 SAM, 是期望新的 SAM 可以识别 $T_{i+1}$ 的 suffix 集合. 这个集合, 恰好是 $\{s_i + T[i+1] \mid s_i \sqsupset T_i\}$ , 也就是说, 这是将 symbol $T[i+1]$ 拼接到 $T_i$ 的所有 suffix 的末尾之后得到的新集合 (当然, 还需要加入一个 empty string, 不过这个是细节性问题).

显然的, 根据 suffix link 的性质, 要得到 $T_i$ 的 suffix 集合, 只需要访问 suffix-link path from $last$ to $start$ 上的每一个 state $u$ , 将所有的 $substring(u)$ 合并即可. 由于这些 states 已经代表了 $T_i$ 的 suffix 集合, 只需要建立从这些 states 到 state $cur$ 的 transition, 就可以使 SAM 能识别 $T_{i+1}$ 的 suffix 集合.

设 state $p$ 为 suffix-link path from $last$ to $start$ 上当前正在处理的 state, 我们希望可以建立 $trans(p, T[i+1]) = cur$ , 使得 $\{s_i + T[i+1] \mid s_i \in substrings(p)\} \subseteq substrings(cur)$ . 那么问题来了, 如果已经存在 **state transition $trans(p, T[i+1]) = q$ , 其中 $q$ 是 SAM 里某个已经存在的 state, 我们该怎么处理?**

首先, 如果出现了 $trans(p, T[i+1]) = q$ 的情况, 意味着存在某个 suffix $x \sqsupset T_i$ (等价的, $x \in substrings(p)$ ), 使 string $(x + T[i+1])$

- 是 $T_{i+1}$ 的 suffix (显然).
- 同时是 $T_i$ 的某个 substring. 等价的, $(x + T[i+1]) \in substrings(q)$ .

在识别到这个 $trans(p, T[i+1]) = q$ 之后, 我们可以知道, 原先的 SAM 已经可以识别了 $T_{i+1}$ 的 suffix 集合的子集, 由此, 可以使用 suffix link 将 state $cur$ 指向 某个 state, 这样更新后的 SAM 即可识别 $T_{i+1}$ 的 suffix 集合.

设 某个 state 为 $pre$ , 在识别到 $trans(p, T[i+1]) = q$ 的情况下, 需要有 $link(cur) = pre$ , 那么, **state** $pre$ **需要满足什么样的性质?**

显然的, 在处理 state $p$ 的时候, 已经有 $minlen(cur) = maxlen(p) + 2$ . 设 state $p'$ 满足 $p = link(p')$ , 根据 suffix link 的定义, 有 $maxlen(p) + 1 = minlen(p')$ . 由于在处理 state $p$ 的时候, 已经存在 $trans(p', T[i+1]) = cur$ , 即有 $minlen(cur) = minlen(p') + 1$ . 所以, $minlen(cur) = minlen(p') + 1 = maxlen(p) + 2$ , 得证.

因为 $link(cur) = pre$ , 所以必有 $maxlen(pre) + 1 = minlen(cur)$ , 结合上面的结论, 可以推导出 $maxlen(pre) = maxlen(p) + 1$ . 这意味着:

- 存在 $trans(p, T[i+1]) = pre$
- $longest(pre) = longest(p) + T[i+1]$

And that's it! 我们需要检测 state $q$ 是否满足作为 $pre$ 的条件:

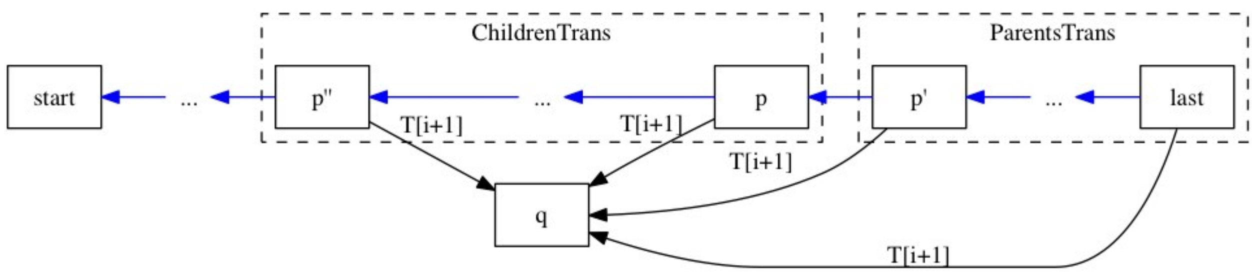
1. 如果 $maxlen(p) + 1 = maxlen(q)$ , 那么 state $q$ 就是我们要找的 $pre$ , 直接设 $link(cur) = q$ .

2. 如果 $maxlen(p)+1 < maxlen(q)$ , 这意味着 $substring(pre) \subset substring(q)$ . 这个时候, 需要将满足 $pre$ 条件的部分从 $q$ 里面剥离出去!
3. 显然的, 不可能出现 $maxlen(p)+1 > maxlen(q)$ 的情况.

对于 $maxlen(p)+1 < maxlen(q)$ 的情况, 利用在 state transition 小节得到的结论, 我们可以知道, 对于 state $p$ 所在的 suffix-link path, 必然有 state $p'$ 满足 $p = link(p')$ 且存在 $trans(p', T[i+1]) = q$ . 由此, 可以将以 state $q$ 为终点的 transition 分为两个部分:

- $ParentsTrans$ : 包含满足条件的 state transitions $trans(u, T[i+1]) = q$ , 对于其中的任意 state $u$ , 满足存在 suffix-link path from $u$ to $p'$ , 包括 $u = p'$ 的情况.
- $ChildrenTrans$ : 包含满足条件的 state transitions $trans(u, T[i+1]) = q$ , 对于其中的任意 state $u$ , 满足存在 suffix-link path from $p$ to $u$ , 包括 $u = p$ 的情况.

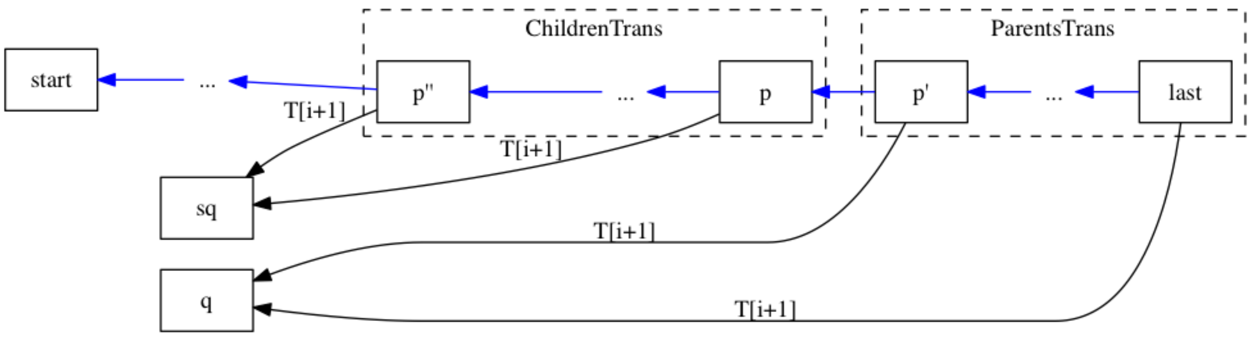
以下为对应图例:




其中, state $p''$ 是 state $p$ 的 child (through suffix link), 是最后一个满足 $trans(u, T[i+1]) = q$ 条件的 state, 也就是说, $p''$ 满足以下条件中的一个:

- $link(p'') = null$ , 即 $p'' = start$
- $trans(link(p''), T[i+1])$ 不存在
- $trans(link(p''), T[i+1])$ 存在, 但 $trans(link(p''), T[i+1]) \neq q$

由于 state transition 决定了 $substrings(q)$ , 为了将属于 $pre$ 的部分从 state $q$ 中分离出来, 可以新建一个 state $sq$ , 将 $ChildrenTrans$ 中的 transitions 全部转向 $sq$ . 如下图所示:




处理完以 state $sq$ 为终点的 transitions 之后, 还需要考虑以 $sq$ 为起点的 transitions. 显然的, 对于所有的 $trans(q, c) = q'$ , 也必须存在有 $trans(sq, c) = q'$ . 所以, 直接把 state $q$ 维护的 transitions copy 给 state $sq$ 就可以了.

完成 transition 的调整之后, 还需要调整 suffix links:

- $link(sq) = link(q)$ , 原因在于, 原先的 $shortest(q)$ 现在已经在 $substrings(sq)$ 集合里, 所以需要调整 suffix link 以保证 suffix-link 的"连续性".
- $link(q) = sq$ , 原因同上.

至此, 我们已经从 state $q$ 中分离出满足 $pre$ 特性的 state $sq$ !
最后, 设 $link(cur) = sq$ , Done!

# SAM Online Construction: The Pseudocode

利用上一小节的结论, 可以给出将 $T[i]$ 插入到 SAM 的算法步骤 (注意, 上一小节我们讨论的是将 $T[i+1]$ 插入到 $T_i$ 的 SAM 里, 所以下面的表述会有细微的区别, 但原理是一样的):

1. 新建一个 state $cur$ , 使 $maxlen(cur) = maxlen(last) + 1$ .
2. 从 $last$ 开始, 沿着 suffix-link path from $last$ to $start$ 访问每个 state $p$ , 直到 $p = null$ 或者存在 $trans(p, T[i])$ 的情况. 在循环中, 设 $trans(p, T[i]) = cur$ .
3. 判断 $p$ 是否为 $null$ . 如果 $p = null$ , 则设 $link(cur) = start$ , 结束后续操作. 反之, $p$ 是某个合法的 state, 且有 $trans(p, T[i]) = q$ .
4. 如果 $maxlen(p) + 1 = maxlen(q)$ , 设 $link(cur) = q$ .
5. 如果 $maxlen(p) + 1 < maxlen(q)$ , 从 state $q$ 中拆分出 state $sq$ , 设 $link(sq) = link(q)$ , 之后设 $link(q) = sq$ , $link(cur) = sq$ .
6. 更新 $last$ , 使 $last = cur$ .

以下是对应的 pseudocode:

```
Procedure Name: AddSymbolToSAM
Input: start, last, T[i]
```

```
Output: cur

# (1)
create state cur
maxlen(cur) = maxlen(last) + 1

# (2)
p = last
while p is not null AND trans(p, T[i]) not exists:
  trans(p, T[i]) = cur
  p = link(p)

# (3)
if p is null:
  link(cur) = start
  return cur

q = trans(p, T[i])
if maxlen(p) + 1 = maxlen(q):
  # (4)
  link(cur) = q
else:
  # (5)
  create state sq
  maxlen(sq) = maxlen(p) + 1
  for all trans(q, c) = q':
    trans(sq, c) = q'

  while p is valid AND trans(p, T[i]) = q:
    trans(p, T[i]) = sq
    p = link(p)
```

```
  link(sq) = link(q)
  link(q) = sq
  link(cur) = sq

reutrn cur
```

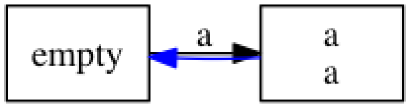
所以, 给定一个 string $T$ , 构建对应 SAM 的 pseudocode 如下所示:

```
Procedure Name: CreateSAM
Input: T
Output: start

create state start
last = start

for i in 1 to length(T):
  last = AddSymbolToSAM(start, last, T[i])

return start
```

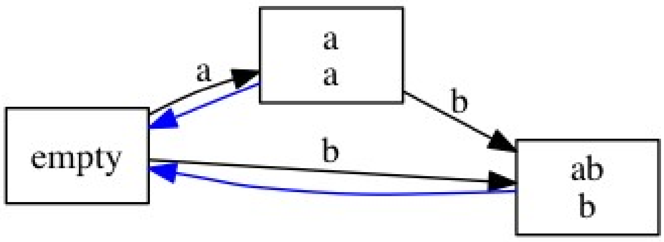
Boom! SAM 的算法虽然理解上比较困难, 但是写起来还是很简单的, 基本上用 30-40 行的 C++ 代码就可以写完. 下面给出构建 $T=$" $abcbc$ " 的过程, 图片使用 SAM-PNG + DOT 生成, SAM-PNG 是我用 C++ 写的 SAM 实现, 有需要的同学也可以去看一下.

初始化:

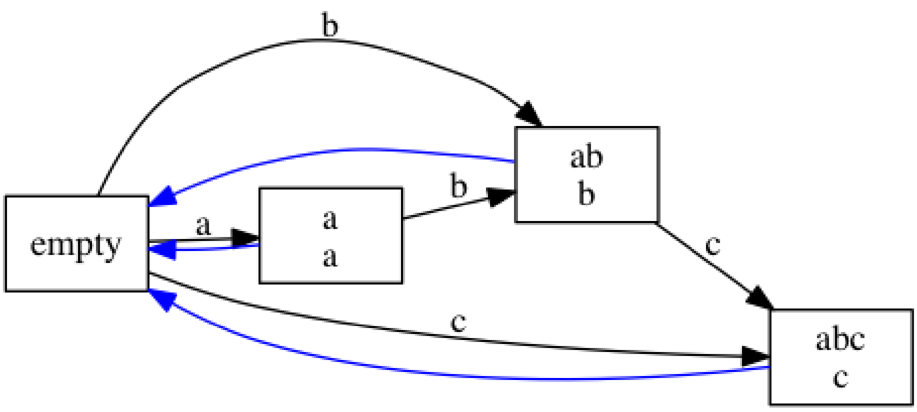

加入 $T[1]$：



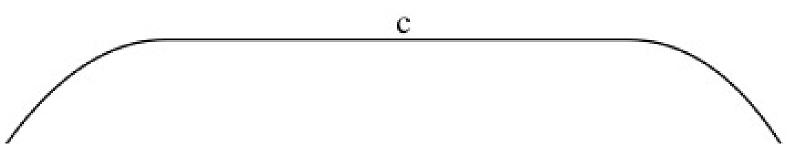

加入 $T[2]$：

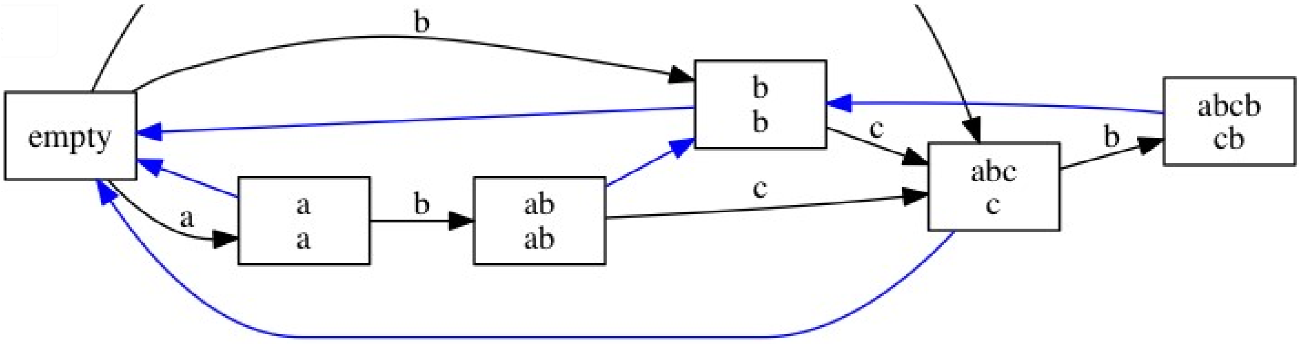



加入 $T[3]$：

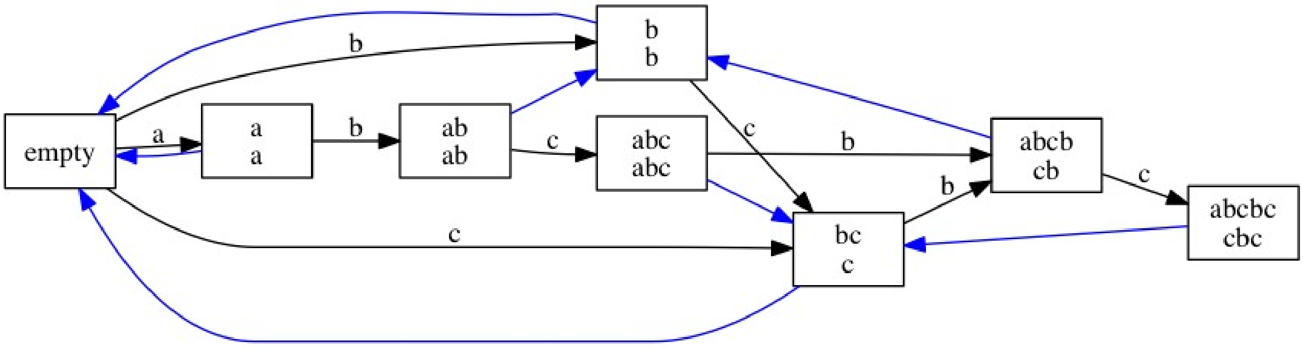



加入 $T[4]$：






加入 $T[5]$ :




# SAM: The Time/Space Complexity

问题: 对于 $n = length(T)$ , 求 SAM 的 time/space complexity.

先来考虑 space complexity. 由于 SAM 本质上是 graph, 所以在考虑 space complexity 的时候, 需要考虑 state (node) 与 transition (edge) 的数量.

根据 SAM 的构建过程, 往 SAM 里加入 $T[1]$ , $T[2]$ 时, 仅会增加 1 state, 对于剩下的 $T[3]$ 至 $T[n]$ , 每次处理最多增加 2 states, 所以, state 的上限是 $1 + 2 + 2(n - 2) = 2n - 1$ , 即 state 的数量是 $O(n)$ .

为了得出 transition 的数量, 先定义出两类 transition. 给定一个 transition $trans(u, c) = v$ :

- 如果 $maxlen(u) + 1 = maxlen(v)$ , 则称之为 continuous transition.
- 反之, 称之为 discontinuous transition.

由于 state 的上限是 $2n - 1$ , 所以 continues transition 数量的上限是 $2n - 2$ , 即 $O(n)$ .

对于每个 discontinues transition $trans(u, c) = v$ , 设 $s_u$ 为从 $start$ 到 $u$ 的最长 path, 这个 path 中必然只包含 continues transition. 设 $s_v$ 为从 $v$ 到 accept state 的, 最长的只包含 continues transition 的路径, 由于每个 state 要么是 accept state, 要么存在以这个 state 为起点的一个或多个 continues transition, 所以 $s_v$ 也必然存在. 所以, 对于所有的 discontinues transition $trans(u, c) = v$ , 必然有 $(s_u + c + s_v) \sqsupset T$ , 而且不同的 discontinues transition 对应的 $(s_u + c + s_v)$ 各不相同. 因为 $T$ 的 unique suffixes 数量的上限是 $n$ , 所以 discontinues transition 的数量也是 $O(n)$ .

所以, transition 的数量是 $O(n)$ .

由此, SAM 的 space complexity 是 $O(n)$ .

接着我们来考虑 time complexity. 根据 SAM 的构建算法, 影响 time complexity 的操作有三种:

1. 第 (2) 步的创建 transitions.
2. 第 (5) 步的 copy transitions from $q$ to $sq$ .

3. 第 (5) 步的重定向 transitions $ChildrenTrans$ .

显然, (1) 与 (2) 只涉及创建新的 transition, 由于 transition 的上限是 $O(n)$ , 所以均摊后 (1) 与 (2) 类操作的复杂度是 $O(n)$ . 至于 (3) 我就不知道怎么证了, 我找到了一些 paper 说这个是可以证的, 但是具体怎么搞我没想清楚. 如果你有比较好的证明方法, 请务必告诉我, 我请你喝咖啡!

# State With More Information

上文提到, 为了完成 SAM 的构建, 每个 State $u$ 仅维护以下信息即可:

- $maxlen(u)$
- $link(u)$
- $trans(u, \Sigma)$

在解决实际问题的时候, 往往需要 State $u$ 维护更多的信息, 例如:

- $minlen(u)$
- $first\_endpos(u)$ , 代表 $endpos(u)$ 中的最小下标.
- $accept(u)$ , boolean 值, $accept(u) = true$ 代表 state $u$ 是 accept state.

$minlen(u)$ 的维护是最简单的, 由于有 $v = link(u) \implies maxlen(v) + 1 = minlen(u)$ , 所以只要在更新 $link(u)$ 的时候同时更新 $minlen(u)$ 就好了, 也就是在 online construction 的 (3), (4), (5) 上加入对应的更新逻辑, 以下是加入 $minlen(u)$ 维护操作的 pseudocode:

```
Procedure Name: AddSymbolToSAM
Input: start, last, T[i]
Output: cur

# (1)
create state cur
maxlen(cur) = maxlen(last) + 1

# (2)
p = last
while p is not null AND trans(p, T[i]) not exists:
  trans(p, T[i]) = cur
  p = link(p)

# (3)
if p is null:
  link(cur) = start
  minlen(cur) = 1
  return cur

q = trans(p, T[i])
if maxlen(p) + 1 = maxlen(q):
  # (4)
  link(cur) = q
  minlen(cur) = maxlen(q) + 1
else:
  # (5)
  create state sq
  maxlen(sq) = maxlen(p) + 1
  for all trans(q, c) = q':
    trans(sq, c) = q'
```

```
  while p is valid AND trans(p, T[i]) = q:
    trans(p, T[i]) = sq
    p = link(p)

  link(sq) = link(q)
  minlen(sq) = maxlen(link(sq)) + 1

  link(q) = sq
  minlen(q) = maxlen(sq) + 1

  link(cur) = sq
  minlen(cur) = maxlen(sq) + 1

reutrn cur
```

其中:

- (3) 中因为 $link(cur) = start$ , 自然有 $minlen(cur) = maxlen(start) + 1 = 1$ .
- (4) 中因为 $link(cur) = q$ , 自然有 $minlen(cur) = maxlen(q) + 1$ .
- (5) 中更新了 $sq$ , $q$ , $cur$ 的 suffix link, 只需要顺着对应的 suffix link 去拿到 $maxlen$ , 即可更新 $minlen$ .

$first\_endpos(u)$ 代表了 state $u$ 的 $endpos(u)$ 的最小下标. 仔细分析 online construction 的过程, 会发现:

- 将 $T[i]$ 加入到 SAM 的时候, 会新建 state $cur$ , 此时 $endpos(cur) = \{i\}$ .

- (4) 中建立 $link(cur) = q$ 之后, 会使 $i$ 加入到 $endpos(q)$ 中, 即 $endpos(q) = \{i\} \cup endpos(q)$ .
- (5) 中从 $q$ 分离出 $sq$ 之后, 会有 $endpos(sq) = endpos(q)$ , 这个操作不会改变 $endpos(q)$ .
- (5) 中建立 $link(cur) = sq$ 之后, 会使 $i$ 加入到 $endpos(sq)$ 中, 即 $endpos(sq) = \{i\} \cup endpos(sq)$ , 同时 $endpos(q)$ 保持不变.

通过分析发现, 对 state $u$ 的 $endpos(u)$ 的变更, 必然伴随着指向 state $u$ 的 suffix link 的建立. 由此, state 只要在构建过程中维护 $first\_endpos(u)$ , 在后续应用中只要沿着 suffix link 反向 DFS, 即可得到 $endpos(u)$ .

$first\_endpos(u)$ 的维护是很简单的:

- (1) 中新建 state $cur$ 的时候设 $first\_endpos(cur) = i$ .
- (5) 中新建 state $sq$ 的时候设 $first\_endpos(sq) = first\_endpos(q)$ .

以下是包含了 $minlen(u)$ 与 $first\_endpos(u)$ 维护的 pseudocode:

```
Procedure Name: AddSymbolToSAM
Input: start, last, T[i]
Output: cur


# (1)
create state cur
maxlen(cur) = maxlen(last) + 1
```

```
first_endpos(cur) = i

# (2)
p = last
while p is not null AND trans(p, T[i]) not exists:
  trans(p, T[i]) = cur
  p = link(p)

# (3)
if p is null:
  link(cur) = start
  minlen(cur) = 1
  return cur

q = trans(p, T[i])
if maxlen(p) + 1 = maxlen(q):
  # (4)
  link(cur) = q
  minlen(cur) = maxlen(q) + 1
else:
  # (5)
  create state sq
  maxlen(sq) = maxlen(p) + 1
  first_endpos(sq) = first_endpos(q)

  for all trans(q, c) = q':
    trans(sq, c) = q'

  while p is valid AND trans(p, T[i]) = q:
    trans(p, T[i]) = sq
    p = link(p)
```

```
  link(sq) = link(q)
  minlen(sq) = maxlen(link(sq)) + 1

  link(q) = sq
  minlen(q) = maxlen(sq) + 1

  link(cur) = sq
  minlen(cur) = maxlen(sq) + 1

reutrn cur
```

最后提一下 $accept(u)$ 的判定. 判断一个 state $u$ 是不是 SAM 的 accept state, 只需要看 $u$ 是否在 suffix-link path from $last$ to $start$ 的路径上就可以了, 唯有这条路径上的 state 包含 $T[n]$ .

所以, 只要在创建完 SAM 之后再扫一遍这个路径即可找出 SAM 的所有的 accept states. 对应的 pseudocode:

```
Procedure Name: CreateSAM
Input: T
Output: start

create state start
last = start
accept(start) = false

for i in 1 to length(T):
  last = AddSymbolToSAM(start, last, T[i])
```

```
  accept(last) = false

while last is not null:
  accept(last) = true
  last = link(last)

return start
```

---

**Hunt Zhan**

Read more posts by this author.

**Share this post**