



Bài 11.

CÁC TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ

Giảng viên: Nguyễn Lê Thi
Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Áp dụng được các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương: tiêu chuẩn tích phân, tiêu chuẩn so sánh.
- Áp dụng được tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu.
- Áp dụng được các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số bất kỳ: tiêu chuẩn phân kỳ, tiêu chuẩn tỷ số, tiêu chuẩn căn và hội tụ tuyệt đối.

NỘI DUNG CHÍNH

11.1 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

11.2 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi đan dấu

11.3 Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi bất kỳ



1. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA CHUỖI SỐ DƯƠNG

1. Tiêu chuẩn tích phân

Nếu $a_k = f(k)$, $k = 1, 2, \dots$ với $f(x)$ là hàm dương, liên tục và giảm khi $x \geq 1$.

Thì

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ và $\int_1^{\infty} f(x)dx$ sẽ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 11.1.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$$

2. Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Giả sử $0 \leq a_k \leq b_k$ với mọi $k > N$.

Khi đó

➤ Nếu $\sum b_k$ hội tụ thì $\sum a_k$ cũng hội tụ

➤ Nếu $\sum a_k$ phân kỳ thì $\sum b_k$ cũng phân kỳ

Ví dụ 11.2.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k + \sqrt{k}}$$

Ví dụ 11.3.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 k}{k^2}$$

3. Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Nếu $a_k \geq 0$ và $b_k \geq 0$ với mọi $k > N$

và

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L \quad (0 < L < \infty)$$

Thì $\sum a_k$ và $\sum b_k$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 11.4.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k - 1}$$

2. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA CHUỖI ĐẠM DẦU

❖ Tiêu chuẩn Leibnitz

Chuỗi đan dấu $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$, $a_k > 0$ hội tụ nếu thỏa 2 điều kiện sau

1. $\{a_k\}$ là dãy giảm, nghĩa là $a_{k+1} < a_k, \forall k$
2. $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

Ví dụ 11.5.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

Ví dụ 11.6.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k}$$

3. TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA CHUỖI BẤT KỲ

1. Tiêu chuẩn phân kỳ

Nếu $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$ thì $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ phân kỳ. Chiều ngược lại **không đúng**.

Ví dụ 11.7.

Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2k+3}$$

2. Tiêu chuẩn tỷ số (tiêu chuẩn d'Alembert)

Xét chuỗi $\sum a_k$ bất kỳ, $a_k \neq 0$ với $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$

Khi đó

1. Nếu $L < 1$ thì chuỗi $\sum a_k$ hội tụ.
2. Nếu $L > 1$ hoặc $L = \infty$ thì chuỗi $\sum a_k$ phân kỳ.
3. Nếu $L = 1$ thì tiêu chuẩn không kết luận được.

Ví dụ 11.8.

Xét sự hội tụ của
chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{3^k}{k!}$$

3. Tiêu chuẩn căn (tiêu chuẩn Cauchy)

Xét chuỗi $\sum a_k$ bất kỳ khác 0 với $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L$

Khi đó

1. Nếu $L < 1$ thì chuỗi $\sum a_k$ hội tụ.
2. Nếu $L > 1$ hoặc $L = \infty$ thì chuỗi $\sum a_k$ phân kỳ.
3. Nếu $L = 1$ thì tiêu chuẩn không kết luận được.

Ví dụ 11.9.

Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k}$$

❖ Hội tụ tuyệt đối

- Nếu chuỗi $\sum |a_k|$ hội tụ thì chuỗi $\sum a_k$ hội tụ tuyệt đối và

$$\left| \sum a_k \right| \leq \sum |a_k|$$

- Nếu chuỗi $\sum |a_k|$ phân kỳ và chuỗi $\sum a_k$ hội tụ thì chuỗi $\sum a_k$ gọi là hội tụ có điều kiện (bán hội tụ).

Ví dụ 11.10.

Xét xem chuỗi số
sau hội tụ tuyệt
đối, hội tụ có điều
kiện hay phân kỳ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin k}{k^2}$$

KẾT BÀI

Sinh viên cần lưu ý:

- Áp dụng được các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số
- Phân biệt được điều kiện áp dụng của các tiêu chuẩn.

THANKS FOR WATCHING!