Chương 2
GIỚI HẠN VÀ SỰ LIÊN TỤC

Nguyễn Minh Hải
nmhaiuns@ gmail.com

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM

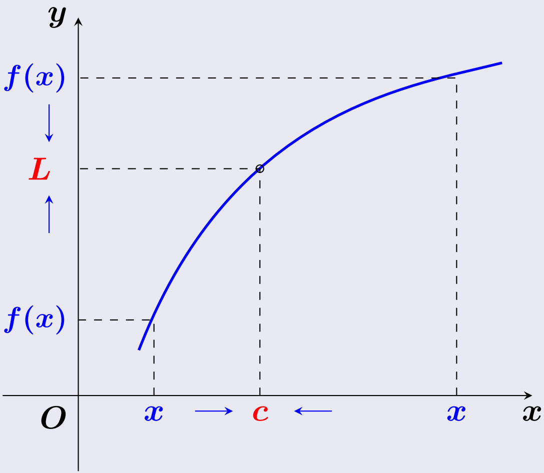
Tháng 09/2023

Định nghĩa 1.1

Giả sử $f(x)$ xác định khi x gần với một số c. Giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về c là L nếu giá trị của $f(x)$ tiến tới L khi x đủ gần c.

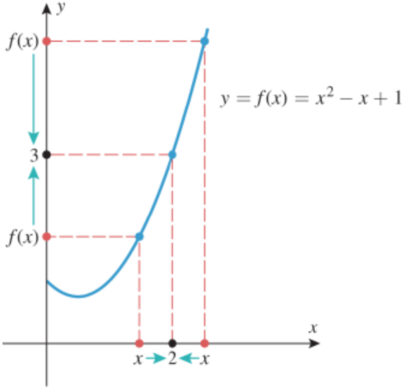
Ký hiệu

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$



Ví dụ 1.1

Dự đoán giá trị của $\lim\limits_{x\to 2}(x^2 - x + 1)$



x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	1	3.0	7
1.5	1.75	2.5	4.75
1.8	2.44	2.2	3.64
1.9	2.71	2.1	3.31
1.95	2.8525	2.05	3.1525
1.99	2.9701	2.01	3.0301
1.995	2.985025	2.005	3.015025
1.999	2.997001	2.001	3.003001

Ví dụ 1.2

Dự đoán giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2}$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1	$\mathbf{0.16228}$	1	$\mathbf{0.16228}$
-0.5	$\mathbf{0.16553}$	0.5	$\mathbf{0.16553}$
-0.1	$\mathbf{0.16662}$	0.1	$\mathbf{0.16662}$
-0.05	$\mathbf{0.16666}$	0.05	$\mathbf{0.16666}$
-0.01	$\mathbf{0.16667}$	0.01	$\mathbf{0.16667}$

Ví dụ 1.2

Dự đoán giá trị của $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

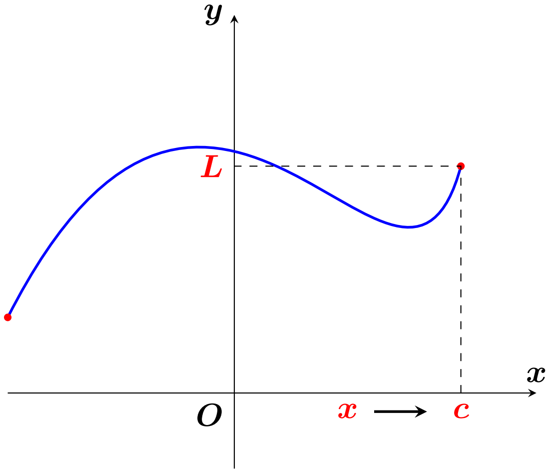
x	$f(x)$	x	$f(x)$
-1	0.16228	1	0.16228
-0.5	0.16553	0.5	0.16553
-0.1	0.16662	0.1	0.16662
-0.05	0.16666	0.05	0.16666
-0.01	0.16667	0.01	0.16667

x	$f(x)$
± 0.005	0.16800
± 0.0001	0.2
± 0.00005	0.000
± 0.00001	0.000000

Giới hạn bên trái

- Giới hạn bên trái của $f(x)$ khi x tiến về c là L nếu ta có thể cho $f(x)$ tiến về L khi x đủ gần c và bé hơn c.
- Ký hiệu:

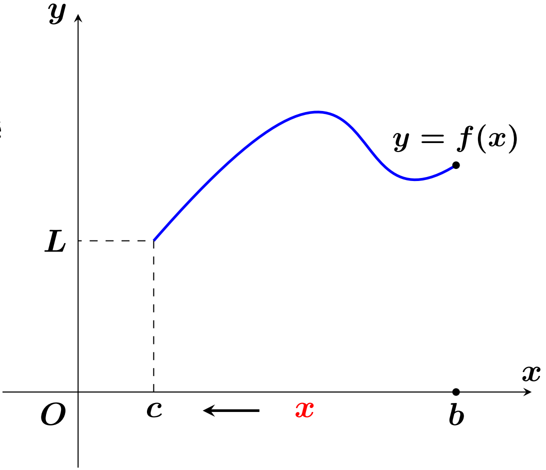
$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$



Giới hạn bên phải

- Giới hạn bên phải của $f(x)$ khi x tiến về c là L nếu ta có thể cho $f(x)$ tiến về L khi x đủ gần c và lớn hơn c.
- **Ký hiệu:**

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

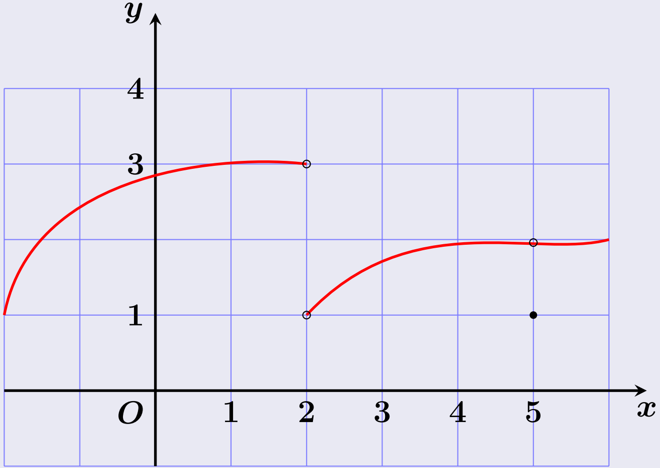


Định lý 1.1

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \textit{nếu và chỉ nếu} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Ví dụ 1.3

Cho đồ thị hàm g như trong hình.



Tính

1. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$, $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ và $\lim_{x\to 2} g(x)$.
2. $\lim_{x\to 5^+} g(x)$, $\lim_{x\to 5^-} g(x)$ và $\lim_{x\to 5} g(x)$.

Giới hạn không tồn tại

Giới hạn vô cùng

Một hàm số f tăng lên vô cùng hoặc giảm xuống vô cùng khi x tiến tới c được gọi là tiến tới vô cùng tại c

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

Giới hạn ở vô cùng

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

Định nghĩa 1.2

Ta viết

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

nếu với mỗi $\varepsilon > 0$, có một số $\delta > 0$ sao cho

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{thì} \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Ví dụ 1.4

Chứng minh $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$

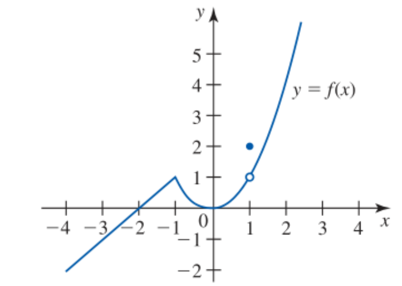
Các tính chất của giới hạn

Với c là số thực và $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L, \quad \lim\limits_{x\to a} g(x) = M$. Khi đó

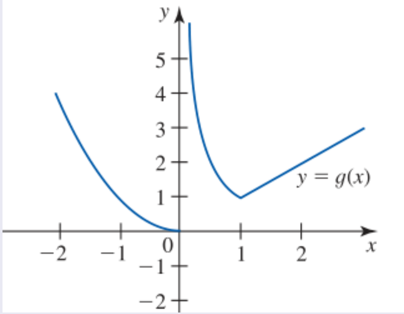
1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$
2. $\lim\limits_{x\to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$
4. $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c.L$
5. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = L.M$
6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$ với $M \neq 0$.
7. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n = L^n$
8. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$ với $L > 0$

Ví dụ 2.1

Cho đồ thị của hai hàm số f và g trong hình dưới đây. Tính các giới hạn



Hình 1: Đồ thị hàm f



Hình 2: Đồ thị hàm g

a) $\lim\limits_{x\to -1}[f(x)+5g(x)]$ b) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)g(x)]$ c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Ví dụ 2.2

1) $\lim\limits_{x\to 2}(x^3+5x+7)$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{2x+14}{x^2+1}}$

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x-4}$

4) $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-3x+4)^5$

Ví dụ 2.3

Tính

1) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x + 3}$

2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x - \sqrt{3x + 4}}{4 - x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x(x-5)} \right)$

Ví dụ 2.4

Cho $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{nếu } x < 2 \\ \sqrt{x-2}+1 & \text{nếu } x \geq 2 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

Ví dụ 2.5

Cho $f(x) = \begin{cases} -x-2 & \text{nếu } x < -1 \\ 2 & \text{nếu } x = -1 \\ x^3 & \text{nếu } x > -1 \end{cases}$. Tính $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

Các giới hạn cơ bản

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$
2. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$
3. $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$$
4. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$
5. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$
6. $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$$

Ví dụ 2.6

Tính

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{7x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^{-1} x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin x)}{\tan 2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x}-2}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{3x+4}$

Ví dụ 2.7

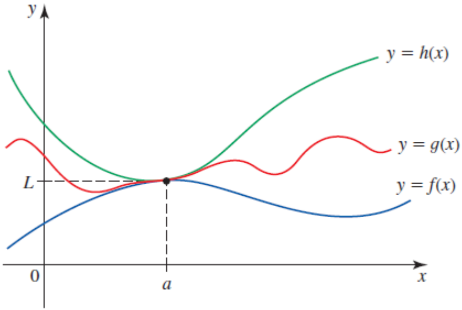
Tính

1. $$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$
2. $$\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(x - \pi/2)}{2x - \pi}$$

Định lý 2.1

Định lý kẹp Nếu $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ *trong một khoảng mở chứa* c *và nếu*

$$\lim_{x \to c} g(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L \quad \textit{thì} \quad \lim_{x \to c} f(x) = L$$



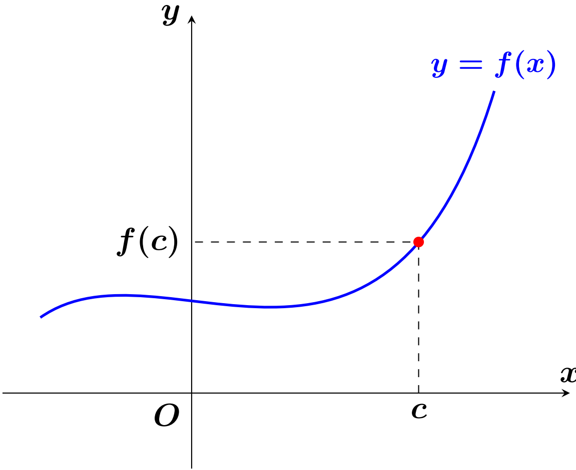
Ví dụ 2.8

Tính $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

- Hàm số f được gọi là liên tục tại $x = c$ khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

- Hàm số f không liên tục tại c được gọi là gián đoạn tại c.



Ví dụ 3.1

Các hàm số sau đây không liên tục tại những điểm nào?

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$

3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$

Định nghĩa 3.1

- Một hàm f được gọi là **liên tục phải tại c** nếu

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$$

- Một hàm f được gọi là **liên tục trái tại c** nếu

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

- f gọi là liên tục trên (a, b) khi và chỉ khi f liên tục tại mọi $x \in (a, b)$.
- f gọi là liên tục trên $[a, b]$ khi và chỉ khi f liên tục trên (a,b), liên tục trái tại b và liên tục phải tại a.

Ví dụ 3.2

Xét sự liên tục của

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & \text{nếu } x \leq 3 \\ 4x - 8 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$$

tại $x = 3$

Ví dụ 3.3

Tm m để $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$.

Ví dụ 3.4

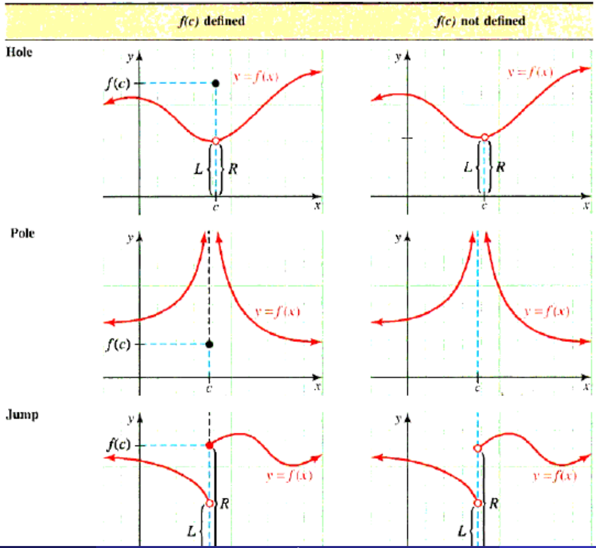
Tìm a, b để $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \\ b\cos x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 3.5

Chứng minh rằng hàm số $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ liên tục trên $[-1, 1]$.

Phân loại điểm gián đoạn

Table 2.2 Holes, Poles, Jumps, and Continuity



Định nghĩa 3.2

Nếu f không liên tục tại a thì:

1. f có điểm gián đoạn bỏ được nếu $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ tồn tại.
2. Điểm nhảy nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.
3. Điểm cực nếu $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ hoặc $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$.

Ví dụ 3.6

Phân loại điểm gián đoạn của các hàm số

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{nếu } x \leq 3 \\ 4x - 8 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x + 1}$

Định lý 3.1

Nếu f và g liên tục tại $x = a$ thì các hàm số sau đây cũng liên tục tại $x = a$:

1. $f \pm g$
2. fg
3. $c.f$
4. $\dfrac{f}{g}$ *nếu* $g(a) \neq 0$.
5. $f \circ g$

Định lý 3.2

Các hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm thuộc miền xác định của chúng.

Định lý 3.3

Nếu f *liên tục tại* b *và* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$ *thì*

$$\lim_{x \to a} f[g(x)] = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right) = f(b)$$

Ví dụ 3.7

Các hàm số sau liên tục trên những khoảng nào

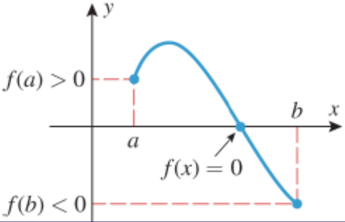
1. $f(x) = x^{100} - 2x^{37} + 75$
2. $g(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 17}{x^2 - 1}$
3. $h(x) = \cos(x^2 - 5x + 2)$
4. $k(x) = \dfrac{\tan^{-1} x + e^x}{(\ln x)\sqrt{2 - x}}$

Định lý 3.4 (Định lý giá trị trung gian)

Giả sử f *liên tục trên* $[a, b]$ *và* L *là một số bất kỳ nằm giữa* $f(a)$ *và* $f(b)$*, với* $f(a) \neq f(b)$*. Khi đó, tồn tại một số* c *nằm trong khoảng* (a, b) *sao cho* $f(c) = L$*.*

Định lý 3.5

Giả sử f *liên tục trên* $[a, b]$ *và* $f(a).f(b) < 0$*. Khi đó, phương trình* $f(x) = 0$ *có ít nhất một nghiệm trong khoảng* (a, b)*.*



Ví dụ 3.8

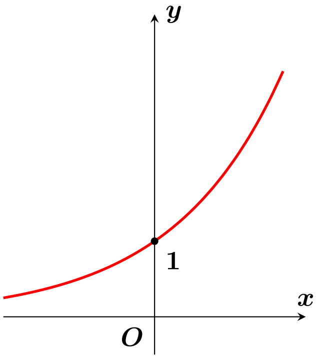
Chứng minh rằng phương trình

$$\boldsymbol{x^5 + 4x^2 - 9x + 3 = 0}$$

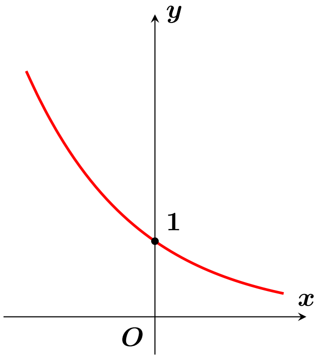
có nghiệm trong $[\mathbf{1}, \mathbf{2}]$.

Hàm mũ

Hàm số f là hàm mũ nếu $f(x) = a^x$, với $0 < a \neq 1$ và $x \in \mathbb{R}$



Hình 3: $y = a^x$ với $a > 1$



Hình 4: $y = a^x$ với $0 < a < 1$

Tính chất của hàm mũ

Cho x, y là các số thực và $a, b > 0$. Khi đó

1. Nếu $b \neq 1$ thì $b^x = b^y$ khi và chỉ khi $x = y$
2. Nếu $x > y$ và $b > 1$ thì $b^x > b^y$
   Nếu $x > y$ và $0 < b < 1$ thì $b^x < b^y$
3. $b^x b^y = b^{x+y}$
4. $\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$
5. $(b^x)^y = b^{xy}$
6. $(ab)^x = a^x b^x$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
8. Hàm số $y = a^x$ liên tục với mọi x. Đồ thị hàm số luôn nằm trên trục Ox.
   Hàm số đồng biến khi $a > 1$ và nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Ví dụ 3.9

Giải phương trình

a) $4^{x^2+x} = 16$ b) $2^x 3^{x+1} = 108$ c) $(\sqrt[3]{5})^{x+2} = 5^{x^2}$

Bài toán

Một tài khoản có số dư 1 đô la và nhận lãi suất 100% mỗi năm. Nếu lãi suất được tính một lần thì đến cuối năm, số dư của tài khoản đó là 2 đô la. Điều gì sẽ xảy ra khi lãi suất được tính và thanh toán thường xuyên hơn trong năm?

- Nếu lãi suất được tính 1 lần trong năm thì $P = 2$, tức là $P = 1 + 100\%$
- Nếu lãi suất được tính 2 lần trong năm thì

$$P = (1 + 1.0.5) + 0.5(1 + 1.0.5) = (1 + 0.5)^2 = 2.25$$

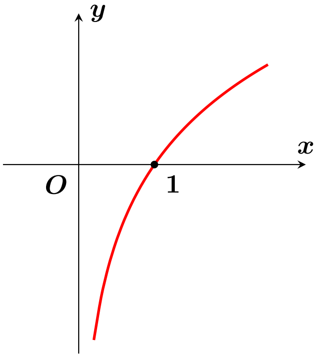
- Nếu lãi suất được tính n lần trong năm thì $P = \left(1 + \dfrac{100\%}{n}\right)^n$ và nếu việc tích lũy liên tục thì

$$P = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{100\%}{n}\right)^n = e \approx 2.718281828$$

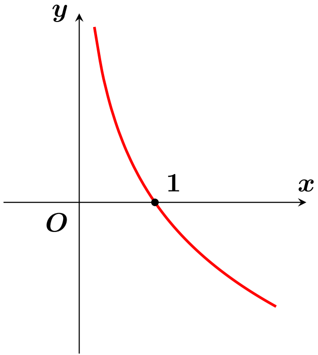
Hàm logarit

Nếu $0 < b \neq 1$, logarit của x với cơ số b là hàm số $y = \log_b x$ thỏa $b^y = x$, nghĩa là

$$y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$$



Hình 5: $y = \log_b x$ với $b > 1$



Hình 6: $y = \log_b x$ với $0 < b < 1$

Tính chất của hàm logarit

Cho $0 < b \neq 1$. Khi đó:

1. $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$
2. Nếu $x > y$ và $b > 1$ thì $\log_b x > \log_b y$
   Nếu $x > y$ và $0 < b < 1$ thì $\log_b x < \log_b y$
3. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
4. $\log_b \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
5. $\log_b x^p = p \log_b x, \quad \forall p \in \mathbb{R}$
6. $b^{\log_b x} = x, \quad \log_b b^x = x$
7. $\log_b b = 1, \quad \log_b 1 = 0$

Tính chất liên hệ giữa e^x và $\ln x$

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0$$
$$\ln e^x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Công thức đổi cơ số

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} \quad \text{với } 0 < b \neq 1}$$

Ví dụ 3.10

Tính $A = \log_2\left(\frac{1}{8}\right) + \log_2(128)$

Ví dụ 3.11

Rút gọn biểu thức

a) $B = \log_2\left(\frac{x^2+1}{2^x}\right)$

b) $C = \ln\left(\frac{x^2\sqrt{x^2-1}}{e^x}\right)$

Ví dụ 3.12

Giải phương trình $\log_3(2x+1) - 2\log_3(x-3) = 2$

Ví dụ 3.13 (Mô hình tăng trưởng)

Số lượng vi khuẩn của một quần thể tại thời điểm t có dạng $P(t) = P_0 e^{kt}$, trong đó P_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và k là hằng số dương. Giả sử ban đầu quần thể có 5000 cá thể và sau 20 phút thì số lượng của quần thể này là 7000. Tìm số lượng vi khuẩn của quần thể sau 30 phút.

Bài toán lãi kép

Nếu P đô la được tích lũy n lần mỗi năm với lãi suất r thì giá trị tương lai sau t năm là

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

và nếu việc tích lũy liên tục thì

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Ví dụ 3.14

Nếu 12000 đô la được đầu tư trong 5 năm với lãi suất 4%, tìm giá trị tương lai sau 5 năm nếu lãi suất được tích lũy:

a) hàng tháng

b) liên tục

c) nếu lãi suất được tích lũy liên tục thì sau bao lâu khoản vốn sẽ tăng gấp đôi.