



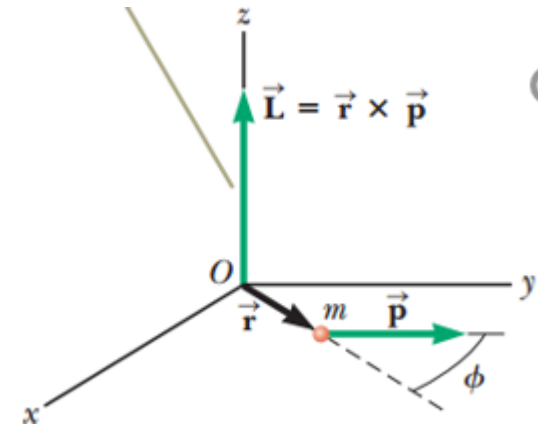
## Chapter 11

### Angular Momentum

### MOMEN ĐỘNG LƯỢNG

Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau} (= \vec{r} \times \vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell} (= \vec{r} \times \vec{p})$
Linear momentum <sup>b</sup>	$\vec{P} (= \Sigma \vec{p}_i)$	Angular momentum <sup>b</sup>	$\vec{L} (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
Linear momentum <sup>b</sup>	$\vec{P} = M\vec{v}_{\text{com}}$	Angular momentum <sup>c</sup>	$L = I\omega$
Newton's second law <sup>b</sup>	$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law <sup>b</sup>	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law <sup>d</sup>	$\vec{P} = \text{a constant}$	Conservation law <sup>d</sup>	$\vec{L} = \text{a constant}$

# Angular Momentum



- **Particle:**  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v}) \rightarrow L = rmv \sin \varphi$

- **System of particles:**

$$\sum \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i (\vec{r}_i \times \vec{v}_i)$$

- **Rigid Object**



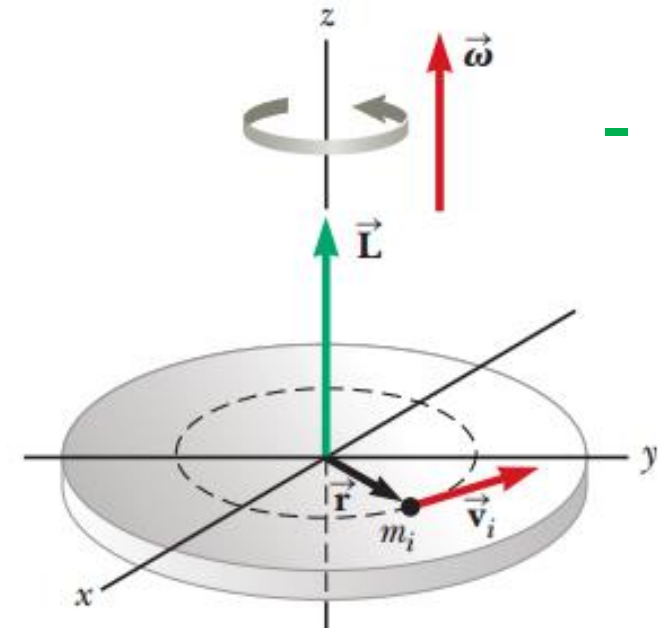
$$\sum L = \sum_i m_i r_i v_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega_i = \sum_i I_i \omega_i = \sum_i I_i \omega = I \omega$$

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$



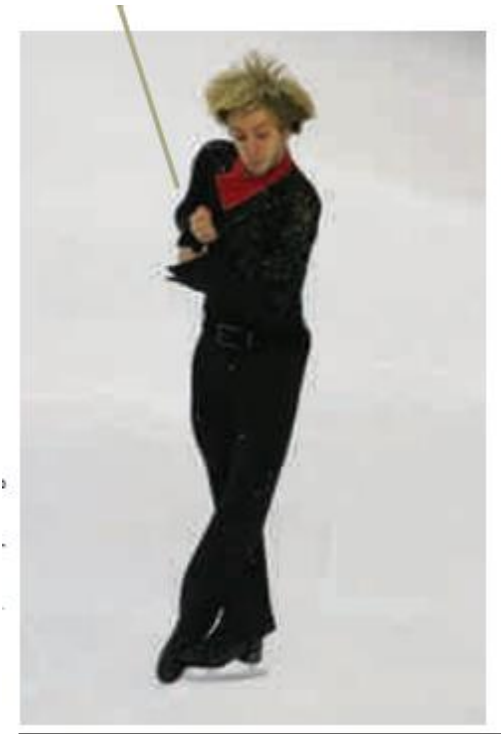
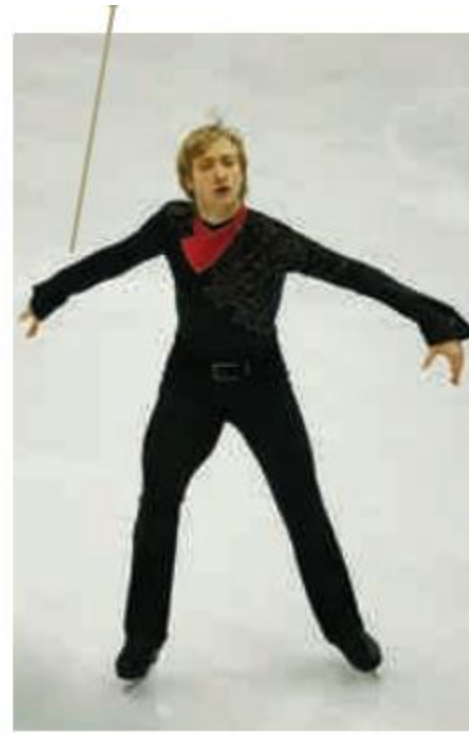
$$\sum \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \sum \vec{L} = \text{const}$$

Angular Momentum in Isolated System is conservational



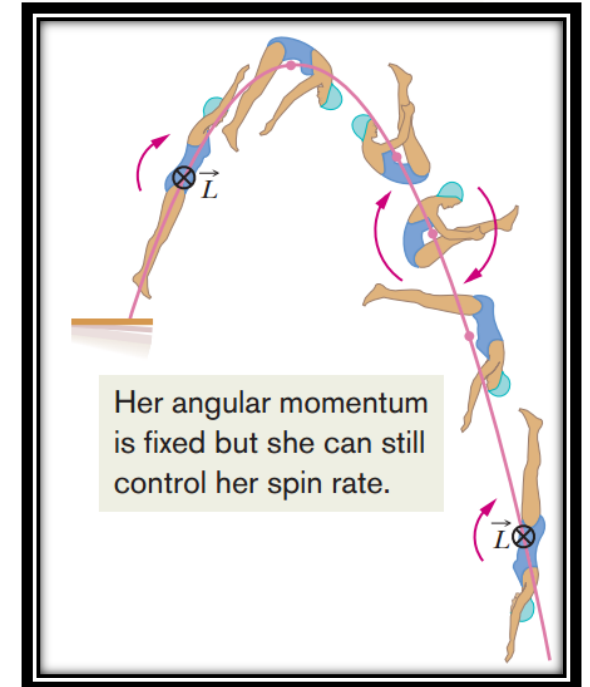
Câu hỏi 1: Khi diễn viên múa thực hiện động tác quay, người này dang tay và một chân ra rồi quay.

- Sau đó người này co tay và chân lại (hình bên trái), người này quay nhanh hơn hay chậm hơn? Giải thích.
- Để dừng động tác quay, người này lại dang tay và chân ra như hình bên phải. Giải thích tại sao thực hiện động tác này?



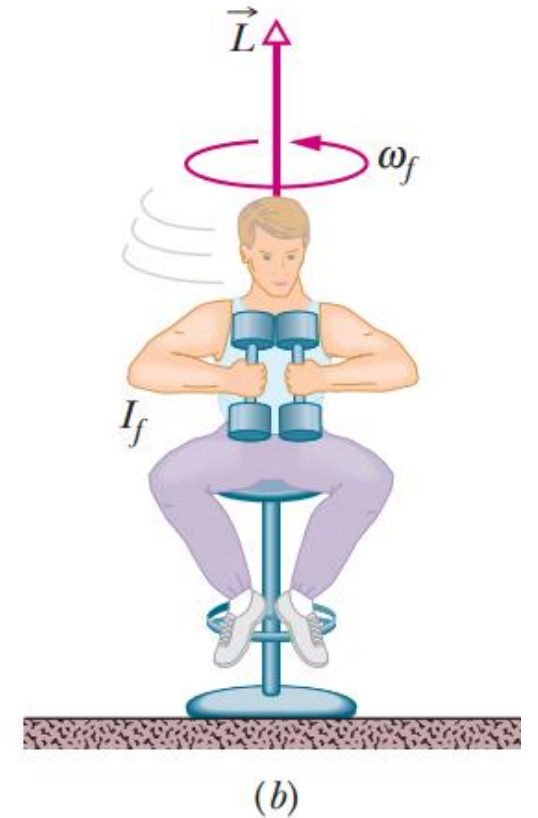
$$\sum \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \vec{L} = I\vec{\omega} = \text{const}$$

$$I \sim mr^2$$



**CH1:** Một học sinh đang ngồi trên chiếc ghế xoay, đang quay ở trạng thái co tay lại như hình vẽ. Những phát biểu nào đúng khi bạn ấy mở rộng hai tay ra?

- A. Động năng của bạn ấy bảo toàn.
- B. Động năng của bạn ấy giảm.
- C. Moment động lượng của bạn ấy tăng.
- D. Momen động lượng của bạn ấy giảm.
- E. Momen quán tính của bạn ấy tăng.
- F. Tốc độ quay của bạn ấy tăng.
- G. Tốc độ quay của bạn ấy không đổi.



ĐA: B,E

Khi dang tay ra thì  $r$  tăng nên  $I$  tăng, suy ra tốc độ góc giảm tương ứng với động năng giảm; còn MOMENT ĐỘNG LƯỢNG bảo toàn;  $L = I\omega = \text{const} \rightarrow K = \frac{1}{2}(I\omega)\omega \rightarrow K$  giảm do  $\omega$  giảm.

BT1: Merry-go-round là trò chơi vòng quay yêu thích của các bạn nhỏ. Mặt sàn hình tròn của trò chơi này có bán kính  $R = 2\text{m}$  và momen quán tính là  $I = 250\text{kg.m}^2$  và nó quay quanh trục thẳng đứng không ma sát với tốc độ 10 vòng/phút. Một đứa trẻ nặng 25kg nhảy lên vòng quay và ngồi lên con ngựa ở mép ngoài của sàn. Tìm tốc độ góc mới của vòng quay.



•••66 GO In Fig. 11-58, a small 50 g block slides down a frictionless surface through height  $h = 20$  cm and then sticks to a uniform rod of mass 100 g and length 40 cm. The rod pivots about point  $O$  through angle  $\theta$  before momentarily stopping. Find  $\theta$ .

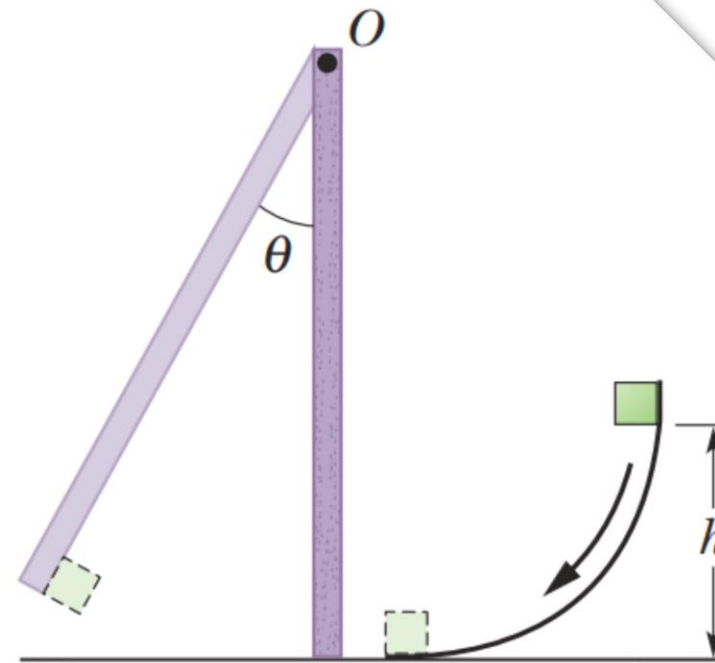
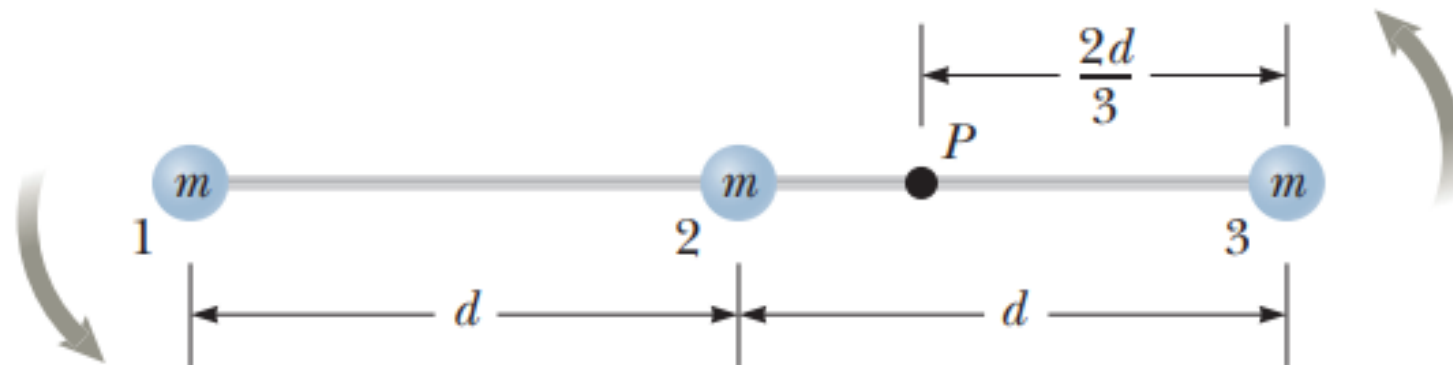


Figure 11-58 Problem 66.

BT2: Một vật nhỏ nặng 50 g bắt đầu trượt không ma sát từ độ cao  $h = 20$  cm xuống và chạm mềm với một cái que dạng thanh nặng 100 g, dài 40 cm. Hệ que + vật sau va chạm cùng quay được một góc  $\theta$  đến khi dừng lại. Tìm  $\theta$ .



BT3: Ba vật có khối lượng bằng nhau được gắn với một thanh cứng có khối lượng  $M$  như hình. Thanh cứng đang nằm ngang, đứng yên thì bắt đầu xoay tự do trong mặt phẳng thẳng đứng với trục quay đi qua điểm  $P$ . Giả sử  $m$ ,  $M$  và  $d$  đã biết, tìm (a) Momen quán tính của hệ (3 vật + thanh) đối với trục quay qua  $P$ , (b) Momen lực tác động lên hệ tại  $t = 0$ , (c) Gia tốc góc của hệ tại  $t = 0$ , (d) Gia tốc tiếp tuyến của vật 3 tại  $t = 0$ , (e) Động năng cực đại của hệ, (f) Tốc độ góc tối đa thanh đạt được, (g) Momen động lượng cực đại của hệ, (h) Tốc độ tối đa của vật 2.





Câu hỏi 2: Hãy giải thích tác dụng của quạt ở đuôi máy bay trực thăng?



$$\sum \vec{\tau} = \mathbf{0} \Rightarrow \vec{L} = \text{const hay } \vec{L}_i = \vec{L}_f$$

$$\rightarrow 0 = \vec{L}_{canh} + \vec{L}_{than}$$

$$I_{canh} \overrightarrow{\omega_{canh}} + I_{than} \overrightarrow{\omega_{than}} = 0$$

$$\overrightarrow{\omega_{than}} = -\frac{I_{canh}}{I_{than}} \overrightarrow{\omega_{canh}}$$

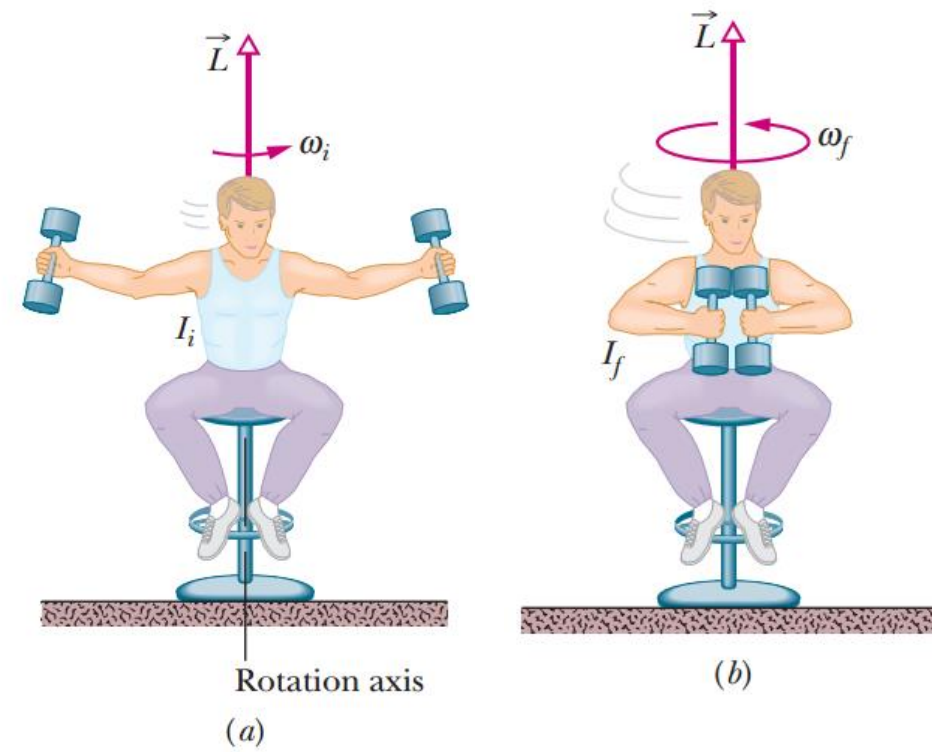
Câu hỏi 3: Trong một số cuộc đua, các tay đua băng qua những ngọn đồi nhỏ và xe máy bay trong không khí trong 1 khoảng thời gian ngắn. Nếu tay đua vẫn rồ ga tăng tốc khi vừa rời khỏi đồi và bay trong không khí, xe máy có xu hướng hướng mũi lên trên. Tại sao?



VD1: Một học sinh ngồi trên một chiếc ghế xoay tự do hai tay của học sinh này cầm 2 quả tạ, mỗi quả tạ có khối lượng 3 kg. Khi cánh tay của học sinh này mở rộng theo chiều ngang (hình a) khoảng cách từ tạ tới trục quay là 1m, học sinh quay với tốc độ góc là 0,75 rad/s. Momen quán tính của học sinh là 3 kg.m<sup>2</sup> và không đổi. Sau đó học sinh kéo các quả tạ lại vào trong người mình theo phương ngang cách trục quay 0,3 m (hình b).

(a) Tìm tốc độ góc mới của học sinh này.

(b) Tìm động năng của hệ trước và sau khi học sinh kéo quả tạ vào bên trong.



Tại thời điểm học sinh kéo tay vào, tổng momen ngoại lực tác dụng vào học sinh bằng 0 nên Momen động lượng bảo toàn. Áp dụng bảo toàn Momen động lượng, ta có:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\omega_i = 0,75 \text{ rad/s}; m = 3\text{kg}; r_i = 1\text{m}; r_f = 0.3\text{m}$$

Động năng trước và sau khi kéo tay:

$$K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2; K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2$$

$$I_i = I_{Hs} + I_{tạ 1} + I_{tạ 2} = 3 + m \cdot r_i^2 + m \cdot r_i^2$$

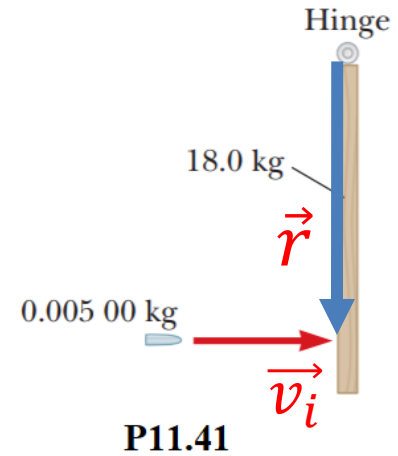
$$I_f = I_{Hs} + I_{tạ 1} + I_{tạ 2} = 3 + m \cdot r_f^2 + m \cdot r_f^2$$

VD2: Hiện tượng nóng lên của trái đất đang rất được quan tâm bởi vì ngay cả những thay đổi nhỏ trong nhiệt độ trái đất có thể có những hậu quả đáng kể. Ví dụ, nếu những tảng băng ở hai cực của Trái đất tan chảy hoàn toàn, thì nước trong các đại dương nhiều lên và làm tràn ngập nhiều vùng duyên hải. Mô hình tảng băng ở 2 cực có khối lượng  $2,3 \cdot 10^{19} \text{kg}$  và có dạng đĩa phẳng bán kính  $6 \cdot 10^5 \text{m}$ . Giả sử các tảng băng sau khi tan chảy sẽ tạo thành lớp vỏ hình cầu là nước bao quanh Trái đất. Hỏi độ dài 1 ngày đêm thay đổi 1 lượng bao nhiêu so với hiện tại là 24 giờ/ngày? (tính theo giây và %). Cho khối lượng Trái đất là  $5,972 \cdot 10^{24} \text{kg}$  và bán kính Trái đất là 6371 km

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \rightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f \quad I_i = I_{T\mathbb{D}} + I_B = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2$$

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i}; \omega_f = \frac{2\pi}{T_f} = \frac{2\pi}{T_i + \Delta T} \quad I_f = I_{T\mathbb{D}} + I_N = \frac{2}{5}MR^2 + \frac{2}{3}mR^2$$

VD3: Một viên đạn nặng 0.005 kg được bắn vào cánh cửa nặng 18 kg theo phương ngang với tốc độ  $10^3$  m/s, viên đạn cắm vào cửa ở vị trí các mép dưới 1 đoạn 10 cm (như hình 11.41). Cánh cửa rộng 1m và có thể xoay quanh bản lề không ma sát. (a) Cánh cửa quay ngay sau va chạm với tốc độ góc bao nhiêu? (b) Tính tổng năng lượng của hệ viên đạn – cánh cửa sau va chạm và xác định xem nó ít hơn hay bằng động năng của viên đạn trước khi va chạm



Tại thời điểm viên đạn va chạm với cánh cửa, tổng momen ngoại lực tác dụng vào hệ bằng 0 nên Momen động lượng bảo toàn. Áp dụng bảo toàn Momen động lượng, ta có:

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \rightarrow m\vec{r} \times \vec{v}_i = I\vec{\omega}_f \rightarrow mrv_i = I\omega_f \quad \text{Với: } I = I_{VD} + I_C = m.r^2 + \frac{1}{3}M.L^2$$

$$\text{và } m = 0.005\text{kg}; r = 1\text{m} - 0.1\text{m}; L = 1\text{m}; v_i = 1000\text{m/s}$$

Năng lượng của hệ viên đạn – cánh cửa trước và sau khi va chạm:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = 2.5 \times 10^3 J; \quad K_f = \frac{1}{2}I\omega_f^2 = 1.68 J$$

••65 SSM WWW Two 2.00 kg balls are attached to the ends of a thin rod of length 50.0 cm and negligible mass. The rod is free to rotate in a vertical plane without friction about a horizontal axis through its center. With the rod initially horizontal (Fig. 11-57), a 50.0 g wad of wet putty drops onto one of the balls, hitting it with a speed of 3.00 m/s and then sticking to it. (a) What is the angular speed of the system just after the putty wad hits? (b) What is the ratio of the kinetic energy of the system after the collision to that of the putty wad just before? (c) Through what angle will the system rotate before it momentarily stops?

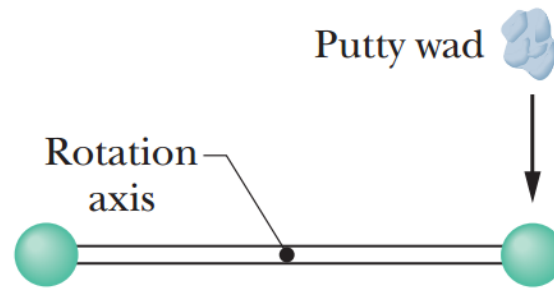


Figure 11-57 Problem 65.

••66 GO In Fig. 11-58, a small 50 g block slides down a frictionless surface through height  $h = 20$  cm and then sticks to a uniform rod of mass 100 g and length 40 cm. The rod pivots about point  $O$  through angle  $\theta$  before momentarily stopping. Find  $\theta$ .

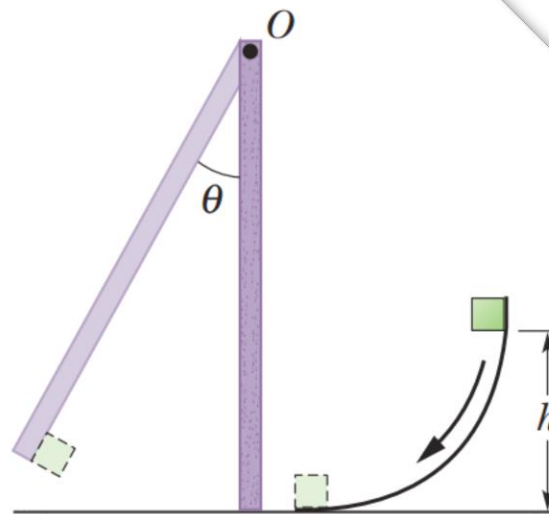


Figure 11-58 Problem 66.

Hai trái banh nặng 2 kg nối với nhau bằng một thanh dài 50 cm khối lượng 0,5 kg. Thanh có thể quay tự do quanh trục qua khối tâm của hệ trong mặt phẳng thẳng đứng, bỏ qua ma sát ở trục quay. Một cục đất sét thả từ phía trên của trái banh như hình vẽ, tốc độ lúc cục đất chạm trái banh là 3 m/s, và nó dính vào trái banh. Hãy tính (a) tốc độ góc của hệ sau khi cục đất dính vào trái banh, (b) tỉ số động năng của hệ trước và sau khi va chạm