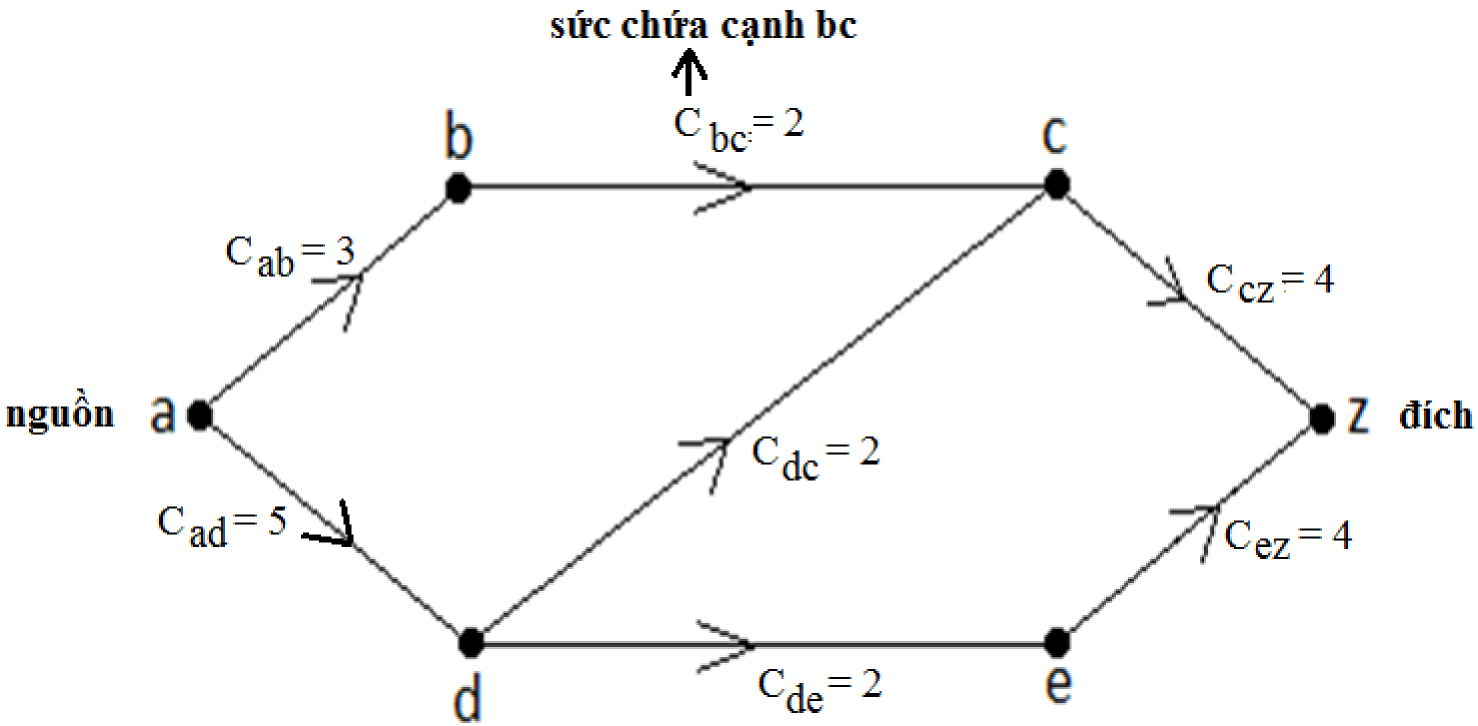
CHƯƠNG 5 : DÒNG CHẢY LỚN NHẤT

Một mạng vận tải (mạng) là đồ thị G đơn giản, có trọng số.



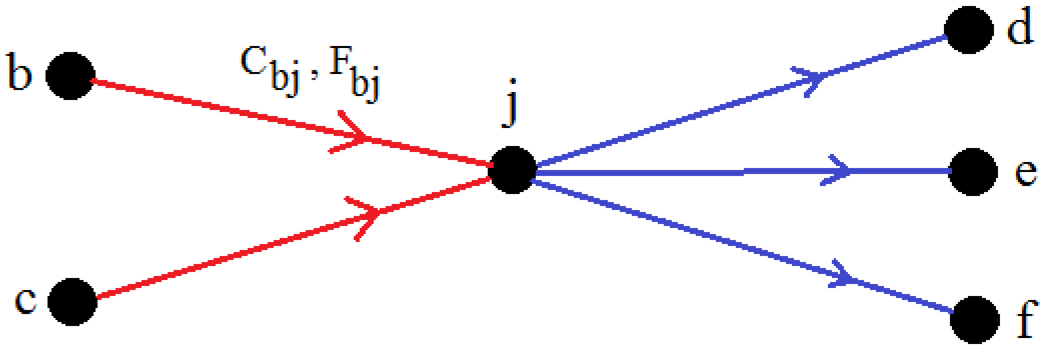
5.1 Dòng chảy lớn nhất:

5.1.1 Định nghĩa:

Một mạng vận tải (mạng) là đồ thị G đơn giản, có trọng số, có hướng thỏa:

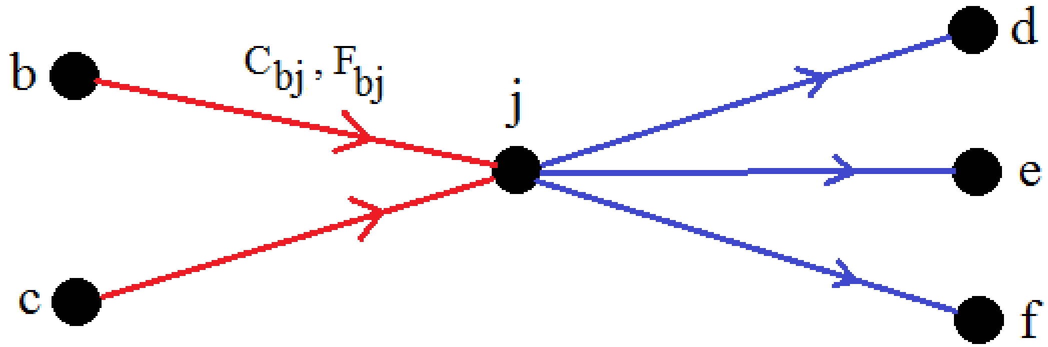
- Có đúng 1 đỉnh , được gọi là *nguồn*, không có cạnh vào, đỉnh **a**.
- Có đúng 1 đỉnh , được gọi là *đích* , không có cạnh ra, đỉnh **z**.
- Trọng số C_{ij} của cạnh có hướng (i, j), được gọi *sức chứa*, là một số không âm.
- Đồ thị G không hướng là liên thông.

Ví dụ :



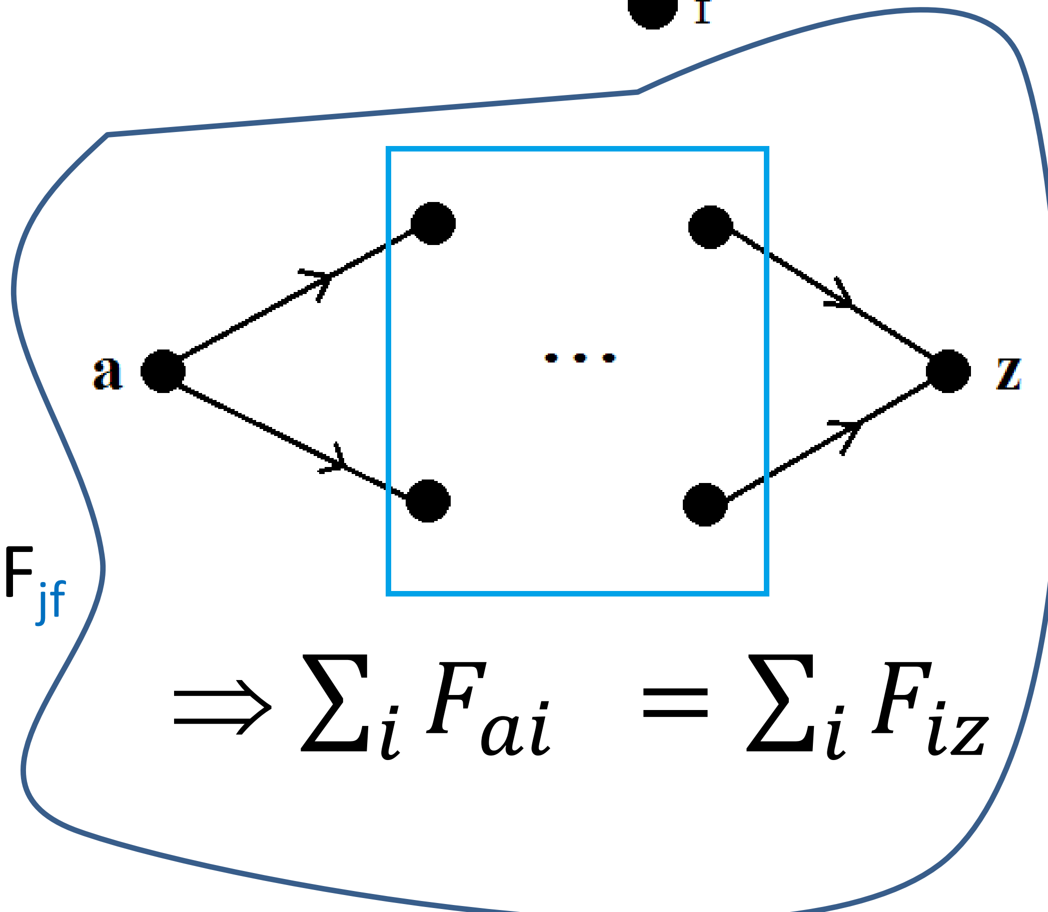
- $F_{bj} \geq 0$
- $F_{bj} \leq C_{bj}$
- $j \notin \{$ **a, z** $\} \Rightarrow F_{bj} + F_{cj} = F_{jd} + F_{je} + F_{jf}$

Ví dụ :



- $F_{bj} \geq 0$
- $F_{bj} \leq C_{bj}$
- $j \notin \{$ **a, z** $\}$

$\Rightarrow F_{bj} + F_{cj} = F_{jd} + F_{je} + F_{jf}$



$$\Rightarrow \sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$

5.1.2 Định nghĩa:

Cho G là một mạng vận tải. Một *dòng chảy F* trong G gán cho mỗi cạnh có hướng (i, j) một số không âm F_{ij} sao cho:

a) $F_{ij} \le C_{ij}$.

F_{ij} được gọi là dòng chảy trong cạnh (i, j).

b) Mỗi đỉnh j , không là nguồn hay đích,

$$\sum_i F_{ij} = \sum_i F_{ji} \qquad (1)$$

[Nếu (i, j) $\notin$ E ta cho F_{ij} = 0]

Đẳng thức (1) được gọi là **sự bảo toàn của dòng chảy**.

5.1.3 Định lý: Cho F là dòng chảy trong G. Ta có

$$\sum_i F_{ai} = \sum_i F_{iz}$$

Giá trị $\sum_i F_{iz}$ được gọi là *giá trị của dòng chảy F*.

5.1.4 Định nghĩa: Cho G là mạng xét một đường đi không hướng

$$P = (v_0, v_1, \ldots, v_n) , v_0 = a, \quad v_n = z.$$

Nếu e trong P được định hướng từ v_{i-1} đến v_i (theo G)ta nói e được **định hướng đúng đối với P**, ngược lại e là **không định hướng đúng đối với P**.

5.2 Thuật toán tìm dòng chảy lớn nhất – Thuật toán đánh nhãn:

Input : $a=v_0$, v_1, . . . , $v_n = z$.

1. $F_{ij} = 0$, với $(i, j) \in E$.

2. Gán nhãn (, ∞) cho a.

3. Nếu z đã được gán nhãn , GOTO bước 6.

4. Chọn đỉnh v_i , ***đã gán nhãn***, **chưa duyệt**, với chỉ số i bé nhất. Nếu không có v_i như vậy thì STOP (F là dòng chảy lớn nhất); ngược lại, $v = v_i$ (v_i **đã duyệt**).

5. Gọi (α, Δ) là nhãn của v. Duyệt mỗi cạnh có dạng (v, w), (w, v) [theo thứ tự (v, v_0), (v_0, v), (v, v_1), (v_1, v), ...], với w ***chưa có nhãn***.

- Với cạnh dạng (v, w), Nếu $F_{vw} < C_{vw}$, gán nhãn cho w là $(v, \min\{ \Delta, C_{vw} – F_{vw}\})$. Nếu $F_{vw} = C_{vw}$, không gán nhãn cho w.

- Với cạnh dạng (w, v), nếu $F_{wv} > 0$, gán nhãn cho w là $(v, \min\{ \Delta, F_{wv}\})$. Nếu $F_{wv} = 0$, không đánh nhãn w.

GOTO bước 3.

6. Gọi (γ, Δ) là nhãn của z. Gán $w_0 = z$, $w_1 = \gamma$. Nếu nhãn của w_i là (γ', Δ'), gán $w_{i+1} = \gamma'$. Tiếp tục cho đến khi $w_k = a$. Ta có

$$P : a = w_k, w_{k-1}, \ldots, w_1 , w_0 = z$$

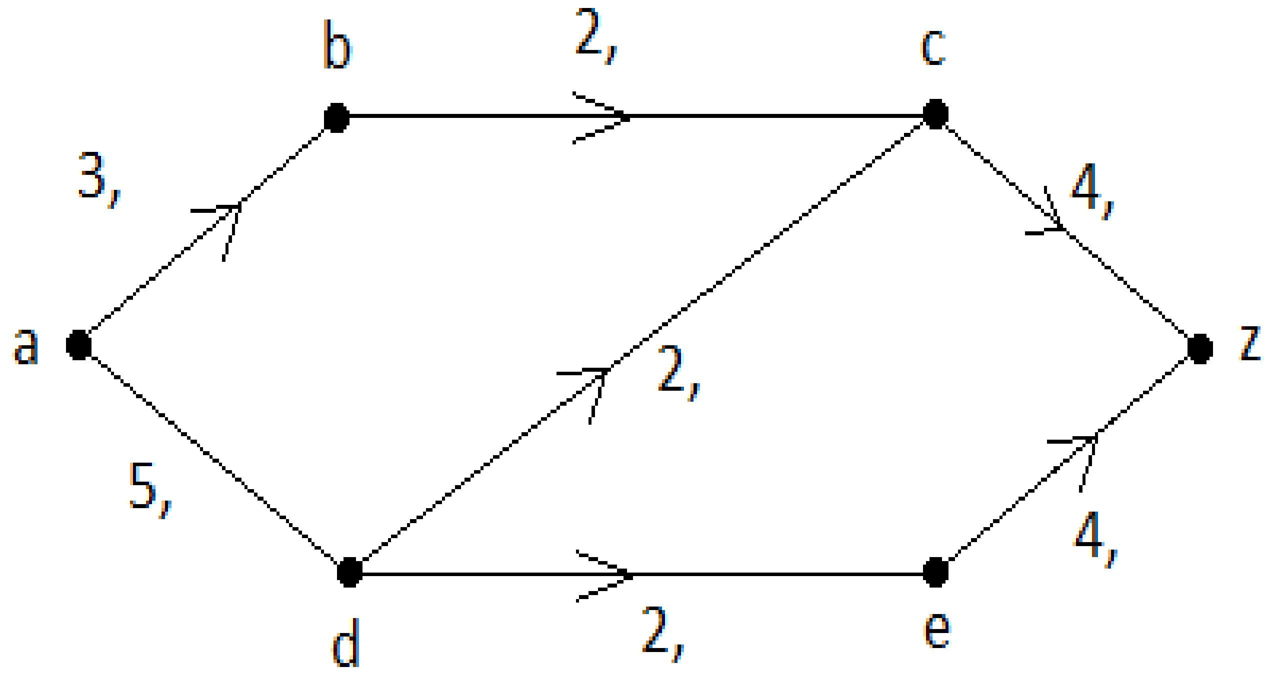
là một đường đi từ a đến z.

- Thay đổi dòng chảy ở mỗi cạnh trong P như sau: Nếu cạnh e trong P là định hướng đúng tăng dòng chảy của e lên Δ; ngược lại giảm dòng chảy của e Δ.

- Xóa các nhãn của các đỉnh .

- GOTO bước 2.

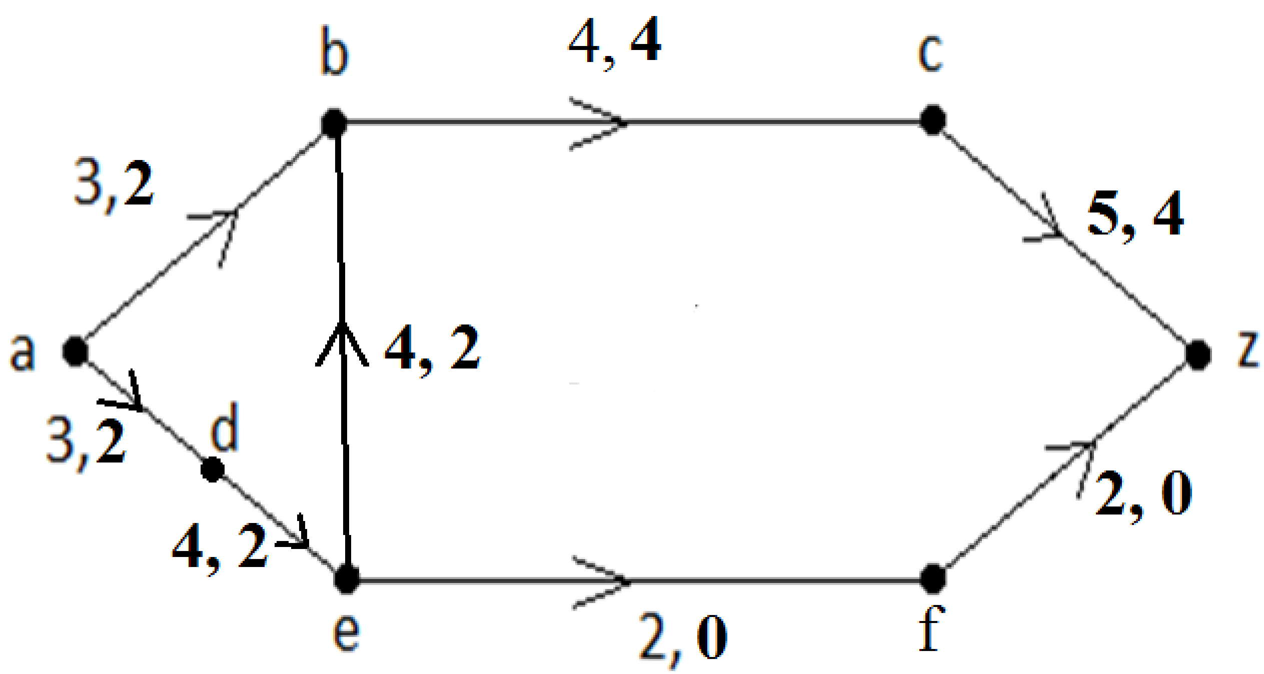
Ví dụ 1 : Các đỉnh sắp theo thứ tự **a**, b, c, d, e, **z**.



Bước	v	a	b	c	d	e	z
2		(, ∞)					
4	a		(a, 3)		(a,5)		
4	b			(b, 2)			
4	c						(c, 2)
2		(, ∞)					

Fab	Fad	Fbc	Fdc	Fde	Fcz	Fez
2	0	2	0	0	2	0

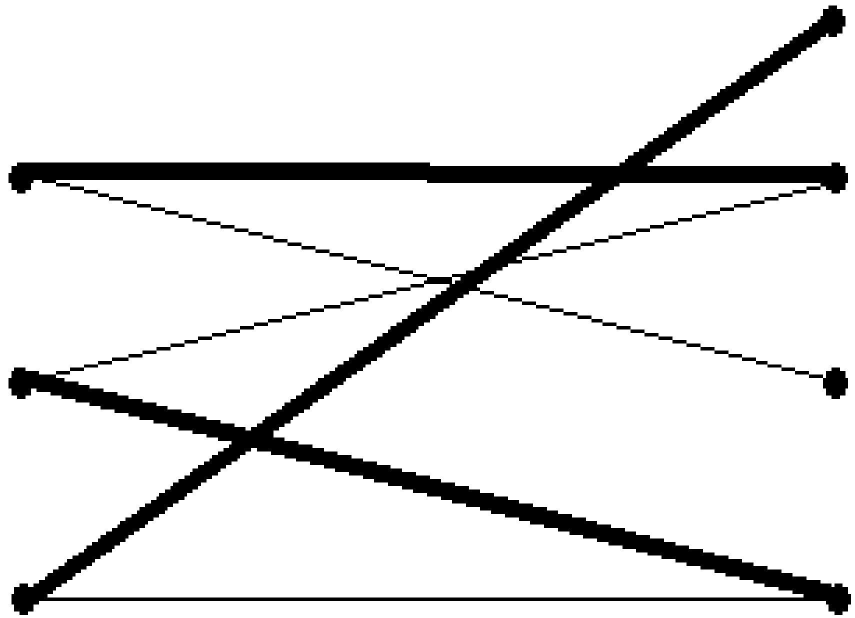
Ví dụ 2 : Các đỉnh sắp theo thứ tự **a**, b, c, d, e, f, **z**.



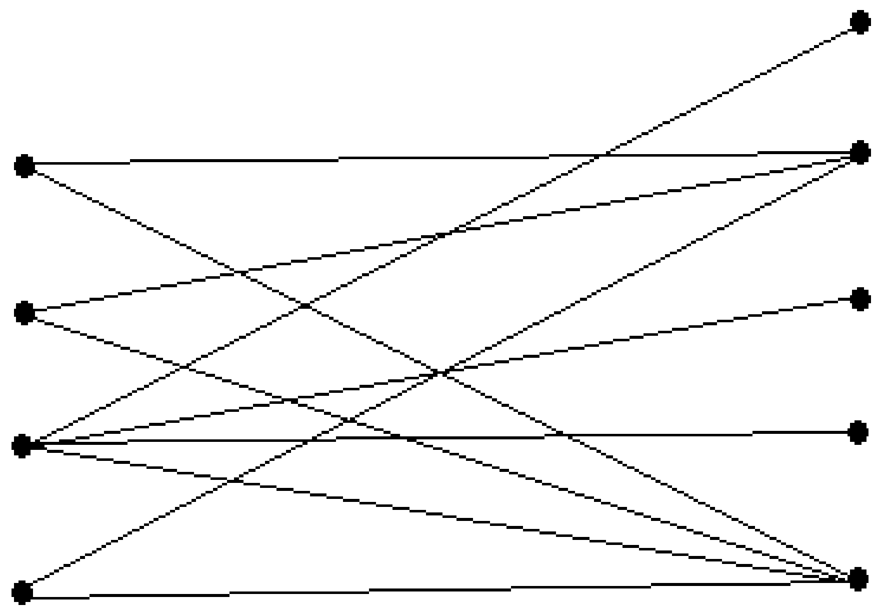
5.3 Bài toán ghép đôi :

5.3.1 Định nghĩa : Cho G = (V, E) là đồ thị có hướng, lưỡng phân với hai tập đỉnh V và W rời nhau. Mỗi cạnh hướng từ V đến W.

- Một ghép đôi trong G là một tập E’ $\subseteq$ E các cạnh không có đỉnh chung.
- Một ghép đôi lớn nhất trong G là một ghép đôi E’ với số cạnh lớn nhất.
- Một ghép đôi đầy đủ trong G là ghép đôi E với tính chất nếu v $\in$ V thì có w $\in$ W, cạnh (v, w) $\in$ E’.



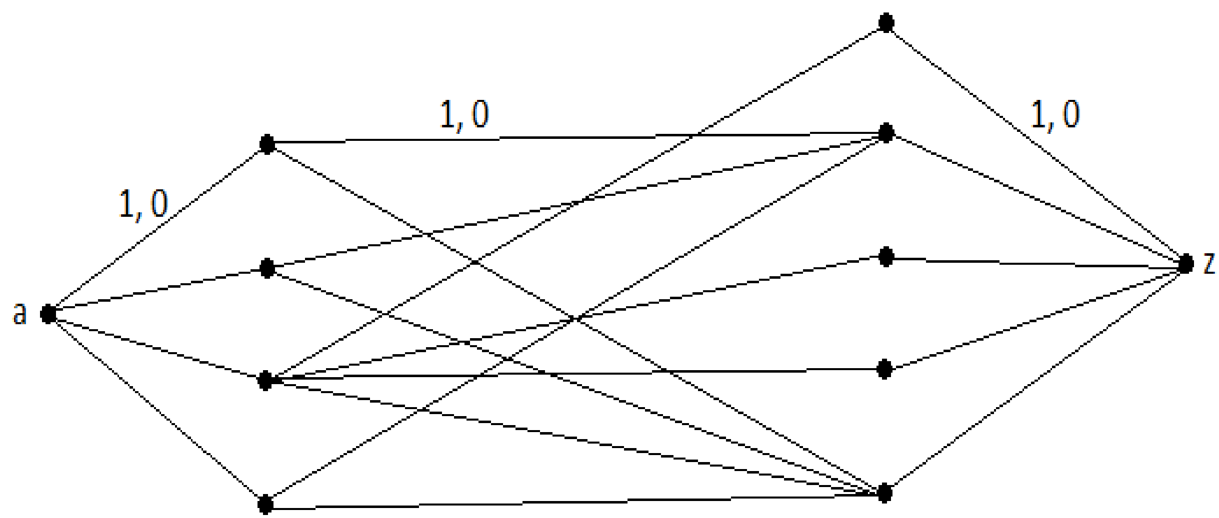
Ví dụ : Tìm một ghép đôi của đồ thị sau :



Giải :

- Gán mỗi cạnh sức chứa bằng 1.
- Thêm nguồn, đích.

Đồ thị vừa được xây dựng được gọi là **matching network**.



5.3.2 Định lý : Cho G có hướng, lưỡng phân với hai tập đỉnh V và W rời nhau, cạnh hướng từ V tới W.

a) Một dòng chảy trong matching network cho một ghép đôi trong G. $v \in V$ ghép với $w \in W$ khi và chỉ khi dòng chảy trong cạnh (F_{vw}) bằng 1.

b) Một dòng chảy lớn nhất tương ứng với một ghép đôi lớn nhất.

c) Một dòng chảy có giá trị bằng |V| tương ứng với một ghép đôi đầy đủ.

Tài liệu tham khảo:

1. Discrete Mathematics , Richard Johnsonbaugh

2. Algorithms, Thomas h.   Cormen

3. Toán Rời Rạc Nâng Cao, Trần Ngọc Danh, ĐHQG TP HCM

4. Lý Thuyết Đồ Thị, Đặng Trường Sơn, Lê văn Vinh, ĐHSP Kỹ Thuật TP HCM