HƯỚNG DẪN BÀI TẬP ĐẠO HÀM HÀM ẨN

1. Công thức cần nhớ

Bài toán

Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định từ phương trình $F(x, y) = 0$. Tính $y'(x)$.

Các bước thực hiện

1. Đạo hàm hai vế của phương trình theo biến x. Chú ý dùng **Quy tắc dây chuyền** $\frac{d}{dx}[f(y)] = f'(y).y'(x)$ để tính đạo hàm với các số hạng chứa y.
2. Giải phương trình tìm được sau khi đạo hàm hai vế để tìm $y'(x)$.

2. Các ví dụ

Ví dụ 2.1

Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$. Tính $y'(x)$

Lời giải. Đạo hàm hai vế của phương trình theo biến x, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5y - x^2) = \frac{d}{dx}(-4)\\
&\Rightarrow 3y^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} - 5\frac{dy}{dx} - 2x = 0\\
&\Rightarrow (3y^2 + 2y - 5)\frac{dy}{dx} = 2x\\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 2y - 5}
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 2.2

Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi $e^{2x+3y} = x^2 - \ln(xy^3)$. Tính $y'(x)$.

Lời giải. Đạo hàm hai vế theo biến x, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(2x+3y)e^{2x+3y} = 2x - \frac{\frac{d}{dx}(xy^3)}{xy^3}\\
&\Rightarrow (2+3y')e^{2x+3y} = 2x - \frac{y^3+3xy^2y'}{xy^3}\\
&\Rightarrow 2e^{2x+3y} + 3y'e^{2x+3y} = 2x - \frac{1}{x} - \frac{3y'}{y}\\
&\Rightarrow (3e^{2x+3y} + 3y^{-1})y' = 2x - x^{-1} - 2e^{2x+3y}\\
&\Rightarrow y' = \frac{2x - x^{-1} - 2e^{2x+3y}}{3e^{2x+3y}+3y^{-1}}
\end{aligned}$$

□

Chú ý

1. Hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại $x = a$ là

$$m_{\tan} = f'(a)$$

2. Hệ số góc của pháp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại $M(a, f(a))$ là:

$$m_{\text{PT}} = -\frac{1}{f'(a)}$$

3. Phương trình tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại $M(a, f(a))$ có dạng

$$\boxed{y - f(a) = m_{\tan}(x-a)}$$

4. Phương trình pháp tuyến với đường cong $y = f(x)$ tại $M(a, f(a))$ có dạng:

$$\boxed{y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x-a)}$$

Ví dụ 2.3

Tìm phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến của đường cong

$$x^2y^2 - 2x = 4 - 4y$$

tại $P(2, -2)$.

Lời giải. Đạo hàm hai vế của phương trình theo x, ta được:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^2y^2 - 2x) = \frac{d}{dx}(4 - 4y)\\
&\Rightarrow 2xy^2 + x^2(2y)\frac{dy}{dx} - 2 = -4\frac{dy}{dx}\\
&\Rightarrow (2x^2y + 4)\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy^2\\
&\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 2xy^2}{2x^2y + 4} \quad (*)}
\end{aligned}$$

Thay $x = 2$ và $y = -2$ vào $(*)$, ta có hệ số góc của tiếp tuyến tại $P(2, -2)$ là:

$$y'(2) = \frac{2 - 16}{-16 + 4} = \frac{7}{6}$$

Vậy phương trình tiếp tuyến với đường cong tại $P(2, -2)$ có dạng

$$y + 2 = \frac{7}{6}(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = \frac{7}{6}x - \frac{13}{3}}$$

Hệ số góc của pháp tuyến với đường cong tại $P(2, -2)$ là

$$m_{PT} = -\frac{1}{y'(2)} = -\frac{6}{7}$$

Vậy phương trình pháp tuyến với đường cong tại $P(2, -2)$ có dạng:

$$y + 2 = -\frac{6}{7}(x - 2) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{6}{7}x - \frac{2}{7}}$$

□

Ví dụ 2.4(HKI-2015-2016)

Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$$

tại $P(2, 0)$.

Lời giải. Đạo hàm hai vế của phương trình theo biến x, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}((x^2 + y^2)^2) = \frac{d}{dx}(4(x^2 - y^2))\\
&\Rightarrow 2(x^2 + y^2)(2x + 2yy') = 4(2x - 2yy')\\
&\Leftrightarrow (x^2 + y^2)(x + yy') = 2(x - yy')\\
&\Leftrightarrow y'(y^3 + x^2y + 2y) = 2x - x^3 - xy^2\\
&\Rightarrow y' = \frac{2x - x^3 - xy^2}{y^3 + x^2y + 2y} \qquad (1)
\end{aligned}$$

Thay $x = 2$ và $y = 0$ vào (1), ta được hệ số góc của tiếp tuyến tại P là $m = \infty$. Do đó, tiếp tuyến tại P là đường thẳng đứng.

Vậy phương trình tiếp tuyến với đường cong tại $P(2, 0)$ là $x = 2$. □

Ví dụ 2.5(Đạo hàm cấp 2 của hàm ẩn)

Cho hàm ẩn $y = y(x)$ xác định bởi $x^4 + y^4 = 16$. Tính y''

Lời giải. Đạo hàm hai vế của phương trình theo x, ta được:

$$\frac{d}{dx}(x^4 + y^4) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 4y^3y' = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x^3}{y^3}}$$

Vậy

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{x^3}{y^3}\right) = -\frac{3x^2y^3 - x^3(3y^2y')}{y^6}$$
$$= -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$
$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = -\frac{3x^2(x^4 + y^4)}{y^7}$$
$$= -\frac{3x^2(16)}{y^7} = -\frac{48x^2}{y^7} \quad \text{vì } x^4 + y^4 = 16$$

□

Ví dụ 2.6(HKI-2016-2017)

Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong $(C): x^2 + 2xy = y^3$, biết tiếp tuyến song song với trục Ox.

Lời giải. Đạo hàm 2 vế của phương trình theo x, ta được

$$2x + 2y + 2xy' = 3y^2y' \Rightarrow 2(x + y) = (3y^2 - 2x)y'$$
$$\Rightarrow y' = \frac{2(x + y)}{3y^2 - 2x}$$

Gọi $M(a, b)$ là tiếp điểm. Vì $M(a, b) \in (C)$ nên $a^2 + 2ab = b^3$.

Vì tiếp tuyến với (C) tại $M(a, b)$ song song với Ox nên hệ số góc

$$m = y'(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(a + b)}{3b^2 - 2a} = 0$$

Giải hệ

$$\begin{cases} a^2 + 2ab = b^3 \\ \dfrac{2(a + b)}{3b^2 - 2a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{3}{2}b^2 \\ a + b = 0 \\ a^2 + 2ab = b^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq \dfrac{3}{2}b^2 \\ b = -a \\ a^2(a - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Phương trình tiếp tuyến với đường cong (C) tại $M(1, -1)$ là $y = -1$. □