Bài 9.
DÃY SỐ

Giảng viên: Nguyễn Lê Thi
Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Biểu diễn được dãy số
- Khảo sát được sự hội tụ của dãy số

NỘI DUNG CHÍNH

9.1 Khái niệm dãy số

9.2 Giới hạn của dãy số

1. KHÁI NIỆM DÃY SỐ

❖ Dãy số

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n \quad hay \quad \{a_n\} \qquad \left(n \in Z^+\right)$$

a_n được gọi là số hạng tổng quát của dãy.

Ví dụ 9.1

Tìm số hạng thứ 1, thứ 2 và thứ 15 của dãy số $\{a_n\}$ biết số hạng tổng quát là

$$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

❖ Dãy đơn điệu và dãy bị chặn

Tên	Điều kiện	Ví dụ	
Tăng	$a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$	1,1,2,3,3,5,…	Dãy đơn điệu
Tăng nghiêm ngặt	$a_1 < a_2 < \ldots < a_n$	1,2,3,4,5,…	
Giảm	$a_1 \ge a_2 \ge \ldots \ge a_n$	9,7,5,5,3,1,1,…	
Giảm nghiêm ngặt	$a_1 > a_2 > \ldots > a_n$	9,7,5,3,1,….	
Bị chặn trên	$a_n \le M, \quad \forall n.$	$0 \le 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \le 1$	Dãy bị chặn
Bị chặn dưới	$a_n \ge m, \quad \forall n.$		
Bị chặn	$m \le a_n \le M, \ \forall n$		

2. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

2.1 Định nghĩa giới hạn dãy số

Dãy $\{a_n\}$ hội tụ về số L nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại số nguyên N sao cho

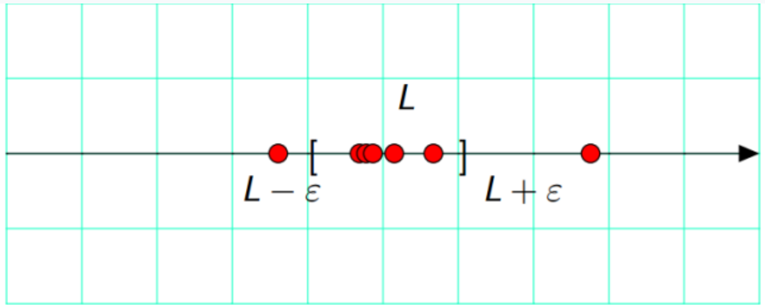
$$|a_n - L| < \varepsilon, \forall n > N$$

Khi đó ta viết

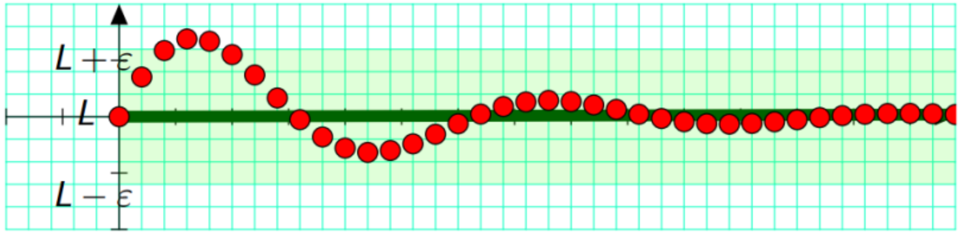
$$L = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Nếu $L < \infty$ thì dãy hội tụ.

Ngược lại dãy phân kỳ.



Hình: One dimension



Hình: Two dimension

❖ Mối liên hệ giữa tính đơn điệu và hội tụ của dãy

- Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ
- Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ

2.2 Giới hạn dãy số và giới hạn hàm số liên tục

Định lý. Cho dãy $\{a_n\}$ và f là hàm liên tục sao cho $f(n) = a_n$ với mọi $n = 1,2,\ldots.$

Khi đó, nếu $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ thì dãy $\{a_n\}$ cũng hội tụ và

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

2.3 Các quy tắc tính giới hạn dãy số

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *và* $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, $r, s \in \mathbb{R}$, *thì*

- **Luật tuyến tính**

$$\lim_{n\to\infty}(ra_n + sb_n) = rL + sM.$$

- **Luật nhân**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM.$$

- **Luật chia**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M} \quad \text{với } M \neq 0.$$

- **Luật căn**

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{L}$$

nếu $\sqrt[m]{a_n}$ *xác định với mọi* n *và* $\sqrt[m]{L}$ *tồn tại.*

QUY TẮC L'HOPITAL

Giả sử f và g là các hàm khả vi theo x thỏa $g'(x) \neq 0$ với x gần a, và đồng thời ta có dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$. Khi đó

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Định lý 3 (Định lý Squeeze cho dãy số)

Nếu $a_n \leq b_n \leq c_n$ *với mọi* $n > N$ *và* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, *thì*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = L$$

Ví dụ 9.2

Tìm giới hạn của dãy số

$$\left\{\sqrt{n^2+3n}-n\right\}$$

Ví dụ 9.3

Tìm giới hạn của dãy số

a. $\left\{\dfrac{2n^2+n}{n^2-1}\right\}$

b. $\left\{\dfrac{3n^4+n-1}{3n^3-1}\right\}$

c. $\left\{(-1)^n\right\}$

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n}{n^2-1}=\lim\limits_{n\to\infty}$

Ví dụ 9.4

Tìm giới hạn của dãy số

$$\left\{\frac{n^2+3}{e^n}\right\}$$

KẾT BÀI

Sinh viên cần lưu ý:

- Biểu diễn các số hạng trong dãy số, xác định số hạng tổng quát của dãy.
- Tính giới hạn của dãy số

THANKS FOR WATCHING!