Chương 1. Giới thiệu

1.1 Đồ thị :

1.1.1 Định nghĩa đồ thị vô hướng (*undirected graph*):

- Đồ thị G là một bộ (V, E), với V là tập khác $\emptyset$,hữu hạn các phần tử được gọi là các *đỉnh* (*vertex*), E là tập các phần tử được gọi là các *cạnh* (*edge*). Mỗi phần tử e $\in$ E liên kết với duy nhất một cặp đỉnh v, w $\in$ V và được ký hiệu e = (v, w), v, w $\in$ V.

- e = (v, w) được gọi là cạnh *liên thuộc* với hai đỉnh v và w (*e* is called *incident with* the vertices *u* and *w*), và v và w là các đỉnh kề nhau (*the two vertices v and w are adjacent*).

- $e_1 = (v, w)$ và $e_2 = (v, w)$, e_1 và e_2 được gọi là 2 cạnh song song (*multiple edges*).

- e = (v, v) được gọi là một khuyên hay vòng (*loop*).

- d(v) , gọi là *bậc* của đỉnh v (*the degree of the vertex v*), là số cạnh kề với v. Nếu đỉnh v có vòng thì vòng được tính là 2.

- Đỉnh có bậc bằng 0 được gọi là đỉnh cô lập.
- Đỉnh có bậc bằng 1 được gọi là đỉnh treo.

Lưu ý : e =(v, w) = (w, v) (Không kể thứ tự).

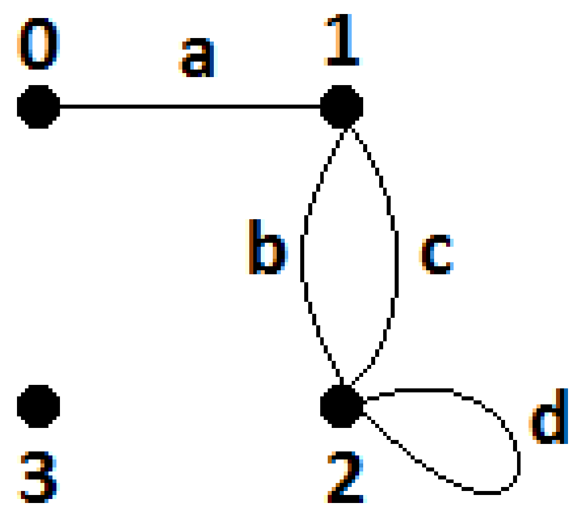
Ví dụ : Cho G=(V, E) , V={0, 1, 2, 3}, E={ a=(0, 1), b=(1, 2), c=(1, 2), d=(2, 2)}.

Đồ thị G được biểu diễn bằng hình ảnh như sau:

- Cạnh a là *cạnh liên thuộc* với đỉnh 0 và đỉnh 1, đỉnh 0 *kề* đỉnh 1.

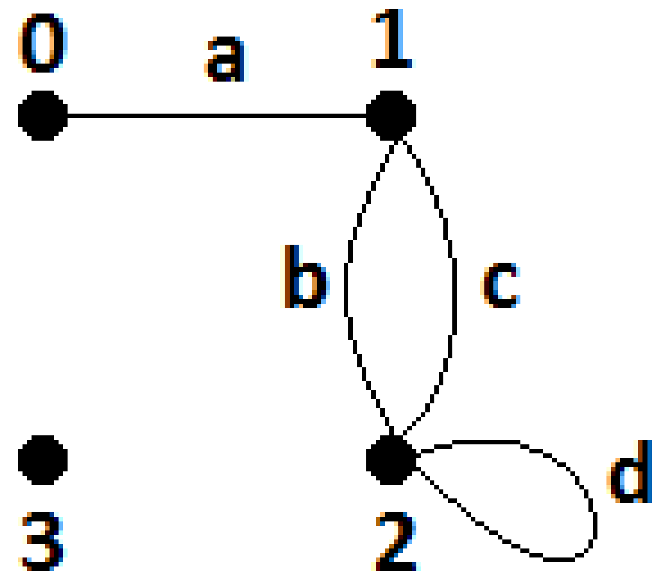
- Cạnh b song song cạnh c , b // c.

- Cạnh d là vòng.



- Bậc của các đỉnh :

v	d(v)
0	1
1	
2	
3	

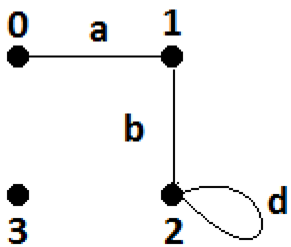


- Đỉnh 0 là *đỉnh treo*.
- Đỉnh 3 là *đỉnh cô lập.*

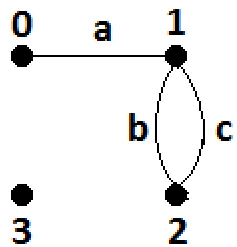
1.1.2 Định nghĩa đồ thị đơn giản (simple graph) **:**
Cho G là đồ thị. Nếu G không có cạnh song song và không có vòng thì được gọi là đồ thị đơn giản.

Ví dụ :

- Các đồ thị (G1, G2, G3) không đơn giản :

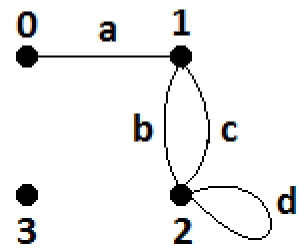


G1



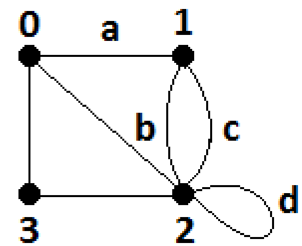
G2

Multi graph



G3

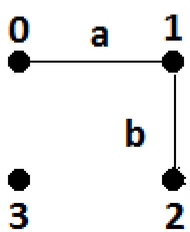
Pseudo graph



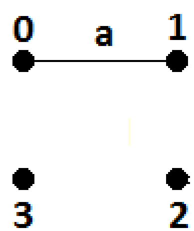
G 4

Adjacent graph

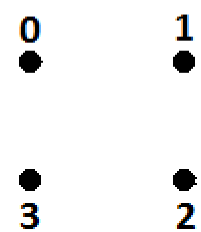
- Các đồ thị đơn giản :



G1



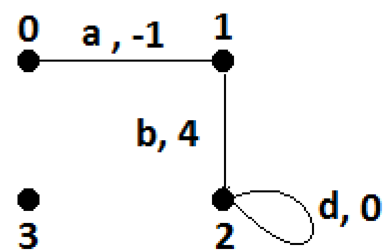
G2



G3

Null graph

1.1.3 Định nghĩa trọng số (*weight*)**:** Cho G = (V, E) là đồ thị. Mỗi cạnh $e \in E$ ta gán cho e một giá trị số thực được gọi là trọng số của e. Khi đó đồ thị G được gọi là đồ thị có trọng số.



- Cạnh a có trọng số là -1,
- Cạnh b có trọng số là 4,
- Cạnh d có trọng số là 0.

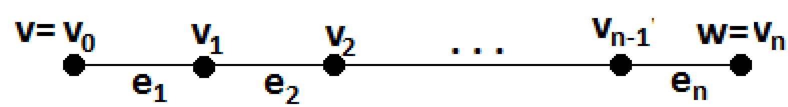
1.2 Đường đi (*path*):

1.2.1 Định nghĩa đường đi : Cho G = (V, E) là đồ thị.

Cho v, w $\in$ V ta định nghĩa đường đi nối đỉnh v và w ,

ký hiệu P(v, w), như sau:

P(v, w) **là dãy** $\{ e_i = (v_{i-1}, v_i) : i=1,\ldots,n, v=v_0, v_n=w \}$ (1)

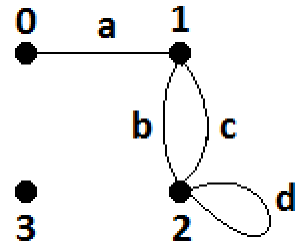


➢ **Chú ý :** Ta cũng có thể biểu diễn P(v, w) như sau

$$P(v, w)= (v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, . . ., v_{n-1}, e_n, v_n) \quad (2)$$

- $|P(v, w)| = n$, là chiều dài đường đi.
- Một trường hợp đặc biệt của đường đi là đường đi chỉ gồm một đỉnh v (không có cạnh) khi đó đường đi được ký hiệu là (v) , có chiều dài bằng không.
- Nếu không tồn tại dãy e_i ở (1) ta nói không có đường đi giữa v và w, ta qui ước $P(v, w) = \emptyset$.
- Hai đường đi P và Q là khác nhau nếu chúng có ít nhất một cạnh là khác nhau.

Ví dụ :



- P1=P(0, 1)={a=(0,1)}, hay P1=P(0, 1)=(0,a,1),
- P2=P(0, 1)={a=(0,1), a=(1,0), a=(0,1)}, hay

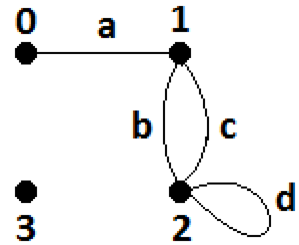
  P2=P(0,1)=(0,a,1,a,0,a,1),
- P3=P(0, 1)={a=(0,1), b=(1,2), b=(2,1)}, hay

  P3=P(0,1)=(0,a,1,b,2,b,1),
- P4=P(0,1)={a=(0,1), b=(1,2), c=(2,1)}, hay

  P4=P(0,1)=(0,a,1,b,2,c,1),

➢ Các đường đi P1, P2, P3, P4 là khác nhau.

Ví dụ :



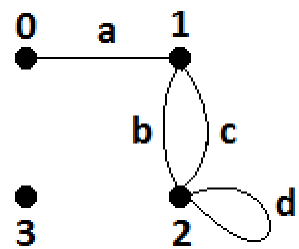
- P5=P(0,2)={a=(0,1), b=(1,2), c=(2,1), c=(1,2), d=(2,2)}, hay

  P5=P(0,2)=(0,a,1,b,2,c,1,c,2,d,2),

- P6=P(0,3)=$\varnothing$.

1.2.2 Định nghĩa chu trình (*circuit*)**:** Cho G = (V, E) là đồ thị. Một chu trình **đỉnh v** là P(v, v).

Ví dụ :



P(0,0)={a=(**0**,1), b=(1,2), c=(2,1), a=(1,**0**)}, hay

P(0,0)=(**0**,a,1,b,2,c,1,a,**0**),

1.2.3 Định nghĩa đường đi , chu trình đơn giản (*simple path, circuit*)**:**

Cho G = (V, E) là đồ thị.

- Một đường đi gọi là *đơn giản* ,nếu không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần.

- Một chu trình đỉnh v gọi là *đơn giản* ,nếu không có *cạnh* nào xuất hiện quá một lần.

➢ Ta chỉ cần kiểm tra công thức P(v,w) ở dạng (1) xem có cạnh nào xuất hiện nhiều hơn một lần không.

1.2.4 Định nghĩa đường đi , chu trình sơ cấp

(elementary path, circuit)**:**

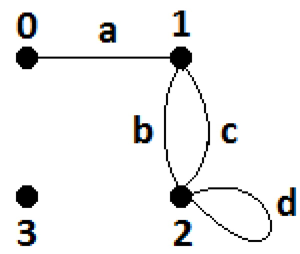
Cho G = (V, E) là đồ thị.

- Một đường đi gọi là *sơ cấp* ,nếu không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần.

- Một chu trình đỉnh v gọi là *sơ cấp* ,nếu không có *đỉnh* nào xuất hiện quá một lần (đỉnh đầu và cuối được xem là một đỉnh).

- Ta chỉ cần kiểm tra từng đỉnh v trong công thức P(v,w) ở dạng (2). Đếm v, xem số lần $\geq$ 2 không.
- Đối với chu trình thì đỉnh đầu và đỉnh cuối được tính là 1.

Ví dụ :



P(0,0)={a=(**0**,1), b=(1,2), c=(2,1), a=(1,**0**)} , dạng (1)

P(0,0)=(**0**,a,1,b,2,c,1,a,**0**), dạng (2).

Chu trình trên không đơn giản vì cạnh a xuất hiện 2 lần, không sơ cấp, vì đỉnh 1 xuất hiện 2 lần ở dạng (2).

P(1,1) = {b=(1,2), c=(2,1)} hay

P(1,1) = {**1**,b,2,c,**1**}

Chu trình vừa đơn vừa sơ cấp.

1.3 Liên thông (Connectivity) :

1.3.1 Định nghĩa quan hệ ≈ : Cho G = (V, E) là đồ thị. v, w $\in$ V ,

$$v \approx w \Leftrightarrow (v = w) \vee (P(v, w) \neq \varnothing).$$

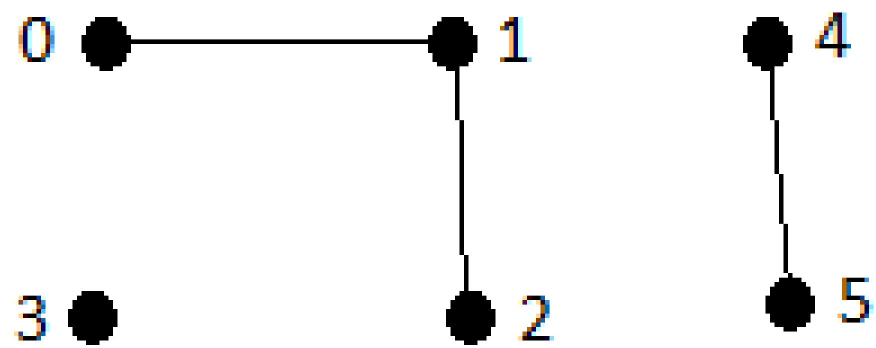
VD : Cho đồ thị G

Ta có :

- $0 \approx 0$ vì $0=0$,

  $0 \approx 1$ vì có đường đi nối 0 và 1,

  $0 \approx 2$ vì có đường đi nối 0 và 2,
- $1 \approx 1$, $1 \approx 0$, $1 \approx 2$,
- $2 \approx 2$, $2 \approx 0$, $2 \approx 1$,
- $3 \approx 3$,
- $4 \approx 4$, $4 \approx 5$,
- $5 \approx 5$, $5 \approx 4$.



- 1 không có quan hệ $\approx$ 3 , vì $P(1,3) = \varnothing$
- 1 không có quan hệ $\approx$ 4.

1.3.2 Định nghĩa thành phần liên thông (connected component) **:**

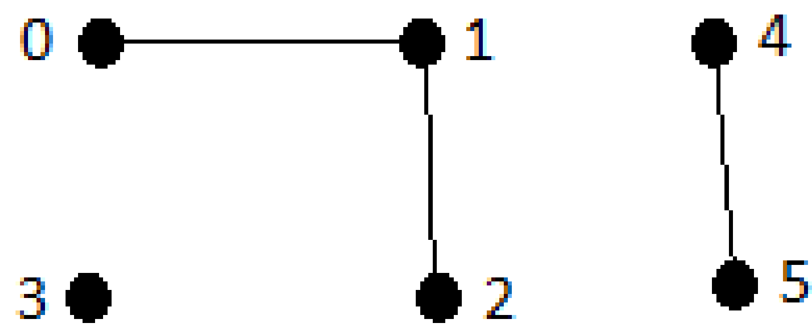
Cho G = (V, E) là đồ thị. Ta định nghĩa $[v] = \{ w \in V : v \approx w\}$. [v] được gọi là thành phần liên thông *chứa v.*

Vd : Từ ví dụ ở Slide trước cho ta

[0]=[1]=[2]={0,1,2} ,

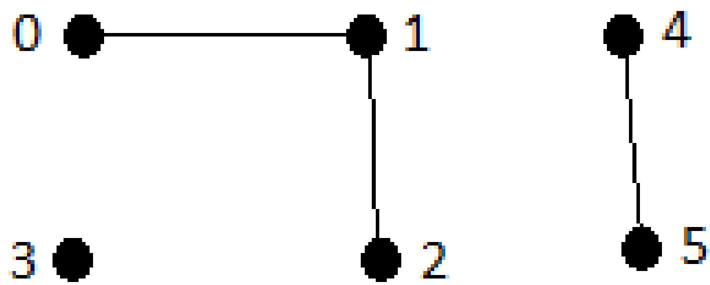
[3]={3},

[4]=[5]={4,5}.



1.3.3 Định nghĩa liên thông: Cho G = (V, E) là đồ thị. G được nói là liên thông nếu số thành phần liên thông của G là 1.

Vd :



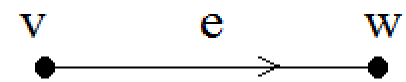
Đồ thị ở trên không liên thông vì có 3 (>1) thành phần liên thông ({0,1,2} , {3} và {4,5}).

1.4 Đồ thị có hướng (directed graph)**:**

1.4.1 Định nghĩa đồ thị có hướng : Đồ thị có hướng G=(V, E) là đồ thị được định nghĩa ở **1.1.1** với mỗi cạnh e=(v,w) có phân biệt thứ tự v và w, tức là (v,w)≠(w,v).

- Lưu ý : Khi nói "cho đồ thị G. . ." thì ta sẽ hiểu đồ thị G theo định nghĩa ở Các Slide trước (còn gọi là đồ thị vô hướng). Khi nói "cho đồ thị G có hướng" thì G được định nghĩa ở 1.4.1.
- Những gì ta học ở các Slide trước cũng được áp dụng cho đồ thị có hướng.

- $e=(v, w) \in E$ được nói là cạnh / cung hướng từ v đến w, *hướng ra* từ v, *hướng vào* w.
- Nếu $e=(v, w) \in E$, ta nói *w kề với v,*



v là đỉnh đầu (the initial vertex) , w là đỉnh cuối (*the end vertex*).

- Cho $e_1=(v, w) \in E$ và $e_2=(v, w) \in E$. Khi đó e_1 và e_2 được nói là 2 cung song song cùng hướng (multiple directed edges).
- Cho $e_1=(v, w) \in E$ và $e_2=(w, v) \in E$. Khi đó e_1 và e_2 được nói là 2 cung song song ngược hướng.

- Cho e=(v, v) , e được gọi là một vòng, *vừa hướng ra từ v vừa hướng vào v*. Nếu một đỉnh có 2 vòng thì ta xem chúng là song song cùng hướng.

- $d^{-}(v)$: số cạnh hướng vào v, *nửa bậc trong* (*in-degree*) của đỉnh v.

- $d^{+}(v)$: số cạnh hướng ra từ v, *nửa bậc ngoài* (*out-degree*) của đỉnh v.

- Đồ thị có hướng được nói là đồ thị đơn giản nếu không có vòng, không có cạnh song song cùng hướng.

1.4.2 Định nghĩa đường đi : Cho G=(V, E) có hướng. Một đường đi trong G *từ v đến w*, ký hiệu P(v, w), được định nghĩa :

P(v, w) **là dãy** { $e_i=(v_{i-1}, v_i)$: i=1,2,...,n, $v=v_0$, $w=v_n$}. (1)

- |P(v, w)| = n là chiều dài đường đi.
- Một trường hợp đặc biệt của đường đi là đường đi chỉ gồm một đỉnh v (không có cạnh) khi đó đường đi được ký hiệu là (v) , có chiều dài bằng không.
- Nếu không tồn tại dãy e_i ở (1) ta nói không đường đi từ v đến w, ta qui ước P(v, w) = $\emptyset$.

Chú ý : P(v, w) ≠ P(w, v).

1.4.3 Định nghĩa chu trình : Cho G=(V, E) có hướng. Một chu trình (có hướng) đỉnh v là P(v, v).

- Đường đi đơn, đường đi sơ cấp, chu trình đơn, chu trình sơ cấp được định nghĩa như đồ thị không hướng.

1.4.4 Định nghĩa ≈ : Cho G=(V, E) có hướng. v, w $\in$V.

$$v \approx w \Leftrightarrow (v=w) \vee (P(v, w) \neq \varnothing \wedge P(w, v) \neq \varnothing).$$

1.4.5 Định nghĩa lớp tương đương : v$\in$V.

$$[v]= \{ w \in V : w \approx v\}.$$

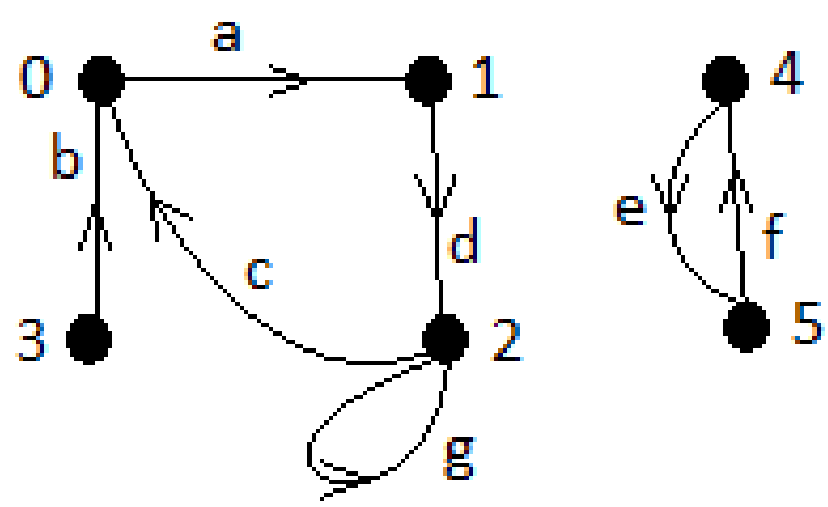
[v] được gọi là *thành phần liên thông mạnh* (*strong component*) chứa v.

1.4.6 Định nghĩa liên thông mạnh : Nếu G (có hướng) có đúng 1 thành phần liên thông mạnh thì ta nói G liên thông mạnh.

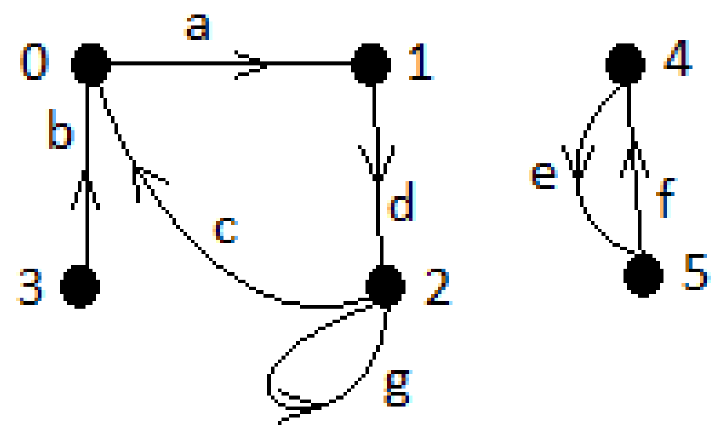
VD : Cho đồ thị có hướng G :

- Đường đi P(3,2) = {b=(3,0), a=(0,1), d=(1,2)}, nhưng không có đường đi P(2,3).
- Bậc

v	d-(v)	d+(v)
0	2	1
1	1	1
2	2	2
3	0	1
4	1	1
5	1	1



VD : Cho đồ thị có hướng G :



- Quan hệ ≈ :

0 ≈ 0,

0 ≈ 1 , vì có P(0,1) và P(1,0),

0 không quan hệ ≈ với 3, vì có P(3,0) nhưng không có P(0,3).

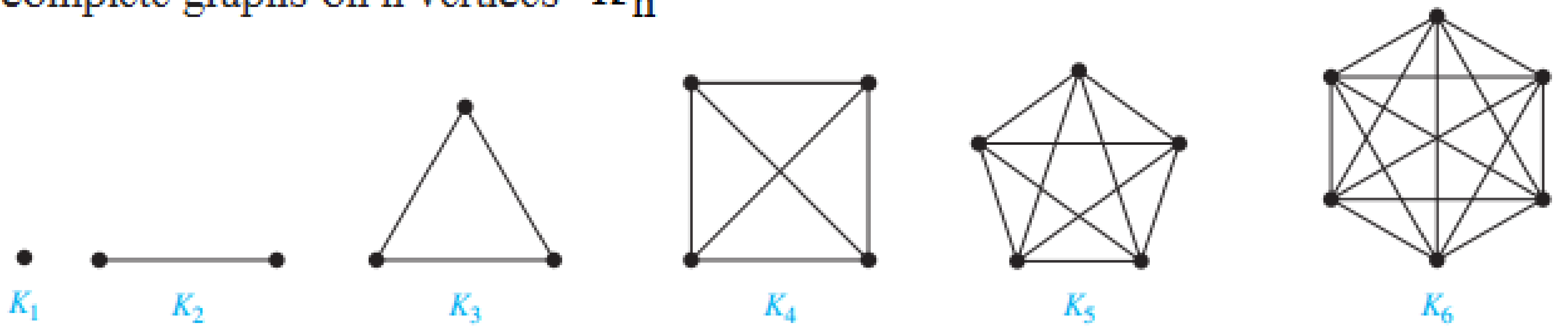
- Các thành phần liên thông mạnh :

[0]=[1]=[2]={0,1,2}, [3]={3}, [4]=[5]={4, 5}.

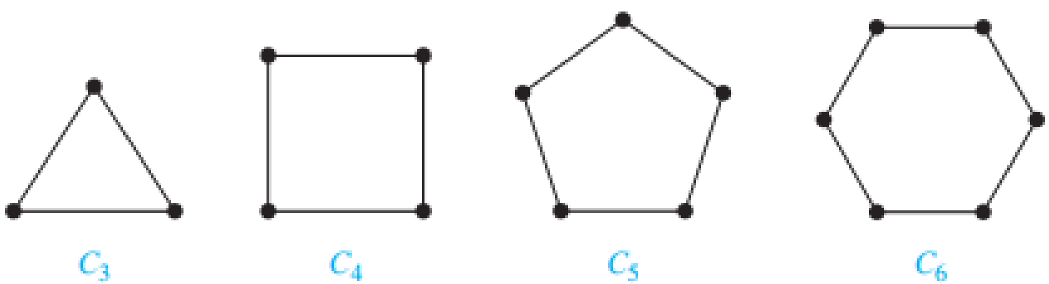
Đồ thị đã cho không liên thông mạnh vì có 3 (>1) thành phần liên thông mạnh ({0,1,2} , {3} và {4,5}).

Some simple graphs :

complete graphs on n vertices K_n

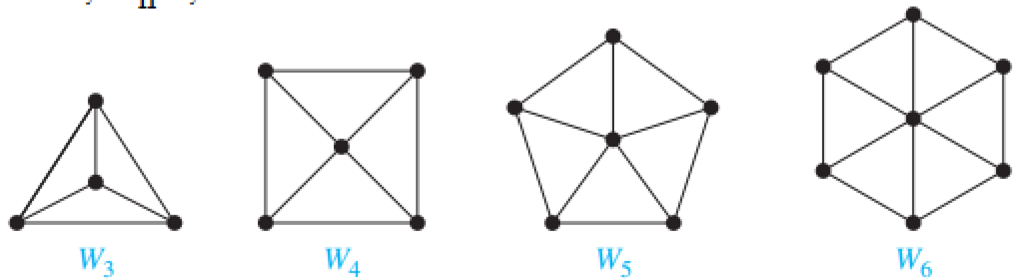


Cycles, C_n , n >=3



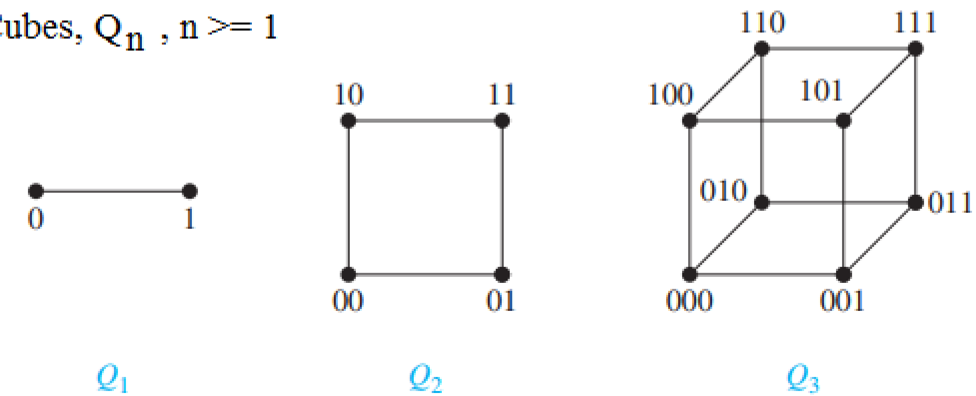
Some simple graphs :

Wheels, W_n , $n >= 3$



The Wheels W_3, W_4, W_5, and W_6.

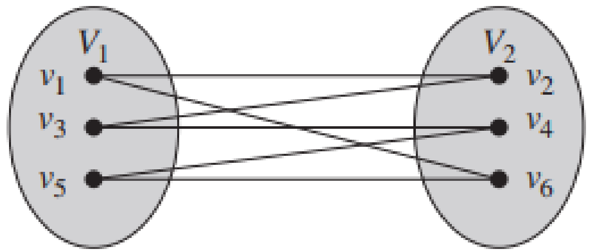
Cubes, Q_n , $n >= 1$



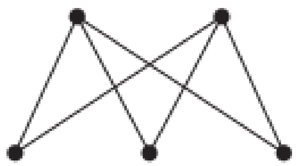
The n-cube Q_n, $n = 1, 2, 3$.

Some simple graphs :

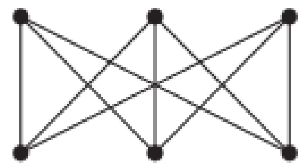
Bipartite graph



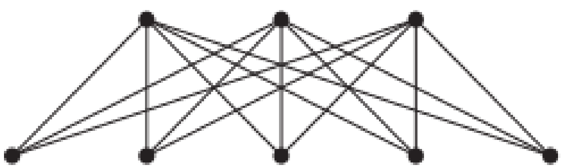
Complete bipartite graph



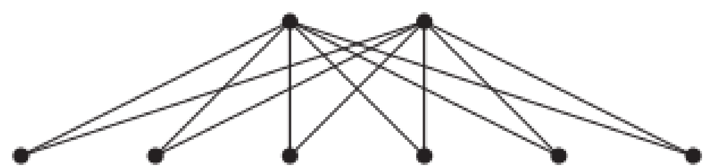
$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{3,5}$



$K_{2,6}$

Tài liệu tham khảo:

1. Discrete Mathematics , Richard Johnsonbaugh

2. Algorithms, Thomas h. Cormen

3. Toán Rời Rạc Nâng Cao, Trần Ngọc Danh, ĐHQG TP HCM

4. Lý Thuyết Đồ Thị, Đặng Trường Sơn, Lê văn Vinh, ĐHSP Kỹ Thuật TP HCM