

BÀI TẬP CHƯƠNG 7

Bài 7.1. Tính các tích phân sau

$$1. \int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x}} dx$$

$$2. \int \frac{x}{4+x^4} dx$$

$$3. \int \cos x e^{\sin x} dx$$

$$4. \int 1 + \cot x^4 \csc^2 x dx$$

$$5. \int \frac{x^3 - x}{x^4 - 2x^2 + 3} dx$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$7. \int \frac{dx}{a + be^{2x}}$$

$$8. \int \frac{x dx}{\sqrt{4x^2 + 1}}$$

$$9. \int e^{-4x} \sin 5x dx$$

$$10. \int \ln^3 x dx$$

$$11. \int \sec^3 \left(\frac{x}{2} \right) dx$$

$$12. \int \sin^4 x dx$$

$$13. \int \frac{dx}{9x^2 + 6x + 1}$$

$$14. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$$

$$15. \int \frac{dx}{x \sqrt{1 - 9x^2}}$$

$$16. \int \frac{dx}{x^{1/2} + x^{1/4}}$$

$$17. \int \frac{e^x dx}{1 + e^{x/2}}$$

$$18. \int \frac{18 \tan^2 t \sec^2 t}{2 + \tan^3 t} dt$$

$$19. \int \frac{4dx}{x^{1/3} + 2x^{1/2}}$$

$$20. \int x \tan^{-1} x dx$$

$$21. \int e^{-3x} \cos 4x dx$$

$$22. \int x^2 \ln x dx$$

$$23. \int x + \sin x^2 dx$$

$$24. \int \sin \ln x dx$$

$$25. \int x \sin x \cos x dx$$

$$26. \int \ln x^2 + 1 dx$$

$$27. \int \sin \sqrt{x} dx$$

$$28. \int \frac{xe^{-x}}{x-1} dx$$

$$29. \int \frac{\ln \sin x}{\tan x} dx$$

$$30. \int [\sin 2x \ln \cos x] dx$$

$$31. \int \frac{\ln x \sin \ln x}{x} dx$$

$$32. \int [\sin x \ln 2 + \cos x] dx$$

$$33. \int e^{2x} \sin e^x dx$$

$$34. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$$

$$35. \int \frac{2x-1 e^{2x}}{x^2} dx$$

$$36. \int \cos^3 x dx$$

$$37. \int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$38. \int \sqrt{\cos t} \sin t dt$$

$$39. \int \frac{\cos x}{1 + 3 \sin x} dx$$

$$40. \int e^{\cos x} \sin x dx$$

$$41. \int \cos^2 2t dt$$

$$42. \int \sin^2 x \cos^2 x dx$$

$$43. \int \tan 2\theta d\theta$$

$$44. \int \sec \frac{x}{2} dx$$

$$45. \int \tan^3 x \sec^4 x dx$$

$$46. \int \sec^5 x \tan x dx$$

$$47. \int \tan^2 x + \sec^2 x dx$$

$$48. \int \sin x + \cos x^2 dx$$

$$49. \int \tan^2 u \sec u du$$

$$50. \int \sec^4 x dx$$

$$51. \int \sqrt[3]{\tan x \sec^2 x} dx$$

$$52. \int x \sin x^2 \cos x^2 dx$$

$$53. \int x \sec^2 x dx$$

$$54. \int \csc 2\theta d\theta$$

$$55. \int \csc^3 x \cot x dx$$

$$56. \int \csc^2 x \cot^2 x dx$$

$$57. \int \csc^2 x \cos x dx$$

$$58. \int \tan x \csc^3 x dx$$

$$59. \int \frac{\sin^3 u}{\cos^5 u} du$$

$$60. \int \frac{\sec^2 x dx}{\tan^2 x + \sec^2 x}$$

$$61. \int \sin 3x \sin 5x dx$$

$$62. \int \cos \frac{x}{2} \sin 2x dx$$

$$63. \int \sin^2 3x \cos 4x dx$$

$$64. \int \cos 7x \cos -3x \sin 4x dx$$

$$65. \int \frac{x+1}{\sqrt{4+x^2}} dx$$

$$66. \int \frac{dx}{x\sqrt{7x^2-4}}$$

$$67. \int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

$$68. \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$$

$$69. \int \frac{dx}{9-x+1^2}$$

$$70. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+6}}$$

$$71. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x+3}}$$

$$72. \int \frac{xdx}{9-x^2-\sqrt{9-x^2}}$$

$$73. \int \frac{2x^3+9x-1}{x^2 x^2-1} dx$$

$$74. \int \frac{x^4-x^2+2}{x^2 x-1} dx$$

$$75. \int \frac{x^2+1}{x^2+x-2} dx$$

$$76. \int \frac{dx}{x^3-8}$$

$$77. \int \frac{x^4+1}{x^4-1} dx$$

$$78. \int \frac{x^3+1}{x^3-1} dx$$

$$79. \int \frac{x dx}{x+1^2}$$

$$80. \int \frac{dx}{x x+1 x-2}$$

$$81. \int \frac{x dx}{x+1 x+2^2}$$

$$82. \int \frac{5x+7}{x^2+2x-3} dx$$

$$83. \int \frac{3x^2-2x+4}{x^3-x^2+4x-4} dx$$

$$84. \int \frac{e^x dx}{2e^{2x}-5e^x-3}$$

$$85. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - \sin x - 2}$$

$$86. \int \frac{\tan x dx}{\sec^2 x + 4}$$

$$87. \int \frac{dx}{x^{2/3} - x^{1/2}}$$

$$88. \int \frac{dx}{x^{1/4} - x}$$

$$89. \int \frac{dx}{3 \cos x + 4 \sin x}$$

$$90. \int \frac{dx}{\sin x - \cos x}$$

$$91. \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$$

$$92. \int \frac{dx}{5 \sin x + 4}$$

$$93. \int \frac{dx}{\sec x - \tan x}$$

$$94. \int \frac{dx}{4 \sin x - 3 \cos x - 5}$$

$$95. \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}$$

$$96. \int \frac{dx}{x^3 - \ln x^2 - 1 - \ln x}$$

$$97. \int \frac{dx}{2 \csc x - \cot x + 2}$$

$$98. \int \frac{2x-1}{x-x^2^3} dx$$

$$99. \int \frac{\tan \ln x dx}{x}$$

$$100. \int \frac{\tan \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}}$$

$$101. \int \frac{dx}{1+e^{2x}}$$

$$102. \int \cos^6 x dx$$

$$103. \int \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+4x+2}} dx$$

$$\begin{array}{ll}
 104. \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} & 107. \int \frac{\operatorname{sech}^2 \ln x dx}{x} \\
 105. \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{\sec^2 x - 2}} & 108. \int \frac{\sinh \frac{1}{x} dx}{x^2} \\
 106. \int x \cosh 1 - x^2 dx & 109. \int \coth x dx
 \end{array}$$

Bài 7.2. Tính các tích phân sau (không dùng máy tính).

$$\begin{array}{lll}
 1. \int_1^4 \sqrt{x} \ln x dx & 7. \int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx & 13. \int_{-2}^{2\sqrt{3}} x^3 \sqrt{x^2+4} dx \\
 2. \int_1^e x^3 \ln x dx & 8. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} & 14. \int_0^{\sqrt{5}} x^2 \sqrt{5-x^2} dx \\
 3. \int_1^e \ln x^2 dx & 9. \int_0^{\ln 2} e^t \sqrt{1+e^{2t}} dt & 15. \int_1^2 \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \\
 4. \int_{1/3}^e 3 \ln 3x^2 dx & 10. \int_0^1 \frac{dt}{4t^2+4t+5} & 16. \int_0^1 \frac{t^5 dt}{\sqrt{1+t^{12}}} \\
 5. \int_0^\pi e^{2x} \cos 2x dx & 11. \int_1^2 \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+3}} & 17. \int_0^1 x \operatorname{sech}^2 x^2 dx \\
 6. \int_0^\pi x \sin x + \cos x dx & 12. \int_0^2 \frac{x^3}{3+x^{2/3}} dx & 18. \int_0^{\ln 2} \sinh 3x dx
 \end{array}$$

Bài 7.3. Tìm thể tích của khối tạo bởi bằng cách quay miền được chỉ định ở bên dưới quanh trục Ox.

- Miền dưới đường cong $y = \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^2+9}}$, giữa $x = 0$ và $x = 9$.
- Miền dưới đường cong $y = x \sqrt{1-x^2}$ từ $x = 0$ đến $x = 1$.
- Miền dưới đường cong $y = \ln x$ trên đoạn $[1, e]$.
- Miền dưới đường cong $y = \cos x$, giữa $x = 0$ và $x = \frac{\pi}{2}$.

5. Miền bị chặn bởi $y = \sqrt{x}e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

Bài 7.4. Tìm thể tích của khối tạo bởi bằng cách quay miền được chỉ định ở bên dưới quanh trục Oy.

1. Miền giữa đường cong $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ và $y = \sqrt{x}^{1/3}$ và trục Ox, giữa $x = 1$ và $x = 4$.

2. Miền giữa đường cong $x = \sqrt[4]{4 - y^2}$ và trục Oy, giữa $y = 1$ và $y = 2$.

3. Miền dưới đường cong $y = \sin x + \cos x$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

4. Miền dưới đường cong e^{-x} trên đoạn $[0, 2]$.

5. Miền dưới đường cong $y = \ln x$ trên đoạn $[1, e]$.

6. Miền bị chặn bởi đường cong $y = \sin^2 x$, $x \in [0, \pi]$ và trục Ox.

Bài 7.5. Tìm độ dài của cung sau

1. Cung $y = f(x)$ thỏa phương trình vi phân $xy' = \sqrt{\ln x^2 - x^2}$, giữa $x = \frac{1}{4}$ và $x = \frac{1}{2}$

2. Cung $y = \ln \cos x$ trên đoạn $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Bài 7.6. Tìm diện tích của mặt tạo bởi bằng cách quay cung được chỉ định bên dưới quanh trục Ox.

1. Cung $y = x^2$ trên đoạn $[0, 1]$

2. Đường tròn $x^2 + y^2 = 1$, $b > 1$.

3. Cung $y = \ln x$ từ $x = 2$ đến $x = 3$.

Bài 7.7 Tìm diện tích của mặt tạo bởi bằng cách quay cung $y = x^2$ trên đoạn $[0, 1]$ quanh trục Oy.

Bài 7.8. Sau t giờ làm việc, một công nhân có thể sản xuất $100te^{-0.5t}$ sản phẩm/giờ. Hỏi có bao nhiêu đơn vị sản phẩm một công nhân sản xuất được suốt trong 3 giờ đầu?

Bài 7.9. Sau t giây, một vật di chuyển dọc theo một đường thẳng với vận tốc $te^{-t/2}$ mét/giây. Hãy biểu diễn vị trí của vật như một hàm số theo thời gian.

Bài 7.10. Sau t tuần, đóng góp cho chiến dịch gây quỹ địa phương có tốc độ $2000te^{-0.2t}$ đôla/tuần. Hỏi có bao nhiêu tiền được đóng góp trong suốt 5 tuần đầu tiên?

Bài 7.11.

1. Tìm hàm $y = f(x)$ mà đồ thị của nó đi qua điểm $(0, 1)$ và có tính chất đường pháp tuyến tại mỗi điểm (x, y) trên đồ thị có hệ số góc là $\frac{\sec x}{xy}$.
2. Tìm hàm $y = f(x)$ mà đồ thị của nó đi qua điểm $(1, 1)$ và có tính chất tại mỗi điểm (x, y) trên đồ thị, hệ số góc của tiếp tuyến là $y \tan^{-1} x$.

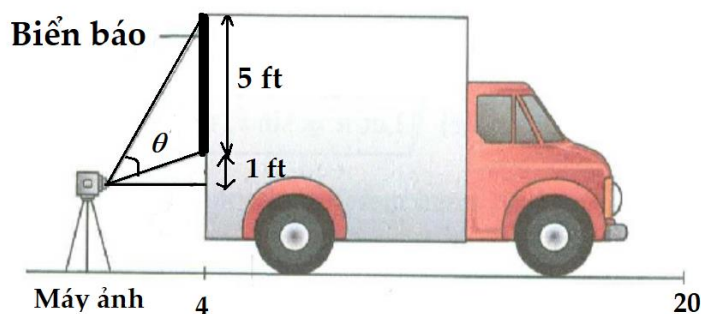
Bài 7.12. Giả sử biết rằng $f(0) = 3$ và $\int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)] \sin x \, dx = 0$. Tìm $f(\pi)$.

Bài 7.13. Trong vật lý, người ta biết rằng độ ồn L của một âm thanh có mối liên hệ với cường độ I được thể hiện qua phương trình $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$ (decibel), với $I_0 = 10^{-12}$ (watt/m²) là ngưỡng nghe được (tức là cường độ nhỏ nhất có thể nghe được). Giá trị trung bình của L là bao nhiêu khi cường độ của một tivi trong khoảng giữa I_0 và $I_1 = 3 \cdot 10^{-5}$ watt/m²?

Bài 7.14. Vì một tên lửa đốt nhiên liệu khi bay, nên khối lượng của nó giảm theo thời gian, và ảnh hưởng đến vận tốc của nó. Người ta thấy rằng vận tốc $v(t)$ của tên lửa tại thời điểm t trong quá trình bay của nó có công thức $v(t) = -r \ln \frac{w - kt}{w} - gt$, với w là trọng lượng ban đầu của tên lửa (tính cả nhiên liệu) và r, k tương ứng là tốc độ phóng và hệ số tiêu thụ nhiên liệu (r, k là các hằng số). Lấy giá trị của gia tốc trọng trường là $g = 32$ ft/s². Giả sử $w = 30000$ lb, $r = 8000$ ft/s, $k = 200$ lb/s. Hỏi độ cao của tên lửa là bao nhiêu sau 2 phút (120 giây)?

Bài 7.15. Một nhiếp ảnh gia chụp một tấm hình của một biển báo thông minh ở đuôi một xe tải. Biển báo cao 5 ft và cạnh thấp nhất trên máy ảnh 1 ft. Lúc đầu xe tải cách

nhấp ảnh gia 4 ft, nhưng sau đó nó di chuyển. Hỏi giá trị trung bình của góc θ (hình vẽ) khi xe tải di chuyển cách nhiếp ảnh gia từ 4 ft đến 20 ft?



Bài 7.16. Nếu n mole khí lý tưởng đang tăng ở nhiệt độ không đổi T , thì áp suất p và thể tích V của khối khí thỏa phương trình $pV = nRT$, với R là hằng số. Người ta chỉ ra rằng công thực hiện bởi khối khí này làm tăng từ thể tích V_1 đến thể tích V là

$$W = nRT \ln \frac{V}{V_1}$$

Giá trị trung bình của công là bao nhiêu khi thể tích tăng từ V_1 đến $V_2 = 10V_1$?

Bài 7.17. Một chất điểm di chuyển dọc theo trục Ox , có gia tốc tại thời điểm t là $a(t) = \sin^2 t$. Tổng quãng đường chất điểm đi được là bao nhiêu trong khoảng thời gian $[0, \pi]$ nếu vận tốc ban đầu của nó là $v(0) = 2$ (mét/giây)?

Bài 7.18. Tìm trọng tâm của miền sau

1. Miền bị chặn bởi các đường cong $y = e^x$, $y = e^{-x}$ và đường thẳng $x = 1$.
2. Miền trong góc phần tư thứ nhất bị chặn bởi $y = \sin x$, $y = \cos x$ và trục Oy .
3. Miền bị chặn bởi đường cong $y = \cos^2 x$, trục Ox và các đường thẳng $x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{\pi}{3}$.

Bài 7.19

1. Tìm diện tích của miền bị chặn bởi đường cong $y = \frac{1}{6 - 5x + x^2}$ và các đường thẳng

$$x = \frac{4}{3}, x = \frac{7}{4}, y = 0.$$

2. Tìm diện tích dưới đường cong $y = \frac{1}{x^2 + 5x + 4}$ giữa $x = 0$ và $x = 3$.

Bài 7.20. Tìm thể tích của khối tạo bởi khi đường cong $y = \frac{1}{x^2 + 5x + 4}$, $0 \leq x \leq 1$ quay quanh đường thẳng $x = -1$.

Bài 7.21. Giải các phương trình vi phân sau

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $12 \frac{dy}{dx} = \sqrt{5x + 1}$ | 6. $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2$ | 10. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = \frac{\ln x}{x}$ |
| 2. $\frac{dP}{dx} = 0.02P$ | 7. $x \frac{dy}{dx} + 2y = xe^{x^3}$ | 11. $\frac{dy}{dx} + \tan x \cdot y = \sin x$ |
| 3. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = x$ | 8. $\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2x + 1}{x} \right) y = e^{-2x}$ | 12. $\frac{dy}{dx} + \sec x \cdot y = \sin 2x$ |
| 4. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = \sqrt{x} + 1$ | 9. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \tan^{-1} x$ | |
| 5. $x^4 \frac{dy}{dx} + 2x^3 y = 5$ | | |

Bài 7.22. Tìm nghiệm đặc biệt của phương trình vi phân sau:

- | | |
|--|---|
| 1. $\frac{dy}{dx} = x^2 y^{-2}$, với $y = 5$ khi $x = 0$. | 7. $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1 + x^2} = \sin x$, với $y = 1$ khi $x = 0$. |
| 2. $x^2 \frac{dy}{dx} = y^{-2}$, với $y = 2$ khi $x = 1$. | 8. $\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{1 + x^2} = \cos x$, với $y = 0$ khi $x = 0$. |
| 3. $x \frac{dy}{dx} - y\sqrt{x} = 0$, với $y = 1$ khi $x = 1$. | 9. $x \frac{dy}{dx} - 2y = 2x^3$, $x > 0$, với $y = 0$ khi $x = 3$. |
| 4. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1 + x^2}$, với $y = 2$ khi $x = -1$ | 10. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2 e^{x^2}$, $x > 0$, với $y = 0$ khi $x = 2$. |
| 5. $\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{1 + x} = x(1 + x)$, $x > -1$, với $y = -1$ khi $x = 0$. | |
| 6. $\frac{dy}{dx} - \frac{xy}{1 - x} = x(1 + x)$, $x < 1$, với $y = 5$ khi $x = 0$. | |

Bài 7.23. Năm 2010, tổng sản phẩm quốc nội (GDP) của Mỹ là 14.26 nghìn tỷ đôla. Giả sử tốc độ tăng GDP từ 2009 đến 2010 là 1.8%. Hãy dự đoán GDP năm 2020.

Bài 7.24. Theo cục điều tra dân số Mỹ, số người Mỹ kết hôn năm 2005 là 2230000 người. Tốc độ kết hôn là 0.71%. Hỏi dự đoán có bao nhiêu người kết hôn được ghi nhận vào năm 2010 nếu tốc độ kết hôn là hằng số ?

Bài 7.25. Một thùng chứa 10 pound (lb) muối hòa tan trong 30 gallon (gal) nước. Giả sử có 2 gal dung dịch chứa 1 lb muối trong mỗi gal chảy vào thùng mỗi phút, và dung dịch sau khi trộn đều được cho chảy ra với cùng tốc độ (2gal/phút).

- Tìm lượng muối trong thùng tại thời điểm t .
- Bao lâu thì trong thùng còn 15 lb muối ?

Bài 7.26. Trong bài 7.25, giả sử thùng có thể tích 100 gal và tốc độ chảy ra là 1 gal/phút.

- Sau bao lâu thì thùng đầy ?
- Có bao nhiêu muối khi thùng đầy ?

Bài 7.27. Tốc độ thuốc hấp thu vào máu được cho bởi $\frac{db}{dt} = \alpha - \beta b$, với $b(t)$ là nồng độ thuốc trong mạch máu tại thời điểm t . Hỏi $b(t)$ tiến đến bao nhiêu khi thời gian $t \rightarrow \infty$? Khi nào $b(t)$ bằng một nửa giá trị của giới hạn đó? Giả sử rằng $b(0) = 0$.

Bài 7.28. Một mạch RL có một điện trở R (ohm), cuộn cảm L (henry) và sức điện động E (volt) (R, L, E là các hằng số). Giả sử không có dòng điện qua mạch tại thời điểm $t = 0$. Nếu L tăng gấp đôi, E và R không đổi, thì điều này có ảnh hưởng gì đến cường độ dòng điện “dài hạn” trong mạch điện (tức là cường độ dòng điện khi $t \rightarrow \infty$)?

Bài 7.29. Năm 2000 có 31.1 triệu người Hispanic ở Mỹ. Nếu tốc độ tăng dân số tỷ lệ với dân số hiện tại, thì có bao nhiêu người Hispanic được ghi nhận vào năm 2010 ? Biết có 15.5 triệu người Hispanic năm 1990.

Bài 7.30. Số lượng động vật ở đảo Catalina bị giới hạn bởi lượng thức ăn sẵn có. Nghiên cứu chỉ ra rằng có 1800 con vật năm 2005, và 2000 con vật năm 2011 và 5000 con vật có thể sống trong điều kiện ở đảo (số động vật trên đảo không vượt quá 5000). Hãy sử dụng mô hình logistic để dự đoán số con vật vào năm 2030.

Bài 7.31. Năm 1986, thảm họa hạt nhân Chernobyl ở Xô Viết đã làm ô nhiễm bầu khí quyển. Sự tích tụ của chất phóng xạ trong khí quyển thỏa phương trình vi phân

$$\frac{dM}{dt} = r \left(\frac{k}{r} - M \right)$$

với M là lượng chất phóng xạ trong không khí tại thời điểm t (đơn vị : năm), k là tỉ lệ chất phóng xạ được đưa vào không khí, r là tốc độ phân rã hàng năm của chất phóng xạ. Hãy tìm nghiệm $M(t)$ (tính $M(t)$ theo r và k) từ phương trình vi phân này, biết $M = 0$ khi $t = 0$.

Bài 7.32. Một vật có khối lượng m được thả từ một độ cao lớn và rơi theo đường thẳng. Giả sử chỉ có lực trọng trường mg và lực cản không khí kv tác động lên vật (nhớ rằng $g = -32 \text{ ft/s}^2$).

- a. Theo định luật thứ 2 của Newton

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Hãy giải phương trình vi phân này, giả sử rằng vật có vận tốc $v_0 = 0$ khi $t = 0$.

- b. Tìm quãng đường $s(t)$ của vật rơi tại thời điểm t . Giả sử $s = 0$ khi $t = 0$.
c. Nếu vật có khối lượng $m = 100 \text{ lb}$ và $k = 0.35$ thì bao lâu vật chạm đất từ độ cao thả ban đầu là 10000 ft?

Bài 7.33. Một mạch RL có một điện trở $R = 10 \text{ ohm}$ và một cuộn cảm $L = 5 \text{ henry}$. Hãy tìm cường độ dòng điện $I(t)$ trong mạch tại thời điểm t nếu $I(0) = 0$ và sức điện động

- a. $E = 15 \text{ (volt)}$
b. $E = 5e^{-2t} \sin t \text{ (volt)}$

Bài 7.34. Một mạch RL có một cuộn cảm $L = 3 \text{ henry}$ và một điện trở $R = 6 \text{ ohm}$, với sức điện động $E = 50 \sin 30t$. Giả sử $I(0) = 0$.

- a. Tìm cường độ dòng điện $I(t)$ tại thời điểm t .
b. Cường độ dòng điện ổn định là bao nhiêu? Cường độ dòng điện tức thời là bao nhiêu?

Bài 7.35. Tích phân suy rộng sau hội tụ hay phân kỳ? Nếu tích phân hội tụ thì hãy tìm giá trị của nó.

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$
2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{0.99}}$
3. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{2x-1}$
4. $\int_3^{\infty} \frac{dx}{2x-1}^2$
5. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x}$
6. $\int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3+2}}$
7. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$
8. $\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}}$
9. $\int_0^{\infty} 5xe^{10-x} dx$
10. $\int_1^{\infty} \frac{\ln x dx}{x}$
11. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$
12. $\int_1^{\infty} \ln x dx$
13. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}^2$
14. $\int_{-\infty}^0 \frac{2x dx}{x^2+1}$
15. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$
16. $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{5-x}^2$
17. $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|} dx$
18. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1}$
19. $\int_0^1 \frac{dx}{x^{1/5}}$
20. $\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$
21. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}^{1/2}$
22. $\int_0^2 \frac{dx}{1-x}^2$
23. $\int_0^1 \ln x dx$
24. $\int_0^1 \frac{xdx}{1-x^2}$
25. $\int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\ln x} dx$
26. $\int_{-1}^1 \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$
27. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sec^2 x dx}{1-\tan x}$
28. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{1-2\cos x}}$

Bài 7.36. Tìm diện tích của miền bị chặn giữa trục Ox và đường cong $y = \frac{2}{x-4}^3$, với

- a. $x \geq 6$
- b. $x \leq 2$

Bài 7.37. Giả sử một giếng dầu sản xuất $P(t)$ ngàn barrel dầu thô mỗi tháng theo công thức sau $P(t) = 100e^{-0.02t} - 100e^{-0.1t}$, với t là số tháng giếng dầu đã được khai thác. Hãy tìm tổng lượng dầu có thể sản xuất từ giếng dầu này.

Bài 7.38. Tìm tất cả các giá trị của p sao cho tích phân sau hội tụ, và tìm giá trị của tích phân khi nó hội tụ.

- a. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}^p$

b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

c. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x^p}$

Bài 7.39. Cách tính tích phân sau đúng hay sai? Tại sao? Nếu sai hãy giải lại cho đúng.

a. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x} \Big|_{-1}^1 = -[1 - -1] = -2$

b. $\int_1^{\infty} x - 1 e^{-x} dx = \int_1^{\infty} \frac{x-1}{e^x} dx \stackrel{L'H}{=} \int_1^{\infty} \frac{1}{e^x} dx$ (dùng qui tắc l'hôpital)

$$= \frac{1}{e}$$

Bài 7.40. Tìm $\int_0^2 f(x) dx$, với

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt[4]{x-1^3}}, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Bài 7.41. Tính giá trị các hàm hyperbolic và hàm ngược của hàm hyperbolic

- | | | |
|----------------------------|------------------------|-----------------------------|
| 1. $\sinh \ln 2$ | 4. $\tanh^{-1} -1$ | 7. $\cosh^{-1} \frac{5}{3}$ |
| 2. $\cosh 3$ | 5. $\coth \frac{5}{4}$ | 8. $\tanh^{-1} 0$ |
| 3. $\operatorname{sech} 1$ | 6. $\sinh^{-1} 0$ | 9. $\coth^{-1} -3$ |

Bài 7.42. Tìm $\frac{dy}{dx}$

- | | | |
|--------------------------|----------------------------|---|
| 1. $y = \sinh x^{-1}$ | 4. $y = \sinh^{-1} \tan x$ | 6. $y = \operatorname{sech} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$ |
| 2. $y = \cosh 2x^2 + 3x$ | 5. $y = \tanh^{-1} \sin x$ | |
| 3. $y = \cosh^{-1} x^2$ | | |

7. $y = x \cosh^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1}$ 8. $x \cosh y = y \sinh x + 5$

Bài 7.43. Chứng minh

- a. $\tanh x + y = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$
- b. $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$
- c. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
- d. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, với $x = a \cosh t$, $y = b \sinh t$ và a, b là các hằng số dương, t là một số.

Bài 7.44. Tìm thể tích V của khối được tạo bởi khi quay miền bị chặn bởi các đường cong $y = \sinh x$, $y = \cosh x$, trục Oy và đường thẳng $x = c$ $c > 0$ quanh trục Ox. Tìm c để thể tích $V = 1$.

Bài 7.45. Tìm thể tích của khối được tạo bởi bằng cách quay miền bị chặn bởi đường cong $y = \tanh x$ trên đoạn $[0, 1]$ quanh trục Ox.

Bài 7.46. Tìm độ dài của cung $y = a \cosh \frac{x}{a}$ giữa $x = -a$ và $x = a$.