

HƯỚNG DẪN MỘT SỐ BÀI TẬP

1. Xét tính liên tục của hàm số

Dạng 1

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \neq a \\ f_2(x) & \text{khi } x = a \end{cases}$$

Cách giải:

- Tính $f(a) = f_2(a)$
- Tính $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$
- f liên tục tại $x = a$ khi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Dạng 2

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{khi } x \geq a \\ f_2(x) & \text{khi } x < a \end{cases}$$

Cách giải

- Tính $f(a) = f_1(a)$ (nhánh có dấu “=”)
- Tính $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f_1(x)$ (nhánh với điều kiện $x > a$)
- Tính $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f_2(x)$ (nhánh với điều kiện $x < a$)
- f liên tục tại $x = a$ khi $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

2. Một số ví dụ

Bài tập 1. Cho $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{khi } x \leq 0 \\ 2ax + b & \text{khi } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Tìm a, b để $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Giải. Khi $x \neq 0$ và $x \neq 1$ hàm số f là hàm sơ cấp nên liên tục. Vậy $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} khi liên tục tại $x = 0$ và $x = 1$.

Tại $x = 0$, ta có

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2ax + b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)^3 = -1$$

$$f(0) = -1$$

Vậy f liên tục tại $x = 0$ khi $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, suy ra $b = -1$.

Tại $x = 1$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (2ax + b) = 2a + b \\ f(1) &= 1\end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại $x = 1$ khi $2a + b = 1$.

Khi đó, f liên tục tại $x = 0$ và $x = 1$ khi $a = 1, b = -1$. □

Bài tập 2. Cho $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{9-x} & \text{khi } x < 0 \\ \sin(bx) + 1 & \text{khi } 0 \leq x \leq 3. \\ \sqrt{x-2} & \text{khi } x > 3 \end{cases}$. Tìm a, b để $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

Giải. Hàm số f liên tục trên \mathbb{R} khi liên tục tại $x = 0$ và $x = 3$.

Tại $x = 0$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin bx + 1) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} a\sqrt{9-x} = 3a \\ f(0) &= 1\end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại $x = 0$ khi $3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Tại $x = 3$, ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (\sin bx + 1) = \sin(3b) + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-2} = 1 \\ f(3) &= 1\end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại $x = 3$ khi $\sin(3b) + 1 = 1$ hay $b = \frac{k\pi}{3}$. □