HƯỚNG DẪN BÀI TẬP HÀM LIÊN TỤC - KHẢ VI

Dạng toán 1

Cho $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \neq a \\ h(x) & \text{khi } x = a \end{cases}$. Tính $f'(x)$.

Cách giải

- Nếu $x \neq a$ thì $f(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)$ (đạo hàm bằng công thức)
- Tại $x = a$, để tính $f'(a)$, sử dụng định nghĩa đạo hàm (vì $x = a$ là điểm mà hàm số phân nhánh)

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - h(a)}{x - a}$$

Ví dụ 0.1

Cho $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(4x)}{3x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $g'(x)$

Lời giải.

Khi $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{\sin^2 4x}{3x}$ nên $g'(x) = \dfrac{12x \sin 8x - 3\sin^2 4x}{9x^2}$.

Tại $x = 0$,

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{3x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 8x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{32\cos 8x}{6} = \frac{16}{3}$$

□

Ví dụ 0.2(HKI-2017-2018)

Cho $h(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{x+1} - e}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ e & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$. Tính $h'(0)$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có

$$h'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{x+1}-e}{x} - e}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1} - e - ex}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1} - e}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x+1}}{2} = \frac{e}{2}$$

□

Dạng toán 2

Cho $f(x)=\begin{cases} g(x) & \text{khi } x \geq a \\ h(x) & \text{khi } x < a \end{cases}$. Tính $f'(x)$

Cách giải:

- Khi $x > a$ thì $f(x) = g(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x)$ (đạo hàm bằng công thức).
- Nếu $x < a$ thì $f(x) = h(x) \Rightarrow f'(x) = h'(x)$ (đạo hàm bằng công thức).
- Tại $x = a$

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$
$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^-} \frac{h(x)-g(a)}{x-a}$$

Nếu $f'_+(a) = f'_-(a) = L$ thì $f'(a) = L$. Ngược lại, không tồn tại $f'(a)$.

Ví dụ 0.3

Tính đạo hàm của $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{nếu } x \leq 0 \\ \sin x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$.

Lời giải.

- Với $x > 0$ thì $f(x) = \sin x$ nên $f'(x) = \cos x$.
- Với $x < 0$ thì $f(x) = x^2 + x$ nên $f'(x) = 2x + 1$.
- Tại $x = 0$, theo định nghĩa đạo hàm ta có

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

và

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x+1) = 1$$

Vậy $f'(0) = 1$ vì $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$.

□

Ví dụ 0.4 (Đề minh họa 2018)

Tính đạo hàm của hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{3x}+x-1}{4x} & \text{khi } x < 0 \\ \cos x & \text{khi } x \geqslant 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

Lời giải.

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{\frac{e^{3x}+x-1}{4x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{3x}-3x-1}{4x^2}\\
&= \lim_{x\to 0-} \frac{3e^{3x}-3}{8x} = \lim_{x\to 0-} \frac{9e^{3x}}{8} = \frac{9}{8}
\end{aligned}
$$

Vì $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ nên không tồn tại đạo hàm tại 0. □

Dạng toán 3

Tìm điều kiện để hàm số khả vi tại một điểm hay một khoảng cho trước

Phương pháp:

- Hàm số f khả vi tại $x = a$ khi và chỉ khi nó có đạo hàm tại a.
- Nếu f khả vi tại $x = a$ thì f cũng liên tục tại $x = a$.
- Nếu f không liên tục tại $x = a$ thì f không khả vi tại a

Ví dụ 0.5(HK-UTE)

Xét tính khả vi của hàm số $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{nếu } x < 0\\ -x^2+2x+1 & \text{nếu } x \geqslant 0 \end{cases}$ tại $x = 0$

Lời giải. Ta có $f(0) = 1$

$$
\begin{aligned}
f'_+(0) &= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0+} (-x+2) = 2\\
f'_-(0) &= \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to 0-} 2e^{2x} = 2
\end{aligned}
$$

Vì $f'_+(0) = f'_-(0)$ nên hàm số có đạo hàm tại $x = 0$. Do đó f khả vi tại 0. □

Ví dụ 0.6(HKI-2016-2017)

Tìm m để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - m}{x} & \text{nếu } x \neq 0\\ 1 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$ khả vi tại $x = 0$

Lời giải. Hàm f khả vi tại $x = 0$ khi và chỉ khi f có đạo hàm tại $x = 0$.
Xét

$$
L = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x-m}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-m-x}{x^2}
$$

- Nếu $m \neq 1$ thì $L = \infty$.
- Nếu $m = 1$ thì

$$\begin{aligned} L = f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy với $m = 1$ thì f khả vi tại $x = 0$.

□

Ví dụ 0.7 (Stewart7e-p.75)

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{nếu } x \leqslant 2 \\ mx + b & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$. Tìm các giá trị của m và b để f khả vi tại mọi điểm.

Lời giải.

Khi $x > 2$ thì $f(x) = mx + b$ nên $f'(x) = m$.

Khi $x < 2$ thì $f(x) = x^2$ nên $f'(x) = 2x$.

Vậy f khả vi khi $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. Để f khả vi tại mọi điểm thì f phải khả vi tại $x = 2$.

Nếu f khả vi tại $x = 2$ thì f phải liên tục tại $x = 2$, tức là

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2)$$

với

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (mx + b) = 2m + b \\ &\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (x^2) = 4 \\ &f(2) = 4 \end{aligned}$$

Vậy f liên tục tại $x = 2$ khi

$$2m + b = 4 \Rightarrow \boxed{b - 4 = -2m} \tag{1}$$

Theo định nghĩa đạo hàm, ta có

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{x \to 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} (x + 2) = 4 \\ f'_+(2) &= \lim_{x \to 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{mx + b - 4}{x - 2} \end{aligned}$$

Theo (1) ta có $b - 4 = -2m$ nên

$$f'_+(2) = \lim_{x \to 2^+} \frac{mx - 2m}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{m(x - 2)}{x - 2} = m$$

Do đó, để f khả vi tại $x = 2$ thì f phải có đạo hàm tại $x = 2$, tức là

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Leftrightarrow m = 4 \tag{2}$$

Kết hợp (1) và (2) ta được $\begin{cases} 2m + b = 4 \\ m \quad\quad = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \ \ 4 \\ b = -4 \end{cases}$

Vậy, với $m = 4$ và $b = -4$ thì f khả vi tại mọi điểm. □