

Chương 4

ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM

Nguyễn Minh Hải
nmhaiuns@ gmail.com

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM

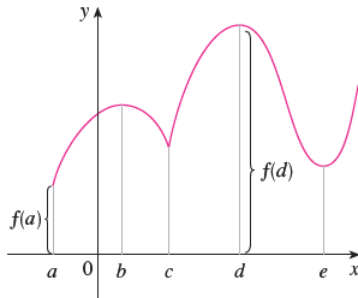
Tháng 01/2021

4.1 Cực trị của hàm liên tục

Định nghĩa 1.1 (Cực trị tuyệt đối)

Cho hàm f xác định trên D . Khi đó $f(c)$ được gọi là

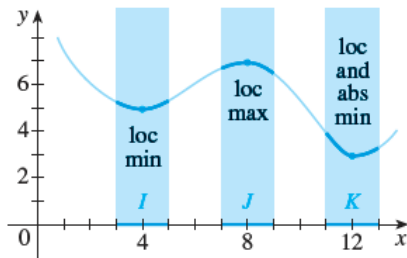
- giá trị cực đại tuyệt đối của f trên D nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc D .
- giá trị cực tiểu tuyệt đối của f trên D nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc D .



Định nghĩa 1.2 (Cực trị địa phương)

Cho c là một số thuộc miền xác định D của hàm số f . Giá trị $f(c)$ là

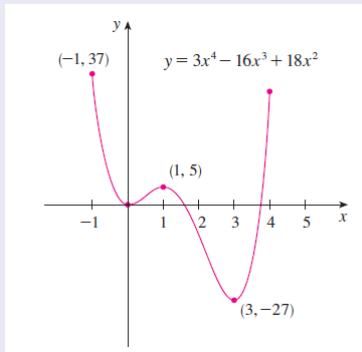
- giá trị cực đại địa phương của f nếu $f(c) \geq f(x)$ khi x thuộc khoảng mở chứa c .
- giá trị cực tiểu địa phương của f nếu $f(c) \leq f(x)$ khi x thuộc khoảng mở chứa c .



Ví dụ 1.1

Đồ thị hàm số $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$, $-1 \leq x \leq 4$ có:

- $f(1) = 5$ là cực đại địa phương.
- $f(-1) = 37$ là cực đại tuyệt đối.
- $f(0) = 0$ và $f(3) = -27$ là cực tiểu địa phương.



Định lý 1.1 (Định lý về cực trị tuyệt đối)

Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ thì f có cả cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối trên $[a, b]$.

Định nghĩa 1.3 (Điểm tới hạn)

Điểm tới hạn của hàm số f là một số c nằm trong miền xác định của f sao cho $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không tồn tại.

Ví dụ 1.2

Tìm các điểm tới hạn của .

1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

2) $f(x) = x - 3x^{1/3}$

Phương pháp đoạn đóng

Để tìm các giá trị cực đại tuyệt đối và cực tiểu tuyệt đối của hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, ta thực hiện các bước:

- 1 Tìm tất cả các điểm tới hạn của f trên (a, b) và tính giá trị của f tại những điểm đó.
- 2 Tìm giá trị của f tại các điểm mút của khoảng.
- 3 Giá trị lớn nhất trong các giá trị ở Bước 1, Bước 2 là giá trị cực đại tuyệt đối; giá trị nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là giá trị cực tiểu tuyệt đối.

Ví dụ 1.3

Tìm giá trị cực đại tuyệt đối và giá trị cực tiểu tuyệt đối của $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 8$ trên $[-1, 2]$.

Ví dụ 1.4

Tìm giá trị cực đại tuyệt đối và giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(x) = x^{2/3}(5 - x)$ trên $[-1, 4]$.

Ví dụ 1.5

Tìm cực trị tuyệt đối của $f(x) = \begin{cases} 9 - 4x & \text{nếu } x < 1 \\ -x^2 + 6x & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$ trên $[0, 4]$

Ví dụ 1.6

Tìm giá trị cực đại tuyệt đối và giá trị cực tiểu tuyệt đối $f(x) = 2 \cos x - x$ trên $[0, 2\pi]$.

Định nghĩa 1.4

Cho f là hàm khả vi trên (a, b) . Khi đó

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f đồng biến trên (a, b) .
- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a, b)$ thì f nghịch biến trên (a, b) .

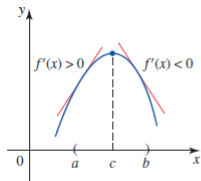
Ví dụ 1.7

Tìm khoảng đồng biến, nghịch biến của $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

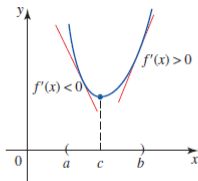
Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 1

Giả sử c là một điểm tới hạn của một hàm liên tục f . Khi đó

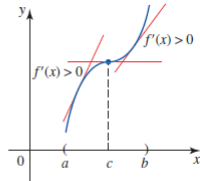
- 1 Nếu f' đổi dấu từ dương sang âm tại c thì f có cực đại địa phương tại c .
- 2 Nếu f' đổi dấu từ âm sang dương tại c thì f có cực tiểu địa phương tại c .
- 3 Nếu f' không đổi dấu tại c thì f không có cực đại hay cực tiểu địa phương tại c .



(a) Relative maximum at c



(b) Relative minimum at c



(c) No relative extrema at c

Ví dụ 1.8

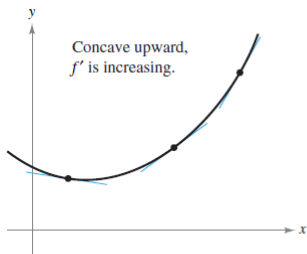
Tìm cực trị địa phương của $f(x) = x^4 - 4x^3 + 12$

Ví dụ 1.9

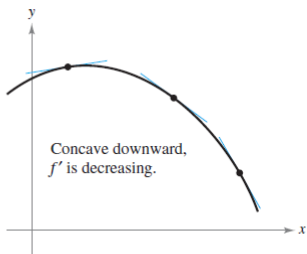
Tìm cực trị địa phương của $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$

Định nghĩa 1.5

- Nếu đồ thị hàm số nằm trên tất cả các tiếp tuyến trong (a, b) thì hàm f gọi là **lõm trên** (concave up) trong (a, b) .
- Nếu đồ thị hàm số nằm dưới tất cả các tiếp tuyến trong (a, b) thì hàm f gọi là **lõm dưới** (concave down) trong (a, b) .



(a) The graph of f lies above its tangent lines.



(b) The graph of f lies below its tangent lines.

Tiêu chuẩn lõm

- Nếu $f''(x) > 0$ với mọi x thuộc khoảng I thì f **lõm trên** (concave up) trên I .
- Nếu $f''(x) < 0$ với mọi x thuộc khoảng I thì f **lõm dưới** (concave down) trên I .
- Nếu $f''(c) = 0$ và f'' đổi dấu qua c thì c gọi là điểm uốn của f .

Ví dụ 1.10

Tìm khoảng lõm trên, lõm dưới và điểm uốn của $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

Cho hàm f thỏa $f'(c) = 0$ và có đạo hàm cấp 2 trong khoảng mở chứa c . Khi đó

- Nếu $f''(c) > 0$ thì f có một cực tiểu địa phương tại c .
- Nếu $f''(c) < 0$ thì f có một cực đại địa phương tại c .
- Nếu $f''(c) = 0$ thì chưa kết luận được.

Ví dụ 1.11

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = -3x^5 + 5x^3$.

Phác họa đường cong với tiệm cận

Tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = c$ là **tiệm cận đứng** của đồ thị hàm f nếu

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \infty \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty$$

Tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = L$ là **tiệm cận ngang** của đồ thị hàm f nếu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Ví dụ 1.12

Tìm các đường tiệm cận của $f(x) = \frac{3x - 5}{x + 2}$

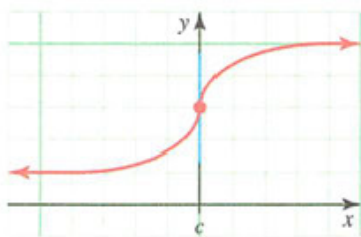
Ví dụ 1.13

Tìm các đường tiệm cận của $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{x^2+x-2}$

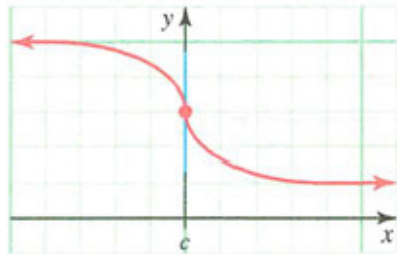
Ví dụ 1.14

(Đề HKI-2016-2017) Tìm m để $g(x) = \frac{x - m \sin x}{1 - \sqrt{1+x^2}}$ không có tiệm cận đứng.

Tiếp tuyến thẳng đứng:

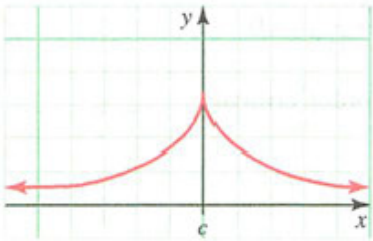


$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = +\infty \end{cases}$$

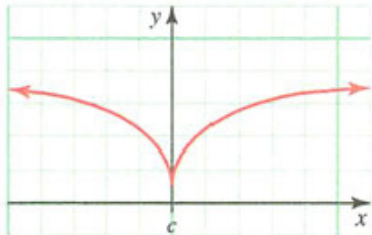


$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = -\infty \end{cases}$$

Đỉnh:



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = +\infty \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = -\infty \end{cases}$$

Ví dụ 1.15

Xác định tiếp tuyến đứng và đỉnh của đồ thị hàm số $f(x) = x^{2/3}(2x + 5)$

Phương pháp giải

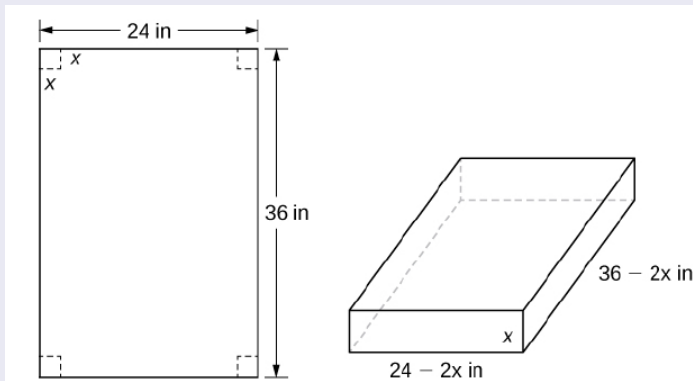
- 1 Vẽ hình và đặt tên các đại lượng liên quan đến bài toán.
- 2 Tập trung vào đại lượng cần tối ưu, gọi tên và tìm một công thức cho nó.
- 3 Sử dụng điều kiện của bài toán loại bỏ các biến khác để biểu diễn đại lượng cần tối ưu theo một biến duy nhất.
- 4 Tìm miền xác định thực tế dựa vào ràng buộc vật lý của bài toán.
- 5 Sử dụng phương pháp tính toán để đạt được giá trị tối ưu theo yêu cầu.

Ví dụ 1.16

Một khu vườn hình chữ nhật sẽ được xây dựng bằng cách sử dụng một bức tường đá làm một cạnh của khu vườn và hàng rào dây thép cho 3 cạnh còn lại. Một người có 100 ft dây thép, xác định các kích thước để tạo ra một khu vườn có diện tích tối đa. Diện tích tối đa đó là bao nhiêu?

Ví dụ 1.17

Một cái hộp không có nắp được làm từ bìa cứng có kích thước 24×36 (in) bằng cách loại bỏ một hình vuông ở mỗi góc và gấp các nắp ở mỗi bên lại. Nên cắt các hình vuông có kích thước bao nhiêu ở mỗi góc để được hộp có thể tích lớn nhất?



Ví dụ 1.18

Một hòn đảo cách điểm gần nhất của nó 2 dặm về phía Bắc dọc theo bờ biển. Một du khách đang ở trong một cabin trên bờ biển cách điểm đó 6 dặm về phía Tây. Du khách có kế hoạch đi từ cabin đến đảo. Giả sử người này chạy với tốc độ 8 dặm/giờ và bơi với tốc độ 3 dặm/giờ. Người này nên chạy bao xa trước khi bơi để thời gian đến đảo ngắn nhất?

