Nguyễn Quang Ngọc

Chương 4. Đồ thị con , đẳng cấu

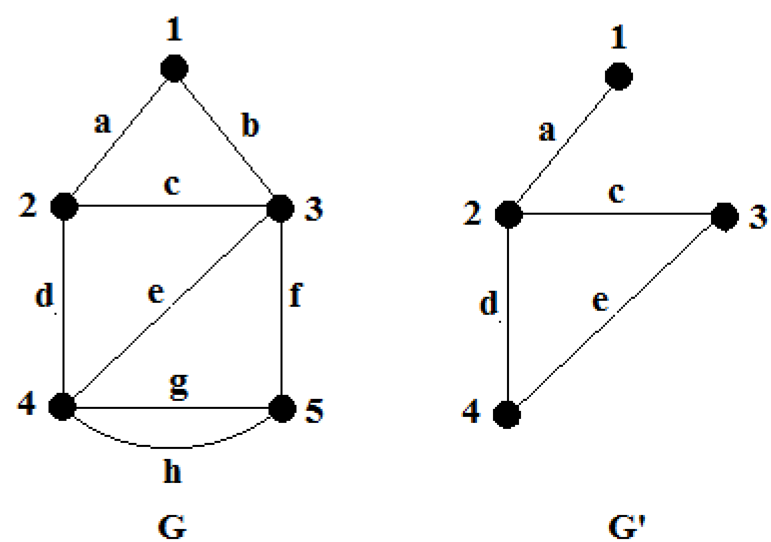
4.1 Đồ thị con :

4.1.2 Định nghĩa : Cho G=(V, E) và G'=(V', E') là hai đồ thị cùng có hướng hoặc cùng không hướng. G' được nói là đồ thị con của G, ký hiệu G' ≤ G , nếu

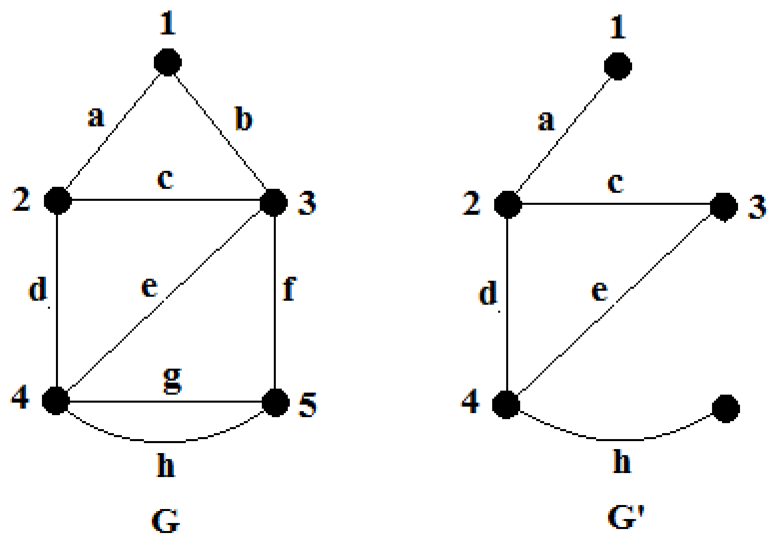
a) V' $\subseteq$ V và E' $\subseteq$ E.

b) $\forall$ e' = (v' , w') $\in$ E'

=> v', w' $\in$ V'.

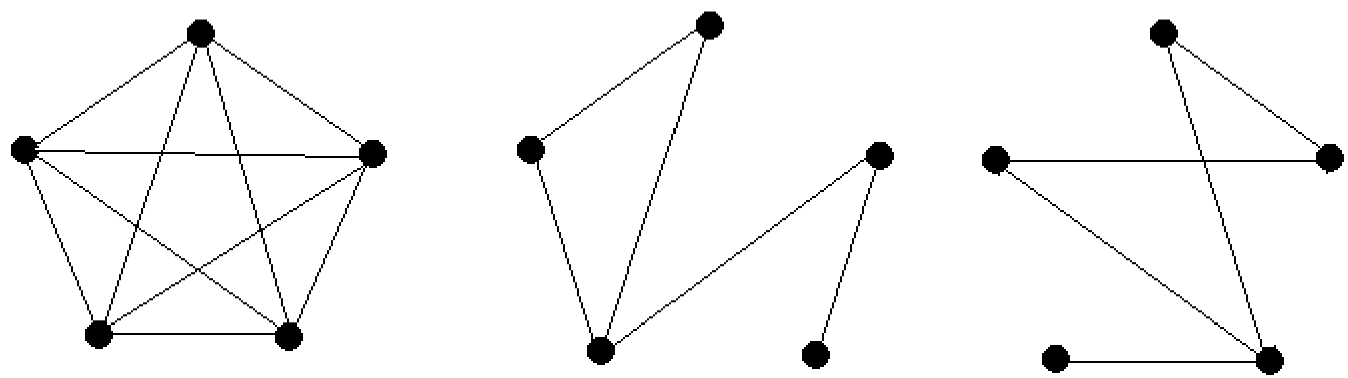


4.1.3 Định nghĩa : Cho G'=(V', E') $\leq$ G=(V, E). G' được nói là *đồ thị khung* của G, nếu V'=V.



4.1.4 Định nghĩa : Cho K_n=(V, E_n) là đồ thị , *được gọi là đồ thị đầy đủ*, có n đỉnh, không có cạnh song song, không có vòng, mỗi đỉnh kề với n-1 đỉnh còn lại của đồ thị.

4.1.5 Định nghĩa : Cho K_n=(V, E_n) và G=(V , E) là đồ thị khung của K_n. Đặt $\overline{G} = (V, \overline{E}\ )$ với $\overline{E}$ = E_n - E, thì $\overline{G}$ được gọi là đồ thị bù của G.



K_n G $\overline{G}$

4.1.5 Bài toán *Instant Insanity (ứng dụng đồ thị con)*:

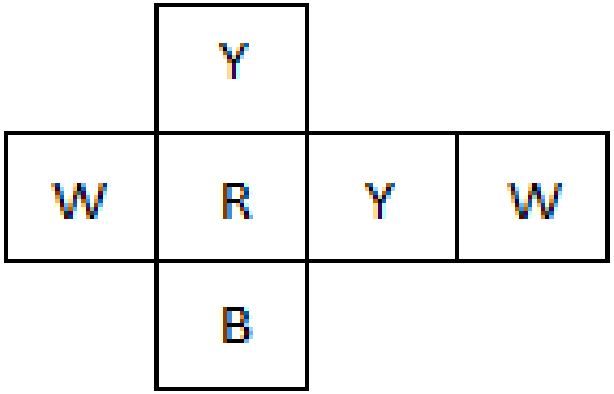
- Cho 4 khối lập phương được đánh số 1, 2, 3, 4.
- Sáu mặt của mỗi khối được tô bằng 4 màu B, R, Y, W.

$\Rightarrow$ Có cách nào chồng 4 khối lên nhau thành 1 cột sao cho không có màu nào xuất hiện 2 lần ở mỗi mặt bên hay không?

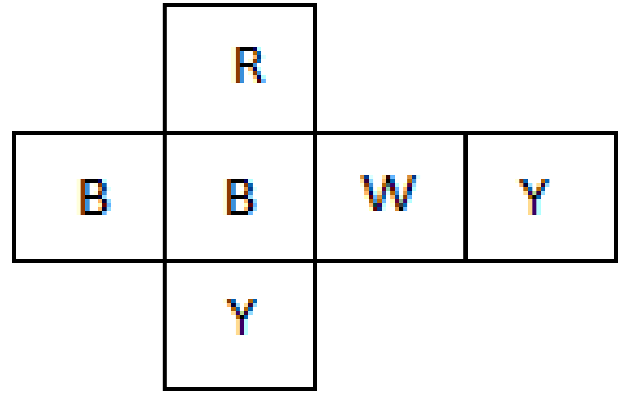
4.1.5 Bài toán *Instant Insanity (ứng dụng đồ thị con)*:

R	R	W	Y
W	B	B	B
B	W	Y	W
Y	Y	R	R

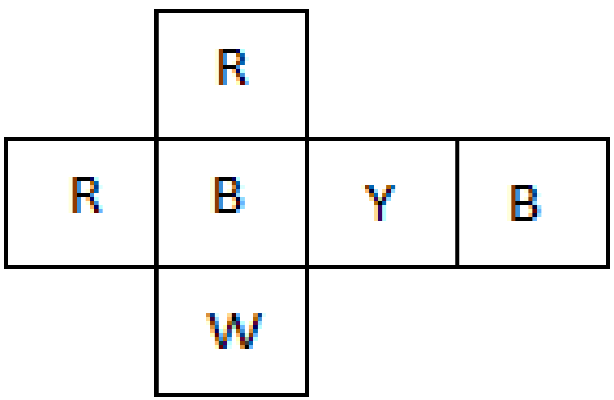
Ví dụ :



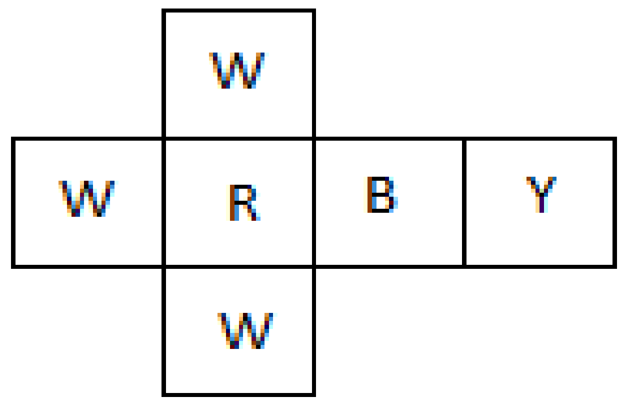
1



2

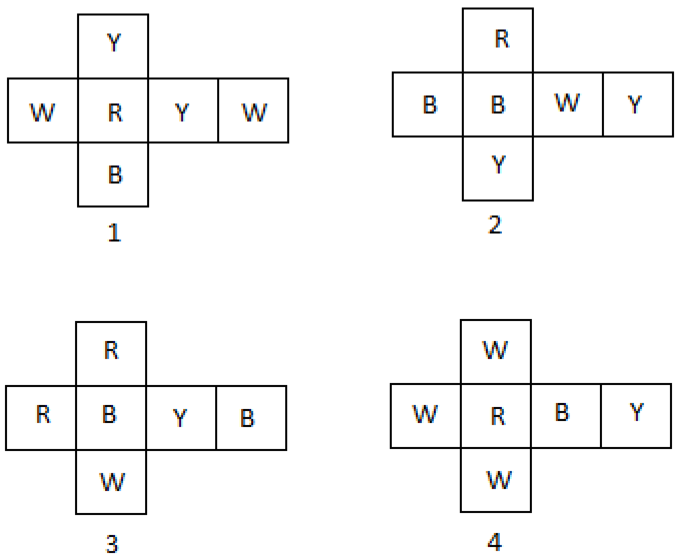


3



4

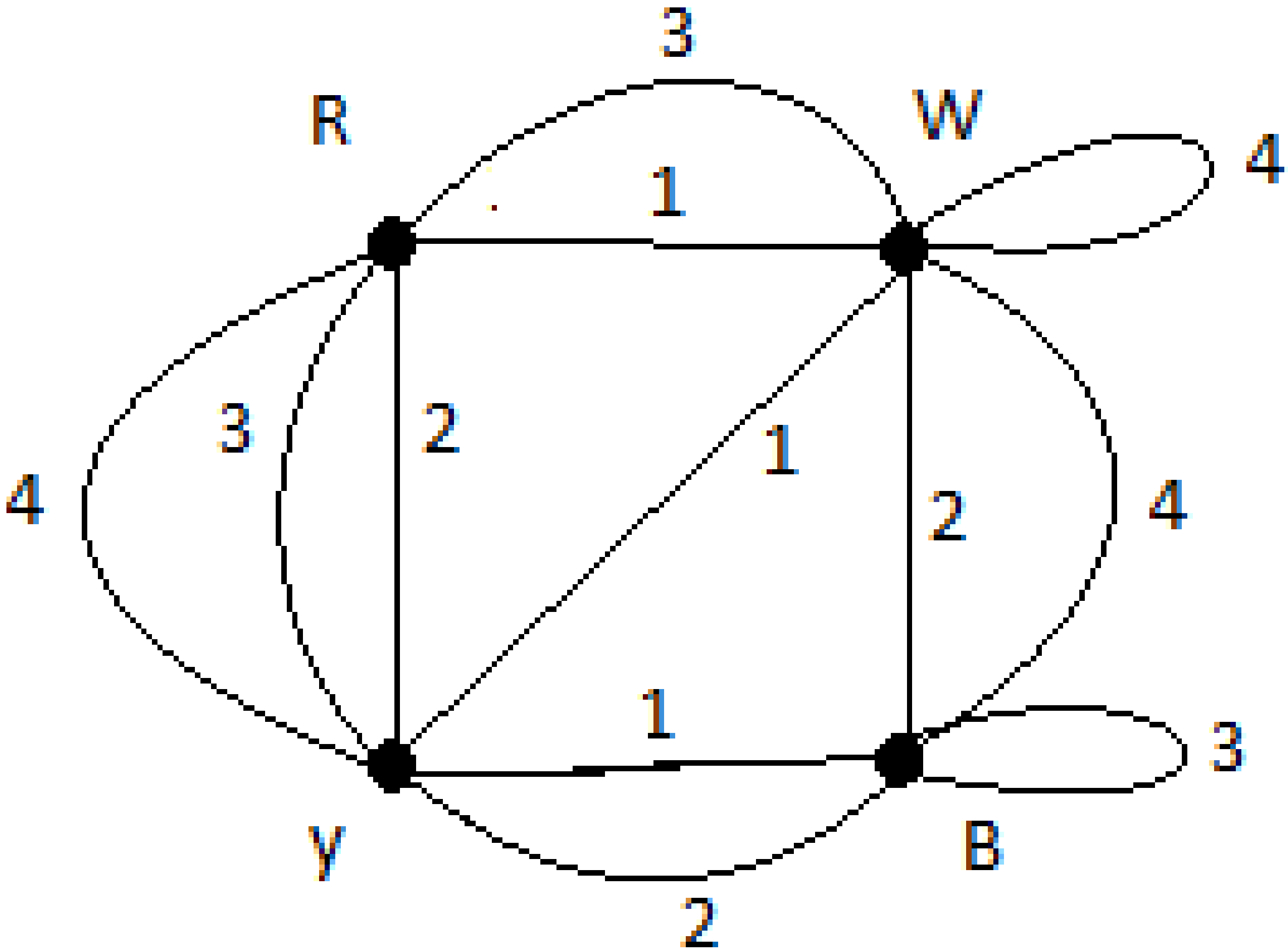
Ví dụ :



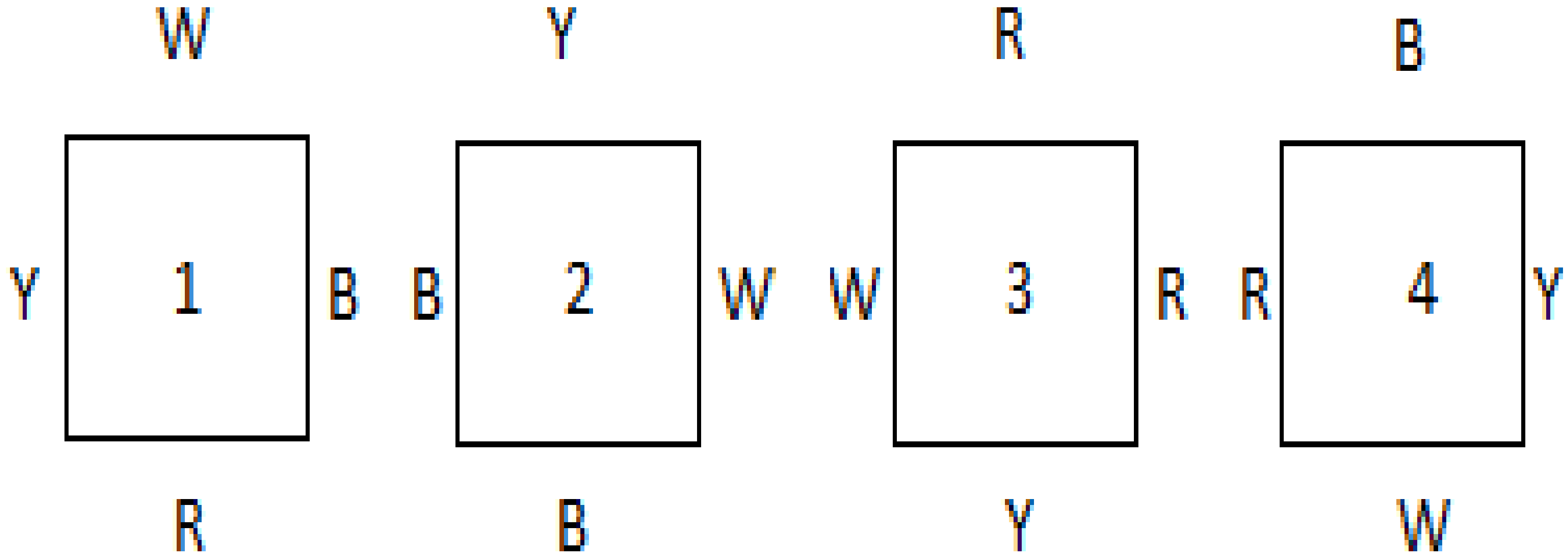
Giải :

<u>Bước 1</u> : Vẽ đồ thị biểu diễn bốn khối. Với các   đỉnh là các màu. Hai đỉnh v và w kề nhau với cạnh có nhãn là i nếu khối i có v và w đối nhau.

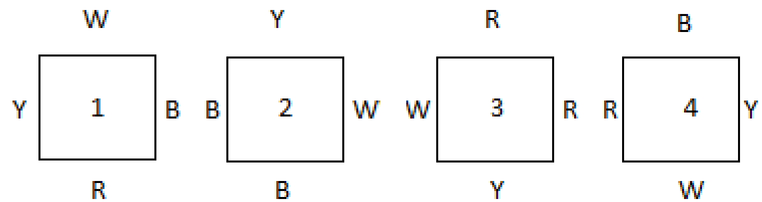
Bước 1 :



Nghiệm :

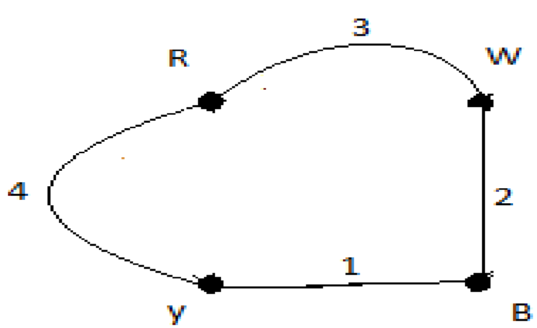


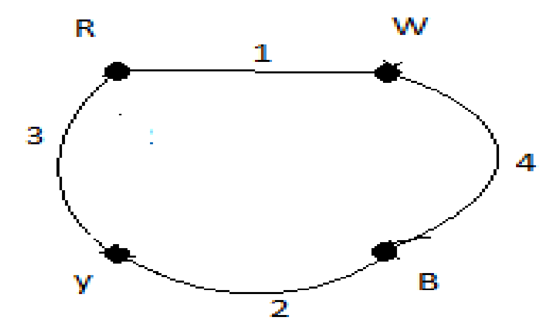
Nghiệm :



Bước 2 : Tìm hai đồ thị con G1 và G2 thỏa :

- *Mỗi đỉnh có bậc là 2.*
- *Hai đồ thị không có cạnh chung (một cạnh dùng 2 lần).*
- *Mỗi khối thể hiện đúng 1 lần trong mỗi đồ thị con.*





⇒ **G1 và G2 là nghiệm.**

4.2 Đẳng cấu:

4.2.1 Định nghĩa : Cho $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$. G_1 và G_2 được nói là đẳng cấu , ký hiệu $G_1 \sim G_2$, nếu có

- song ánh $f : V_1 \rightarrow V_2$
- song ánh $g : E_1 \rightarrow E_2$

sao cho :

Nếu $e =(v, w) \in E_1$ thì $g(e) =(f(v), f(w)) \in E_2$. **(1)**

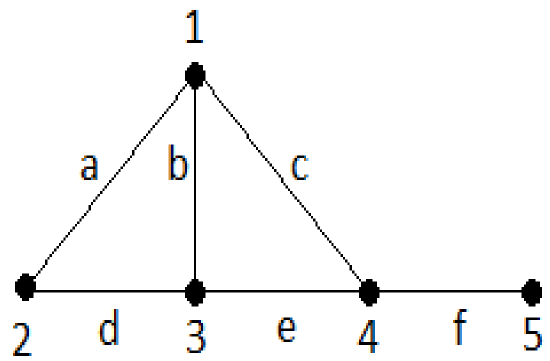
Cặp (f, g) được gọi là một đẳng cấu của G_1 lên G_2.

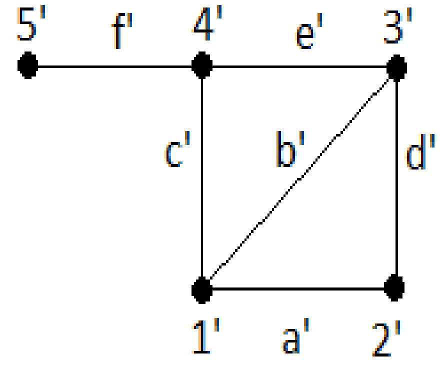
4.2 Đẳng cấu:

4.2.2 Nhận xét : Cho $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là đẳng cấu thì hai đồ thị

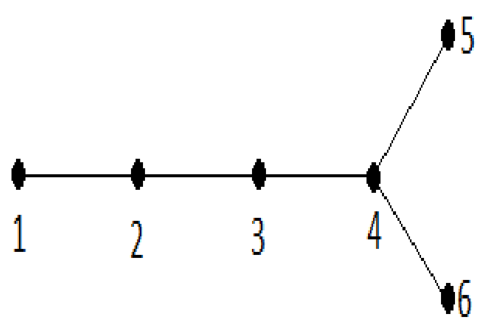
- Có cùng số đỉnh, tức là $|V_1| = |V_2|$,
- Có cùng số cạnh, tức là $|E_1| = |E_2|$,
- Có cùng số đỉnh với bậc cho sẵn,
- Số đỉnh kề với đỉnh $v \in V1$ và $f(v) \in V2$ là như nhau.

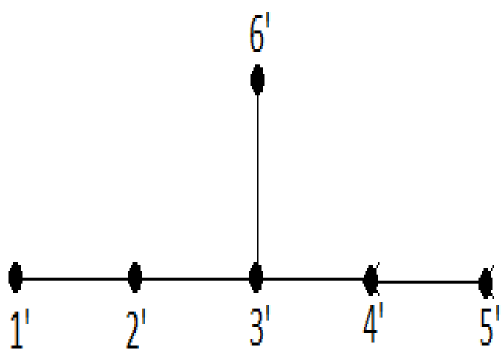
Ví dụ: Hai đồ thị sau là đẳng cấu.





Ví dụ : Hai đồ thị sau không đẳng cấu:





4.2.3 Định lý : Nếu $G_1 \sim G_2$ thì $G_2 \sim G_1$.

4.2.4 Định lý (Đẳng cấu và ma trận kề): Cho G_1 và G_2 là **đơn giản**, $G_1 \sim G_2$ *khi và chỉ khi* có một thứ tự của các đỉnh của **ma trận kề** của G_1 và G_2 sao cho 2 ma trận này là bằng nhau.

- **Chú ý :** Khi hoán vị hai cột (dòng) của ma trận kề của G thì ma trận sau hoán vị vẫn là ma trận kề của G.

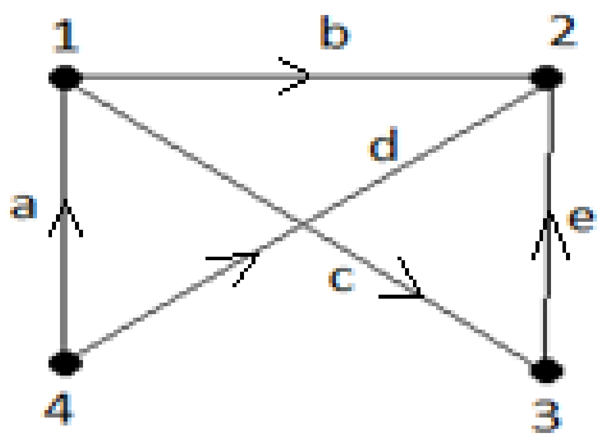
4.2.5 Định nghĩa đẳng cấu cho đồ thị G có hướng:

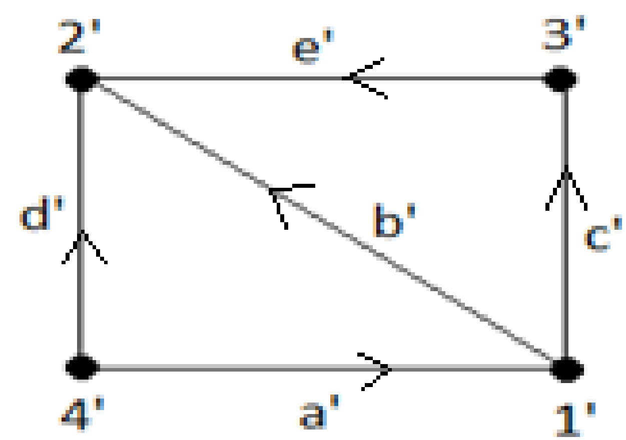
Cho $G_1=(V_1, E_1)$ và $G_2=(V_2, E_2)$ là hai đồ thị có hướng.

$G_1 \sim G_2$ nếu :

- có song ánh $f : V_1 \rightarrow V_2$,
- có song ánh $g : E_1 \rightarrow E_2$,
- nếu $e =(v, w) \in E_1$ thì $g(e) =(f(v), f(w)) \in E_2$. **(1)**

Ví dụ :





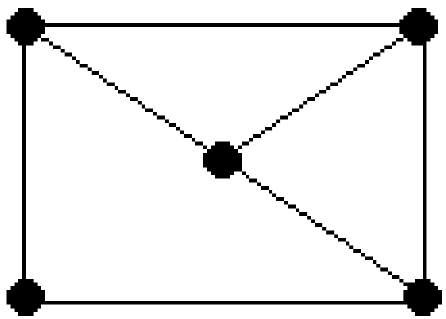
- *Sau đây là một cách để kiểm tra 2 đồ thị đơn giản G_1 và G_2 **không đẳng cấu**. Tìm tính chất P mà với mọi đồ thị G_1 , G_2*

$$P \in G_1 \text{, và } G_1 \sim G_2 \Rightarrow P \in G_2$$

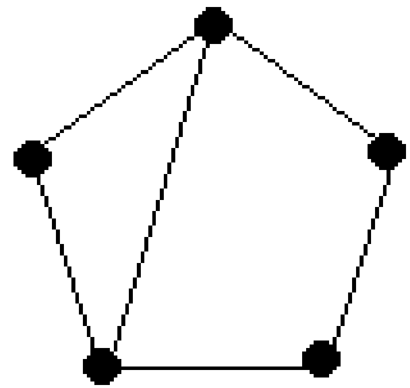
Vậy với G1 và G2 đã cho nếu $P \notin G_2$ thì G_1 và G_2 không đẳng cấu.

➢ *Tính chất P được gọi là một **bất biến** (invariant) .*

Ví dụ 1 : Hai đồ thị G_1 và G_2 sau đây không đẳng cấu, vì G_1 có 7 cạnh trong khi G_2 chỉ có 6 cạnh. Ta nói “**có 7 cạnh** “ là một bất biến.



G1



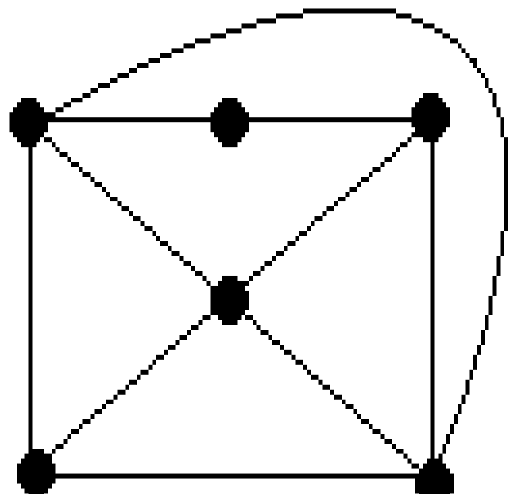
G2

Ví dụ 2 : Cho $k > 0$, **“ có một đỉnh có bậc k”** là một bất biến.

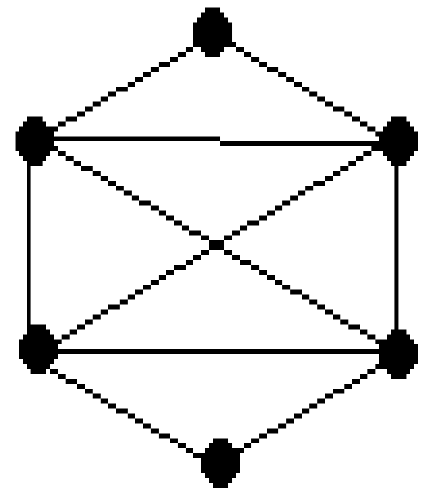
Giả sử G_1 và G_2 là đẳng cấu và f là song ánh $V_1 \rightarrow V_2$. Giả sử G_1 có đỉnh v có bậc k. Khi đó có k cạnh $e_1, \ldots, e_k$ kề v. Từ định nghĩa đẳng cấu ta có $g(e_1), \ldots, g(e_k)$ kề $f(v)$. Vì g là **đơn ánh** nên $d(f(v)) \geq k$.

Gọi e’ là cạnh kề với f(v) trong V_2. Vì g là **toàn ánh** nên có e trong G_1 sao cho $g(e)=e'$. Vì g(e) kề với f(v) trong G_2 , từ định nghĩa 2.3.1 ta có e kề với v trong G_1. Vậy $e \in \{ e_1, \ldots, e_k\}$. Suy ra $d(f(v))=k$.

Xét G_1 và G_2 cho sau đây, vì " có 1 đỉnh có bậc 3" là bất biến nên G_1 và G_2 không đẳng cấu. G_1 có a và f là bậc 3 trong khi G_2 không có đỉnh nào là bậc 3.



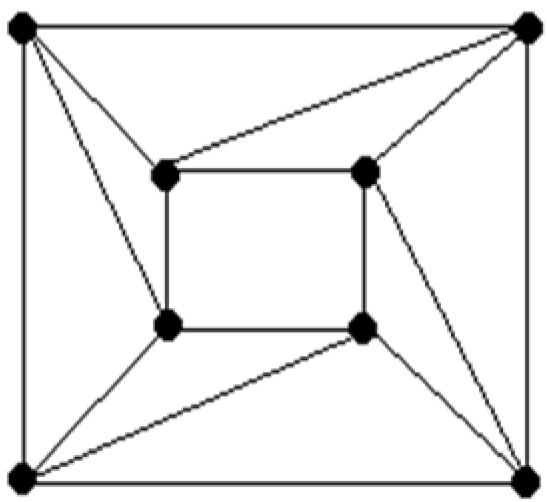
G1



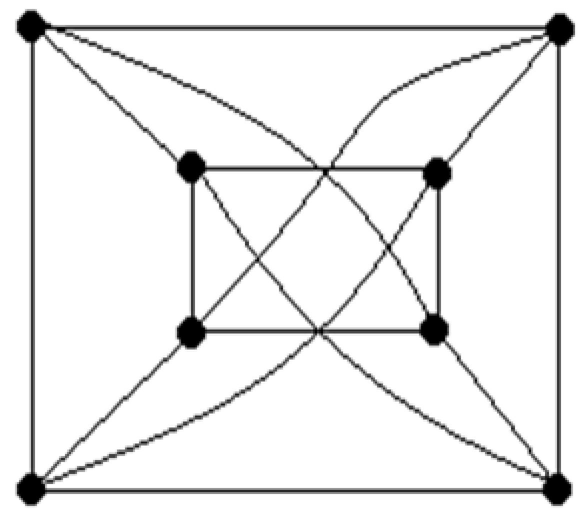
G2

Ví dụ 3 : “có một chu trình đơn giản có chiều dài k” là một bất biến (BT).

Xét G_1 và G_2 cho sau đây là không đẳng cấu. “có một chu trình đơn giản có chiều dài 3” . Vì G_1 có một chu trình chiều dài 3 nhưng G_2 chu trình có chiều dài ít nhất là 4.



G_1



G_2

Tài liệu tham khảo:

1. Discrete Mathematics , Richard Johnsonbaugh

2. Algorithms, Thomas h. Cormen

3. Toán Rời Rạc Nâng Cao, Trần Ngọc Danh, ĐHQG TP HCM

4. Lý Thuyết Đồ Thị, Đặng Trường Sơn, Lê văn Vinh, ĐHSP Kỹ Thuật TP HCM