



# **Bài 10.** **CHUỖI VÔ HẠN**

**Giảng viên: Nguyễn Lê Thi**  
**Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng**

# MỤC TIÊU BÀI HỌC

---

- Phân biệt được chuỗi cấp số nhân, chuỗi điều hòa và đan dấu
- Ứng dụng chuỗi số vào giải một số bài toán thực tế
- Khảo sát được sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số qua tổng riêng

# NỘI DUNG CHÍNH

10.1 Khái niệm chuỗi số

10.2 Chuỗi cấp số nhân, chuỗi điều hòa, p-chuỗi

10.3 Chuỗi đan dấu



# 1. KHÁI NIỆM CHUỖI SỐ

# 1. Chuỗi vô hạn

□ Chuỗi số là tổng vô hạn các số hạng trong dãy  $\{a_n\}$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

□ Tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi số

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

□ Chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  hội tụ nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$  và tổng chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$

□ Chuỗi phân kỳ nếu dãy  $\{S_n\}$  phân kỳ, chuỗi không có tổng.

## Ví dụ 10.1

Khảo sát sự hội tụ và tính tổng chuỗi nếu có

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$$

## Bài giải

## 2. Tiêu chuẩn phân kỳ

**Nếu  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k \neq 0$  thì chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  phân kỳ.**

## Ví dụ 10.2

Tính tổng của chuỗi  
số sau (nếu có)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k+3}$$

## Bài giải



### 3. Tính chất của chuỗi số

❖ Nếu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  và  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  hội tụ thì  $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$  hội tụ, và

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (\alpha, \beta : \text{hằng số})$$

❖ Nếu  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  hoặc  $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$  phân kỳ và chuỗi còn lại hội tụ thì chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$  phân kỳ.

❖ Nếu chuỗi  $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$  hội tụ thì  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{m-1} a_k + \sum_{k=m}^{\infty} a_k$  hội tụ.

## **2. CHUỖI CẤP SỐ NHÂN, CHUỖI ĐIỀU HÒA, P-CHUỖI**

# 1. Chuỗi cấp số nhân

## a. Dạng

Chuỗi cấp số nhân là một chuỗi số có dạng

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

trong đó  $a, r$  là các hằng số và  $a \neq 0$ .

## b. Tính chất hội tụ

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k \begin{cases} \text{Hội tụ khi } |r| < 1 \text{ với tổng chuỗi } \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{a}{1-r} \\ \text{Phân kỳ khi } |r| \geq 1 \end{cases}$$

## Ví dụ 10.3

Khảo sát sự hội tụ

của chuỗi số

1. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{3^{2k}}$$

2. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{3^k} + (-1)^k \right]$$

## Bài giải

## Ví dụ 10.4

Xét sự hội tụ của  
các chuỗi số sau

1. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k + 3^k}{6^k}$$

2. 
$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2k}{k+1} + \frac{1}{2^k} \right)$$

## Bài giải

## 1. Chuỗi cấp số nhân

### c. Ứng dụng

#### Ví dụ 10.5

Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn  $12.53\overline{18}$  dưới dạng số hữu tỷ.

## Ví dụ 10.6

Chất ô nhiễm được thải vào không khí hàng tuần và sẽ bị phân hủy **2%** trong mỗi tuần. Nếu mỗi tuần có **10g** chất ô nhiễm thải vào không khí thì sau một khoảng thời gian dài lượng chất ô nhiễm là bao nhiêu?

## Bài giải

## 2. $p$ -chuỗi

### a. Dạng

$p$ -chuỗi là một chuỗi số có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} \dots$$

trong đó  $p$  là một hằng số dương.

### b. Tính chất hội tụ:

$p$ -chuỗi hội tụ nếu  $p > 1$  và phân kỳ nếu  $p \leq 1$ .

**Ví dụ:**

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^5} \text{ hội tụ } (p=5 > 1) \text{ và } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \text{ phân kỳ } (p=1/2 < 1)$$



### 3. Chuỗi điều hòa

#### a. Dạng

Chuỗi điều hòa là một chuỗi số có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \dots$$

#### b. Tính chất hội tụ:

**Chuỗi điều hòa phân kỳ.**

### **3. CHUỖI ĐƠN ĐẦU**

# 1. Chuỗi đan dấu

Chuỗi đan dấu là một chuỗi số có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots, \quad a_k > 0.$$

hoặc

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - \dots, \quad a_k > 0.$$

## 2. Tiêu chuẩn hội tụ (Tiêu chuẩn Leibnitz)

Chuỗi đan dấu  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  hoặc  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$  hội tụ nếu thỏa 2 điều kiện sau

1.  $\{a_k\}$  là dãy giảm, nghĩa là  $a_{k+1} \leq a_k, \quad \forall k \geq 1.$
2.  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$

## Ví dụ 10.7

Xét sự hội tụ của  
các chuỗi số sau

1. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

2. 
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k}$$

## Bài giải

## 2. p-chuỗi đan dấu

**a. Định nghĩa:** p-chuỗi đan dấu là một chuỗi đan dấu có dạng

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^p}$$

**b. Tính chất hội tụ:**

*p*-chuỗi đan dấu **hội tụ nếu  $p > 0$ .**

### 3. Ước lượng sai số của chuỗi đan dấu

Nếu chuỗi đan dấu  $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} a_k$  hội tụ về tổng  $S$  thì

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}$$

Trong đó  $S_n$  là tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi

$a_{n+1}$  là số hạng thứ  $n+1$

## Ví dụ 10.8

Xét chuỗi đan dấu

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k \cdot 2^k}$$

**a.** Tính giá trị của tổng riêng thứ 6 và ước lượng sai số của nó.

**b.** Cần bao nhiêu số hạng để tổng riêng đạt độ chính xác 4 chữ số thập phân.

## Bài giải



# KẾT BÀI

---

Sinh viên cần lưu ý:

- Sử dụng được giới hạn của tổng riêng để khảo sát sự hội tụ của một chuỗi số
- Nhận dạng được chuỗi cấp số nhân, chuỗi điều hòa, chuỗi đan dấu, p- chuỗi
- Khảo sát được sự hội tụ của các chuỗi đặc biệt trên

**THANKS FOR WATCHING!**