ĐÁP ÁN BÀI TẬP ÔN

Bài tập 1. Rút gọn biểu thức $A = \sin\left(\sin^{-1}\frac{1}{5} + \cos^{-1}\frac{1}{4}\right)$

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} a &= \sin^{-1}\frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin a = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1-\sin^2 a} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \\ b &= \cos^{-1}\frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos b = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin b = \sqrt{1-\cos^2 b} = \frac{\sqrt{15}}{4} \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} A &= \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a = \frac{1}{5}.\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}.\frac{2\sqrt{6}}{5} \\ &= \frac{1+6\sqrt{10}}{20} \end{aligned}$$

□

Bài tập 2. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2+3x}+1$. Tìm $f^{-1}(x)$ và tập xác định của nó.

Lời giải. Giải phương trình

$$y = \sqrt{2+3x}+1 \Leftrightarrow 3x = (y-1)^2 - 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(y-1)^2 - \frac{2}{3}$$

Vậy $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2 - \frac{2}{3}$ và miền xác định là $D = [1;+\infty)$ □

Bài tập 3. Giải phương trình $(\tan^{-1}x)^2 - 4\tan^{-1}x + 3 = 0$

Lời giải. Đặt $u = \tan^{-1}x$ với điều kiện $u \in (-\pi/2;\pi/2)$. Phương trình trở thành

$$u^2 - 4u + 3 = 0 \Leftrightarrow u = 1 \quad (\text{nhận}) \vee u = 3 \quad (\text{loại})$$

Với $u = 1 \Leftrightarrow \tan^{-1}x = 1 \Leftrightarrow x = \tan(1)$. □

Bài tập 4. Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax-4}{x-2} & \text{nếu } x \neq 2 \\ b+1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$. Tìm a, b để f liên tục với mọi x.

Lời giải.
Khi $x \neq 2$ thì $f(x) = \frac{ax-4}{x-2}$ là hàm sơ cấp nên f liên tục với $x \neq 2$.
Để f liên tục với mọi x thì f phải liên tục tại $x = 2$, tức là $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2)$
Ta có $f(2) = b+1$. Xét

$$L = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{ax-4}{x-2}$$

- Nếu $a \neq 2$ thì $L = \infty$ (loại).

- Nếu $a = 2$ thì

$$L = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{x-2} = 2$$

Do đó f liên tục tại $x = 2$ khi $b + 1 = 2 \Rightarrow b = 1$.

Vậy $a = 2$, $b = 1$ thì f liên tục với x.

□

Bài tập 5. Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(ax)}{1-e^{5x}} & \text{nếu } x < 0 \\ 5 & \text{nếu } x = 0 \\ 2x + b & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$. Tìm a, b để f liên tục tại $x = 0$.

Lời giải. Ta có

$$\begin{aligned} &f(0) = 5 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (2x + b) = b \\ &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(ax)}{1-e^{5x}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{a\cos(ax)}{-5e^{5x}} = \frac{-a}{5} \end{aligned}$$

Để f liên tục tại $x = 0$ thì $f(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

$$\begin{cases} b = 5 \\ -\dfrac{a}{5} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -25 \\ b = 5 \end{cases}$$

□

Bài tập 6. Cho $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - m}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$.

1. Tìm m để f khả vi tại $x = 0$
2. Với m đã tìm được, tính $f'(x)$.

Lời giải.

1. Hàm f khả vi tại $x = 0$ khi và chỉ khi f có đạo hàm tại $x = 0$.
Xét

$$L = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^x - m}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - m - x}{x^2}$$

- Nếu $m \neq 1$ thì $L = \infty$.
- Nếu $m = 1$ thì

$$\begin{aligned} L = f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Vậy với $m = 1$ thì f khả vi tại $x = 0$.

2. Với $m = 1$

Khi $x \neq 0$ thì $\dfrac{e^x - 1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{xe^x - x(e^x - 1)}{x^2}$.

Khi $x = 0$ thì $f'(0) = \dfrac{1}{2}$ (theo câu 1)

Vậy

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - x(e^x - 1)}{x^2} & \text{khi } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

□

Bài tập 7. Cho $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{nếu } x \leq 0 \\ -x^2 + x + m & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

1. Tìm m để f liên tục với mọi x.
2. Với m đã tìm được, tính $f'(x)$.

Lời giải.

1. Khi $x \in (-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$ thì f là hàm sơ cấp nên f liên tục. Vậy, để f liên tục tại mọi điểm khi f liên tục tại 0, tức là

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$$

Trong đó

$$f(0) = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x^2 + x + m) = m$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$$

Do đó f liên tục tại 0 khi $m = 0$.

2. Với $m = 0$, theo định nghĩa đạo hàm

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0^+}(-x + 1) = 1$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Vì $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$ nên $f'(0) = 1$.

- Khi $x > 0$ thì $f(x) = -x^2 + x \Rightarrow f'(x) = -2x + 1$.
- Khi $x < 0$ thì $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$.

Vậy

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ 1 & \text{nếu } x = 0 \\ \cos x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

□

Bài tập 8. Tính

1. $L=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x^2)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

2. $L=\lim\limits_{x\to 0}[\ln(e+x)]^{\frac{1}{x}}$

Lời giải. 1. $L=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x^2)^{\frac{1}{2x^2}}\right]^{\frac{2x^2}{\sin^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\sin^2 x}}=e^2.$

2.

$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\left[\ln e\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left[1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]^{1/x}\\&=\lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\ln\left(1+\frac{x}{e}\right)\right]^{\frac{1}{\ln(1+\frac{x}{e})}}\right\}^{\frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{x}}\\&=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\frac{x}{e})}{x}}=e^{\frac{1}{e}}\end{aligned}$$

□

Bài tập 9. Cho đường cong $(C): 2x^2+y^3-5xy+3x+5y+3=0$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có $x=1$.

Lời giải. Đạo hàm 2 vế theo x, ta được

$$\begin{aligned}&4x+3y^2y'-5y-5xy'+3+5y'=0\Leftrightarrow y'(3y^2-5x+5)=5y-4x-3\\&\Rightarrow y'(x)=\frac{5y-4x-3}{3y^2-5x+5}\end{aligned}$$

Khi $x=1$ ta có $y^3+8=0\Rightarrow y=-2$. Vậy $M(1;-2)$ là tiếp điểm.
Hệ số góc của tiếp tuyến tại $M(1,-2)$ là

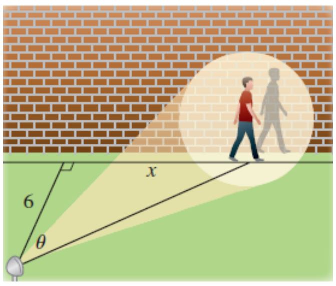
$$m=y'(2)=-\frac{17}{12}$$

Phương trình tiếp tuyến với (C) tại $M(1;-2)$ có dạng

$$y+2=y'(2)(x-1)\Leftrightarrow y+2=-\frac{17}{12}(x-1)$$

□

Bài tập 10.
Một người đi bộ theo một đường thẳng với tốc độ 1m/s. Một đèn pha được đặt trên mặt đất cách lối đi 6 m và rọi thẳng vào người này. Đèn pha xoay với tốc độ bao nhiêu khi người đó cách điểm trên lối đi gần đèn pha nhất 4.5 m?



Lời giải. Ta có

$$\tan\theta=\frac{x}{6}\Rightarrow x=6\tan\theta$$

Đạo hàm hai vế theo t, ta được

$$\frac{dx}{dt} = 6\frac{1}{\cos^2\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

Vậy

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{6}\cos^2\theta\frac{dx}{dt}\\ &= \frac{1}{6}\cos^2\theta\end{aligned}$$

Mà $\cos\theta = \dfrac{6}{\sqrt{x^2+36}}$ nên

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{6}.\left(\frac{6}{\sqrt{x^2+36}}\right)^2 = \frac{6}{x^2+36}$$

Khi $x = 4.5$ thì $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{8}{75}$ (rad/s) □