Bài 14.
VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG VÀ KHÔNG GIAN

Giảng viên: Nguyễn Lê Thi
Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Biểu diễn được vectơ trong mặt phẳng và không gian.
- Áp dụng được các tính toán về vectơ trong mặt phẳng và không gian
- Ứng dụng được vectơ vào giải một số bài toán thực tê

NỘI DUNG CHÍNH

14.1 Vectơ trong mặt phẳng R^2

14.2 Vectơ trong không gian R^3

14.3 Tích vô hướng, tích có hướng

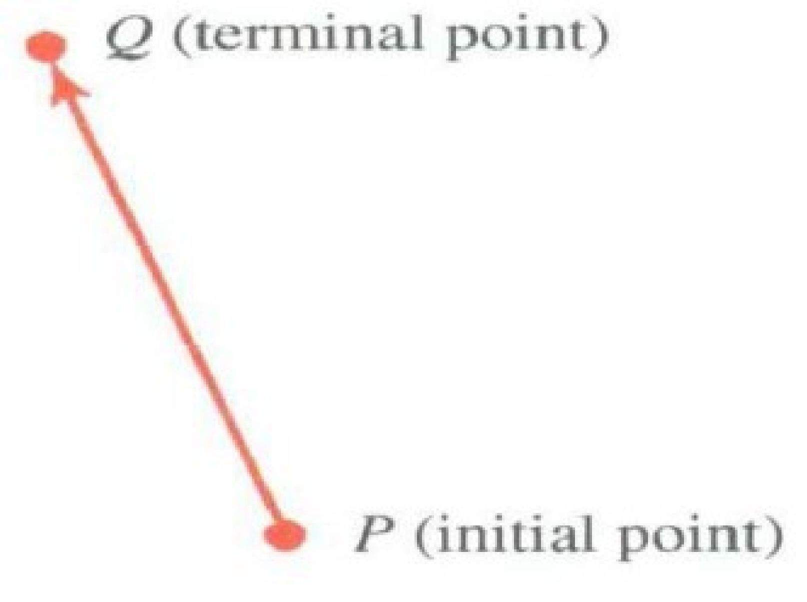
14.4 Đường thẳng trong R^3

1. VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG

1. Khái niệm

- Vectơ là đại lượng có hướng và độ lớn, thường được biểu diễn dưới dạng một mũi tên.

- Ký hiệu: $\overrightarrow{PQ}$

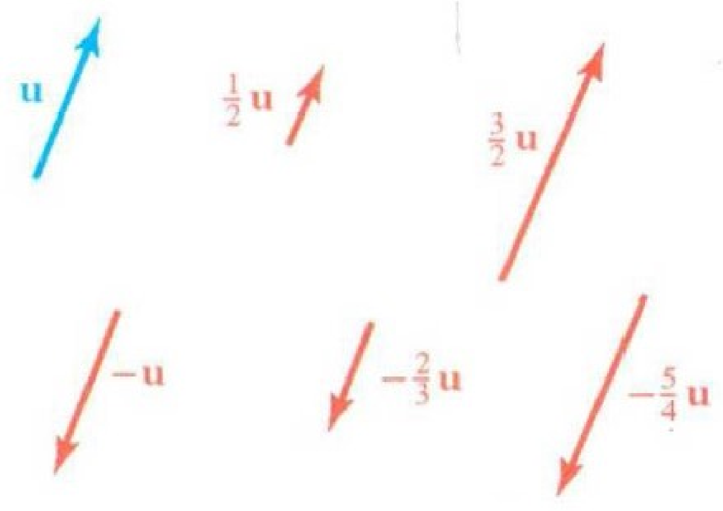


- Độ dài vectơ $\overrightarrow{PQ}$: $\|PQ\|$

2. Các phép toán trên vectơ

a. Nhân vectơ với một số

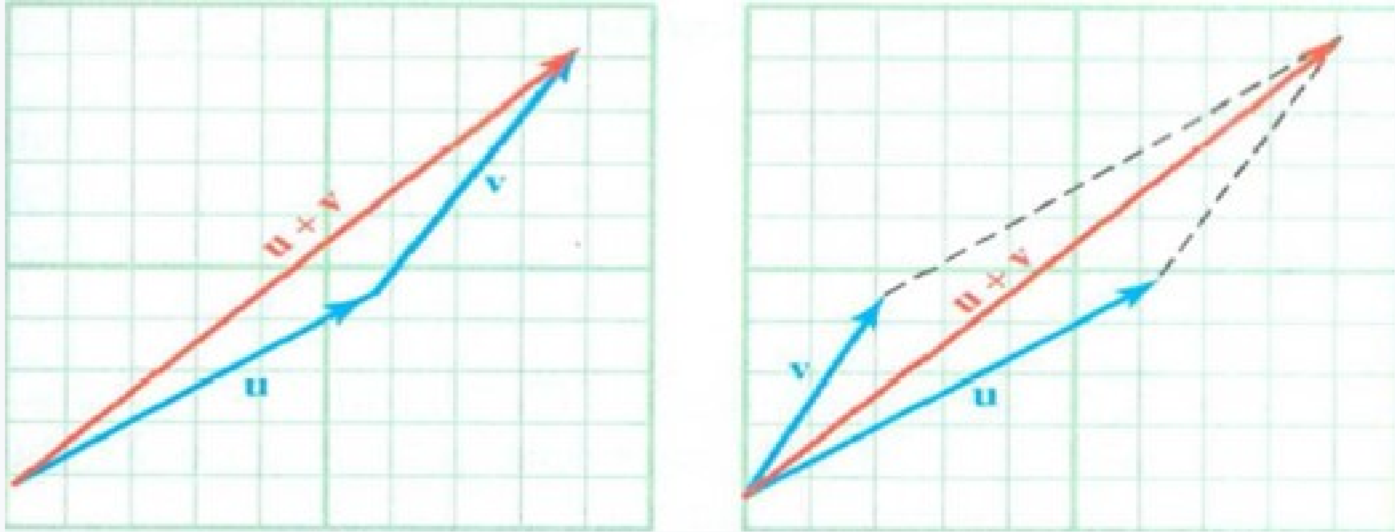
Vectơ av
- có độ lớn gấp $|a|$ lần vectơ v.
- cùng hướng với v nếu $a > 0$.
- ngược hướng với v nếu $a < 0$.



$$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}, \quad a\vec{0} = \vec{0}, a \in \mathbb{R}.$$

b. Cộng vectơ

- Vectơ $u + v$ là tổng của u, v
- Vectơ $u - v$ là vectơ thỏa $v + u - v = u$



c. Biểu diễn vectơ

Nếu $P(a,b)$ và $Q(c,d)$ thì vectơ PQ có biểu diễn dạng thành phần chuẩn là: $PQ = \langle c-a, d-b \rangle$

Các phép toán vectơ:

$$\langle a_1, b_1 \rangle = \langle a_2, b_2 \rangle \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2$$

$k\langle a,b \rangle = \langle ka, kb \rangle$, với k tùy ý.

$$\langle a,b \rangle + \langle c,d \rangle = \langle a+c, b+d \rangle$$

$$\langle a,b \rangle - \langle c,d \rangle = \langle a-c, b-d \rangle$$

d. Tổ hợp tuyến tính của các vectơ

Tổ hợp tuyến tính của 2 vectơ u, v là $a.u + b.v$, trong đó a, b là các hằng số.

Ví dụ 14.1

Cho các vectơ

$$u = \langle 3, 2 \rangle, v = \langle -1, 4 \rangle$$

Tìm tọa độ của các vectơ sau:

$$\frac{2}{3}u,\ u - v,\ 2u + 5v$$

Bài giải

3. Vectơ định hướng

- Nếu $u = \langle u_1, u_2 \rangle$ thì

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

- Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

- Vectơ định hướng của vectơ $v \neq 0$ là vectơ đơn vị cùng hướng với v: $u = \dfrac{v}{\|v\|}$

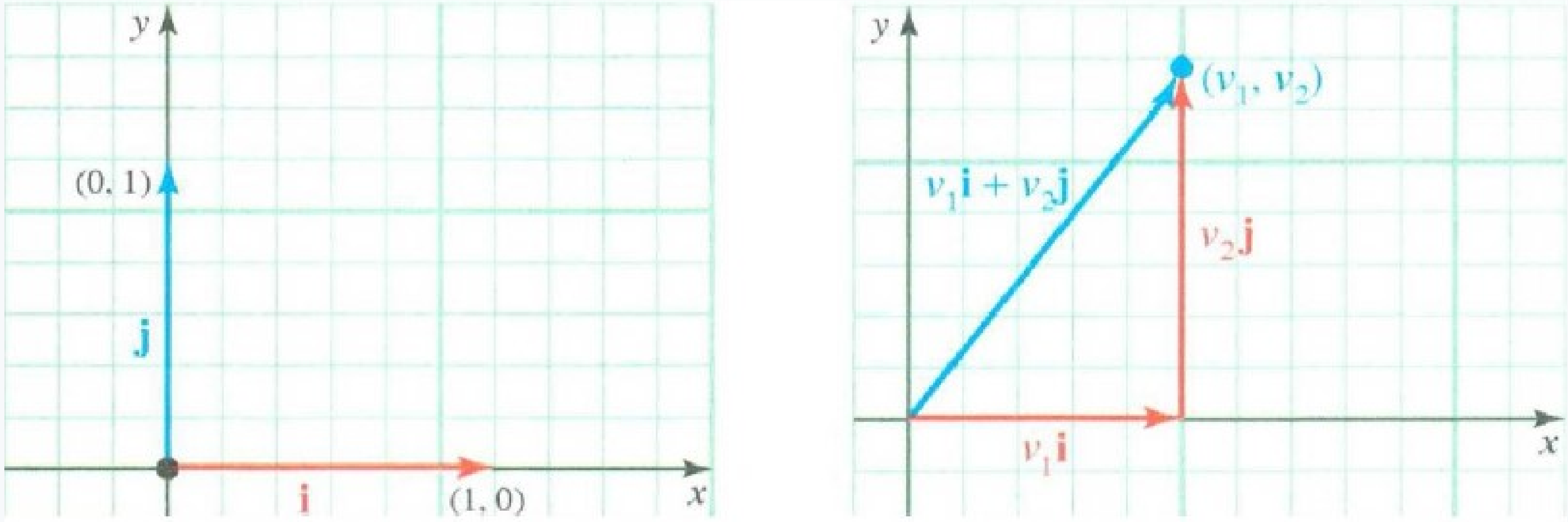
Ví dụ 9.3

Tìm vectơ định hướng của vectơ

$$u = \langle 7, -2 \rangle$$

Bài giải

4. Biểu diễn chính tắc của vectơ trong mặt phẳng



$$\boxed{v = \langle v_1, v_2 \rangle = v_1 \langle 1,0 \rangle + v_2 \langle 0,1 \rangle = v_1 i + v_2 j}$$

Ví dụ. Cho $u = \langle 9, -4 \rangle \Rightarrow u = 9i - 4j$

Ví dụ 14.4

Hai lực F_1 và F_2 cùng tác động lên một vật thể. Giả sử lực F_1 có độ lớn là $3N$ và cùng hướng vectơ $-i$, lực F_2 có độ lớn là $2N$ và cùng hướng với vectơ

$$u = \frac{3}{5}i - \frac{4}{5}j$$

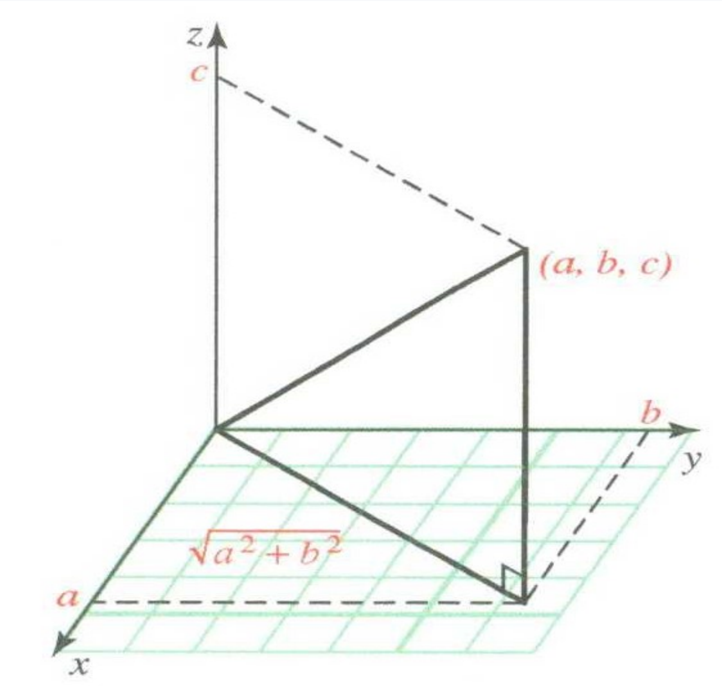
Tìm lực tác động thêm F_3 vào vật để vật đứng yên.

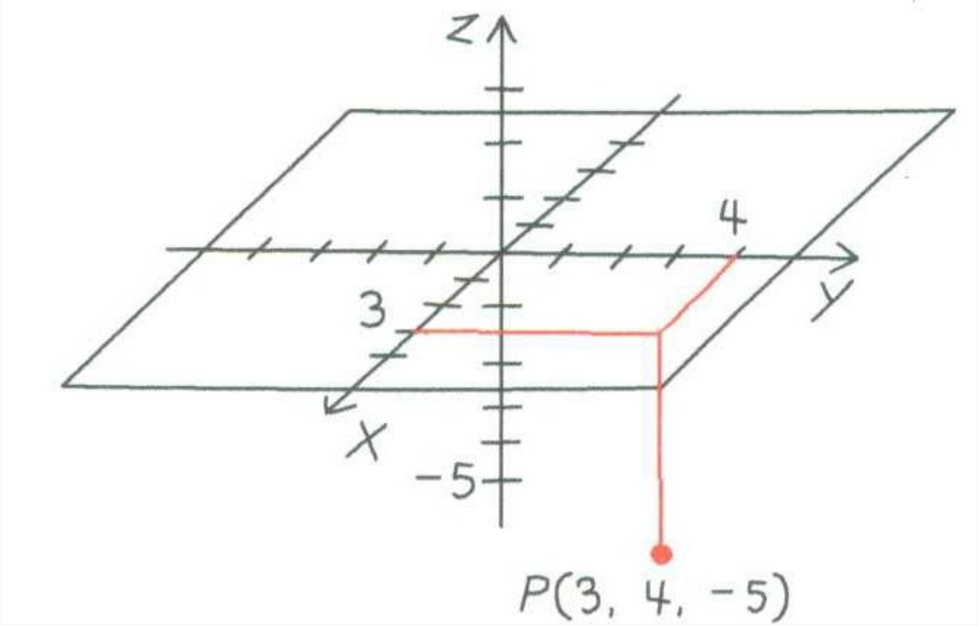
Bài giải

2. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Tọa độ điểm trong không gian

Trong không gian, một điểm được xác định bởi bộ (a,b,c) lần lượt được gọi là hoành độ, tung độ và cao độ.





2. Khoảng cách trong không gian R³

Khoảng cách giữa $P_1(x_1,y_1,z_1)$ và $P_2(x_2,y_2,z_2)$ là

$$\boxed{d=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2+\left(z_2-z_1\right)^2}}$$

Ví dụ 14.5

Tìm khoảng cách giữa 2 điểm

$P(1,4,-6);\ Q(-3,0,8)$

Bài giải

3. Vectơ không gian R^3

- Cho $P_1(x_1, y_1, z_1)$; $P_2(x_2, y_2, z_2)$, ta có

$$P_1P_2 = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

- Ba vectơ $i = \langle 1,0,0 \rangle; j = \langle 0,1,0 \rangle; k = \langle 0,0,1 \rangle$ được gọi là

  các vectơ cơ sở của R^3 . Dạng chính tắc của P_1P_2 là:

$$P_1P_2 = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k$$

Ví dụ. Cho vectơ PQ biết $P(1,-2,-2)$ và $Q(3,-2,1)$.

Biểu diễn chính tắc của PQ: $PQ = 2i + 3k$

3. TÍCH VÔ HƯỚNG – TÍCH CÓ HƯỚNG

1. Định nghĩa tích vô hướng

Tích vô hướng của hai vectơ

$$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

$$w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

là một số xác định bởi

$$\boxed{v.w = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Ví dụ 14.7

Tìm tích vô hướng của

$$v = -5i + 4k \ ; \ w = 2j + 3k$$

Bài giải

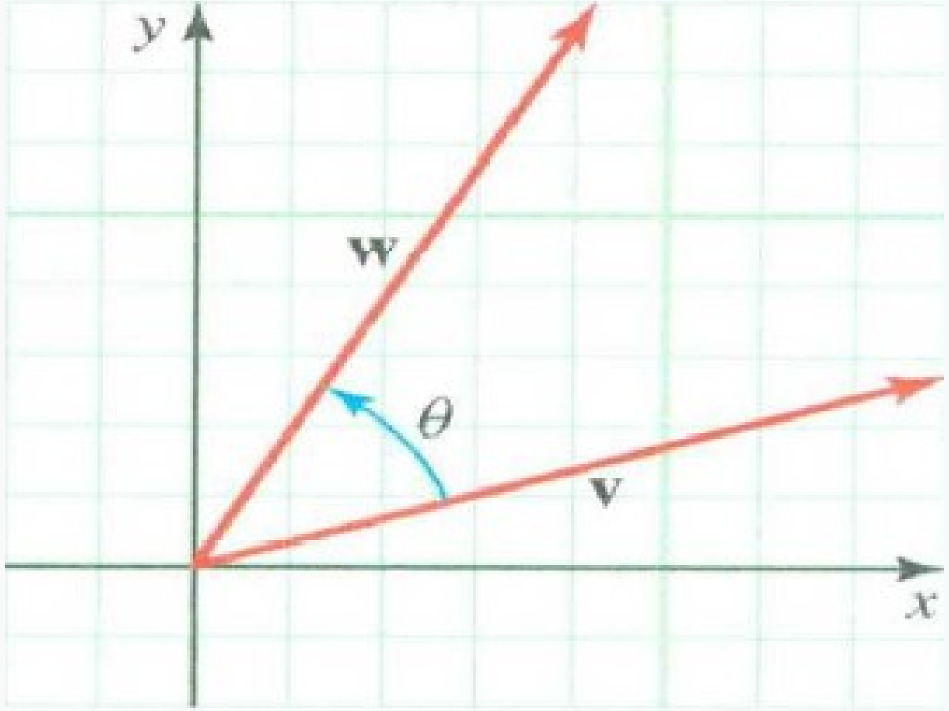
2. Góc giữa hai vectơ

Góc θ giữa hai vectơ v, w khác 0 xác định bởi $\left(0 \le \theta \le \pi\right)$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{v.w}{\|v\|\|w\|}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{v.w = \|v\|\|w\|\cos\theta}$$



$v.w = 0 \Rightarrow$ v, w trực giao hay vuông góc

Ví dụ 14.8

Cho ΔABC có 3 đỉnh $A(1,1,8)$, $B(4,-3,-4)$ và $C(-3,1,5)$. Tính góc A.

Bài giải

Ví dụ 14.9

Xác định xem cặp vectơ nào sau đây trực giao với nhau?

$u = 3i + 7j - 2k$,

$v = 5i - 3j - 3k$

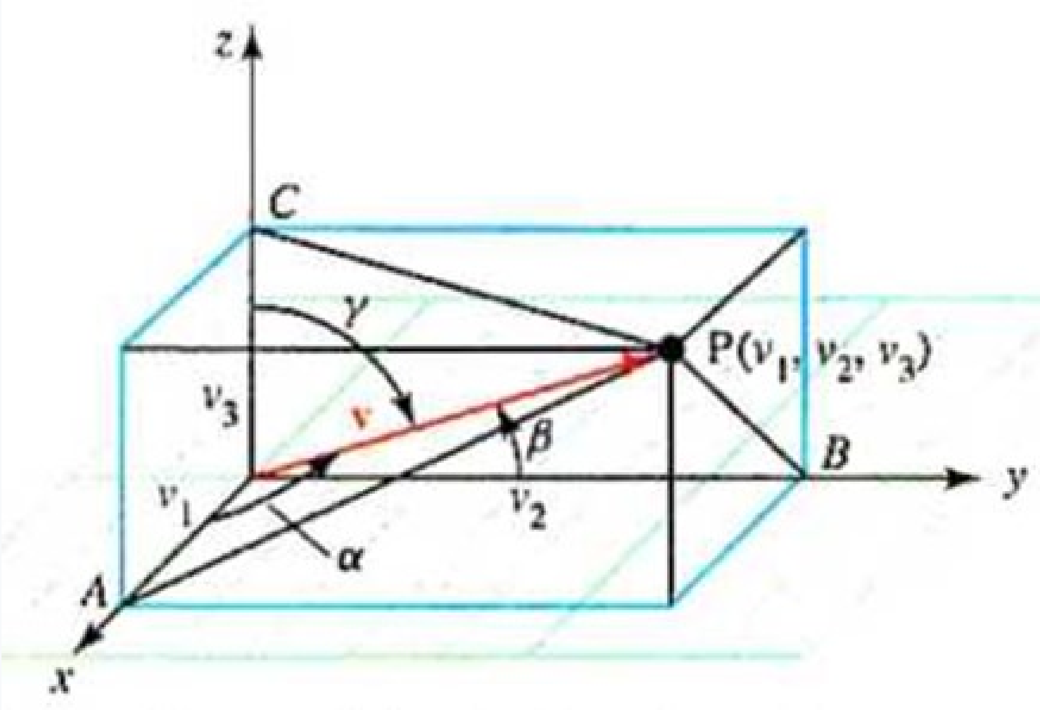
$w = j - k$

Bài giải

3. Cosin chỉ hướng

$$v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{v.i}{\|v\|} = \frac{v_1}{\|v\|} \\
\cos\beta &= \frac{v.j}{\|v\|} = \frac{v_2}{\|v\|} \\
\cos\gamma &= \frac{v.k}{\|v\|} = \frac{v_3}{\|v\|}
\end{aligned}\right\} \textbf{cosin chỉ hướng của } \boldsymbol{v}$$



Có thể biểu diễn v dưới dạng:

$$v = \|v\| \langle \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \rangle$$

Ví dụ 14.10

Tìm cosin chỉ hướng của vectơ $v = -2i + 3j + 5k$

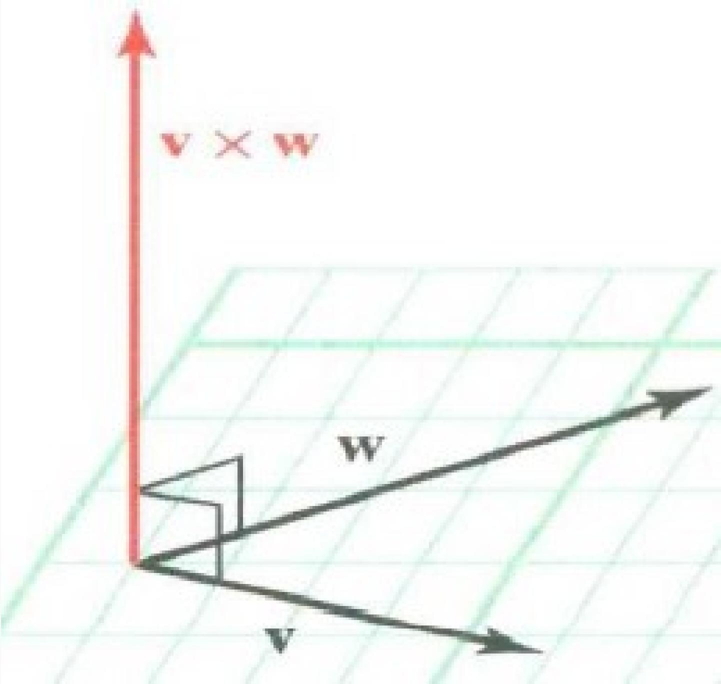
Bài giải

3. Định nghĩa tích có hướng

Tích có hướng của 2 vectơ $v = (a_1, a_2, a_3)$; $w = (b_1, b_2, b_3)$

là vectơ

$$\boxed{v \times w = (a_2 b_3 - a_3 b_2) i + (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k}$$



$$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Chú ý:

$$v \times w = -(w \times v)$$

$v \times w$ và $w \times v$ trực giao với v, w

Ví dụ 14.13

Tìm vectơ khác 0 trực giao với hai vectơ

$v = -2i + 3j - 7k$

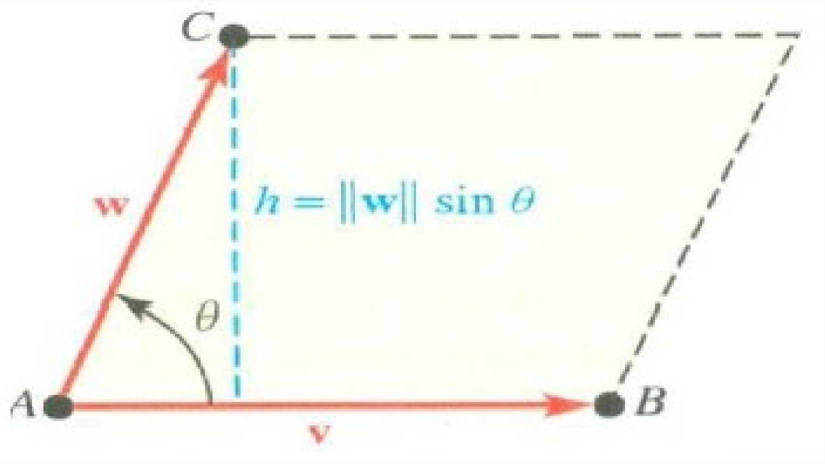
và $w = 5i + 9k$.

Bài giải

7. Độ dài của tích có hướng

$$\boxed{\|v \times w\| = \|v\|\|w\|\sin\theta}$$

θ là góc giữa v và w



Ứng dụng

$\|v \times w\| =$ diện tích hình bình hành tạo bởi 2 cạnh kề v, w

$\frac{1}{2}\|v \times w\| =$ diện tích hình tam giác tạo bởi 2 cạnh v, w

Ví dụ 14.14

Tính diện tích tam giác có 3 đỉnh

$P(-2,4,5)$,

$Q(0,7,-4)$,

$R(-1,5,0)$.

Bài giải

8. Tích hỗn tạp

Tích hỗn tạp của 3 vectơ

$$u=\left(a_1,a_2,a_3\right);\, v=\left(b_1,b_2,b_3\right);\, w=\left(c_1,c_2,c_3\right)$$

xác định bởi

$$\boxed{\left(u\times v\right).w=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Nếu $\left(u\times v\right).w=0$ thì u, v, w cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ví dụ 14.15

Chứng minh rằng các vectơ

$$u = \langle 1, 4, -7 \rangle$$

$$v = \langle 2, -1, 4 \rangle$$

$$w = \langle 0, -9, 18 \rangle$$

cùng nằm trên một mặt phẳng

Bài giải

4. ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Dạng tham số của đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng L đi qua điểm (x_0, y_0, z_0) có vectơ chỉ phương ***(vector cùng phương với đường thẳng)*** là $v = Ai + Bj + Ck$ thì có dạng:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_0 + At \\ y &= y_0 + Bt \\ z &= z_0 + Ct \end{aligned}} \quad t\text{: tham số}$$

Ví dụ 14.16

Tìm phương trình tham số của đường thẳng (d) đi qua hai điểm (3,1,4) và (1,-2,5)

Bài giải

2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng trong R³

Xét hai đường thẳng L_1, L_2 trong R^3 với $P \in L_1, \quad Q \in L_2$

có u_{L_1}, u_{L_2} lần lượt là các vectơ chỉ phương.

- ❖ L_1, L_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{cases} u_{L_1} \neq k u_{L_2} \quad \left(u_{L_1} \times u_{L_2} \neq 0\right) \\ \left(u_{L_1} \times u_{L_2}\right).PQ = 0 \end{cases}$ **hoặc** hệ giao điểm có nghiệm

- ❖ L_1, L_2 song song $\Leftrightarrow \begin{cases} u_{L_1} = k u_{L_2} \quad \left(u_{L_1} \times u_{L_2} = 0\right) \\ P \notin L_2 \end{cases}$

- ❖ L_1, L_2 vuông góc $\Leftrightarrow u_{L_1}.u_{L_2} = 0$

- ❖ L_1, L_2 chéo nhau $\Leftrightarrow \left(u_{L_1} \times u_{L_2}\right).PQ \neq 0$

Ví dụ 14.17

Xác định xem hai đường thẳng sau cắt nhau, song song hay chéo nhau

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{4}$$

$$L_2 : \frac{x+2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{1}$$

Bài giải

KẾT BÀI

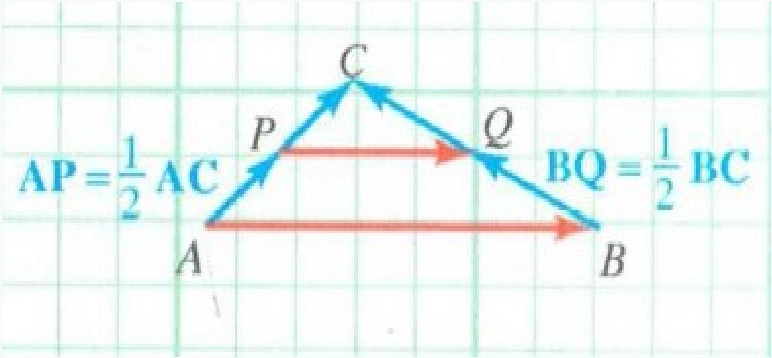
Sinh viên cần lưu ý:

- Áp dụng được các tính toán về vectơ trong mặt phẳng và không gian
- Giải được các bài toán liên quan đến tích vô hướng, tích có hướng
- Ứng dụng được vectơ vào giải các bài toán thực tế

THANKS FOR WATCHING!

Ví dụ 14.2

Chứng minh rằng đường nối trung điểm 2 cạnh của tam giác song song và bằng ½ độ dài cạnh thứ 3.



Bài giải

Ta có

$$AB = AP + PQ + QB = \frac{1}{2}AC + PQ - BQ$$

$$= \frac{1}{2}(AB + BC) + PQ - \frac{1}{2}BC$$

$$= \frac{1}{2}AB + PQ \Rightarrow PQ = \frac{1}{2}AB$$

Vậy PQ song song với AB và có độ dài bằng một nửa độ dài AB

Ví dụ 14.3

Một con sông rộng 4 dặm chảy về hướng nam với tốc độ dòng chảy 5 dặm/ giờ. Trong một cuộc triển lãm, con tàu phải chạy thẳng từ đông sang tây, qua một điểm quan sát trong 20 phút. Hỏi hướng đi cần đạt được của con tàu?

Bài giải

Gọi B là vectơ vận tốc con tàu theo hướng hợp với phương ngang một góc θ

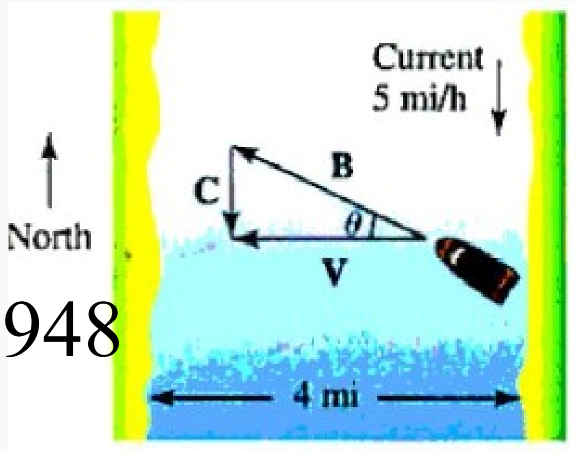
Vận tốc dòng chảy là C và $\|C\| = 5$ dặm/giờ

Vận tốc hữu dụng của tàu là V (chỉ hướng tây) và $\|V\| = \dfrac{4}{1/3} = 12$ dặm/giờ

$$\Rightarrow \|B\| = \sqrt{\|V\|^2 + \|C\|^2} = 13$$

Ta có

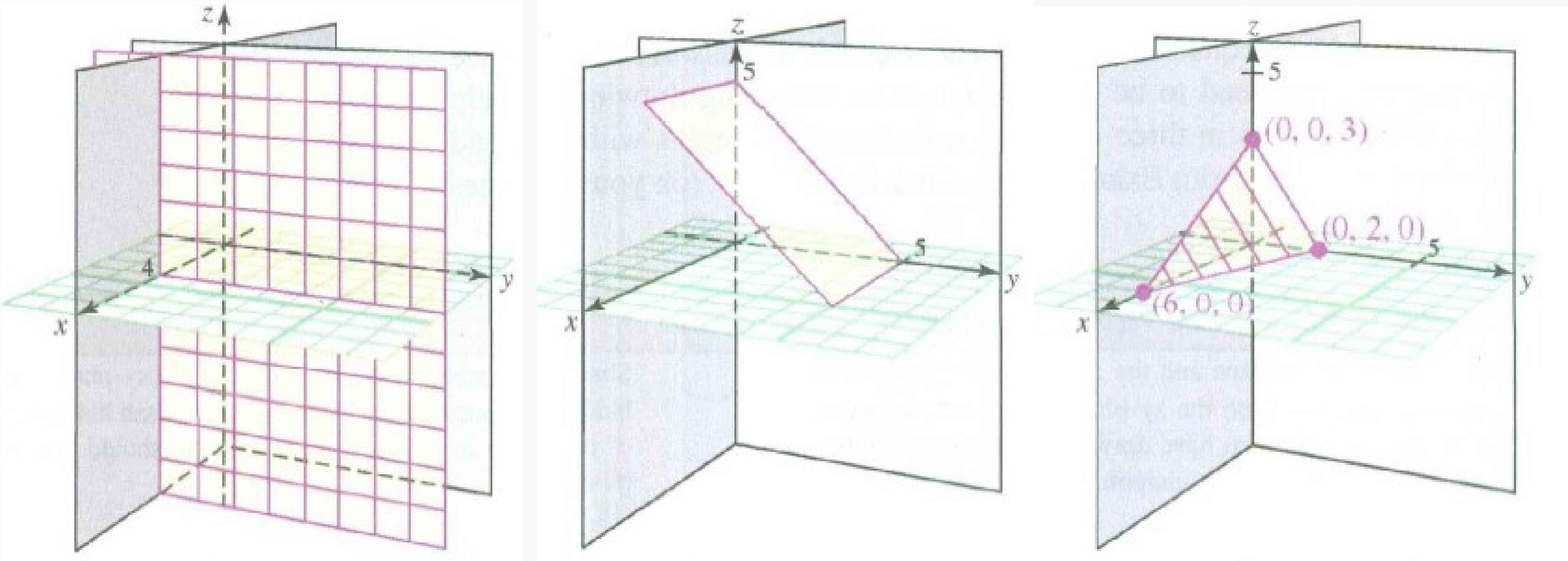
$$\tan\theta = \frac{5}{12} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) \approx 0.3948$$



3. Đồ thị trong không gian R^3

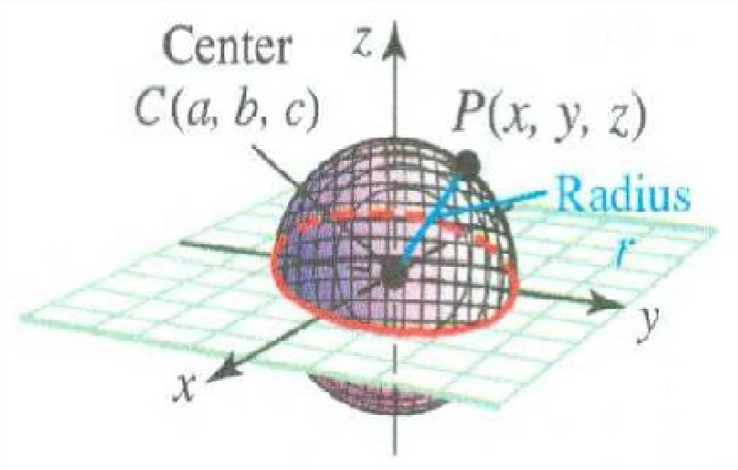
1. Mặt phẳng

$$\boxed{ax + by + cz = d}$$



a. $x = 4$ **b.** $y + z = 5$ **c.** $x + 3y + 2z = 6$

2. Mặt cầu



Phương trình mặt cầu

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2}$$

Ví dụ 14.6

Tìm tâm và bán kính của mặt cầu

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y=20$$

Bài giải

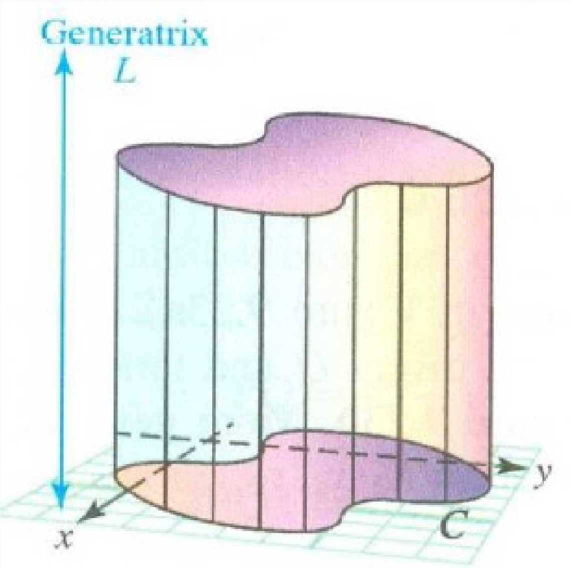
$$(x-2)^2+(y+3)^2+z^2=33$$

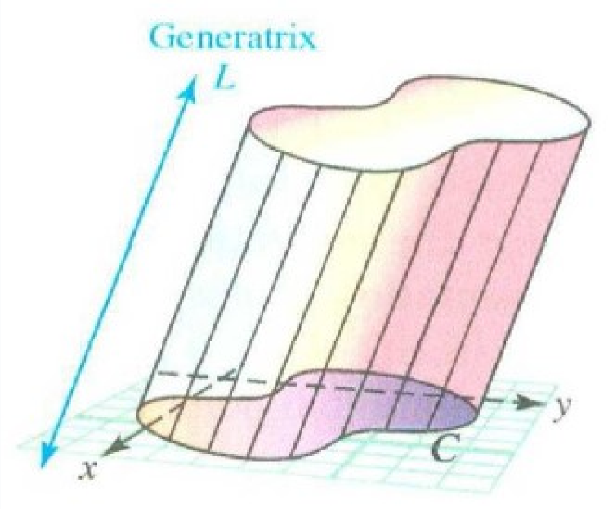
Đường tròn có tâm $I(2,-3,0)$ và bán kính bằng $\sqrt{33}$

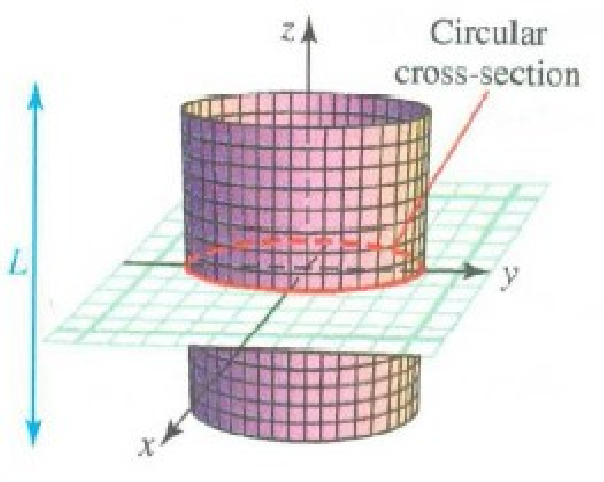
3. Mặt trụ

C: đường chuẩn

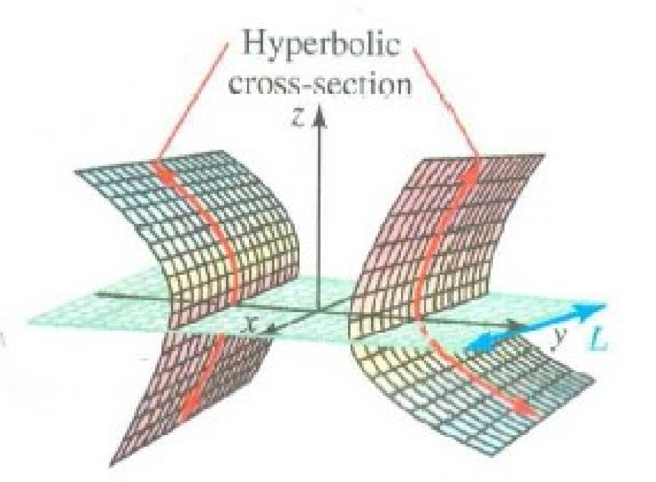
L: đường sinh



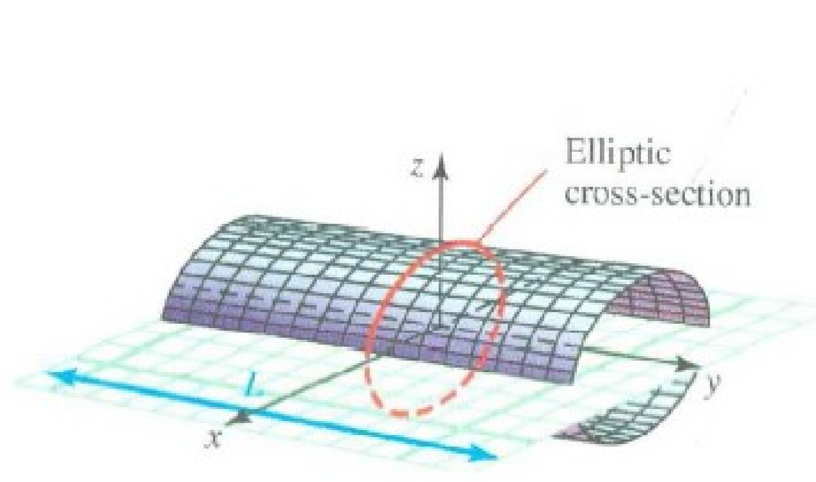




$$x^2 + y^2 = 4$$



$$y^2 - z^2 = 9$$



$$x^2 + 2z^2 = 25$$

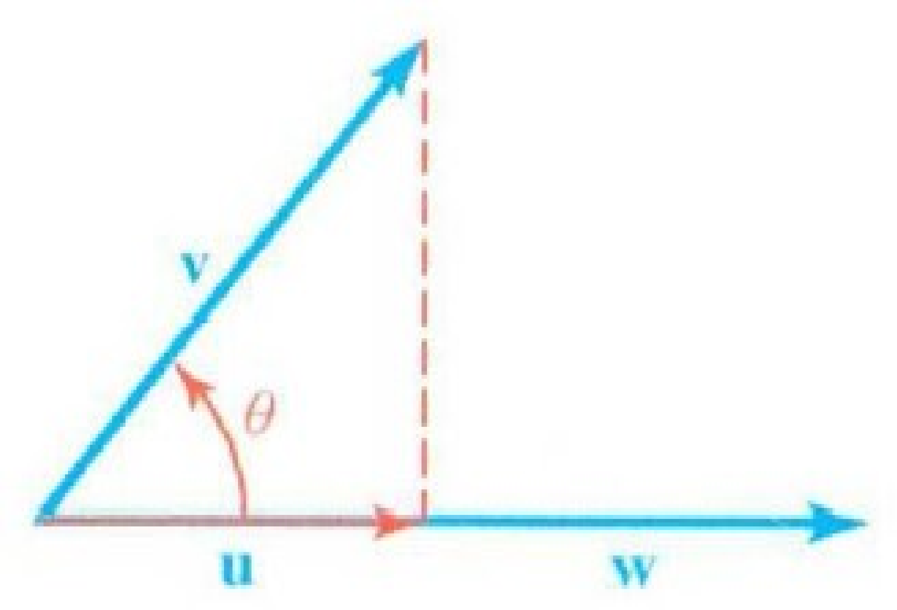
4. Phép chiếu

❖ Phép chiếu vectơ của v trên w:

$$\boxed{proj_w v = \left(\frac{v.w}{w.w}\right) w}$$

❖ Phép chiếu vô hướng của v trên w:

$$\boxed{comp_w v = \frac{v.w}{\|w\|}}$$



Ví dụ 14.11

Tìm phép chiếu vectơ và phép chiếu vô hướng của vectơ

$v = -i + 3j + 2k$

trên vectơ

$w = 2i - j - k.$

Bài giải

Phép chiếu vectơ của *v* lên *w* là

$$proj_w v = \left(\frac{v.w}{w.w}\right)w$$

$$= \frac{-7}{6}\langle 2,-1,-1\rangle = \left\langle \frac{-7}{3}, \frac{7}{6}, \frac{7}{6} \right\rangle$$

Phép chiếu vô hướng của *v* lên *w* là

$$comp_w v = \frac{v.w}{\|w\|} = \frac{-7}{\sqrt{6}}$$

5. Ứng dụng tích vô hướng

Nếu một vật di chuyển dọc theo hướng vector PQ dưới tác dụng của lực F thì công sinh ra là

$$\boxed{W = F.PQ}$$

Ví dụ 14.12

Một cơn gió thổi một lực F có độ lớn 500lb theo hướng 30^o Đông Bắc vào cánh buồm của một con tàu. Hỏi công mà cơn gió thực hiện được để dịch chuyển con tàu một đoạn 100 ft theo hướng Bắc.

Bài giải

$$\begin{cases} PQ = kj \\ \|PQ\| = \sqrt{k^2} = 100 \end{cases} \Rightarrow k = 100 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = 100j$$

Vì $\|F\| = 500\,\text{lb}$ và theo hướng 30^0 ĐB nên:

$$\vec{F} = 500\cos 60^0 i + 500\sin 60^0 j$$

$$= 250i + 250\sqrt{3}j$$

Công cơn gió thực hiện là:

$$W = \vec{F}.\overrightarrow{PQ}$$

$$= 100\left(250\sqrt{3}\right)$$

$$= 25000\sqrt{3} \approx 43301\,(ft - lb)$$