Bài 6.
CÁC KỸ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN – PHẦN 2

Giảng viên: Nguyễn Lê Thi

Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Áp dụng được phương pháp lượng giác
- Áp dụng được phương pháp phân tích hữu tỉ

NỘI DUNG CHÍNH

4 Phương pháp lượng giác

5 Phương pháp phân tích hữu tỉ

6 Tổng hợp kỹ thuật tính tích phân

4. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

1. Tích phân chứa lũy thừa của sin, cos

Dạng 1 (số mũ của sin chẵn, cos lẻ)

$$I = \int \sin^m x \cos^{2n+1} x dx, m, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } m \text{ chẵn.}$$

Phương pháp:

Bước 1: $I = \int \sin^m x \left(\cos^2 x\right)^n \cos x dx$

$$= \int \sin^m x \left(1 - \sin^2 x\right)^n \cos x dx$$

Bước 2: đổi biến $u = \sin x$, chú ý: $du = \cos x dx$

1. Tích phân chứa lũy thừa của sin, cos

Dạng 2 (số mũ của sin lẻ, cos chẵn)

$$I = \int \sin^{2m+1} x \cos^n x dx, m, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ và } n \text{ chẵn.}$$

Phương pháp:

Bước 1: $I = \int \left(\sin^2 x\right)^m \cos^n x \sin x dx$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^m \cos^n x \sin x dx$$

Bước 2: đổi biến $u = \cos x$, chú ý: $du = -\sin x dx$

1. Tích phân chứa lũy thừa của sin, cos

Dạng 3 (số mũ của sin và cos đều lẻ)

$$I = \int \sin^{2m+1} x \cos^{2n+1} x dx, \ m, n \in \mathbb{Z}^{+}$$

Phương pháp:

Áp dụng phương pháp của dạng 1 hoặc dạng 2.

1. Tích phân chứa lũy thừa của sin, cos

Dạng 4 (số mũ của sin và cos đều chẵn)

$$I = \int \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx, \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Phương pháp:

Sử dụng thích hợp các đẳng thức:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Ví dụ 6.1

Tính tích phân bất định

$$I = \int \sin^4 x \cos^3 x dx$$

Bài giải

Ví dụ 6.2

Tính tích phân bất định

$$I = \int \sin^4 x dx$$

Bài giải

2. Tích phân chứa lũy thừa của sec, tan

Dạng cơ bản:

$$I = \int \tan x dx = \ln\left|\sec x\right| + C,$$

$$I = \int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C,$$

2. Tích phân chứa lũy thừa của sec, tan

Dạng 1 (Số mũ của sec chẵn)

$$I = \int \tan^m x \sec^{2n} x dx \qquad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Phương pháp:

Bước 1: $I = \int \tan^m x \left(\sec^2 x\right)^{n-1} \sec^2 x dx$

$$= \int \tan^m x \left(1 + \tan^2 x\right)^{n-1} \sec^2 x dx$$

Bước 2: đổi biến $u = \tan x$, chú ý: $du = \sec^2 x dx$

2. Tích phân chứa lũy thừa của sec, tan

Dạng 2 (Số mũ của tan lẻ)

$$I = \int \tan^{2m+1} x \sec^n x dx \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Phương pháp:

Bước 1: $I = \int \left(\tan^2 x\right)^m \sec^{n-1} x \left(\sec x \tan x\right) dx$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^m \sec^{n-1} x \left(\sec x \tan x\right) dx$$

Bước 2: đổi biến $u = \sec x$, chú ý: $du = \sec x \tan x dx$

2. Tích phân chứa lũy thừa của sec, tan

Dạng 3 (Số mũ của tan chẵn và sec lẻ)

$$I = \int \tan^{2m} x \sec^{2n+1} x dx \quad m, n \in \mathbb{Z}^+$$

Phương pháp:

$$I = \int \left(\tan^2 x\right)^m \sec^{2n+1} x dx$$

$$= \int \left(\sec^2 x - 1\right)^m \sec^{2n+1} x dx$$

Sử dụng công thức 161 – bảng nguyên hàm

$$\int \sec^n (au) du = \frac{\sec^{n-2}(au)\tan(au)}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}(au) du$$

Ví dụ 6.3

Tính tích phân bất định

$$I = \int \sec^3 x dx$$

Bài giải

Ví dụ 6.4

Tính tích phân bất định

$$I = \int \tan x \sec^6 x dx$$

Bài giải

3. Các dạng khác

- ✓ Công thức tích phân từng phần
- ✓ Các đẳng thức lượng giác
- ✓ Một chút khéo léo khi biến đổi đại số

Một số dạng lượng giác khác:

Tích phân	Đẳng thức
$I = \int \sin mx \cos nx dx$	$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$
$I = \int \sin mx \sin nx dx$	$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$
$I = \int \cos mx \cos nx dx$	$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$

Ví dụ 6.5

Tính tích phân bất định

$$I = \int \sin 4x \cos 5x dx$$

Bài giải

5. Đổi biến lượng giác

Bảng quy tắc đổi biến lượng giác

Biểu thức	Đổi biến	Đẳng thức
$\sqrt{a^2 - u^2}$	$u = a\sin\theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + u^2}$	$u = a\tan\theta, \quad -\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{u^2 - a^2}$	$u = a\sec\theta, \quad 0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2} \vee \pi \le \theta < \dfrac{3\pi}{2}$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Chú ý: Điều kiện của θ được bắt buộc để đảm bảo hàm số được đổi biến có hàm ngược.

Ví dụ 6.6

Tính tích phân bất định

$$I = \int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx$$

Bài giải

5. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH HỮU TỈ

1. Dạng mẫu số chứa lũy thừa của *ax+b*

- **Hàm số có dạng:**

$$f(x) = \frac{p(x)}{(ax+b)^n}, \quad \deg p(x) < n,\ p\left(-\frac{b}{a}\right) \neq 0.$$

- **Khi đó,** $f(x)$ **được phân tích như sau:**

$$f(x) = \frac{a_1}{ax+b} + \frac{a_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(ax+b)^n}$$

2. Dạng mẫu số chứa tích các phần tử bậc nhất phân biệt

➢ **Hàm số có dạng:**

$$f(x)=\frac{p(x)}{(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)\ldots(a_nx+b_n)},\quad \deg p(x)<n,\ p\left(-\frac{b_i}{a_i}\right)\neq 0, i=\overline{1,n}.$$

➢ **Khi đó, $f(x)$ được phân tích như sau:**

$$f(x)=\frac{\alpha_1}{a_1x+b_1}+\frac{\alpha_2}{a_2x+b_2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{a_nx+b_n}$$

3. Hàm phân thức chứa sin và cos

➢ **Phương pháp:** Sử dụng phép đổi biến Weierstrass

Bước 1: Với $x \in (-\pi, \pi)$, đặt $u = \tan\dfrac{x}{2}$. Khi đó:

$$\boxed{\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2du}{1+u^2}}$$

Bước 2: Biểu diễn tích phân đã cho theo biến mới u.

❖ Ví dụ minh họa

Ví dụ 6.7

Phân tích A thành tổng các phân thức tối giản

$$A = \frac{x^2 - 6x + 3}{(x-2)^3}$$

Bài giải

Ví dụ 6.8

Tính tích phân bất định

$$A = \int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,dx$$

Bài giải

6. TỔNG HỢP CÁC KỸ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN

1. Các kỹ thuật tính tích phân

Bước 1: Rút gọn và sử dụng các quy tắc tích phân cơ bản

Bước 2: Sử dụng trực tiếp các công thức cơ bản trong bảng nguyên hàm

Bước 3: Đổi biến → tích phân dạng cơ bản

Bước 4: Đổi biến → sử dụng bảng nguyên hàm

Bước 5: Thử lại, có thể biến đổi nhân với “1”

2. Các dạng tích phân đặc biệt cần nhớ

2.1 Tích phân từng phần

2.2 Dạng lượng giác

2.3 Dạng căn thức

2.4 Dạng hữu tỉ

KẾT BÀI

Sinh viên cần lưu ý:

- Biết chọn lọc phương pháp tính tích phân phù hợp
- Nhận dạng và tính được tích phân của hàm lượng giác
- Nhận dạng và tính được tích phân của hàm phân thức hữu tỉ

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Tính tích phân bất định:

$a.\quad \int \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^2(x-1)}dx$ $\qquad b.\quad \int \cos^2(2t)\,dt$

$c.\quad \int \sin 3x \sin 5x\,dx$ $\qquad d.\quad \int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

ĐÁP ÁN

$$a.\quad \frac{x^2}{2}+x+\frac{2}{x}+2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$$

$$b.\quad \frac{1}{2}t+\frac{1}{8}\sin 4t+C$$

$$c.\quad \frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$$

$$d.\quad \frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+C$$

THANKS FOR WATCHING!