

## Bài tập Giải tích 1

### 1. Giới hạn hàm số

Chú ý:

+ Các dạng vô định  $\frac{0}{0}$  (vd1),  $\frac{\infty}{\infty}$  (vd2),  $\infty - \infty$  (vd3),  $0 \cdot \infty$  (vd4),  $1^\infty$  (vd5),  $0^0$  (vd6) ở đây (vd1) = vô định 1, ... Các dạng vô định đều đưa được về dạng (vd1) hoặc (vd2) (SV xem lại vở ghi).

+ Dạng vô định  $\frac{0}{0}$  (vd1),  $\frac{\infty}{\infty}$  (vd2) có thể áp dụng qui tắc L'Hospital (chú ý các điều kiện của định lý khi áp dụng)

+ Sử dụng các kết quả giới hạn đã liệt kê trong tài liệu tham khảo (cuối chương)

+ Các phương pháp thường dùng tính giới hạn dạng  $\frac{0}{0}$ : L'Hospital; phân tích thành nhân tử ở cả tử và mẫu; liên hợp; đưa về các giới hạn đã biết; tổ hợp các phương pháp trên.

### Bài 1. Tính các giới hạn

$$\begin{array}{lll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6} \quad (*15/11*) & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x} \quad (*3/4*) & \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}} \quad (*3/2*) \\ \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}} \quad (*3/2*) & \text{v) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9} \quad (*0*) & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3} \quad (*3*) \\ \text{vii) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x+1} \quad (*1/2*) & \text{viii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{-1+\sqrt[3]{x+1}} \quad (*3/2*) & \text{ix) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x-x^2}{x-2} \quad (*4\ln 2-4*) \end{array}$$

### Bài 2. Tính các giới hạn

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \quad (*1/2*) & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \quad (*1/2*) \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x^2} \quad (*\pi/2*) & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)} \quad (*-4*) \\ \text{v) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{6})}{\sqrt{3}-2\cos x} \quad (*1*) & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-\sin x}^2} \quad (*\infty*) \\ \text{vii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (*1/4*) & \text{viii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} \quad (*1*) \\ \text{ix) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x} \quad (*-1/4*) & \text{x) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x} \quad (*2/\pi*) \end{array}$$

$$\text{xi) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan^2 x}{\sqrt{2 \cos x} - 1} \quad (*4*)$$

$$\text{xii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \tan x} - \sqrt{1 + \tan x}}{\sin 2x} \quad (*-1/2*)$$

Chú ý:

+ Nhớ lại hình tròn đơn vị và các trục: cos, sin, tan, cot (xem lại bài giảng trên lớp)

+ ôn lại các công thức lượng giác như

$$\begin{aligned} &+) \cos^2 x + \sin^2 x = 1; &+) \sin x + \sin y = &+) \tan(x+y) = &+) \sin x \sin y = \\ &+) \sin 2x = \dots &+) \sin x - \sin y = &+) \cot(x+y) = &+) \sin x \cos y = \\ &+) \cos 2x = &+) \cos x + \cos y = &+) \tan(x-y) = &+) \cos x \cos y = \\ &+) \sin 3x = &+) \cos x - \cos y = &+) \cot(x-y) = \\ &+) \cos 3x = \end{aligned}$$

### Bài 3. Tính các giới hạn

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan 2x}{\cot g(\frac{\pi}{4} - x)} \quad (*1/2*)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right) \quad (*1/4*)$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left( \sqrt{\tan^2 x + \frac{1}{\cos x}} - \tan x \right) \quad (*1/2*)$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin 2x} - \cot gx \right) \quad (*0*)$$

$$\text{v) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (*1*)$$

$$\text{vi) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) \quad (*0*)$$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x}) \quad (*1/2*)$$

$$\text{viii) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \tan x - \frac{1}{\cos x} \right) \quad (*0*)$$

### Bài 4. Tính các giới hạn

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tan \frac{\pi x}{2}$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \frac{1}{\sin(3\frac{\pi}{4} + x)} \quad (*1*)$$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cot g 2x \cdot \cot g \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \arctan x \quad (*1*)$$

## 2. Liên tục

Định nghĩa: hàm  $f(x)$  liên tục tại  $x_0$  nếu  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Chú ý:

+ Hàm sơ cấp liên tục tại mọi điểm xác định của nó

+ Chú ý các hàm có bước nhảy

**Bài 1.** Khảo sát tính liên tục của hàm số

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = \frac{|2x-3|}{2x-3} & \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin x, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} 4.3^x, & x < 0 \\ 2a+x, & x \geq 0 \end{cases} \\ \text{d) } f(x) = x + \frac{2+x}{|2+x|} & \text{e) } f(x) = \frac{2|x-1|}{x^2-x^3}. \end{array}$$

**Bài 2.** Tính các giới hạn sau

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} (1-2x^3)^{\frac{1}{x^3}} (*e^{-2}*) & \text{ii) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x (*e^{-2}*) \\ \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} (*e^{\frac{-1}{2}}*) & \text{iv) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} (*1*) \\ \text{v) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}\right)^x (*e^2*) & \text{vi) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}} \\ \text{vii) } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} (*-9/2*) & \text{viii) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x} (*e^{\frac{-1}{2}}*) \end{array}$$

Gợi ý: Sử dụng tính liên tục của hàm  $e^x$  hoặc dùng  $\ln$ . (xem lại bài giảng trên lớp)

### 3. Đạo hàm

**Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm sau

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y = \ln(\operatorname{arctg} x) (*y' = e^{\operatorname{arcsin} x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}*) & \\ \text{b) } 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} (*y' = 4 \cdot \ln 3 \cdot (2x+5) \cdot 3^{\operatorname{tg}^4(x^2+5x)} \cdot \operatorname{tg}^3(x^2+5x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2+5x)}*) & \\ \text{c) } f(x) = \cos(2^x - x^3) (*y' = -\sin(2^x - x^3)(2^x \ln 2 - 3x^2)*) & \end{array}$$

**Bài 2.** Tính các đạo hàm cấp cao:

$$\text{a) } y = x^3 e^x \quad (*y^{(n)} = (x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + 6n)e^x*)$$

$$\text{b) } y = \frac{1}{x+2} \quad (* y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}} *)$$

$$\text{c) } y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (* y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{4} \left( \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}} \right) *)$$

$$\text{d) } y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (* y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x-1)^n} + \frac{1}{(x+2)^n} *)$$

$$\text{e) } y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{f) } y = x^2 \cos 2x$$

Nhớ lại:

+ Tính bằng phương pháp qui nạp.

+ Dùng công thức Leibnitz.

**Bài 3.** Tính gần đúng các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \sin 29^0; \quad B = \arctg 0,98; \quad C = \sqrt{\frac{(2,037)^2 - 3}{(2,037)^2 + 5}}$$

$$\text{b) } D = \sqrt{3.99}; \quad E = \ln 1.01$$

Nhớ lại: CT tính gần đúng (Bài giảng trên lớp)

**Bài tập khử các dạng vô định**

**Bài 4.** Tính các giới hạn sau ( $\frac{0}{0}$ )

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{-2ax}}{\ln(1+x)} \quad (*3a*)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2x+1} + 1}{\sqrt{2+x} + x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x^2}{\ln(\cos(2x^2 - x))}$$

**Bài 5.** Tính các giới hạn sau ( $0 \cdot \infty$ )

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \quad (*-1*)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\pi - 2 \arctg x) \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x$$

**Bài 6.** Tính các giới hạn sau ( $\infty - \infty$ )

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x^2} - \cot g^2 x \right]$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{1-x} \right]$$

**Bài 7.** Tính các giới hạn sau ( $0^0$ , hoặc  $\infty^0$ )

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{6}{1+2\ln x}} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2 + 1})^{\frac{1}{x^2}} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\cot x} \end{array}$$

**Bài 8.** Tính các giới hạn sau (\* Các giới hạn không áp dụng được quy tắc L'Hospital \*)

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x} & \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} \end{array}$$

Chú ý:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \tan x$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cot x$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  không tồn tại

**Bài 9.** Khai triển Taylor, Maclaurin

$$\begin{array}{llll} \text{a) } y = e^x & \text{b) } y = \sin x & \text{c) } y = \cos x & \text{d) } y = (1+x)^m \\ \text{e) } y = \frac{1}{1 \pm x} & \text{f) } y = \ln(1 \pm x) & \text{g) } y = \frac{x^2 + 5}{x^2 + x - 12} & \text{h) } y = \frac{1}{x^4 - 3x^2 - 4} \\ \text{i) } y = \ln \frac{3+x}{2-x} & \text{k) } y = \cos^3 x & \text{l) } y = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 \text{ theo } (x-2) \end{array}$$

#### 4. Tích Phân

**Bảng nguyên hàm của các hàm cơ bản**

$$\begin{array}{ll} 1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 & 2. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C \\ 3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C & \int e^x dx = e^x + C \\ 4. \int \cos x dx = \sin x + C; \int \sin x = -\cos x + C \\ 5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C; \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \\ 6. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arccotg} \frac{x}{a} + C' \\ 7. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C' \end{array}$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$9. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

**Bài 1.** Tính (\*Dùng bảng nguyên hàm cơ bản\*)

$$a) \int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2-4x}}$$

$$b) \int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$$

$$c) \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}$$

$$d) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$$

$$e) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 1}}$$

$$f) \int \frac{(\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2})dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

**Bài 2.** Tính tích phân (\*bằng phương pháp đổi biến\*).

+ Các dạng đổi biến cơ bản (xem lại bài giảng trên lớp)

$$a) \int x\sqrt{x-5}dx$$

$$b) \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$c) \int \frac{dx}{x \ln x \cdot \ln(\ln x)}$$

$$d) \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

$$e) \int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$g) \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$h) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx$$

$$k) \int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}}$$

**Bài 3.** Tính tích phân (\*bằng phương pháp tích phân từng phần\*).

+ Công thức  $\int u dv = uv - \int v du$

+ Cách chọn các hàm u, dv của một số trường hợp thường gặp xem lại bài giảng trên lớp

$$a) \int x^2 \ln x dx$$

$$b) \int \arctg x dx$$

$$c) \int x^2 e^{-x} dx$$

$$d) \int (3x^2 + 5) \arctg x dx$$

$$e) \int e^{5x} \cos 4x dx$$

$$f) \int \cos(\ln x) dx$$

**Bài 4.** Tính tích phân (biểu thức hữu tỉ)

+ Các phương pháp hay dùng (xem bài giảng trên lớp)

$$a) \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 25}$$

$$b) \int \frac{(3x-1)dx}{x^2 - 4x + 8}$$

$$c) \int \frac{(2x^3 + 3x)dx}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d)} \int \frac{dx}{(x^2+1)^3} & \text{e)} \int \frac{2xdx}{(x^2+x+1)^2} & \text{f)} \int \frac{(x^2+2x+6)dx}{x^3-7x^2+14x-8} \\ \text{g)} \int \frac{(x^2+1)dx}{(x-1)^3(x+3)} & \text{h)} \int \frac{(x^3+3x^2+5x+7)dx}{x^2+2} & \end{array}$$

**Bài 5.** Tính tích phân (các hàm vô tỉ)

+ Các phương pháp hay dùng (xem bài giảng trên lớp)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{(x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x})dx}{x(1+\sqrt[3]{x})} & \text{b)} \int \frac{(2x-3)^{\frac{1}{2}}dx}{(2x-3)^{\frac{1}{3}}+1} & \text{c)} \int \frac{2}{(2-x)^2} \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} dx \\ \text{d)} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} & \text{e)} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} & \text{f)} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+2x+3}} \\ \text{g)} \int \frac{(5x-3)dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} & \text{h)} \int \frac{(x^3-x+1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}} & \text{k)} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} \\ \text{l)} \int \sqrt[3]{x}(2+\sqrt{x})^2 dx & \text{m)} \int \frac{(\sqrt{1+\sqrt[3]{x}})dx}{\sqrt[3]{x^2}} & \end{array}$$

**Bài 6.** Tính tích phân (các hàm lượng giác)

+ Các phương pháp hay dùng (xem bài giảng trên lớp)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5} & \text{b)} \int \frac{(\sin x+\sin^3 x)dx}{\cos 2x} & \text{c)} \int \frac{(\cos^3 x+\cos^3 x)dx}{\sin^2 x+\sin^4 x} \\ \text{d)} \int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}} & \text{e)} \int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x-1)} & \text{f)} \int \frac{dx}{\sin x \sin 2x} \\ \text{g)} \int \sin^4 x \cos^5 x dx & \text{h)} \int \frac{\sin^3 x dx}{\cos x \sqrt[3]{\cos x}} & \text{k)} \int \sin 2x \cos 5x dx \\ \text{l)} \int \sin 2x \sin 5x dx & \text{m)} \int \cos 3x \cos 5x dx & \end{array}$$

**Bài 4.** Tính tích phân (các hàm số khác)

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \sin^2 x \sin 3x dx & \text{b)} \int \frac{\ln x dx}{x^3} & \text{c)} \int \frac{(x^2-2)\arctg x dx}{(x^2+1)} \end{array}$$

$$d) \int \frac{\ln x dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$e) \int \frac{e^x dx}{(1+e^{2x})^2}$$

$$f) \int \frac{e^{\alpha \arctg x} dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

## 1. Tích phân xác định

**Bài 1.** Tính các tích phân sau

$$a) \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx \quad b) \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$$

$$c) \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

$$d) \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$$

$$e) \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{5x+1}} dx$$

$$f) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

**Bài 2.** Tính các tích phân sau bằng phương pháp đổi biến

$$a) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$$

$$b) \int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$$

$$c) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\cos x} dx$$

$$d) \int_0^{2a} \sqrt{2ax-x^2} dx$$

$$e) \int_0^a x^2 \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}} dx \quad (a > 0)$$

**Bài 3.** Tính các tích phân sau bằng phương pháp tích phân từng phần

$$a) \int_0^1 x \arctg x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$b) \int_0^{\pi/b} e^{ax} \sin bxdx$$

$$c) \int_1^e \ln^3 x dx$$

$$d) \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx$$

$$e) \int_0^1 x \arctg x dx$$

$$f) \int_0^1 \arctg \sqrt{x} dx$$

$$g) \int_0^1 e^{-x} \ln(e^x+1) dx$$

$$h) \int_0^1 x \arctg x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

## 2. Tích phân suy rộng

**Tích phân suy rộng loại 1**

**Bài 1.** Tính các tích phân suy rộng sau (nếu nó hội tụ)

$$1. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}$$

$$2. \int_0^{+\infty} x \sin x dx$$

$$3. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx$$

$$4. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$



$$\begin{array}{llll}
5. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2-3)^3} & 6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} & 7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5} & 8. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^a} \\
9. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+2x^2+5} & 10. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2+1} & 11. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx & \\
12. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \frac{1}{x^2+1} dx & 13. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3+2} dx}{2x^2+x-1} & 14. \int_0^{+\infty} \frac{2xdx}{\sqrt{x^5+x+1}} & \\
15. \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\cos \frac{1}{t} dt}{t} & 16. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx & 17. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx & 
\end{array}$$

**Bài 2.** Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau

$$\begin{array}{lll}
a) \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx & b) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx & c) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{10}+1} dx \\
d) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx & e) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx & f) \int_0^{+\infty} \frac{x \arctg x}{\sqrt{1+x^3}} dx
\end{array}$$

### Tích phân suy rộng loại 2

**Bài 1.** Tính các tích phân suy rộng sau (nếu nó hội tụ)

$$\begin{array}{lll}
a) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} & b) \int_0^1 \frac{dx}{1-x^3} & c) \int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}} \\
d) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} & e) \int_0^1 \cos \frac{\pi}{1-x} \cdot \frac{dx}{(1-x)^2} & f) \int_1^2 \frac{dx}{x \ln^p x}
\end{array}$$

**Bài 2.** Khảo sát sự hội tụ của các tích phân sau

$$\begin{array}{lll}
a) \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \quad (a < b) & b) \int_0^1 \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sqrt[5]{1-x^3}} & c) \int_0^1 \frac{\cos x dx}{\sqrt[4]{x + \sin x}}
\end{array}$$

### 3. Áp dụng của tích phân xác định

**Bài 1.** Tính diện tích các hình học phẳng sau

$$\begin{array}{l}
a) y = 2^x, y = 2x - x^2, x = 0, x = 2 \quad b) y = x^2 + 2x - 3, y = 3 - 2x - x^2 \\
c) xy = 20, x^2 + y^2 = 41 \text{ ( trong góc phần tư thứ nhất )}
\end{array}$$

d)  $x = a \cos t, y = a \sin t; 0 \leq t \leq 2\pi$

e)  $\rho = a(1 + \cos \theta)$

f)  $x^3 + y^3 = 3axy$

**Bài 2. Tính độ dài đường cong phẳng**

a) Đường cong  $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$  từ  $x = a$  đến  $x = b$  ( $b > a$ ).

b) Cung đường cong  $x = \cos^5 t, y = \sin^5 t; 0 \leq t \leq \pi/2$

c)  $y = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2 + 2; t_1 = 0, t_2 = 3$

d)  $\rho = a(1 + \cos \theta)$

**Bài 3. Tính thể tích vật thể**

a) Thể tích vật thể cho bởi mặt Elipxoit:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

b) Thể tích vật thể tạo ra khi cho hình giới hạn bởi đường cong  $y^2 = (x-1)^3, x = 2$  quay quanh trục Ox.

**5. Chuỗi số, chuỗi hàm**

**Bài 1. Khảo sát sự hội tụ của các chuỗi**

1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$  2.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n+1}{n}$  4.  $\sum_{n \geq 1} \cos \frac{1}{n}$   
5.  $\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 1}{n^3}$  6.  $\sum_{n \geq 1} n \arctg \frac{1}{n}$

**Bài 2. Tính tổng của các chuỗi sau:**

1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$  2.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$  3)  $1 - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n}$  4.  $\sum_{n \geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

**Bài 3. Dùng các dấu hiệu để khảo sát sự hội tụ của các chuỗi sau:**

1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+5)}$  2.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$  3.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$  4.  $\sum_{n \geq 1} 5^n$   
5.  $\sum_{n \geq 1} \frac{5 + (-1)^n}{4^{n+1}}$  6.  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^n}$  7.  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$  8.  $\sum_{n \geq 1} \frac{3^n n!}{n^n}$   
9.  $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)$  10.  $\sum_{n \geq 1} \frac{5^n}{n!}$  11.  $\sum_{n \geq 2} \frac{5^{3n}}{(2n-3)!}$  12.  $\sum_{n \geq 1} \frac{5^n n!}{n^n}$

$$\begin{array}{llll}
13. \sum_{n \geq 1} \frac{n(n+1)}{3^n} & 14. \sum_{n \geq 1} \frac{n^n}{n!} & 15. \sum_{n \geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} & 16. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} \\
17. \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln(n+1)} & 18. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n} & 19. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} & 20. \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln n}{n} \\
21. \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n-2}{n^2+1} & 22. \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \sin \frac{4}{n} & 23. \sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\alpha}{2^n} & 24. \sum_{n \geq 1} \frac{\sin n\pi}{3}
\end{array}$$

**Bài 4.** Tìm miền hội tụ và tính tổng của các chuỗi lũy thừa sau trong khoảng hội tụ:

$$\begin{array}{llll}
1. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} & 2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{2^n n} & 3. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} & 4. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n} \\
5. \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n x^{n+1}}{n} & 6. 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)x^n}{n!} & 7. \sum_{n \geq 1} nx^n & \\
8. \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} n^2 x^{n-1} & 9. \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(n-1)} & 10. \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)} & \\
11. \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n-1)} & & & 
\end{array}$$

**Bài 5.** Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm sau:

$$\begin{array}{llll}
1. \sum_{n \geq 1} e^{-nx} & 2. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^n} & 3. \sum_{n \geq 1} \ln^n x & 4. \sum_{n \geq 1} (2-x^2)^n \\
5. \sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n} (2-x)^n & 6. \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n 5^n} & & 
\end{array}$$

**Bài 6.** Khai triển hàm sau thành chuỗi lũy thừa (Taylor) tâm tại  $x_0$

$$\begin{array}{ll}
1) y = \cos x; x_0 = \frac{\pi}{4} & 2) y = \sin^2 x; x_0 = 0 \\
3) y = \frac{e^x - 1}{x}; x_0 = 0 & 4) y = x \ln(1+x^2); x_0 = 0
\end{array}$$