Bài 13.
CHUỖI TAYLOR – MACLAURIN

Giảng viên: Nguyễn Lê Thi
Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Áp dụng được đạo hàm để khai triển hàm số thành đa thức Taylor – Maclaurin, chuỗi Taylor – chuỗi Maclaurin.
- Áp dụng được các khai triển Maclaurin cơ bản.

NỘI DUNG CHÍNH

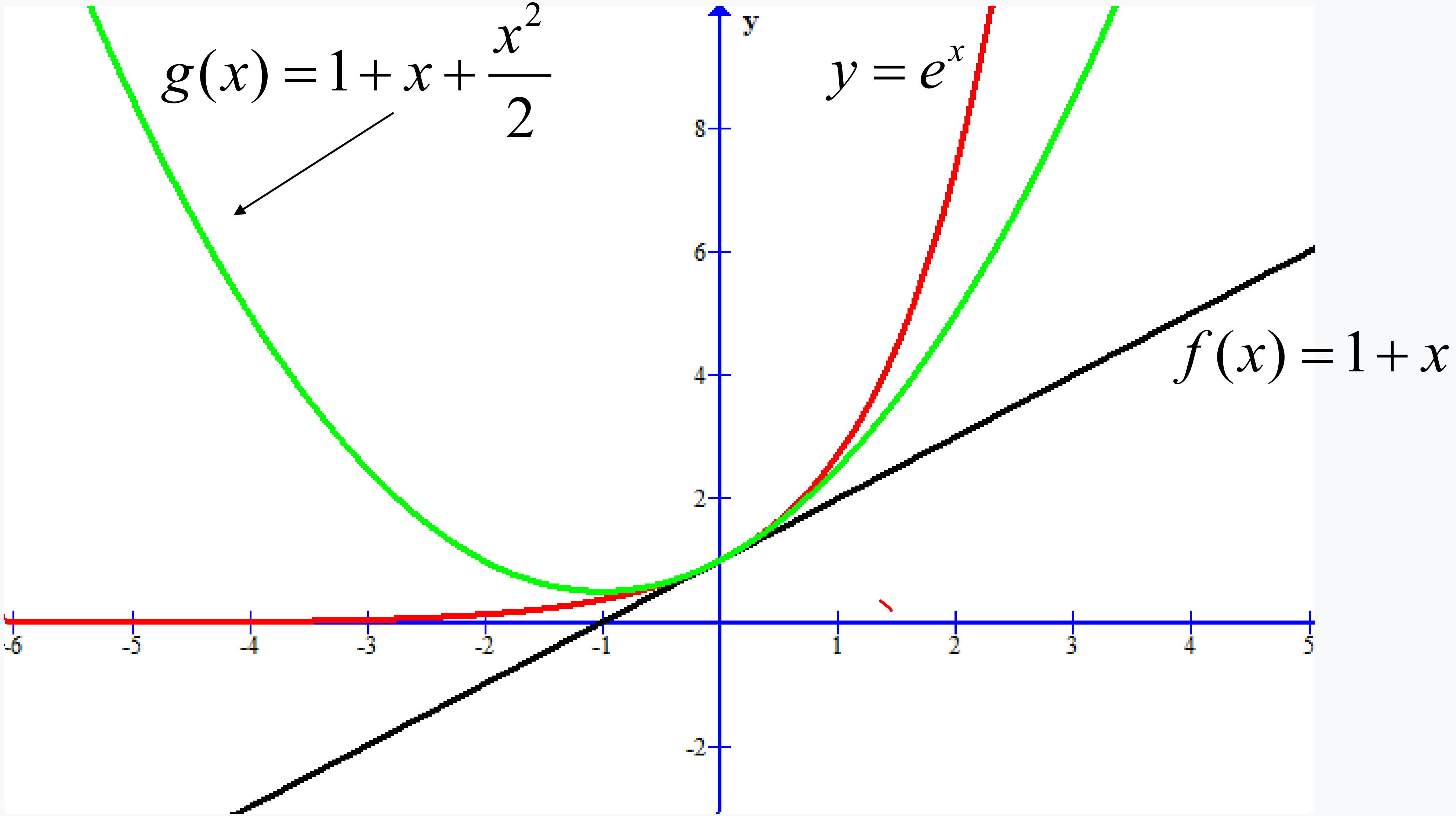
13.1 Đa thức Taylor - Maclaurin

13.2 Chuỗi Taylor - Maclaurin

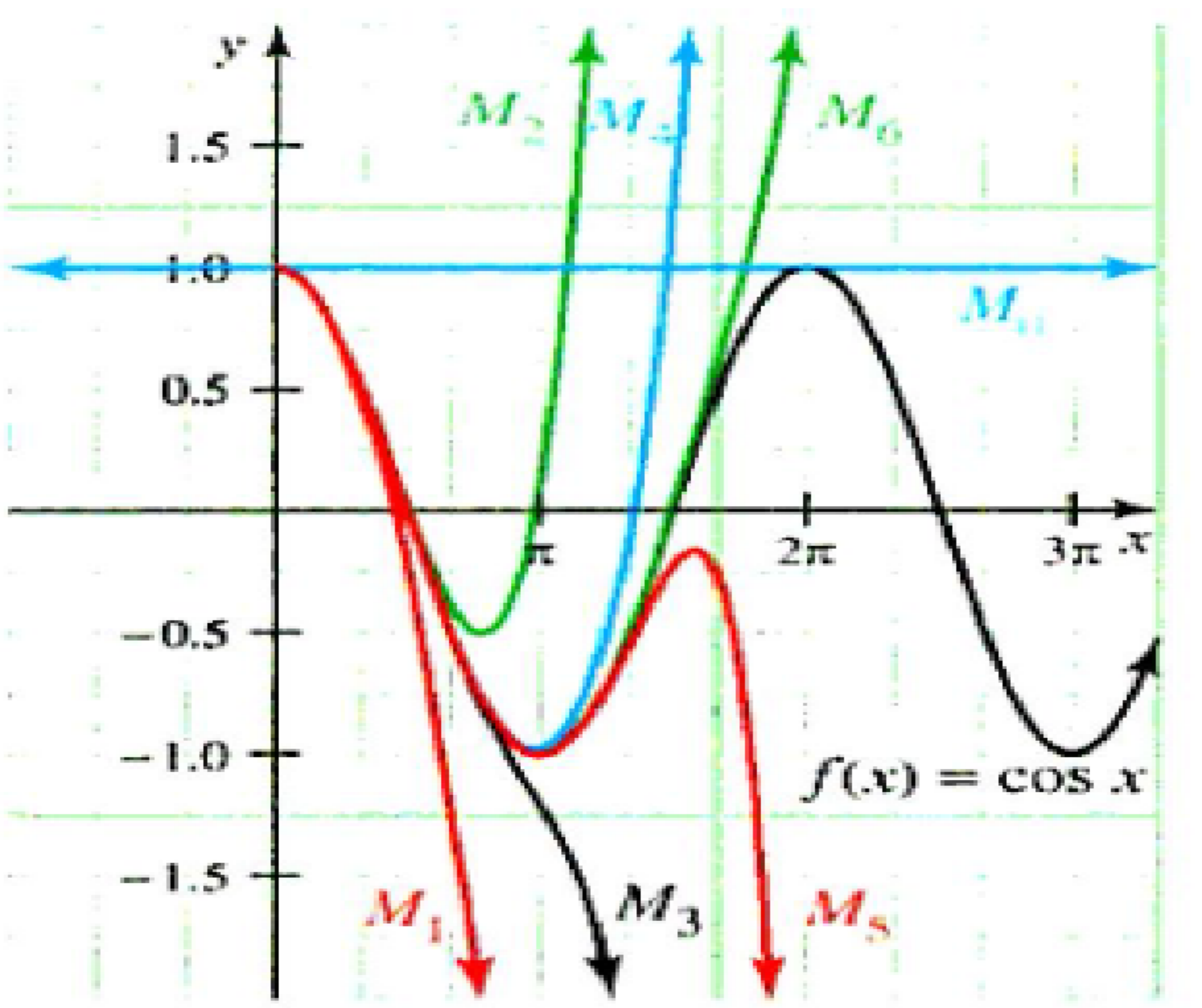
13.3 Các khai triển Maclaurin cơ bản

1. ĐA THỨC TAYLOR – MACLAURIN

❖ Mở đầu



❖ Mở đầu



❖ Định lý Taylor

Nếu $f(x)$ và các đạo hàm của nó xác định trong khoảng mở U chứa x_0 thì với mọi x thuộc U ta có

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}_{\textit{Đa thức Taylor}} + R_n(x)$$

Trong đó

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z_n)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$ là phần dư với z_n nằm giữa x_0 và x.

Nếu $x_0 = 0$ thì đa thức Taylor gọi là đa thức Maclaurin.

Ví dụ 13.1.

Viết đa thức Taylor bậc 1 và bậc 2 của hàm

$$f(x) = \sqrt{x}$$

trong lân cận của điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 13.1 (tiếp theo)

2. CHUỖI TAYLOR – MACLAURIN

❖ Định nghĩa

- Giả sử có một khoảng mở U chứa điểm x_0 trong đó $f(x)$ và các đạo hàm của nó tồn tại. Khi đó chuỗi lũy thừa

$$f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}\ x-x_0\ +\frac{f^{''}(x_0)}{2!}\ x-x_0\ ^{2}\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\ x-x_0\ ^{n}+\ldots.$$

được gọi là chuỗi Taylor của f tại $x = x_0$.

- Trường hợp đặc biệt khi $x_0 = 0$ thì được gọi là chuỗi Maclaurin của f.

$$f(0)+\frac{f^{'}(0)}{1!}x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

❖ Tính chất của chuỗi Taylor - Maclaurin

- Chuỗi Taylor của *f* có thể hội tụ về *f* trong khoảng hội tụ của nó $-R < x - x_0 < R$ (nghĩa là $|x - x_0| < R$).
- Chuỗi Taylor có thể chỉ hội tụ duy nhất tại $x = x_0$ và trong trường hợp này nó không thể biểu diễn hàm *f* trên bất cứ một khoảng nào chứa x_0.
- Chuỗi Taylor có thể tồn tại bán kính hội tụ $R > 0$ (thậm chí $R = \infty$). Tuy nhiên nó có thể hội tụ về hàm *g* không bằng hàm *f* trên khoảng $|x - x_0| < R$

Ví dụ 13.2.

Khai triển hàm

$$f(x) = \cos x$$

thành chuỗi Maclaurin và tìm miền hội tụ của chuỗi.

Ví dụ 13.2 (tiếp theo)

3. CÁC KHAI TRIỂN MACLAURIN CƠ BẢN

1. $e^{u} = 1 + u + \dfrac{u^{2}}{2!} + \ldots + \dfrac{u^{n}}{n!} + \ldots, \forall u \in R$

2. $\cos u = 1 - \dfrac{u^{2}}{2!} + \dfrac{u^{4}}{4!} - \ldots + (-1)^{n} \dfrac{u^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \forall u \in R$

3. $\sin u = u - \dfrac{u^{3}}{3!} + \dfrac{u^{5}}{5!} - \ldots + (-1)^{n} \dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \forall u \in R$

4. $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^{2} + u^{3} + \ldots + u^{n} + \ldots, \forall u \in \; -1,1$

5. $(1+u)^{p} = 1 + pu + \dfrac{p(p-1)}{2!}u^{2} + \dfrac{p(p-1)(p-2)}{3!}u^{3} \ldots, \forall u \in (-1,1)$

6. $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^{2}}{2} + \dfrac{u^{3}}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{u^{n}}{n} + \ldots, \forall u \in (-1,1]$

7. $\tan^{-1} u = u - \dfrac{u^{3}}{3} + \dfrac{u^{5}}{5} - \ldots + (-1)^{n} \dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)} + \ldots, \forall u \in [-1,1]$

Ví dụ 13.4.

Tìm chuỗi Maclaurin của hàm

$$f(x) = \sin^2 x$$

KẾT BÀI

Sinh viên cần lưu ý:

- Áp dụng được công thức khai triển hàm thành đa thức Taylor – Maclaurin.
- Áp dụng được các khai triển Maclaurin cơ bản.

THANKS FOR WATCHING!