

BÀI TẬP CHƯƠNG 6

Bài 6.1. Phác họa miền bị giới hạn bởi các đường cong được cho sau đây và tìm diện tích của nó:

$$y = x^2, y = x, x = -1, x = 1$$

$$y = 6x^2, y = 0, x = 1, x = 5.$$

$$y = 4x^3, y = 0, x = 1, x = 4.$$

$$y = x^3, y = x, x = -1, x = 1$$

$$y = x^2, y = x^3$$

$$y = x^2, y = \sqrt[3]{x}$$

$$y = x^2 - 1, x = -1, x = 2, y = 0$$

$$y = x^4 - 3x^2, y = 6x^2$$

$$x = 8 - y^2, x = y^2$$

$$x = 2 - y^2, x = y$$

$$y = x^2 + 3x - 5, y = -x^2 + x + 7$$

$$y = 2x^3 + x^2 - x - 1, y = x^3 + 2x^2 + 5x - 1$$

$$y = \sin x, y = \cos x, x = 0, x = \frac{\pi}{4}$$

$$y = \sin x, y = \sin 2x, x = 0, x = \pi$$

$$y = |x|, y = x^2 - 6$$

$$y = |4x - 1|, y = x^2 - 5, x = 0, x = 4$$

Bài 6.2. Chứng minh rằng, miền phẳng được xác định bởi các bất đẳng thức sau:

$$x^2 + y^2 \leq 8, x \geq y, y \geq 0 \text{ có diện tích bằng } \pi \text{ (đvdt).}$$

Bài 6.3. Tìm diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ và các trục tọa độ.

Bài 6.4. Một công ty S đã tìm ra hàm chi phí để sản xuất ra sản phẩm thứ x được cho bởi công thức: $C(x) = \frac{100}{\sqrt{x+25}} + 50$.

Hỏi tổng chi phí để sản xuất ra 2000 sản phẩm là bao nhiêu?

Bài 6.5. Doanh thu biên và chi phí biên theo ngày (đơn vị: \$) được xác định theo tháng thứ t bởi công thức: $R'(t) = 500e^{0,01t}$ và $C(t) = 50 - 0,1t$. Hãy tính tổng lợi nhuận trong năm đầu tiên.

Bài 6.6. Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi quay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh trục Ox:

1. $y = \sqrt{x}$, với $0 \leq x \leq 1$

2. $y = \sqrt[3]{x}$, với $0 \leq x \leq 8$

3. $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$

4. $x = 0$, $x = 1$, $y = x + 1$, $y = x + 2$

5. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

6. $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $0 \leq x \leq 2$.

Bài 6.7 Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi quay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh trục Oy:

1. $y = 2x$, $y = 1$ và trục Oy

2. $y = \sqrt{x}$, $y = 1$ và trục Oy

3. $y = 1 - x^2$ trục Oy và tia Ox

4. $y = x^2$, $y = 1 - x^2$ trục Oy, $x \geq 0$

5. $y = e^{-x^2}$, $y = \frac{1}{2}$ và trục Oy.

Bài 6.8. Tính thể tích của vật thể được tạo ra khi quay miền bị giới hạn bởi các đường cong sau quanh một đường thẳng tương ứng:

1. $y = 2 - \frac{1}{2}x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$ quanh Ox.

2. $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 5$ quanh Ox.

3. $x = 2\sqrt{y}$, $x = 0$, $y = 9$ quanh Oy.

4. $x = y - y^2$, $x = 0$ quanh Oy.

5. $y = \frac{1}{4}x^2$, $y = 5 - x^2$, $x \geq 0$ quanh Ox.

6. $y = x^2$, $x = y^2$ quanh đường thẳng: $y = 1$.

7. $y = x^2$, $y = 4$ quanh đường thẳng: $y = 4$.

8. $y = 1 + \sec x, y = 3$ quanh đường thẳng: $y = 1$.

9. $y = \sin x, y = \cos x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ quanh đường thẳng: $y = -1$.

10. $y = x^2, x = y^2$ quanh đường thẳng: $x = -1$.

11. $x = y^2, x = 1 - y^2$ quanh đường thẳng: $x = 3$.

12. $y = x, y = 0, x = 2, x = 4$ quanh đường thẳng: $x = 1$.

Bài 6.9. Vẽ đồ thị của các đường cong sau trong tọa độ cực:

1. $r = 3, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

2. $\theta = -\frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 3$

3. $r = 2\theta, \theta \geq 0$

4. $r = \theta + 1, 0 \leq \theta \leq \pi$

5. $r = 2 \cos \theta$

6. $r = 5 \sin 3\theta$

7. $r^2 = 16 \cos 2\theta$

8. $r = 3 \cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$

9. $r = 5 \cos 3\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

10. $r = \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$

11. $r = 2 + \cos \theta$

12. $r^2 = 16 \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

13. $r = 1 + \sin \theta$

14. $r \cos \theta = 2$

15. $r = 1 + 3 \cos \theta$

16. $r = -2 \sin \theta$

Bài 6.10. Tìm tất cả các điểm giao nhau của các đường cong cực được cho bởi:

1. $\begin{cases} r = 4 \cos \theta \\ r = 4 \sin \theta \end{cases}$

2. $\begin{cases} r = 4 \sin \theta \\ r = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} r^2 = 9 \cos 2\theta \\ r = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} r = 3\theta \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

$$5. \begin{cases} r = 2(1 + \sin \theta) \\ r = 2(1 - \sin \theta) \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} r^2 = \sin 2\theta \\ r = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} r = 2(1 - \cos \theta) \\ r = 4 \sin \theta \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} r = \frac{4}{1 - \cos \theta} \\ r = 2 \cos \theta \end{cases}$$

Bài 6.11. Tìm diện tích của miền phẳng được giới hạn bởi các đường cong cực: $f(\theta)$, $\theta = a$, $\theta = b$, với $a \leq \theta \leq b$, biết:

1. $f(\theta) = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$
2. $f(\theta) = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/6$
3. $f(\theta) = \sec \theta$, $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$
4. $f(\theta) = \sqrt{\sin \theta}$, $\pi/6 \leq \theta \leq \pi/2$
5. $f(\theta) = e^{\theta/2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
6. $f(\theta) = \sin \theta + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$
7. $f(\theta) = \frac{\theta}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$
8. $f(\theta) = \frac{\theta^2}{\pi}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Bài 6.12. Tìm diện tích tạo bởi của một thông lọng của đường hoa hồng bốn cánh:
 $r = 2 \sin 2\theta$

Bài 6.13. Tìm diện tích của miền được giới hạn bởi đường hoa hồng ba cánh:
 $r = a \sin 3\theta$.

Bài 6.14. Tìm diện tích của miền nằm bên trong đường tròn: $r = 4 \cos \theta$ và nằm bên ngoài đường tròn: $r = 2$.

Bài 6.15. Tìm diện tích của miền nằm bên trong đường tròn: $r = a$ và nằm bên ngoài đường cardioid: $r = a(1 - \cos \theta)$.

Bài 6.16. Tìm diện tích của miền nằm bên trong đường tròn: $r = 6 \cos \theta$ và nằm bên ngoài đường cardioid: $r = 2(1 + \cos \theta)$.

Bài 6.17. Vẽ đồ thị của đường cong cực: $r = 4 + 2\sin \frac{5\theta}{2}$ và tìm diện tích của miền được giới hạn bởi đường cong này.

Bài 6.18. Tìm độ dài cung của các đường cong $y = f(x)$ trên đoạn được chỉ ra như sau:

- | | |
|---|--|
| 1. $f(x) = 3x + 2$ trên $[-1; 2]$ | 2. $f(x) = 5 - 4x$ trên $[-2; 0]$ |
| 3. $f(x) = 1 - 2x$ trên $[1; 3]$ | 4. $f(x) = 1 - 3x$ trên $[0; 1]$ |
| 5. $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + 1$ trên $[0; 4]$ | 6. $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2} + 2$ trên $[1; 4]$ |
| 7. $f(x) = \frac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2}$ trên $[0; 3]$ | 8. $f(x) = \frac{1}{3}(2 + x^2)^{3/2}$ trên $[1; 4]$ |
| 9. $f(x) = \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{5}x^{-3}$ trên $[1; 2]$ | 10. $f(x) = \frac{1}{8}x^2 - \ln x$ trên $[1; 2]$ |
| 11. $f(x) = x^{3/2} - \frac{1}{3}x^{1/2}$ trên $[4; 16]$ | 12. $f(x) = x^3 + \frac{1}{12}x^{-1}$ trên $[1; 2]$ |
| 13. $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1} - \sec^{-1}(e^x)$ trên $[0; \ln 2]$ | |

Bài 6.19. Tìm độ dài cung của đường cong: $9x^2 = 4y^3$ giữa các điểm $(0; 0)$ và $(2\sqrt{3}; 3)$.

Bài 6.20. Tìm độ dài cung của đường cong: $(y + 1)^2 = 4x^3$ giữa các điểm $(0; -1)$ và $(1; 1)$.

Bài 6.21. Tìm độ dài cung của đường cong xác định bởi $\int_1^x \sqrt{t^2 - 1} dt$ trên đoạn $[1; 2]$.

Bài 6.22. Tìm độ dài cung của đường cong xác định bởi $\int_1^x \sqrt{t^2 + 1} dt$ trên đoạn $[0; 1]$.

Bài 6.23. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi quay các đường cong sau quanh trục Ox:

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $f(x) = 2x + 1$ trên $[0; 2]$ | 2. $f(x) = 2x - 1$ trên $[1; 2]$ |
| 3. $f(x) = \sqrt{x}$ trên $[2; 6]$ | 4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^{-1}$ trên $[1; 2]$ |

Bài 6.24. Tìm độ dài cung của các đường cong cực sau:

1. $r = \cos \theta$

2. $r = \sin \theta + \cos \theta$

3. $r = e^{3\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

4. $r = e^{1-\theta}, 0 \leq \theta \leq 1$

5. $r = \theta^2, 0 \leq \theta \leq 1$

6. $r = \cos^2 \frac{\theta}{2}$

7. $r = \sin^2 \frac{\theta}{2}$.

Bài 6.25. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi quay các đường cong cực sau quanh trục Ox:

1. $r = 5, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

2. $r = 1 - \cos \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$

3. $r = \csc \theta, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

4. $r = \cos^2 \frac{\theta}{2}, 0 \leq \theta \leq \pi$

Bài 6.26. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi ta quay cung của đường cong: $y = \frac{1}{3}x^3 + (4x)^{-1}$, với $1 \leq x \leq 3$ quanh trục:

a.) Ox

b.) Oy

Bài 6.27. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi ta quay đường cong:

$x = \frac{3}{5}y^{5/3} - \frac{3}{4}y^{1/3}$, với $0 \leq y \leq 1$ quanh:

a.) trục Oy

b.) trục Ox

c.) đường thẳng $y = -1$.

Bài 6.28. Tìm diện tích của mặt tròn xoay được tạo thành khi quay các cung của các đường cong sau quanh trục Oy:

1. $f(x) = \frac{1}{3}(12 - x)$ trên $[0;3]$

2. $f(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}$ trên $[0;3]$

3. $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3 - x)$ trên $[1;3]$

4. $f(x) = 2\sqrt{4-x}$ trên $[1;3]$

Bài 6.29. Chứng minh rằng, diện tích của mặt tròn xoay khi ta quay phần đồ thị

của hàm số $y = f(x)$, với $a \leq x \leq b$ quanh trục Oy là $S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.