Contents

Chương 7.

Các phương pháp tính tích phân

7.1. ÔN TẬP VỀ PHÉP ĐỔI BIẾN VÀ BẢNG TÍCH PHÂN

7.1.1. Ôn tập về phép đổi biến

Khi đổi biến ta chọn *u*, tính *du*, và sau đó đổi biến để dạng ta đang tính tích phân giống với công thức tính phân đã biết.

<u>Ví dụ 7.1.</u> Tích phân bằng phép đổi biến

Tìm $\int \frac{x^2\,dx}{\left(x^3-2\right)^5}$.

Giải. Đặt $u = x^3 - 2$. Khi đó $du = 3x^2dx$, vì vậy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2dx}{\left(x^3-2\right)^5} &= \int \frac{\frac{du}{3}}{u^5} && \text{(sử dụng đổi biến)}\\ &= \frac{1}{3}\int u^{-5}du = \frac{1}{3}.\frac{u^{-4}}{-4} + C\\ &= -\ \frac{1}{12}\left(x^3-2\right)^{-4} + C\end{aligned}$$

Với tất cả các tích phân bất định, bạn có thể kiểm tra kết quả bằng cách tìm đạo hàm của kết quả vừa tính để xem có bằng với hàm dưới dấu tích phân không. Chẳng hạn,

$$\frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{12}\left(x^3-2\right)^{-4}+C\right] = -\frac{1}{12}\left[-4\left(x^3-2\right)^{-5}\left(3x^2\right)+0\right] = \frac{x^2}{\left(x^3-2\right)^5}. \qquad \blacksquare$$

<u>Ví dụ 7.2.</u> Đưa về dạng của một tích phân đã biết bằng phép đổi biến

Tìm $\int \frac{t\ dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

Giải. Ta chú ý về sự tương tự giữa tích phân đang tính và tích phân cho hàm ngược của hàm sin, nếu ta đặt $u = t^2$. Khi đó $du = 2tdt$ và

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{1-t^4}} = \int \frac{\frac{du}{2}}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} u + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1} t^2 + C$$

■

Phương pháp đổi biến (mục 5.5) rất quan trọng, vì nhiều kỹ thuật được trình bày trong chương này sẽ được sử dụng kết hợp với phép đổi biến. Ví dụ 3 và 4 minh họa thêm các cách đổi biến có thể sử dụng trong bài toán tích phân.

Ví dụ 7.3. Nhân với 1 để được một công thức tích phân

Tìm $\int \sec x\ dx$.

Giải. Nhân hàm dưới dấu tích phân $\sec x$ với $\sec x + \tan x$ và chia cho cùng đại lượng này:

$$\int \sec x\ dx = \int \frac{\sec x\left(\sec x + \tan x\right)}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{du}{u} \qquad \textit{(với } u = \sec x + \tan x \textit{, thì } du = \left(\sec^2 x + \sec x \tan x\right) dx \textit{)}$$

$$= \ln\left|u\right| + C = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

■

Bạn có thể thắc mắc tại sao lại nghĩ đến nhân và chia hàm dưới dấu tích phân $\sec x$ trong ví dụ 3 với $\sec x + \tan x$. Nói rằng ta làm như thế vì "nó hiệu quả" có thể không là câu trả lời thỏa đáng. Tuy nhiên, những kỹ thuật như thế này đã có từ lâu, và nhân với 1 là một phương pháp quan trọng trong toán học để đổi dạng biểu diễn có sẵn sang dạng biểu diễn mới, nhằm giải quyết bài toán dễ dàng hơn.

Ví dụ 7.4. Đổi biến sau một biến đổi đại số

Tìm $\int \frac{dx}{1+e^x}$.

Giải. Đổi biến trực tiếp $u = 1 + e^x$ không giải quyết được bài toán:

$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{\frac{du}{e^x}}{u} = \int \frac{du}{ue^x}$. Đây không là dạng thích hợp vì *x* vẫn chưa bị khử hết.

Thay vào đó, ta viết lại hàm dưới dấu tích phân như sau:

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot \frac{e^{-x}}{e^{-x}} dx \qquad \textit{(nhân với 1)}$$

$$= \int \frac{e^{-x} dx}{e^{-x}+1} \qquad \textit{(đặt } u = e^{-x}+1, \textit{ thì } du = -e^{-x} dx \textit{)}$$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C$$

$$= -\ln\left(e^{-x}+1\right) + C \qquad \left(e^{-x}+1 > 0, \forall x, \textit{ vì vậy } \ln\left|e^{-x}+1\right| = \ln\left(e^{-x}+1\right)\right) \blacksquare$$

Tích phân chứa số hạng có lũy thừa phân số. Khi hàm dưới dấu tích phân chứa các số hạng với lũy thừa phân số, thường cách tốt là chọn đổi biến $x = u^n$, với *n* là số nguyên dương bé nhất mà chia hết cho tất cả các mẫu số của các số mũ (đó là bội chung nhỏ nhất của các mẫu số). Chẳng hạn, nếu hàm dưới dấu tích phân chứa các số hạng như $x^{1/4}, x^{2/3}, x^{1/6}$, thì đổi biến $x = u^{12}$, vì 12 là số nguyên dương bé nhất chia hết cho tất cả các mẫu số của các số mũ 4, 3, 6. Lợi thế của cách giải quyết này là nó đảm bảo lũy thừa phân số của *x* trở thành lũy thừa nguyên của *u*. Như vậy,

$$x^{1/6} = \left(u^{12}\right)^{1/6} = u^2, \quad x^{1/4} = \left(u^{12}\right)^{1/4} = u^3, \quad x^{2/3} = \left(u^{12}\right)^{2/3} = u^8.$$

<u>Ví dụ 7.5.</u> Đổi biến với lũy thừa phân số

Tìm $\int \frac{dx}{x^{1/3}+x^{1/2}}$.

Giải. Vì 6 là số nguyên bé nhất chia hết cho các mẫu số 2 và 3, nên ta đặt $x = u^6$, vì vậy $dx = 6u^5 du$. Ta đổi biến:

$$\int \frac{dx}{x^{1/3} + x^{1/2}} = \int \frac{6u^5 du}{\left(u^6\right)^{1/3} + \left(u^6\right)^{1/2}} = \int \frac{6u^5 du}{u^2 + u^3}$$

$$= \int \frac{6u^3 du}{1+u} \qquad \textit{(Chia } \frac{6u^3}{1+u} = 6u^2 - 6u + 6 + \frac{-6}{1+u}\textit{)}$$

$$= \int \left(6u^2 - 6u + 6 + \frac{-6}{1+u}\right) du = 2u^3 - 3u^2 + 6u - 6\ln\left|1+u\right| + C \qquad \textit{(thay } u = x^{1/6}\textit{)}$$

$$= 2x^{1/2} - 3x^{1/3} + 6x^{1/6} - 6\ln\left(1 + x^{1/6}\right) + C \qquad \textit{(vì } 1 + x^{1/6} > 0\textit{)}.$$

■

7.1.2. Sử dụng bảng tích phân

Để sử dụng bảng tích phân, đầu tiên phân loại dạng tích phân. Để dễ dàng đổi biến, ta sử dụng *u* như là biến của tích phân, và đặt *a, b, c, m, n* biểu diễn các hằng số. Các dạng liệt kê trong phụ lục D như sau:

Dạng cơ bản (công thức 1-29)

Dạng bậc nhất và bậc hai (công thức 30-76)

Các dạng bao gồm $au + b$; $u^2 + a^2$; $u^2 - a^2$; $a^2 - u^2$; $au^2 + bu + c$.

Dạng căn (công thức 77-121)

Các dạng bao gồm $\sqrt{au+b}$; $\sqrt{u^2+a^2}$; $\sqrt{u^2-a^2}$; $\sqrt{a^2-u^2}$

Dạng lượng giác (công thức 122-167)

Các dạng bao gồm $\cos au$; $\sin au$; cả $\sin au$ và $\cos au$; $\tan au$; $\cot au$; $\sec au$; $\csc au$

Dạng lượng giác ngược (công thức 168-182)

Dạng mũ và logarit (công thức 183-200)

Các dạng bao gồm e^{au}; $\ln|u|$.

Có một quan niệm sai thường thấy, đó là tính tích phân sẽ dễ nếu có một bảng sẵn, nhưng thậm chí với một bảng có sẵn có thể vẫn còn một số lượng lớn công việc. Sau khi quyết định dạng áp dụng, phải làm khớp bài toán đang giải quyết với dạng áp dụng bằng việc lựa chọn thích hợp các hằng số. Ta có thể áp dụng nhiều dạng, nhưng khi lấy các kết quả để đạo hàm thì sẽ giống nhau. Trong bảng tích phân không ghi hằng số C, nhưng bạn phải nhớ thêm chúng vào kết quả khi sử dụng bảng để tính tích phân.

Chú ý trong bảng ở phụ lục D có hai loại công thức. Loại thứ nhất cho ra công thức là nguyên hàm, loại thứ hai (gọi là công thức rút gọn (**reduction formula**)) chỉ đơn giản là viết lại tích phân ở một dạng khác.

Ví dụ 7.6. Tích phân sử dụng bảng tích phân

Tìm $\int x^2(3-x)^5\,dx$.

Giải. Ta có thể tính tích phân này bằng sử dụng đổi biến:

$$\int x^2(3-x)^5\,dx = \int (3-u)^2 u^5(-du) \qquad \textit{(Nếu } u = 3-x \textit{ thì } du = -dx\textit{)}$$

$$= \int \left(-u^7 + 6u^6 - 9u^5\right)du = -\frac{u^8}{8} + \frac{6u^7}{7} - \frac{9u^6}{6} + C$$

$$= -\frac{1}{8}(3-x)^8 + \frac{6}{7}(3-x)^7 - \frac{3}{2}(3-x)^6 + C.$$

Mặc dù ví dụ trên không quá khó, nhưng nó nhàm chán, vì thế ta nghĩ cách tìm tích phân này bằng việc sử dụng bảng tích phân. Đây là tích phân chứa dạng $au+b$; ta tìm được công thức 32 với $u = x, a = -1, b = 3, n = 5$.

$$\int x^2(3-x)^5\,dx = \frac{(3-x)^{5+3}}{(5+3)(-1)^3} - \frac{2.(3).(3-x)^{5+2}}{(5+2)(-1)^3} + \frac{3^2(3-x)^{5+1}}{(5+1)(-1)^3} + C$$

$$= -\frac{1}{8}(3-x)^8 + \frac{6}{7}(3-x)^7 - \frac{3}{2}(3-x)^6 + C$$ ■

Ví dụ 7.7. Tích phân sử dụng công thức rút gọn từ bảng tích phân

Tìm $\int \left(\ln x\right)^4 dx$.

Giải. Hàm dưới dấu tích phân có dạng logarit; từ bảng tích phân ta thấy rằng áp dụng công thức 198, phụ lục D, với $u = x, n = 4$. Công thức này là công thức rút gọn (**reduction formula**) vì ta có thể tính tích phân cho trước qua một tích phân cùng dạng nhưng với lũy thừa thấp hơn.

$$\int \left(\ln x\right)^4 dx = x\left(\ln x\right)^4 - 4\int \left(\ln x\right)^{4-1} dx \qquad \textit{(công thức 198)}$$

$$= x\left(\ln x\right)^4 - 4\left[x\left(\ln x\right)^3 - 3\int \left(\ln x\right)^{3-1} dx\right] \qquad \textit{(công thức 198)}$$

$$= x\left(\ln x\right)^4 - 4x\left(\ln x\right)^3 + 12\int \left(\ln x\right)^2 dx$$

$$= x\left(\ln x\right)^4 - 4x\left(\ln x\right)^3 + 12\left[x\left(\ln x\right)^2 - 2x\ln x + 2x\right] + C \qquad \textit{(công thức 197)}$$

$$= x\left(\ln x\right)^4 - 4x\left(\ln x\right)^3 + 12x\left(\ln x\right)^2 - 24x\ln x + 24x + C$$ ■

Chú ý từ ví dụ trên rằng ta ghi hằng số C chỉ sau khi tính tích phân cuối cùng (thay vì ghi các hằng số $C_1, C_2, \ldots$ ở mỗi tích phân tích được, vì $C_1 + C_2 + \ldots = C$ cũng là một hằng số bất kỳ).

Thông thường ta cần đổi biến trước khi sử dụng một trong những công thức tích phân, điều này được chỉ ra ở ví dụ sau.

<u>Ví dụ 7.8.</u> Sử dụng bảng tích phân sau đổi biến

Tìm $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-5x^2}}$.

Giải. Tích phân này có dạng $\sqrt{a^2-u^2}$, nhưng nó không thực sự khớp hoàn toàn với công thức nào trong bảng. Tuy nhiên, ngoại trừ hệ số 5, thì nó giống công thức 111. Đặt $u = \sqrt{5}x$, khi đó $du = \sqrt{5}\,dx$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{8-5x^2}} = \int \frac{\frac{u}{\sqrt{5}} \cdot \frac{du}{\sqrt{5}}}{\sqrt{8-u^2}} = \frac{1}{5}\int \frac{udu}{\sqrt{8-u^2}}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\sqrt{8-u^2}\right) + C \qquad \textit{(công thức 111 với } a^2 = 8\textit{)}$$

$$= -\frac{1}{5}\sqrt{8-5x^2} + C \qquad \blacksquare$$

Đối với ví dụ 8, bạn có thể đặt $u = 8 - 5x^2$, khi đó $du = -10xdx$:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{8-5x^2}} = \int \frac{\frac{du}{-10}}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{10}\int u^{-1/2}du = -\frac{1}{10}\left(2u^{1/2}\right) + C = -\frac{1}{5}\sqrt{8-5x^2} + C$$

Kết quả này giống với kết quả đã tính ở trên. Tính toán này để nhấn mạnh rằng bạn nên thử những phương pháp tích phân đơn giản trước khi dùng bảng tích phân.

Ví dụ 7.9. Tích phân bằng bảng

Tìm $\int 5x^2\sqrt{3x^2+1}\ dx$.

Giải. Tích phân này tương tự công thức 87.

$$\int 5x^2\sqrt{3x^2+1}\,dx = 5\int\left(\frac{u^2}{3}\right)\sqrt{u^2+1}\,\frac{du}{\sqrt{3}} \qquad \textit{(Nếu } u = \sqrt{3}x \textit{ thì } du = \sqrt{3}dx\textit{)}$$

$$= \frac{5}{3\sqrt{3}}\int u^2\sqrt{u^2+1}\,du \qquad \textit{(công thức 87 với } a = 1\textit{)}$$

$$= \frac{5}{3\sqrt{3}}\left[\frac{u\left(u^2+1^2\right)^{3/2}}{4} - \frac{1^2u\sqrt{u^2+1^2}}{8} - \frac{1^4}{8}\ln\left(u+\sqrt{u^2+1^2}\right)\right] + C$$

$$= \frac{5}{24}\left[2x\left(3x^2+1\right)^{3/2} - x\left(3x^2+1\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2+1}\right)\right] + C \qquad \blacksquare$$

7.2. TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

7.2.1. Công thức tích phân từng phần

Nhớ lại công thức vi phân của tích. Nếu u và v là các hàm khả vi thì

$$d\left(uv\right) = udv + vdu$$

Tích phân hai vế của phương trình trên để tìm công thức cho tích phân từng phần:

$$\int d\left(uv\right) = \int udv + \int vdu$$

$$uv = \int udv + \int vdu$$

Viết lại phương trình cuối, ta được công thức tổng quát sau

CÔNG THỨC TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Ví dụ 7.10. Tích phân từng phần

Tìm $\int xe^x\,dx$.

Giải. Để sử dụng tích phân từng phần, ta chọn u và dv sao cho tích phân mới dễ tính hơn tích phân ban đầu.

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^x dx \end{cases}$, thì $\begin{cases} du = dx \\ v = \int e^x dx = e^x \end{cases}$. Khi đó

$$\int xe^x\,dx = x\,e^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Bạn có thể kiểm tra lại kết quả bằng cách đạo hàm kết quả, hoặc sử dụng phần mềm, hoặc sử dụng bảng tích phân ở phụ lục D (công thức 184, với $a = 1$). ■

Tích phân từng phân thường khó khi lần đầu bạn thử làm, vì không có sự lựa chọn tuyệt đối cho *u* và *dv*. Trong ví dụ 1, bạn cũng có thể chọn

Đặt $\begin{cases} u = e^x \\ dv = x\,dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = e^x dx \\ v = \int x\,dx = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$

Khi đó

$$\int xe^x\,dx = e^x\,\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}e^x\,dx$$

Tuy nhiên, chọn *u* và *dv* như trên dẫn đến một dạng phức tạp hơn dạng ban đầu. Nói chung, khi bạn tích phân từng phần, nếu chọn *u* và *dv* mà dẫn đến một dạng phức tạp hơn ban đầu, thì bạn xem xét quay lại chọn *u* và *dv* theo một cách khác.

Một cách tổng quát, bạn chọn *dv* khó nhất có thể mà vẫn có thể tính được tích phân, và phần còn lại trong tích phân chính là *u*.

<u>Ví dụ 7.11</u>. Khi vi phân từng phần là toàn bộ hàm dưới dấu tích phân

Tìm $\int \ln x\;dx$, với $x > 0$.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = \dfrac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$. Khi đó

$$\int \ln x\,dx = \left(\ln x\right)x - \int x\left(\frac{1}{x}dx\right) = x\ln x - x + C$$

Kiểm tra với công thức 196 (phụ lục D). ■

7.2.2. Sử dụng nhiều lần tích phân từng phần

Đôi khi phải áp dụng tích phân từng phần vài lần để tính tính phân đã cho.

<u>Ví dụ 7.12.</u> Tích phân từng phần nhiều lần

Tìm $\int x^2e^{-x}\;dx$.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = x^2 \\ dv = e^{-x} \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = 2xdx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$. Khi đó

$$\int x^2e^{-x}\,dx = x^2\left(-e^{-x}\right) - \int\left(-e^{-x}\right)\left(2x\,dx\right) = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx$$

Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$. Khi đó

$$\int x^2e^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\left[x\left(-e^{x}\right) - \int\left(-e^{-x}\right)dx\right] = -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C$$

Kiểm tra công thức 185, với $a = -1$. ■

Ví dụ sau đây, ta cần áp dụng tích phân từng phần nhiều lần, nhưng bạn sẽ thấy rằng, khi ta tích phân từng phần đến lần thứ 2 thì ta quay lại tích phân ban đầu. Chú ý cẩn thận trường hợp này được giải quyết như thế nào.

Ví dụ 7.13. Tích phân từng phần nhiều lần với biến đổi đại số

Tìm $\int e^{2x}\sin x\,dx$.

Giải. Gọi tích phân ban đầu là *I*.

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \sin x dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = -\cos x \end{cases}$:

$$I = \int e^{2x}\sin x\,dx = e^{2x}\left(-\cos x\right) - \int\left(-\cos x\right)\left(2e^{2x}\,dx\right) = -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\cos x\,dx$$

Đặt $\begin{cases} u = e^{2x} \\ dv = \cos x dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = 2e^{2x}dx \\ v = \sin x \end{cases}$:

$$I = e^{2x}\left(-\cos x\right) + 2\left[e^{2x}\left(\sin x\right) - \int\sin x\left(2e^{2x}dx\right)\right] = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4\int e^{2x}\sin x\,dx$$

Tức là $I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x - 4I$

hay $5I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\sin x + C$

Vậy $I = \dfrac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right) + C$.

Như vậy $\int e^{2x}\sin x\,dx = \dfrac{1}{5}e^{2x}\left(2\sin x - \cos x\right) + C$. Kiểm tra với công thức 192, phụ lục D, khi $a = 2, b = 1$, hoặc bằng cách lấy đạo hàm. ■

7.2.3. Tích phân từng phần cho tích phân xác định

TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN CHO TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

<u>Ví dụ 7.14.</u> Tích phân từng phần cho tích phân xác định

Tính $\int_0^1 xe^{2x}\ dx$.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = x \\ dv = e^{2x}\ dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$. Khi đó

$$\int_0^1 xe^{2x}\ dx = \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}\ dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

Kiểm tra trong phụ lục D công thức 184, với $a = 2$. ■

<u>Ví dụ 7.15.</u> Tích phân từng phân cho tích phân xác định rồi đổi biến

Tính $\int_0^1 \tan^{-1} x\ dx$.

Giải. Đặt $\begin{cases} u = \tan^{-1} x \\ dv = dx \end{cases}$ thì $\begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{cases}$. Khi đó

$$\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx = \left(\tan^{-1} x\right)x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \left[x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]$$ *(sử dụng đổi biến $t = 1 + x^2,\ \ dt = 2x\,dx$)*

$$= \left[1\left(\tan^{-1} 1\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+1\right)\right] - \left[0 - \frac{1}{2}\ln 1\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

Kiểm tra trong phụ lục D công thức 180, với $a = 1$. ■

7.3. PHƯƠNG PHÁP LƯỢNG GIÁC

7.3.1. Lũy thừa của Sin và Cos

Ta xét tích của các lũy thừa của sin và cos, có dạng

$$\int \sin^m x \ \cos^n x \ dx$$

Có hai trường hợp chủ yếu cần xét, phụ thuộc vào các số mũ *m* và *n* cùng là số chẵn hay không. Ta sẽ nêu cách giải quyết tổng quát cho mỗi trường hợp và sau đó minh họa thông qua ví dụ.

<u>Trường hợp 1:</u> *m* hoặc *n* là số lẻ (hoặc cả hai cùng là số lẻ)

Cách làm tổng quát: Nếu *m* là số lẻ thì tách một thừa số $\sin x$ từ hàm dưới dấu tích phân. Khi đó số mũ còn lại của $\sin x$ là số chẵn, sử dụng $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ để biểu diễn hết theo $\cos x$, trừ số hạng $\left(\sin x \ dx\right)$. Đổi biến $u = \cos x,\ du = -\sin x \ dx$ để chuyển tích phân thành đa thức theo *u* và tính tích phân sử dụng quy tắc lũy thừa. Nếu trường hợp *n* là số lẻ thì thực hiện tương tự như trên nhưng thay vai trò của $\sin x$ và $\cos x$.

<u>Ví dụ 7.16.</u> Lũy thừa của cos là số lẻ

Tìm $\int \sin^4 x \cos^3 x \ dx$.

Giải. Vì $n = 3$ là số lẻ, nên tách một thừa số $\cos x$ và sử dụng $\cos^2 = 1 - \sin^2 x$ để biểu diễn tích phần như một đa thức theo $\sin x$.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \ dx = \int \sin^4 x \ \cos^2 x \left(\cos x \ dx\right) = \int \sin^4 x \left(1 - \sin^2 x\right)\left(\cos x \ dx\right)$$

Đặt $u = \sin x$ thì $du = \cos x \ dx$.

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \ dx = !\, u^4 \left(1 - u^2\right) du = \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{7} u^7 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{1}{7} \sin^7 x + C$$ ■

<u>Trường hợp 2:</u> *m* và *n* đều là số chẵn

Cách làm tổng quát: Chuyển thành trường hợp 1 bằng cách sử dụng

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right) \text{ và } \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right).$$

Ví dụ 7.17. Tất cả số mũ đều là số chẵn

Tìm $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Giải.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \int \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right)\left(\frac{1}{4}\right)\left(1 + \cos 2x\right)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x\right) dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right) - \left(1 - \sin^2 2x\right)\cos 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left[1 + \cos 2x - \frac{1}{2}\left(1 + \cos 4x\right) - \cos 2x + \sin^2 2x \cos 2x\right] dx$$

$$= \frac{1}{8}\int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx + \frac{1}{8}\sin^2 2x \cos 2x \, dx$$

Đặt $u = \sin 2x$ thì $du = 2\cos 2x dx$. Khi đó

$$\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{16}\int u^2 du$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C$$ ∎

7.3.2. Lũy thừa của Sec và Tan

Tích phân đơn giản nhất của dạng này là

$$\int \tan x \, dx = \ln\left|\sec x\right| + C \text{ và } \int \sec x \, dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C.$$

Với trường hợp tổng quát hơn, ta viết dưới dạng

$$\int \tan^m x \sec^n x \, dx.$$

Có 3 trường hợp chủ yếu được xét.

<u>Trường hợp 1:</u> ***n* là số chẵn**

Cách làm tổng quát: Tách một thừa số $\sec^2 x$ từ hàm dưới dấu tích phân và sử dụng $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$ để biểu diễn hàm dưới dấu tích phân theo $\tan x$, ngoại trừ $\left(\sec^2 x\ dx\right)$; đổi biến $u = \tan x,\ \ du = \sec^2 dx$, và tính tích phân sử dụng quy tắc lũy thừa.

<u>Ví dụ 7.18.</u> Lũy thừa của sec là số chẵn

Tìm $\int \tan^2 x \sec^4 x\ dx$.

Giải.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\ dx = \int \tan 2x \sec^2 x\left(\sec^2 x\ dx\right) = \int \tan^2 x\left(\tan^2 x + 1\right)\sec^2 x\ dx$$

Đặt $u = \tan x$ thì $du = \sec^2 c\ dx$. Khi đó

$$\int \tan^2 x \sec^4 x\ dx = \int u^2\left(u^2 + 1\right)du = \frac{1}{5}u^5 + \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C \ \blacksquare$$

<u>Trường hợp 2:</u> ***m* là số lẻ**

Cách làm tổng quát: Tách một thừa số $\sec x\ \tan x$ từ hàm dưới dấu tích phân và sử dụng $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ để biểu diễn hàm dưới dấu tích phân theo $\sec x$, ngoại trừ $\left(\sec x\ \tan x\ dx\right)$; đổi biến $u = \sec x,\ \ du = \sec x\ \tan x\ dx$, và tính tích phân sử dụng quy tắc lũy thừa.

<u>Ví dụ 7.19.</u> Lũy thừa của tan là số lẻ

Tìm $\int \tan x \sec^6 x\ dx$.

Giải.

$$\int \tan x \sec^6 x\ dx = \int \sec^5 x\left(\sec x \tan x\ dx\right).$$

Đặt $u = \sec x$ thì $du = \sec x \tan x\ dx$. Khi đó

$$\int \tan x \sec^6 x\, dx = \int u^5 du = \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{6}\sec^6 x + C$$ ∎

<u>Trường hợp 3:</u> ***m* là số chẵn và *n* là số lẻ**

Cách làm tổng quát: Sử dụng $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ để biểu diễn hàm dưới dấu tích phân theo $\sec x$; khi đó sử dụng công thức rút gọn 161 (phụ lục D):

$$\int \sec^n au\, du = \frac{\sec^{n-2} au \tan au}{a\left(n-1\right)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} au\, du$$

<u>Ví dụ 7.20.</u> Lũy thừa của tan là số chẵn và lũy thừa của sec là số lẻ

Tìm $\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx$.

Giải.

$$\int \tan^2 x \sec^3 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right)\sec^3 x\, dx = \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x\, dx$$

$$= \left[\frac{\sec^3 x \tan x}{4} + \frac{3}{4}\int \sec^3 x\, dx\right] - \int \sec^3 x\, dx = \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{1}{4}\int \sec^3 x\, dx$$

$$= \frac{\sec^3 x\, \tan x}{4} - \frac{1}{4}\left[\frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\int \sec x\, dx\right]$$

$$= \frac{\sec^3 x \tan x}{4} - \frac{\sec x \tan x}{8} - \frac{1}{8}\ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$ ∎

7.3.3. Đổi biến lượng giác

Đổi biến lượng giác có thể hiệu quả. Chẳng hạn, giả sử một hàm dưới dấu tích phân chứa số hạng $\sqrt{a^2 - u^2}$, với $a > 0$. Khi đó bằng việc đặt $u = a\sin\theta$ với một góc nhọn θ, và sử dụng $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$, ta được

$$\sqrt{a^2 - u^2} = \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} = a\sqrt{1 - \sin^2\theta} = a\cos\theta$$

Như vậy, đổi biến $u = a\sin\theta, du = a\cos\theta\, d\theta$ loại bỏ được căn bậc hai và có thể chuyển tích phân đã cho thành một tích phân mới chỉ chứa sin và cos. Sự đổi biến này có thể ghi nhớ bằng cách thiết lập một tam giác tương ứng. Quá trình này được minh họa trong ví dụ sau.

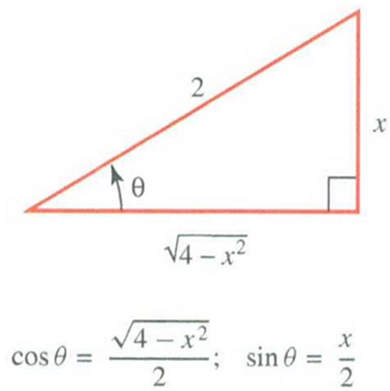
<u>Ví dụ 7.21.</u> Đổi biến lượng giác với dạng $\sqrt{a^2 - u^2}$

Tìm $\int \sqrt{4 - x^2}dx$.

Giải. Đầu tiên, sử dụng bảng tích phân, áp dụng công thức 117 với $a = 2$

$$\int \sqrt{4 - x^2}dx = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Mục đích của chúng ta trong ví dụ này là chỉ ra ta có được công thức này như thế nào khi sử dụng đổi biến lượng giác. Xem tam giác ở hình 7.1.



Hình 7.1. Tam giác tương ứng với dạng $\sqrt{a^2 - u^2}$.

Đặt $x = 2\sin\theta$, thì $dx = 2\cos\theta\, d\theta$. Khi đó

$$\int \sqrt{4 - x^2}dx = \int \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}\left(2\cos\theta\, d\theta\right) = \int \cos^2\theta\ d\theta$$
$$= 4\int \frac{1 + \cos 2\theta}{2}d\theta = 2\theta + \sin 2\theta + C$$
$$= 2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + C$$

Bước cuối cùng là chuyển đáp số thành các số hạng theo *x*. Sử dụng tam giác ở hình 7.1, ta tìm được $\sin\theta = \frac{x}{2}$ và $\cos\theta = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$.

Như vậy, ta có $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right) + C$$

$$= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C\,.$$ ■

Phương pháp tương tự có thể được dùng để chuyển tích phân chứa các số hạng dạng $\sqrt{a^2+u^2}$ hay $\sqrt{u^2-a^2}$ sang tích phân lượng giác, được chỉ ra ở bảng 7.1. Đối với bảng này, ta yêu cầu $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Bảng 7.1 Đổi biến lượng giác đối với tích phân chứa căn

Nếu hàm dưới dấu tích phân chứa…	**đổi biến**	**để được…**
$\sqrt{a^2-u^2}$	$u = a\sin\theta$	$\sqrt{a^2-u^2} = a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+u^2}$	$u = a\tan\theta$	$\sqrt{a^2+u^2} = a\sec\theta$
$\sqrt{u^2-a^2}$	$u = a\sec\theta$	$\sqrt{u^2-a^2} = a\tan\theta$

<u>**Ví dụ 7.22.**</u> **Đổi biến lượng giác với dạng** $\sqrt{a^2+u^2}$

Tìm $\int x^2\sqrt{9+x^2}\,dx$.

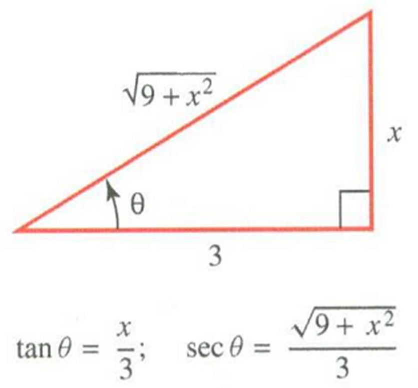
Giải. Đặt $x = 3\tan\theta,\ dx = 3\sec^2\theta\ d\theta$. Khi đó

$$\int x^2\sqrt{9+x^2}\ dx = \int \left(3\tan\theta\right)^2\sqrt{9+9\tan^2\theta}\left(3\sec^2\theta\ d\theta\right)$$
$$= \int \left(9\tan^2\theta\right)\left(3\sec\theta\right)\left(3\sec^2\theta\right)d\theta = 81\int \tan^2\theta\ \sec^3\theta\ d\theta$$

Theo kết quả của ví dụ 5 trong phần này, ta có

$$\int x^2\sqrt{9+x^2}\,dx = 81\left[\frac{\sec^3\theta\tan\theta}{4} - \frac{\sec\theta\tan\theta}{8} - \frac{1}{8}\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\right] + C$$

Để biểu diễn nguyên hàm theo biến *x*, ta sử dụng tam giác tương ứng ở hình 7.2.



Hình 7.2. Tam giác tương ứng với dạng $\sqrt{a^2+u^2}$.

Vì $\tan\theta = \dfrac{x}{3}$ nên ta có $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{9+x^2}}{3}$. Như vậy

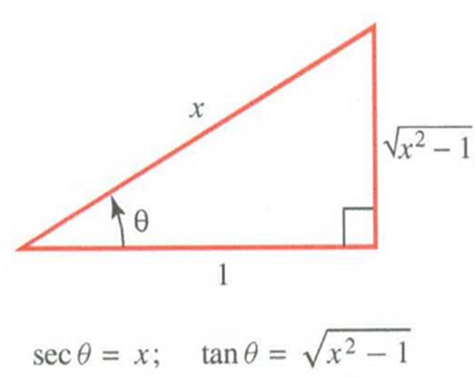
$$\int x^2\sqrt{9+x^2}dx = \frac{81}{4}\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}\right)^3\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{81}{8}\left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}\right)\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{81}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{9+x^2}}{3}+\frac{x}{3}\right| + C$$

$$= \frac{x}{4}\left(9+x^2\right)^{3/2} - \frac{9x}{8}\left(9+x^2\right)^{1/2} - \frac{81}{8}\ln\left|\frac{\left(9+x^2\right)^{1/2}}{3}+\frac{x}{3}\right| + C.$$ ■

<u>**Ví dụ 7.23.**</u> **Đổi biến lượng giác với dạng $\sqrt{u^2 - a^2}$**

Tìm $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2-1}\,dx$.

Giải. Đặt $x = \sec\theta$, $dx = \sec\theta\tan\theta\ d\theta$; ta sử dụng tam giác tương ứng ở hình 7.3.



Hình 7.3. Tam giác tương ứng với dạng $\sqrt{u^2-a^2}$.

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\ dx = \int \sec^3\theta\sqrt{\sec^2-1}\left(\sec\theta\tan\theta\ d\theta\right)$$
$$= \int \sec^4\theta\tan^2\theta\ d\theta = \int \sec^2\theta\tan^2\theta\left(\sec^2\theta\ d\theta\right) = \int\left(\tan^2\theta+1\right)\tan^2\theta\left(\sec^2\theta\ d\theta\right)$$

Đặt $u = \tan\theta,\ du = \sec^2\theta\ d\theta$. Khi đó

$$\int x^3\sqrt{x^2-1}\ dx = \int\left(u^2+1\right)u^2du = \int\left(u^4+u^2\right)du = \frac{1}{5}u^5+\frac{1}{3}u^3+C$$
$$= \frac{1}{5}\tan^5\theta+\frac{1}{3}\tan^3\theta+C$$

$$= \frac{1}{5}\left(x^2-1\right)^{5/2}+\frac{1}{3}\left(x^2-1\right)^{3/2}+C.$$ ■

7.3.4. Tích phân dạng bậc hai

Một tích phân chứa một biểu diễn dạng Ax^2+Bx+C, với $A\neq 0, B\neq 0$, có thể được tính bằng việc phân tích thành bình phương và thực hiện đổi biến thích hợp để chuyển nó về dạng chúng ta đã phân tích trước đó.

__Ví dụ 7.24.__ Tích phân bằng phân tích thành bình phương

Tìm $\int\sqrt{16x-2x^2-23}\ dx$.

Giải. Phân tích thành bình phương phần trong căn

$$16x-2x^2-23 = -\left(2x^2-8x\right)-23 = -2\left(x^2-8x+4^2\right)+2.4^2-23 = -2\left(x-4\right)^2+9$$

Như vậy

$$\int\sqrt{16x-2x^2-23}\,dx = \int\sqrt{9-2\left(x-4\right)^2}dx$$

$$= \int\sqrt{9-u^2}\left(\frac{du}{\sqrt{2}}\right)$$ (với $u = \sqrt{2}\left(x-4\right)$)

$$= \int\sqrt{9-\left(3\sin\theta\right)^2}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cos\theta\ d\theta\right)$$ *(với $u = 3\sin\theta$)*

$$= \frac{9}{\sqrt{2}}\int \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\, d\theta = \frac{9}{\sqrt{2}}\int \cos^2\theta\, d\theta$$
$$= \frac{9}{\sqrt{2}}\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{9}{2\sqrt{2}}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right] + C$$
$$= \frac{9}{2\sqrt{2}}\sin^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(x-4\right)\right] + \frac{x-4}{2}\sqrt{16x-2x^2-23} + C. \qquad \blacksquare$$

7.4. PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH HỮU TỶ

7.4.1. Phân tích thành phân thức tối giản

Ta xét hàm phân thức hữu tỷ

$$f\left(x\right) = \frac{P\left(x\right)}{D\left(x\right)}$$

với $P\left(x\right)$ và $D\left(x\right)$ là các đa thức theo *x* mà không có nhân tử chung và bậc của *P* nhỏ hơn bậc của *D*. Trong đại số, với $P\left(x\right)/D\left(x\right)$ như vậy, thì có thể biểu diễn

$$\frac{P\left(x\right)}{D\left(x\right)} = F_1\left(x\right) + F_2\left(x\right) + \ldots + F_N\left(x\right)$$

với $F_k\left(x\right)$ được biểu diễn dưới dạng

$$\frac{A}{\left(x-r\right)^n} \text{ hoặc } \frac{Ax+B}{\left(x^2+sx+t\right)^n}$$

Nếu $\dfrac{P\left(x\right)}{D\left(x\right)}$ chưa được rút gọn (tức là $P\left(x\right)$ và $D\left(x\right)$ vẫn còn nhân tử chung, hoặc bậc của *P* lớn hơn hoặc bằng bậc của *D*), thì ta chia *P* cho *D* đến khi được dạng rút gọn. Chẳng hạn $\left(x \neq 1\right)$,

$$\frac{\left(2x^3+7x^2+6x+3\right)\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)\left(x^2+3x+2\right)} = 2x+1+\frac{-x+1}{x^2+3x+2}$$
$$= 2x+1+\frac{2}{x+1}+\frac{-3}{x+2}$$

Ta bắt đầu bằng việc tập trung vào trường hợp $D\left(x\right)$ có thể được biểu diễn thành tích các lũy thừa của hàm bậc nhất (lũy thừa tuyến tính).

PHÂN TÍCH THÀNH PHÂN THỨC TỐI GIẢN: Lũy thừa hàm bậc nhất

Cho $f\left(x\right)=\dfrac{P\left(x\right)}{\left(x-r\right)^n}$, với $P\left(x\right)$ là một đa thức bậc bé hơn n và $P\left(r\right)\neq 0$. Khi đó $f\left(x\right)$ có thể được phân tích dưới dạng sau

$$\frac{A_1}{x-r}+\frac{A_2}{\left(x-r\right)^2}+\ldots+\frac{A_n}{\left(x-r\right)^n}$$

<u>Ví dụ 7.25.</u> Phân tích thành phân thức tối giản với lũy thừa hàm bậc nhất

Phân tích $\dfrac{x^2-6x+3}{\left(x-2\right)^3}$ thành tổng của các phân thức tối giản.

Giải.

$$\frac{x^2-6x+3}{\left(x-2\right)^3}=\frac{A_1}{x-2}+\frac{A_2}{\left(x-2\right)^2}+\frac{A_3}{\left(x-2\right)^3} \qquad \textit{(phân tích thành phân thức tối giản)}$$

$$x^2-6x+3=A_1\left(x-2\right)^2+A_2\left(x-2\right)+A_3 \qquad \textit{(nhân cả 2 vế với } \left(x-2\right)^3\textit{)}$$

Cho $x=2$, được $A_3=-5$. Thay $A_3=-5$ vào đẳng thức trên và khai triển vế phải

$$x^2-6x+5=A_1\left(x-2\right)^2+A_2\left(x-2\right)-5$$
$$=A_1x^2+\left(-4A_1+A_2\right)x+\left(4A_1-2A_2-5\right)$$

Bằng cách đồng nhất hệ số của các số hạng giống nhau, ta được

$$\begin{aligned} 1 &= A_1 && \textit{(hệ số của } x^2\textit{)} \\ -6 &= -4A_1 + A_2 && \textit{(hệ số của x)} \\ 3 &= 4A_1 - 2A_2 - 5 && \textit{(hệ số tự do)} \end{aligned}$$

Giải tìm được $A_1 = 1,\ A_2 = -2$, vì vậy

$$\frac{x^2 - 6x + 3}{\left(x-2\right)^3} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{\left(x-2\right)^2} + \frac{-5}{\left(x-2\right)^3}$$

Nếu có hai hay nhiều nhân tử bậc nhất trong phân tích của $D\left(x\right)$, thì phải tách thành các số hạng theo mỗi lũy thừa. Đặc biệt, nếu $D\left(x\right)$ có thể biểu diễn thành tích của *n* nhân tử bậc nhất phân biệt, thì

$$\frac{P\left(x\right)}{\left(x-r_1\right)\left(x-r_2\right)\ldots\left(x-r_n\right)}$$

được phân tích thành các số hạng

$$\frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-r_n}.$$

Ta xem ví dụ minh họa sau.

<u>Ví dụ 7.26.</u> Phân tích thành phân thức tối giản với các nhân tử bậc nhất phân biệt

Phân tích $\dfrac{8x-1}{x^2-x-2}$.

Giải.

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{8x-1}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x+1} = \frac{A_1\left(x+1\right) + A_2\left(x-2\right)}{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}$$

$$8x - 1 = A_1\left(x+1\right) + A_2\left(x-2\right)$$

Cho $x = -1$, ta có $8\left(-1\right) - 1 = A_1\left(-1+1\right) + A_2\left(-1-2\right)$, suy ra $A_2 = 3$.

Cho $x = 2$, ta có $8\left(2\right) - 1 = A_1\left(2+1\right) + A_2\left(2-2\right)$, suy ra $A_1 = 5$.

Như vậy $\dfrac{8x-1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{5}{x-2} + \dfrac{3}{x+1}$. ■

Nếu có cả các nhân tử phân biệt và nhân tử lặp, thì ta kết hợp các phương pháp ở trên. Chẳng hạn, $\dfrac{5x^2 + 21x + 4}{\left(x+1\right)^3\left(x-3\right)}$ được phân tích thành $\dfrac{A_1}{x+1} + \dfrac{A_2}{\left(x+1\right)^2} + \dfrac{A_3}{\left(x+1\right)^3} + \dfrac{A_4}{x-3}$

Chú ý rằng bậc của mẫu thức là 4, vì thế ta sử dụng 4 hằng số.

Nếu mẫu thức $D\left(x\right)$ trong phân thức $P\left(x\right)/D\left(x\right)$ chứa tam thức bậc hai bất khả quy (tam thức bậc hai vô nghiệm), thì phân tích thành phân thức tối giản như sau.

PHÂN TÍCH THÀNH PHÂN THỨC TỐI GIẢN: Nhân tử là tam thức bậc hai

Cho $f\left(x\right) = \dfrac{P\left(x\right)}{\left(x^2 + sx + t\right)^m}$, với $P\left(x\right)$ là một đa thức bậc bé hơn $2m$. Khi đó $f\left(x\right)$ có thể được phân tích dưới dạng sau

$$\frac{A_1x + B_1}{x^2 + sx + t} + \frac{A_2x + B_2}{\left(x^2 + sx + t\right)^2} + \ldots + \frac{A_mx + B_m}{\left(x^2 + sx + t\right)^m}$$

Vì bậc của mẫu thức là $2m$ nên ta có $2m$ hằng số là $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m$.

<u>Ví dụ 7.27.</u> Phân tích thành phân thức tối giản với nhân tử bậc hai

Phân tích $\dfrac{-3x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Giải.

$$\frac{-3x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{A_1x + B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x + B_2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Nhân hai vế của phương trình với $\left(x^2+1\right)^2$,

$$-3x^3 - x = \left(A_1x + B_1\right)\left(x^2+1\right) + \left(A_2x + B_2\right) = A_1x^3 + B_1x^2 + \left(A_1 + A_2\right)x + \left(B_1 + B_2\right)$$

Đồng nhất hệ số tương ứng ở hai vế và giải tìm được $A_1 = -3, A_2 = 2, B_1 = 0, B_2 = 0$.

Vậy $\dfrac{-3x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{-3x}{x^2+1} + \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. ■

Ta lấy ví dụ với mẫu thức chứa cả nhân tử bậc nhất lẫn nhân tử bậc hai, $\dfrac{x^2+4x-23}{\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)^2}$ được phân tích thành $\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+4} + \dfrac{A_2}{x+3} + \dfrac{A_3}{\left(x+3\right)^2}$. Bậc của mẫu thức là 4, và có 4 hằng số.

Trong đại số, lý thuyết phương trình cho ta bất kỳ đa thức *P* với hệ số thực luôn được biểu diễn thành tích của các nhân tử bậc nhất và bậc hai bất khả quy. Điều này giúp ta có các bước làm tổng quát để có được sự phân tích hàm phân thức hữu tỷ thành các phân thức tối giản.

PHÂN TÍCH THÀNH PHÂN THỨC TỐI GIẢN:

Cho $f\left(x\right) = P\left(x\right)/D\left(x\right)$, với $P\left(x\right)$ và $D\left(x\right)$ là các đa thức không có nhân tử chung và $D\left(x\right) \neq 0$.

Bước 1. Nếu bậc của *P* lớn hơn hoặc bằng bậc của *D*, thì sử dụng phép chia để biểu diễn $\dfrac{P\left(x\right)}{D\left(x\right)}$ thành tổng của một đa thức và một phân thức $\dfrac{R\left(x\right)}{D\left(x\right)}$, với bậc của đa thức phần dư $R\left(x\right)$ nhỏ hơn bậc của đa thức mẫu $D\left(x\right)$.

Bước 2. Phân tích mẫu thức $D\left(x\right)$ thành tích của các nhân tử bậc nhất và nhân tử bậc 2.

Bước 3. Biểu diễn $\dfrac{P\left(x\right)}{D\left(x\right)}$ thành tổng của các phân thức tối giản có dạng

$$\frac{A_i}{\left(x-r\right)^n} \text{ và } \frac{A_kx+B_k}{\left(x^2+sx+t\right)^m}$$

7.4.2. Tích phân hàm phân thức hữu tỷ

<u>Ví dụ 7.28.</u> Tích phân hàm phân thức hữu tỷ với nhân tử bậc nhất được lặp lại

Tìm $\int \frac{x^2-6x+3}{\left(x-2\right)^3}dx$.

Giải. Từ ví dụ 1, ta có

$$\int \frac{x^2-6x+3}{\left(x-2\right)^3}dx = \int \left[\frac{1}{x-2}+\frac{-2}{\left(x-2\right)^2}+\frac{-5}{\left(x-2\right)^3}\right]dx$$
$$= \int \left(x-2\right)^{-1}dx - 2\int \left(x-2\right)^{-2}dx - 5\int \left(x-2\right)^{-3}dx$$

$$= \ln\left|x-2\right| + \frac{2}{x-2} + \frac{5}{2\left(x-2\right)^2} + C.$$ ■

<u>Ví dụ 7.29.</u> Tích phân hàm phân thức hữu tỷ với các nhân tử bậc nhất phân biệt

Tìm $\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx$.

Giải. Ta có $P\left(x\right) = x^4+2x^3-4x^2+x-3$ và $D\left(x\right) = x^2-x-2$; vì bậc của *P* lớn hơn bậc của *D*, nên ta thực hiện phép chia *P* cho *D*, được

$$\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx = \int \left(x^2+3x+1+\frac{8x-1}{x^2-x-2}\right)dx$$

$$= \int \left(x^2+3x+1+\frac{5}{x-2}+\frac{3}{x+1}\right)dx \qquad \textit{(sử dụng ví dụ 2)}$$

$$= \frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+x+5\ln\left|x-2\right|+3\ln\left|x+1\right|+C.$$ ■

<u>Ví dụ 7.30.</u> Tích phân hàm phân thức hữu tỷ với nhân tử bậc 2 được lặp lại

Tìm $\int \frac{-3x^3-x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$.

Giải. Theo ví dụ 3,

$$\int \frac{-3x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx + \int \frac{-3x}{x^2+1}dx$$

Đặt $u = x^2 + 1,\ \ du = 2x\ dx$.

$$\int \frac{-3x^3 - x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \int u^{-2}du - \frac{3}{2}\int u^{-1}du = -u^{-1} - \frac{3}{2}\ln\left|u\right| + C$$

$$= \frac{-1}{x^2+1} - \frac{3}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C.$$ ■

<u>Ví dụ 7.31.</u> Các nhân tử bậc nhất được lặp lại

Tìm $\displaystyle\int \frac{5x^2+21x+4}{\left(x+1\right)^2\left(x-3\right)}dx$.

Giải. Phân tích thành phân thức tối giản của hàm dưới dấu tích phân là

$$\frac{5x^2+21x+4}{\left(x+1\right)^2\left(x-3\right)} = \frac{A_1}{\left(x+1\right)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-3}$$

Nhân cả hai vế với $\left(x+1\right)^2\left(x-3\right)$:

$$5x^2+21x+4 = A_1\left(x-3\right) + A_2\left(x+1\right)\left(x-3\right) + A_3\left(x+1\right)^2$$

Khai triển thành đa thức ở vế phải của đẳng thức trên

$$5x^2+21x+4 = \left(A_2+A_3\right)x^2 + \left(A_1 - 2A_2 + 2A_3\right)x + \left(-3A_1 - 3A_2 + A_3\right)$$

Đồng nhất hệ số của x^2, x và hệ số tự do ở hai vế của đẳng thức

$$\begin{aligned} 5 &= A_2 + A_3 & &\text{(hệ số của } x^2\text{)} \\ 21 &= A_1 - 2A_2 + 2A_3 & &\text{(hệ số của x)} \\ 4 &= -3A_1 - 3A_2 + A_3 & &\text{(hệ số tự do)} \end{aligned}$$

Giải tìm được $A_1 = 3,\ A_2 = -2,\ A_3 = 7$. Vậy

$$\int \frac{5x^2+21x+4}{\left(x+1\right)^2\left(x-3\right)}dx = \int \frac{3dx}{\left(x+1\right)^2} + \int \frac{-2dx}{x+1} + \int \frac{7dx}{x-3}$$

$$= -3\left(x+1\right)^{-1} - 2\ln\left|x+1\right| + 7\ln\left|x-3\right| + C.$$ ■

<u>**Ví dụ 7.32.**</u> **Các nhân tử bậc nhất và bậc hai phân biệt**

Tìm $\int \frac{x^2+4x-23}{\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)}dx$.

Giải. Phân tích hàm dưới dấu tích phân thành các phân thức tối giản

$$\frac{x^2+4x-23}{\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+4} + \frac{A_2}{x+3}$$

Nhân cả hai vế với $\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)$ và kết hợp các số hạng ở vế phải:

$$x^2+4x-23 = \left(A_1x+B_1\right)\left(x+3\right) + A_2\left(x^2+4\right) = \left(A_1+A_2\right)x^2 + \left(3A_1+B_1\right)x + \left(3B_1+4A_2\right)$$

Đồng nhất hệ số của hai vế, được hệ phương trình sau

$$\begin{cases} A_1+A_2=1 & \textit{(hệ số của } x^2\textit{)} \\ 3A_1+B_1=4 & \textit{(hệ số của x)} \\ 3B_1+4A_2=-23 & \textit{(hệ số tự do)} \end{cases}$$

Giải hệ này, ta tìm được $A_1=3,\ B_1=-5,\ A_2=-2$. Vậy

$$\int \frac{x^2+4x-23}{\left(x^2+4\right)\left(x+3\right)} = \int \frac{3x-5}{x^2+4}dx + \int \frac{-2dx}{x+3}$$

$$= 3\int \frac{x\ dx}{x^2+4} - 5\int \frac{dx}{x^2+4} - 2\int \frac{dx}{x+3}$$

$$= 3\left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)\right] - 5\left[\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right] - 2\ln\left|x+3\right| + C.$$ ■

7.4.3. Phân thức hữu tỷ của sin và cos

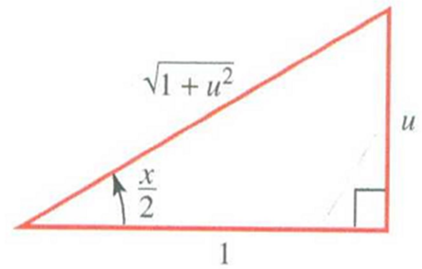
ĐỔI BIẾN WEIRSTRASS.

Với $-\pi < x < \pi$, đặt $u = \tan\dfrac{x}{2}$, ta có

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\text{và } dx = \frac{2}{1+u^2}\,du.$$

Đây được gọi là **đổi biến Weirstrass.**



$$\tan\frac{x}{2} = u$$

$$\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

__Ví dụ 7.33.__ **Tích phân hàm lượng giác hữu tỷ**

Tìm $\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x}$.

Giải. Sử dụng đổi biến Weirstrass, đặt $u = \tan\dfrac{x}{2}$. Khi đó $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ và $dx = \dfrac{2}{1+u^2}du$. Ta có

$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x} = \int \frac{\dfrac{2du}{1+u^2}}{3\left(\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right) - 4\left(\dfrac{2u}{1+u^2}\right)}$$

$$= \int \frac{-2du}{3u^2+8u-3} = \int \frac{-2du}{(3u-1)(u+3)}$$

Phân tích hàm dưới dấu tích phân thành các phân thức tối giản

$$\frac{-2}{(3u-1)(u+3)} = \frac{A_1}{3u-1} + \frac{A_2}{u+3}$$

Giải tìm được $A_1 = -\dfrac{3}{5}, A_2 = \dfrac{1}{5}$. Vậy

$$\int \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x} = \int \frac{\frac{-3}{5}du}{3u-1} + \int \frac{\frac{1}{5}du}{u+3} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\ln\left|3u-1\right| + \frac{1}{5}\cdot\ln\left|u+3\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left|3\tan\frac{x}{2} - 1\right| + \frac{1}{5}\ln\left|\tan\frac{x}{2} + 3\right| + C\,.$$ ■

7.5. TÓM TẮT CÁC KỸ THUẬT TÍNH TÍCH PHÂN

CHIẾN LƯỢC TÍNH TÍCH PHÂN Để tích phân một hàm, ta xét các bước sau đây:

Bước 1. Rút gọn.

Rút gọn các hàm khả tích nếu có thể và sử dụng một trong các quy tắc thủ tục (xem phía trong của bìa phía sau hoặc bảng tính tích phân).

Bước 2. Sử dụng các công thức cơ bản.

Sử dụng các công thức tích phân cơ bản (1-29 trong bảng tích phân, Phụ lục D). Đây là các khối xây dựng cơ bản cho tích phân. Hầu hết mọi tích phân đều liên quan đến một số công thức cơ bản nào đó trong quá trình tính tích phân, nghĩa là bạn nên ghi nhớ những công thức này.

Bước 3. Đổi biến.

Sử dụng bất kỳ một phép đổi biến nào mà có thể chuyển tích phân thành một trong các dạng cơ bản.

Bước 4. Phân lớp.

Phân lớp các tích phân theo dạng để sử dụng bảng tích phân. Bạn có thể cần đến phép đổi biến để chuyển một tích phân thành một dạng có trong bảng tích phân. Một số kiểu đặc biệt của phép đổi biến được chứa trong các dạng sau đây:

I. Tích phân từng phần:

A. Dạng $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n \sin(ax)dx$, $\int x^n \cos(ax)dx$

Đặt $u = x^n$.

B. Dạng $\int x^n \ln x dx$, $\int x^n \sin^{-1}(ax)dx$, $\int x^n \cos^{-1}(ax)dx$

Đặt $dv = x^n dx$.

C. Dạng $\int e^{ax} \sin(ax) dx, \int e^{ax} \cos(ax) dx$

Đặt $dv = e^{ax} dx$.

II. Dạng lượng giác

A. $\int \sin^m x \cos^n x dx$

Nếu *m* lẻ: Tách một nhân tử dạng $(\sin x dx)$ và đặt $u = \cos x$.

Nếu *n* lẻ: Tách một nhân tử dạng $(\cos x dx)$ và đặt $u = \sin x$.

Sử dụng công thức hạ bậc:

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

B. $\int \tan^m x \sec^n x dx$

Nếu *n* chẵn: Tách một nhân tử dạng $(\sec^2 x dx)$ và đặt $u = \tan x$.

Nếu *m* lẻ: Tách một nhân tử dạng $(\sec x dx)$ và đặt $u = \sec x$.

Nếu *m* chẵn, *n* lẻ: Sử dụng lũy thừa của hàm sec và sử dụng công thức quy nạp (Công thức 161 trong bảng tính phân).

C. Với tích phân của hàm lượng giác có dạng hữu tỷ, sử dụng đổi biến Weierstrass. Đặt $u = \tan \frac{x}{2}$, khi đó

$$\sin x = \frac{2u}{1 + u^2}, \cos x = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, dx = \frac{2}{1 + u^2} du.$$

III. Dạng chứa căn thức: thử sử dụng một phép đổi biến lượng giác.

A. Dạng $\sqrt{a^2 - u^2}$: Đặt $u = a \sin \theta$.

B. Dạng $\sqrt{a^2 + u^2}$: Đặt $u = a \tan \theta$.

C. Dạng $\sqrt{u^2 - a^2}$: Đặt $u = a \sec \theta$.

IV. Dạng hữu tỷ: Sử dụng sự phân tích phân thức.

Bước 5. Nếu vẫn còn chưa giải được, hãy thử lần nữa.

1. Điều khiển tích phân:

Nhân với một lượng (một sự lựa chọn khéo léo của tử số hoặc mẫu số.

Hữu tỷ hóa mẫu số.

Hữu tỷ hóa tử số.

2. Liên hệ vấn đề với một vấn đề đã được làm từ trước.

3. Xem bảng tích phân khác hoặc tra cứu những phần mềm máy tính dùng để tính tích phân.

4. Một số tích phân không có nguyên hàm, vì thế các phương pháp này không áp dụng được. Chúng ta sẽ xem một số dạng này sau trong tài liệu.

5. Với một tích phân xác định, một tính toán xấp xỉ có thể là đủ. Việc này có thể thích hợp với việc sử dụng một máy tính điện tử, máy vi tính hoặc xấp sỉ tích phân.

Ví dụ 7.34. Hãy lựa chọn một cách tính tích phân.

Chỉ ra một quy trình tính cho mỗi tích phân. Điều này là cần thiết khi tiến hành tính tích phân.

a. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$ **b.** $\int \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta$ **c.** $\int \sin^3 x\cos^2 x\ dx$ **d.** $\int 4x^2\cos 3x\ dx$

e. $\int \frac{x\ dx}{\sqrt{9-x^2}}dx$ **f.** $\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **g.** $\int e^{3x}\sin 2x\ dx$ **h.** $\int \frac{\cos^4 x\ dx}{1-\sin^2 x}$

7.6 PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC NHẤT

Trong mục này, chúng ta sẽ thấy các phương trình vi phân có thể được sử dụng để lập mô hình cho một số ứng dụng trong thế giới thực.

PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH BẬC NHẤT

Chúng ta đã giới thiệu phương trình vi phân tách biến trong Mục 5.6, nhưng không phải mọi phương trình vi phân bậc nhất đều có dạng tách biến

$$\frac{dx}{dy} = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

Mục đích của mục này là để xác định lớp thứ hai của phương trình vi phân, được gọi là **tuyến tính bậc nhất**.

Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có dạng tổng quát $$\frac{dx}{dy} + P(x)y = Q(x).$$

Chẳng hạn, phương trình vi phân

$$\frac{dx}{dy} - \frac{y}{x} = e^{-x}$$

là tuyến tính bậc nhất với $P(x) = -\frac{1}{x}$ và $Q(x) = e^{-x}$, và

$$x^2\frac{dy}{dx} - (x^2+2)y = x^5$$

có thể đưa về dạng này bằng cách chia cho x^2, hệ số của dy / dx, để nhận được

$$\frac{dy}{dx} - \left(\frac{x^2+2}{x^2}\right)y = x^3.$$

(Chú ý rằng khi đó $P(x) = -\frac{x^2+2}{x^2}$ còn $Q(x) = x^3$.)

Phương trình vi phân tuyến tính có thể được sử dụng để lập mô hình cho một số tình huống quan trọng trong vật lý, xã hội, hoặc khoa học đời sống. Ta sẽ xác lập một số những mô hình như thế cũng như một số mô hình khác liên quan đến những phương trình tách được, tuy nhiên trước hết chúng ta cần biết những phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất có thể được giải như thế nào.

ĐỊNH LÍ 7.1 Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

$$\frac{dx}{dy} + P\left(x\right)y = Q\left(x\right)$$

được cho bởi

$$y = \frac{1}{I\left(x\right)}\left[\int I\left(x\right)Q\left(x\right)dx + C\right]$$

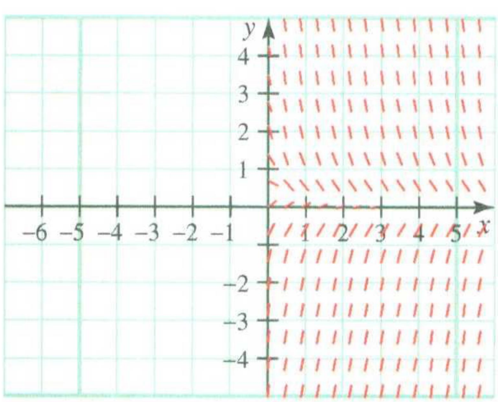
trong đó $I\left(x\right) = e^{\int P\left(x\right)dx}$, phần mũ là một nguyên hàm nào đó của $P\left(x\right)$, và C là một hằng số bất kỳ.

Nếu nhân cả hai vế của phương trình $\frac{dx}{dy} + P\left(x\right)y = Q\left(x\right)$ bởi $I\left(x\right)$ thì vế trái trở thành một đạo hàm, nên $I\left(x\right)$ được gọi là **thừa số tích phân** của phương trình vi phân. Bài toán giá trị đầu bậc nhất bao hàm một phương trình vi phân bậc nhất và giá trị của y tại một giá trị cho trước $x = x_0$. Đây là một ví dụ về một bài toán như thế.

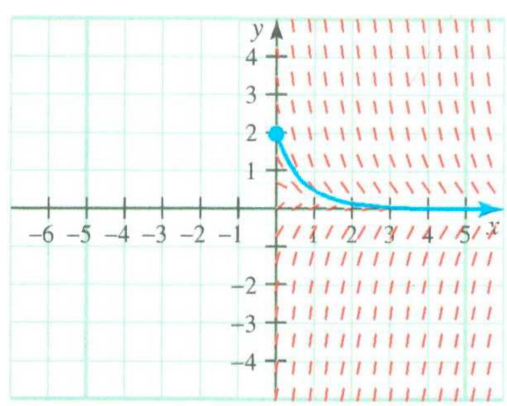
<u>Ví dụ 7.35.</u> Phương trình tuyến tính bậc nhất thỏa mãn giá trị đầu

Giải $\frac{dy}{dx} = e^{-x} - 2y, x \geq 0$, với giả thiết điều kiện ban đầu là $y = 2$ khi $x = 0$ (hay $y\left(0\right) = 2$.

Giải. Một lời giải đồ họa (sử dụng công nghệ) được tìm ra bằng cách nhìn vào trường hướng trong Hình 7.5.



a. Trường hướng của phương trình



b. Nghiệm riêng đi qua (0,2)

Hình 7.5. Nghiệm đồ họa sử dụng trường hướng

Để tìm một nghiệm giải tích, chúng ta sử dụng Định lý 7.1. Phương trình vi phân có thể được biểu diễn ở dạng tuyến tính bậc nhất bằng cách cộng cả hai vế với $2y$:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x} \text{ với } x \geq 0.$$

Chúng ta có $P(x) = 2$ và $Q(x) = e^{-x}$. Cả $P(x)$ và $Q(x)$ đều liên tục trên miền $x \geq 0$. Một thừa số tích phân được cho bởi

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 2x} = e^{2x} \text{ với } x \geq 0.$$

Bây giờ chúng ta sử dụng định lý phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất, với $I(x) = e^{2x}$ và $Q(x) = e^{-x}$ để tìm y.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{e^{2x}}\left[\int e^{2x}e^{-x}dx + C\right] \\ &= \frac{1}{e^{2x}}\left[e^{x} + C\right] \\ &= e^{-x} + Ce^{-2x} \end{aligned}$$

với $x \geq 0$. Để tìm C, chú ý rằng vì $y = 2$ khi $x = 0$ dẫn tới $1 = C$. Do vậy,

$$y = e^{-x} + e^{-2x}, x \geq 0.$$

Bạn có thể muốn so sánh nghiệm giải tích và nghiệm đồ họa với chú ý rằng đồ thị của phương trình trùng với nghiệm được chỉ ra trong Hình 7.5b.

Tích phân từng phần thường được sử dụng trong giải phương trình vi phân tuyến tính cấp một. Đây là một ví dụ.

Ví dụ 7.36. Phương trình vi phân tuyến tính bậc nhất

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình vi phân

$$x\frac{dy}{dx} + y = xe^{2x}, x > 0.$$

Giải. Như bước thứ nhất, chia mỗi thành phần trong phương trình đã cho bởi x chúng ta có thể sử dụng một thừa số tích phân như tron Ví dụ 7.1.

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = e^{2x}.$$

Với phương trình này, nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}\left[\int xe^{2x}dx + C\right] \\ &= \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C\right] \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{e^{2x}}{4x} + \frac{C}{x}. \end{aligned}$$

MỘT ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT

Mô hình tăng trưởng Logistic

Khi dân số $Q(t)$ của một bầy đàn các sinh vật sống (người, vi khuẩn, ...) nhỏ, ta có thể kỳ vọng tỷ số thay đổi dân số tương đối là hằng số. Nói cách khác,

$$\frac{\frac{dQ}{dt}}{Q} = k \text{ hay } \frac{dQ}{dt} = kQ$$

với *k* là một hằng số (**tỷ lệ tăng trưởng không hạn chế**). Điều này được gọi là **sự tăng trưởng mũ** (exponential growth). Miễn là bầy đàn có nhiều thức ăn và không gian sống, lực lượng của nó sẽ tuân theo công thức về tỷ lệ tăng trưởng không hạn chế này và $Q(t)$ sẽ tăng theo quy luật mũ.

Tuy nhiên, trong thực tế, thường thì tới một lúc nào đó các nhân tố môi trường bắt đầu hạn chế sự mở rộng thêm nữa của bầy đàn, và tại thời điểm này, sự tăng trưởng không còn hoàn toàn là mũ nữa. Để xây dựng một mô hình dân số có tính đến sự ảnh hưởng của việc giảm nguồn sống và không gian sống, chúng ta giả sử rằng dân số của loài có một "đỉnh" *B*, được gọi là **dung lượng mang** (carrying capacity) của loài – tức là số lượng sinh vật tối đa có thể sống trong một khu vực. Chúng ta giả thiết thêm rằng tốc độ thay đổi dân số là cùng tỷ lệ với dân số hiện tại $Q(t)$ và lượng dân số tiềm năng chưa được sinh ra $B-Q$. Nghĩa là,

$$\frac{\frac{dQ}{dt}}{Q} = k(B-Q) \text{ hay } \frac{dQ}{dt} = kQ(B-Q)$$

Đây được gọi là **phương trình logistic** (logistic equation), và nó không chỉ xuất hiện trong sự kết nối với mô hình dân số, mà còn trong một loạt các tình huống khác. Ví dụ sau đây minh họa cho một cách mà một phương trình như thế có thể xuất hiện.

Ví dụ 7.37. Phương trình logistic cho sự bùng phát của một bệnh dịch

Tốc độ mà một bệnh dịch bùng phát trong một cộng đồng là tỷ lệ với tích của số các cư dân bị nhiễm bệnh và số các cư dân dễ bị nhiễm bệnh. Hãy mô tả số cư dân bị nhiễm bệnh như một hàm của thời gian.

Giải. Ký hiệu $Q\left(t\right)$ là số cư dân bị nhiễm bệnh theo t và B là tổng số cư dân. Khi đó số các cư dân dễ bị nhiễm bệnh nhưng chưa bị bệnh là $B-Q$, và phương trình vi phân mô tả sự lây lan của dịch bệnh là

$$\frac{dQ}{dt}=kQ\left(B-Q\right)$$

$$\frac{dQ}{Q\left(B-Q\right)}=kdt$$

$$\int\frac{dQ}{Q\left(B-Q\right)}=\int kdt$$

$$\int\frac{1}{B}\left(\frac{1}{Q}+\frac{1}{B-Q}\right)dQ=\int kdt$$

$$\frac{1}{B}\int\frac{dQ}{Q}+\frac{1}{B}\int\frac{dQ}{B-Q}=\int kdt$$

$$\frac{1}{B}\ln\left|Q\right|-\frac{1}{B}\ln\left|B-Q\right|=kt+C$$
$$\frac{1}{B}\ln\left|\frac{Q}{B-Q}\right|=kt+C$$

$$\ln\left(\frac{Q}{B-Q}\right) = Bkt + BC$$
$$\frac{Q}{B-Q} = e^{Bkt+BC}$$
$$Q = \left(B-Q\right)e^{Bkt}.e^{BC}$$
$$Q = A_1Be^{Bkt} - A_1Qe^{Bkt}$$
$$Q + A_1Qe^{Bkt} = A_1Be^{Bkt}$$
$$Q = \frac{A_1Be^{Bkt}}{1 + A_1e^{Bkt}}$$

Để đơn giản phương trình này, chúng ta thực hiện một phép đổi biến; đặt $A = \frac{1}{A_1}$, sau một số bước đơn giản ta có

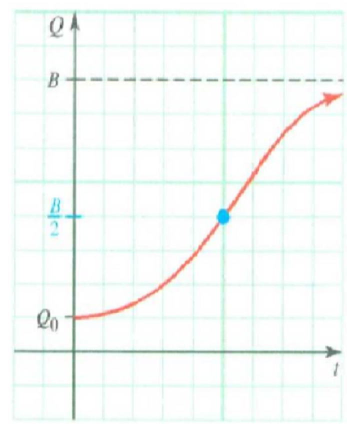
$$Q = \frac{\frac{Be^{Bkt}}{A}}{1 + \frac{e^{Bkt}}{A}} = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$$

Đồ thị của $Q\left(t\right)$ được thể hiện trong Hình 7.6.

Chú ý rằng đường cong này có một điểm đối xứng mà tại đó $Q\left(t\right) = \frac{B}{2}$ bởi vì

$$\frac{d^2Q}{dt^2} = kQ.\left(-1\right) + k\left(B-Q\right) = k\left(B-2Q\right) = 0$$

khi $Q = \frac{B}{2}$.

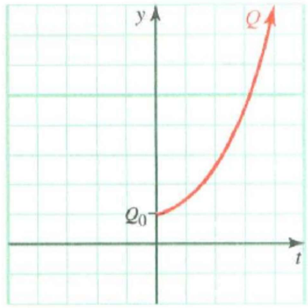
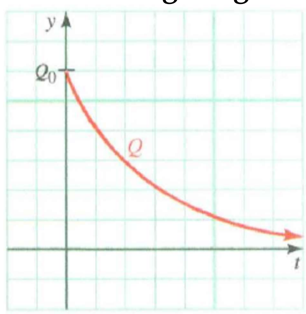
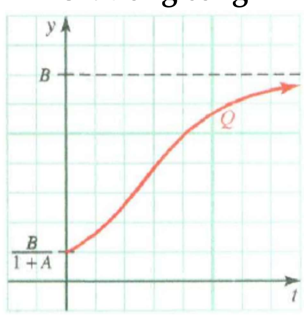
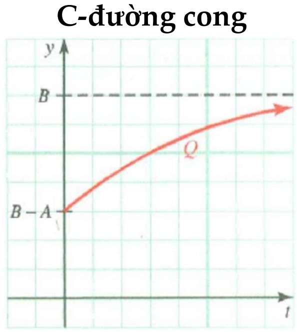


Hình 7.6. Đồ thị logistic

Điều này tương ứng với sự kiện là bệnh dịch lây lan nhanh nhất khi một nửa những cư dân dễ bị nhiễm bệnh đã bị bệnh (dQ / dt đạt cực đại ở đây).

Cũng chú ý từ Ví dụ 3 rằng $y = Q\left(t\right)$ tiệm cận với đường $y = B$ khi $t \to \infty$. Do đó, sau một thời gian dài thì số người bị bệnh tiệm cận với số người dễ bị nhiễm bệnh.

Một bảng tổng kết về các mô hình tăng trưởng được cho bởi Bảng 7.2.

Mô hình	Đồ thị	Phương trình và nghiệm	Các áp dụng
$Q(t)$ là lượng tại thời điểm t, Q_0 là lượng ban đầu và k là hằng số của tỉ lệ, Nếu $Q(t)$ có giới hạn thì ký hiệu giới hạn này là B.			
Tăng trưởng không bị chặn ($k > 0$) Tốc độ thay đổi tỉ lệ với lượng hiện tại	**J-đường cong** 	**Phương trình** $\frac{dQ}{dt} = kQ$ **Nghiệm** $Q(t) = Q_0 e^{kt}$	Tăng trưởng theo luật mũ. Tăng trưởng dân số ngắn hạn. Lãi kép liên tục. Lạm phát. Đường giá-cung.
Suy giảm không bị chặn ($k < 0$) Tốc độ thay đổi tỉ lệ với lượng hiện tại	**L-đường cong** 	**Phương trình** $\frac{dQ}{dt} = kQ$ **Nghiệm** $Q(t) = Q_0 e^{kt}$	Phân rã chất phóng xạ. Cạn kiệt tài nguyên thiên nhiên. Đường giá-cầu.
Tăng trưởng bị chặn hoặc tăng trưởng logistic Tốc độ thay đổi tỉ lệ với lượng hiện tại và tỉ lệ với hiệu giữa lượng hiện tại và một lượng cố định.	**S-đường cong** 	**Phương trình** $\frac{dQ}{dt} = kQ(B - Q)$ **Nghiệm** $Q(t) = \frac{B}{1 + Ae^{-Bkt}}$ (A là một hằng số)	Tăng dân số dài hạn. Tăng trưởng của một doanh nghiệp.
Tăng trưởng bị giới hạn ($k > 0$) Tốc độ thay đổi tỉ lệ với hiệu giữa lượng hiện tại và một lượng cố định.	**C-đường cong** 	**Phương trình** $\frac{dQ}{dt} = k(B - Q)$ **Nghiệm** $Q(t) = B - Ae^{-kt}$ (A là một hằng số)	Sự truyền tin của truyền thông đại chúng. Truyền thuốc vào tĩnh mạch. Định luật làm lạnh của Newton. Giá của một sản phẩm mới.

Bảng 7.2 Một số mô hình tăng trưởng

Phân tích từng phần: Mô hình hòa tan

Một thùng chứa 20 lb muối được hòa tan vào 50 gal (4.54 lít Anh = 3.58 lít Mĩ) nước. Giả sử rằng mỗi phút có 3 gal nước muối, mỗi gallon chứa 2 lb (pound=454 gam) muối hòa tan, chảy vào trong thùng và hỗn hợp này (đã được khuấy đều) chảy ra ngoài thùng với tốc độ 2 gal/phút. Tìm số muối trong thùng tại thời điểm *t* bất kỳ. Lượng muối trong thùng là bao nhiêu sau thời gian 1 giờ?

Giải. Gọi $S\left(t\right)$ là lượng muối trong thùng tại thòi điểm *t* phút. Vì 3 gal nước biển chảy vào thùng mỗi phút và mỗi gallon chứa 2 lb muối nên dẫn đến có 3.2 = 6 lb muối chảy vào thùng mỗi phút. Đây là tốc độ chảy vào.

Với tốc độ chảy ra, chú ý rằng tại thời điểm *t*, có $S\left(t\right)$ lb muối và 50+(3-2)*t* gallon dung dịch (vì dung dịch chảy vào 3 gal/phút và chảy ra 2 gal/phút). Do đó, nồng độ muối trong dung dịch tại thời điểm *t* là

$$\frac{S\left(t\right)}{50+t}\,\text{lb/gal}$$

và tốc độ chảy ra của muối là

$$\left[\frac{S\left(t\right)}{50+t}\,\text{lb/gal}\right]\left[2\ \text{gal/phút}\right]=\frac{2S\left(t\right)}{50+t}\ \text{lb/phút}$$

Kết nối các quan sát này, ta thấy rằng tốc độ thay đổi lượng muối thực chất dS/dt cho bởi

$$\frac{dS}{dt}=\underbrace{6}_{\substack{\downarrow\\ \text{vào}}}-\underbrace{\frac{2S}{50+t}}_{\substack{\downarrow\\ \text{ra}}}$$

$$\frac{dS}{dt}+\frac{2S}{50+t}=6$$

cái mà chúng ta đã biết là một phương trình vi phân tuyến tính với

$$P\left(t\right)=\frac{2}{50+t},\ \ Q\left(t\right)=6\,.$$

Một thừa số tích phân là

$$I(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int (2dt)/(50+t)} = e^{2\ln|50+t|} = (50+t)^2$$

và nghiệm tổng quát là

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{(50+t)^2}\left[\int 6(50+t)^2\, dt + C\right] \\ &= \frac{1}{(50+t)^2}\left[2(50+t)^3 + C\right] \\ &= 2(50+t) + \frac{C}{(50+t)^2} \end{aligned}$$

Để tính *C*, ta nhắc lại rằng có 20 lb muối ban đầu trong dung dịch. Điều này có nghĩa $S(0) = 20$, do đó $C = -80.(50^2)$

Vậy, nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính đã cho ứng với điều kiện đầu $S(0) = 20$ là

$$S(t) = 2(50+t) - \frac{80(50^2)}{(50+t)^2}.$$

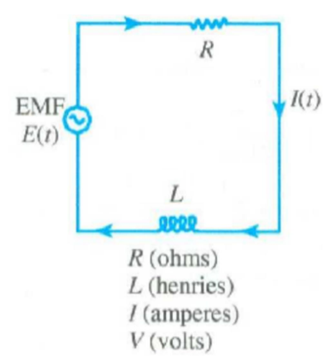
Đặc biệt, sau 1 giờ (60 phút), thùng chứa

$$S(60) = 2(50+60) - \frac{80(50^2)}{(50+60)^2} \approx 203.4710744$$

Thùng chứa xấp xỉ 200 lb muối.

Mô hình mạch *RL*

Một ứng dụng khác của phương trình vi phân tuyến tính cấp một liên quan đến dòng điện trong một mạch điện *RL*. Một mạch *RL* là một mạch điện với điện trở không đổi *R*, và một cuộn cảm không đổi *L*. Hình 7.7 mô tả một mạch điện với một



Hình 7.7. Mạch RL

sức điện động (EMF), một điện trở và một phần cảm được mắc nối tiếp.

Nguồn EMF, thường là một ắc qui hoặc một máy phát điện, cung cấp một điện áp gây ra một dòng điện trong mạch. Theo định luật thứ hai của Kirchhoff, nếu mạch được đóng tại thời điểm $t = 0$, thì suất điện động được sử dụng bằng tổng điện áp mất đi trong phần còn lại của mạch. Nó có thể được mô tả là điều này dẫn tới dòng điện $I\left(t\right)$ chạy trong mạch tại thời điểm t phải thỏa mãn phương trình vi phân tuyến tính cấp một

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

trong đó L (cuộn cảm) và R (điện trở) là các số không âm. Viết

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L}$$

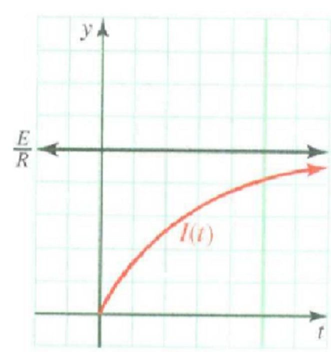
Dễ thấy rằng $P\left(t\right) = \frac{R}{L}$ (hằng số) và $Q\left(t\right) = \frac{E}{L}$ (hằng số)[1]. Khi đó

$$\begin{aligned} I\left(t\right) &= e^{-\int \left(R/L\right)dt}\left[\int \frac{E}{L}e^{\int \left(R/L\right)dt}dt + C\right] \\ &= e^{-\left(R/L\right)t}\left[\frac{E}{L}\int e^{\left(R/L\right)t}dt + C\right] \\ &= e^{-\left(R/L\right)t}\left[\frac{E}{L}\cdot\frac{L}{R}e^{\left(R/L\right)t} + C\right] \\ &= \frac{E}{R} + Ce^{-\left(R/L\right)t} \end{aligned}$$

Hợp lý khi ta cho rằng không có dòng điện chạy qua khi $t = 0$. Nghĩa là $I = 0$ khi $t = 0$, do đó ta có $0 = E / R + C$ hoặc $C = -E / R$. Nghiệm với điều kiện đầu này là

$$I = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-Rt/L}\right)$$

Chú ý rằng vì $e^{-\left(Rt/L\right)} \to 0$ khi $t \to \infty$ nên ta có



Hình 7.8. Cường độ dòng điện trong mạch RL với sức điện động không đổi

[1] Việc sử dụng kí tự I cho dòng điện là một thực tế phổ biến trong vật lý học v
liên quan tới khái niệm thừa số tích phân đã được giới thiệu trước đó trong chương này

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} I(t) &= \lim_{t\to\infty}\frac{E}{R}\left(1-e^{-Rt/L}\right)\\ &= \frac{E}{R}(1-0)\\ &= \frac{E}{R}\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là, trong một thời gian dài, dòng điện I phải dần tới $\frac{E}{R}$. Nghiệm của phương trình vi phân gồm hai phần được cho bởi những cái tên đặc biệt:

$\frac{E}{R}$ là **dòng điện ổn định** và $-\frac{E}{R}e^{-Rt/L}$ là **dòng điện nhất thời.**

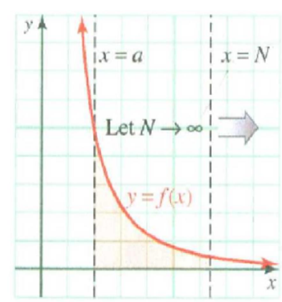
Hình 7.8 cho thấy dòng điện $I(t)$ biến thiên theo thời gian t như thế nào.

7.7 TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Chúng ta đã định nghĩa tích phân $\int_a^b f(x)dx$ trên một đoạn đóng, bị chặn $[a,b]$, trong đó hàm khả tích $f(x)$ là bị chặn. Trong mục này, chúng ta mở rộng khái niệm tích phân cho trường hợp khoảng lấy tích phân là vô hạn và cũng cho trường hợp f là không bị chặn tại một số hữu hạn điểm trên khoảng lấy tích phân. Các tích phân này gọi chung là **tích phân suy rộng**.

Tích phân suy rộng với cận vô hạn

Trong vật lý, kinh tế, xác suất và thống kê và một số lĩnh vực ứng dụng khác, việc có một khái niệm tích phân mà được định nghĩa trên đường thẳng thực hoặc một nửa đường thẳng có dạng $x \ge a$ hoặc $x \le a$ là cần thiết. Nếu $f(x) \ge 0$, tích phân của f trên khoảng $x \ge a$ có thể xem như diện tích phía dưới đường cong $y = f(x)$ trên khoảng không bị chặn này, như được mô tả trong Hình 7.9.



Hình 7.9. Diện tích của miền không bị chặn

Một lý do chiến lược cho việc tìm diện tích này là trước hết sử dụng tích phân xác định để tìm phần diện tích từ $x = a$ đến đến một số hữu hạn $x = N$ và sau đó cho N dần tới vô hạn trong biểu thức kết quả. Sau đây là định nghĩa.

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I Cho a là một số cố định và giả sử $\int_a^N f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $N \geq a$. Khi đó nếu giới hạn $\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx$ tồn tại, ta định nghĩa **tích phân suy rộng** $\int_a^\infty f(x)\,dx$ bởi

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,dx$$

Tích phân suy rộng được gọi là **hội tụ** nếu giới hạn này là một số hữu hạn và **phân kỳ** trong trường hợp ngược lại.

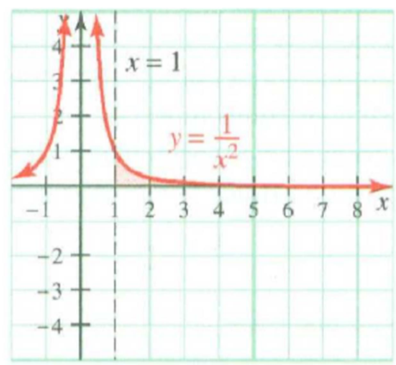
<u>Ví dụ 7.38.</u> Tích phân suy rộng hội tụ

Tính $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$.

Giải. Miền phía dưới đường cong $y = \frac{1}{x^2}$ được biểu diễn trong hình 7.10.

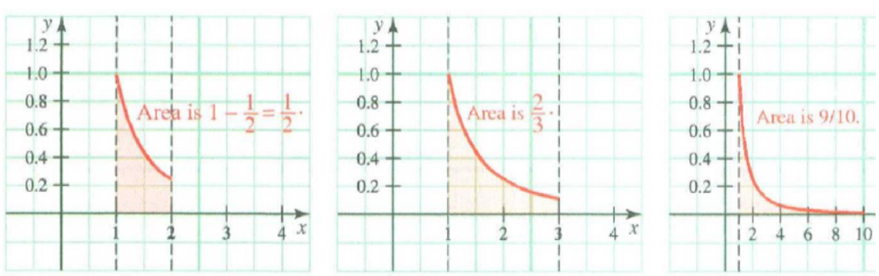
Miền này không bị chặn, vì vậy có vẻ hợp lý khi kết luận diện tích miền này là vô hạn. Bắt đầu bằng việc tính tích phân từ 1 đến N:

$$\int_1^N \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big|_1^N = -\frac{1}{N} + 1$$



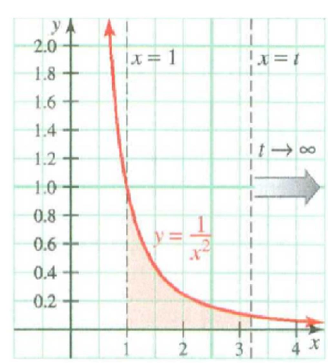
Hình 7.10. Đồ thị của $y = 1/x^2$

Ta xem xét trường hợp này cẩn thận hơn, như trong hình 7.11.



Cho $N = 1$, $A = 1/2$ | Cho $N = 3$, $A = 2/3$ | Cho $N = 10$, $A =$

Hình 7.11. Diện tích của miền bị chặn bởi $y = 1/x^2$, trục O:



Hình 7.12. Miền bên phải của x = 1 bị chặn bởi $y = 1/x^2$ và trục Ox có diện tích bằng 1

Với N = 2, 3, 10 hay 100 thì tích phân có giá trị tương ứng là 1/2, 2/3, 9/10 và 99/100, nó gợi ý rằng miền dưới $y = \frac{1}{x^2}$, với $x \geq 1$ thật sự có diện tích hữu hạn tiến đến 1 khi N càng ngày càng lớn.

Để tìm diện tích này, ta lấy giới hạn khi $N \to \infty$, như hình 7.12. Vì vậy, tích phân suy rộng hội tụ và có giá trị là 1.

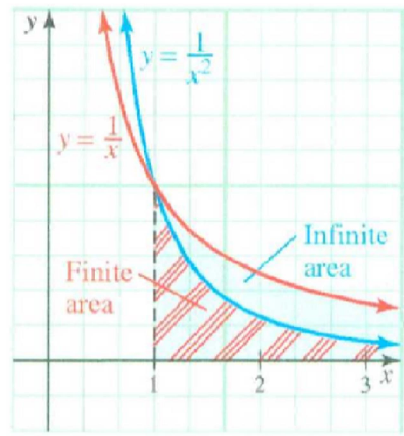
Ví dụ 7.39. Tích phân suy rộng phân kỳ

Tính $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$.

Giải.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N = \lim_{N\to\infty} \ln N = \infty$$

Giới hạn không là một số hữu hạn, điều này có nghĩa tích phân suy rộng phân kỳ.



Hình 7.13. Một miền không bị chặn có thể có diện tích hữu hạn hoặc vô hạn

Ta đã chỉ ra tích phân suy rộng $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ hội tụ và tích phân suy rộng $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ phân kỳ. Về mặt hình học, điều này cho ta diện tích bên phải của x = 1 dưới đường cong $y = \frac{1}{x^2}$ là hữu hạn, còn diện tích tương ứng dưới đường cong $y = \frac{1}{x}$ vô hạn. Điều này cũng cho một ý nghĩa khác, đó là khi x tăng thì $\frac{1}{x^2}$ tiến đến 0 nhanh hơn $\frac{1}{x}$, như hình 7.13.

Ví dụ 7.40. Xác định sự hội tụ của tích phân suy rộng

Hãy chứng tỏ tích phân suy rộng $\int_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ hội tụ chỉ khi hằng số $p > 1$.

Giải. Trong ví dụ này p là hằng số, x là biến.

Trường hợp p = 1 đã xét ở ví dụ 2, vì vậy ra có thể giả sử $p \neq 1$ trong tính toán sau:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty}\left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]\Bigg|_1^N = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[N^{1-p}-1\right]$$

Nếu $p>1$ thì $1-p<0$, vì thế $N^{1-p}\to 0$ khi $N\to\infty$ và

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[N^{1-p}-1\right] = \frac{1}{1-p}\left(-1\right) = \frac{1}{p-1}$$

Nếu $p<1$ thì $1-p>0$, vì thế $N^{1-p}\to\infty$ khi $N\to\infty$ và

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{1-p}\left[N^{1-p}-1\right] = \infty$$

Vì vậy, tích phân suy rộng này phân kỳ khi $p\le 1$ và hội tụ khi $p>1$.

Tích phân suy rộng

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p\le 1 \end{cases}.$$

<u>Ví dụ 7.41</u> Tích phân suy rộng sử dụng quy tắc l'Hôpital và tích phân từng phần

Tính $\int_0^\infty xe^{-2x}dx$.

Giải.

$$\int_0^{\infty} xe^{-2x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^{N} xe^{-2x}dx \qquad \left(\begin{cases} u = x \\ dv = e^{-2x}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = \dfrac{1}{-2}e^{-2x} \end{cases}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\left(x.\frac{e^{-2x}}{-2}\right)\Big|_0^N - \int_0^N \frac{1}{-2}e^{-2x}dx\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{-xe^{-2x}}{2} - \frac{e^{-2x}}{4}\right]\Big|_0^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{2}Ne^{-2N} - \frac{1}{4}e^{-2N} + 0 + \frac{1}{4}\right] \qquad \left(\text{do } \lim_{N\to\infty} e^{-2N} = 0\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{N}{e^{2N}}\right) + \frac{1}{4} \qquad \left(l'Hopital\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2e^{2N}}\right) + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

<u>Ví dụ 7.42.</u> Tù và của Gabriel: một vật thể có thể tích hữu hạn nhưng diện tích bề mặt vô hạn

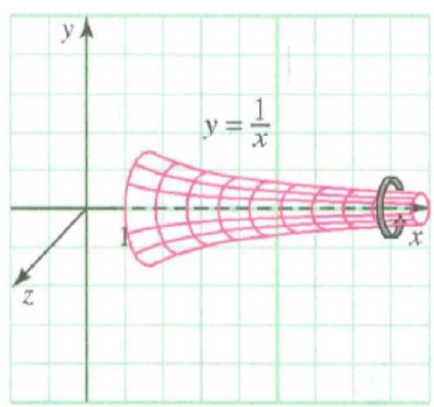
Tù và của Gabriel (hay *chiếc kèn trumpet của Torricenlli*) là tên được đặt cho một vật thể xác định bởi xoay tròn quanh trục *Ox* miền không bị chặn phía dưới đường thẳng $y = \dfrac{1}{x}, x \geq 1$. Hãy chứng tỏ rằng vật thể này có thể tích hữu hạn nhưng diện tích bề mặt thì vô hạn.

Giải. Ta tìm thể tích V bằng cách dùng phương pháp đĩa, như hình 7.14.

$$V = \pi\int_1^{\infty}\left(x^{-1}\right)^2 dx = \pi\lim_{N\to\infty}\int_1^N x^{-2}dx$$

$$= \pi\lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{N} + 1\right) = \pi$$

Ta tìm diện tích bề mặt S



Hình 7.14. Tù và Gabriel

Bạn có thể đổ đầy chiếc tù và của Gabriel với một lượng sơn hữu hạn nhưng lượng sơn cần để tô màu mặt

$$S = 2\pi\int_1^\infty f\left(x\right)\sqrt{1+\left[f'\left(x\right)\right]^2}dx = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx$$ trong của nó là vô hạn.

$$= 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^4+1}{x^4}}dx$$

$$= 2\pi\int_1^\infty \frac{\sqrt{u^2+1}}{2u^2}du \qquad \left(u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx\right)$$

$$= \pi\lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2}du$$

$$= \pi\lim_{N\to\infty}\left[\frac{-\sqrt{u^2+1}}{u} + \ln\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)\right]_1^N = \infty$$

(công thức 97).

Chúng ta cũng định nghĩa tích phân suy rộng trên một khoảng không bị chặn về bên trái hoặc trên toàn bộ đường thẳng thực.

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI I (Mở rộng) Cho b là một số cố định và giả sử $\int_t^b f\left(x\right)dx$ tồn tại với mọi $t \le b$. Khi đó nếu giới hạn $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f\left(x\right)dx$ tồn tại, ta định nghĩa **tích phân suy rộng** $\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx$ bởi

$$\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f\left(x\right)dx.$$

Tích phân suy rộng $\int_{-\infty}^b f\left(x\right)dx$ được gọi là **hội tụ** nếu giới hạn này là một số hữu hạn và **phân kỳ** trong trường hợp ngược lại.

Nếu cả tích phân $\int_a^\infty f\left(x\right)dx$ và $\int_{-\infty}^a f\left(x\right)dx$ cùng hội tụ với một số *a* nào đó, tích phân suy rộng của $f\left(x\right)$ trên toàn bộ trục *Ox* được định nghĩa bởi

$$\int_{-\infty}^\infty f\left(x\right)dx = \int_{-\infty}^a f\left(x\right)dx + \int_a^\infty f\left(x\right)dx.$$

Chúng ta gọi tích phân phía trái hội tụ nếu cả hai tích phân phía phải hội tụ, và nó phân kỳ trong trường hợp ngược lại.

<u>Ví dụ 7.43.</u> Các tích phân suy rộng

Tính các tích phân suy rộng sau:

a. $\int\limits_{1}^{\infty} 2x^{-3}dx$ **b.** $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x}$ **c.** $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

***Giải*.**

a. $\int\limits_{1}^{\infty} 2x^{-3}dx = \lim\limits_{N\to\infty}\int\limits_{1}^{N} 2x^{-3}dx = \lim\limits_{N\to\infty}\left(-x^{-2}\right)\Big|_1^N = \lim\limits_{N\to\infty}\left(-N^{-2}+1\right) = 1$

b. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to-\infty}\int\limits_{N}^{-3} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{N\to-\infty}\left(\ln|x|\right)\Big|_N^{-3} = \lim\limits_{N\to-\infty}\left(\ln 3 - \ln|N|\right) = \infty$

Vì vậy tích phân phân kỳ.

c. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx = \int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}dx + \int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0} xe^{-x^2}dx + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} xe^{-x^2}dx \qquad \left(u=-x^2 \Rightarrow du=-2xdx\right)$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int\limits_{x=a}^{x=0} \frac{-1}{2}e^u du + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{x=0}^{x=b} \frac{-1}{2}e^u du$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_a^0 + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-a^2}\right) + \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}+0-0+\frac{1}{2}=0$$

<u>Ví dụ 7.44.</u> Tích phân suy rộng tới âm vô cực

a. Tính $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$.

b. Bạn dự đoán giá trị của $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ sẽ quan hệ như thế nào với tích phân suy rộng ở câu a. Hãy chứng tỏ phỏng đoán của bạn bằng cách tính tích phân này.

Giải.

a. $$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \tan^{-1} x\Big|_t^0$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left[\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} t\right] = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

b. Vì $y(x) = y(-x)$, nên $y = \frac{1}{1+x^2}$ đối xứng qua trục Oy, và có thể phỏng đoán tích phân ở câu **b** gấp đôi tích phân ở câu **a**. Ta có

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \frac{dx}{1+x^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} + \lim_{N\to\infty}\left[\tan^{-1} N - \tan^{-1} 0\right] = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$$

Ta thấy rằng thực sự tích phân này bằng 2 lần tích phân trong câu **a** như phỏng đoán.

<u>Ví dụ 7.45.</u> Tích phân suy rộng cực

Tính $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2\theta} d\theta$.

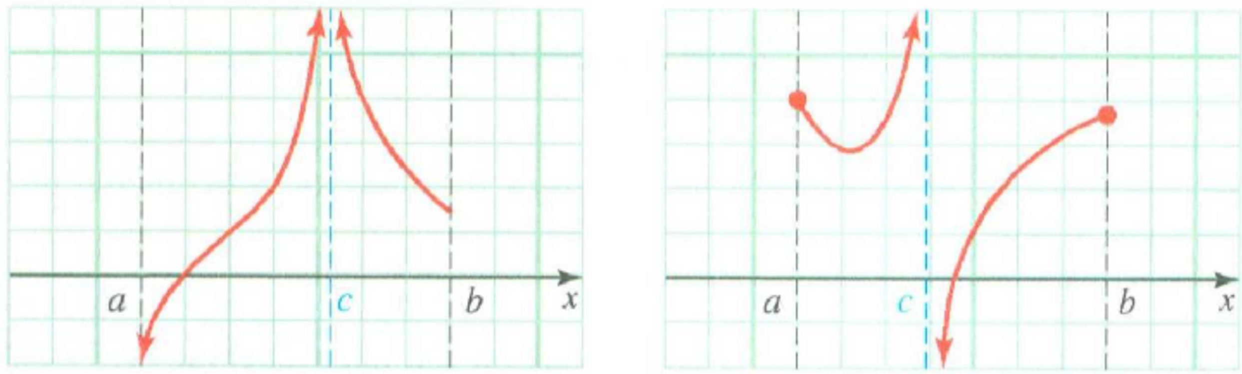
Giải.

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-2\theta} d\theta = \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} \frac{1}{2} e^{-2\theta} d\theta = \lim_{N\to\infty} \left(-\frac{1}{4} e^{-2\theta}\right)\Big|_0^N$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{4} e^{-2N} - \left(-\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

Một hàm f là **không bị chặn** tại *c* nếu nó có giá trị lớn tùy ý gần *c*. Một cách hình học, điều này xuất hiện khi đường thẳng $x = c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số *f* tại *c*, như mô tả trong Hình 7.15.



Hình 7.15. Hai hàm số không bị chặn tại c

Nếu *f* không bị chặn tại *c* và $a \le c \le b$, tích phân Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$ thậm chí không xác định (chỉ những hàm bị chặn mới khả tích Riemann). Tuy nhiên, ta vẫn có thể xác định $\int_a^b f(x)\,dx$ như một tích phân suy rộng trong những trường hợp xác định.

Ta hãy xem xét một ví dụ cụ thể. Cho $f(x) = \dfrac{1}{x}, 0 < x \le 1$. Khi đó *f* không bị chặn tại $x = 0$ và $\int_0^1 f(x)\,dx$ không xác định. Tuy nhiên, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ là liên tục trên mọi đoạn $[t,1]$ với $t > 0$, như được chỉ ra trong Hình 7.19.

Với mỗi đoạn $[t,1]$ như thế ta có

$$\int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_t^1 x^{-1/2}\,dx = 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}$$

Cho $t \to 0$ theo các giá trị dương ta thấy rằng

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2$$

Đây được gọi là một tích phân suy rộng hội tụ với giá trị 2, và dường như có lý khi cho rằng

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2$$

Trong ví dụ này *f* là không bị chặn ở mút bên trái của đoạn lấy tích phân, nhưng nếu nó không bị chặn tại mút bên phải hay một điểm giữa đoạn thì một lập luận tương tự cũng được áp dụng.

TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI II Nếu *f* không bị chặn tại *a* và $\int_t^b f(x)\,dx$ tồn tại với mọi *t* thỏa mãn $a < t \le b$, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn tồn tại (là một số hữu hạn), ta nói rằng tích phân suy rộng **hội tụ**; ngược lại, tích phân suy rộng **phân kỳ**. Tương tự, nếu *f* không bị chặn tại *b* và $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi *t* thỏa mãn $a \le t < b$, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$$

Nếu *f* không bị chặn tại *c* với $a < c < b$, và các tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)\,dx$ và $\int_c^b f(x)\,dx$ cùng hội tụ thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Chúng ta nói rằng tích phân ở vế trái hội tụ nếu cả hai tích phân ở vế phải đồng thời hội tụ.

<u>Nhận xét</u> Nếu một hàm liên tục trên một khoảng mở (a,b) nhưng không bị chặn tại một điểm mút, thì thay đầu mút này bằng *t*, tính tích phân, và lấy giới hạn khi *t* tiến về điểm mút. Mặt khác, nếu *f* liên tục trên đoạn $[a,b]$, trừ một điểm *c* thuộc (a,b) mà tại đó *f* gián đoạn vô hạn, viết tích phân thành

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Bạn sẽ cần phải lấy giới hạn để tính mỗi tích phân ở vế phải.

Ví dụ 7.46. Tích phân suy rộng tại điểm mút phải

Tính $\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-1\right)^{2/3}}$.

Giải. Hàm $f\left(x\right)=\left(x-1\right)^{-2/3}$ không bị chặn tại đầu mút phải của đoạn lấy tích phân và liên tục trên $\left[0,\, t\right]$ với mọi *t* mà $0 \le t < 1$. Ta có

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(x-1\right)^{2/3}} = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{dx}{\left(x-1\right)^{2/3}} = \lim_{t\to 1^-} \left[3\left(x-1\right)^{1/3}\right]\Big|_0^t = 3\lim_{t\to 1^-}\left[\left(t-1\right)^{1/3} - \left(-1\right)\right] = 3$$

Vậy tích phân này hội tụ và có giá trị 3.

Ví dụ 7.47. Tích phân suy rộng ở điểm mút trái

Tính $\int_{\pi/2}^{\pi} \sec x \; dx$.

Giải. Vì hàm $\sec x$ không bị chặn tại đầu mút trái của đoạn lấy tích phân và liên tục trên $\left[t,\, \pi\right]$ với mọi *t* mà $\frac{\pi}{2} < t \le \pi$, nên ta có

$$\begin{aligned}\int_{\pi/2}^{\pi} \sec x \; dx &= \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \int_t^{\pi} \sec x \; dx = \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+} \ln\left|\sec x + \tan x\right|\Big|_t^{\pi} \\ &= \lim_{t\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}\left[\ln\left|-1+0\right| - \ln\left|\sec t + \tan t\right|\right] = -\infty\end{aligned}$$

Vì vậy tích phân này phân kỳ.

Ví dụ 7.48 Tích phân suy rộng tại một điểm giữa

Tính $\int_0^3 \left(x-2\right)^{-1} \; dx$.

Giải. Bài trình bày dưới đây ngoài trình bày cách làm đúng (cột 1) thì cũng đưa ra những lỗi sai thường gặp (cột 2).

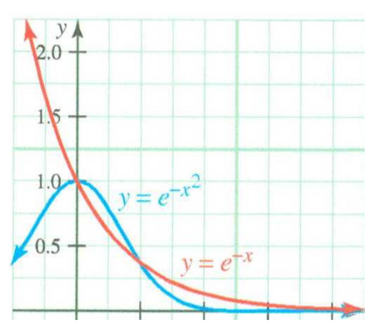
Đúng	Sai
Tích phân đã cho là suy rộng vì hàm dưới dấu tích phân không bị chặn tại $x=2$. Nếu tích phân đã cho hội tụ, ta có $\int_0^3 (x-2)^{-1}dx = \int_0^2 (x-2)^{-1}dx + \int_2^3 (x-2)^{-1}dx$ $= \lim_{t\to 2^-}\int_0^t (x-2)^{-1}dx + \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 (x-2)^{-1}dx$ $= \lim_{t\to 2^-}\ln\left\|x-2\right\|\Big\|_0^t + \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 (x-2)^{-1}dx$ $= \lim_{t\to 2^-}\left[\ln\left\|t-2\right\| - \ln 2\right] + \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 (x-2)^{-1}dx$ $= -\infty + \lim_{t\to 2^+}\int_t^3 (x-2)^{-1}dx$ Do một trong hai tích phân ở vế phải phân kỳ nên tích phân đã cho phân kỳ.	<u>Kiểu sai lầm 1:</u> (xem tích phân suy rộng như tích phân xác định) $\int_0^3 (x-2)^{-1}dx = \ln\left\|x-2\right\|\Big\|_0^3$ $= \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$ <u>Kiểu sai lầm 2:</u> (kết quả tính tích phân ở dạng vô định, chẳng hạn $\infty - \infty$) $\int_0^3 (x-2)^{-1}dx$ $= \int_0^2 (x-2)^{-1}dx + \int_2^3 (x-2)^{-1}dx$ $= \ln\left\|x-2\right\|\Big\|_0^2 + \ln\left\|x-2\right\|\Big\|_2^3$ $= \ln 0 - \ln 2 + \ln 1 - \ln 0$ $= -\ln 2 + \infty - \infty$

Tiêu chuẩn so sánh sự hội tụ và phân kỳ

Đôi khi rất khó hoặc không thể tìm ra chính xác giá trị của một tích phân suy rộng, lúc này quan trọng là ta phải biết nó hội tụ hay phân kỳ. Nếu nó hội tụ, ta thường sử dụng các kỹ thuật số để ước lượng giá trị của nó, nhưng trước hết chúng ta phải xác định được nó có hội tụ hay không. Trong những trường hợp này, kết quả sau, được phát biểu cho tích phân suy rộng loại I, là hữu ích. Một định lý tương tự cho tích phân suy rộng loại II cũng được đưa ra.

Định lý 7.2 Tiêu chuẩn so sánh cho tích phân suy rộng

Giả sử f và g là các hàm liên tục thỏa mãn $f(x) \ge g(x) \ge 0$ với mọi $x \ge a$. Nếu $\int_a^\infty f(x)dx$ hội tụ, thì tích phân $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ, khi đó $\int_a^\infty g(x)dx$ hội tụ đến một giá trị



Hình 7.16

nhỏ hơn hoặc bằng $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$. Nếu $\int_a^{\infty} g(x)\,dx$ phân kỳ thì $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ cũng phân kỳ.

<u>Ví dụ 7.49</u> **Tiêu chuẩn so sánh**

Hãy chứng tỏ tích phân $\int_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ hội tụ.

Giải. Ta không thể tính trực tiếp tích phân này vì nguyên hàm của e^{-x^2} không được biểu diễn qua các hàm sơ cấp (không tìm được nguyên hàm). Tuy nhiên, $e^{-x^2} < e^{-x}$ với $x > 1$ (xem hình 7.16), vì vậy

$$\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx < \int_1^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t} e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\left(-e^{-t} + e^{-1}\right) = e^{-1}$$

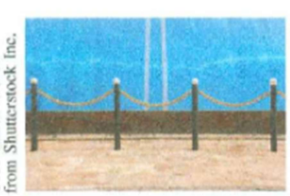
Chú ý rằng từ hình 7.16, đồ thị hàm $y = e^{-x^2}$ ở dưới đồ thị hàm $y = e^{-x}$ với $x > 1$, vì vậy sử dụng định lý 7.2 ta suy ra $\int_1^{\infty} e^{-x^2}dx$ hội tụ.

7.8 CÁC HÀM HYPERBOLIC VÀ CÁC HÀM NGƯỢC CỦA CHÚNG

Các hàm hyperbolic và các hàm hyperbolic ngược đã được giới thiệu và nghiên cứu; các công thức tích phân được sử dụng trong phần còn lại của tài liệu này được suy ra từ đó.

Hàm hyperbolic

Trong vật lý, một dây cáp nặng, dẻo (chẳng hạn như dây điện) được treo giữa hai điểm có cùng độ cao được cho là có hình dáng của một đường cong được gọi là một **xích** (xem Hình 7.17), với phương trình dạng



Hình 7.17

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

Đây là một trong số những ứng dụng quan trọng liên quan đến tổng của các hàm mũ. Mục đích của mục này là nghiên cứu những tổng như vậy và các hàm ngược của chúng.

Theo những cách nào đó, những hàm mà chúng ta sẽ nghiên cứu là tương tự như các hàm lượng giác, và về cơ bản chúng có mối quan hệ tương tự như các dạng hyperbol mà các hàm lượng giác có với đường tròn. Vì lý do đó, những hàm này được gọi là các **hàm hyperbolic**. Ba hàm hyperbolic là sin hyperbolic (ký hiệu là sinh$x$ và đọc là "sin h"), cosin hyperbolic (ký hiệu là cosh$x$ và đọc là "cos h") và tang hyperbolic (ký hiệu là tanh$x$ và đọc là "tan h"). Chúng được định nghĩa như sau đây.

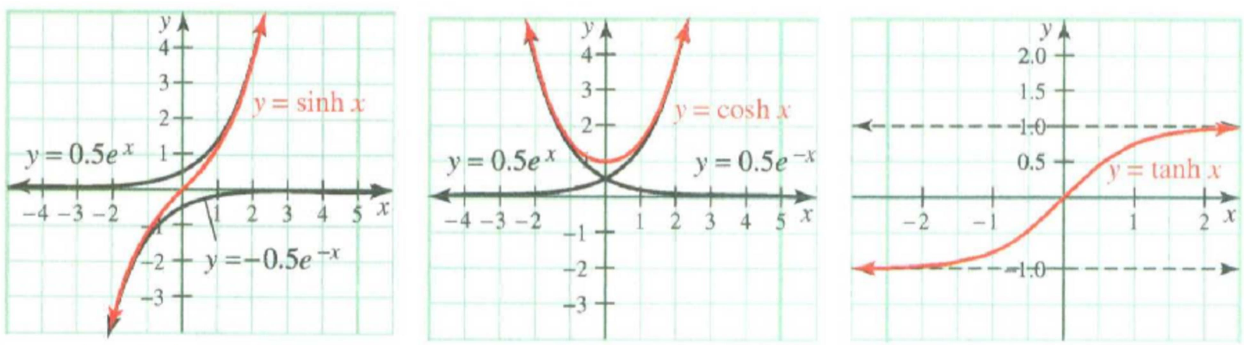
CÁC HÀM HYPERBOLIC

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ với mọi } x$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ với mọi } x$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ với mọi } x$$

Đồ thị của ba hàm này được chỉ ra trong hình 7.18.



a. Hàm sin hyperbolic b. Hàm cosin hyperbolic c. Hàm tang hyperbolic

Hình 7.18. Đồ thị của ba hàm hyperbolic cơ bản

Các tính chất trong định lý sau đây gợi ý rằng các hàm hyperbolic cơ bản là tương tự như các hàm lượng giác.

Định lý 7.3 Tính chất của các hàm hyperbolic

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $\sinh(-x) = -\sinh x$ $\cosh(-x) = \cosh x$ $\tanh(-x) = -\tanh x$ $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$	(sinh x và tanh x là hàm lẻ, cosh x là hàm chẵn)

Có thêm ba hàm hyperbolic: co-tang hyperbolic (ký hiệu là coth$x$), sec hyperbolic (ký hiệu là sech$x$) và co-sec hyperbolic (ký hiệu là csch$x$). Những hàm này được định nghĩa như sau:

$$\coth x = \frac{1}{\tanh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}};\ \ \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}};\ \ \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

CHÚ Ý KỸ THUẬT: Một số gói phần mền biểu diễn các hàm này ở dạng đơn giản

$$\coth x = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1};\ \ \operatorname{sech} x = \frac{2e^x}{e^{2x}+1};\ \ \operatorname{csch} x = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}$$

Hai đồng nhất thức quan trọng liên quan đến các hàm này là:

$$\operatorname{sech}^2 x = 1 - \tanh^2 x \text{ và } \operatorname{csch}^2 x = \coth^2 x - 1.$$

Đạo hàm và tích phân các hàm hyperbolic

Định lý 7.4 Quy tắc đạo hàm các hàm hyperbolic

Cho u là một hàm khả vi của x. Khi đó:

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

<u>Ví dụ 7.50.</u> Đạo hàm liên quan đến các hàm hyperbolic

Tìm $\frac{dy}{dx}$ với mỗi hàm sau đây:

a. $y = \cosh Ax$, A là một hằng số b. $y = \tanh(x^2+1)$ c. $y = \ln(\sinh x)$

Giải.

a. $\frac{d}{dx}\left(\cosh Ax\right)=\sinh\left(Ax\right)\frac{d}{dx}\left(Ax\right)=A\sinh Ax$

b. $\frac{d}{dx}\left[\tanh\left(x^2+1\right)\right]=\operatorname{sech}^2\left(x^2+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+1\right)=2x\operatorname{sech}^2\left(x^2+1\right)$

c. $\frac{d}{dx}\left[\ln\left(\sinh x\right)\right]=\frac{1}{\sinh x}\frac{d}{dx}\left(\sinh x\right)=\frac{1}{\sinh x}\left(\cosh x\right)=\coth x$.

Định lý 7.5 Quy tắc tích phân các hàm hyperbolic

$$\int\sinh x\ dx=\cosh x+C \qquad \int\cosh x\ dx=\sinh x+C$$
$$\int\operatorname{sech}^2 x\ dx=\tanh x+C \qquad \int\operatorname{csch}^2 x\ dx=-\coth x+C$$
$$\int\operatorname{sech} x\tanh x\ dx=-\operatorname{sech} x+C \qquad \int\operatorname{csch} x\coth x\ dx=-\operatorname{csch} x+C$$

<u>**Ví dụ 7.51.**</u> **Tích phân liên quan đến các dạng hyperbolic**

Tìm mỗi tích phân sau đây:

a. $\int\cosh^3 x\ \sinh x\ dx$ **b.** $\int x\ \operatorname{sech}^2\left(x^2\right)dx$ **c.** $\int\tanh x\ dx$

Giải.

a. Đặt $u=\cosh x$ thì $du=\sinh x\ dx$. Ta có

$$\int\cosh^3 x\ \sinh x\ dx=\int u^3du=\frac{u^4}{4}+C=\frac{1}{4}\cosh^4 x+C$$

b. Đặt $u=x^2$ thì $\frac{1}{2}du=x\ dx$. Ta có

$$\int x\ \operatorname{sech}^2\left(x^2\right)dx=\int\operatorname{sech}^2u\left(\frac{1}{2}du\right)=\frac{1}{2}\tanh u+\mathrm{C}=\frac{1}{2}\tanh x^2+C$$

c. Đặt $u=\cosh x$ thì $du=\sinh x\ dx$. Ta có

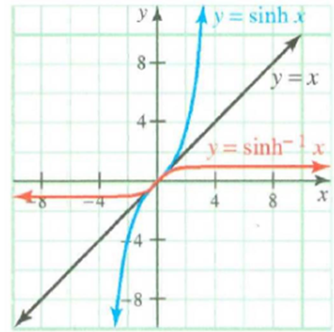
$$\int\tanh x\ dx=\int\frac{\sinh x\ dx}{\cosh x}=\int\frac{du}{u}=\ln\left|u\right|+C=\ln\left(\cosh x\right)+C$$

Các hàm hyperbolic ngược

Các hàm hyperbolic ngược cũng được quan tâm trước hết bởi vì chúng cho ta biểu diễn một số tích phân ở dạng đơn giản. Vì sinh$x$ là liên tục và đơn điệu ngặt (tăng), nó là một-một và có hàm ngược, và hàm ngược này được định nghĩa bởi

$$y = \sinh^{-1} x \text{ nếu và chỉ nếu } x = \sinh y$$

với mọi x và y. Đây được gọi là hàm **sin hyperbolic ngược**, và đồ thị của nó nhận được bằng cách lấy đối xứng đồ thị của hàm $y = \sinh x$ qua đường thẳng $y = x$, như được chỉ ra trong Hình 7.19. Các hàm hyperbolic khác được định nghĩa theo các hàm mũ, chúng ta có thể nghĩ tới việc biểu diễn các hàm hyperbolic ngược theo các hàm logarit. Những mối quan hệ này được tổng kết trong định lý sau đây.



Hình 7.19

Định lý 7.6 Công thức dạng logarit cho các hàm hyperbolic ngược

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \forall x; \qquad \operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), x \neq 0$$

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), x \geq 1; \qquad \operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), 0 < x \leq 1$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}, |x| < 1; \qquad \coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}, |x| > 1$$

Định lý 7.7 Đạo hàm và tích phân của các hàm hyperbolic ngược

$$\frac{d}{dx}\left(\sinh^{-1} u\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \sinh^{-1} u + C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cosh^{-1} u\right) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \cosh^{-1} u + C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tanh^{-1} u\right) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \quad \left(|u| < 1\right) \qquad \int \frac{du}{1-u^2} = \tanh^{-1} u + C \quad \left(|u| < 1\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{csch}^{-1} u\right) = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{1+u^2}} = -\operatorname{csch}^{-1}|u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{sech}^{-1} u\right) = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \qquad \int \frac{du}{u\sqrt{1-u^2}} = -\operatorname{sech}^{-1}|u| + C$$

$$\frac{d}{dx}\left(\coth^{-1} u\right) = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \quad \left(|u| > 1\right) \qquad \int \frac{du}{1-u^2} = \coth^{-1} u + C \quad \left(|u| > 1\right)$$

<u>Ví dụ 7.52.</u> Đạo hàm liên quan đến các hàm hyperbolic ngược

Tìm $\dfrac{dy}{dx}$ với a. $y = \sinh^{-1}\left(ax+b\right)$ b. $y = \cosh^{-1}\left(\sec x\right), 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$

Giải.

a. $\dfrac{d}{dx}\left[\sinh^{-1}\left(ax+b\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{1+\left(ax+b\right)^2}}\dfrac{d}{dx}\left(ax+b\right) = \dfrac{a}{\sqrt{1+\left(ax+b\right)^2}}$

b. $\dfrac{d}{dx}\left[\cosh^{-1}\left(\sec x\right)\right] = \dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}}\dfrac{d}{dx}\left(\sec x\right) = \dfrac{\sec x\,\tan x}{\sqrt{\tan^2 x}} = \sec x$

($\tan x > 0$ vì $0 \le x < \dfrac{\pi}{2}$).

<u>**Ví dụ 7.53.**</u> **Tích phân liên quan đến các hàm hyperbolic ngược**

Tính $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

Giải.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\sinh^{-1} x\right]_0^1 = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big|_0^1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 1 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$