

# Chương 3

## ĐẠO HÀM

**Nguyễn Minh Hải**  
nmhaiuns@ gmail.com

**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM**

Tháng 01/2021

# Định nghĩa đạo hàm

## Định nghĩa 1.1 (Đạo hàm)

Đạo hàm của  $f$  tại  $x$  được định nghĩa bởi

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Nếu  $f'(x)$  tồn tại thì  $f$  khả vi tại  $x$ .

## Định nghĩa 1.2

- Tiếp tuyến của  $y = f(x)$  tại  $M(a, f(a))$  là đường thẳng đi qua  $M$  và có hệ số góc là  $f'(a)$ .
- Tốc độ thay đổi tức thời của  $y = f(x)$  tại  $x = a$  là  $f'(a)$ .

### Ví dụ 1.1

Cho  $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ . Sử dụng định nghĩa để tính  $f'(2)$ .

### Ví dụ 1.2

Cho  $f(x) = \frac{2}{x}$ . Sử dụng định nghĩa để tính  $f'(x)$ .

### Ví dụ 1.3

Cho  $f(x) = \sqrt{x}$ .

- 1 Tính  $f'(x)$
- 2 Tìm tốc độ thay đổi tức thời của  $f(x)$  tại  $x = 4$ .
- 3 Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = \sqrt{x}$  tại điểm có hoành độ  $x = 4$ .
- 4 Viết **phương trình pháp tuyến** với đường cong  $y = \sqrt{x}$  tại điểm có hoành độ  $x = 4$ .

## Định nghĩa 1.3

- Đạo hàm phải

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- Đạo hàm trái

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

## Định lý 1.1

Hàm  $f(x)$  có đạo hàm tại  $x = a$  khi và chỉ khi nó có các đạo hàm phải và đạo hàm trái tại  $x = a$  và chúng bằng nhau. Khi ấy

$$f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$$

### Ví dụ 1.4

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{nếu } x \leq 0 \\ 4x & \text{nếu } x > 0 \end{cases} \text{ Tính } f'(0)$$

### Ví dụ 1.5

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases} \text{ Tính } f'(0).$$

## Đạo hàm và tính liên tục

### Định lý 1.2

*Nếu  $f$  có đạo hàm tại  $a$  thì  $f$  liên tục tại  $a$ .*

### Ví dụ 1.6

Cho  $f(x) = |x|$ . Chứng minh rằng  $f$  liên tục tại  $x = 0$  nhưng không có đạo hàm tại điểm đó.

### Ví dụ 1.7

Cho hàm  $f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{nếu } x \neq 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$  Xét sự liên tục và khả vi của  $f(x)$  tại  $x = 0$ .

$$\textcircled{1} \quad (C)' = 0$$

$$\textcircled{2} \quad (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$\textcircled{3} \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

$$\textcircled{4} \quad (e^x)' = e^x$$

$$\textcircled{5} \quad (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\textcircled{6} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\textcircled{7} \quad (\sin x)' = \cos x$$

$$\textcircled{8} \quad (\cos x)' = -\sin x$$

$$\textcircled{9} \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\textcircled{10} \quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\textcircled{11} \quad (\sec x)' = \sec x \tan x$$

$$\textcircled{12} \quad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$



$$13) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$14) (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$15) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$16) (\cot^{-1} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$17) (\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$$

$$18) (\csc^{-1} x)' = -\frac{1}{|x| \sqrt{x^2-1}}$$

## Các quy tắc tính đạo hàm

- ❶  $[cf(x)]' = cf'(x)$
- ❷  $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$
- ❸  $[\alpha f(x) \pm \beta g(x)]' = \alpha f'(x) \pm \beta g'(x)$
- ❹  $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- ❺  $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

## Ví dụ 2.1

Tính đạo hàm của

$$\textcircled{1} \quad f(x) = 15x^{100} - 3x^{12} + 5x - 1$$

$$\textcircled{2} \quad g(x) = \sqrt{x} + 9\sqrt[3]{x^7} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^2}}$$

$$\textcircled{3} \quad h(x) = \frac{\sin x}{3 - 2\cos x}$$

$$\textcircled{4} \quad k(x) = \frac{3}{x^4} - x^2 \tan x$$

## Ví dụ 2.2

Tìm phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = \frac{3x^2 + 5}{2x^2 + x - 3}$  tại điểm có  $x = -1$ .

## Ví dụ 2.3

Cho  $y = (x - 2)(x^2 + 4x - 7)$ . Tìm tất cả các điểm trên đường cong mà tiếp tuyến tại đó nằm ngang.

# Đạo hàm cấp cao

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$$

# Đạo hàm hàm hợp

## Đạo hàm hàm hợp

Nếu  $f$  là hàm khả vi theo  $u$  và  $u$  là hàm khả vi theo  $x$  thì

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

hay

$$\frac{d}{dx}[f(u(x))] = f'[u(x)]u'(x)$$

## Ví dụ 2.4

Tính  $f'(x)$

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \sin(3x^2 + x)$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = (2x^3 + \cos t)^{50}$$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \sqrt{2x + (3x + 4x^2)^3}$$

$$\textcircled{4} \quad f(x) = \frac{2}{(4x + e^{-9x})^{10}}$$

## Ví dụ 2.5

Cho  $f$  là hàm khả vi và  $F(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$ . Nếu  $f(1) = 2$  và  $f'(1) = -2$ , tính  $F'(1)$ .

## Đạo hàm hàm ẩn

### Ví dụ 2.6

Cho hàm ẩn  $y = y(x)$  xác định bởi phương trình

$$5y^2 + \sin y = x^2$$

Tính  $y'(x)$ .



## Đạo hàm hàm ẩn

### Ví dụ 2.6

Cho hàm ẩn  $y = y(x)$  xác định bởi phương trình

$$5y^2 + \sin y = x^2$$

Tính  $y'(x)$ .

### Ví dụ 2.7

Cho hàm ẩn  $y = y(x)$  xác định bởi

$$x^3 y^5 + 3x = 8y^3 + 1$$

Tính  $y'(x)$ .

### Ví dụ 2.8

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong

$$x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + 2x$$

tại  $M(1, \sqrt{3})$ .

### Ví dụ 2.9

Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$$

tại  $M(2, 0)$ .

## Đạo hàm hàm ngược

### Định nghĩa 2.1

Nếu  $f$  là hàm một-một khả vi có hàm ngược là  $f^{-1}$  thì

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$$

trong đó  $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$  với mọi  $x$  trong miền xác định của  $f^{-1}$ .

### Ví dụ 2.10

Cho  $f(x) = x^3 - 5$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = f^{-1}(x)$  tại điểm có  $x = 3$ .

### Ví dụ 2.11

Giả sử  $f^{-1}$  là hàm ngược của một hàm khả vi  $f$  và  $f(4) = 5, f'(4) = \frac{2}{3}$ . Tính  $(f^{-1})'(5)$ .

### Ví dụ 2.12

Giả sử  $f^{-1}$  là hàm ngược của hàm khả vi  $f$  và cho  $G(x) = \frac{1}{f^{-1}(x)}$ .  
Nếu  $f(3) = 2$  và  $f'(3) = \frac{1}{9}$ . Tính  $G'(2)$ .

## Đạo hàm bằng phương pháp logarit

Thường dùng cho các hàm gồm tích, thương của nhiều thừa số hoặc có dạng  $[u(x)]^{v(x)}$ .

### Các bước đạo hàm bằng phương pháp logarit hóa

- 1 Lấy logarit hai vế của  $y = f(x)$  và sử dụng tính chất của hàm logarit để đơn giản biểu thức.
- 2 Đạo hàm hàm ẩn theo  $x$ .
- 3 Giải phương trình thu được để tìm  $y'$

## Ví dụ 2.13

Tính đạo hàm

$$\textcircled{1} \quad y = x^{\sqrt{x}}$$

$$\textcircled{2} \quad y = (\sin x)^{\tan x}.$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{x^{3/4} \sqrt{x^2 + 1}}{(3x + 2)^5}$$

## Quy tắc L'Hospital

Giả sử  $f$  và  $g$  khả vi và  $g'(x) \neq 0$  trên khoảng mở  $I$  chứa điểm  $a$ .

Nếu  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  có dạng  $\frac{0}{0}$  hoặc  $\frac{\infty}{\infty}$  thì

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

nếu giới hạn bên vế phải tồn tại.

## Ví dụ 3.1

Tính

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^2 + 5x - 2}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin 4x}{x^3 \cos x}$$



## Ví dụ 3.2

Tính

$$\textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \tan x$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \sin 4x)^{\cot x}$$

### Ví dụ 3.3

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1-e^x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{nếu } x = 0 \end{cases}$$

- ❶ Tìm  $m$  để  $f(x)$  liên tục tại  $x = 0$ .
- ❷ Với  $m = 0$ , tính  $f'(0)$ .

### Ví dụ 3.4

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 1 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- ❶ Xét sự liên tục của  $f(x)$  tại  $x = 0$ .
- ❷ Tính  $f'(x)$ .

### Ví dụ 3.5

$$\text{Cho } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{nếu } x \neq 0 \\ m & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- ❶ Tìm  $m$  để  $f$  khả vi tại  $x = 0$ .
- ❷ Viết phương trình tiếp tuyến với  $y = f(x)$  tại  $M(\pi, 0)$ .

### Ví dụ 3.6

Cho  $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - 1}{x} & \text{nếu } x < 0 \\ a & \text{nếu } x = 0 \\ \frac{\ln(1+x)}{mx} & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$  Tìm  $a$  và  $m$  để  $f$  liên tục tại  $x = 0$ .

# Tốc độ biến thiên: mô hình chuyển động thẳng

## Tốc độ thay đổi

- Tốc độ thay đổi trung bình của  $f$  khi  $x$  thay đổi một lượng  $\Delta x$  là

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Tốc độ thay đổi tức thời của  $f$  tại  $x$  là:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Tốc độ thay đổi tương đối của  $f$  tại  $x$  là  $\frac{f'(x)}{f(x)}$

### Ví dụ 4.1

Cho  $f(x) = x^2 - 4x + 7$ .

- 1 Tính tốc độ thay đổi trung bình của  $f$  khi  $x$  biến thiên từ 3 đến 5.
- 2 Tìm tốc độ thay đổi tức thời và tốc độ thay đổi tương đối của  $f$  tại  $x = 3$ .

## Bài toán chuyển động thẳng

Giả sử  $s(t)$  là vị trí của một vật chuyển động thẳng tại thời điểm  $t$ .  
 Khi đó:

- Vận tốc trung bình

$$v_{ave} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

- Vận tốc tức thời

$$v(t) = \frac{ds}{dt}$$

- Gia tốc

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2}$$

- Tốc độ:  $|v(t)|$

- Nếu  $v(t) > 0$  thì vật chuyển động tiến.
- Nếu  $v(t) < 0$  thì vật chuyển động lùi.
- Nếu  $v(t) = 0$  thì vật đứng yên.
- Nếu  $a(t)v(t) > 0$  thì vật tăng tốc.
- Nếu  $a(t)v(t) < 0$  thì vật giảm tốc.
- Nếu  $a(t)v(t) = 0$  thì vật chuyển động đều.

## Ví dụ 4.2

Vị trí của một vật được cho bởi  $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ .

- 1 Tìm vận tốc, gia tốc ban đầu của vật.
- 2 Khi nào vật đứng yên? vật chuyển động tiến? vật chuyển động lùi?
- 3 Vật tăng tốc khi nào? giảm tốc khi nào?
- 4 Tìm quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu.



## Bài toán vật rơi tự do

Độ cao của vật so với mặt đất ở thời điểm  $t$  là

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0$$

trong đó

- $v_0$  là vận tốc ban đầu của vật
- $s_0$  là độ cao ban đầu của vật
- $g$  là gia tốc trọng trường ( $g = 32ft/s^2$ )  $= 9.8m/s^2$ .

### Ví dụ 4.3

Một quả bóng được ném thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu là  $160\text{ft/s}$ .

- 1 Xác định thời gian quả bóng chạm đất và vận tốc của nó khi chạm đất.
- 2 Xác định thời điểm quả bóng đạt độ cao lớn nhất.
- 3 Xác định quãng đường quả bóng di chuyển được từ giây thứ 4 tới giây thứ 10.

### Ví dụ 4.4

Một vật rơi từ đỉnh tháp cách mặt đất 176 ft, với vận tốc ban đầu là  $96\text{ft/s}$ . Tính:

- 1 Tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm  $t$ .
- 2 Vật chuyển động với vận tốc là bao nhiêu khi nó chạm đất?
- 3 Quãng đường vật di chuyển trong suốt quá trình.

## Các tốc độ liên quan

### Cách giải

- 1 Vẽ sơ đồ bài toán (nếu có thể)
- 2 Đưa ra ký hiệu. Gán ký hiệu cho tất cả các đại lượng là các hàm theo thời gian.
- 3 Biểu thị thông tin được cho và tốc độ cần tìm dưới dạng đạo hàm.
- 4 Viết phương trình liên hệ giữa các đại lượng khác nhau của bài toán.
- 5 Đạo hàm hai vế của phương trình theo  $t$ .
- 6 Tính toán theo yêu cầu của bài toán.

### Ví dụ 5.1

Không khí được bơm vào một quả bóng hình cầu sao cho thể tích của nó tăng với tốc độ  $10\text{cm}^3/\text{s}$ . Tốc độ tăng của bán kính bằng bao nhiêu khi đường kính của quả bóng là  $50\text{cm}$ ?

### Ví dụ 5.2

Một cái thang dài 10 ft dựa vào một bức tường thẳng đứng. Nếu chân thang trượt khỏi tường với tốc độ  $1\text{ft/s}$  thì đầu thang trượt xuống tường với tốc độ bao nhiêu khi chân thang cách tường 6 ft?

### Ví dụ 5.3

Một thùng nước dạng hình nón lật ngược với bán kính 2 m và cao 4m. Nếu nước được bơm vào thùng với vận tốc  $2\text{m}^3/\text{ph}$  thì tốc độ tăng của mực nước khi nước sâu 3 m là bao nhiêu?

### Ví dụ 5.4

Một người cao 5.5 ft di chuyển ra xa cột đèn đường cao 12 ft với vận tốc 2 ft/s.

- 1 Bóng của người đó trên mặt đường di chuyển ra xa cột đèn với tốc độ bao nhiêu khi người đó cách cột đèn 25 ft?
- 2 Tốc độ di chuyển của bóng ra xa người là bao nhiêu khi người đó cách cột đèn 25 ft?

### Ví dụ 5.5

Một chiếc xe di chuyển về hướng Tây với vận tốc 50 dặm/h và xe B chạy về hướng Bắc với vận tốc 60 dặm/h. Cả hai xe đều đang đi đến giao lộ của hai con đường. Hai chiếc xe tiến đến nhau với tốc độ bao nhiêu khi xe A cách giao lộ 0.3 dặm và xe B cách giao lộ 0.4 dặm?

# Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

## Xấp xỉ tuyến tính

- Xấp xỉ tuyến tính của  $f$  tại  $a$  là

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

khi  $x$  tiến tới  $a$ .

- Hàm

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

được gọi là tuyến tính hóa của  $f$  tại  $a$ .

## Ví dụ 6.1

Tìm xấp xỉ tuyến tính của  $f(x) = \sqrt{x+3}$  tại  $a = 1$ . Từ đó tính giá trị gần đúng của  $\sqrt{3.98}$  và  $\sqrt{4.05}$ .

## Vi phân

Nếu  $y = f(x)$  là hàm khả vi, khi đó

$$dy = f'(x)dx$$

### Ví dụ 6.2

Tính  $d(x^2 \sin x)$

### Ví dụ 6.3

Cho  $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ . Tính  $\Delta y$  và  $dy$  khi  $x$  biến thiên từ 2 đến 2.05.



## Sai số

- ❶ Sai số đo lường  $\Delta x$
- ❷ Sai số tích lũy:  $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \approx df = f'(x)dx$ .
- ❸ Sai số tương đối:  $\frac{\Delta f}{f} \approx \frac{df}{f}$ .
- ❹ Sai số phần trăm:  $\frac{\Delta f}{f} 100\%$

### Ví dụ 6.4

Bán kính một quả cầu là 21 cm với sai số có thể khi đo nhiều nhất 0.05 cm. Sai số tối đa khi sử dụng giá trị này của bán kính để tính thể tích hình cầu là bao nhiêu?

# Phương pháp Newton-Raphson

## Phương pháp Newton-Raphson

- Chọn  $x_0$  sao cho  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .
- Công thức

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Sai số

$$|x - x^*| \leq \frac{M}{2m} |x_n - x_{n-1}|^2$$

với  $|f'(x)| \geq m > 0$  và  $|f''(x)| \leq M$  với mọi  $x \in [a, b]$ .

### Ví dụ 6.5

Cho  $x^3 - 3x - 5 = 0$ . Dùng phương pháp Newton-Raphson để tìm nghiệm gần đúng thứ 3 và đánh giá sai số trên  $[2,3]$ .

### Ví dụ 6.6

Tìm nghiệm gần đúng thứ 5 của  $\cos x = x$ .