Chương 5
PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN

Nguyễn Minh Hải
nmhaiuns@ gmail.com

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM

Tháng 01/2021

Định nghĩa 1.1 (Nguyên hàm)

- Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên khoảng I nếu $F'(x) = f(x)$ với mọi $x \in I$.
- Nếu $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$ trên khoảng I thì tập hợp tất cả các nguyên hàm của f được gọi là tích phân bất định và được ký hiệu là

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

trong đó C là một hằng số bất kỳ.

Bảng nguyên hàm của các hàm cơ bản

1) $\int \alpha dx = \alpha x + C$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3) $\int \cos x dx = \sin x + C$

4) $\int \sin x dx = -\cos x + C$

5) $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

6) $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

7) $\int e^x dx = e^x + C$

8) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

9) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$

10) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} + C$

11) $\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

12) $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

Các tính chất của nguyên hàm

1. $\int cf(u)du = c\int f(u)du$
2. $\int [f(u) \pm g(u)]du = \int f(u)du \pm \int g(u)du$
3. $\int [af(u) \pm bg(u)]du = a\int f(u)du \pm b\int g(u)du$

Ví dụ 1.1

Tính

a) $\int (3\sqrt[4]{x^3} + \frac{7}{x^5} + \frac{1}{6\sqrt{x}})dx$

b) $\int (5\sqrt{x} + 4\sin x)dx$

c) $\int (x + \sqrt[3]{x})(4 - x^2)dx$

d) $\int \frac{4x^{10} - 2x^4 + 15x^2}{x^3}dx$

Ví dụ 1.2

Tính

1. $\displaystyle\int (3e^x + 5\cos x - 10\sec^2 x)dx$
2. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 6\sin x + \frac{2}{1+x^2}\right)$
3. $\displaystyle\int (2\sec u \tan u + \frac{1}{6u})du$
4. $\displaystyle\int \frac{7-6\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$

Ví dụ 1.3

Tìm hàm $f(x)$ biết

1. $f'(x) = 4x^3 + 2\sin x - 9 + 7e^x, \quad f(0) = 15$
2. $f''(x) = 15\sqrt{x} + 5x^3 + 6, \quad f(1) = \dfrac{-5}{4} \quad f(4) = 104.$

Ví dụ 1.4

Một vật di chuyển dọc theo đường thẳng có gia tốc là $a(t) = \dfrac{2}{t^2}$. Nếu $s(1) = 5$ và $v(1) = -3$ thì quãng đường vật đi được khi $t = 4$ là bao nhiêu?

Ví dụ 1.5

Hệ thống phanh của một ô tô tạo ra gia tốc giảm dần đều là 22 ft/s. Nếu ô tô đang chuyển động với vận tốc 88 ft/s khi hãm phanh sẽ đi được bao xa trước khi dừng hẳn?

Tổng Riemann

Giả f là hàm xác định trên $[a, b]$. Khi đó

- Chia $[a, b]$ thành n khoảng con bởi các điểm $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sao cho

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

- Gọi $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ là độ dài của phân hoạch thứ k. Chọn c_k là điểm bất kỳ trong khoảng con $[x_{k-1}, x_k]$. Khi đó

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

được gọi là tổng Riemann.

Định nghĩa 3.1 (Tích phân xác định)

Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$. Khi đó, **tích phân xác định của f từ a đến b** là

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\Delta x_k$$

với điều kiện giới hạn này tồn tại và không phụ thuộc vào x_k^*.

Định lý 3.1

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì f khả tích trên $[a, b]$.

Các tính chất của tích phân xác định

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\displaystyle\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$
3. $\displaystyle\int_a^b [cf(x) \pm g(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, với $a < c < b$.
5. Nếu $f(x) \geq 0$ với $x \in [a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
6. Nếu $f(x) \geq g(x)$ với $x \in [a, b]$ thì $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.
7. Nếu $m \leq f(x) \leq M$ với $x \in [a, b]$ thì

   $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Ví dụ 3.1

Cho $\int_{6}^{-10} f(x)dx = 23$, $\int_{-10}^{6} g(x)dx = -9$. Tính

$$\int_{-10}^{6} [2f(x) - 10g(x)]dx$$

Ví dụ 3.1

Cho $\int_{6}^{-10} f(x)dx = 23, \quad \int_{-10}^{6} g(x)dx = -9$. Tính

$$\int_{-10}^{6} [2f(x) - 10g(x)]dx$$

Ví dụ 3.2

Nếu $\int_{1}^{5} f(x)dx = 12$ và $\int_{4}^{5} f(x)dx = 6$. Tìm $\int_{1}^{4} f(x)dx$.

Định lý 4.1 (Định lý cơ bản thứ nhất)

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ và F là một nguyên hàm của f thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ví dụ 4.1

Tính $I = \int_1^2 (x^2 + e^x)dx$

Định lý 4.2 (Định lý cơ bản thứ hai)

Nếu $f(t)$ *là hàm liên tục trên* $[a, b]$ *thì*

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)dt\right) = f(x)$$

với $a \leq x \leq b$.

Tổng quát

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt\right) = v'(x)f[v(x)] - u'(x)f[u(x)]}$$

Ví dụ 4.2

Cho $F(x) = \int_{-4}^{x} e^{2t} \cos^2(1 - 5t)dt$. Tính $F'(x)$.

Ví dụ 4.3

Cho $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{3x} t^2 \sin(1 + t^2)dt$. Tính $F'(x)$.

Định lý 4.3 (Giá trị trung bình)

Nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì giá trị trung bình của f trên $[a, b]$ là

$$AV = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 4.4

Tính giá trị trung bình của $f(x) = 1 + x^2$ trên $[-1, 2]$.

Định lý giá trị trung bình cho tích phân

Nếu f liên tục trên $[a;b]$ thì tồn tại số $c \in [a;b]$ sao cho

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 4.5

Tìm số c thỏa mãn định lý giá trị trung bình cho hàm $f(x) = 4 - 2x$ trên $[0;2]$.

Quy tắc đổi biến

Nếu $u = g(x)$ là hàm khả vi, nhận giá trị trên khoảng I và f liên tục trên I thì

$$\int f[g(x)]g'(x)dx = \int f(u)du$$

1. Đặt $u = g(x) \Rightarrow du = g'(x)dx$.
2. Thay vào tích phân cần tính ta được $\int f(u)du$. Tính tích phân này theo u.
3. Thay $u = g(x)$.

Ví dụ 5.1

1. $\displaystyle\int x^2(x^3+4)^4dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$
3. $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2}x^5dx.$
4. $\displaystyle\int 3(8y-1)e^{4y^2-y}dy$

Đổi biến cho tích phân xác định

Nếu $u = g(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và f liên tục trên miền giá trị của g thì

$$\boxed{\int_a^b f[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du}$$

Ví dụ 5.2

Tính

a) $I_1 = \int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

b) $I_2 = \int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}dx$

Tích phân của hàm chẵn và hàm lẻ

Cho f là hàm khả tích trên $[-a; a]$. Khi đó,

- Nếu f là hàm chẵn thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$
- Nếu f là hàm lẻ thì $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Ví dụ 5.3

Tính $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin^3 x \cos x + \sin x \cos x)dx$

Diện tích

Cho f là hàm liên tục và $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$. Khi đó, diện tích miền giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$ và trục hoành trên $[a; b]$ là

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Khoảng cách

Quãng đường đi được của một vật thể di chuyển trên đường thẳng với vận tốc $v(t)$ trong khoảng thời gian $t = a$ đến $t = b$ là

$$S = \int_a^b |v(t)|\, dt$$

Định nghĩa 6.1 (Phương trình vi phân)

- Phương trình chứa đạo hàm hoặc vi phân của hàm cần tìm được gọi là phương trình vi phân.
- Cấp cao nhất của đạo hàm chứa trong phương trình vi phân được gọi là cấp của phương trình vi phân.
- Một hàm số f gọi là nghiệm của phương trình vi phân nếu phương trình đó thỏa mãn khi $y = f(x)$ và các đạo hàm của nó được thế vào phương trình.

- **Phương trình vi phân tách biến** là một phương trình vi phân cấp một có dạng:

(1) $$f(x)dx = g(y)dy$$

- **Cách giải:**
  Lấy nguyên hàm hai vế của (1), ta được

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy$$
$$\Longrightarrow F(x) - G(y) = C$$

Phương trình dạng

(2) $$\boxed{M(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0}$$

trong đó cả hai hàm $M(x,y)$ và $N(x,y)$ đều phân tích được thành tích của hai hàm số mà mỗi hàm chỉ chứa x hoặc y.

$$M(x,y) = f_1(x)g_1(y), \quad N(x,y) = f_2(x)g_2(y)$$

Khi đó, phương trình có dạng

(3) $$\boxed{f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0}$$

Cách giải: Đưa về dạng 1 bằng cách chia 2 vế cho $g_1(y)f_2(x)$ với $g_1(y) \neq 0$, $f_2(x) \neq 0$, ta được

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Ví dụ 6.1

Giải phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$$

Ví dụ 6.1

Giải phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$$

Ví dụ 6.2

Giải

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$$

Ví dụ 6.1

Giải phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$$

Ví dụ 6.2

Giải

$$x(1 + y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$$

Ví dụ 6.3

$$(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$$

Ví dụ 6.4

$$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$$

Ví dụ 6.4

$$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$$

Ví dụ 6.5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy} \quad y(1) = 2$$

Ví dụ 6.4

$$(x^2 - yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$$

Ví dụ 6.5

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy} \quad y(1) = 2$$

Ví dụ 6.6

$$x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0 \quad y(0) = 1$$