HƯỚNG DẪN BÀI TẬP CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG

1. Kiến thức cần nhớ

Bài toán

Tìm cực trị địa phương của hàm số $y = f(x)$.

Quy tắc 1- Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 1

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính $f'(x)$.
3. Tìm tất cả các điểm trong miền xác định của f mà $f'(x) = 0$ hoặc $f'(x)$ không xác định tại đó.
4. Lập bảng biến thiên
5. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận

Quy tắc 2- Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

1. Tìm tập xác định của hàm số.
2. Tính $f'(x)$. Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i$ với $i = 1, 2, \ldots$.
3. Tính $f''(x)$
4. Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ để kết luận:
   - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_i.
   - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_i.
   - Nếu $f''(x_i) = 0$ sử dụng Quy tắc 1 để kết luận.

2. Các ví dụ

Ví dụ 2.1

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = (1 + 2x)^3 - 27x^2 - 1$

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6(1 + 2x)^2 - 54x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = \dfrac{1}{4}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{11}{16}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy

- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $x = 1$ và $f_{min} = -1$.
- Hàm số đạt cực đại địa phương tại $x = \frac{1}{4}$ và $f_{max} = \frac{11}{16}$.

□

Ví dụ 2.2

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Lời giải.

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy

- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $x = -1$ và $f_{min} = 0$.
- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $x = 2$ và $f_{min} = -27$.
- Hàm số đạt cực đại địa phương tại $x = 0$ và $f_{max} = 5$.

□

Ví dụ 2.3

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = (2x + 7)(x + 1)^{2/3}$

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{10(x+2)}{3(x+1)^{1/3}}$.

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Hơn nữa, $f'(x)$ không xác định tại $x = -1 \in D$. Vậy các điểm tới hạn của f là $x = -2$ và $x = -1$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Vậy

- Hàm số đạt cực đại địa phương tại $x = -2$ và $f_{max} = 3$.
- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại $x = -1$ và $f_{min} = 0$.

□

Ví dụ 2.4(Đề HKI-2016-2017)

Tìm cực trị tương đối của $f(x) = \ln(1-x) + \sin^{-1}(x)$.

Lời giải. Tập xác định $D = [-1; 1)$.

Ta có $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-(x+1)}{1-x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x+1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & \text{(Nhận)} \\ x = -1 & \text{(Loại)} \end{array} \right.$$

Hơn nữa, $f'(x)$ không xác định tại $x = -1 \in D$. Vậy hàm số có các điểm tới hạn là $x = 0$ và $x = -1$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		▨	‖	$+$	0	$-$		▨	
$f(x)$		▨	$\ln(2) - \dfrac{\pi}{2}$	↗	0	↘	$-\infty$	▨	

Vậy f đạt cực đại tương đối tại $x = 0$ và $f_{max} = 0$ □

Ví dụ 2.5(Đề HKI-2015-2016)

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = x - 2\tan^{-1} x$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$
$$f''(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Vì $f''(-1) = -1 < 0$ nên f đạt cực đại tương đối tại $x = -1$ và $f_{max} = \frac{\pi}{2} - 1$.
- Vì $f''(1) = 1 > 0$ nên f đạt cực tiểu tương đối tại $x = 1$ và $f_{min} = 1 - \frac{\pi}{2}$.

□

Ví dụ 2.6

Tìm cực trị tương đối (địa phương) của $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Ta có

$$f'(x) = \frac{xe^x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$
$$f''(x) = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

Vì $f''(1) = e > 0$ nên f đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $f_{max} = e$.

Cách 2:

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

□

Ví dụ 2.7(Hàm xác định từng khoảng)

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{nếu } x < 0 \\ 3 + 2x - x^2 & \text{nếu } x \geq 0 \end{cases}$

Lời giải. Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
Ta có

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 2 - 2x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Tại $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{2x - x^2}{x} = \lim_{x \to 0+} (2 - 2x) = 2$$
$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

Vì $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$ nên $f'(0)$ không tồn tại.
Vậy các điểm tới hạn là $x = 0$ và $x = 1$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $f_{min} = 3$
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $f_{max} = 4$.

□

Ví dụ 2.8(Hàm trị tuyệt đối)

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = |x^2 - 2x| + 3$.

Lời giải. Viết lại hàm $f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 3 & \text{nếu } x \leq 0 \vee x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 3 & \text{nếu } 0 < x < 2 \end{cases}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có
$$f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{nếu } x<0 \vee x>2 \\ -2x+2 & \text{nếu } 0<x<2 \end{cases}$$
Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
Tại $x = 0$
$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2-2x}{x} = \lim_{x\to 0+} (2x-2) = -2$$
$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0-} (-2x+2) = 2$$
Vì $f'_-(0) \neq f'_+(0)$ nên $f'(0)$ không tồn tại.
Tại $x = 2$
$$f'_+(2) = \lim_{x\to 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2+} \frac{x^2-2x}{x-2} = \lim_{x\to 2+} (2x-2) = 2$$
$$f'_-(2) = \lim_{x\to 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2-} \frac{-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to 2-} (-2x+2) = -2$$
Vì $f'_-(2) \neq f'_+(2)$ nên $f'(2)$ không tồn tại.
Vậy các điểm tới hạn của f là $x = 1$, $x = 2$ và $x = 0$.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	3	↗	4	↘	3	↗	$+\infty$

Vậy

- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và $f_{min} = 3$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $f_{min} = 3$.
- Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và $f_{max} = 4$.

□