

## BÀI TẬP CHƯƠNG 8

**Bài 8.1.** Viết 5 số hạng đầu tiên (bắt đầu từ  $n = 1$ ) của các dãy số sau

a.  $\{1 + (-1)^n\}$

b.  $\left\{n \sin \frac{n\pi}{2}\right\}$

c.  $\{a_n\}$  trong đó  $a_1 = 256$  và  $a_n = \sqrt{a_{n-1}}$  với  $n \geq 2$

d.  $\{a_n\}$  trong đó  $a_1 = 1$  và  $a_n = (a_{n-1})^2 + a_{n-1} + 1$  với  $n \geq 2$

**Bài 8.2.** Tìm giới hạn của các dãy hội tụ sau

a.  $\left\{\frac{8n^2 + 6n + 4000}{n^3 + 1}\right\}$

b.  $\{(n+4)^{1/n}\}$

c.  $\left\{\frac{3\sqrt{n}}{5\sqrt{n} + \sqrt[4]{n}}\right\}$

d.  $\{\sqrt{n+5\sqrt{n}} - \sqrt{n}\}$

e.  $\left\{\frac{\ln n}{n^2}\right\}$

f.  $\{(\ln n)^{1/n}\}$

**Bài 8.3.** Chứng minh rằng các dãy số sau hội tụ bằng cách chỉ ra rằng nó là dãy tăng bị chặn trên hoặc nó là dãy giảm bị chặn dưới

a.  $\left\{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right\}$

b.  $\left\{\frac{3n-2}{n}\right\}$

c.  $\left\{\frac{n}{2^n}\right\}$

**Bài 8.4.** Giải thích tại sao các dãy số sau phân kỳ

a.  $\left\{\frac{n^3 - 7n + 5}{100n^2 + 219}\right\}$

b.  $\{1 + (-1)^n\}$

c.  $\{\cos n\pi\}$

**Bài 8.5.** Các dãy số sau hội tụ hay phân kỳ

a.  $\left\{\frac{1}{n}(\sin n)\right\}$

b.  $\left\{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$

**Bài 8.6.** Thuốc được đưa vào cơ thể sao cho ở cuối mỗi giờ, lượng thuốc hiện tại bằng một nửa lượng thuốc ở thời điểm cuối giờ trước đó. Hỏi lượng thuốc là bao nhiêu ở cuối giờ thứ 4 và cuối giờ thứ  $n$ .

**Bài 8.7.** Xác định xem các chuỗi cấp số nhân sau hội tụ hay phân kỳ. Nếu hội tụ hãy tìm

tổng của chúng.

a.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(-3)^k}$

b.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{5^{2k+1}}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-0.2k}$

d.  $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1}}{3^{k-3}}$

e.  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \dots$

f.  $2 + \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots$

g.  $\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^7 + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} + \dots$

**Bài 8.8.** Với mỗi chuỗi sau đây, tìm  $S_n$  là tổng riêng thứ  $n$  của chuỗi và xác định xem chuỗi hội tụ hay phân kỳ bằng cách kiểm tra  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{k^{0.1}} - \frac{1}{(k+1)^{0.1}} \right]$

c.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right)$

**Bài 8.9.** Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau đây dưới dạng số hữu tỷ.

a.  $2.23\overline{1}$

b.  $1.40\overline{5}$

c.  $41.20\overline{10}$

**Bài 8.10.** Cho chuỗi số  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+1}}$

a. Tìm các số  $A, B$  sao cho

$$\frac{k-1}{2^{k+1}} = \frac{Ak}{2^k} - \frac{B(k+1)}{2^{k+1}}$$

b. Tính tổng của chuỗi  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^{k+1}}$

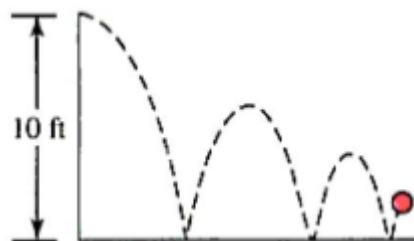
**Bài 8.11.** Tính tổng các chuỗi số sau

a.  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k - 3^{-k}}{2}$  biết rằng  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0.54$

b.  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right)^2$

**Bài 8.12.** Một bánh máy bay quay ở tốc độ 500 vòng/phút và chậm dần theo cách mà mỗi phút sau nó sẽ quay tròn với tốc độ bằng  $\frac{2}{3}$  tốc độ của phút trước đó. Tìm tổng số vòng quay mà bánh máy bay này quay được trước khi nó dừng hẳn.

**Bài 8.13.** Một quả bóng được ném từ độ cao 10ft. Mỗi lần quả bóng nảy lên thì nó sẽ lên cao một khoảng bằng 0.6 lần độ cao trước đó. Hỏi tổng quãng đường di chuyển của quả bóng là bao nhiêu?



**Bài 8.14.** Giả sử một bộ phận của máy trị giá \$10000 và mỗi năm nó bị mất giá 20% so với giá trị hiện tại của nó ở đầu năm đó. Nếu sự mất giá này dự kiến là vô hạn thì tổng thiệt hại sẽ là bao nhiêu?

**Bài 8.15.** Một bệnh nhân được tiêm 20 đơn vị thuốc mỗi 24 giờ. Thuốc bị phân hủy theo quy luật của hàm mũ sao cho lượng thuốc còn lại trong cơ thể bệnh nhân sau  $t$  ngày là

$$f(t) = e^{-t/2}$$

Nếu quá trình điều trị kéo dài thì có khoảng bao nhiêu đơn vị thuốc trong cơ thể bệnh nhân trước khi tiêm.

**Bài 8.16.** Các chuỗi số nào sau đây có thể áp dụng được tiêu chuẩn phân kỳ? Vì sao?

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-1/k}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{k} \right)^{-k}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k}$

e.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2 - 1}}$

f.  $\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\pi$

**Bài 8.17.** Sử dụng tiêu chuẩn tích phân để kiểm tra xem các chuỗi số sau hội tụ hay phân kỳ.

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^2}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\tan^{-1} k)^2}{1+k^2}$

b.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} k e^{-k^2}$

**Bài 8.18.** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k - \sin k}{3k + 2 \sin k}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin \frac{1}{k}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^k$

e.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{\ln k}}$

f.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^4 + 3}{k^5}$

i.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k\sqrt{k}}$

j.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k + e^{-k}}$

k.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{k}\right)$

**Bài 8.19.** Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để các chuỗi số sau hội tụ.

a.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k^2 - 1)^m}$

b.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^m}$

**Bài 8.20.** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau bằng tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \cos^k \left(\frac{\pi}{6}\right)$

c.  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} \ln k}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{4^k + 3}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{2k+3}}$

**Bài 8.21.** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau bằng tiêu chuẩn so sánh giới hạn

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k^4 - 4}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2}{k^4 - 4}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

e.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)^3}{k^{9/2}}$

f.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+2)2^k}$

**Bài 8.22.** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3 + k + 1}{k^3 + k^2 + 1}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{k}}{\sqrt[4]{k^2 + 2} \cdot \sqrt[8]{k}}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)(k+3)}{k^{7/2}}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} k^{1+k/k}$

**Bài 8.23.** Sử dụng tiêu chuẩn tỷ số hoặc tiêu chuẩn căn để xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{3k}}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^5}{10^k}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{10} 2^k}{k!}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k}{3k+1} \right)^k$

e.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

f.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k-2}{k} \right)^{k^2}$

**Bài 8.24.** Xét sự hội tụ của các chuỗi số sau và cho biết bạn đã sử dụng tiêu chuẩn nào để xét.

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k+2}{k2^k}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} k!}{k^k}$

c.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{k^2 (k^2 + 2)}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}!}{2^k}$

e.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{k+2}{k} \right)^{-k^2}$

f.  $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\cos k}{2^k} \right|$

**Bài 8.25.** Xác định giá trị của x để các chuỗi số sau hội tụ.

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+0.5)^k}{k\sqrt{k}}$

**Bài 8.26.** Xác định xem các chuỗi số sau hội tụ tuyệt đối, hội tụ có điều kiện hay phân kỳ

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2 + 1}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^2}{e^k}$

c.  $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k!}{\ln k}$

d.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k)!}{k^k}$

e.  $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{\ln k}$

f.  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{k^2}$

$$\text{i. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{1}{k} \right)^{1/k} \quad \text{j. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{k}{k+1} \right)^k \quad \text{k. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k^5 5^{k+2}}{2^{3k}}$$

**Bài 8.27.** Với mỗi chuỗi số sau đây hãy

- Ước tính tổng của chuỗi bằng cách lấy tổng 4 số hạng đầu tiên và cho biết sai số của ước lượng này.
- Cần ít nhất bao nhiêu số hạng của chuỗi để ước lượng tổng của nó đạt độ chính xác 3 chữ số thập phân. Tính ước lượng này.

$$\text{a. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-2}} \quad \text{b. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \quad \text{c. } \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{5} \right)^k$$

**Bài 8.28.** Sử dụng tiêu chuẩn tỷ số tổng quát để tìm tất cả các giá trị của  $x$  sao cho các chuỗi số sau hội tụ.

$$\text{a. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x)^k}{\sqrt{k}} \quad \text{b. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!} \\ \text{c. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)x^k}{k^2(k+3)} \quad \text{d. } \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left( \frac{x}{k} \right)^k$$

**Bài 8.29.** Tìm khoảng hội tụ của các chuỗi lũy thừa sau

$$\text{a. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+1)x^k}{k+2} \quad \text{b. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2(x-2)^k}{3^k} \quad \text{c. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k kx^k}{\ln(k+2)} \\ \text{d. } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} (2x-1)^{2k} \quad \text{e. } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (x+1)^{2k+1} \quad \text{f. } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k x^k}{k!}$$

**Bài 8.30.** Tính các đạo hàm  $f'(x)$  của các hàm sau

$$\text{a. } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x}{2} \right)^k \quad \text{b. } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)x^k \\ \text{c. } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^k$$

**Bài 8.31.** Tính tích phân  $\int_0^x f(u)du$  của các hàm sau

a.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

b.  $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$

**Bài 8.32.** Áp dụng đạo hàm từng số hạng của chuỗi cấp số nhân để tìm một chuỗi lũy thừa biểu diễn hàm

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$$

Với giá trị nào của  $x$  thì chuỗi lũy thừa này hội tụ.

**Bài 8.33.** Tìm bán kính hội tụ của chuỗi

a.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+3)!x^k}{k!(k+4)!}$

b.  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1.2.3...k.(-x)^{2k-1}}{1.3.5...(2k-1)}$

**Bài 8.34.** Cho hàm  $f$  xác định bởi chuỗi lũy thừa

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

với mọi  $x$ . Chứng minh rằng  $f''(x) = -f(x)$  với mọi  $x$ .

**Bài 8.35.** Tìm chuỗi Maclaurin cho các hàm sau đây. Giả sử  $a$  là hằng số bất kỳ và tất cả các đạo hàm mọi cấp đều tồn tại tại  $x = 0$ .

a.  $f(x) = e^{x^2}$

b.  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$

c.  $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$

d.  $f(x) = \frac{1}{1+4x}$

e.  $f(x) = \ln(3+x)$

f.  $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}, \quad a \neq 0$

**Bài 8.36.** Tìm 4 số hạng đầu tiên của chuỗi Taylor của các hàm sau tại giá trị  $c$

a.  $f(x) = \ln x$  tại  $c = 3$

b.  $f(x) = \sin x$  tại  $c = \frac{\pi}{4}$

c.  $f(x) = \sqrt{x}$  tại  $c = 9$

d.  $f(x) = \frac{3}{2x-1}$  tại  $c = 2$

**Bài 8.37.** Khai triển các hàm sau đây thành chuỗi nhị thức và tìm miền hội tụ của nó.

a.  $f(x) = (4+x)^{-1/3}$

b.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

**Bài 8.38.** Tìm chuỗi Maclaurin của hàm  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

**Bài 8.39.** Tìm chuỗi Maclaurin của hàm  $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)(x^2-1)}$

**Bài 8.40.** Tìm chuỗi Maclaurin của hàm  $f(x) = \ln \left[ \frac{1+2x}{1-3x+2x^2} \right]$