HƯỚNG DẪN BÀI TẬP CỰC TRỊ ĐỊA PHƯƠNG

1. Kiến thức cần nhớ

Bài toán

Tìm cực trị địa phương của hàm số y = f(x).



Quy tắc 1- Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 1

- 1 Tìm tập xác định của hàm số.
- 2 Tính f'(x).
- lacksquare Tìm tất cả các điểm trong miền xác định của f mà f'(x)=0 hoặc f'(x) không xác định tại đó.
- 4 Lập bảng biến thiên
- Oựa vào bảng biến thiên để kết luận



Quy tắc 2- Tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2

- 1 Tìm tập xác định của hàm số.
- 2 Tính f'(x). Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_i$ với $i = 1, 2, \ldots$
- 3 Tính f''(x)
- $oldsymbol{0}$ Dựa vào dấu của $f''(x_i)$ để kết luận:
 - Nếu $f''(x_i) > 0$ thì f đạt cực tiểu tại x_i .
 - Nếu $f''(x_i) < 0$ thì f đạt cực đại tại x_i .
 - Nếu $f''(x_i) = 0$ sử dụng Quy tắc 1 để kết luận.

2. Các ví dụ

Ví du 2.1

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = (1+2x)^3 - 27x^2 - 1$



Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Giải
$$f'(x)=0\Leftrightarrow 6\left(1+2x\right)^2-54x=0\Leftrightarrow x=1\lor x=rac{1}{4}.$$

Bảng biến thiên

Giảng viên: Nguyễn Minh Hải

$oldsymbol{x}$	$-\infty$		$rac{1}{4}$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	_	0	+	
f(x)	$-\infty$		11/16		_1		+∞

Vậy

- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại x=1 và $f_{min}=-1$.
- Hàm số đạt cực đại địa phương tại $x=rac{1}{4}$ và $f_{max}=rac{11}{16}.$

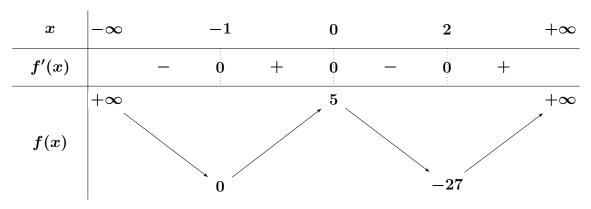
Ví dụ 2.2

Tìm cực trị địa phương của $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+5$

B Lời giải.

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

 $\stackrel{\cdot }{\text{Giải}}\stackrel{\cdot }{f'(x)}=0\Leftrightarrow 12x^3-12x^2-24x=0\Leftrightarrow x=0\lor x=2\lor x=-1.$



Vậy

- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại x=-1 và $f_{min}=0$.
- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại x=2 và $f_{min}=-27$.
- Hàm số đạt cực đại địa phương tại x=0 và $f_{max}=5.$

Ví du 2.3

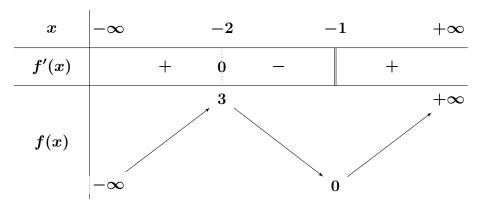
Tìm cực trị địa phương của $f(x)=(2x+7)(x+1)^{2/3}$

 \raiseta Lời giải. Tập xác định $D=\mathbb{R}.$

Ta có
$$f'(x) = rac{10(x+2)}{3(x+1)^{1/3}}.$$

Giải
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow egin{cases} x+2=0 \ x
eq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Hơn nữa, f'(x) không xác định tại $x=-1\in D$. Vậy các điểm tới hạn của f là x=-2 và x=-1



Vậy

- Hàm số đạt cực đại địa phương tại x=-2 và $f_{max}=3$.
- Hàm số đạt cực tiểu địa phương tại x=-1 và $f_{min}=0$.

Ví du 2.4(Đề HKI-2016-2017)

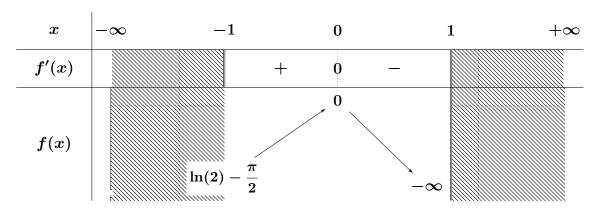
Tìm cực trị tương đối của $f(x) = \ln(1-x) + \sin^{-1}(x)$.

 $oldsymbol{\mathcal{J}}$ Lời giải. Tập xác định D=[-1;1).

Ta có
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{1-x} = \frac{\sqrt{1-x^2}-(x+1)}{1-x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x+1 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+1) = 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0 & (\text{Nhận}) \\ x = -1 & (\text{Loại}) \end{cases}$$

Hơn nữa, f'(x) không xác định tại $x=-1\in D$. Vậy hàm số có các điểm tới hạn là x=0 và x=-1.



Vậy f đạt cực đại tương đối tại x=0 và $f_{max}=0$

Ví dụ 2.5(Đề HKI-2015-2016)

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = x - 2 \tan^{-1} x$.

 $rac{1}{2}$ **Lời giải.** Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Ta có

$$f'(x) = 1 - rac{2}{x^2 + 1} = rac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$
 $f''(x) = rac{4x}{(1 + x^2)^2}$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

- Vì f''(-1)=-1<0 nên f đạt cực đại tương đối tại x=-1 và $f_{max}=rac{\pi}{2}-1.$
- Vì f''(1)=1>0 nên f đạt cực tiểu tương đối tại x=1 và $f_{min}=1-rac{\pi}{2}.$

Ví du 2.6

Tìm cực trị tương đối (địa phương) của $f(x)=rac{e^x}{x}.$

 $rac{ extstyle L lpha i giải.}{ extstyle Ta có}$ Tâp xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$

$$f'(x) = rac{xe^x - e^x}{x^2} = rac{e^x(x-1)}{x^2} \ f''(x) = rac{e^x(x^2 - 2x + 2)}{x^3}$$

Giải
$$f'(x)=0\Leftrightarrow egin{cases} x
eq 0 \ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$$

Vì f''(1)=e>0 nền f đạt cực tiểu tại x=1 và $f_{max}=e.$

Cách 2:

Giải
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$
.

	$oldsymbol{x}$	$-\infty$) 1	$+\infty$
_	f'(x)	_	- 0	+
	f(x)	0 $-\infty$	$+\infty$ e	+∞

Ví dụ 2.7(Hàm xác định từng khoảng)

Tìm cực trị địa phương của $f(x)=egin{cases} 3-x & ext{nếu}\ x<0 \ 3+2x-x^2 & ext{nếu}\ x\geq0 \end{cases}$

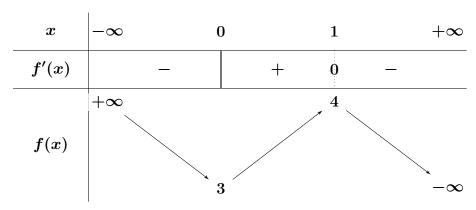
 $oldsymbol{\mathcal{L}\grave{o}i}$ giải. Tập xác định $oldsymbol{D}=\mathbb{R}.$ Ta có

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{khi } x < 0 \\ 2 - 2x & \text{khi } x > 0 \end{cases}$$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tai x = 0:

$$\lim_{x o 0^+} rac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x o 0^+} rac{2x - x^2}{x} = \lim_{x o 0^+} (2 - 2x) = 2$$
 $\lim_{x o 0^-} rac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x o 0^-} rac{-x}{x} = -1$

Vì $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$ nên f'(0) không tồn tại. Vậy các điểm tới hạn là x=0 và x=1.



- Hàm số đạt cực tiểu tại x=0 và $f_{min}=3$
- Hàm số đạt cực đại tại x=1 và $f_{max}=4$.

Ví dụ 2.8(Hàm trị tuyệt đối)

Tìm cực trị địa phương của $f(x) = \left| x^2 - 2x \right| + 3$.

 $\raise Lời giải. Viết lại hàm <math>f(x)$

$$f(x) = egin{cases} x^2 - 2x + 3 & ext{n\'eu} \ x \leq 0 \lor x \geq 2 \ -x^2 + 2x + 3 & ext{n\'eu} \ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có

$$f'(x) = egin{cases} 2x-2 & ext{n\'eu}\ x < 0 \lor x > 2 \ -2x+2 & ext{n\'eu}\ 0 < x < 2 \end{cases}$$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Tại x = 0

$$f'_+(0) = \lim_{x o 0^+} rac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x o 0^+} rac{x^2 - 2x}{x} = \lim_{x o 0^+} (2x - 2) = -2$$
 $f'_-(0) = \lim_{x o 0^-} rac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x o 0^-} rac{-x^2 + 2x}{x} = \lim_{x o 0^-} (-2x + 2) = 2$

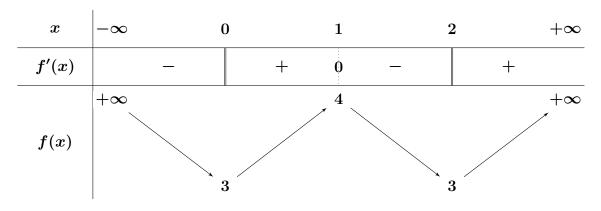
Vì $f_-'(0)
eq f_+'(0)$ nên f'(0) không tồn tại. Tại x=2

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \to 2^{+}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^{+}} \frac{x^{2} - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^{+}} (2x - 2) = 2$$

$$f'_{-}(2) = \lim_{x \to 2^{-}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^{-}} \frac{-x^{2} + 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2^{-}} (-2x + 2) = -2$$

Vì $f_-'(2)
eq f_+'(2)$ nên f'(2) không tồn tại.

Vậy các điểm tới hạn của f là $x=1,\,x=2$ và x=0.



Vây

- Hàm số đạt cực tiểu tại x=0 và $f_{min}=3$.
- Hàm số đạt cực tiểu tại x=2 và $f_{min}=3$.
- Hàm số đạt cực đại tại x=1 và $f_{max}=4$.