HƯỚNG DẪN MỘT SỐ BÀI TẬP

1. Tính khả vi của hàm số

Dạng toán 1: Cho $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \neq a \\ h(x) & \text{khi } x = a \end{cases}$. Tính $f'(x)$.

Cách giải

- Nếu $x \neq a$ thì $f'(x) = g'(x)$ (đạo hàm bằng công thức)
- Tại $x = a$, để tính $f'(a)$, sử dụng định nghĩa đạo hàm (vì $x = a$ là điểm mà hàm số phân nhánh)
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{g(x) - h(a)}{x - a}$$

Dạng 2: Cho $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \geq a \\ h(x) & \text{khi } x < a \end{cases}$. Tính $f'(x)$

Cách giải:

- Khi $x > a$ thì $f'(x) = g'(x)$ (đạo hàm bằng công thức).
- Nếu $x < a$ thì $f'(x) = h'(x)$ (đạo hàm bằng công thức).
- Tại $x = a$
$$f'(a+) = \lim_{x\to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$
$$f'(a-) = \lim_{x\to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a^-} \frac{h(x) - g(a)}{x - a}$$

  Nếu $f'(a+) = f'(a-) = L$ thì $f'(a) = L$. Ngược lại, không tồn tại $f'(a)$.

Bài tập 1. Cho $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2(4x)}{3x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Tính $g'(x)$

Giải. Khi $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{\sin^2 4x}{3x}$ nên $g'(x) = \dfrac{12x\sin 8x - 3\sin^2 4x}{9x^2}$.

Tại $x = 0$,

$$g'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin^2 4x}{3x} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 4x}{3x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{4\sin 8x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{32\cos 8x}{6} = \frac{16}{3}$$

□

Bài tập 2. Tính đạo hàm của $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{nếu } x \leq 0 \\ \sin x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$.

Giải.
- Với $x > 0$ thì $f(x) = \sin x$ nên $f'(x) = \cos x$.
- Với $x < 0$ thì $f(x) = x^2 + x$ nên $f'(x) = 2x + 1$.

- Tại $x = 0$, ta có

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

và

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x\to 0^-}(x + 1) = 1$$

Vậy $f'(0) = 1$ vì $f'_+(0) = f'_-(0) = 1$.

$\square$