

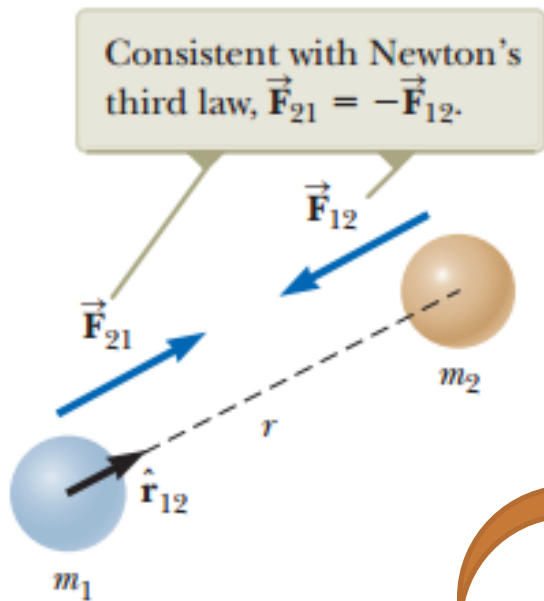
## *Chapter 13*

# Universal Gravitation

## VẬT HẤP DẪN

# 1-Newton's Law of Universal Gravitation

Every particle in the Universe attracts every other particle with a force that is directly proportional to the product of their masses and inversely proportional to the square of the distance between them



$$\vec{F}_g = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}$$

$$\rightarrow F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

The universal gravitational constant:  $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$

$$F_g = G \frac{M}{(R + h)^2} \cdot m$$

$M$ ,  $R$  = mass and radius of the Planet  
 $h$  = distance above Planet surface to object

Gravitational Acceleration

$$g = G \frac{M}{(R + h)^2}$$

Free-fall acceleration on the surface of the Planet

$h \approx 0$

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

CH1: Một hành tinh có 2 mặt trăng khối lượng bằng nhau. Mặt trăng 1 ở quỹ đạo tròn bán kính  $r$ . Mặt trăng 2 ở quỹ đạo tròn bán kính  $2r$ . Hỏi: độ lớn lực hấp dẫn của hành tinh tác dụng lên mặt trăng 2 như thế nào so với mặt trăng 1?  
(a) lớn gấp 4 lần, (b) lớn gấp 2 lần, (c) bằng nhau, (d) bằng một nửa và (e) bằng một phần tư.

ĐA: e

VD1: Độ cao đỉnh Fansipan là 3143 m so với bề mặt Trái Đất. Hỏi gia tốc trọng trường tại đỉnh Fansipan là bao nhiêu? Biết gia tốc rơi tự do ở mặt đất là  $9,81\text{m/s}^2$  và bán kính Trái Đất 6370 km.

$$g_F = 9,8003 \text{ m/s}^2 \quad \Leftarrow \quad \frac{g_F}{g_{MP}} = \left( \frac{R_E}{R_E + h} \right)^2$$

# 3- Kepler's Laws and the Motion of Planets

1. All planets move in elliptical orbits with the Sun at one focus
2. The radius vector drawn from the Sun to a planet sweeps out equal areas in equal time intervals.
3. The square of the orbital period of any planet is proportional to the cube of the semimajor axis of the elliptical orbit.

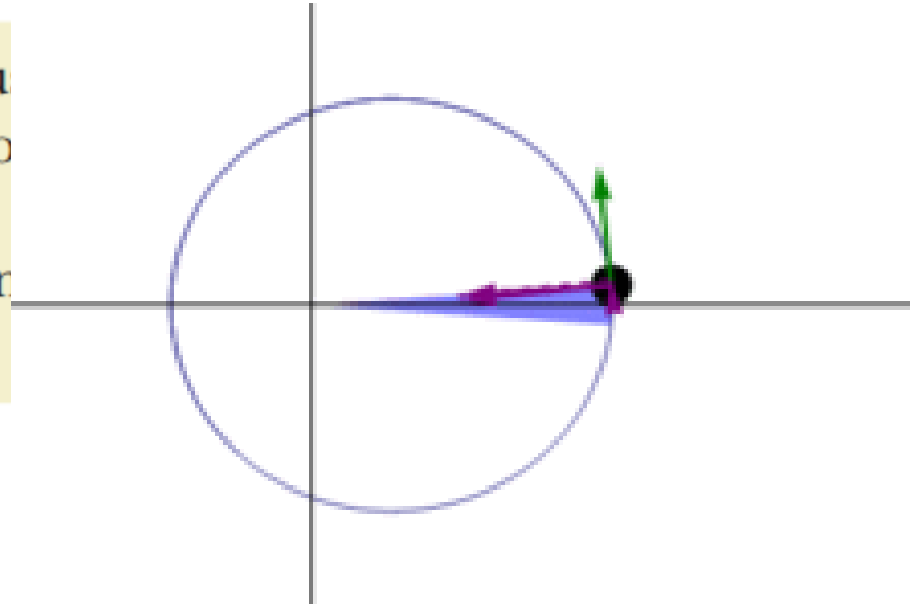
The semimajor axis has length  $a$ , and the semiminor axis has length  $b$ .

$$a^2 = b^2 + c^2$$

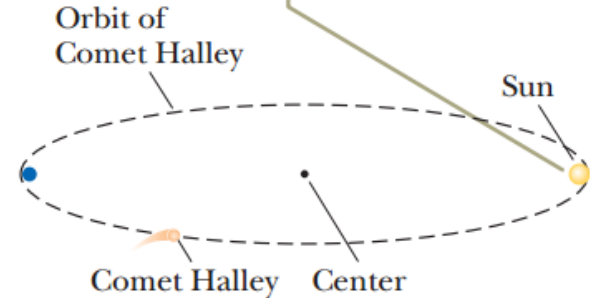
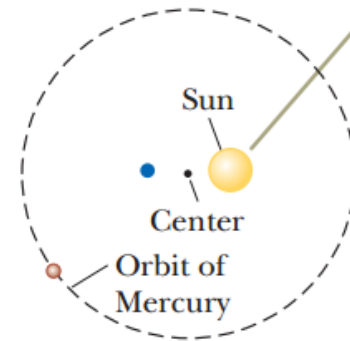
Eccentricity:  $e = \frac{c}{a}$

- Earth:  $e = 0.017$
- Mercury:  $e = 0.21$
- Comet Halley:  $e = 0.97$
- $e = 1 \rightarrow$  parabolas
- $e > 1 \rightarrow$  hyperbolas

Each focus is located at a distance  $c$  from the center.



The Sun is located at a focus of the ellipse. There is nothing physical located at the center (the black dot) or the other focus (the blue dot).



# 3- Kepler's Laws and the Motion of Planets

1. All planets move in elliptical orbits with the Sun at one focus.
2. The radius vector drawn from the Sun to a planet sweeps out equal areas in equal time intervals.
3. The square of the orbital period of any planet is proportional to the cube of the semimajor axis of the elliptical orbit.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const}$$

The orbit of a planet - Earth /Sun

$$\rightarrow F_{E-S} = G \frac{M_E M_S}{r^2} = M_E \frac{v^2}{r} = M_E \frac{(r\omega)^2}{r} = M_E \frac{\left(r \frac{2\pi}{T}\right)^2}{r} \leftrightarrow \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

$$T^2 = K_S r^3$$

$$K_S = \frac{4\pi^2}{GM_S} = 2.97 \times 10^{-19} \text{ s}^2/\text{m}^3$$

The orbit of a satellite - Moon /Earth

$$T^2 = K_E a^3$$

$$K_E = \frac{4\pi^2}{GM_E}$$

Chu kỳ quay của hành tinh  
K/c hệ hành tinh đến m. trời

Chu kỳ quay của vệ tinh

K/c hệ vệ tinh → hành tinh



# 3- Kepler's Laws and the Motion of Planets

1. All planets move in elliptical orbits with the Sun at one focus.
2. The radius vector drawn from the Sun to a planet sweeps out equal areas in equal time intervals.
3. The square of the orbital period of any planet is proportional to the cube of the semimajor axis of the elliptical orbit.

**Table 13.2**    **Useful Planetary Data**

Body	Mass (kg)	Mean Radius (m)	Period of Revolution (s)	Mean Distance from the Sun (m)	$\frac{T^2}{r^3} (\text{s}^2/\text{m}^3)$
Mercury	$3.30 \times 10^{23}$	$2.44 \times 10^6$	$7.60 \times 10^6$	$5.79 \times 10^{10}$	$2.98 \times 10^{-19}$
Venus	$4.87 \times 10^{24}$	$6.05 \times 10^6$	$1.94 \times 10^7$	$1.08 \times 10^{11}$	$2.99 \times 10^{-19}$
Earth	$5.97 \times 10^{24}$	$6.37 \times 10^6$	$3.156 \times 10^7$	$1.496 \times 10^{11}$	$2.97 \times 10^{-19}$
Mars	$6.42 \times 10^{23}$	$3.39 \times 10^6$	$5.94 \times 10^7$	$2.28 \times 10^{11}$	$2.98 \times 10^{-19}$
Jupiter	$1.90 \times 10^{27}$	$6.99 \times 10^7$	$3.74 \times 10^8$	$7.78 \times 10^{11}$	$2.97 \times 10^{-19}$
Saturn	$5.68 \times 10^{26}$	$5.82 \times 10^7$	$9.29 \times 10^8$	$1.43 \times 10^{12}$	$2.95 \times 10^{-19}$
Uranus	$8.68 \times 10^{25}$	$2.54 \times 10^7$	$2.65 \times 10^9$	$2.87 \times 10^{12}$	$2.97 \times 10^{-19}$
Neptune	$1.02 \times 10^{26}$	$2.46 \times 10^7$	$5.18 \times 10^9$	$4.50 \times 10^{12}$	$2.94 \times 10^{-19}$
Pluto <sup>a</sup>	$1.25 \times 10^{22}$	$1.20 \times 10^6$	$7.82 \times 10^9$	$5.91 \times 10^{12}$	$2.96 \times 10^{-19}$
Moon	$7.35 \times 10^{22}$	$1.74 \times 10^6$	—	—	—
Sun	$1.989 \times 10^{30}$	$6.96 \times 10^8$	—	—	—

$$\frac{T_E^2}{r_E^3} = \frac{T_G^2}{r_G^3} = K_J \Rightarrow \frac{T_G}{T_E} = \sqrt{\left(\frac{r_G}{r_E}\right)^3} = \sqrt{1,6^3}$$

CH2: Europa (E) và Ganymede (G) là mặt trăng của Jupiter (J). Khoảng cách từ G đến J gấp 1,6 lần từ E đến J. Tỷ số chu kỳ quay của G và chu kỳ quay E là: (a) 0,4; (b) 3,2; (c) 2; (d) 0,39; (e) 2,56; (f) 4.

VD2: Europa là 1 trong 4 mặt trăng của sao Mộc. Nó có khối lượng  $4,8 \cdot 10^{22}$  kg, bán kính 3122 km và chu kỳ quay 3,55 ngày. Hỏi Europa cách Sao Mộc bao xa? Biết khối lượng sao Mộc là  $1,898 \cdot 10^{27}$  kg.

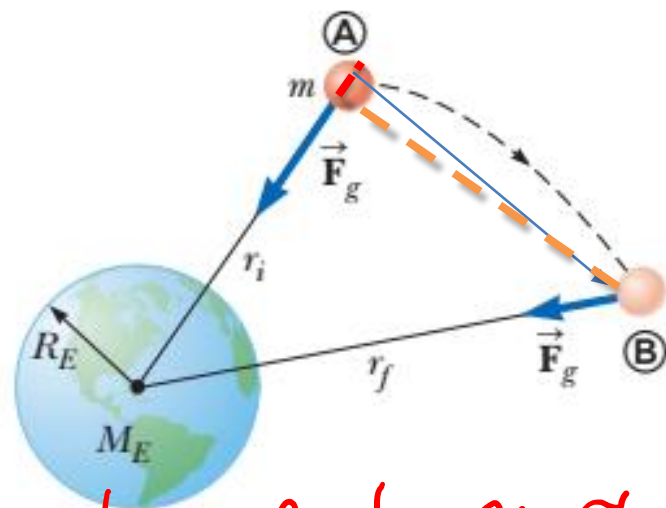
$$K_J = \frac{4\pi^2}{GM_J} = \frac{T_E^2}{a^3} ; \Rightarrow a.$$

# 4- Gravitational Potential Energy

$$W_{F_g} = \int \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = - \int_{r_i}^{r_f} \frac{GM_E m}{r^2} dr = GM_E m \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right) = -\Delta U$$

$$\rightarrow U_f - U_i = -GM_E m \left( \frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right)$$

Công của lực hấp dẫn



Thế năng hấp dẫn giữa 2 vật có K/P bất kỳ



$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

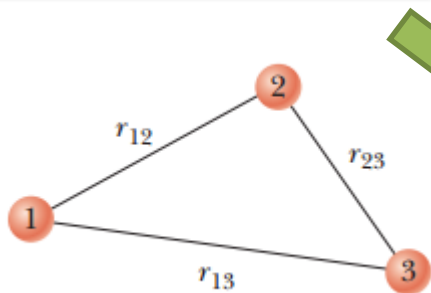
Gravitational potential energy of any pair of particles system



Gravitational potential energy of the **Earth-particle** system

$$U(r) = -\frac{GM_E m}{r}$$

Thế năng hấp dẫn của Trái đất



Three interacting particles

Thế năng tương tác giữa 3 chất điểm

$$U_{total} = U_{12} + U_{23} + U_{31} = -G \left( \frac{m_1m_2}{r_{12}} + \frac{m_2m_3}{r_{23}} + \frac{m_3m_1}{r_{31}} \right)$$

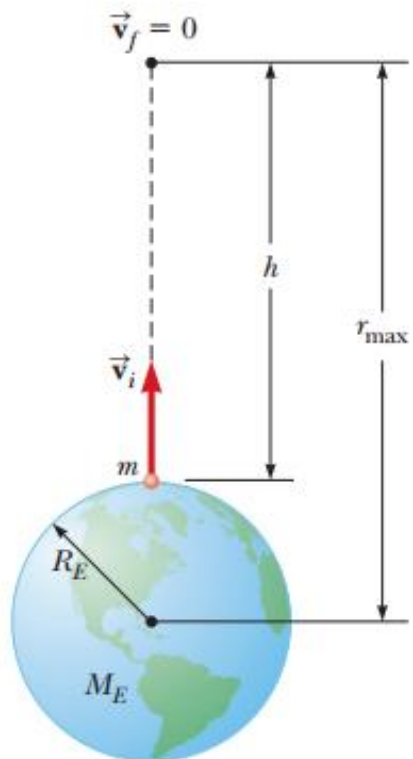


## 5- Energy Considerations in Planetary and Satellite Motion

If an isolated system consists of an object of mass  $m$  moving with a speed  $v$  in the vicinity of a massive object of mass  $M$ , the total energy  $E$  of the system is the sum of the kinetic and potential energies:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\frac{GMm}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$



$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

(circular orbits)

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

(elliptical orbits)

Escape Speed

$$E_i = E_f \rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = 0 - \frac{GM_E m}{r_{max}}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}}$$

6. (P13.6) Three uniform spheres of masses  $m_1 = 2\text{kg}$ ,  $m_2 = 4\text{kg}$ , and  $m_3 = 6\text{kg}$  are placed at the corners of a right triangle as shown in Figure P13.6. Calculate the resultant gravitational force on the object of mass  $m_2$ , assuming the spheres are isolated from the rest of the Universe.

*Ba quả cầu đồng nhất có khối lượng  $m_1 = 2\text{kg}$ ,  $m_2 = 4\text{kg}$ , và  $m_3 = 6\text{kg}$  đặt ở các góc của tam giác vuông như trong hình. Tính lực hấp dẫn lên vật  $m_2$ . Giả sử các quả cầu cô lập trong vũ trụ đứng yên.*

ĐS:  $(-10\vec{i} + 5.9\vec{j}) \times 10^{-11}\text{N}$

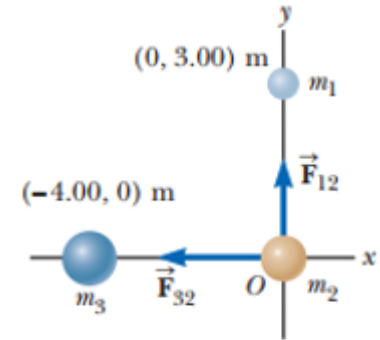


Figure P13.6

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{j}$$

$$\vec{F}_{32} = -G \frac{m_3 m_2}{r_{32}^2} \vec{i}$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{32}$$

8. (P13.12) The free-fall acceleration on the surface of the Moon is about one-sixth that on the surface of the Earth. The radius of the Moon is about  $0,25R_E$  ( $R_E = \text{Earth's radius} = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$ ). Find the ratio of their average densities  $\rho_{\text{Moon}} / \rho_{\text{Earth}}$ .

*Gia tốc rơi tự do tại bề mặt Mặt Trăng bằng 1/6 gia tốc rơi tự do tại bề mặt Trái Đất, bán kính của Mặt Trăng khoảng  $0.25R_E$  (với  $R_E$  là bán kính Trái đất,  $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ). Tìm tỷ số khối lượng riêng trung bình của Mặt Trăng và Trái Đất ( $\rho_{\text{MT}} / \rho_{\text{TĐ}}$ ).*

$$g_E = G \frac{M_E}{R_E^2} = G \frac{\rho_E \cdot V_E}{R_E^2}$$

$$\text{Với: } V_E = \frac{4\pi R_E^3}{3}$$

$$g_M = G \frac{M_M}{R_M^2} = G \frac{\rho_M \cdot V_M}{R_M^2}$$

$$\text{Với: } V_M = \frac{4\pi R_M^3}{3}$$

9. (P13.14) (a) Compute the vector gravitational field at a point P on the perpendicular bisector of the line joining two objects of equal mass separated by a distance  $2a$  as shown in Figure P13.14. (b) Explain physically why the field should approach zero as  $r \rightarrow 0$ . (c) Prove mathematically that the answer to part (a) behaves in this way. (d) Explain physically why the magnitude of the field should approach  $2GM/r^2$  as  $r \rightarrow \infty$ . (e) Prove mathematically that the answer to part (a) behaves correctly in this limit.

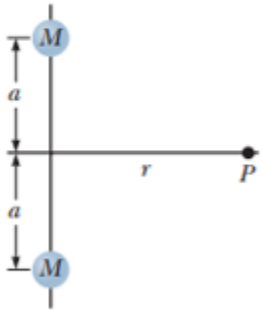
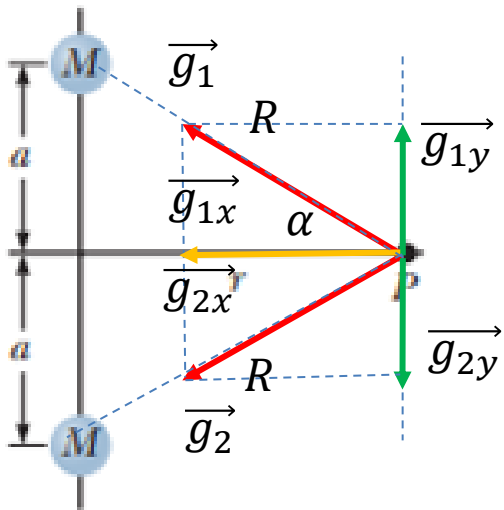


Figure P13.14

(a) Tìm gia tốc hấp dẫn tại điểm P nằm trên đường trung trực nối 2 vật M cách nhau đoạn 2a như hình. (b,c) Chứng minh và giải thích tại sao khi  $r \rightarrow 0$  thì gia tốc hấp dẫn gần bằng 0. (d,e) Chứng minh và giải thích tại sao khi  $r \rightarrow \infty$  thì gia tốc hấp dẫn gần bằng  $\frac{2GM}{r^2}$ .

ĐS:  $\frac{2GMr}{(r^2+a^2)^{3/2}}$



$$g_1 = g_2 = G \frac{M}{R^2} \quad ; R = \sqrt{a^2 + r^2}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \rightarrow g = 2g_{1x} = 2g_1 \cos \alpha = 2g_1 \frac{r}{R}$$

11. (P13.18) Io, a satellite of Jupiter, has an orbital period of 1,77 days and an orbital radius of  $4,22 \cdot 10^5 \text{ km}$ .

From these data, determine the mass of Jupiter.

*Io, một vệ tinh của sao mộc, có chu kỳ là 1.77 ngày và bán kính quỹ đạo là  $4.22 \times 10^5 \text{ km}$ . Từ những dữ liệu này hãy xác định khối lượng của Sao Mộc.*

$$\rightarrow F_{J-I} = G \frac{M_J M_I}{r^2} = M_I \frac{v^2}{r} = M_I \frac{(r\omega)^2}{r} = M_I \frac{\left(r \frac{2\pi}{T}\right)^2}{r}$$

$$T^2 = K_J r^3 = \frac{4\pi^2}{GM_J} r^3$$

16. (P13.37) A  $500\text{kg}$  satellite is in a circular orbit at an altitude of  $500\text{km}$  above the Earth's surface. Because of air friction, the satellite eventually falls to the Earth's surface, where it hits the ground with a speed of  $2\text{km/s}$ . How much energy was transformed into internal energy by means of air friction?

*Một vệ tinh nặng  $500\text{kg}$  ban đầu nằm trong quỹ đạo tròn ở độ cao  $500\text{km}$  trên mặt đất sau đó rơi xuống bề mặt trái đất. Do có lực cản không khí nên nó chạm đất với tốc độ  $2\text{km/s}$ . Hỏi lượng năng lượng được chuyển hóa thành nội năng do lực cản không khí là bao nhiêu? Biết khối lượng Trái Đất  $M_E = 5.28 \times 10^{24}\text{kg}$ , bán kính Trái Đất  $R_E = 6.37 \times 10^6\text{m}$ .*

$$\Delta E_{\text{mech}} = K_f - K_i + \Delta U = W_R = -\Delta E_{\text{int}}$$

$$\Delta E_{\text{int}} = K_i - K_f - \Delta U = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{1}{2}mv_f^2 - \left( -\frac{GM_E m}{r_f} + \frac{GM_E m}{r_i} \right)$$

$$F_{S-E} = G \frac{M_E m}{(R_E + h)^2} = m \frac{v_i^2}{R_E + h}$$

$$R_E + h \quad R_E$$



Example 13.7: A space transportation vehicle releases a 470-kg communications satellite while in an orbit 280 km above the surface of the Earth ( $R_E = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$ ). A rocket engine on the satellite boosts it into a geosynchronous orbit (36 000 km). How much energy does the engine have to provide?

Một con tàu du hành vũ trụ đang ở quỹ đạo 280km so với bề mặt Trái Đất. Động cơ trên tàu hoạt động giúp tàu bay lên quỹ đạo geosynchronous (cách mặt đất 36000km). Hỏi năng lượng cần cung cấp cho động cơ để tàu bay lên quỹ đạo geo là bao nhiêu?

$$E = -\frac{GM_E m}{2r} \quad \longrightarrow \quad E_i = -\frac{GM_E m}{2r_i} = -\frac{GM_E m}{2(R_E + 2.8 \times 10^5)}$$

$$E_f = -\frac{GM_E m}{2r_f} = -\frac{GM_E m}{2(R_E + 3.6 \times 10^7)}$$

$$\longrightarrow \quad \Delta E = E_f - E_i = 1.19 \times 10^{10} \text{ J}$$

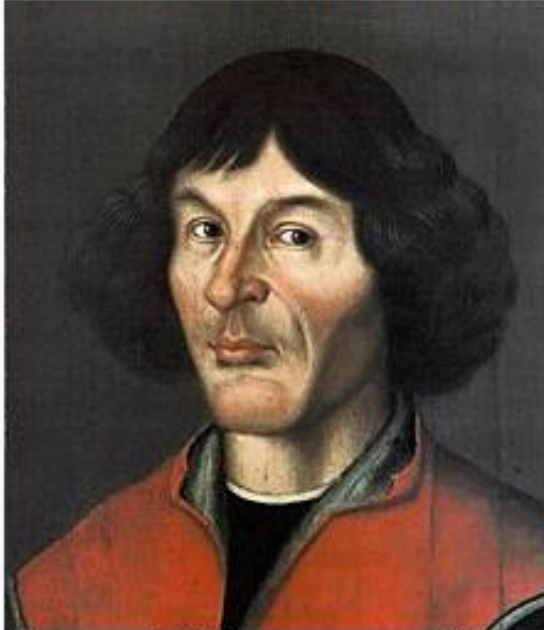
17. (P13.39) A 1000kg satellite orbits the Earth at a constant altitude of 100km. (a) How much energy must be added to the system to move the satellite into a circular orbit with altitude 200km? What are the changes in the system's (b) kinetic energy and (c) potential energy?

Một vệ tinh nặng 1000kg quay quanh trái đất ở độ cao không đổi 100km. (a) Lượng năng lượng cần phải bổ sung vào để chuyển vệ tinh sang quỹ đạo tròn với độ cao 200km. Tính độ biến thiên (b) động năng và (c) thế năng của hệ.

The end 😊

# 13.4 Kepler's Laws and the Motion of Planets

Nicolaus Copernicus



The "Torun portrait" (anonymous, c. 1580), kept in Toruń town hall<sup>[1]</sup>

**Born** 19 February 1473  
Toruń (Thorn), Royal Prussia,  
Kingdom of Poland

**Died** 24 May 1543 (aged 70)  
Frombork (Frauenburg),  
Prince-Bishopric of Warmia,  
Royal Prussia, Kingdom of  
Poland

Tycho Ottesen Brahe



Brahe wearing the Order of the Elephant

**Born** 14 December 1546  
Knutstorp Castle, Scania,  
Denmark, Denmark–Norway  
(now Sweden)

**Died** 24 October 1601 (aged 54)  
Prague, Habsburg Bohemia, Holy  
Roman Empire

Johannes Kepler

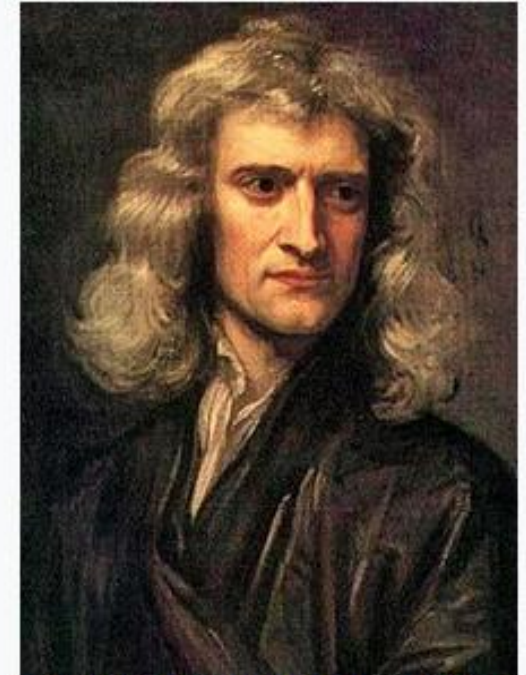


Portrait of Kepler by an unknown artist, 1610

**Born** December 27, 1571  
Free Imperial City of Weil der  
Stadt, Holy Roman Empire

**Died** November 15, 1630 (aged 58)  
Regensburg, Electorate of  
Bavaria, Holy Roman Empire

Sir  
Isaac Newton  
FRS



Portrait of Newton by Godfrey Kneller

**Born** 4 January 1643 [O.S. 25  
December 1642]<sup>[1]</sup>  
Woolsthorpe, Lincolnshire,  
England

**Died** 31 March 1727 (aged 84) [O.S.  
20 March 1726]<sup>[1]</sup>  
Kensington, Middlesex, England