

CHƯƠNG 11 - MOMEN ĐỘNG LƯỢNG

BÀI TẬP MẪU

1. Cho hai vector trong mặt phẳng Oxy $\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$ và $\vec{B} = -\hat{i} + 2\hat{j}$. Tìm $\vec{A} \times \vec{B}$ và chứng tỏ $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$.

Giải

Áp dụng công thức nhân hai vec-tơ ta tính được:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 7\hat{k} = 7\hat{k}$$

Tương tự ở trên ta có:

$$\vec{B} \times \vec{A} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \hat{k} = 0\hat{i} + 0\hat{j} - 7\hat{k} = -7\hat{k}$$

Vậy $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

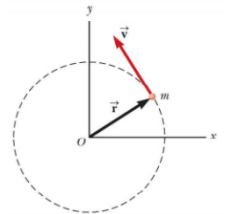
2. Cho lực $\vec{F} = (2\hat{i} + 3\hat{j})\text{ N}$ được tác dụng vào một chất điểm chuyển động quanh một trục quay cố định dọc theo trục Oz. Lực này được tác dụng ở vị trí $\vec{r} = (4\hat{i} + 5\hat{j})\text{ m}$. Tìm vec-tơ moment lực tác dụng vào chất điểm.

Giải

Áp dụng công thức nhân hai vec-tơ ta tính được vec-tơ momen lực:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \hat{k} = 2\hat{k} \text{ (N.m)}$$

3. Một chất điểm chuyển động trong mặt phẳng xy theo đường tròn bán kính r như trong. Tìm độ lớn và hướng của moment động lượng của nó so với trục qua O khi vận tốc của nó là \vec{v} .



Giải:

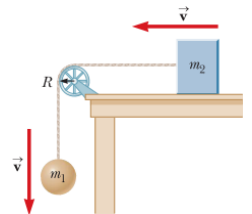
Độ lớn của moment động lượng \vec{L} :

$$L = mvr \sin 90^\circ = mvr$$

Áp dụng quy tắc bàn tay phải ta xác định được \vec{L} có phương vuông góc với mặt phẳng giấy (mặt phẳng chứa quỹ đạo tròn), chiều hướng ra khỏi mặt phẳng giấy.

Nhận xét: Động lượng $\vec{p} = m\vec{v}$ luôn thay đổi nhưng giá trị của moment động lượng L là hằng số và cả hướng của momen động lượng cũng không đổi. Như vậy, một chất điểm chuyển động tròn đều có momen động lượng quay quanh một trục đi xuyên qua tâm đường đi của nó là một hằng số.

4. Cho m_1 và m_2 được nối với nhau bằng một sợi dây nhẹ, không giãn vắt qua ròng rọc như hình. Ròng rọc có khối lượng M và bán kính R, các nan hoa có khối lượng không đáng kể. Mặt phẳng ngang không có ma sát. Sử dụng các công thức về momen lực và momen động lượng để tìm biểu thức gia tốc của hai vật và gia tốc góc của ròng rọc.



Giải

Momen động lượng của vật m_1 , m_2 và ròng rọc đối với trục quay qua tâm ròng rọc đều cùng phương vuông góc với mặt giấy, chiều hướng ra nên ta tính được độ lớn tổng momen động lượng của hệ:

$$\begin{aligned} L &= m_1 v R + m_2 v R + M v R = (m_1 + m_2 + M) v R \\ \rightarrow \frac{dL}{dt} &= (m_1 + m_2 + M) R \frac{dv}{dt} = (m_1 + m_2 + M) R a \quad (1) \end{aligned}$$

Tổng momen ngoại lực tác dụng vào hệ:

$$\sum \tau_{ext} = m_1 g R \quad (2)$$

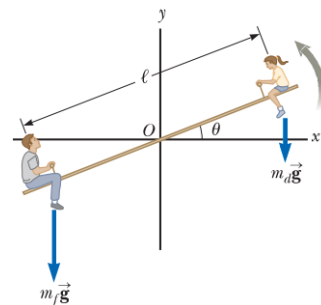
Mà ta có $\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$, từ (1) và (2) ta suy ra gia tốc của hai vật:

$$a = \frac{m_1 g R}{(m_1 + m_2 + M) R} = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2 + M}$$

Gia tốc góc của ròng rọc:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2 + M)R}$$

5. Một người cha có khối lượng m_f và người con gái có khối lượng m_d ngồi 2 đầu đối diện của bập bênh với khoảng cách như nhau tính từ tâm của trục quay. Bập bênh được mô hình hóa như một thanh cứng có khối lượng M và chiều dài l xoay không ma sát quanh trục. Tại một thời điểm nhất định hệ quay quanh trục cố định với tốc độ góc ω . Tìm biểu thức (a) độ lớn moment động lượng của hệ và (b) độ lớn gia tốc góc của hệ khi bập bênh tạo với phương ngang một góc θ .



Giải:

(a) Tổng momen quán tính của hệ quanh trục Oz đi qua O là:

$$I = \frac{1}{12} M l^2 + m_f \left(\frac{l}{2}\right)^2 + m_d \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{l^2}{4} \left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)$$

Momen động lượng của hệ:

$$L = I\omega = \frac{l^2}{4} \left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right) \omega$$

(b) Momen lực do trọng lực của người cha tác dụng có độ lớn $\tau_f = m_f g \frac{l}{2} \cos \theta$, hướng theo chiều dương Oz (hướng ra khỏi mặt giấy).

Momen lực do trọng lực của người con tác dụng có độ lớn $\tau_d = m_d g \frac{l}{2} \cos \theta$, hướng theo chiều âm Oz.

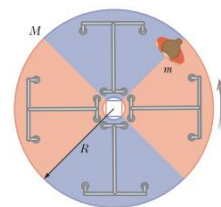
Do $\tau_f > \tau_d$ nên tổng momen ngoại lực tác dụng lên bập bênh là:

$$\sum \tau_{ext} = \tau_f - \tau_d$$

Từ PTĐLH trong chuyển động quay ta tính được gia tốc góc của bập bênh:

$$\alpha = \frac{\sum \tau_{ext}}{I} = \frac{2(m_f - m_d)g \cos \theta}{l \left(\frac{M}{3} + m_f + m_d\right)}$$

6. Một đĩa tròn có khối lượng $M = 100 \text{ kg}$ và bán kính $R = 2 \text{ m}$ quay tự do không ma sát quanh trục đi qua tâm đĩa như hình. Một học sinh có khối lượng $m = 60 \text{ kg}$ đi chậm từ mép đĩa vào tới tâm đĩa. Nếu tốc độ góc của hệ là 2 rad/s khi học sinh từ mép đĩa thì tốc độ góc của học sinh này khi ở một điểm cách tâm đĩa một đoạn $r = 0,5 \text{ m}$ là bao nhiêu?



Giải

Đặt momen quán tính của đĩa là I_p và momen quán tính của học sinh là I_s ta có:

Momen quán tính ban đầu của hệ: $I_i = I_{pi} + I_{si} = \frac{1}{2} M R^2 + m R^2$

Momen quán tính lúc sau của hệ: $I_f = I_{pf} + I_{sf} = \frac{1}{2} M R^2 + m r^2$

Khi di chuyển từ mép đến điểm cách tâm một đoạn r , tổng momen ngoại lực tác dụng lên hệ (học sinh + đĩa tròn) bằng 0 nên momen động lượng bảo toàn.

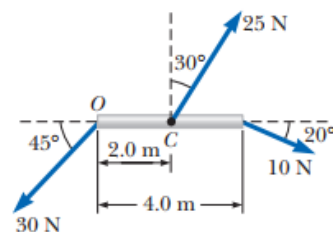
$$L_i = L_f \Leftrightarrow I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} M R^2 + m R^2\right) \omega_i = \left(\frac{1}{2} M R^2 + m r^2\right) \omega_f$$

$$\rightarrow \omega_f = \frac{\frac{1}{2} M R^2 + m R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m r^2} \omega_i = \frac{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2^2}{\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 2^2 + 60 \cdot 0,5^2} \cdot 2 = 4,1 \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

BÀI TẬP TỰ GIẢI:

1. Nguồn gốc các ngôi sao là khối khí lớn quay chậm. Trọng lực làm các khối khí này co lại, giảm kích thước. Tốc độ góc của nó thay đổi như thế nào khi nó co lại? Giải thích.
2. Tại sao với một cây sào dài giúp người đi trên dây giữ được thăng bằng?
3. Nếu tình trạng Trái đất ấm lên toàn cầu vẫn diễn ra 100 năm tiếp theo, nó sẽ làm băng ở hai cực Trái đất tan chảy và nước sẽ phân bố ở gần xích đạo hơn. (a) Điều đó làm thay đổi momen quán tính của Trái đất như thế nào? (b) Thời gian của một ngày (thời gian Trái đất quay vòng) giảm hay tăng? Giải thích.
4. Trong các cuộc đua mô tô, các tay đua lao qua các con dốc nhỏ và lúc đó mô tô lao trong không khí trong một thời gian ngắn. Nếu tay đua vẫn rờ ga tăng tốc khi vừa rời khỏi dốc và bay trong không khí, xe máy có xu hướng hướng mũi lên trên. Tại sao?
5. Tính tổng momen lực (độ lớn và phương chiều) tác dụng lên thanh như hình đối với trục vuông góc với mặt phẳng giấy và (a) Đi qua điểm O, (b) Đi qua điểm C.



ĐS: (a) $30(N.m)$ ngược chiều kim đồng hồ, (b) $36(N.m)$ ngược chiều kim đồng hồ

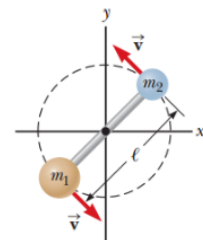
6. Một chất điểm có vị trí được biểu diễn bằng hàm vector vị trí $\vec{r} = (4\hat{i} + 6\hat{j})m$ và lực tác dụng lên nó được cho bởi $\vec{F} = (3\hat{i} + 2\hat{j})N$. (a) Tính momen lực tác dụng lên chất điểm đối với gốc O. (b) Có điểm nào khác mà momen xoắn của lực F như trên đối với điểm đó ngược chiều và có độ lớn bằng một nửa momen lực đối với điểm O? (c) Có thể có nhiều hơn một điểm như vậy không? (d) Có thể có 1 điểm như vậy nằm trên trục Oy không? (e) Có thể có nhiều hơn một điểm như vậy nằm trên trục Oy hay không? (f) Xác định vector vị trí của một điểm

ĐS: (a) $-10\hat{k}(N.m)$, (b)&(c) Có, (d) Có, (e) Không, (f) $(0; \frac{5}{4})$

7. Một chất điểm có khối lượng 5 kg và bắt đầu từ gốc tọa độ tương ứng với thời gian $t = 0$, hàm vận tốc của nó được cho bởi hàm vector $\vec{v} = 6t^2\hat{i} + 2t\hat{j}$ (m/s). (a) Tìm hàm vị trí theo thời gian. (b) Mô tả chuyển động của nó. (c) Hàm gia tốc theo thời gian, (d) Tổng lực tác dụng lên chất điểm theo thời gian, (e) Tổng momen lực đối với gốc tọa độ theo thời gian, (f) Momen động lượng của chất điểm theo thời gian, (g) Động năng của vật theo thời gian, (h) Công suất theo thời gian.

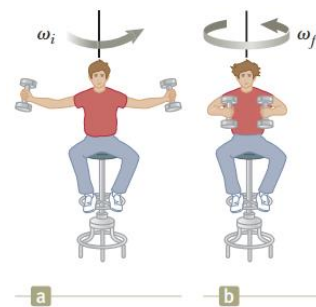
ĐS: (a) $2t^3\hat{i} + t^2\hat{j}$, (b) Nó chuyển động từ gốc tọa độ và bắt đầu di chuyển vào góc phần tư thứ nhất và tăng tốc độ nhanh hơn và nó sẽ dần dần chuyển động song song với trục Ox khi t tăng, (c) $12t\hat{i} + 2\hat{j}(m/s^2)$, (d) $60t\hat{i} + 10\hat{j}(N)$, (e) $-40t^3\hat{k}(N.m)$, (f) $-10t^4\hat{k}(kg.m^2/s)$, (g) $90t^4 + 10t^2(J)$, (h) $360t^3 + 20t$.

8. Một thanh cứng, có chiều dài là $l = 1m$ nối hai vật ở hai đầu của nó như hình với $m_1 = 4kg$ và $m_2 = 3kg$, tạo thành một hệ quay quanh tâm của thanh. Xác định momen động lượng của hệ thống đối với trục quay qua tâm của thanh khi tốc độ của vật là $5m/s$.



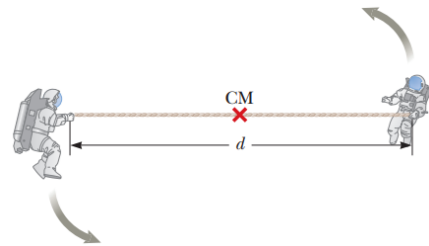
ĐS: $\vec{L} = 17,5(kg.m^2/s)\hat{k}$

9. Một học sinh ngồi trên một chiếc ghế xoay tự do hai tay của học sinh này cầm 2 quả tạ, mỗi quả tạ có khối lượng 3kg. Khi cánh tay của học sinh này mở rộng theo chiều ngang (hình a) khoảng cách từ tạ tới trục quay là 1m, học sinh quay với tốc độ góc là $0,75rad/s$. Momen quán tính của học sinh là $3kg.m^2$ và không đổi. Sau đó học sinh kéo các quả tạ lại vào trong người mình theo phương ngang cách trục quay $0,3m$ (hình b). (a) Tìm tốc độ góc mới của học sinh này. (b) Tìm động năng của hệ khi trước và sau khi học sinh kéo quả tạ vào bên trong.



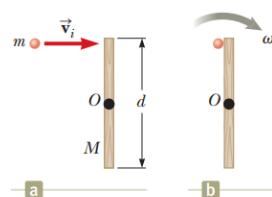
ĐS: (a) $1,91(rad/s)$, (b) $2,53(J)$, $6,44(J)$

10. Hai phi hành gia mỗi người có nặng 75kg, được nối với một sợi dây dài 10m và có khối lượng không đáng kể. Xem như họ cô lập trong không gian và quay quanh khối tâm của họ với tốc độ 5m/s. Xem như các phi hành gia là các chất điểm, tính toán: (a) độ lớn của momen động lượng của hệ hai phi hành gia và (b) động năng quay của hệ. Một phi hành gia kéo sợi dây thường để rút ngắn khoảng cách giữa hai người còn 5m. Hãy tính: (c) Momen động lượng mới của hệ, (d) tốc độ mới của phi hành gia, (e) động năng quay mới của hệ thống và (f) hóa năng dự trữ trong cơ thể của phi hành gia đã được chuyển đổi thành cơ năng của hệ khi anh ta rút ngắn sợi dây.

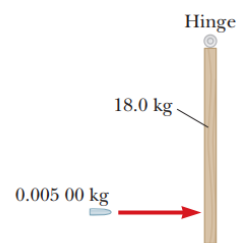


ĐS: (a) $3,75 \cdot 10^3 (kg \cdot m^2/s)$, (b) $1,88 \cdot 10^3 (J)$, (c) Không đổi, (d) 10(m/s), (e) $7,5 \cdot 10^3 (J)$, (f) $5,62 \cdot 10^3 (J)$.

11. Bắn một viên đạn có khối lượng m với tốc độ v_i về phía phải (hình a) và đâm vào đầu thanh sắt cố định có khối lượng M, chiều dài d, xoay quanh trục không đối xứng vuông góc với trang qua O (hình b) Chúng ta mong muốn xác định được tỷ số động năng thay đổi trong hệ do va chạm. (a) Trong tình huống này, hệ nào bảo toàn momen động lượng? Xác định (b) tốc độ góc ω của hệ sau va chạm và (c) sự thay đổi tỷ số động năng thay đổi do va chạm. **ĐS:** (b) $\frac{6mv_i}{d(M+3m)}$, (c) $\frac{M}{M+3m}$

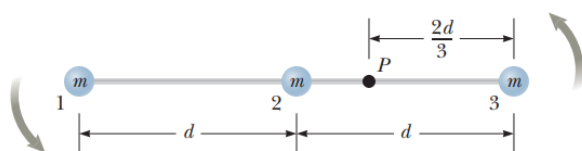


12. Một viên đạn nặng 0.005kg được bắn vào cánh cửa nặng 18kg theo phương ngang với tốc độ $10^3 m/s$, viên đạn cách đầu còn lại của cánh cửa là 10cm (như hình). Cánh cửa rộng 1m và có thể xoay quanh bản lề không ma sát. (a) Trước khi viên đạn chạm vào cánh cửa nó có momen động lượng so với trục quay của cánh cửa hay không? (b) Nếu có hãy tính giá trị của momen động lượng này, nếu không hãy giải thích. (c) Cơ năng của hệ viên đạn - cánh cửa có bảo toàn trong suốt quá trình va chạm không? (d) Cánh cửa quay ngay sau va chạm với tốc độ góc bao nhiêu? (e) Tính tổng năng lượng của hệ viên đạn - cánh cửa sau va chạm và xác định xem nó ít hơn hay bằng động năng của viên đạn trước khi va chạm.



ĐS: (a) Có, (b) $4,5 (kg \cdot m^2/s)$, (c) Không, (d) $0,749 (rad/s)$, (e) $1,68 (J)$

13. Ba vật có khối lượng bằng nhau được gắn với một thanh cứng không có khối lượng như hình. Thanh cứng đang nằm ngang, đứng yên thì bắt đầu xoay tự do trong mặt phẳng thẳng đứng với trục quay đi qua điểm P. Giả sử m và d đã biết, tìm (a) Momen quán tính của 3 vật này đối với trục quay qua P, (b) Momen lực tác động lên hệ tại $t = 0$, (c) Gia tốc góc của hệ tại $t = 0$, (d) Gia tốc tiếp tuyến của vật 3 tại $t = 0$, (e) Động năng cực đại của hệ, (f) Tốc độ góc tối đa thanh đạt được, (g) Momen động lượng cực đại của hệ, (h) Tốc độ tối đa của vật 2.



ĐS: (a) $\frac{7}{3}md^2$, (b) $mgd\vec{k}$, (c) $\frac{3g}{7d}$ ngược chiều kim đồng hồ, (d) $\frac{2}{7}g$ hướng lên trên, (e) mgd , (f) $\sqrt{\frac{6g}{7d}}$, (g) $\sqrt{\frac{14g}{3}m^2d}$, (h) $\sqrt{\frac{2gd}{21}}$

14. Hiện tượng nóng lên của Trái đất đang rất được quan tâm bởi vì ngay cả những thay đổi nhỏ trong nhiệt độ Trái đất có thể có những hậu quả đáng kể. Ví dụ, nếu những tảng băng ở hai cực của Trái đất tan chảy hoàn toàn, thì nước trong các đại dương nhiều lên và làm tràn ngập nhiều vùng duyên hải. Mô hình tảng băng ở 2 cực có khối lượng $2,3 \cdot 10^{19} kg$ và có dạng đĩa phẳng bán kính $6 \cdot 10^5 m$. Giả sử các tảng băng sau khi tan chảy sẽ tạo thành lớp vỏ hình cầu là nước bao quanh Trái đất. Hỏi độ dài ngày đêm thay đổi một lượng bao nhiêu so với hiện tại là 24 giờ/ngày? (Tính theo giây và %). Cho khối lượng trái đất là $5,972 \cdot 10^{24} kg$ và bán kính trái đất là 6731km.