Bài 7.
TÍCH PHÂN SUY RỘNG

Giảng viên: Nguyễn Lê Thi
Bộ Môn Toán – Khoa Khoa học ứng dụng

MỤC TIÊU BÀI HỌC

- Nhận dạng được hai loại tích phân suy rộng.
- Tính được giá trị của tích phân suy rộng.
- Khảo sát được sự hội tụ của tích phân suy rộng.

NỘI DUNG CHÍNH

7.1 Tích phân suy rộng loại 1

7.2 Tích phân suy rộng loại 2

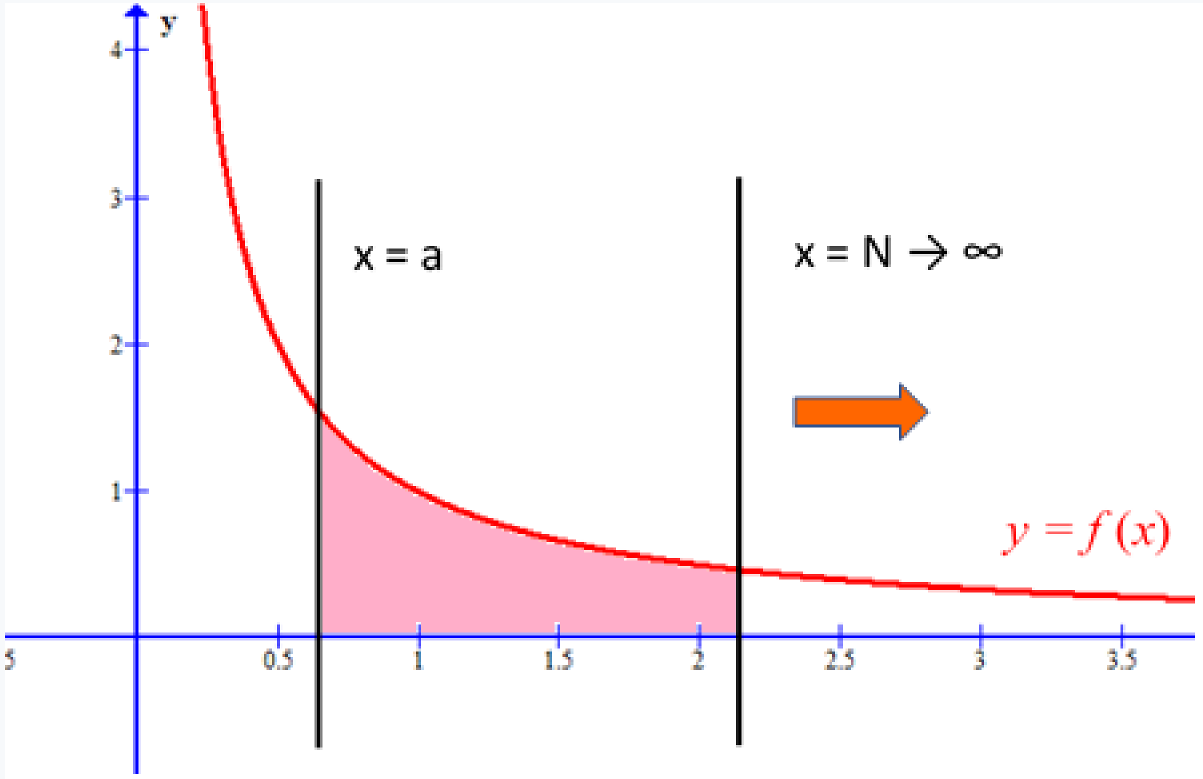
7.3 Các tiêu chuẩn hội tụ của tích phân

1. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 1

❖ Tích phân suy rộng với cận vô hạn (loại 1)

$f(x)$ liên tục với mọi x thuộc $[a, +\infty)$

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{N\to\infty}\int_a^{N} f(x)dx}$$



$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{N\to-\infty}\int_N^{b} f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Tích phân suy rộng loại 1 là hội tụ nếu giới hạn hữu hạn và phân kỳ nếu ngược lại.

Ví dụ 7.1

Tính tích phân suy rộng

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

Ví dụ 7.2

Tính tích phân suy rộng

$$I = \int_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Chú ý 1

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$$

hội tụ về $\dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha - 1}$ khi $\alpha > 1$

phân kỳ khi $\alpha \le 1$

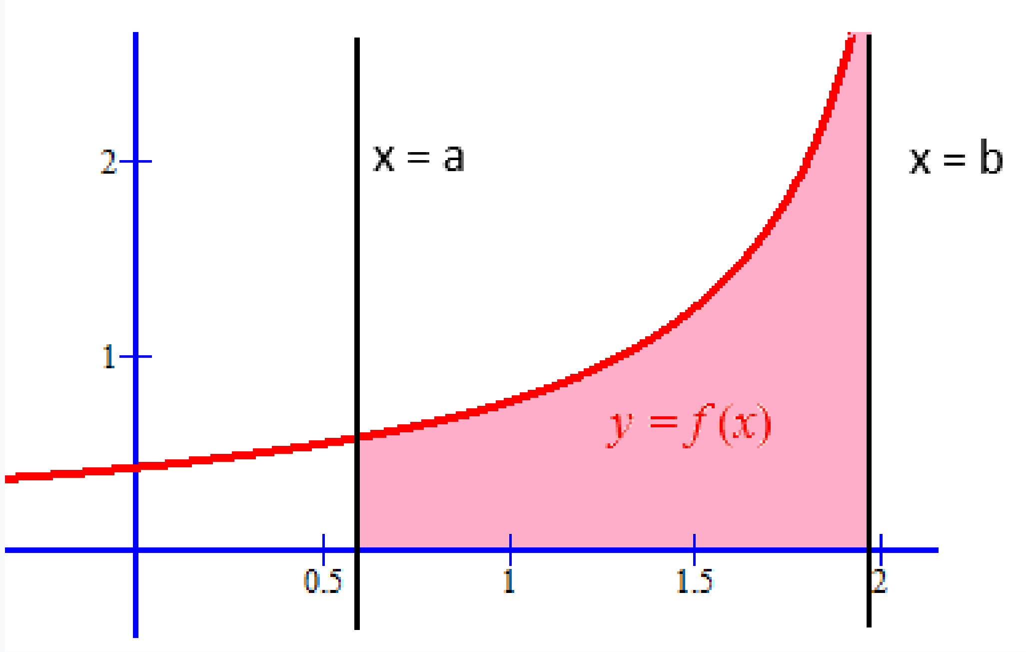
$$(a > 0)$$

2. TÍCH PHÂN SUY RỘNG LOẠI 2

❖ Tích phân suy rộng với hàm không bị chặn (loại 2)

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)dx}$$

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$$



$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Tích phân suy rộng loại 2 là hội tụ nếu giới hạn hữu hạn và phân kỳ nếu ngược lại.

Ví dụ 7.3

Tính tích phân suy rộng

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

Chú ý 2

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx$$

hội tụ về $\dfrac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ khi $\alpha < 1$

phân kỳ khi $\alpha \geq 1$

3. CÁC TIÊU CHUẨN HỘI TỤ CỦA TÍCH PHÂN

❖ Tiêu chuẩn so sánh trực tiếp

Giả sử f và g là hai hàm liên tục, không âm thỏa mãn

$f(x) \le g(x)$ với mọi $x \ge a$. Khi đó

➢ Nếu $\int_a^{\infty} g(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ cũng hội tụ.

➢ Nếu $\int_a^{\infty} f(x)dx$ phân kỳ thì $\int_a^{\infty} g(x)dx$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 7.4

Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x \sin^2 x}{x^4 + 7} dx$$

Ví dụ 7.5

Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

❖ Tiêu chuẩn so sánh giới hạn

Nếu f và g là hai hàm liên tục, không âm với mọi $x \geq a$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$

Khi đó

$$\int_a^\infty f(x)dx \quad \text{hội tụ} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^\infty g(x)dx \quad \text{hội tụ}$$

Ví dụ 7.6

Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^2} dx$$

❖ Hội tụ tuyệt đối và hội tụ có điều kiện (bán hội tụ)

- Nếu $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ tuyệt đối.

- Nếu $\int_a^{\infty} |f(x)|dx$ phân kỳ và $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ thì $\int_a^{\infty} f(x)dx$ hội tụ có điều kiện hay bán hội tụ.

Ví dụ 7.7

Xét sự hội tụ của tích phân

$$I = \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

KẾT BÀI

Sinh viên cần lưu ý:

- Sử dụng giới hạn để tính giá trị tích phân suy rộng
- Áp dụng các tiêu chuẩn so sánh và hội tụ tuyệt đối để khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng
- Đọc thêm về các hàm Hyperbolic trong giáo trình chương 7, mục 7.8.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

1. Tính giá trị của tích phân suy rộng:

a. $$\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(3x+1)^2}$$

b. $$\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$$

2. Khảo sát sự hội tụ của tích phân suy rộng:

a. $$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

b. $$\int_{0}^{3} (x-2)^{-1} dx$$

THANKS FOR WATCHING!