

Shaken Optical Lattice

Xiao Hui,Hu

2018.10.28

电磁场对原子作用力可以表示为, 这个力由原子所在处的光与原子相互作用能的梯度产生:

$$\mathbf{F} = -\nabla U(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

U 是电磁场与原子相互作用能。它与原子所在位置 \mathbf{r} 和时间 t 有关, 一般可以写成

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

这个力本质上就是电磁场的洛伦兹力 (包含电场和磁场力)。它是由不可分割的电场力 \mathbf{f}_e 和磁场力 \mathbf{f}_m 组成:

$$\mathbf{f}_e = \rho \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

$$\mathbf{f}_m = \rho \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

由于电磁场是周期振动的, 频率很高, 原子实际受到的力是对瞬间力在周期 T 取平均值:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{F}(t) dt \quad (5)$$

我们有 $\mathbf{F}_e = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 。因为在原子中 \mathbf{r} 与 \mathbf{R} 相距很小, 可对 \mathbf{E} 在 \mathbf{R} 附近展开, 所以得到 \mathbf{E} 在 O_xyz 坐标系中各个分量

$$E_i(\mathbf{r}, t) = E_i(\mathbf{R}, t) + \sum_j (r_j - R_j) \frac{\partial E_i(\mathbf{R}, t)}{\partial r_j} + \dots \quad (6)$$

$$(i, j = x, y, z)$$

我们可只取一次项, 而忽略高次项, 因为对电场

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{E e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}\}$$

的展开式按 $kr = 2\pi r/\lambda$ 的幂进行, r/λ 的最大值为原子半径与电磁场波长之比, a/λ 是约为 10^{-3} 数量级的小数。这样, 我们有

$$F_{ei}(\mathbf{R}, t) = eE_i(\mathbf{R}, t) + \sum_j e(r_j - R_j) \frac{\partial E_i(\mathbf{R}, t)}{\partial r_j} \quad (7)$$

对振动周期进行平均后, 等号右边的第一项消去为零, 第二项中的 $e(r_j - R_j)$ (即电偶极矩 p_j) 是一个表示原子内部状态的量。将偏微分算符简化, 引入

$$\partial_j E_i = \left[\frac{\partial E_i(\mathbf{r}, t)}{\partial r_j} \right]_{\mathbf{r}=\mathbf{R}},$$

得到

$$\overline{F_{ei}} = \sum_j \overline{p_j (\partial_j E_i)} \quad (8)$$

同样, 从式 4 可得

$$\mathbf{F}_m = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) \quad (9)$$

这里我们将 \mathbf{r} 换成 \mathbf{R} 。这种近似的根据是磁场力比电荷作用的电场力要小 v/c 数量级 (v 是原子运动速度, c 是光速), 高阶项就更可不考虑了。因为有

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}) &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{p} \times \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \right) \mathbf{B}(\mathbf{R}, t) \right] \end{aligned}$$

由 Maxwell 方程中 $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$; 而又因为 $\frac{d\mathbf{R}}{dt} \ll c$, 后一项可忽略。这样, 式 9 化为

$$\mathbf{F}_m = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{B}) + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (10)$$

又根据梯度算符 ∇ 的矢量运算公式

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A})$$

微分只对场起作用, 对偶极矩的微分可忽略。将式 10 展开, 简化偏微分算符, 得到

$$F_{mi} = \frac{d}{dt}(\mathbf{p} \times \mathbf{B})_i + \sum_j p_j (\partial_i E_j) - \sum_j p_j (\partial_j E_i) \quad (11)$$

按振动周期平均后第一项消去，于是有

$$\overline{F_{mi}} = \overline{\sum_j p_j(\partial_i E_j)} - \overline{\sum_j p_j(\partial_j E_i)} \quad (12)$$

式中等号右边第一项与式 8 相同。联合两式，可得洛伦兹力的 i 分量

$$\overline{F_{mi}} = \overline{\sum_j p_j(\partial_i E_j)} \quad (13)$$

对坐标的偏微分只对场起作用，所以上式的完整矢量表示可写成

$$\overline{\mathbf{F}} = \overline{\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})} \quad (14)$$

这就是式 1 和 2 的合成结果，不过 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 换成了 $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ ，而梯度算符 ∇ 只对电场起作用。式 14 表面上不含磁场，但实际上已经包含磁场作用。在量子力学中用上式可写成

$$\mathbf{F} = \langle p \nabla E \rangle = \langle p \rangle \langle \nabla_{\mathbf{R}} E(\mathbf{R}, t) \rangle \quad (15)$$

如果另电场的形式为

$$\begin{aligned} E(\mathbf{R}, t) &= E_0(\mathbf{R}) \cos[\omega t + \phi(\mathbf{R})] \\ &= E_0^+(\mathbf{R}) e^{-i\omega t} + E_0^-(\mathbf{R}) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (16)$$

其中

$$E_0^+ = \frac{1}{2} E_0(\mathbf{R}) e^{-i\phi(\mathbf{R})}, E_0^- = \frac{1}{2} E_0(\mathbf{R}) e^{i\phi(\mathbf{R})} \quad (17)$$

由于

$$\langle p \rangle = \text{tr}(\rho p) = p(\rho_{12} + \rho_{12}) \quad (18)$$

其中， ρ 为密度矩阵，并应用 $p_{12} = p_{21} = p, p_{11} = p_{22} = 0$ 。再利用旋转波近似去掉以光频高速变化的部分。为此令

$$\rho_{21}(t) = \sigma_{21}(t) e^{-i\omega t}, \rho_{12}(t) = \rho_{21}^*(t) = \sigma_{12}(t) e^{i\omega t} \quad (19)$$

为了统一，也把 ρ_{11} 、 ρ_{22} 改成

$$\rho_{11} = \sigma_{11}, \rho_{22} = \sigma_{22} \quad (20)$$

将式 19 和式 20 代入式 15，忽略以 $2\omega t$ 呈指数变化的高频项，得到

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}, t) = p(\sigma_{12} \nabla E_0^+ + \sigma_{21} \nabla E_0^-) \quad (21)$$

由于这里涉及相位问题，我们将对计算稍作变动。引入变换

$$\sigma'_{21} = \sigma_{21} e^{i\phi(\mathbf{R},t)}, \sigma'_{12} = \sigma_{12} e^{-i\phi(\mathbf{R},t)} \quad (22)$$

将上式和式 17 带入式 21 并引入拉比频率 $\Omega = pE_0(\mathbf{R})/\hbar$, 可得

$$\mathbf{F}(\mathbf{R}, t) = \hbar(u\nabla\Omega + v\Omega\nabla\phi)/2 \quad (23)$$

其中

$$u = \sigma'_{12} + \sigma'_{21}, v = -i(\sigma'_{12} - \sigma'_{21}) \quad (24)$$

再引入

$$\omega = \sigma_{22} - \sigma_{11} \quad (25)$$

得到三个参量的时间变化率公式

$$\frac{du}{dt} = (\delta + \frac{d\phi}{dt})v - \frac{\Gamma}{2}u \quad (26)$$

$$\frac{dv}{dt} = -(\delta + \frac{d\phi}{dt})u + \Omega\omega - \frac{\Gamma}{2}v \quad (27)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\Omega v - \Gamma(\omega + 1) \quad (28)$$

这是光学布洛赫方程的另一种形式，其中 u, v 代表以外电场频率振动的感生偶极矩的两个相互垂直的分量，而 ω 则表示上、下能级的原子布居差。我们只求方程的稳态解，并认为开始时原子是静止的，这样令方程组等号左边均为零，且有

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi(\mathbf{R}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla\phi \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (29)$$

可以解得

$$u = \frac{-\delta\Omega}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \quad (30)$$

$$v = \frac{-\Gamma\Omega/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \quad (31)$$

$$\omega = \frac{\delta^2 + \Gamma^2/4}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \quad (32)$$

将上述解带入到式 23，可以得到电磁场中原子所受到的力

$$\mathbf{F} = -\frac{\hbar\Omega^2}{2} \frac{(\omega - \omega_a)\nabla\Omega/\Omega + \Gamma\nabla\phi/2}{(\omega - \omega_a)^2 + (\Gamma/2)^2 + \Omega^2/2} \quad (33)$$

由上式可见，这个力由两部分组成，即 $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ ，我们把第一部分称为散射力，第二部分称为偶极力（ \mathbf{F}_1 代表单位时间内原子得到的光子总动量； \mathbf{F}_2 方向决定于电磁场的频率失谐，偶极矩和不均匀场是产生这个力的充要条件）。当原子以速度 v_0 运动时，上面有关原子受力公式中的原子中心位置 \mathbf{R} 就成为时间 t 的函数：

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{v}_0 t \quad (34)$$

现在设激光场是沿 z 轴偏振且沿 x 轴传播的驻波场：

$$E_x(x, t) = 2E_0 \cos(kx) \cos(\omega t) \quad (35)$$

这个光场的振幅是随坐标变化的，但相位处处相同， $\nabla\phi = 0$ 。因此原子受力只有偶极力部分：

$$F_2 \propto \frac{\nabla\Omega}{\Omega} = \frac{\nabla E(x, t)}{E(x, t)} \propto -\tan(kx) \quad (36)$$

在场强很小时，有 $\Omega \ll \Gamma$ 。这时，力的表达式可以简化，得到：

$$F = \frac{\hbar k \Omega^2 \delta}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \left\{ \sin(2kx) + kv_0 \frac{\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} [1 - \cos(2kx)] \right\} \quad (37)$$

在一定的光强分布下对偶极力求积分，就可以得到阱势的形式

$$U_{dip}(r) = \int_0^\infty F_2 dr \quad (38)$$

为了得到较强的势阱，要求驻波光的光强很大。设原子的速度很小，从强光修正的偶极力式 37 可以得到势阱的公式：

$$U = U_0 \cos(2kx) \quad (39)$$

式中

$$U_0 = \frac{\hbar |\delta| \Omega^2 / 2}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \quad (40)$$