# Floquet theory and quasi-energy

Xiao-Hui, HU

2019 年 4 月 17 日

Floquet 理论主要处理的是时间周期下的哈密顿量的问题。该系统的薛定谔方程为：

$$i\partial_t|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle, \quad H(t+T) = H(t) \tag{1}$$

我们这里引入 Floquet 算符和 Floquet 态，其中 floquet 算符是在一个周期内的时间演化算符。

$$F[t] = U(t+T,t), \quad F[t]|\psi(t)\rangle = |\psi(t+T)\rangle \tag{2}$$

而 Floquet 态为 Floquet 算符的本征态：

$$F[t]|\Psi_\alpha(t)\rangle = \lambda_\alpha|\Psi_\alpha(t)\rangle \tag{3}$$

因为演化算符是幺正的，因此 $\lambda_\alpha = e^{i\theta_\alpha}$ 作为相位因子。固其应满足：

$$|\Psi_\alpha(t+T)\rangle = e^{i\theta_\alpha}|\Psi_\alpha(t)\rangle \tag{4}$$

我们可对 Floquet 态取以下形式：

$$|\Psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\varepsilon_a t}|u_\alpha(t)\rangle, \quad |u_\alpha(t+T)\rangle = |u_\alpha(t)\rangle \tag{5}$$

其中 $|u_\alpha(t)\rangle$ 被称作 Floquet 模，它与哈密顿量的时间周期一致。这里可以看出 Floquet 态与 Bloch 态的相似性。它们一个为时间周期，一个为空间周期。可以验证得到该形式满足时间周期关系：

$$F[t]|\Psi_\alpha(t)\rangle = |\Psi_\alpha(t+T)\rangle = e^{-i\varepsilon_a T}|\Psi_\alpha(t)\rangle \tag{6}$$

这里 $\varepsilon_a$ 与定态中能量类似，称为准能量。将上述形式带入薛定谔方程，可以得到：

$$\{H(t) - i\partial_t\}|u_\alpha(t)\rangle = \varepsilon_\alpha|u_\alpha(t)\rangle \tag{7}$$

为了能够利用定态问题的讨论方式，我们这里决定将希尔伯特空间扩展。首先扩展能量和 Floquet 模:

$$\overline{\varepsilon}_{\alpha m}=\varepsilon_{\alpha}+m\omega,\quad |\overline{u}_{\alpha m}(t)\rangle=e^{im\omega t}|u_{\alpha}(t)\rangle \tag{8}$$

可以得出扩展后的 Floquet 态与原来类似：

$$|\Psi_{\alpha}(t)\rangle=e^{-i\varepsilon_{\alpha}t}|u_{\alpha}(t)\rangle=e^{-i\overline{\varepsilon}_{\alpha m}t}|\overline{u}_{\alpha m}(t)\rangle \tag{9}$$

不管 m 取任何值，$\{\varepsilon_{\alpha m},u_{\alpha m}\}$ 都对应同一 Floquet 态。同时，进一步引入：

$$Q(t)=H(t)-i\partial_{t} \tag{10}$$

这样可以将薛定谔方程化简为：

$$Q(t)|\overline{u}_{\alpha m}(t)\rangle=\overline{\varepsilon}_{\alpha m}|\overline{u}_{\alpha m}(t)\rangle \tag{11}$$

并且在该空间重新定义新的内积：

$$\langle\langle\overline{u}_{\alpha m}|\overline{v}_{\beta n}\rangle\rangle=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}dt\,\langle\overline{u}_{\alpha m}(t)|\overline{v}_{\beta n}(t)\rangle \tag{12}$$

这保证了不同的 m 的 Floquet 模是正交的。

对于扩展哈密顿量的矩阵形式，先选定基矢：

$$|\lambda m\rangle\rangle=|\lambda\rangle e^{im\omega t} \tag{13}$$

我们可以得到扩展哈密顿量的矩阵元：

$$\begin{aligned}\langle\langle\lambda m|Q|\xi n\rangle\rangle&=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}dte^{-im\omega t}\left\langle\lambda\left|\{H(t)-i\partial_{t}\}\right|\xi\right\rangle e^{in\omega t}\\&=\left\langle\lambda\left|H_{m-n}\right|\xi\right\rangle+m\omega\delta_{\lambda\xi}\delta_{mn}\end{aligned} \tag{14}$$

其基本结构可以表示为如下形式：

$$\left\{\begin{array}{ccccc}\ddots&&&&\iddots\\&H_{0}+\omega&H_{1}&H_{2}&\\&H_{-1}&H_{0}&H_{1}&\\&H_{-2}&H_{-1}&H_{0}-\omega&\\\iddots&&&&\ddots\end{array}\right) \tag{15}$$

这样可以通过对角化该矩阵来得到准能谱。

现假设某一系统的哈密顿如下形式：

$$\hat{H}(t)=\frac{\hat{p}^{2}}{2M}+V_{0}\cos^{2}\left(k_{L}x\right)-F_{0}\sin(\omega t) \tag{16}$$

通过欧拉变换 $\sin(\omega t)=1/(2i)\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)$，我们可以重写哈密顿量：

$$\hat{H}(t)=\sum_{m=-1}^{1}\hat{H}_{m}e^{im\omega t} \tag{17}$$

这样我们可以得到 $\hat{H}_{0}=\frac{\hat{p}^{2}}{2M}+V_{L}(x)$，且 $\hat{H}_{\pm1}=\pm F_{0}/(2i)$。这样可以利用定态形式下的解法来解决时间周期下的问题。