Shaken Optical Lattice Theoretical Backgroud

Xiao-Hui, HU

2018 年 12 月 5 日

电磁场对原子作用力可以表示为，这个力由原子所在处的光与原子相互作用能的梯度产生：

$$\boldsymbol{F} = -\nabla U(\boldsymbol{r}, t) \tag{1}$$

U 是电磁场与原子相互作用能。它与原子所在位置 $\boldsymbol{r}$ 和时间 t 有关，一般可以写成

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2}$$

这个力本质上就是电磁场的洛伦兹力（包含电场和磁场力）。它是由不可分割的电场力 $\boldsymbol{f}_e$ 和磁场力 $\boldsymbol{f}_m$ 组成：

$$\boldsymbol{f}_e = \rho \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{3}$$

$$\boldsymbol{f}_m = \rho \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) \tag{4}$$

由于电磁场是周期振动的，频率很高，原子实际受到的力是对瞬间力在周期 T 取平均值：

$$\bar{\boldsymbol{F}} = \frac{1}{T} \int_0^T \boldsymbol{F}(t) dt \tag{5}$$

我们有 $\boldsymbol{F_e} = e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$。因为在原子中 $\boldsymbol{r}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 相距很小，可对 $\boldsymbol{E}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 附近展开，所以得到 $\boldsymbol{E}$ 在 $O_x yz$ 坐标系中各个分量

$$E_i(\boldsymbol{r}, t) = E_i(\boldsymbol{R}, t) + \sum_j (r_j - R_j) \frac{\partial E_i(\boldsymbol{R}, t)}{\partial r_j} + \cdots \tag{6}$$

$$(i, j = x, y, z)$$

我们可只取一次项，而忽略高次项，因为对电场

$$E(\boldsymbol{r}, t) = Re\{Ee^{i(\omega t - \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})}\}$$

的展开式按 $kr = 2\pi r/\lambda$ 的幂进行，r/λ 的最大值为原子半径与电磁场波长之比，a/λ 是约为 10^{-3} 数量级的小数。这样，我们有

$$F_{ei}(\boldsymbol{R},t) = eE_i(\boldsymbol{R},t) + \sum_j e(r_j - R_j)\frac{\partial E_i(\boldsymbol{R},t)}{\partial r_j} \tag{7}$$

对振动周期进行平均后，等号右边的第一项消去为零，第二项中的 $e(r_j - R_j)$（即电偶极矩 p_j）是一个表示原子内部状态的量。将偏微分算符简化，引入

$$\partial_j E_i = \left[\frac{\partial E_i(\boldsymbol{r},t)}{\partial_{r_j}}\right]_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}},$$

得到

$$\overline{F_{ei}} = \overline{\sum_j p_j(\partial_j E_i)} \tag{8}$$

同样，从式??可得

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t) \tag{9}$$

这里我们将 $\boldsymbol{r}$ 换成 $\boldsymbol{R}$。这种近似的根据是磁场力比电荷作用的电场力要小 v/c 数量级 (v 是原子运动速度，c 是光速)，高阶项就更可不考虑了。因为有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}) &= \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{p}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\\ &= \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{p}\times\left[\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} + \left(\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}\cdot\nabla_{\boldsymbol{R}}\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{R},t)\right]\end{aligned}$$

由 Maxwell 方程中 $\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla\times\boldsymbol{E}$；而又因为 $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} \ll c$，后一项可忽略。这样，式??化为

$$\boldsymbol{F}_m = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{p}\times(\nabla\times\boldsymbol{E}) \tag{10}$$

又根据梯度算符 ∇ 的矢量运算公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

微分只对场起作用，对偶极矩的微分可忽略。将式??展开，简化偏微分算符，得到

$$F_{mi} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{B})_i + \sum_j p_j(\partial_i E_j) - \sum_j p_j(\partial_j E_i) \tag{11}$$

按振动周期平均后第一项消去，于是有

$$\overline{F_{mi}} = \overline{\sum_j p_j(\partial_i E_j)} - \overline{\sum_j p_j(\partial_j E_i)} \tag{12}$$

式中等号右边第一项与式??相同。联合两式，可得洛伦兹力的 i 分量

$$\overline{F_{mi}} = \overline{\sum_j p_j(\partial_i E_j)} \tag{13}$$

对坐标的偏微分只对场起作用，所以上式的完整矢量表示可写成

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \overline{\nabla(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E})} \tag{14}$$

这就是式??和??的合成结果，不过 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ 换成了 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t)$，而梯度算符 ∇ 只对电场起作用。式??表面上不含磁场，但实际上已经包含磁场作用。在量子力学中用上式可写成

$$\boldsymbol{F} = \langle p\nabla E\rangle = \langle p\rangle\langle\nabla_{\boldsymbol{R}}E(\boldsymbol{R},t)\rangle \tag{15}$$

如果另电场的形式为

$$\begin{aligned} E(\boldsymbol{R},t) &= E_0(\boldsymbol{R})\cos[\omega t+\phi(\boldsymbol{R})] \\ &= E_0^+(\boldsymbol{R})e^{-i\omega t} + E_0^-(\boldsymbol{R})e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{16}$$

其中

$$E_0^+ = \frac{1}{2}E_0(\boldsymbol{R})e^{-i\phi(\boldsymbol{R})}, E_0^- = \frac{1}{2}E_0(\boldsymbol{R})e^{i\phi(\boldsymbol{R})} \tag{17}$$

由于

$$\langle p\rangle = tr(\rho p) = p(\rho_{12}+\rho_{21}) \tag{18}$$

其中，ρ 为密度矩阵，并应用 $p_{12}=p_{21}=p, p_{11}=p_{22}=0$。再利用旋转波近似去掉以光频高速变化的部分。为此令

$$\rho_{21}(t) = \sigma_{21}(t)e^{-i\omega t}, \rho_{12}(t) = \rho_{21}^*(t) = \sigma_{12}(t)e^{i\omega t} \tag{19}$$

为了统一，也把 ρ_{11}、ρ_{22} 改成

$$\rho_{11} = \sigma_{11}, \rho_{22} = \sigma_{22} \tag{20}$$

将式??和式??代入式??，忽略以 $2\omega t$ 呈指数变化的高频项，得到

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R},t) = p(\sigma_{12}\nabla E_0^+ + \sigma_{21}\nabla E_0^-) \tag{21}$$

由于这里涉及相位问题，我们将对计算稍作变动。引入变换

$$\sigma_{21}' = \sigma_{21}e^{i\phi(\boldsymbol{R},t)}, \sigma_{12}' = \sigma_{12}e^{-i\phi(\boldsymbol{R},t)} \tag{22}$$

将上式和式??带入式??并引入拉比频率 $\Omega = pE_0(\boldsymbol{R})/\hbar$, 可得

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R},t) = \hbar(u\nabla\Omega + v\Omega\nabla\phi)/2 \tag{23}$$

其中

$$u = \sigma'_{12} + \sigma'_{21}, v = -i(\sigma'_{12} - \sigma'_{21}) \tag{24}$$

再引入

$$\omega = \sigma_{22} - \sigma_{11} \tag{25}$$

得到三个参量的时间变化率公式

$$\frac{du}{dt} = (\delta + \frac{d\phi}{dt})v - \frac{\Gamma}{2}u \tag{26}$$

$$\frac{dv}{dt} = -(\delta + \frac{d\phi}{dt})u + \Omega\omega - \frac{\Gamma}{2}v \tag{27}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\Omega v - \Gamma(\omega + 1) \tag{28}$$

这是光学布洛赫方程的另一种形式，其中 u, v 代表以外电场频率振动的感生偶极矩的两个相互垂直的分量，而 ω 则表示上、下能级的原子布居差。我们只求方程的稳态解，并认为开始时原子是静止的，这样令方程组等号左边均为零，且有

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi(\boldsymbol{R}) \cdot \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \nabla\phi \cdot \boldsymbol{v} = 0 \tag{29}$$

可以解得

$$u = \frac{-\delta\Omega}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \tag{30}$$

$$v = \frac{-\Gamma\Omega/2}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \tag{31}$$

$$\omega = \frac{\delta^2 + \Gamma^2/4}{\delta^2 + \Gamma^2/4 + \Omega^2/2} \tag{32}$$

将上述解带入到式??，可以得到电磁场中原子所受到的力

$$\boldsymbol{F} = -\frac{\hbar\Omega^2}{2}\frac{(\omega - \omega_a)\nabla\Omega/\Omega + \Gamma\nabla\phi/2}{(\omega - \omega_a)^2 + (\Gamma/2)^2 + \Omega^2/2} \tag{33}$$

由上式可见，这个力由两部分组成，即 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F_1} + \boldsymbol{F_2}$，我们把第一部分称为散射力，第二部分称为偶极力（$\boldsymbol{F_1}$ 代表单位时间内原子得到的光子总动量；$\boldsymbol{F_2}$ 方向决定于电磁场的频率失谐，偶极矩和不均匀场是产生这个力的充要

条件）。当原子以速度 v_0 运动时，上面有关原子受力公式中的原子中心位置 $\boldsymbol{R}$ 就成为时间 t 的函数：

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{v}_0 t \tag{34}$$

现在设激光场是沿 z 轴偏振且沿 x 轴传播的驻波场：

$$E_x(x,t) = 2E_0 \cos(kx)\cos(\omega t) \tag{35}$$

这个光场的振幅是随坐标变化的，但相位处处相同，$\nabla\phi = 0$。因此原子受力只有偶极力部分：

$$F_2 \propto \frac{\nabla\Omega}{\Omega} = \frac{\nabla E(x,t)}{E(x,t)} \propto -tan(kx) \tag{36}$$

在场强很小时，有 $\Omega \ll \Gamma$。这时，力的表达式可以简化，得到：

$$F = \frac{\hbar k \Omega^2 \delta}{\delta^2 + \Gamma^2/4}\left\{ sin(2kx) + kv_0 \frac{\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4}[1 - \cos(2kx)]\right\} \tag{37}$$

在一定的光强分布下对偶极力求积分，就可以得到阱势的形式

$$V_{dip}(r) = \int_0^\infty F_2 dr \tag{38}$$

为了得到较强的势阱，要求驻波光的光强很大。设原子的速度很小，从强光修正的偶极力式**??**可以得到势阱的公式：

$$V = \frac{v_0)}{2}\cos(2kx) \tag{39}$$

式中势阱深度 V_0 与激光光强成正比。

两束相向的激光可以有两种方法实现，第一，将一束激光分裂成两束；第二，通过镜子反射激光。前者很有可能在两束激光之间产生频率差 $\Delta\nu t$，如：

$$\begin{aligned} E_1(x,t) &= E_0\cos(kx+\omega t+\Delta\nu t) \\ E_2(x,t) &= E_0\cos(kx-\omega t) \end{aligned} \tag{40}$$

则，合成光场为：

$$E(x,t) = 2E_0\cos(kx+\frac{\Delta\nu}{2}t)\cos(\omega t+\frac{\Delta\nu}{2}t) \tag{41}$$

如果分裂光束差距 $\Delta\nu(t)$，则整个晶格会以速度 $v(t) = d_L\Delta\nu(t)$ 移动或振动。其中 $d_L = \pi/k$。因此在实验坐标系下势阱的形式为：

$$V_{lab}(x,t) = \frac{V_0}{2}\cos(2k[x-X_0(t)]) \tag{42}$$

其中，

$$X_0(t) = d_L\int_0^t d\tau\Delta\nu(\tau) \tag{43}$$

如果通过镜面反射也可以改变 $X_0(t)$ 的形式来达到晶格振动的目的。那么原子在振动光晶格中的哈密顿量为：

$$H_{lab}(t) = \frac{p^2}{2M} + V_{lab}(x,t) \tag{44}$$

利用幺正变换可将哈密顿形式转化为下列形式：

$$H = H_0 + H_1 \tag{45}$$

其中

$$H_0 = \frac{p^2}{2M} + \frac{V_0}{2}\cos(2kx) \tag{46}$$

$$H_1 = -F(t)x \tag{47}$$

作为外力，

$$\begin{aligned} F(t) &= -M\ddot{x} \\ &= -M\frac{\partial v}{\partial t} \\ &= -Md_L\frac{\Delta\nu}{\Delta t} \end{aligned} \tag{48}$$

现假设 $\Delta\nu = \Delta\nu_{max}\sin(\omega t)$，则我们可以得到外力情况为：

$$\begin{aligned} F(t) &= Md_L\frac{d}{dt}[\Delta\nu_{max}\sin(\omega t)] \\ &= Md_L\omega\Delta\nu_{max}\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{49}$$