8 Anwendungen des bestimmten Integrales

8.1 Flächen und Volumen

In Kapitel 5 haben wir die Fläche unter einem Graphen mit Hilfe eines bestimmten Integrales berechnet. Wir leiteten dieses Integral her, indem wir die Fläche in dünne Streifen unterteilten, die Riemannsumme bestimmten und dann von dieser den Grenzwert berechneten. In diesem Abschnitt werden wir weitere Flächen wie auch Volumen mit Hilfe von bestimmten Integrales berechnen. Dabei gehen wieder gleich vor wie bei der Fläche unterhalb eines Graphen: wir unterteilen die Fläche oder Volumen in bekannte Grössen und bilden dann die Riemannsumme.

8.1.1 Flächenberechnung durch Streifenbildung

Beispiel 1:

Wir verwenden horizontale Schnitte um die Fläche des gleichschenkligen Dreieckes in Abbildung 8.1 links zu bestimmen.

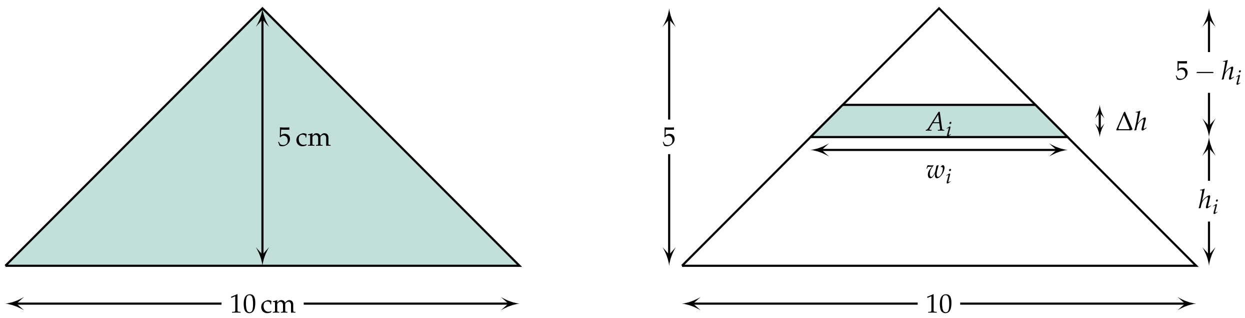

Abbildung 8.1: Gleichschenkliges Dreieck mit horizontalen Schnitten

Lösung. Natürlich brauchen wir hier kein Integral um die Fläche zu bestimmen. Wir verwenden einfach die bekannte Dreiecksformel (Grundlinie mal Höhe durch 2):

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5 = 25\,\text{cm}$$

Wir wollen hier die Fläche mit einem bestimmten Integral berechnen, um die Vorgehensweise für die Bildung von bestimmten Integralen kennenzulernen. Mit Integralen können wir dann auch Flächen berechnen, wo noch keine Formel vorhanden ist.

Um die Fläche mit einem bestimmten Integral zu berechnen, unterteilen wir die Fläche in horizontale Streifen (siehe Abbildung 8.1 rechts). Ein typischer Streifen A_i ist *näherungsweise* ein Rechteck mit der Länge w_i und die Breite Δh. Für die Flächeninhalt dieses Streifen gilt dann:

$$A_i \approx w_i \Delta h \text{ cm}^2$$

Damit in diesem Ausdruck nur noch eine Variable vorkommt, müssen wir w_i irgendwie durch h_i ausdrücken. Wegen dem (zweiten) Strahlensatz gilt:

$$\frac{w_i}{10} = \frac{5 - h_i}{5} \quad \Rightarrow \quad w_i = 2(5 - h_i) = 10 - 2h_i$$

Summieren wir die Flächen dieser Streifen auf, so erhalten wir die Riemannsumme als Approximation der Fläche:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta h = \sum_{i=1}^{n} (10 - 2h_i)\Delta h$$

Lassen wir $n \to \infty$ streben, so strebt $\Delta h \to 0$ und wir erhalten das Integral

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (10 - 2h_i)\Delta h = \int_0^5 (10 - 2h) \, \mathrm{d}h$$

Dieses Integral können wir nun auswerten:

$$A = \int_0^5 (10 - 2h) \, \mathrm{d}h = (10h - h^2) \Big|_0^5 = 25 \, \mathrm{cm}^2$$

Dies ist natürlich die schon anfangs berechnete Dreiecksfläche. □

Bemerkung:

Die Grenzen des bestimmten Integrales sind die Grenzen für die Variable h. Als wir uns entschieden haben, die Fläche in horizontale Streifen mit der Dicke Δh zu unterteilen, stand fest, dass h die Integrationsvariable ist und die Grenzen müssen demnach Werte von h sein.

Beispiel 2:

Wir verwenden wieder horizontale Streifen um die Fläche des Halbkreise mit Radius 7 cm in Abbildung 8.2 links als Integral darzustellen.

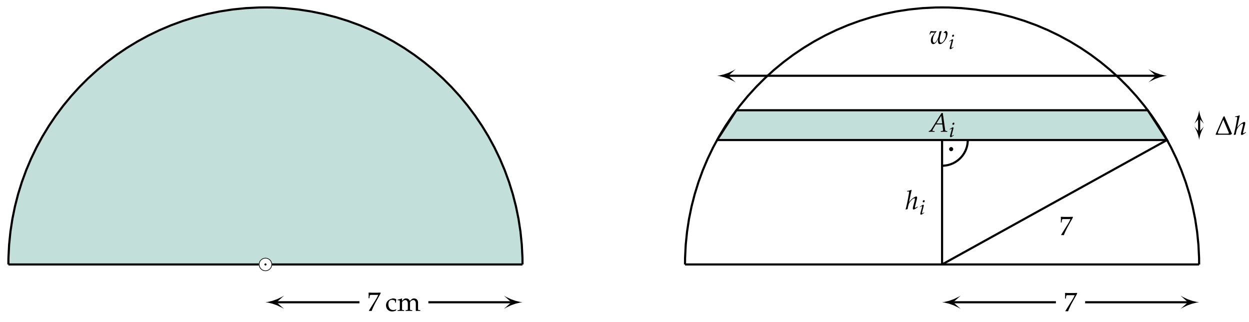

Abbildung 8.2: Halbkreis mit horizontalen Schnitten

Lösung. Wie in Beispiel 1 brauchen wir hier die Integralrechnung an sich nicht, da wir die Flächenformel für den Kreis mit gegebenen Radius kennen. Die Fläche des Halbkreises ist dann die Hälfte des Kreises:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{49}{2}\pi \text{ cm}^2 = 76.97\,\text{cm}^2$$

Es ist hier aber wieder aufschlussreich die Integralrechnung anzuwenden. Wir zerlegen die Fläche wieder in horizontale Streifen. Ein typischer Streifen A_i in Höhe h_i hat dann die Länge w_i und die Dicke Δh. Ist der Streifen dünn, so ist dieser angenähert wieder ein Rechteck mit den entsprechenden Seiten w_i und Δh:

$$A_i \approx w_i \Delta h$$

Wir wollen wieder die Variable w_i durch h_i ausdrücken. Dies erreichen wir in diesem Fall mit dem Satz von Pythagoras:

$$h_i^2 + \left(\frac{w_i}{2}\right)^2 = 7^2 \quad \Rightarrow \quad w_i = \sqrt{4(7^2 - h_i^2)} = 2\sqrt{49 - h_i^2}$$

Summieren wir diese Streifen auf, so erhalten wir mit den Approximationen die Riemannsumme, die die Fläche approximiert:

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta h = \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{49 - h_i^2}\,\Delta h$$

Für $n \to \infty$ wird $\Delta h \to 0$ und wir erhalten das bestimmte Integral

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\sqrt{49 - h_i^2}\,\Delta h = \int_0^7 2\sqrt{49 - h^2}\,\mathrm{d}h$$

Die exakte Berechnung dieses Integrales ist recht schwierig. Mit dem Taschenrechner erhalten wir

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(h\sqrt{49 - h^2} + 49 \arcsin\left(\frac{h}{7}\right)\right) \Big|_0^7 = 76.97\,\text{cm}^2$$

was mit unserem anfangs berechneten Wert übereinstimmt.

Bemerkung:

Wir hätten diesen Halbkreis auch als Fläche unter dem Graphen der Funktion

$$f(x) = \sqrt{49 - x^2}$$

interpretieren können. Die Fläche ergibt dann

$$A = \int_{-7}^{7} \sqrt{49 - x^2}\,\mathrm{d}x = 76.97\,\text{cm}^2$$

Man beachte jeweils die verschiedenen Integrationsgrenzen. □

8.1.2 Volumenberechnung mittels Scheibenbildung

Um die ein Volumen mit Hilfe von Riemannsummen zu berechnen, zerlegen wir den Körper in Scheiben, deren Volumen wir einfach berechnen können.

Diese Zerlegung durch Scheiben machen wir so einfach wie möglich. Bei einem Kegel wählen wir die Schnitte senkrecht zur Achse, womit kreisförmige Scheiben erhalten, die wir näherungsweise durch Zylinderscheiben approximieren.

Beispiel 3:

Wir verwenden horizontale Scheiben um das Volumen des Kegel in Abbildung 8.3 links zu bestimmen.

Lösung. Jede Scheibe ist kreisförmig und hat eine Dicke von Δh (siehe Abbildung 8.3). Die Scheibe in der Höhe h_i über der Grundfläche hat den Radius $r_i = \frac{1}{2}w_i$. Aus Abbildung 8.3 rechts und Beispiel 1 erhalten wir für den Radius r_i

$$w_i = 10 - 2h_i \quad \Rightarrow \quad r_i = 5 - h_i$$

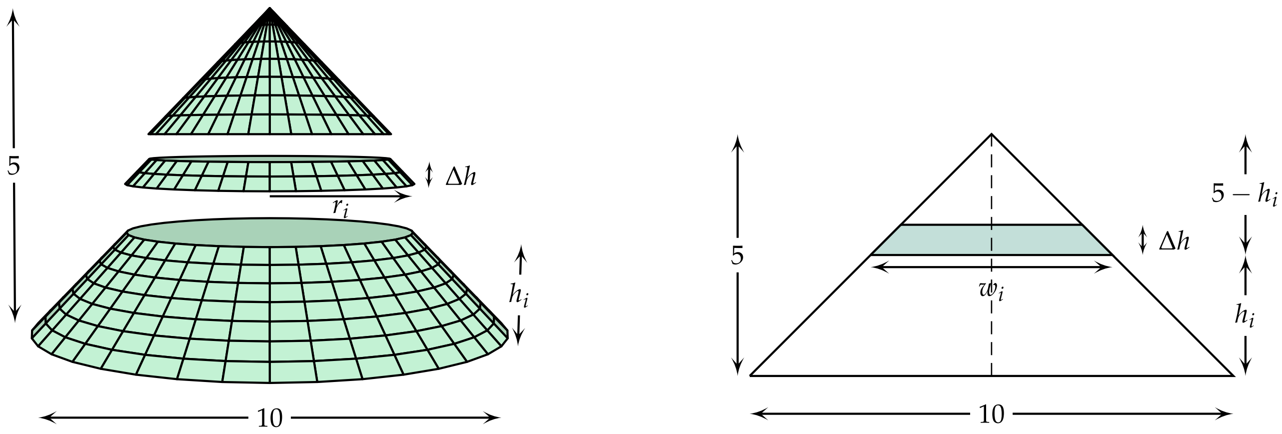

Abbildung 8.3: Horizontale Scheiben beim Kegel

Jede Scheibe V_i ist angenähert ein Zylinder mit Radius r_i und Höhe Δh. Für das Volumen dieser Scheibe erhalten wir

$$V_i = \pi r_i^2 \Delta h \approx \pi(5 - h_i)^2 \Delta h$$

Summieren wir über alle Scheiben, so erhalten wir mit den Approximationen eine Riemannsumme, die das Volumen des Kegels approximiert:

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(5 - h_i)^2 \Delta h$$

Wir führen wieder den Grenzübergang $n \to \infty$ (entsprechend $\Delta h \to 0$) durch:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi(5 - h_i)^2 \Delta h = \int_0^5 \pi(5 - h)^2 \, \mathrm{d}h$$

Das Integral kann mit Substitution $u = 5 - h$ oder durch ausmultiplizieren von $(5 - h)^2$ gelöst werden. Mit Substitution erhalten wir

$$V = \int_0^5 \pi(5 - h)^2 \, \mathrm{d}h = -\frac{\pi}{3}(5 - h)^3 \Big|_0^5 = \frac{135}{3}\pi \text{ cm}^3$$

Auch dieses Volumen hätten wir mit der Volumenformel für Kegel erhalten. □

Bemerkung:

Die Summennotation $\sum$ ist immer über alle Streifen. Um die Schreibweise zu vereinfachen, lassen wir von nun an die Summationsgrenzen weg, da die Summation ein Zwischenschritt und der schlussendliche Ausdruck ein bestimmtes Integral ist.

Beispiel 4:

Wir bestimmen mit Hilfe der Integralrechnung das Volumen der Halbkugel mit dem Radius 7 cm in Abbildung 8.4.

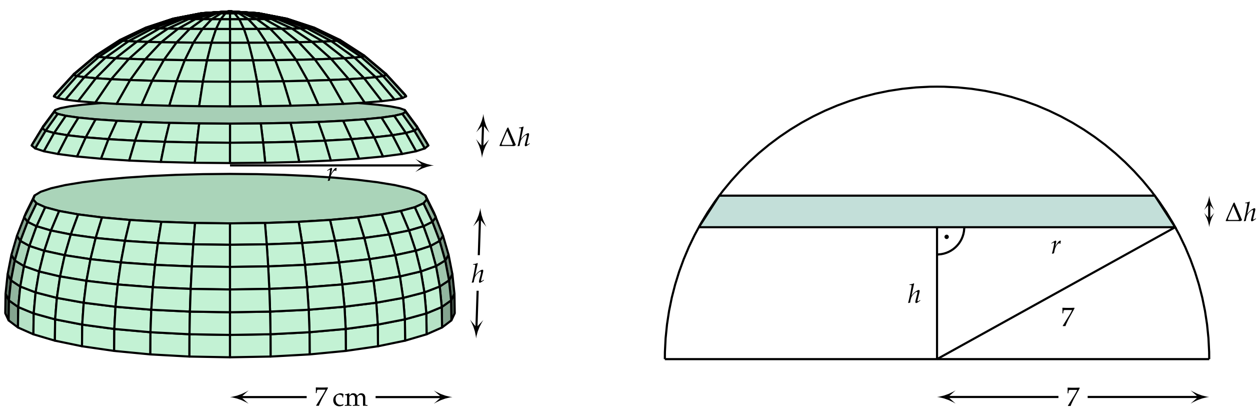

Abbildung 8.4: Horizontale Scheiben zur Bestimmung des Volumens der Halbkugel

Lösung. Auch hier könnten wir die Formel $\frac{4}{3}\pi r^3$ für das Volumen der Kugel verwenden. Wir wollen dies aber mit Integralrechnung versuchen, da die Volumenberechnung mit Integralen auch funktioniert, wenn keine Formel vorhanden ist. Wir können unser Verfahren auch als Herleitung der Formel betrachten.

Wir zerlegen die Halbkugel wieder horizontal in Scheiben mit der Dicke Δh. Jede Scheibe ist angenähert ein Zylinder mit Radius r und Höhe Δh, wobei für r aus Beispiel 2

$$r = \sqrt{49 - h^2}$$

Für das Volumen ΔV dieser Scheibe erhalten wir dann

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta h = \pi(7^2 - r^2)\Delta h$$

Summieren wir über alle Scheiben, so erhalten wir eine Riemannsumme, die das Volumen der Halbkugel approximiert:

$$V = \sum \Delta V \approx \sum \pi(49 - h^2)\Delta h$$

Für $\Delta h \to 0$ erhalten wir das bestimmte Integral:

$$V = \int_0^7 (49 - h^2)\ \mathrm{d}h$$

wobei h von 0 bis 7 variiert. Wir werten das Integral noch aus:

$$V = \int_0^7 (49 - h^2)\ \mathrm{d}h = \pi \left(49h - \frac{1}{3}h^3\right) \Big|_0^7 = 718.4\,\mathrm{cm}^3 \qquad \square$$

Beispiel 5:

Die Cheopspyramide hat eine quadratische Grundfläche mit Seitenlänge 230 m und einer Höhe von 125 m. Wie gross ist das Volumen dieser Pyramide?

Lösung. Wir zerlegen die Pyramide in horizontale quadratische Scheiben mit der Dicke Δh (siehe Abbildung 8.5). Die unterste Scheibe hat als Grundfläche ein Quadrat

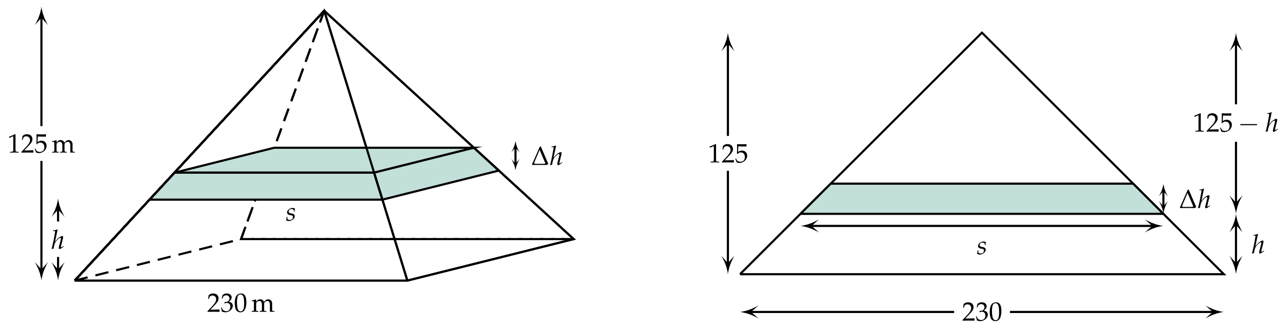

Abbildung 8.5: Querschnitt der Pyramide mit s und h

mit Seitenlänge 230 m, die angenähert ein Quader ist. Das Volumen ist dann ungefähr $230^2 \cdot \Delta h\ \mathrm{m}^3$. Je weiter oben in der Pyramide, umso kürzer werden die Quadratseiten der Scheiben. Für jede dieser Scheiben mit Seitenlänge s und Höhe Δh in der Höhe h gilt dann für das Volumen

$$\Delta V \approx s^2 \Delta h$$

Wir drücken nun s durch die Variable h aus. Aus dem 2. Strahlensatz (oder Ähnlichkeit in Dreiecken) erhalten wir

$$\frac{s}{230} = \frac{125 - h}{125}$$

was wir nach s auflösen

$$s = \frac{230}{125}(125 - h)$$

Wir summieren wieder über alle Scheiben

$$V = \sum s^2 \Delta h \approx \sum \left(\frac{230}{125}(125 - h) \right)^2 \Delta h$$

Mit $\Delta h \to 0$ erhalten wir das bestimmte Integral:

$$V = \int_0^{125} \left(\frac{230}{125}(125 - h) \right)^2 \, \mathrm{d}h \approx 2.2\,\text{Mio m}^3$$

Auch hier stimmt das Resultat mit der Pyramidenformel überein. □

8.2 Anwendung auf die Geometrie

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir Volumen mittels Scheibenbildung und bestimmten Integrale berechnet. In diesem Abschnitt werden wir diese Methode anwenden, um das Volumen von komplizierteren Körpern sowie Längen von Kurven zu berechnen. Die Methode lässt sich in folgenden Schritten zusammenfassen:

Berechnung von Volumen und Längen unter Verwendung von Integralen

- Wir unterteilen den Körper (oder die Kurve) in kleine Stücke, deren Volumen (oder Längen) wir einfach approximieren können.
- Wir addieren die Volumen (oder Längen) all dieser Stücke zu einer Riemannsumme, die das gesamte Volumen (oder die Länge) approximieren.
- Wir lassen die Anzahl Stücke dieser Summe gegen Unendlich streben und erhalten das bestimmte Integral für das gesamte Volumen (oder die Länge).

8.2.1 Rotationsvolumen

Wir können einen Körper mit kreisförmigen Querschnitt bilden, indem wir ein Gebiet in der Ebene um eine Gerade rotieren. Auf diese Weise erhalten wir ein *Rotationsvolumen*.

Beispiel 1:

Das Gebiet, dass durch den Graphen von $y = \mathrm{e}^{-x}$ und der $x-$Achse zwischen $x = 0$ und $x = 1$ begrenzt wird, lassen wir um die $x-$Achse rotieren. Wie gross ist das Volumen dieses Körpers?

Lösung. Wir schneiden den Körper senkrecht zur $x-$Achse und erhalten kreisförmige Scheiben der Dicke Δx (siehe Abbildung 8.6). Der Radius r dieser Scheibe ist

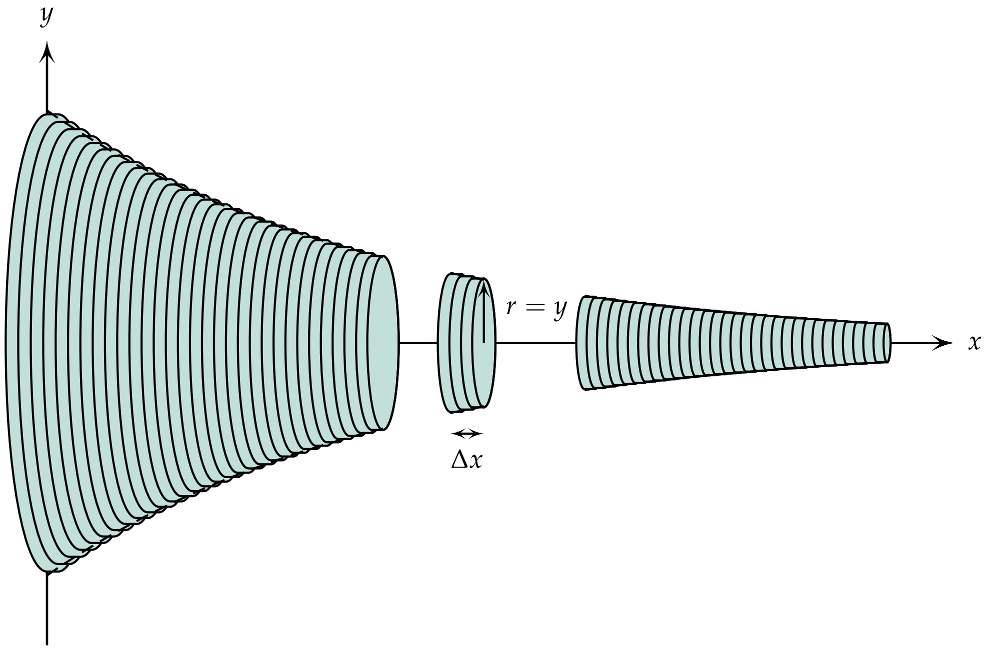

Abbildung 8.6: Ein dünner Streifen um die x-Achse rotiert bildet eine kreisförmige Scheibe

$y = \mathrm{e}^{-x}$ und damit erhalten wir für das Volumen ΔV dieser Scheibe (approximiert durch eine Zylinderscheibe):

$$\Delta V \approx \pi y^2 \Delta x = \pi(\mathrm{e}^{-x})^2 \Delta x$$

Für das gesamte Volumen gilt dann:

$$V = \sum \Delta V \approx \sum \pi(\mathrm{e}^{-x})^2 \Delta x$$

Strebt die Dicke Δx der Scheiben gegen 0, so erhalten wir

$$V = \int_0^1 \pi(\mathrm{e}^{-x})^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x} \,\mathrm{d}x = \pi \left(-\frac{1}{2}\right) \mathrm{e}^{-2x} \Big|_0^1 = \pi \left(-\frac{1}{2}\right) (\mathrm{e}^{-2} - \mathrm{e}^0) \approx 1.36$$

□

Beispiel 2:

Ein Tischbein in Abbildung 8.7 hat einen kreisförmigen Querschnitt mit Radius r cm

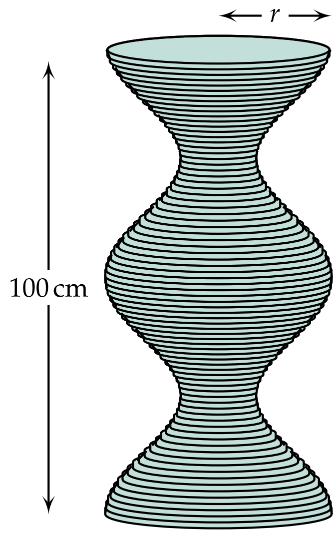

Abbildung 8.7: Ein Tischbein

in der Höhe y cm über dem Boden gegeben durch

$$r = 3 + \cos\frac{\pi y}{25}$$

Wie gross ist das Volumen des Tischbeines?

Lösung. Das Tischbein wird durch eine Rotation von $r = 3 + \cos\frac{\pi y}{25}$ um die $y-$Achse erzeugt. Durch horizontale Schnitte erhalten wir kreisförmige Scheiben der Dicke Δx und dem Radius $r = 3 + \cos\frac{\pi y}{25}$, die wir wieder durch Zylinderscheiben approximieren. Für das Volumen ΔV einer Scheibe erhalten wir

$$\Delta V \approx \pi r^2 \Delta y = \pi\left(3 + \cos\frac{\pi y}{25}\right)^2 \Delta y$$

Summieren wir über alle Scheiben, so erhalten wir die Riemannsumme

$$V = \sum \Delta V \approx \sum \pi\left(3 + \cos\frac{\pi y}{25}\right)^2 \Delta y$$

Für den Grenzwert falls $\Delta \to 0$ erhalten wir das bestimmte Integral

$$V = \lim_{\Delta y \to 0} \sum \pi\left(3 + \cos\frac{\pi y}{25}\right) \Delta y = \int_0^{100} \pi\left(3 + \cos\frac{\pi y}{25}\right)^2 \, dy$$

Dieses Integral mit dem Taschenrechner ausgewertet ergibt

$$V = \int_0^{100} \pi \left(3 + \cos \frac{\pi y}{25}\right)^2 \, \mathrm{d}y = 2984.5\,\mathrm{cm}^3 \qquad \square$$

Beispiel 3:

Das Gebiet begrenzt durch die Graphen von $y = x$ und $y = x^2$ werden um die Gerade $y = 3$ rotiert. Wie gross ist das Volumen des entstehenden Körpers?

Lösung. Der Körper hat die Form einer Schüssel ohne Boden (siehe Abbildung 8.8 links). Das Volumen berechnen wir, indem wir den Körper senkrecht zur $x-$Achse

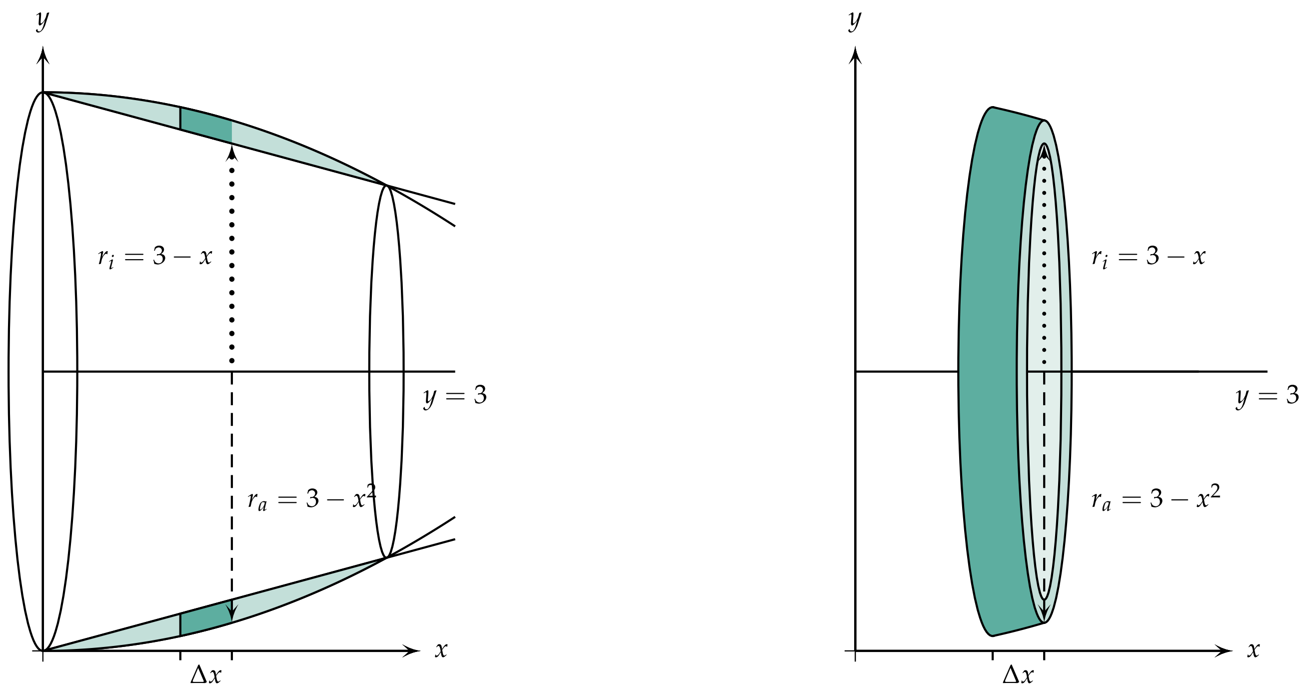

Abbildung 8.8: Aufgeschnittenes Volumen und eine Scheibe

in vertikale kreisförmige Ringscheiben der Dicke Δx unterteilen (siehe Abbildung 8.8 rechts), die wir durch einen Hohlzylinder approximieren. Der äussere Kreis hat den Radius

$$r_a = 3 - x^2$$

und für den inneren Radius gilt

$$r_i = 3 - x$$

Für das Volumen ΔV erhalten wir dann

$$\Delta V \approx \pi r_a^2 \Delta x - \pi r_i^2 \Delta x = \pi(3 - x^2)^2 \Delta x - \pi(3 - x)^2 \Delta x$$

Näherungsweise gilt dann für das gesamte Volumen:

$$V = \sum \pi(r_a^2 - r_i^2)\Delta x \approx \sum \pi((3 - x^2)^2 - (3 - x)^2)\Delta x = \pi \sum (6x - 7x^2 + x^4)\Delta x$$

Für $\Delta x \to 0$ erhalten wir das bestimmte Integral. Da sich $y = x$ und $y = x^2$ in den Stellen $x = 0$ und $x = 1$ schneiden, sind dies gerade auch die Integrationsgrenzen:

$$V = \pi \int_0^1 (6x - 7x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x = \pi \left(3x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) \Bigg|_0^1 \approx 2.72 \qquad \square$$

8.2.2 Bogenlänge

Mit einem bestimmten Integral können wir auch die ***Bogenlänge*** oder die Länge einer Kurve bestimmen. Um die Länge der Kurve von $y = f(x)$ von $x = a$ und $x = b$ mit $a < b$, also die Länge der Kurve zwischen den Punkten P_1 und P_2 in Abbildung 8.9 zu berechnen, teilen wir die Kurve in kleine Stücke auf, die annähernd Strecken sind.

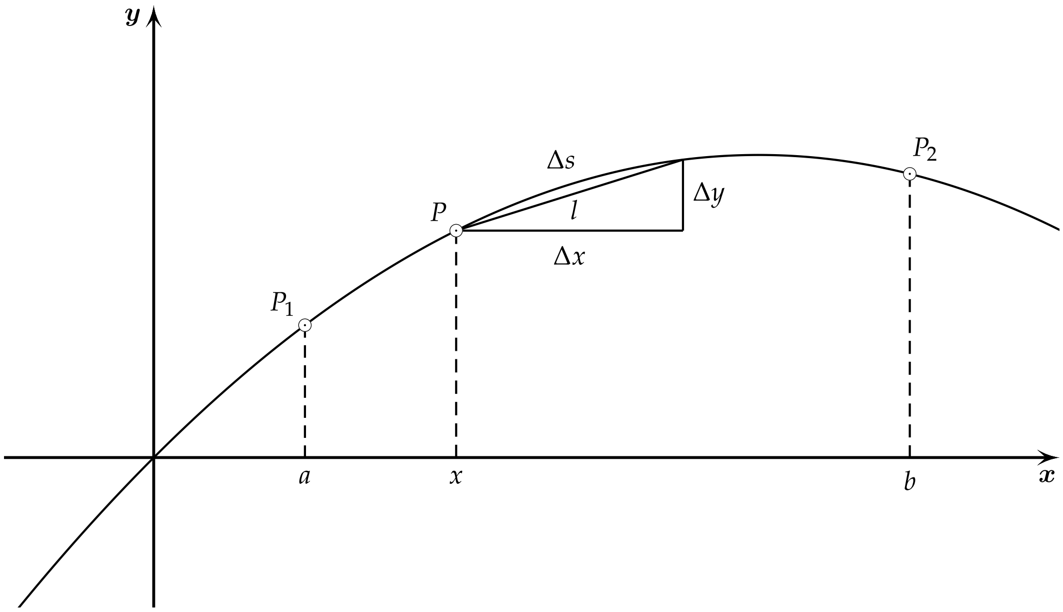

Abbildung 8.9: Linienelement, Bogenlänge

Abbildung 8.9 zeigt, dass eine kleine Änderung Δx eine kleine Änderung

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x \qquad \text{weil} \qquad f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

bewirkt. Die Länge der Kurve Δs ist dann annähernd der Länge l der Strecke in Abbildung 8.9

$$\Delta s \approx l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x)\Delta x)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\Delta x$$

Damit wird die gesamte Länge s durch die Riemannsumme

$$s \approx \sum \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\Delta x$$

approximiert. Da x zwischen a und b variiert, erhalten wir für $\Delta x \to 0$ das bestimmte Integral

Für $a < b$ ist die Bogenlänge s der Kurve $y = f(x)$ von $x = a$ und $x = b$ gegeben durch

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Beispiel 4:

Wie gross die Länge der Kurve $y = x^3$ zwischen $x = 0$ und $x = 5$?

Lösung. Für $f(x) = x^3$ gilt $f'(x) = 3x^2$ und wir erhalten mit der Formel

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Obwohl wir diese Formel einfach aufstellen können, ist die exakte Bestimmung des Integrales nur sehr schwierig oder gar unmöglich. Mit dem Taschenrechner erhalten wir

$$s = \int_0^5 \sqrt{1 + (3x^2)^2}\,\mathrm{d}x \approx 125.6$$

Vergleichen wir dies mit der Streckenlänge durch $(0,0)$ und $(5,125)$. Da die Kurve durch diese beiden Punkte geht, muss die Bogenlänge s mindestens die Länge dieser Strecke haben:

$$l = \sqrt{5^2 + 125^5} \approx 125.10$$

(siehe Abbildung 8.10). □

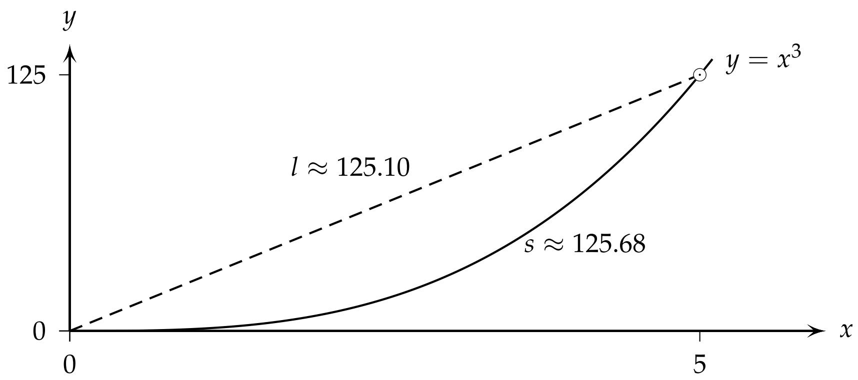

Abbildung 8.10: Bogenlänge von $y = x^3$ (nicht massstäblich)

Bogenlänge einer parametrisierten Kurve

Ein Teilchen, dass sich in der Ebene mit den Parametergleichungen

$$x = f(t) \qquad \text{und} \qquad y = g(t)$$

bewegt, hat zur Geschwindigkeit t die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

Wir können die zurückgelegte Strecke s entlang der Kurve zwischen $t = a$ und $t = b$ bestimmen, indem wir über die Schnelligkeit integrieren:

$$s = \int_a^b v(t)\, dt$$

Falls das Teilchen nie stoppt oder die Richtung ändert in der Bewegung entlang der Kurve, dann ist die Distanz gleich der zurückgelegten Strecke:

Falls eine Kurve durch differenzierbare Parametergleichungen für $a \leq t \leq b$ gegeben ist und falls die Geschwindigkeit in $a < t < b$ nie gleich 0 ist, dann gilt für die Länge der Kurve s:

$$s = \int_a^b v(t)\, dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Beispiel 5:

Wie gross ist der Umfang u der Ellipse, die durch die Parametergleichungen

$$x = 2\cos 2t \qquad \text{und} \qquad y = \sin t \qquad \text{für} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

gegeben ist.

Lösung. Nach obiger Formel gilt

$$\begin{aligned} u &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (\cos t)^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2 t + \cos^2 t} \\ &\approx 9.69 \end{aligned}$$

Der numerische Wert wurde mit dem Taschenrechner bestimmt. □