Metodi Matematici per il Machine Learning

Davide Peccioli

a.a. 2024-25

Indice

Parte I

De Rossi

Capitolo 1

Reti Neurali

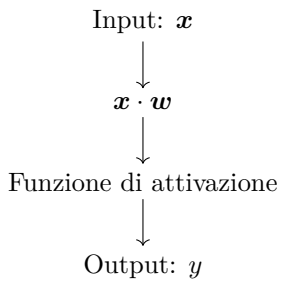
1.1 Neurone Artificiale

Un neurone è una cellula del corpo umano che può essere schematizzata come segue:

> A neuron is a cell which consists of the following parts: dendrites, axon,and body-cell. The synapse is the connection between the axon of one neuron and the dendrite of another. The functions of each part is briefly described below:
>
> - Dendrites are transmission channels that collect information from the axons of other neurons. The signal traveling through an axon reaches its terminal end and produces some chemicals x_i which are liberated in the synaptic gap. These chemicals are acting on the dendrites of the next neuron either in a strong or a weak way. The connection strength is described by the weight system w_i-
>
> - The body-cell collects all signals from dendrites. Here the dendrites activity adds up into a total potential and if a certain threshold is reached, the neuron fires a signal through the axon. The threshold depends on the sensitivity of the neuron and measures how easy is to get the neuron to fire.
>
> - The axon is the channel for signal propagation. The signal consists in the movement of ions from the body-cell towards the end of the axon. The signal is transmitted electrochemically to the dendrites of the next neuron.

Matematicamente, quindi, si considera un neurone come una unità che riceve degli input (un vettore $\boldsymbol{x}$), lo moltiplica per un vettore di pesi $\boldsymbol{w} = (w_0, \ldots, w_n)$, somma un certo bias, e produce un output

processando il prodotto scalare tramite una funzione di attivazione:

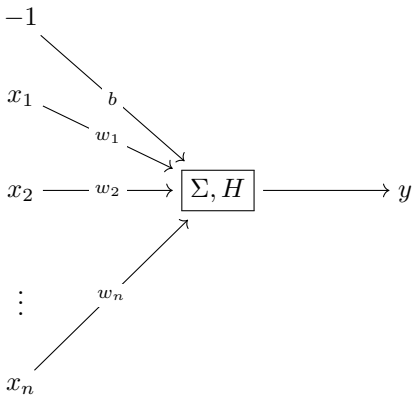


1.1.1 Neurone Sigma-Heaviside

Il modello più semplice è quello che riceve degli input, li somma dopo averli moltiplicati per dei pesi, e:

- restituisce 0 se la somma così ottenuta non supera un treshold b;
- restituisce 1 se la somma così ottenuta è maggiore o uguale a b.

Questo viene schematizzato in questo modo:



e l'output y è dato da[1]

$$y = H\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\, w_i\right)$$

dove per convenzione si è posto $w_0 = b$ e $x_0 = -1$.

La convenzione è per semplicità di notazione, infatti

$$H\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\, w_i\right) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i\, w_i \geq b \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i\, w_i < b \end{cases}$$

[1] La funzione $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è la Funzione di Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

1.1.2 Regressione Lineare

Un altro esempio di neurone è quello che approssima[2] una funzione continua

$$f : K \to \mathbb{R}$$

con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto.

L'input del neurone sarà una n-upla $X = (x_1, \dots, x_n) \in K$, mentre l'output sarà la funzione lineare

$$L(X) = b + \sum_{i=1}^{n} a_i \, x_i$$

Per semplicità si considera l'approssimazione vicino allo zero, e si suppone che

$$L(0) = f(0) = 0$$

(a meno di traslazione verticale per $f(0)$).

Si vuole quindi minimizzare

$$C(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \left\| f - L \right\|_{L^2} = \frac{1}{2} \int_K \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - f(X) \right)^2 \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

calcolandone il gradiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial a_k} &= \int_K x_k \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i - f(X) \right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i \int_K x_i x_k \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n - \int_K x_k f(X) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n \end{aligned}$$

e dunque, posti

$$\rho_{ij} \coloneqq \int_K x_i x_j \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n, \qquad m_k \coloneqq \int_K x_k f(X) \, \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n$$

si ha che

$$\frac{\partial C}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \rho_{ik} - m_k$$

ovvero, in forma matriciale, posta[3] $\rho = (\rho_{ij})$, $\boldsymbol{a} = {}^T(a_1, \dots, a_n)$ e $\boldsymbol{m} = {}^T(m_1, \dots, m_n)$:

$$\nabla C = \rho \, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{m}$$

[2] Approssima in senso L^2 (ovvero minimizza la norma L^2 della differenza).

[3] Vedi:

- Spazio delle matrici
- Matrice Trasposta
- Gradiente di una funzione

Dunque, posto che ρ sia invertibile, si ottiene che i valori ottimali per L siano

$$\boldsymbol{a} = \rho^{-1}\boldsymbol{m}.$$

Nel caso di funzioni a valori in $\mathbb{R}^m$ il problema si scompone nelle diverse coordinate.

1.2 Funzioni di attivazione

Nel Machine Learning le funzioni che agiscono nei neuroni vengono dette funzioni di attivazione. Se ne presentano alcuni esempi, con i loro nomi specifici.

Sono tutte funzioni $A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$.

1.2.1 Funzioni Lineari

Tra le funzioni di attivazione utilizzate vi sono le seguenti funzioni lineari:

- $f(x) = kx$, per $k > 0$ costante;
- la funzione identità $x \mapsto x$.

1.2.2 Step Functions

Threshold step function

La funzione di Heaviside (vedi Fig. 1.1)

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

la cui derivata (nel senso delle distribuzioni) è una Delta di Dirac: $H'(x) = \delta(x)$:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

Bipolar step function

La funzione segno: (vedi Fig. 1.2)

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

per cui vale: $S(x) = 2H(x) - 1$. Pertanto la sua derivata è

$$S'(x) = 2H'(x) = 2\delta(x)$$

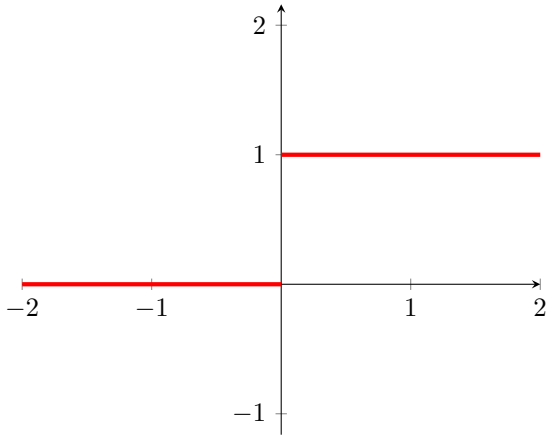


Figura 1.1: La funzione di Heaviside

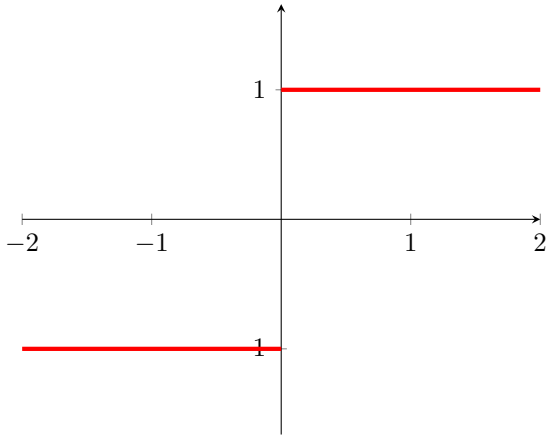


Figura 1.2: La funzione segno

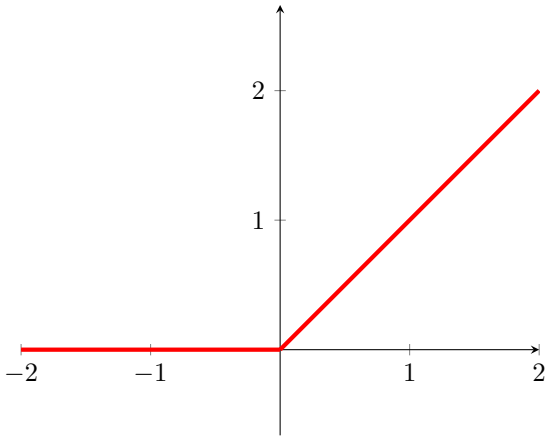


Figura 1.3: La funzione RELU(x)

1.2.3 Hockeystick Functions

Funzione di attivazione ReLU

La *Rectified Linear Unit* (ReLU) è (vedi Fig. 1.3)

$$\mathrm{ReLU}(x) = xH(x) = \max\{0, x\}$$

e la sua derivata $\mathrm{ReLU}'(x) = H(x)$.

PReLU

La *Parametric Rectivied Linear Unit* (PReLU) è (vedi Fig 1.4), per $\alpha > 0$

$$\mathrm{PReLU}(\alpha; x) = \mathrm{PReLU}_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

ELU

La *Exponential Linear Units* (ELU) è (vedi Fig. 1.5):

$$\mathrm{ELU}(\alpha, x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ \alpha(e^x - 1) & x \leq 0 \end{cases}$$

SELU

La *Scaled Exponential Linear Units* (SELU) è (vedi Fig. 1.6)

$$\mathrm{SELU}(\alpha, \lambda, x) = \lambda\,\mathrm{ELU}(\alpha, x) = \begin{cases} \lambda\, x & x > 0 \\ \alpha\lambda(e^x - 1) & x \leq 0. \end{cases}$$

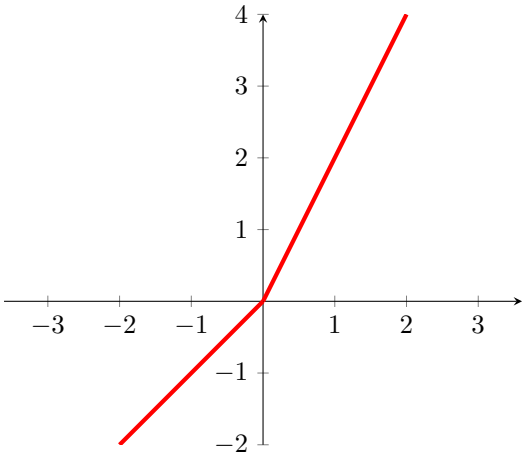


Figura 1.4: La funzione $\mathrm{PRELU}_2(x)$

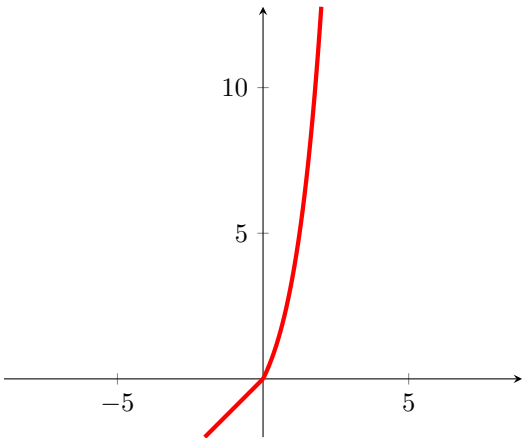


Figura 1.5: La funzione $\mathrm{ELU}(\alpha, x)$

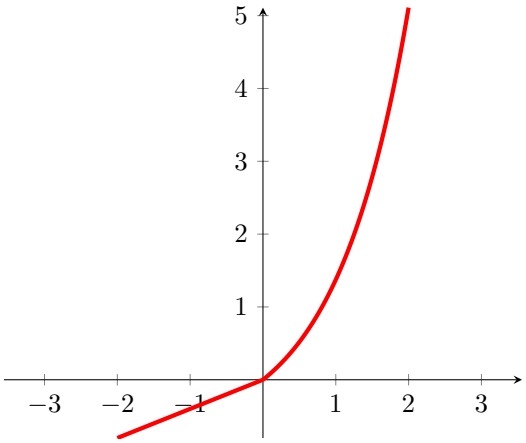


Figura 1.6: La funzione SELU$(0.4, 2, x)$

SLU

La *Sigmoid Linear Units* (SLU) è (vedi Fig. 1.7)

$$\phi(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}.$$

Questa non è una funzione monotona, ma ha un minimo in $x_0 \approx -1,27$.

Spesso si usa anche la versione parametrica:

$$\phi_c(x) = \frac{x}{1 + e^{-cx}}.$$

Funzione Softplus

Questa è una funzione positiva crescente, con range $(0, +\infty)$: (vedi Fig. 1.8)

$$\mathrm{sp}(x) = \ln(1 + e^x).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}(x) - \mathrm{sp}(-x) &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln\left(\frac{1 + e^x}{1 + e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^{-x}(1 + e^x)}\right) \\ &= \ln e^x = x. \end{aligned}$$

La sua derivata è

$$\mathrm{sp}'(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} > 0.$$

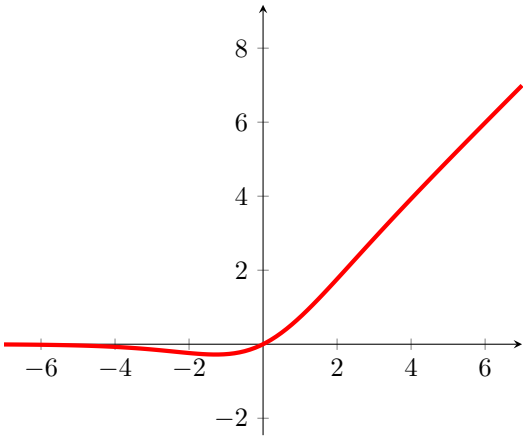


Figura 1.7: La funzione SLU(x)

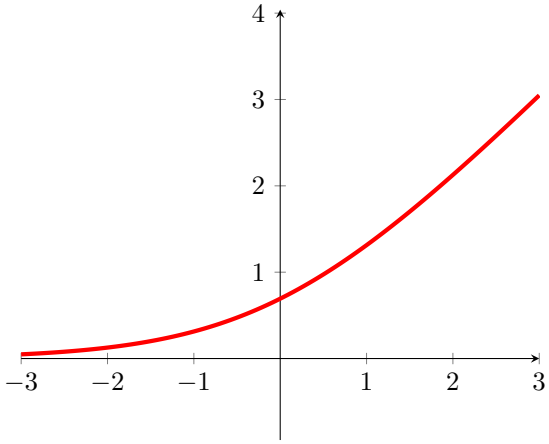


Figura 1.8: La funzione sp(x)

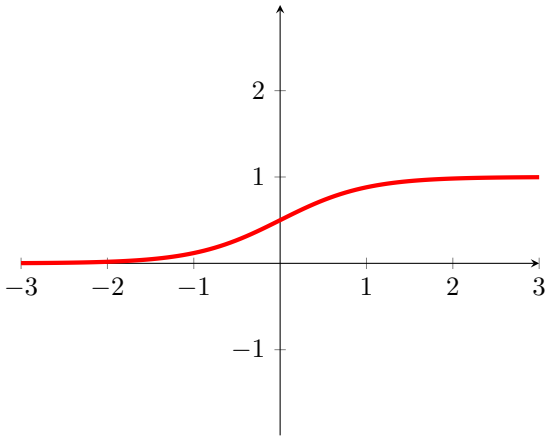


Figura 1.9: La funzione $\sigma_2(x)$

1.2.4 Funzioni Sigmoidali

Funzione Logistica

La funzione logistica è (vedi Fig. 1.9)

$$\sigma_c(x) = \sigma(c; x) = \frac{1}{1 + e^{-cx}}.$$

La famiglia di funzioni $(\sigma_c(x))_{c\in(0,+\infty)}$ approssima la funzione di Heaviside $H(x)$, in quanto

$$\lim_{c\to\infty} e^{-cx} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

e pertanto

$$\lim_{c\to+\infty} \sigma_c(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e pertanto, per ogni $x \neq 0$: $H(x) = \lim_{c\to+\infty} \sigma_c(x)$.

Le funzioni logistiche sono soluzioni della seguente equazione differenziale:

$$\sigma_c' = c\sigma_c\,(1 - \sigma_c)$$

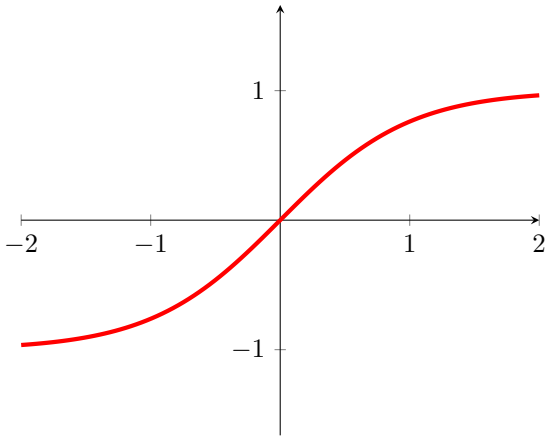


Figura 1.10: La funzione $\tanh(x)$

infatti:

$$\begin{aligned}
\sigma_c'(x) &= -\frac{1}{(1+e^{-cx})^2} \cdot (-c\, e^{-cx}) \\
&= c \cdot \frac{1}{1+e^{-cx}} \cdot \frac{e^{-cx}}{1+e^{-cx}} \\
&= c \cdot \frac{1}{1+e^{-cx}} \cdot \left(\frac{e^{-cx}+1-1}{1+e^{-cx}} \right) \\
&= c \cdot \frac{1}{1+e^{-cx}} \cdot \left(1 + \frac{-1}{1+e^{-cx}} \right) \\
&= c \cdot \sigma_c(x) \cdot (1-\sigma_c(x)).
\end{aligned}$$

Spesso ci si rifesce a $\sigma \coloneqq \sigma_1$ come alla funzione logistica.

Tangente Iperbolica

La tangente iperbolica $\tanh(x)$ è (vedi Fig. 1.10)

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2\sigma_2(x) - 1$$

Inoltre si ha che $\tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2$:

$$\begin{aligned}
\tanh'(x) &= 2\sigma_2'(x) = 2 \cdot 2\sigma_2(x) \cdot (1-\sigma_2(x)) \\
&= 2\sigma_2(x) \cdot (2 - 2\sigma_2(x)) \\
&= (\tanh(x)+1) \cdot (1 - 2\sigma_2(x) + 1) \\
&= (\tanh(x)+1)(-\tanh(x)+1) = 1 - (\tanh(x))^2
\end{aligned}$$

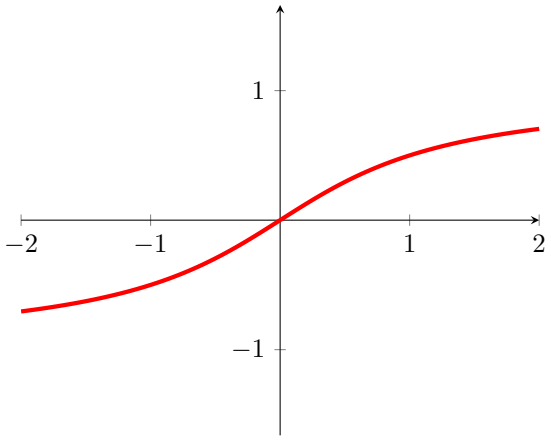


Figura 1.11: La funzione $h(x)$

Arcotangente

È spesso utilizzata la seguente arcotangente (vedi Fig. 1.11):

$$h(x) = \frac{2}{\pi}\arctan(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Softsign

La seguente funzione differenziabile è la funzione *softsign*: (vedi Fig. 1.12)

$$\mathrm{so}(x) = \frac{x}{1+|x|}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

che ha raange $(-1, 1)$.

Piecewise Linear

Dato un parametro $\alpha > 0$ (vedi Fig. 1.13)

$$f_\alpha(x) = f(\alpha, x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\alpha \\ x/\alpha & -\alpha < x < \alpha \\ 1 & x \geq \alpha. \end{cases}$$

1.2.5 Bumped-type Functions

Gaussiana

La funzione gaussiana mappa $\mathbb{R}$ nell'intervallo $(0, 1]$: (vedi Fig. 1.14)

$$g(x) = e^{-x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

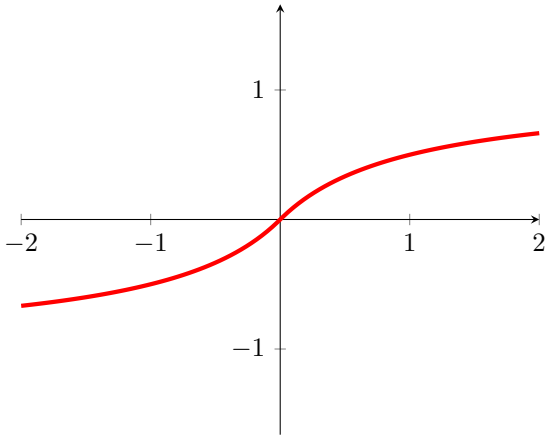


Figura 1.12: La funzione so(x)

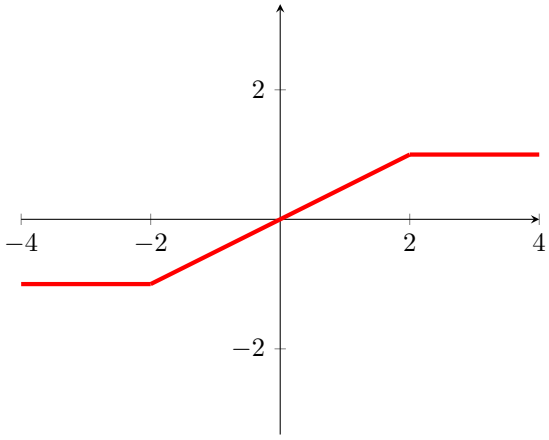


Figura 1.13: La funzione $f_2(x)$

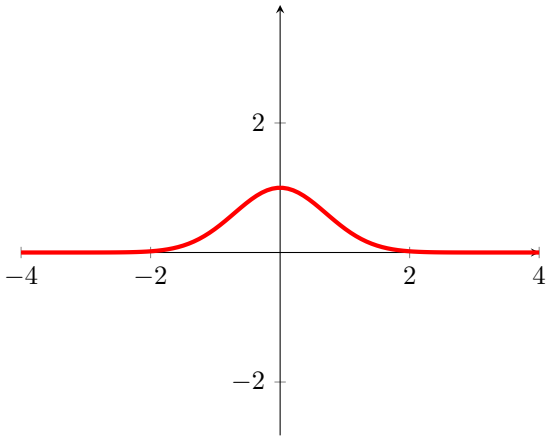


Figura 1.14: La funzione $g(x)$

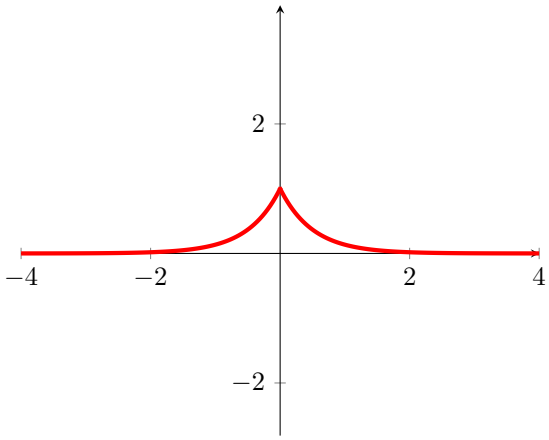


Figura 1.15: La funzione $f(x)$ con parametro $\lambda = 2$

Doppio esponenziale

Mappa la retta reale nell'intervallo $(0, 1]$ ed è definita: (vedi Fig. 1.15)

$$f(x) = e^{-\lambda |x|}, \qquad x \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

1.3 Rete Neurale

Una rete neurale è [...]

Questa riceve degli input e produce un output, in base a certi parametri $\boldsymbol{w}$, per simulare la FUNZIONE TARGET; quest'ultima è l'obiettivo finale della Rete Neurale (ovvero si vuole far sì che l'output della rete neurale sia il più vicino possibile al risultato della funzione target).

Per misurare la distanza tra l'output di una rete e la funzione target si utilizza una funzione errore (o funzione costo), che deve essere scelta in base all'applicazione specifica.

Il processo di apprendimento è quello che, partendo dai parametri $\boldsymbol{w}$, li modifica (iterativamente), fino a dei parametri $\boldsymbol{w}^*$, che sono ottimali, nel senso che minimizzano la funzione errore. Dunque il processo di apprendimento comporta la minimizzazione della funzione costo.

1.3.1 Hidden Layer di una rete neurale

1.4 Funzioni costo (Machine Learning)

Una funzione costo è una funzione che misura, dati certi parametri $\boldsymbol{w}$ di una rete neurale, quanto la rete neurale si discosta dalla funzione target.

1.4.1 La Funzione Errore Supremum

Una rete neurale prende input $x \in [0,1]$ e deve imparare una data funzione continua $\phi : [0,1] \to [0,1]$.

La funzione della rete neurale, dipendete dai parametri $\boldsymbol{w}, b$, è $f_{\boldsymbol{w},b}(x)$.

La funzione costo Supremum è

$$C(\boldsymbol{w}, b) \coloneqq \sup_{x \in [0,1]} |f_{\boldsymbol{w},b}(x) - \phi(x)|.$$

Se la funzione ϕ è conosciuta solo per N valori $x_1, \ldots, x_N$, allora la funzione costo diventa

$$C(\boldsymbol{w}, b) \coloneqq \max_{i=1,\ldots,N} |f_{\boldsymbol{w},b}(x_i) - \phi(x_i)|.$$

1.4.2 La Funzione Errore Norma L2

Una rete neurale prende input $x \in [0,1]$ e deve imparare una data funzione $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che

$$\int_0^1 (\phi(x))^2 \, \mathrm{d}x < \infty$$

La funzione della rete neurale, dipendete dai parametri $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}$, è $f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x)$. La funzione costo associata a questo tipo di problema è quella che misura la distanza nella norma L^2:

$$C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) \coloneqq \int_{[0,1]} (f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x) - \phi(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Se la funzione ϕ è conosciuta soltanto in N punti

$$z_1 = \phi(x_1), \quad z_2 = \phi(x_2), \qquad , z_N = \phi(x_N)$$

allora, posti $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_N)$ e $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, la funzione costo diventa la distanza in $\mathbb{R}^N$ tra $\boldsymbol{z}$ e $f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x}) \coloneqq \big(f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(z_1), \ldots, f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(z_N)\big)$:

$$C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) = \big\|\boldsymbol{z} - f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})\big\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |z_i - f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_i)|^2$$

Interpretazione Geometrica

Fissati $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{z}$, la mappa $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) \mapsto f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(\boldsymbol{x})$ rappresenta una ipersuperficie in $\mathbb{R}^N$:

$$\Phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) \\ \vdots \\ \Phi_N(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_1) \\ \vdots \\ f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_N) \end{pmatrix}$$

e la funzione costo $C(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})$ è la distanza euclidea in $\mathbb{R}^N$ di un punto sulla ipersuperficie dal punto $\boldsymbol{z}$. Si suppongano appropriate ipotesi di differenziabilità della ipersuperficie.

Il costo è minimizzato in $(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)$ quando la distanza è minima, ovvero quando $\Phi(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)$ è la proiezione ortogonale di $\boldsymbol{z}$ sulla ipersuperficie: questo significa che il vettore $\Phi(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*) - \boldsymbol{z}$ è ortogonale al piano tangente alla ipersuperficie in $\Phi(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)$: quest'ultimo è generato dai vettori[4]

$$\partial_{w_k} \Phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})|_{(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)}; \qquad \partial_{b_j} \Phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})|_{(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)}$$

Richiedere l'ortogonalità, quindi, significa richiedere che i prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \left(\partial_{w_k} \Phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})|_{(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)}\right) \cdot (\Phi(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*) - \boldsymbol{z}) = 0 \\ \left(\partial_{b_j} \Phi(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b})|_{(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*)}\right) \cdot (\Phi(\boldsymbol{w}^*, \boldsymbol{b}^*) - \boldsymbol{z}) = 0. \end{aligned}$$

Queste sono le equazioni normali, che operativamente diventano

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} (f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_i) - z_i) \cdot \partial_{w_k} f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_i)|_{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{b}^*)} = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} (f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_i) - z_i) \cdot \partial_{b_j} f_{\boldsymbol{w},\boldsymbol{b}}(x_i)|_{(\boldsymbol{w},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{w}^*,\boldsymbol{b}^*)} = 0 \end{aligned}$$

1.4.3 Regolarizzazione della Funzione Costo (Machine Learning)

Per evitare il fenomeno dell'overfitting, è bene mantenere i parametri piccoli. Pertanto, data una funzione costo $C(\boldsymbol{w})$, la si regolarizza, utilizzando una funzione costo $G(\boldsymbol{w})$, data da $C(\boldsymbol{w})$ più un termine di regolarizzazione.

Regolarizzazione L^2. Si aggiunge alla funzione $C(\boldsymbol{w})$ la 2-norma in $\mathbb{R}^n$ dei parametri:

$$G(\boldsymbol{w}) \coloneqq C(\boldsymbol{w}) + \lambda \|\boldsymbol{w}\|_2^2, \qquad \text{dove } \|\boldsymbol{w}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (w_i)^2.$$

> Il valore $\lambda > 0$ è un moltiplicatore di Lagrange; questo parametro deve essere scelto in maniera da minimizzare l'*overfitting*.

[4] Vedi: "Derivata parziale"

Regolarizzazione L^1. Si aggiunge alla funzione $C(\boldsymbol{w})$ la 1-norma in $\mathbb{R}^n$ dei parametri:

$$G(\boldsymbol{w}) \coloneqq C(\boldsymbol{w}) + \lambda \|\boldsymbol{w}\|_2^2, \qquad \text{dove } \|\boldsymbol{w}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |w_i|.$$

Il valore $\lambda > 0$ è un moltiplicatore di Lagrange. Questo metodo, non differenziabile nell'origine, potrebbe dare dei problemi nella ricerca dei minimi tramite il gradiente.

Potential Regolation. Sia $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ tale che:

1. $U(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. U ha un minimo assoluto in $x = 0$.

La funzione costo regolarizzata diventa:

$$G(\boldsymbol{w}) = C(\boldsymbol{w}) + \lambda U(\boldsymbol{w}), \qquad \lambda > 0$$

Il potenziale deve essere scelto in maniera tale che l'errore, utilizzando G, sia minore che utilizzando C.

1.5 Processo di apprendimento di una rete neurale

L'apprendimento di una rete neurale è il processo di ricerca dei parametri ottimali per approssimare la funzione target. Questo è un processo iterativo algoritmico, che genera una sequenza (w_t) di parametri. Poiché si parla di numeri immensi di elementi in questa sequenza, spesso ci si riferisce a t come una sorta di variabile temporale continua.

Si vuole allenare un modello per replicare una funzione target di cui si conoscono N valori: $\big\{(x_i, z_i)\big\}$, minimizzando la funzione costo $C(\boldsymbol{w})$.

Questo insieme è diviso in tre parti:

- training set $\mathcal{T}$ (c.a. 70% dei dati);
- test set T (c.a. 20% dei dati);
- validation set $\mathcal{V}$ (c.a. 10% dei dati).

Si suppone che siano identicamente distribuiti, e che siano indipendenti. Si ottengono quindi tre errori:

- errore di training $C_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{w})$: è il valore della funzione costo utilizzando i valori della funzione target presi dal training set;
- errore di test $C_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w})$: è il valore della funzione costo utilizzando i valori della funzione target presi dal test set;
- validation error $C_{\mathcal{V}}(\boldsymbol{w})$: è il valore della funzione costo utilizzando i valori della funzione target presi dal validation set.

1.5.1 Errori di Training e di Test

Con un qualche algoritmo si trova il valore $\boldsymbol{w}^*$ che minimizza $C_{\mathcal{T}}$. Successivamente, si calcola $C_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}^*)$, e generalmente vale:

$$C_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{w}^*) \leq C_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}^*)$$

Ci sono tre possibili scenari, a questo punto:

- sia $C_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{w}^*)$ che $C_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}^*)$ sono piccoli: questo è lo scenario desiderato;
- $C_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{w}^*)$ è piccolo, ma $C_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}^*)$ è grande: questo è un fenomeno di overfitting; questo significa che la rete neurale sta "memorizzando" il training set, e non riesce a generalizzare bene; probabilmente bisogna rivedere l'architettura della rete neurale, probabilmente diminuendo i parametri;
- sia $C_{\mathcal{T}}(\boldsymbol{w}^*)$ che $C_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{w}^*)$ sono grandi: questo è un fenomeno di underfitting; bisogna rivedere l'architettura della rete neurale, probabilmente aumentando i parametri.

Pertanto si utilizza il test set per verificare che i valori dei parametri trovati sul training set siano sufficientemente generalizzabili.

1.5.2 Iperparametri di un processo di apprendimento

L'algoritmo di apprendimento dipende da un insieme di parametri diversi da quelli della rete neurale. Questi sono detti iperparametri.

Si utilizza la mimimizzazione del validation error proprio per regolare gli iperparametri.

1.5.3 Alcuni esempi di algoritmi di apprendimento

Algoritmo di Regressione Lineare (Machine Learning)

Algoritmo di Gradient Descent

Capitolo 2

Cenni di Analisi Matematica

2.1 Teoria della misura

2.1.1 Funzioni sigmoidali e funzioni discriminatorie

Definizione 2.1.1. *Una funzione $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ si dice sigmoidale se*[1]

$$\lim_{x \to -\infty} \sigma(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \sigma(x) = +1.$$

Definizione 2.1.2. *Sia $\mathcal{M}$ la famiglia delle misure di Baire per $\mathbb{R}^n$ sul cubo $I^n := [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}$, finite, con segno e regolari.*

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice discriminatoria per $\mathcal{M}$ se per ogni $\mu \in \mathcal{M}$:

$$\left(\forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \int_{I^n} f(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = 0 \right) \implies \mu = 0$$

Proposizione 2.1.3. Ogni funzione sigmoidale $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ è discriminatoria per $\mathcal{M}$, dove $\mathcal{M}$ è l'insieme misure di Baire per $\mathbb{R}^n$ sul cubo $I^n := [0,1]^n \subseteq \mathbb{R}$, finite, con segno e regolare.

Ovvero, se $\sigma : \mathbb{R} \to [0,1]$ è tale che

$$\lim_{x \to -\infty} \sigma(t) = 0; \qquad \lim_{x \to +\infty} \sigma(t) = 1$$

allora, per ogni $\mu \in \mathcal{M}$,

$$\left(\forall \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \int_{I^n} f(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{x}) = 0 \right) \implies \mu = 0$$

[1] Vedi "Limite (Analisi Matematica)"

2.2 Minimizzazione

Definizione 2.2.1. *Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.*

Proposizione 2.2.2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f \in C^2(A)$[2]. Sia c un punto critico per f. Sia $H_f(c)$ l'Hessiana di f calcolata nel punto c.

- Se $H_f(c)$ è definita positiva, allora c è un punto di minimo locale forte.
- Se $H_f(c)$ è definita negativa, allora c è un punto di massimo locale forte.
- Se $H_f(c)$ è indefinita, allora c è un punto di sella.

Dimostrazione. Si dimostra che se $H_f(c)$ è definita positiva, allora c è un punto di minimo locale.

Sia $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to A$ una curva di classe C^2 tale che $\gamma(0) = c$ e $\left\|\gamma'(0)\right\| = 1$. Sia $\boldsymbol{v} \coloneqq \gamma'(0)$. Sia $g(t) \coloneqq f \circ \gamma(t)$.

- $g'(0) = 0$. Infatti, applicando la chain rule:[3]

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\ &= \nabla f(c) \cdot \boldsymbol{v} = 0 \cdot \boldsymbol{v} = 0. \end{aligned}$$

- $g''(0) > 0$. Infatti, si noti che[4]

$$g''(0) = D_{\boldsymbol{v}} \left(D_{\boldsymbol{v}} f\right)(c)$$

  Inoltre, siccome f è differenziabile, si ha che $D_{\boldsymbol{v}} f(x) = \nabla f(x) \cdot \boldsymbol{v}$.

  Anche $D_{\boldsymbol{v}} f$ è differenziabile, e pertanto $<$

$$D_{\boldsymbol{v}} \left(D_{\boldsymbol{v}} f\right)(x) = \nabla (D_{\boldsymbol{w}} f)(x) \cdot \boldsymbol{v}$$

  Ma

$$\nabla(\nabla f(x) \cdot \boldsymbol{v}) = H_f(x)\boldsymbol{v}$$

  e pertanto $g''(0) = H_f(c)\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} > 0$. ■

Proposizione 2.2.3. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque.

[2] Vedi "Funzione di classe Ck"
[3] Vedi "Gradiente di una funzione"
[4] Vedi "Derivata direzionale"

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Lemma 2.2.4. Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Lemma 2.2.5. Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Teorema 2.2.6. Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Parte II

Cordero

Capitolo 3

Teoremi di approssimazione

3.1 Teoremi di Dini per la convergenza uniforme

Teorema 3.1.1. Sia $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue.

1. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1} \leq f_n$ e
$$\forall x \in [a,b] \ f_n(x) \to 0$$
allora f_n converge uniformemente a 0 su $[a,b]$.
2. Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1} \leq f_n$ e
$$\forall x \in [a,b] \ f_n(x) \to g(x)$$
allora f_n converge uniformemente a g su $[a,b]$.

3.2 Teorema di Ascoli-Arzelà

Definizione 3.2.1. *Una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$ da un insieme A a valori reali si dice uniformemente limitata (*uniformly bounded*) se esiste $M > 0$ tale che*

$$\forall x \in A, \ \forall f \in \mathcal{F} \ |f(x)| \leq M.$$

Esempio 3.2.2. Sia $\mathcal{F} := \{\cos(ax+b); a,b \in \mathbb{R}\}$. Allora la famiglia $\mathcal{F}$ è uniformemente limitata su $\mathbb{R}$, per $M = 1$.

Esempio 3.2.3. Si consideri

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma(w_j x + b_j); \alpha_j, w_j, b_j \in \mathbb{R} \mid \sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 \leq 1 \right\}$$

dove $\sigma(x)$ è una funzione sigmoidale fissata.

Questa famiglia è uniformemente limitata su $\mathbb{R}$, per $M = \sqrt{N}$, poiché, per C-S

$$\left| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma(w_j x + b_j) \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} \sigma(w_j x + b_j) \right) \leq 1 \cdot N = N.$$

Definizione 3.2.4. *Una famiglia di funzioni $\mathcal{F}$ da un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ a valori reali si dice equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall f \in \mathcal{F} \ \forall x, y \in A \ \left(|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right).$$

Equivalentemente, le funzioni di $\mathcal{F}$ sono uniformemente continua per gli stessi ε e δ.

Esempio 3.2.5. Si consideri $\mathcal{F} \subseteq C^1\left([a,b]\right)$[1] tale che esista $L > 0$:

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < L.$$

Allora $\mathcal{F}$ è equicontinua.

Infatti, per il Teorema di Lagrange:

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\sup_{c \in [a,b]} |f'(c)| \right) \ |x - y| \leq L \ |x - y|$$

e dunque, scegliendo $\delta = \varepsilon / L$ si ha la tesi.

Esempio 3.2.6. Sia σ una funzione sigmoidale tale che esista $\lambda > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |\sigma'(x)| < \lambda < 1$$

e sia $\mathcal{F}$ la famiglia definita su $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ come segue:

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \sigma(w_j x + b_j); \alpha_j, w_j, b_j \in \mathbb{R} \mid \sum_{j=1}^{N} (\alpha_j^2 + w_j^2) \leq 1 \right\}.$$

Allora $\mathcal{F}$ è equicontinua. Infatti:

- $\mathcal{F} \subseteq C^1\left([a,b]\right)$;
- Sia $f \in \mathcal{F}$: per C-S:

$$\begin{aligned} |f'(x)| = \left| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j w_j \sigma'(w_j x + b_j) \right| &\leq \sum_{j=1}^{N} |\alpha_j| \, |w_j| \, \lambda \\ &\leq \lambda \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{N} w_j^2 \right)^{1/2} \leq \lambda. \end{aligned}$$

[1] Vedi "Classe C di una funzione"

Per l'esempio precedente, si ottieene la tesi.

Si noti, inoltre, che se σ è la sigmoide logistica, allora la derivata massima è ottenuto in $x = 0$ e vale

$$\sigma'(0) = \sigma(0)\,(1 - \sigma(0)) = \frac{1}{4} < 1.$$

Teorema 3.2.7. Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni continue su $[a, b]$ a valori reali. Sono fatti equivalenti:

1. Ogni successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una sottosuccessione $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge uniformemente.
2. La famiglia $\mathcal{F}$ è equicontinua e uniformemente limitata.

Ecco alcuni semplici corollari del Teorema di Ascoli-Arzelà.

Teorema 3.2.8. Sia $N \geq 1$ un intero fissato, e si consideri una rete neurale con un layer nascosto tale che:

1. l'input della rete sia una variabile reale $x \in [a, b]$;
2. l'output della rete sia un neurone unidimensionale con funzione di attivazione lineare e zero bias;
3. ci sono N neuroni nel layer nascosti con una funzione di attivazione differenziabile tale che $|\sigma'| < \lambda < 1$;
4. i pesi soddisfano la condizione di regolarizzazione:

$$\sum_{j=1}^{N} (\alpha_j^2 + w_j^2) \leq 1$$

dove i w_j sono i pesi per l'input al layer nascosto, e gli a_j sono i pesi dal layer nascosto all'output.

Allora esiste una funzione continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ che può essere approssimata dalla rete.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che la famiglia di funzioni output del sistema sia composta da funzioni continue, e che sia equicontinua e uniformemente limitata.

Con una banale applicazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, si ottiene che ogni successione di funzioni output ammette una sottosuccessione convergente uniformemente ad una funzione continua; quest'ultima, data la uniforme convergenza, viene approssimata dalla rete con un grado di accuratezza arbitrario. ■

Proposizione 3.2.9. Anche per una rete neurale composta da un unico neurone, con output

$$f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{x} + b)$$

dove σ è la funzione logistica, con pesi $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}$ e input $\boldsymbol{x} \in I_n \coloneqq [0, 1]^n$, esiste una funzione continua $g : I^n \to \mathbb{R}$ che può essere approssimata. Si supponga che $\|\boldsymbol{w}\| \leq 1$.

Dimostrazione. Infatti, la famiglia di funzioni continue

$$\mathcal{F} \coloneqq \left\{ f_{\boldsymbol{w},b} \mid \|\boldsymbol{w}\| \leq 1, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è uniformemente limitata poiché $|f_{\boldsymbol{w},b}| < 1$, ed inoltre è equicontinua, in quanto, per il Teorema di Lagrange

$$\begin{aligned} |f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{x}) - f_{\boldsymbol{w},b}(\boldsymbol{y})| &= \left|\sigma(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+b) - \sigma(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y}+b)\right| \\ &\leq \max|\sigma'| \ |\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x}+b-\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y}-b| \\ &= \frac{1}{4}|\boldsymbol{w}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})| \leq \frac{1}{4}\|\boldsymbol{w}\|\cdot\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \\ &\leq \frac{1}{4}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|. \end{aligned}$$

Con una banale applicazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, si ottiene che ogni successione di funzioni output ammette una sottosuccessione convergente uniformemente ad una funzione continua; quest'ultima, data la uniforme convergenza, viene approssimata dalla rete con un grado di accuratezza arbitrario. ■

3.3 Teorema di Stone Weierstrass

Definizione 3.3.1. *Sia $\mathcal{F}$ un insieme di funzioni con lo stesso dominio, a valori in $\mathbb{R}$. $\mathcal{F}$ si dice un'algebra di funzioni reali se, per ogni $f, g \in \mathcal{F}$ e $c \in \mathbb{R}$:*

1. $f + g \in \mathcal{F}$;
2. $c\,f \in \mathcal{F}$;
3. $f\,g \in \mathcal{F}$.

Questa è la definizione di $\mathbb{R}$-algebra, specializzata in questo ambito.

Esempio 3.3.2. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme di tutte le serie di Fourier finite su $[0, 2\pi]$:

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \mid c_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ovviamente $\mathcal{A}$ è chiuso per combinazioni lineari. Utilizzando il fatto che

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\right]$$

segue che $\mathcal{A}$ è anche chiuso per prodotti. Pertanto è una $\mathbb{R}$-algebra.

Definizione 3.3.3. *Sia $\mathcal{A}$ una $\mathbb{R}$-algebra di funzioni di dominio $K \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}$.*

Si dice che $\mathcal{A}$ separa i punti se per ogni $x, y \in K$ esistono $f, g \in \mathcal{A}$ tali che

$$f(x) \neq f(y).$$

Esempio 3.3.4. Sia $\mathcal{A}$ l'insieme dei polinomi definiti su $[a,b]$:

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f|_{[a,b]} \mid f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \mid c_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ovviamente $\mathcal{A}$ è una $\mathbb{R}$-algebra di funzioni, e inoltre separa i punti, poiché $f(x) = \mathrm{Id}_{[a,b]} \in \mathcal{A}$[2].

Inoltre $1 \in \mathcal{A}$, e pertanto $\mathcal{A}$ contiene tutte le funzioni costanti.

Teorema 3.3.5. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, e sia $\mathcal{A} \subseteq C(K)$[3] una $\mathbb{R}$-algebra. Se

1. $\mathcal{A}$ separa i punti di K;
2. $\mathcal{A}$ contiene le funzioni costanti;

allora $\mathcal{A}$ è un sottoinsieme denso di $C(K)$ munito della topologia indotta dalla metrica[4]:

$$\forall f, g \in C(K): \quad d(f,g) \coloneqq \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$

3.3.1 Corollari del teorema

Proposizione 3.3.6. Sia $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, e si consideri $C([a,b])$[3] munito della topologia indotta dalla metrica[4]:

$$\forall f, g \in C(K): \quad d(f,g) \coloneqq \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|.$$

Sia:

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f|_{[a,b]} \mid f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k; a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Allora $\mathcal{A}$ è denso in $C([a,b])$, ovvero: per ogni $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in \mathcal{A}$ tale che

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione. $\mathcal{A}$ è una $\mathbb{R}$-algebra che separa i punti e contiene le funzioni costanti. ■

Proposizione 3.3.7. Sia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \geq 1$ ed esistono, per ogni $i = 1, \ldots, N$, delle $g_i \in C([a,b])$[3] e $h_i \in C([c,d])$ tali che

$$\max_{\substack{x \in [a,b] \\ y \in [c,d]}} \left| f(x,y) - \sum_{i=1}^{N} g_i(x) h_i(y) \right| < \varepsilon$$

[2] Vedi "Funzione identità"
[3] Vedi "Classe C di una funzione"
[4] Tale massimo esiste per il Teorema di Weierstrass

Dimostrazione. Si consideri

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ G(x,y) = \sum_{i=1}^{N} g_i(x)h_i(y) \mid g_i \in C([a,b]), h_i \in C([c,d]), N = 1,2,\dots \right\}$$

Si osserva facilmente che $\mathcal{A}$ è chiuso per somme, prodotti e prodotti per scalari, ovvero è una $\mathbb{R}$-algebra. Inoltre contiene le funzioni costanti.

Se $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$:

- se $x_0 \neq x_1$ allora $G(x,y) = x \cdot 1 \in \mathcal{A}$ separa i due punti;
- se $(y_0 \neq y_1)$ allora $G(x,y) = 1 \cdot y \in \mathcal{A}$ separa i due punti. ■

3.3.2 Applicazioni alle reti neurali

Proposizione 3.3.8. Per ogni funzione periodica $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esiste una rete neurale che la approssima.

Dimostrazione. Sia T il periodo di F, ovvero $T \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t+T) = F(t).$$

Si consideri

$$\mathcal{A} \coloneqq \left\{ f|_{[0,T]} \mid f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T} jx\right) + c_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} jx\right); a_i, c_i \in \mathbb{R}, n = 1,2,\dots \right\}$$

Si noti che per ogni $f \in \mathcal{A}$

$$f(0) = f(T).$$

L'insieme $\mathcal{A} \subseteq C([0,T])$[5], ed inoltre è una $\mathbb{R}$-algebra[6]. Contiene tutte le funzioni costanti (basta porre $a_j = c_j = 0$ per ogni $j > 0$), e separa i punti, in quanto

$$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{T} x\right) \in \mathcal{A}$$

è una biiezione tra $[0,T]$ e $[0,1]$.

Dunque per il Teorema di Stone-Weierstrass $\mathcal{A}$ è denso in $C([0,T])$ ed in particolare, siccome $F \in C([0,T])$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$G(x) \coloneqq a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T} jx\right) + c_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} jx\right) \in \mathcal{A}$$
$$\max_{x\in[0,T]} \left|G(x) - F(x)\right| = \max_{x\in\mathbb{R}} \left|G(x) - F(x)\right| < \varepsilon$$

Si consideri una rete neurale fatta come segue:

[5] Vedi "Classe C di una funzione"
[6] Questo si vede facilmente seguendo l'Esempio di "Algebra di funzioni reali"

- input: $x \in \mathbb{R}$;
- un layer nascosto con N neuroni con funzione di attivazione cos, con peso dall'input w_j e bias b_j;
- il neurone di output con funzione di attivazione lineare, bias a_0 e pesi dall'hidden layer α_j.

Questa rete è rappresentata in Fig. 3.1 e produce output

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(w_j x + b_j).$$

Si dimostra che tale rete neurale è in grado di produrre come output $G(x)$, ovvero che, fissato un livello di precisione ε, esiste una rete neurale che produce come output una funzione periodica che approssima F con quel livello di precisione.

Infatti, ponendo

$$w_j \coloneqq \frac{2\pi}{T}$$

e α_j, b_j tali che

$$\begin{cases} a_j = \alpha_j \cos b_j \\ c_j = -\alpha_j \operatorname{sen} b_j \end{cases}$$

si ottiene che, detto per semplicità di notazione $\nu \coloneqq 2\pi/T$

$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(w_j x + b_j) \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \cos(\nu j x) \cos b_j - \alpha_j \operatorname{sen}(\nu j x) \operatorname{sen} b_j \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos(\nu j x) + c_j \operatorname{sen}(\nu j x) \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^{N} a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T} j x\right) + c_j \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} j x\right) = G(x). \end{aligned}$$

■

3.4 Teoremi Tauberiani di Wiener

Si consideri l'operatore funzionale

$$T_\theta : f(x) \mapsto f(x - \theta).$$

Teorema 3.4.1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$[7]. Lo span di $\{T_\theta f \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ se e solo se la trasformata di Fourier:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \qquad \hat{f}(\xi) \neq 0$$

[7] Vedi "Spazi Lp"

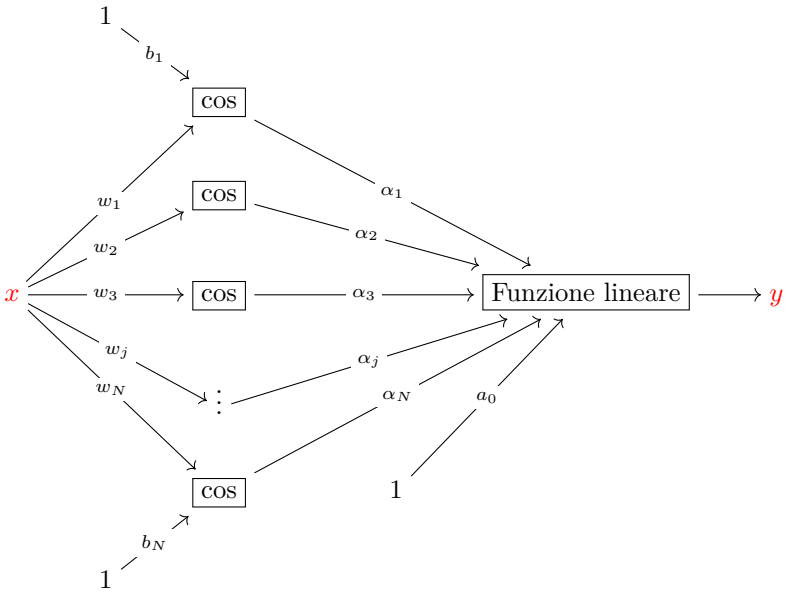


Figura 3.1: La rete neurale considerata

Teorema 3.4.2. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$[7]. Lo span di $\{T_\theta f \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ è denso in $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se gli zeri della trasformata di Fourier[8]

$$\hat{f}(\xi) \neq 0 \text{ q.o. } \xi \in \mathbb{R}$$

ovvero per la misura di Lebsegue μ:

$$\mu\left(\left\{\xi \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(\xi) = 0\right\}\right) = 0$$

3.4.1 Applicazioni dei Teoremi Tauberiani di Wiener al Machine Learning

1. Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$, e sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

   $$\forall \xi \in \mathbb{R}: \qquad \hat{f}(\xi) \neq 0$$

   (ovvero f soddisfa le ipotesi del Teorema 3.4.1)

   Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per $j = 1, \ldots, N$, degli $\alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ tali che

   $$G(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f(x + \theta_j)$$

   $$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - G(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

[8] Vedi "Proprietà vera quasi ovunque"

La funzione $G(x)$ è l'output di una rete neurale con un layer nascosto di N neuroni (e neurone di output lineare), dove i neuroni del layer nascosto hanno funzione di attivazione f.

2. Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$, e sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\mu\left(\{\xi \in \mathbb{R} \mid f(\xi) = 0\}\right) = 0$$

(ovvero f soddisfa le ipotesi del Teorema 3.4.2)

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per $j = 1, \dots, N$, degli $\alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ tali che

$$G(x) \coloneqq \sum_{j=1}^{N} \alpha_j f(x + \theta_j)$$
$$\int_{\mathbb{R}} (g(x) - G(x))^2 \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

La funzione $G(x)$ è l'output di una rete neurale con un layer nascosto di N neuroni (e neurone di output lineare), dove i neuroni del layer nascosto hanno funzione di attivazione f.

Si noti che le seguenti funzioni di attivazione soddisfano le ipotesi dei Teoremi 3.4.1 e 3.4.2.

Doppio esponenziale. Sia $f(x) = e^{-\lambda|x|}$, con $\lambda > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\lambda}[e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda} < \infty$$

e dunque $f \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda|x|} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} < \infty$$

e pertanto $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si calcola la trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda|x|} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda|x|} \, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda|x|} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-2\pi i \xi x} e^{\lambda x} \, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-(-2\pi i \xi + \lambda)x} \, \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-(2\pi i \xi + \lambda)x} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{-2\pi i \xi + \lambda} + \frac{1}{2\pi i \xi + \lambda} = \frac{(2\pi i \xi + \lambda) + (-2\pi i \xi + \lambda)}{(2\pi i \xi + \lambda) \cdot (-2\pi i \xi + \lambda)} = \frac{2\lambda}{4\pi^2 \xi^2 + \lambda^2}
\end{aligned}$$

e quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha che $\hat{f}(\xi) \neq \emptyset$.

Dunque f soddisfa le condizioni dei Teoremi 3.4.1 e 3.4.2.

Potenziale di Laplace. Sia $f(x) = \frac{1}{a^2+x^2}$ con $a > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{a^2+x^2} \right| \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \left. \frac{\arctan(x/a)}{x} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a} < \infty$$

e dunque $f \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si ha la seguente trasformata di Laplace:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \cdot \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|\xi|}$$

e quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha che $\hat{f}(\xi) \neq \emptyset$.

Dunque f soddisfa le condizioni dei Teoremi 3.4.1 e 3.4.2.

Gaussiana. Sia $f(x) = e^{-ax^2}$, con $a > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |e^{-ax^2}|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}x)^2} \sqrt{a}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} < \infty\end{aligned}$$

e pertanto $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $f \in L^{\mathbb{R}}_2$.

Si calcola la trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-(2\pi i \xi)x + -ax^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a} + \frac{\pi^2\xi^2}{a} + -(2\pi i\xi)x + -ax^2\right)\mathrm{d}x \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a} + 2\pi i\xi x + ax^2\right)\right]\mathrm{d}x \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\left(\frac{i\pi\xi}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a}\right)^2\right]\mathrm{d}x \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2\xi^2}{a}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

e quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha che $\hat{f}(\xi) \neq \emptyset$.

Dunque f soddisfa le condizioni dei Teoremi 3.4.1 e 3.4.2.

Capitolo 4

Apprendimento con input unidimensionale

4.1 Risultati preliminari

Proposizione 4.1.1. Sia $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ una partizione di $[0,1]$, e sia[1]

$$c(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}$$

Allora $c(x)$ può essere scritto come combinazione lineare di Funzioni di Heaviside:

$$\begin{aligned} \chi_{[x_i, x_{i+1})} &= H(x - x_i) - H(x - x_{i+1}); \\ c(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} \big(\alpha_i H(x - x_i) - \alpha_i H(x - x_{i+1})\big) \\ &= \sum_{i=0}^{N} c_i H(x - x_i). \end{aligned}$$

Proposizione 4.1.2. Se $c(x)$ è come sopra, segue che la derivata distribuzionale di c, $c'(x)$, è[2]

$$c'(x) = \sum_{i=0}^{N} c_i H'(x - x_i) = \sum_{i=0}^{N} c_i \delta(x - x_i) = \sum_{i=0}^{N} c_i \delta_{x_i}(x)$$

Proposizione 4.1.3. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

1. φ sia crescente;

[1] Con χ_A si intende la funzione caratteristica di A.
[2] Con $\delta(x)$ si intende la Delta di Dirac, e con $\delta_a(x)$ si intende la Delta di Dirac centrata in a.

2. $(\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)) - (\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)) = 1$;
3. φ sia derivabile, con $|\varphi'(x)|$ limitata.

Sia $\varphi_\varepsilon(x) \coloneqq \varphi(x/\varepsilon)$ e sia μ_ε la misura con densità φ'_ε:

$$\mathrm{d}\mu_\varepsilon(x) = \varphi'_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x.$$

Allora[3] $\varphi_\varepsilon \to \delta$ in senso debole, per $\varepsilon \to 0$, ovvero, per ogni $g \in C^\infty(\mathbb{R})$[4] a supporto compatto:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}\mu_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dimostrazione. Sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}\mu_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi'_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\varphi'\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon y)\varphi'(y)\,\mathrm{d}y \qquad\qquad \text{ponendo } y = \frac{x}{\varepsilon}\end{aligned}$$

Dunque, passando al limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}\mu_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon y)\varphi'(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(0)\varphi'(y)\,\mathrm{d}y \qquad\qquad \text{per Teorema di Convergenza Dominata} \\ &= g(0)\int_{\mathbb{R}}\varphi'(y)\,\mathrm{d}y = g(0)\cdot 1 \qquad \text{per l'ipotesi 2.}\end{aligned}$$

Siccome $g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\delta(x)\,\mathrm{d}x$, si ha la tesi.

È necessario ancora dimostrare che sia possibile applicare il teorema di convergenza dominata (questo si può fare solo perché g ha supporto compatto, e quindi l'integrale viene svolto su un dominio limitato):

$$|g(\varepsilon y)\,\varphi'(y)| \le \|g\|_\infty\,|\varphi'(y)| < M \in \mathbb{R}$$

poiché g ha supporto compatto ed è C^∞, mentre $|\varphi'(y)|$ è limitato per ipotesi. ■

Teorema 4.1.4. Siano $(M,d),(N,\partial)$ due spazi metrici, e sia $f : M \to N$ continua.

Se M è compatto allora f è uniformemente continua.

Corollario 4.1.5. In particolare, se $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua, allora è uniformemente continua[5].

[3] δ è la Delta di Dirac
[4] Vedi Classe C di una funzione
[5] Perché $[a,b]$ è compatto per il Teorema di Heine-Borel.

4.2 Reti neurali che imparano funzioni continue

4.2.1 One Hidden Layer Perceptron Network

Teorema 4.2.1. Per ogni funzione $g \in C[0,1]$[5] e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ ed esistono $c_i \in \mathbb{R}$ tali che, posta[6]

$$c(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i H(x - x_i)$$

si ha che

$$\forall x \in [0,1] : \quad |g(x) - c(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Siccome $[0,1]$ è compatto, allora g è uniformemente continua. Sia $\delta > 0$ che soddisfi la condizione di uniforme continuità.

Sia $0 = x_0 < \cdots < x_N = 1$ la equipartizione di $[0,1]$ tale che $|x_{i+1} - x_i| < \delta$, e siano i $c_0, \ldots, c_{N-1}$ tali che

$$\begin{aligned}
g(x_0) &= c_0 & c_0 &= g(x_0) \\
g(x_1) &= c_0 + c_1 & c_1 &= g(x_1) - g(x_0) \\
&\vdots \\
g(x_i) &= c_0 + c_1 + \cdots + c_i & c_i &= g(x_i) - g(x_{i-1}) \\
&\vdots \\
g(x_{N-1}) &= c_0 + c_1 + \cdots + c_{N-1} & c_{N-1} &= g(x_{N-1}) - g(x_{N-2}).
\end{aligned}$$

Questo definisce la funzione $c(x)$.

Sia ora $u \in [0,1]$. Allora esiste $k < N$ tale che $u \in [x_k, x_{k+1})$ e tale che $|u - x_k| < \delta$. Si osservi quindi che

$$H(u - x_j) = \begin{cases} 1 & j \leq k \\ 0 & j > k \end{cases}$$

e pertanto $c(u)$ vale:

$$c(u) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \, H(u - x_i) = \sum_{i=0}^{k} c_i = g(x_k).$$

È possibile ora calcolare la distanza da g:

$$\begin{aligned}
|g(u) - c(u)| &= |g(u) - g(x_k) + g(x_k) - c(u)| \\
&\leq |g(u) - g(x_k)| + \cancel{|g(x_k) - c(u)|} = |g(u) - g(x_k)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

dove l'ultima condizione deriva dall'uniforme continuità di g. Per l'arbitrarietà di u questo dimostra la tesi. ■

[6] Questa è una Funzione costante a tratti

Osservazione. La funzione $c(x)$ di cui sopra è la funzione output di una rete neurale con un layer nascosto:

- i pesi dall'input ai neuroni nascosti sono $w_i = 1$;
- ci sono N neuroni nascosti con funzione di attivazione $H(x)$ e bias $\theta_i = -x_i$;
- i pesi dai neuroni nascosti al neurone di output sono i c_i;
- il neurone di output è lineare.

4.2.2 One Hidden Layer Sigmoid Network

Teorema 4.2.2. Sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

1. φ sia crescente;
2. $(\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)) - (\lim_{x\to-\infty} \varphi(x)) = 1$;
3. φ sia derivabile, con $|\varphi'(x)|$ limitata.

Sia $g \in C[0,1]^5$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per ogni $i = 0, \dots, N$ degli $c_i, \theta_i, w \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [0,1] \qquad \left| g(x) - \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi(w x_i + \theta_i) \right| < \varepsilon$$

Osservazione. In particolare, tutte le funzioni di attivazione sigmoidali φ rispettano le ipotesi.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione in fasi:

1. Approssimazione di $g(x)$ con una funzione costante a tratti $c(x)$ (di coefficienti arbitrariamente piccoli);
2. Costruzione di una versione "smoother" $c_\alpha(x)$ di $c(x)$ tramite la convoluzione;
3. Aprrossimazione di $c(x)$ con $c_\alpha(x)$ (usando l'Approssimazione della misura di Dirac);
4. Approssimazione di $g(x)$ con $c_\alpha(x)$. (banale disuguaglianza triangolare)

Vedi Theorem 8.3.1 di [**calinDeepLearningArchitectures2020**] ■

4.2.3 One Hidden Layer ReLU Network

Proposizione 4.2.3. Sia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione equidistante di $[a,b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$$

tale che la funzione lineare a tratti $g_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ che passa per i punti $\big(x_i, g(x_i)\big)$ per $i = 0, \dots, N$, soddisfa

$$\forall x \in [a,b] : \quad |g(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Dimostrazione.

Parte 1. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Siccome $[a, b]$ è compatto, allora g è uniformemente continua. Sia $\delta > 0$ che soddisfi la condizione di uniforme continuità per $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

Sia N sufficientemente grande affinché $\frac{b-a}{N} < \delta$, e si definisca la partizione equidistante

$$x_j = a + \frac{b-a}{N}\, j$$

e la funzione lineare a tratti, per $i = 1, \ldots,$:

$$g_\varepsilon(x) = g(x_{i-1}) + \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \qquad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Parte 2. Sia $x \in [a, b]$ fissato. Allora $x \in [x_{k-1}, x_k]$ per qualche k.

$$\begin{aligned} |g(x) - g_\varepsilon(x)| &\leq |g(x) - g(x_{k-1})| + |g(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |g(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x)| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + |g_\varepsilon(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + |g_\varepsilon(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x_k)| \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + |g(x_{k-1}) - g(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

■

Teorema 4.2.4. Si consideri la funzione di attivazione $\mathrm{ReLU}(x) = x\, H(x)$[7]. Allora per ogni $g \in C[0, 1]$[5] esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per $i = 0, \ldots, N-1$ degli $\alpha_i, \theta_i, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, detta

$$G(x) \coloneqq \beta + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \,\mathrm{ReLU}(x + \theta_i)$$

si ha che

$$\forall x \in [0, 1] \qquad |g(x) - G(x)| < \varepsilon.$$

4.2.4 One Hidden Layer softplus Network

Lemma 4.2.5. La funzione di attivazione *softplus* $\mathrm{sp}(x)$ è data dalla convoluzione:[8]

$$\mathrm{sp}(x) = (\mathrm{ReLU} * K)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{ReLU}(\tau) K(x - \tau)\, \mathrm{d}\tau$$

dove $K(x) = \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \sigma'(x)$[9].

Lemma 4.2.6. Sia $K(x) \coloneqq \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$. Allora

1. $K(x)$ è una densità di probabilità simmetrica;

[7] Dove $H(x)$ è la Funzione di Heaviside
[8] Vedi la funzione ReLU
[9] Dove $\sigma(x)$ è la Funzione Logistica.

2. Sia $K_\alpha \coloneqq \frac{1}{\alpha}K(x/\alpha)$ e si consideri la misura μ_α tale che

$$\mathrm{d}\mu_\alpha \coloneqq K_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 1$ e $\mu_\alpha \to \delta$[10] in senso debole.

Lemma 4.2.7. Si definisca ora la funzione softplus scalata:

$$\varphi_\alpha(x) \coloneqq \alpha\,\mathrm{sp}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha\ln(1+e^{x/\alpha})$$

Si ha che

$$\varphi''_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sp}''(x/\alpha) = \frac{1}{\alpha}K(x/\alpha) = K_\alpha(x)$$

poiché $\mathrm{sp}'(x) = \sigma(x)$ e $\sigma'(x) = K(x)$.

Lemma 4.2.8. Si consideri la convoluzione $G_\alpha \coloneqq G * K_\alpha$, dove

$$G(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j\,\mathrm{ReLU}(x - x_j) + \beta$$

per qualche $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_j, x_j, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora esistono $c_j, w, \theta_j \in \mathbb{R}$, che dipendono dagli α_j, x_j tali che

$$G_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j\,\mathrm{sp}(wx - \theta_j) + \beta$$

Lemma 4.2.9. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale per cui, se $\alpha < \eta$ allora

$$\forall x \in [0,1] \qquad |G(x) - G_\alpha(x)| < \varepsilon$$

ovvero G_α converge uniformemente a G su $[0,1]$.

Dimostrazione. Banale applicazione del Teorema del Dini dopo aver notato che

$$\varphi_\alpha(x) \to \mathrm{ReLU}(x).$$

puntualmente, e $\varphi_\alpha < \varphi_\beta$ se $\alpha > \beta$. ■

Teorema 4.2.10. Sia $g \in C[0,1]$[5]. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per ogni $i = 0, \dots, N-1$, degli $c_j, w, \theta_j, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [0,1] \qquad \left| g(x) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j\,\mathrm{sp}(wx - \theta_j) - \beta \right| < \varepsilon.$$

[10] δ è la Delta di Dirac

Capitolo 5

Universal Approximation

Parte III

Sirovich