Esercizi TDI - Foglio 1

Davide Peccioli

21 marzo 2025

1 Esercizio 1

Prove that the following are Polish subspaces of the Baire space ω^ω:

$$A = \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ has infinite range}\}$$
$$B = \{x \in \omega^\omega \mid x^{-1}(n) \text{ is infinite, for every } n \in \omega\}.$$

In contrast, show that

$$C = \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ is not surjective}\}$$
$$D = \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ has finite range}\}$$

are not Polish. (Use the fact that in a Polish space X, if $A \subseteq X$ is $\boldsymbol{F}_\sigma$ and both dense and codense, then A is not $\boldsymbol{G}_\delta$.)

1.1 Soluzione

Si fissa una metrica completa d su ω^ω: per ogni $x, y \in \omega^\omega$

$$d(x,y) \coloneqq \sum_{i\in\omega} 2^{-i}\ \frac{|x(i)-y(i)|}{|x(i)-y(i)|+1}$$

1.1.1 Insieme A

Si vuole dimostrare che A sia un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$, visto il Teorema di caratterizzazione.

Consideriamo, per ogni $n \in \omega$:

$$A_n \coloneqq \left\{x \in \omega^\omega \ \middle|\ \left|x(\omega)\right| > n\right\} \subseteq \omega^\omega$$

dove con $|\cdot|$ si intende la cardinalità.

Allora $A = \bigcap_{n\in\omega} A_n$. È sufficiente dimostrare che gli A_n siano aperti nella topologia prodotto.

Sia $x \in A_n$ fissato, e sia $N \in \omega$ tale che $\left|\operatorname{ran}(x \restriction N)\right| > n$. Allora

$$x \in \left\{x(0)\right\} \times \left\{x(1)\right\} \times \cdots \times \left\{x(N)\right\} \times \omega \times \cdots \eqqcolon \mathcal{A}_x$$

e $\mathcal{A}_x$ aperto della topologia prodotto. Inoltre, $\mathcal{A}_x \subseteq A_n$, quindi A_n è intorno di ogni suo punto, e pertanto aperto.

1.1.2 Insieme B

Si vuole dimostrare che B sia un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$, visto il Teorema di caratterizzazione.

Sia, per ogni $n, m \in \omega$:

$$B_{n,m} \coloneqq \left\{ x \in \omega^\omega \mid \left| x^{-1}(n) \right| > m \right\} \subseteq \omega^\omega$$

dove con $|\cdot|$ si intende la cardinalità.

Allora

$$B = \bigcap_{(n,m) \in \omega^2} B_{n,m}$$

dove ω e ω^2 sono equipotenti: $\omega \asymp \omega^2$. È quindi sufficiente dimostrare che i $B_{n,m}$ sono aperti.

Sia $x \in B_{n,m}$ e sia $N \in \omega$ tale che

$$\left| \left\{ i \leq N \mid x(i) = n \right\} \right| > m$$

Allora

$$x \in \left\{ x(0) \right\} \times \left\{ x(1) \right\} \times \cdots \times \left\{ x(N) \right\} \times \omega \times \cdots \eqqcolon \mathcal{B}_x$$

e $\mathcal{B}_x$ aperto della topologia prodotto. Inoltre, $\mathcal{B}_x \subseteq B_{n,m}$, quindi $B_{n,m}$ è intorno di ogni suo punto, e pertanto aperto.

1.1.3 Insiemi C e D

Sfruttando il suggerimento, bisogna dimostrare che:

- C e D sono insiemi $\boldsymbol{F}_\sigma$;
- C e D sono densi in ω^ω;
- C e D sono codensi in ω^ω.

Siccome $D \subseteq C \subseteq \omega^\omega$, si ha che $\omega^\omega \setminus C \subseteq \omega^\omega \setminus D \subseteq \omega^\omega$. Pertanto, basta dimostrare le seguenti affermazioni.

- C e D sono insiemi $\boldsymbol{F}_\sigma$.

  Posto $C_n \coloneqq \left\{ x \in \omega^\omega \mid n \notin x(\omega) \right\}$, è possibile scrivere

  $$C = \bigcup_{n \in \omega} \left\{ x \in \omega^\omega \mid n \notin x(\omega) \right\}$$

  I C_n sono chiusi. Infatti, sfruttando la caratterizzazione dei chiusi per successioni, sia $(x_k)_{k \in \omega}$ una successione convergente di elementi di C_n, $x_k \to x$. Se per assurdo $x \notin C_n$, allora esiste $i_0 \in \omega$ tale che $x(i_0) = n$. Allora, per ogni $k \in \omega$,

  $$|x_k(i_0) - x(i_0)| = \varepsilon_0 \geq 1$$

  e quindi, per ogni $k \in \omega$

  $$d(x_k, x) = \sum_{j \in \omega} 2^{-j} \ \frac{|x_k(i_0) - x(i_0)|}{1 + |x_k(i_0) - x(i_0)|} \geq 2^{-i_0} \ \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 1}$$

Questo è assurdo poiché la successione converge e la distanza induce la topologia.

L'insieme D, invece, è il complementare di A e A è un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$. Pertanto D è un insieme $\boldsymbol{F}_\sigma$.

- D è denso in ω^ω.

  Si dimostra che per ogni $x \in \omega^\omega$ esiste una successione convergente

  $$(x_n)_{n\in\omega} \subseteq D$$

  tale che $x_n \to x$.

  Sia $x \in \omega^\omega$ fissato e sia, per ogni $n \in \omega$:

  $$x_n \coloneqq (x \restriction n) \cup \big\{(m, 0) \mid n < m < \omega\big\}$$

  Allora $x_n \in \omega^\omega$ e in particolare $x_n \in D$, poiché ha range di cardinalità minore di $n+2$.

  Inoltre, $x_n \to x$. Infatti la successione delle distanze tende a 0:

  $$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j\in\omega} 2^{-j}\ \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &= \sum_{j\geq n} 2^{-j}\ \frac{x(j)}{1 + x(j)} \leq \sum_{j\geq n} 2^{-j} = 2^{1-n} \to 0 \end{aligned}$$

- C è codenso in ω^ω.

  Si dimostra che per ogni $x \in \omega^\omega$ esiste una successione convergente

  $$(x_n)_{n\in\omega} \subseteq \omega^\omega \setminus C$$

  tale che $x_n \to x$.

  Sia $x \in \omega^\omega$ fissato, e sia, per ogni $n \in \omega$:

  $$x_n \coloneqq (x \restriction n) \cup \big\{(m, m-n) \mid n \leq m < \omega\big\}$$

  Ciascuna $x_n \notin \omega^\omega \setminus C$, in quanto x_n è suriettiva. Inoltre, $x_n \to x$. Infatti la successione delle distanze tende a 0:

  $$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j\in\omega} 2^{-j}\ \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &= \sum_{j\geq n} 2^{-j}\ \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &\leq \sum_{j\geq n} 2^{-j} = 2^{1-n} \to 0 \end{aligned}$$

  ■

2 Esercizio 2

Let $2^{(\omega^{<\omega})}$ be endowed with the product over the countable index set $\omega^{<\omega}$ of the discrete topology on $2 = \{0, 1\}$. Let $\mathrm{Tr} \subseteq 2^{(\omega^{<\omega})}$ be the set consisting of all characteristic functions of trees on ω. Show that Tr is closed in $2^{(\omega^{<\omega})}$ and thus it is a Polish space. Show also that the set $\mathrm{PTr} \subseteq \mathrm{Tr}$ of (the characteristic functions of) pruned trees is $\boldsymbol{G}_\delta$ and thus Polish as well. Finally, prove that $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{PTr}$ is not a Polish space.

2.1 Soluzione

La topologia prodotto di $2^{(\omega^{<\omega})}$ è generata dai seguenti aperti:

$$\mathscr{B} := \left\{ \prod_{\eta \in \omega^{<\omega}} U_\eta \;\middle|\; \begin{array}{l} U_\eta \subseteq 2 \\ U_\eta \neq 2 \text{ per un numero finito di indici} \end{array} \right\}.$$

Data la topologia discreta di 2, infatti, $U_\eta \subseteq 2$ è sempre aperto.

In realtà $\mathscr{B}$ è esattamente la topologia di $2^{(\omega^{<\omega})}$, in quanto:

- $\mathscr{B}$ è chiuso per intersezioni finite;
- $\mathscr{B}$ è chiuso per unioni arbitrarie.

2.1.1 Tr è chiuso in $2^{(\omega^{<\omega})}$

Per la definizione di albero, per ogni $f \in 2^{(\omega^{<\omega})}$, $f \notin \mathrm{Tr}$ se e solo se esiste $s \in \omega^{<\omega}$ tale che

$$f(s) = 1; \qquad f\big(s \restriction (\mathrm{lh}(s) - 1)\big) = 0$$

Si denoti per questa prima parte dell'esercizio: $s \restriction (\mathrm{lh}(s) - 1) =: s^*$.

In previsione di sfruttare la caratterizzazione dei chiusi per successioni, sia $(\chi_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathrm{Tr}$ una successione convergente:

$$\chi_n \to \chi$$

Si supponga per assurdo che $\chi \notin \mathrm{Tr}$. Allora esiste $s \in \omega^{<\omega}$ tale che

$$\chi(s) = 1; \qquad \chi(s^*) = 0$$

Allora χ appartiene all'aperto $V := \prod_{\eta\in\omega^\omega} V_\eta$, con

$$V_\eta := \begin{cases} 2 & \eta \neq s, s^* \\ \{1\} & \eta = s \\ \{0\} & \eta = s^* \end{cases}$$

e pertanto esiste $N \in \omega$ tale che $\chi_N \in V$. Assurdo, poiché questo implica che $\chi_N \notin \mathrm{Tr}$.

Pertanto $\chi \in \mathrm{Tr}$ e dunque Tr chiuso.

2.1.2 PTr è uno spazio polacco

Per definizione di albero potato, si ha che $\chi \in \mathrm{PTr}$ se e solo se $\chi \in \mathrm{Tr}$ e per ogni $s \in \omega^{<\omega}$:

$$\chi(s) = 1 \implies \exists\, m \in \omega \mid \chi\left(s^\frown m\right) = 1$$

Si definisce, per ogni $(\eta, j) \in \omega^{<\omega} \times \omega$

$$\Lambda'_{\eta,j} \coloneqq \left\{\chi \in \omega^{<\omega} \mid \chi(\eta) = 1 \wedge \chi(\eta^\frown j) = 1\right\}$$

Questi sono aperti in $\omega^{<\omega}$ e pertanto i $\Lambda_{\eta,j} \coloneqq \Lambda'_{\eta,j} \cap \mathrm{Tr}$ sono aperti in Tr con la topologia di sottospazio. Si può considerare ulteriormente

$$\Theta_\eta \coloneqq \left\{\chi \in \omega^{<\omega} \mid \chi(\eta) = 0\right\} \cap \mathrm{Tr}$$

anche questo aperto in Tr.

Si considerino ora gli aperti:

$$\Gamma_\eta \coloneqq \Theta_\eta \cup \bigcup_{j\in\omega} \Lambda_{\eta,j}$$

Si ha che $\mathrm{PTr} = \bigcap_{\eta\in\omega^{<\omega}} \Gamma_\eta$. Infatti:

- se $\chi \in \mathrm{PTr}$ allora per ogni $\eta \in \omega^{<\omega}$:
  - se $\chi(\eta) = 1$ allora esiste $j \in \omega$ tale che $\chi(\eta^\frown j) = 1$, e allora $\chi \in \Lambda_{\eta,j}$ e dunque $\chi \in \Gamma_\eta$
  - se $\chi(\eta) = 0$ allora $\chi \in \Theta_\eta$ e dunque $\chi \in \Gamma_\eta$;

  pertanto $\chi \in \bigcap_{\eta\in\omega^{<\omega}} \Gamma_\eta$;
- se, viceversa, $\chi \in \bigcap_{\eta\in\omega^{<\omega}} \Gamma_\eta$, allora
  - $\chi \in \mathrm{Tr}$;
  - per ogni $\eta \in \omega^{<\omega}$, $\chi \in \Gamma_\eta$ e pertanto, se $\chi(\eta) = 1$ allora esiste $j \in \omega$ tale che $\chi(\eta^\frown j) = 1$

  pertanto $\chi \in \mathrm{PTr}$.

Siccome $\omega^{<\omega}$ è numerabile, si è dimostrata la tesi.

2.1.3 Tr \ PTr non è uno spazio polacco

L'insieme $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{PTr}$ è $\boldsymbol{F}_\sigma$, poiché PTr è polacco. Sfruttando il fatto che sottoinsiemi $\boldsymbol{F}_\sigma$ di un polacco, densi e codensi, non possono essere $\boldsymbol{G}_\delta$, si dimostra che $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{PTr}$ sia denso e codenso.

- $\mathrm{Tr} \setminus \mathrm{PTr}$ è denso. Infatti, sia $\chi \in \mathrm{Tr}$. Se $\chi \notin \mathrm{PTr}$, allora la successione costante $(\chi)_{n\in\omega}$ converge a χ.

  Se invece $\chi \in \mathrm{PTr}$, sia $A \in \omega^\omega$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\chi(A \restriction n) = 1$. Si definisce allora $\chi_n \in \mathrm{Tr} \setminus \mathrm{PTr}$, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$

$$\chi_n(s) \coloneqq \begin{cases} 0 & \mathrm{lh}(s) \geq n \wedge s = A \restriction \mathrm{lh}(s) \\ \chi(s) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente $\chi_n \in \mathrm{Tr} \setminus \mathrm{PTr}$, ed inoltre $\chi_n \to \chi$. Infatti, sia $\emptyset \neq U \subseteq 2^{(\omega^{<\omega})}$ aperto, tale che $\chi \in U$ con $U \neq \emptyset$:

$$U = \mathrm{Tr} \cap \prod_{\eta \in \omega^{<\omega}} U_\eta$$

con $\emptyset \neq U_\eta \subseteq 2$ tali che un numero finito di $U_\eta \neq 2$.

Sia quindi:

$$N := \max \left\{ \mathrm{lh}(\eta) \mid U_\eta \neq 2 \right\}$$

Allora, per ogni $n > N$, $\chi_n \in U$. Infatti, se per assurdo $\chi_n \notin U$, allora esiste $s \in \omega^{<\omega}$ tale che $\chi_n(s) \notin U_s$:

- se $\mathrm{lh}(s) < n$, allora $\chi_n(s) = \chi(s)$, ma $\chi \in U$ e pertanto $\chi(s) \in U_s$; assurdo;
- se $\mathrm{lh}(s) \geq n$, allora $\mathrm{lh}(s) > N$, e per massimalità quindi $U_s = 2$; pertanto $\chi_n(s) \in U_s$. Assurdo.

- PTr è denso. Infatti, se per assurdo non lo fosse, allora esisterebbe $U \subseteq \mathrm{Tr}$ non vuoto, aperto, e tale che $U \cap \mathrm{PTr} = \emptyset$.

  Allora

$$U = \mathrm{Tr} \cap \prod_{\eta \in \omega^{<\omega}} U_\eta$$

  con $\emptyset \neq U_\eta \subseteq 2$ tali che un numero finito di $U_\eta \neq 2$. Siano $\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subseteq \omega^{<\omega}$ tali che $U_{\eta_i} = \{1\}$, per $i = 1, \dots, k$, e siano $\{\theta_1, \dots, \theta_h\} \subseteq \omega^{<\omega}$ tali che $U_{\theta_j} = \{0\}$, per $j = 1, \dots, h$. Necessariamente, per ogni $j = 1, \dots, h$, e per ogni $i = 1, \dots, k$:

$$\forall \ell \leq \mathrm{lh}(\eta_i), \qquad \eta_i \restriction \ell \neq \theta_j$$

  altrimenti $U \subseteq \mathrm{Tr}$ sarebbe l'insieme vuoto.

  Allora si definisce $\chi \in \mathrm{Tr}$ tale che, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$:

  - se $s = \eta_i \restriction \ell$ per qualche $i = 1, \dots, k$ e per qualche $\ell \leq \mathrm{lh}(\eta_i)$, allora $\chi(s) = 1$
  - se $s \in \{\theta_1, \dots, \theta_h\}$, allora $\chi(s) = 0$.
  - Si costruisce ricorsivamente un insieme $\Lambda \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subseteq \Lambda$, e tale che, se $\eta \in \Lambda$, allora anche $\eta^\frown \ell \in \Lambda$, dove $\ell \in \omega$ è il più piccolo naturale tale che $\eta^\frown \ell \notin \{\theta_1, \dots, \theta_h\}$; tale ℓ esiste sempre, poiché $\{\theta_1, \dots, \theta_h\}$ è un insieme finito. Per ogni $s \in \Lambda$, $\chi(s) = 1$.
  - Per tutti gli altri $s \in \omega^{<\omega}$, $\chi(s) = 0$.

  Si mostra che χ genera un assurdo.

  - χ è ben definita, poiché i quattro casi considerati sono disgiunti.
  - $\chi \in \mathrm{Tr}$, in quanto, se $\chi(s) = 1$, allora per ogni $\ell \leq \mathrm{lh}(s)$, $\chi(s \restriction \ell) = 1$.
  - $\chi \in \mathrm{PTr}$, in quanto, se $\chi(s) = 1$, allora esiste sempre η che estende s tale che $\chi(\eta) = 1$.

Quindi $\chi \in U \cap \mathrm{PTr} = \emptyset$. Assurdo. ■

3 Esercizio 3

Let

$$\mathscr{L} = \{R_i \mid i < I\} \cup \{f_j \mid j < J\} \cup \{a_k \mid k < K\}$$

with $I, J, K \leq \omega$ be an at most countable first-order language, and let M be a countable $\mathscr{L}$-structure. Without loss of generality, we may assume that the domain of M is ω itself. Prove that the group of automorphisms $\mathrm{Aut}(M)$ of M is a Polish subgroup of S_∞.

3.1 Soluzione

Si fissi su $\omega^\omega \supseteq S_\infty$ la metrica completa d:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 2^{-(n+1)} & x \neq y \text{ e } n \text{ il più piccolo naturale tale che } x(n) \neq y(n) \end{cases}$$

e si denoti con

$$B_d(x, \varepsilon) \coloneqq \left\{ y \in \omega^\omega \mid d(x,y) < \varepsilon \right\}$$

la palla aperta.

3.1.1 $\mathrm{Aut}(M)$ è uno spazio polacco

È possibile scrivere $\mathrm{Aut}(M)$ come intersezione (numerabile) dei seguenti insiemi:

- per ogni $i < I$: $\Big\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(R_i)}) \in R_i \text{ sse } \big(f(a_1), \dots, f(a_{\mathrm{ar}(R_i)}) \big) \in R_i,\, \forall\, a_i \in \omega \Big\}$;
- per ogni $j < J$: $\Big\{ f \in S_\infty \mid f\left(f_j(a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(f_j)}) \right) = f_j\left(f(a_1), \dots, f(a_{\mathrm{ar}(f_j)}) \right),\, \forall\, a_i \in \omega \Big\}$;
- per ogni $k < K$: $\left\{ f \in S_\infty \mid f(a_k) = a_k \right\}$.

Volendo dimostrare che $\mathrm{Aut}(M)$ sia polacco, si sfrutta la caratterizzazione, dimostrando che sia $\boldsymbol{G}_\delta$, ovvero che tutti gli insiemi elencati sopra siano aperti, o, al più, $\boldsymbol{G}_\delta$.

- Sia $R \in \left\{ R_i \mid i < I \right\}$ di arietà n. L'insieme

  $$\mathscr{R}_R \coloneqq \Big\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_n) \in R \text{ sse } \big(f(a_1), \dots, f(a_n) \big) \in R,\, \forall\, a_i \in \omega \Big\}$$

  è un $\boldsymbol{G}_\delta$.

  Infatti, posto

  $$\mathscr{R}_{R,m} \coloneqq \Big\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_n) \in R \text{ sse } \big(f(a_1), \dots, f(a_n) \big) \in R,\, \forall\, a_i < m \Big\}$$

  questo è un aperto.

  - Presa $f \in \mathscr{R}_{R,m}$, sia $L_f \coloneqq \max_{a_i < m} \{a_1, \dots, a_n\}$, e sia $\varepsilon_f \coloneqq 2^{-(L_f+2)}$.

    Allora $f \in B_d(f, \varepsilon_f) \cap S_\infty =: V$, e $V \subseteq \mathscr{R}_{R,m}$. Se $g \in V$ e $g \neq f$, allora il più piccolo L tale che $f(L) \neq g(L)$ è tale che

    $$2^{-(L+1)} < 2^{-(L_f+2)} \implies L > L_f + 1$$

e dunque, per ogni $n < L$, compresi tutti gli $a_1, \ldots, a_n$, si ha $g(n) = f(n)$, e pertanto

$$\begin{aligned}(a_1, \ldots, a_n) \in R \ \text{ sse } & \big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big) \in R \\ \text{ sse } & \big(g(a_1), \ldots, g(a_n)\big) \in R\end{aligned}$$

Allora $\mathscr{R}_R = \bigcap_{m \in \omega} \mathscr{R}_{R,m}$ e pertanto è un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$.

- Sia $G \in \{F_j \mid j < J\}$ di arietà n. L'insieme

$$\mathscr{F}_G \coloneqq \Big\{ f \in S_\infty \mid f\big(G(a_1, \ldots, a_n)\big) = G\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big), \forall\, a_i \in \omega \Big\}$$

è un $\boldsymbol{G}_\delta$.

Infatti, posto

$$\mathscr{F}_{G,m} \coloneqq \Big\{ f \in S_\infty \mid f\big(G(a_1, \ldots, a_n)\big) = G\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big), \forall\, a_i < m \Big\}$$

questo è un aperto.

  - Preso $f \in \mathscr{F}_{G,m}$, sia $L_f \coloneqq \max_{a_i < m} \big\{ G(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n \big\}$, e sia $\varepsilon_f \coloneqq 2^{-(L_f+2)}$.

    Allora $f \in B_d(f, \varepsilon_f) \cap S_\infty \eqqcolon V$, e $V \subseteq \mathscr{F}_{G,m}$. Se $g \in V$ e $g \neq f$, allora il più piccolo L tale che $f(L) \neq g(L)$ è tale che

$$2^{-(L+1)} < 2^{-(L_f+2)} \implies L > L_f + 1$$

    e dunque, per ogni $n < L$, compresi tutti gli $G(a_1, \ldots, a_n), a_1, \ldots, a_n$, vale $g(n) = f(n)$, e pertanto

$$\begin{aligned} g\big(G(a_1, \ldots, a_n)\big) &= f\big(G(a_1, \ldots, a_n)\big) \\ &= G\big(f(a_1), \ldots, f(a_n)\big) = G\big(g(a_1), \ldots, g(a_n)\big)\end{aligned}$$

    e quindi $g \in \mathscr{F}_{G,m}$.

Siccome

$$\mathscr{F}_G = \bigcap_{m \in \omega} \mathscr{F}_{G,m}$$

allora $\mathscr{F}_G$ è $\boldsymbol{G}_\delta$.

- Sia $a \in \{a_k \mid k < K\}$. L'insieme

$$\mathscr{C}_a \coloneqq \big\{ f \in S_\infty \mid a = f(a) \big\}$$

è aperto.

Infatti, per ogni $f \in \mathscr{C}_a$, si ha che

$$f \in S_\infty \cap B_d(f, 2^{-(a+2)}) \eqqcolon V$$

ed inoltre $V \subseteq \mathscr{C}_a$. Infatti, sia $g \in V$. Allora $d(f,g) < 2^{-(a+2)}$ e quindi, se $f \neq g$, allora

$$2^{-(n+1)} < 2^{-(a+2)} \implies n > a + 1$$

dove n è il più piccolo naturale t.c. $f(n) \neq g(n)$. Pertanto $a = f(a) = g(a)$ e quindi $g \in \mathscr{C}_a$.

3.1.2 $\mathrm{Aut}(M)$ è sottogruppo di S_∞

Visto che $\mathrm{Aut}(M)$ è intersezione dei seguenti insiemi

- per ogni $i < I$: $\Big\{f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(R_i)}) \in R_i$ sse $\Big(f(a_1), \dots, f(a_{\mathrm{ar}(R_i)})\Big) \in R_i,\ \forall\, a_i \in \omega\Big\}$;
- per ogni $j < J$: $\Big\{f \in S_\infty \mid f\left(f_j(a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(f_j)})\right) = f_j\left(f(a_1), \dots, f(a_{\mathrm{ar}(f_j)})\right),\ \forall\, a_i \in \omega\Big\}$;
- per ogni $k < K$: $\big\{f \in S_\infty \mid f(a_k) = a_k\big\}$.

è sufficiente mostrare che ciascuno di questi sia chiuso per composizione di funzioni e per inversa.

Consideriamo gli insiemi $\mathscr{F}_G, \mathscr{R}_R, \mathscr{C}_a$ come sopra.

- Siano $f, g \in \mathscr{F}_G$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$

$$\begin{aligned} f \circ g\left(G(a_1, \dots, a_n)\right) &= f\left[g\left(G(a_1, \dots, a_n)\right)\right] \\ &= f\left[G\left(g(a_1), \dots, g(a_n)\right)\right] \\ &= G\left(f \circ g(a_1), \dots, f \circ g(a_n)\right) \end{aligned}$$

  e pertanto $f \circ g \in \mathscr{F}_G$.

- Sia $f \in \mathscr{F}_G$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$

$$\begin{aligned} G(a_1, \dots, a_n) &= G\left[f \circ f^{-1}(a_1), \dots, f \circ f^{-1}(a_n)\right] \\ &= f\left[G\left(f^{-1}(a_1), \dots, f^{-1}(a_n)\right)\right] \end{aligned}$$

  e quindi

$$f^{-1}\left[G(a_1, \dots, a_n)\right] = G\left(f^{-1}(a_1), \dots, f^{-1}(a_n)\right).$$

  Pertanto $f^{-1} \in \mathscr{F}_G$.

- Siano $f, g \in \mathscr{R}_R$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \in R \ &\text{ sse } \ \left(g(a_1), \dots, g(a_n)\right) \in R \\ &\text{ sse } \ \left(f \circ g(a_1), \dots, f \circ g(a_n)\right) \in R \end{aligned}$$

  e pertanto $f \circ g \in \mathscr{R}_R$.

- Sia $f \in \mathscr{R}_R$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$,

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \in R \ &\text{ sse } \ \left(f \circ f^{-1}(a_1), \dots, f \circ f^{-1}(a_n)\right) \in R \\ &\text{ sse } \ \left(f^{-1}(a_1), \dots, f^{-1}(a_n)\right) \in R, \end{aligned}$$

  e quindi $f^{-1} \in \mathscr{R}_R$.

- Siano $f, g \in \mathscr{C}_a$. Allora $f \circ g(a) = f\left(g(a)\right) = f(a) = a$, e quindi $f \circ g \in \mathscr{C}_a$.
- Sia $f \in \mathscr{C}_a$. Allora $f(a) = a$ e pertanto $f^{-1}(a) = a$, quindi $f^{-1} \in \mathscr{C}_a$. ■

4 Esercizio 4

Consider the Polish space $X = \omega^{\omega\times\omega} \times \omega$. Let Gp be the space of those $(f, a) \in X$ such that $\langle \omega, f, a\rangle$ is a group with operation f and neutral element a.

a. Prove that Gp is a Polish subspace of X.

b. Prove that the subspace of Gp consisting of Abelian groups is Polish, and similarly for the subspace of non-Abelian groups.

c. Prove that the subspace of Gp consisting of Archimedean groups is Polish.

4.1 Soluzione

4.1.1 Parte a.

Posti:

$$\begin{aligned}
A_{x,y,z} &= \Big\{(f, a) \in X \mid f\left(f(x, y), z\right) = f\left(x, f(y, z)\right)\Big\}\\
N_x &= \big\{(f, a) \in X \mid f(x, a) = f(a, x) = a\big\}\\
I_{x,y} &= \big\{(f, a) \in X \mid f(x, y) = f(y, x) = a\big\}\\
I_x &= \bigcup_{y\in\omega} I_{x,y}
\end{aligned}$$

allora, per definizione di gruppo, si ha che:

$$\mathrm{Gp} = \bigcap_{x,y,z\in\omega} A_{x,y,z} \cap \bigcap_{x\in\omega} N_x \cap \bigcap_{x\in\omega} I_x.$$

È dunque necessario dimostrare che ciascuno degli insiemi $A_{x,y,z}, N_x, I_x$ siano degli aperti, o almeno dei $\boldsymbol{G}_\delta$. Questo implica che Gp sia un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$ di $\omega^{\omega\times\omega} \times \omega$ (che è un polacco) e quindi uno spazio polacco.

- $A_{x,y,z}$ è aperto.

  Siano, per ogni $x, y, z, \mu, \lambda, \gamma \in \omega$:

  $$A^{\mu,\lambda,\gamma}_{x,y,z} := \big\{(f, a) \in X \mid f(x, y) = \mu, f(y, z) = \lambda, f(\mu, z) = \gamma, f(x, \lambda) = \gamma\big\}$$

  Allora $A_{x,y,z} = \bigcup_{\mu,\lambda,\gamma} A^{\mu,\lambda,\gamma}_{x,y,z}$.

  Inoltre, sia $(f, a) \in A^{\mu,\lambda,\gamma}_{x,y,z}$, e si consideri l'aperto $U_{(f,a)} \subseteq \omega^{\omega\times\omega} \times \omega$

  $$U_{(f,a)} := \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} U_{ij} \times V$$

  con $U_{xy} = \{\mu\}$, $U_{yz} = \{\lambda\}$, $U_{\mu z} = \{\gamma\} = U_{x\lambda}$ e $V = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

  Allora $(f, a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq A^{\mu,\lambda,\gamma}_{x,y,z}$. Dunque $A^{\mu,\lambda,\gamma}_{x,y,z}$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

  Segue che $A_{x,y,z}$ è unione di aperti, e pertanto aperto.

- N_x è aperto. Sia $(f,a) \in N_x$, e si consideri l'aperto $U_{(f,a)} \subseteq \omega^{\omega\times\omega} \times \omega$:

  $$U_{(f,a)} \coloneqq \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} U_{ij} \times V$$

  con $U_{ax} = U_{xa} = \{x\}$ e $V = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

  Allora $(f,a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq N_x$. Dunque N_x è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

- I_x è aperto. Infatti $I_{x,y}$ sono aperti, e unione numerabile di aperti è aperta. Sia $(f,a) \in I_{x,y}$ e si consideri l'aperto $U_{(f,a)} \subseteq \omega^{\omega\times\omega} \times \omega$:

  $$U_{(f,a)} \coloneqq \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} U_{ij} \times V$$

  con $V = U_{xy} = U_{yx} = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

  Allora $(f,a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq I_{x,y}$. Dunque $I_{x,y}$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

4.1.2 Parte b.

$(f,a) \in X$ descrive un gruppo abeliano se e solo se:

- $(f,a) \in \mathrm{Gp}$;
- per ogni $x, y \in \omega,\ f(x,y) = f(y,x)$.

Si denoti con $\mathrm{Ab}, \mathrm{NAb} \subseteq \mathrm{Gp}$ gli insiemi, rispettivamente, dei gruppi abeliani e dei gruppi non abeliani. Vale

$$\mathrm{Ab} = \mathrm{Gp} \setminus \mathrm{NAb}$$

Sia quindi, per ogni $x, y, \lambda, \mu \in \omega$:

$$C_{x,y}^{\lambda;\mu} = \left\{(f,a) \in X \mid f(x,y) = \lambda, f(y,x) = \mu\right\}.$$

Questo è un aperto. Infatti, sia $(f,a) \in C_{x,y}^{\lambda;\mu}$ e si consideri l'aperto $U_{(f,a)}$:

$$U_{(f,a)} \coloneqq \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} U_{ij} \times V$$

con $U_{xy} = \{\lambda\}$, $U_{yx} = \{\mu\}$ e con $V = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

Allora $(f,a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq C_{x,y}^{\lambda;\mu}$, quindi $C_{x,y}^{\lambda;\mu}$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

Si consideri ora l'aperto (in quanto unione di aperti):

$$\mathrm{NAb}_{x,y} \coloneqq \bigcup_{\lambda\neq\mu} C_{x,y}^{\lambda,\mu} = \left\{(f,a) \in X \mid f(x,y) \neq f(y,x)\right\}.$$

L'insieme $\mathrm{NAb} \subseteq \mathrm{Gp}$ è dato da

$$\mathrm{NAb} = \mathrm{Gp} \cap \bigcup_{x,y\in\omega} \mathrm{NAb}_{x,y}$$

e quindi è un aperto in Gp. Pertanto, NAb è uno spazio polacco. Inoltre $\mathrm{Ab} = \mathrm{Gp} \setminus \mathrm{NAb}$ è un chiuso di Gp e pertanto è uno spazio polacco.

4.1.3 Parte c.

Si consideri ora lo spazio topologico $Y \coloneqq X \times 2^{\omega\times\omega}$, e le due proiezioni continue per definizione di topologia prodotto:

$$\begin{aligned} \pi_X &: Y \to X \\ \pi_{2^{\omega\times\omega}} &: Y \to 2^{\omega\times\omega} \end{aligned}$$

Si consideri l'insieme OGp delle triple $(f, a, \leq)$ tali che $\langle \omega, f, a, \leq \rangle$ sia un gruppo ordinato, e quindi $\leq$ un ordine totale. Si dimostra che l'insieme seguente è uno spazio polacco:

$$\mathrm{Ar} \coloneqq \left\{ (f, a, \leq) \in \mathrm{OGp} \mid \forall\, x \in \omega\ \exists\, n \in \omega : x \leq f^{(n)}(a) \right\}$$

dove con $f^{(n)}(a)$ si intende, per ricorsione:

$$\begin{aligned} f^{(2)}(a) &\coloneqq f(a, a) \\ f^{(n+1)}(a) &\coloneqq f\left(f^{(n)}(a), a \right). \end{aligned}$$

- OGp è uno spazio polacco.

  Infatti, si considerino gli insiemi, per $x, y, z, \mu, \lambda, \delta, \gamma \in \omega$

  $$\begin{aligned} G^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}_{x,y,z} &\coloneqq \left\{ (f, a, \leq) \in Y \;\middle|\; \begin{array}{l} f(x,z) = \mu \,\wedge\, f(y,z) = \lambda \,\wedge\, f(z,x) = \delta \,\wedge \\ \wedge\, f(z,y) = \gamma \,\wedge\, \mu \leq \lambda \,\wedge\, \delta \leq \gamma \end{array} \right\} \\ G^{2}_{x,y,z} &\coloneqq \left\{ (f, a, \leq) \in Y \mid x \leq y \right\} \end{aligned}$$

  Questi sono entrambi aperti.

  - Se $(f, a, \leq) \in G^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}_{x,y,z}$, sia $U_{(f,a,\leq)}$ un aperto,

    $$U_{(f,a,\leq)} \coloneqq \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} U_{ij} \times \widetilde{U} \times \prod_{(s,t)\in\omega\times\omega} W_{st}$$

    con $U_{xz} = \{\mu\}$, $U_{yz} = \{\lambda\}$, $U_{zx} = \{\delta\}$, $U_{zy} = \{\gamma\}$, $W_{\mu\lambda} = \{1\}$ e infine $W_{\delta\gamma} = \{1\}$. Tutti gli altri $U_{ij} = \omega$, $\widetilde{U} = \omega$ e i restanti $W_{st} = 2$.

    Allora $(f, a, \leq) \in U_{(f,a,\leq)}$, ed inoltre $U_{(f,a,\leq)} \subseteq G^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}_{x,y,z}$. Quindi $G^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}_{x,y,z}$ è intorno di ogni suo punto, e pertanto aperto.

  - Se $(f, a, \leq) \in G^{2}_{x,y,z}$, sia $V_{(f,a,\leq)}$ un aperto,

    $$V_{(f,a,\leq)} \coloneqq \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} V_{ij} \times \widetilde{V} \times \prod_{(s,t)\in\omega\times\omega} W_{st}$$

    con $\widetilde{V} = V_{ij} = \omega$ per ogni i, j, e con $W_{xy} = \{1\}$. Per tutti gli altri $W_{st} = 2$.

    Allora $(f, a, \leq) \in V_{(f,a,\leq)}$, ed inoltre $V_{(f,a,\leq)} \subseteq G^{2}_{x,y,z}$. Quindi $G^{2}_{x,y,z}$ è intorno di ogni suo punto, e pertanto aperto.

È inoltre aperto l'insieme $G^1_{x,y,z} \coloneqq \Big\{(f,a,\leq) \in Y \mid f(x,z) \leq f(y,z) \,\wedge\, f(z,x) \leq f(z,y)\Big\}$, in quanto

$$G^1_{x,y,z} = \bigcup_{\mu,\lambda,\delta,\gamma\in\omega} G^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}_{x,y,z}.$$

Segue che l'insieme $G_{x,y,z} \coloneqq G^1_{x,y,z} \cup \Big[Y \setminus G^2_{x,y,z}\Big]$ sia un $\boldsymbol{G}_\delta$, in quanto unione di un aperto e di un chiuso (i chiusi negli spazi polacchi sono $\boldsymbol{G}_\delta$).

Inoltre, si è dimostrato che $\mathrm{Gp} \subseteq X$ è un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$ (nel punto precedente) e che l'insieme degli ordini $\mathrm{LO} \subseteq 2^{\omega\times\omega}$ è un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$ (a lezione). Pertanto, siccome la preimmagine continua di $\boldsymbol{G}_\delta$ è ancora $\boldsymbol{G}_\delta$, si ha che sono $\boldsymbol{G}_\delta$ di Y i seguenti insiemi:

$$\pi_X^{-1}(\mathrm{Gp}), \quad \pi^{-1}_{2^{\omega\times\omega}}(\mathrm{LO}).$$

Siccome vale questa uguaglianza

$$\mathrm{OGp} = \pi_X^{-1}(\mathrm{Gp}) \cap \pi^{-1}_{2^{\omega\times\omega}}(\mathrm{LO}) \cap \bigcap_{x,y,z\in\omega} G_{x,y,z}$$

si è scritto OGp come intersezione numerabile di $\boldsymbol{G}_\delta$.Quindi OGp è uno spazio polacco, in quanto sottoinsieme $\boldsymbol{G}_\delta$ dello spazio polacco Y.

- L'insieme:

  $$\widetilde{\mathrm{Ar}}^n_x \coloneqq \Big\{(f,a,\leq) \in Y \mid x \leq f^{(n)}(a)\Big\}$$

  è aperto. Infatti, si consideri

  $$\Gamma^{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}_{x,n} \coloneqq \Big\{(f,a,\leq) \in Y \mid f(a,a) = \lambda_2 \,\wedge\, f(\lambda_2,a) = \lambda_3 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, f(\lambda_{n-1},a) = \lambda_n \,\wedge\, x \leq \lambda_n\Big\}$$

  Ciascun $\Gamma^{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}_{x,n}$ è aperto, poiché, presa $(f,a,\leq) \in \Gamma^{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}_{x,n}$, è possibile prendere l'aperto $U_{(f,a,\leq)}$:

  $$U_{(f,a,\leq)} \coloneqq \prod_{(i,j)\in\omega\times\omega} U_{ij} \times \widetilde{U} \times \prod_{(s,t)\in\omega\times\omega} W_{st}$$

  con $\widetilde{U} = \{a\}$, $U_{aa} = \lambda_2$, per ogni $i = 2,\ldots,n-1$: $U_{\lambda_i a} = \{\lambda_{i+1}\}$, e $W_{x\lambda_n} = \{1\}$. Si pongono tutti gli altri $U_{ij} = \omega$ e $W_{st} = 2$.

  Si ha quindi che $(f,a,\leq) \in U_{(f,a,\leq)} \subseteq \Gamma^{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}_{x,n}$, e pertanto $\Gamma^{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}_{x,n}$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

  Dunque $\widetilde{\mathrm{Ar}}^n_x = \bigcup_{\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\omega} \Gamma^{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}_{x,n}$ è a sua volta aperto.

Allora $\mathrm{Ar}^n_x = \widetilde{\mathrm{Ar}}^n_x \cap \mathrm{OGp}$ è aperto in OGp. Quindi

$$\mathrm{Ar} = \bigcap_{x\in\omega} \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{Ar}^n_x$$

è un insieme $\boldsymbol{G}_\delta$ di OGp, e quindi uno spazio polacco. ∎

5 Esercizio 5

Suppose that d is an ultrametric on a space X. Prove the following statements:

a. If $d(x,z) \neq d(y,z)$, then $d(x,y) = \max\{d(x,z), d(y,z)\}$ ("all triangles are isosceles with legs longer than or equal to the basis").

b. The "open" balls $B_d(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) < \varepsilon\}$ and the "closed" balls $B_d^{\mathrm{cl}}(x,\varepsilon) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq \varepsilon\}$ are both clopen.

c. If $y \in B_d(x,\varepsilon)$, then $B_d(y,\varepsilon) = B_d(x,\varepsilon)$ ("all elements of an open ball are centers of it").

d. If two open (closed) balls intersect, then one is contained in the other one.

5.1 Soluzione

5.1.1 Parte a.

Si supponga per assurdo che esistano $x, y, z \in X$ tali che $d(x,z) \neq d(y,z)$ e

$$d(x,y) < \max\left\{d(x,z), d(y,z)\right\} \tag{1}$$

Quindi $d(x,y) \neq d(x,z)$ e $d(x,y) \neq d(y,z)$, e pertanto vale anche

$$d(x,z) < \max\left\{d(x,y), d(y,z)\right\} \tag{2}$$
$$d(y,z) < \max\left\{d(x,y), d(x,z)\right\} \tag{3}$$

Si considerino ora l'insieme di numeri reali distinti:

$$\left\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\right\}$$

e se ne consideri il massimo M, che esiste poiché l'insieme è finito. La prima condizione asserisce che

$$d(x,y) < \max\left\{d(x,z), d(y,z)\right\} \leq \max\left\{d(x,y), d(y,z), d(x,z)\right\} = M$$

e pertanto $M \neq d(x,y)$. Similmente, la seconda condizione asserisce che $M \neq d(x,z)$ e la terza che $M \neq d(y,z)$. Assurdo.

5.1.2 Parte d.

Siano $x, y \in X$ e siano $\varepsilon, \delta > 0$, con $\varepsilon \geq \delta$.

- Se $B_d(x,\varepsilon) \cap B_d(y,\delta) \neq \emptyset$, allora $B_d(y,\delta) \subseteq B_d(x,\varepsilon)$.

  Infatti, sia $z_0 \in B_d(x,\varepsilon) \cap B_d(y,\delta)$. Si ha che

  $$d(x,z_0) < \varepsilon; \qquad d(y,z_0) < \delta.$$

  Sia ora $z \in B_d(y,\delta)$, i.e. $d(z,y) < \delta$. Allora

  $$d(z,z_0) \leq \max\left\{d(y,z_0), d(z,y)\right\} < \delta \leq \varepsilon$$
  $$d(z,x) \leq \max\left\{d(x,z_0), d(z_0,z)\right\} < \varepsilon.$$

  e quindi $z \in B_d(x,\varepsilon)$.

- Se $B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon) \cap B_d^{\text{cl}}(y,\delta) \neq \emptyset$, allora $B_d^{\text{cl}}(y,\delta) \subseteq B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$.

  Infatti, sia $z_0 \in B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon) \cap B_d^{\text{cl}}(y,\delta)$. Si ha che

  $$d(x,z_0) \leq \varepsilon; \qquad d(y,z_0) \leq \delta.$$

  Sia ora $z \in B_d^{\text{cl}}(y,\delta)$, i.e. $d(z,y) \leq \delta$. Allora

  $$\begin{aligned} d(z,z_0) &\leq \max\left\{d(y,z_0), d(z,y)\right\} \leq \delta \leq \varepsilon \\ d(z,x) &\leq \max\left\{d(x,z_0), d(z_0,z)\right\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

  e quindi $z \in B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$.

5.1.3 Parte b.

- La palla $B_d(x,\varepsilon)$ è aperta per definizione di topologia indotta da una metrica
- Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_d(x,\varepsilon)$ una successione convergente a ℓ. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_N,\ell) < \varepsilon$. Inoltre $d(x_N,x) < \varepsilon$.

  Supponiamo per assurdo che $\ell \notin B_d(x,\varepsilon)$. Allora $d(\ell,x) \geq \varepsilon$. Ma, per definizione di ultrametrica

  $$d(\ell,x) \leq \max\left\{d(x_N,\ell), d(x_N,x)\right\} < \varepsilon.$$

  Assurdo. Pertanto $B_d(x,\varepsilon)$ è chiusa, per la caratterizzazione dei chiusi per successioni.
- Sia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$ una successione convergente a ℓ. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_N,\ell) \leq \varepsilon$. Inoltre $d(x_N,x) \leq \varepsilon$.

  Supponiamo per assurdo che $\ell \notin B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$. Allora $d(\ell,x) > \varepsilon$. Ma, per definizione di ultrametrica

  $$d(\ell,x) \leq \max\left\{d(x_N,\ell), d(x_N,x)\right\} \leq \varepsilon.$$

  Assurdo. Pertanto $B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$ è chiusa, per la caratterizzazione dei chiusi per successioni.
- Sia $y \in B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$. Allora $y \in B_d\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_d^{\text{cl}}\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$, con $B_d\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ aperto.

  Inoltre $y \in B_d^{\text{cl}}\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$ e pertanto, per il punto d.

  $$y \in B_d\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_d^{\text{cl}}\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon).$$

  Quindi $B_d^{\text{cl}}(x,\varepsilon)$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

5.1.4 Parte c.

Sia $y \in B_d(x,\varepsilon)$. Allora $d(x,y) < \varepsilon$.

Si vuole dimostrare che

$$B_d(y,\varepsilon) = B_d(x,\varepsilon).$$

- Sia $z \in B_d(y, \varepsilon)$. Allora $d(y, z) < \varepsilon$, e pertanto

$$d(x, z) \leq \max \left\{ d(x, y), d(y, z) \right\} < \varepsilon$$

e quindi $z \in B_d(x, \varepsilon)$.

- Sia $z \in B_d(x, \varepsilon)$. Allora $d(x, z) < \varepsilon$, e pertanto

$$d(y, z) \leq \max \left\{ d(y, x), d(x, z) \right\} < \varepsilon$$

e quindi $z \in B_d(y, \varepsilon)$. ■