

# Giochi di Banach-Mazur

Davide Peccioli

4 giugno 2025

# Indice

<b>1</b>	<b>Giochi Logici</b>	<b>2</b>
1.1	Giochi di Gale-Stewart . . . . .	3
1.1.1	Strategia per un gioco di Gale-Stewart . . . . .	3
1.1.2	Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili . . . . .	4
1.2	Teorema di Gale-Stewart . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Insiemi analitici e BP</b>	<b>4</b>
2.1	Gioco di Choquet . . . . .	4
2.2	Gioco di Banach-Mazur . . . . .	5
2.3	Gioco di Banach-Mazur unfolded . . . . .	9
2.4	Teorema di Lusin-Sierpiński . . . . .	11

# 1 Giochi Logici

Le definizioni di questa prima parte sono tratte da [2].

**Definizione 1.1.** Un gioco logico è una quadrupla  $\mathcal{G} := (\Omega, f, W_I, W_{II})$  dove:

- $\Omega$  è un insieme, chiamato il dominio del gioco;
- $f : \Omega^{<\omega} \rightarrow \{I, II\}$  è una funzione, chiamata funzione di turno o funzione del giocatore;
- $W_I, W_{II} \subseteq \Omega^{<\omega} \cup \Omega^\omega$  sono tali che

1.  $W_I \cap W_{II} = \emptyset$ ;
2. per ogni  $\mathbf{a} \in W_\bullet$  e per ogni  $\mathbf{b} \in \Omega^{<\omega} \cup \Omega^\omega$ :

$$\mathbf{a} \subseteq \mathbf{b} \implies \mathbf{b} \in W_\bullet.$$

Gli elementi di  $\Omega^{<\omega}$  sono chiamati posizioni del gioco  $\mathcal{G}$ , mentre un elemento di  $\Omega^\omega$  è detto giocata di  $\mathcal{G}$ .

I giocatori I e II giocano scegliendo a turno elementi di  $\Omega$ . La funzione di turno  $f$  associa a ciascuna posizione uno dei due giocatori: se

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = I$$

allora l'elemento  $a_{n+1}$  sarà scelto dal giocatore I.

Si dirà che il giocatore I vince la giocata  $\mathbf{a}$  se  $\mathbf{a} \in W_I$ ; si dirà che il giocatore II vince la giocata  $\mathbf{b}$  se  $\mathbf{b} \in W_{II}$ .

**Definizione 1.2.** Un gioco è detto totale se  $\Omega^\omega \subseteq W_I \cup W_{II}$ .

Si definiscano i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} \Omega_I^{<\omega} &:= \{s \in \Omega^{<\omega} \mid f(s) = I\} \\ \Omega_{II}^{<\omega} &:= \{s \in \Omega^{<\omega} \mid f(s) = II\} \end{aligned}$$

Una strategia per un giocatore è un insieme di regole che descrivono esattamente come quel giocatore dovrebbe scegliere la sua mossa, in base a tutte le mosse precedenti.

**Definizione 1.3.** Una strategia per il giocatore  $j$  (con  $j = I, II$ ) è una funzione

$$\varphi : \Omega_j^{<\omega} \rightarrow \Omega$$

Una strategia è detta vincente se quel giocatore vince ogni giocata in cui viene utilizzata, a prescindere da cosa gioca l'altro.

**Definizione 1.4.** Un gioco si dice determinato se esiste una strategia vincente per I o per II.

**Definizione 1.5.** Due giochi logici  $\mathcal{G}$  e  $\mathcal{G}'$  con giocatori I e II sono detti equivalenti se sono soddisfatte entrambe le seguenti ipotesi:

1. esiste una strategia vincente per I in  $\mathcal{G}$  sse esiste una strategia vincente per I in  $\mathcal{G}'$
2. esiste una strategia vincente per II in  $\mathcal{G}$  sse esiste una strategia vincente per II in  $\mathcal{G}'$

## 1.1 Giochi di Gale-Stewart

Sia  $A$  un insieme non vuoto, e sia  $C \subseteq A^\omega$ .

**Definizione 1.6.** Si definisce il gioco di Gale-Stewart associato ad  $C$  come il gioco logico seguente:

$$G(A, C) = G(A) := (A, \psi, C, A^\omega \setminus C)$$

dove la funzione  $\psi : A^{<\omega} \rightarrow \{I, II\}$  è così definita

$$\psi(s) := \begin{cases} I & \text{lh}(s) \text{ è pari} \\ II & \text{lh}(s) \text{ è dispari} \end{cases}$$

Pertanto il gioco può essere codificato come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} I & a_0 & & a_2 & & a_4 & \dots \\ II & & a_1 & & a_3 & & \dots \end{array}$$

e il giocatore I vince se e solo se  $(a_n)_{n \in \omega} \in C$ .

### 1.1.1 Strategia per un gioco di Gale-Stewart

Nel caso di un gioco di Gale-Stewart, è possibile vedere una strategia  $\varphi$  per il giocatore I in tre modi diversi, del tutto equivalenti.

1. Una mappa  $\psi : A^{<\omega} \rightarrow A^{<\omega}$  tale che, per ogni  $s \in A^{<\omega}$  valga che lunghezza sia

$$\text{lh } \varphi(s) = \text{lh}(s) + 1$$

Intuitivamente, questa funzione associa alla sequenza degli  $(a_{2i+1})$  giocati dal giocatore II una sequenza degli  $(a_{2i})$  per il giocatore I:

$$\varphi(\emptyset) = \langle a_0 \rangle, \quad \varphi(\langle a_1 \rangle) = \langle a_0, a_2 \rangle, \quad \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle) = \langle a_0, a_2, a_4 \rangle.$$

2. Una mappa  $\psi : A^{<\omega} \rightarrow A$ .

Intuitivamente, questa funzione associa alla sequenza degli  $(a_{2i+1})$  giocati dal giocatore II l'elemento  $a_j \in A$  che deve giocare il giocatore I:

$$\varphi(\emptyset) = a_0, \quad \varphi(\langle a_1 \rangle) = a_2, \quad \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle) = a_4.$$

3. Una albero  $\sigma \subseteq A^{<\omega}$  tale che:

- (a)  $\sigma$  sia potato e non vuoto;
- (b) se  $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$  allora per ogni  $a_{2j+1} \in A$ :  $\langle a_0, \dots, a_{2j+1} \rangle \in \sigma$ ;
- (c) se  $\langle a_0, \dots, a_{2j-1} \rangle \in \sigma$  allora esiste un unico  $a_{2j} \in A$  tale che  $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$ .

Una strategia è detta vincente se il suo corpo  $[\sigma] \in A$ .

### 1.1.2 Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili

Spesso è comodo considerare giochi in cui I e II non possano giocare ogni elemento di  $A$ , ma debbano seguire delle regole. Quindi, è necessario dare un albero potato non vuoto  $T \subseteq A^{<\omega}$ , che determina le posizioni ammissibili.

In questa situazione I e II si alternano giocando  $\langle a_0, \dots, a_n, \dots \rangle$  in maniera tale che, ad ogni passo  $n \in \omega$

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle \in T$$

Si scriverà, in questo caso,  $G(T, C)$ .

Si noti che questo non modifica il formalismo, in quanto è sufficiente cambiare gli insiemi di vittoria  $C$  e  $A^\omega \setminus C$  in maniera da far perdere automaticamente il giocatore che effettua una mossa illegale.

Inoltre, il gioco definito sopra  $G(T, C)$  è equivalente al gioco  $G(A, C')$ , dove

$$C' := \{x \in A^\omega \mid [\exists n(x \upharpoonright n \notin T) \wedge \text{il minore } n \text{ tale che } x \upharpoonright n \notin T \text{ è pari}] \vee (x \in [T] \wedge x \in C)\}.$$

## 1.2 Teorema di Gale-Stewart

Sia  $A$  uno spazio topologico discreto e sia  $A^\omega$  dotato della topologia prodotto.

**Teorema di Gale-Stewart 1.7.** Sia  $T$  un albero potato non vuoto su  $A$ . Se  $C \subseteq [T]$  è aperto o chiuso in  $[T]$  e Sottospazio topologico, allora il gioco  $G(T, C)$  è determinato.

## 2 Insiemi analitici e BP

Lo scopo di questa sezione è dimostrare il fatto che, in uno spazio Polacco, ogni sottoinsieme analitico ha la Baire Property. Per farlo si sfruttano i giochi di Banach-Mazur. Le dimostrazioni sono tratte da [3] salvo diversamente indicato.

### 2.1 Gioco di Choquet

**Definizione 2.1.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico non vuoto. Il gioco di Choquet  $G_X$  è un gioco di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di  $X$ :

$$\begin{array}{ccccccc} I & U_0 & & U_1 & & U_2 & \dots \\ II & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

tali che  $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$$

e, poiché il gioco è totale, il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset.$$

**Teorema 2.2.** Uno spazio topologico  $X$  è uno spazio topologico di Baire se e solo se il giocatore I non ha una strategia vincente nel gioco di Choquet  $G_X$ .

**Definizione 2.3.** Uno spazio topologico  $X$  è detto spazio di Choquet se il giocatore II ha una strategia vincente in  $G_X$ .

*Osservazione.* Se il giocatore I non ha una strategia vincente, non è detto che il giocatore II ne abbia una.

Viceversa, però, se II ha una strategia vincente, allora necessariamente I non ne ha una. Quindi ogni spazio di Choquet è uno spazio topologico di Baire.

**Proposizione 2.4.** I sottospazi aperti non vuoti di uno spazio di Choquet sono spazi di Choquet.

Il prodotto finito di Spazi di Choquet sono spazi di Choquet.

## 2.2 Gioco di Banach-Mazur

Sia  $X$  uno spazio topologico non vuoto, e sia  $A \subseteq X$ .

**Definizione 2.5.** Il gioco di Banach-Mazur (detto anche \*\*-gioco) di  $A$ , denotato con  $G^{**}(A)$  oppure con  $G^{**}(A, X)$  è un gioco di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di  $X$

$$\begin{array}{ccccccc} I & U_0 & & U_1 & & U_2 & \dots \\ II & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

tali che  $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq A.$$

**Teorema 2.6.** Sia  $X$  uno spazio topologico non vuoto, e sia  $A \subseteq X$  un sottoinsieme qualsiasi. Allora  $A$  è comagro se e solo se il giocatore II ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur  $G^{**}(A)$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ): Se  $A$  è comagro, allora esistono  $(W_n)_{n \in \omega}$  aperti densi di  $X$  tali che

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \supseteq A.$$

Il giocatore II gioca  $V_n := W_n \cap U_n$ ; questo è aperto, e inoltre è non vuoto poiché  $W_n$  è denso in  $X$ .

( $\Leftarrow$ ): Sia  $\sigma$  una strategia vincente di II. Si costruisce  $\sigma' \subseteq \sigma$  albero potato e non vuoto per induzione sulla lunghezza delle stringhe.

- $\emptyset \in \sigma'$ .
- Sia  $s = \langle U_0, V_0, \dots, U_n \rangle$ . Allora esiste un unico  $V_n \subseteq U_n$  tale che  $s \frown V_n \in \sigma$ . Si pone  $s \frown V_n \in \sigma'$ .

- Sia  $s = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$ . Per ogni sottoinsieme aperto  $U \subseteq V_n$  si definisce  $U^*$  l'unico sottoinsieme di  $U$  tale che

$$s \smallfrown \langle U, U^* \rangle \in \sigma$$

È possibile, tramite un'applicazione del Lemma di Zorn, garantire l'esistenza di una collezione massimale  $\mathcal{U}_s$  di aperti non vuoti  $U \subseteq V_n$  tale che la collezione  $\mathcal{V}_s := \{U^* \mid U \in \mathcal{U}_s\}$  sia composta da insiemi a due a due disgiunti.

Infatti, data una catena di collezioni di aperti che soddisfino la proprietà richiesta  $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$  ordinata dall'inclusione, allora

$$\mathcal{U}^* := \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha$$

è un maggiorante della catena, in quanto detto

$$\mathcal{V}^* := \{U^* \mid U \in \mathcal{U}^*\}$$

dati  $V, V' \in \mathcal{V}^*$  allora esiste  $\mathcal{U}_{\alpha_0}$  ed esistono  $U_0, U_1 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$  tali che

$$U_0^* = V, \quad U_1^* = V'$$

e pertanto  $V \cap V' = \emptyset$ .

Dunque, per ogni  $U \in \mathcal{U}_s$ ,  $s \smallfrown U \in \sigma'$ .

Inoltre  $\bigcup \mathcal{V}_s$  è denso in  $V_n$ . Infatti, se per assurdo esistesse  $B \subseteq V_n$  aperto tale che  $B \cap \bigcup \mathcal{V}_s = \emptyset$ , allora  $\mathcal{U}_s \cup \{B\}$  viola la massimalità di  $\mathcal{U}_s$ .

Sia ora, per ogni  $n \in \omega$ :

$$W_{n+1} := \bigcup_{\substack{s \in \sigma' \\ \text{lh}(s)=2n}} \bigcup \mathcal{V}_s = \bigcup_{\langle U_0, V_0, \dots, U_{n+1}, V_{n+1} \rangle \in \sigma'} V_{n+1}$$

Per ogni  $n \in \omega$ ,  $W_{n+1} \subseteq X$  è denso.

- $W_1$  è denso, poiché  $\mathcal{U}_\emptyset$  è una collezione di aperti di  $X$  tali che  $\mathcal{V}_\emptyset$  sia composta da insiemi a due a due disgiunti, e pertanto, se vi fosse  $B \subseteq X$  aperto tale che  $B \cap W_1 = \emptyset$ , allora  $\mathcal{U}_\emptyset \cup \{B\}$  viola la massimalità di  $\mathcal{U}_\emptyset$ .
- Se  $W_{n+1}$  è denso, allora lo è anche  $W_{n+2}$ . Sia  $B \subseteq X$  aperto.

Siccome  $W_{n+1}$  è denso allora  $W_{n+1} \cap B \neq \emptyset$ , ed esiste  $\tilde{s} = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$  tale che  $B \cap \bigcup \mathcal{V}_{\tilde{s}} \neq \emptyset$ .

Quindi esistono  $V_n \supseteq U \supseteq V$  tali che  $\tilde{s} \smallfrown \langle U, V \rangle \in \sigma'$ , con  $V \cap B \neq \emptyset$ . Infatti, se così non fosse, allora  $\mathcal{U}_{\tilde{s}} \cup \{V_n \cap B\}$  contraddice la massimalità di  $\mathcal{U}_{\tilde{s}}$ .

Poiché  $\bigcup \mathcal{V}_{s \smallfrown \langle U, V \rangle}$  è denso in  $V$ , allora  $\bigcup \mathcal{V}_{s \smallfrown \langle U, V \rangle} \cap B \neq \emptyset$ , ed inoltre

$$\bigcup \mathcal{V}_{\tilde{s} \smallfrown \langle U, V \rangle} \subseteq W_{n+2}$$

e pertanto  $W_{n+2} \cap B \neq \emptyset$ .

Per finire, si dimostra che  $\bigcap_{n \in \omega} W_{n+1} \subseteq A$ . Sia  $x \in \bigcap_{n \in \omega} W_{n+1}$ .

Allora esiste  $(U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma']$  tale che  $x \in V_n$  per ogni  $n$ . Questa si costruisce per induzione.

- Poiché  $x \in W_1$ , allora esiste  $\langle U_0, V_0, U_1, V_1 \rangle \in \sigma'$  tale che  $x \in V_1$ .
- Sia ora  $p = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$  tale che  $x \in V_n$ .

Siccome  $x \in W_{n+1}$  allora esiste  $p' \in \sigma'$ ,

$$p' := \langle U'_0, V'_0, \dots, U'_{n+1}, V'_{n+1} \rangle$$

tale che  $x \in V_{n+1}$ . Necessariamente  $p'$  estende  $p$ .

Infatti, si supponga per assurdo che  $p \neq \langle U'_0, V'_0, \dots, U'_n, V'_n \rangle$ , e sia  $j \leq n$  il primo indice tale che

$$\langle U_j, V_j \rangle \neq \langle U'_j, V'_j \rangle.$$

Necessariamente allora  $U_j \neq U'_j$ , poiché  $V_j$  e  $V'_j$  sono univocamente determinati dall'insieme precedente. In particolare, però:

$$U_j, U'_j \in \mathcal{U}_{\langle U_0, V_0, \dots, U_{j-1}, V_{j-1} \rangle} = \mathcal{U}_{\langle U'_0, V'_0, \dots, U'_{j-1}, V'_{j-1} \rangle}$$

e pertanto, per definizione,  $V_j \cap V'_j = \emptyset$ . Assurdo, poiché  $x \in V_j \cap V'_j$ .

Dunque  $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, U'_{n+1}, V'_{n+1} \rangle$  estende la sequenza iniziale.

In particolare, quindi  $x \in \bigcap_{n \in \omega} V_n$ .

Poiché  $\sigma$  è una strategia vincente per il giocatore II, allora per ogni  $(U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma'] \subseteq [\sigma]$ ,

$$\bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} V_i \subseteq A$$

e dunque  $x \in A$ . ■

**Teorema 2.7.** Se  $X$  è uno spazio topologico di Choquet non vuoto ed esiste una distanza  $d$  su  $X$  le cui palle aperte sono aperti di  $X$ , allora:

$A$  è magro in un aperto non vuoto se e solo se il giocatore I ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur  $G^{**}(A)$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ): Se  $A$  è magro in  $Y \subseteq X$ , sia per ogni  $n \in \omega$ :  $W_n \subseteq Y$  aperti densi di  $Y$ , con

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A.$$

Poiché  $Y$  è uno spazio di Choquet, allora nel gioco:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & & B_1 & & B_2 & & \dots \\ \text{II} & A_0 & & A_1 & & \dots \end{array}$$



con gli aperti non vuoti  $Y \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$  in cui I vince sse  $\bigcap_{n \in \omega} B_n \neq \emptyset$ , I ha una strategia vincente. Questo infatti è un gioco di Choquet a giocatori invertiti.

Sia quindi  $\sigma$  la strategia vincente di I in questo gioco di Choquet.

Nel gioco  $G^{**}(A)$ , il giocatore I pone  $U_0 := Y$ . Si costruisce per induzione la strategia vincente per I.

Al passo  $n + 1$ -esimo, sia  $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$  la sequenza di insiemi giocati. Si pone, per ogni  $i \leq n$ :  $V'_i := V_i \cap W_i$ , e si sceglie  $U_{n+1}$  come l'unico sottoinsieme aperto non vuoto di  $V_n$  tale che

$$(V'_0, U_1, V'_1, U_2, \dots, V'_n, U_{n+1}) \in \sigma.$$

Allora  $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$  e inoltre

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V'_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A$$

e dunque  $\bigcap_{n \in \omega} U_n \not\subseteq A$ .

( $\Leftarrow$ ): Sia  $\sigma$  una strategia vincente per I in  $G^{**}(A)$ , e sia  $U_0$  l'elemento di partenza per  $\sigma$ .

Si costruisce una strategia  $\sigma'$  per I, vincente, e tale che l'insieme giocato al passo  $n$ -esimo  $U_n$  abbia diametro (rispetto alla metrica  $d$ ):

$$\text{diam}(U_n) < 2^{-n}.$$

Al passo  $n + 1$ , sia  $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$  la sequenza di insiemi giocati, e sia  $v_n \in V_n$ . Si definisce

$$V'_n := V_n \cap B_d(v_n, 2^{-n-1}), \quad \text{diam}(V'_n) \leq 2^{-n}$$

che è un aperto non vuoto. Si pone infine  $U_{n+1}$  come l'unico sottoinsieme aperto di  $V'_n$  tale che

$$(U_0, V_0, \dots, U_n, V'_n, U_{n+1}) \in \sigma.$$

Questo  $U_{n+1}$  è la risposta secondo la strategia  $\sigma'$ , in quanto  $\text{diam}(U_n) \leq \text{diam}(V'_n) \leq 2^{-n}$ .

Siccome  $\sigma'$  è una strategia vincente per I, allora

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} U_n$$

e inoltre

$$\text{diam}\left(\bigcap_{n \in \omega} U_n\right) = 0$$

Segue che  $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}$ , con  $x \in U_0 \setminus A$ .

Si definisce l'aperto

$$W_n := \bigcup_{\langle U_0, V_0, \dots, U_n \rangle \in \sigma'} U_n.$$

Questo è denso in  $U_0$ : se  $B \subseteq U_0$  è aperto, allora sicuramente  $\langle U_0, B \rangle \in \sigma'$ . Si costruisce  $\langle U_0, B, U_1, V_1, \dots, U_n \rangle \in \sigma'$ , e in particolare  $U_n \subseteq B$  e pertanto  $W_n \cap B \supseteq U_n \neq \emptyset$ .

Inoltre  $\bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq U_0 \setminus A$ , dunque la tesi. ■

**Lemma 2.8.** Sia  $X$  uno spazio topologico di Choquet non vuoto tale che esista una distanza  $d$  su  $X$  le cui palle aperte sono aperti di  $X$ . Sia  $A \subseteq X$ .

Se per ogni aperto  $U \subseteq X$  il gioco  $G^{**}((X \setminus A) \cup U)$  è determinato allora  $A \subseteq X$  ha BP.

L'idea per questa dimostrazione è stata tratta da [1].

*Dimostrazione.* Sia  $A \subseteq X$ . Si definisce l'aperto

$$U(A) := \bigcup \{U \subseteq X \text{ aperto} \mid U \setminus A \text{ è magro}\}.$$

Allora  $U(A) \setminus A$  è magro e inoltre, se  $A$  ha la BP, allora  $A = {}^*U(A)$ . Questo segue direttamente dal Teorema 8.29 di [3].

In particolare quindi il gioco è determinato per

$$G^{**}((X \setminus A) \cup U(A)).$$

Necessariamente è il giocatore II a vincere questo gioco. Infatti, si supponga per assurdo che I abbia una strategia vincente. Allora, per il Teorema 2.7  $(X \setminus A) \cup U(A)$  è magro in un aperto non vuoto  $B$ . In particolare, quindi  $U(A)$  è magro in  $B$ , ovvero  $U(A) \cap B$  è magro in  $B$ .

- Se  $U(A) \cap B \neq \emptyset$ , siccome  $B \subseteq X$  è un aperto di uno spazio di Baire, allora è uno spazio di Baire; inoltre  $U(A) \cap B$  è un aperto non vuoto di  $B$ , quindi è non magro. Assurdo.
- Se invece  $U(A) \cap B = \emptyset$ , si consideri il seguente insieme, magro per definizione:

$$((X \setminus A) \cup U(A)) \cap B = ((X \setminus A) \cap B) \cup (U(A) \cap B) = (X \setminus A) \cap B = B \setminus A$$

Allora, per definizione di  $U(A)$ ,  $B \subseteq U(A)$ . Assurdo.

Pertanto, per il Teorema 2.6,  $(X \setminus A) \cup U(A)$  è comagro. Ma

$$(X \setminus A) \cup U(A) = X \setminus (A \setminus U(A))$$

e pertanto  $A \setminus U(A)$  è magro. Per il risultato precedente  $U(A) \setminus A$  è magro, e dunque

$$A \triangle U(A)$$

è magro, ovvero  $A$  ha la BP. ■

### 2.3 Gioco di Banach-Mazur unfolded

**Definizione 2.9.** Una base debole per uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è una collezione di aperti  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq \tau$  tali che, per ogni aperto non vuoto di  $X$ ,  $\emptyset \neq U \subseteq X$  esista  $\alpha_0 \in \Omega$  tale che

$$A_{\alpha_0} \subseteq U.$$

**Definizione 2.10.** Sia  $X$  uno spazio Polacco non vuoto con una metrica fissata e sia  $\mathcal{W}$  una base debole numerabile di  $X$ .

Dato  $F \subseteq X \times \omega^\omega$ , il gioco di Banach-Mazur unfolded  $G_u^{**}(F)$  è il gioco di Gale-Stewart codificato come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} I & U_0 & & U_1 & & \dots & \\ II & & y_0, V_0 & & y_1, V_1 & & \dots \end{array}$$

tali che:

- per ogni  $i \in \omega$ :  $U_i, V_i \in \mathcal{W}$ ,  $y_n \in \omega$ ;
- $\text{diam}(U_n), \text{diam}(V_n) < 2^{-n}$ ;
- $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

posto

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} \text{Cl}_X(U_n) = \bigcap_{i \in \omega} \text{Cl}_X(V_n)$$

e  $y := (y_i)_{i \in \omega} \in \omega^\omega$ , il giocatore II vince sse

$$(x, y) \in F \subseteq X \times \omega^\omega.$$

**Lemma 2.11.** Se  $F$  è aperto o chiuso di  $X \times \omega^\omega$ , allora  $G_u^{**}(F)$  è determinato.

*Dimostrazione.* Si costruisce un  $\mathcal{A}$ -schema su  $X$ .

- Per ogni  $\langle (A_0, a_0), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \mathcal{A}^{<\omega}$ , si definisce

$$B_{\langle (A_0, a_0), \dots, (A_k, a_k) \rangle} := \begin{cases} \bigcap_{i \leq k} \text{Cl}_X(A_i) & \forall i \leq k : \text{diam}(A_i) < 2^{-i} \\ & A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_k \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente, per ogni  $s \in \mathcal{A}^{<\omega}$  e per ogni  $a \in \mathcal{A}$ :

$$B_{s \smallfrown a} \subseteq B_s$$

ed inoltre per ogni  $x \in \mathcal{A}^\omega$ :  $\text{diam}(B_{x \upharpoonright n}) \rightarrow 0$ .

Inoltre ciascun  $B_s$  è chiuso (poiché intersezione finita di chiusi oppure il vuoto) e pertanto, per il Lemma 1.3.6, questo schema induce una funzione continua

$$f : [T] \rightarrow X, \quad T := \{s \in \mathcal{A}^{<\omega} \mid B_s \neq \emptyset\}.$$

- Si osserva che  $T = \{ \langle (A_i, a_i) \rangle_{i \leq k} : A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_k \wedge \forall i \leq k : \text{diam } A_i < 2^{-i} \}$ , ovvero è esattamente l'albero delle posizioni ammissibili di  $G_u^{**}(F)$ , ed inoltre  $T$  è un albero potato non vuoto.
- La funzione

$$\begin{aligned} g : \mathcal{A}^\omega &\longrightarrow \omega^\omega \\ ((A_i, a_i))_{i \in \omega} &\longmapsto (a_{2i+1})_{i \in \omega} \end{aligned}$$

è continua.

- Si ottiene quindi una funzione continua

$$\begin{aligned}\psi : [T] &\longrightarrow X \times \omega^\omega \\ s &\longmapsto (f(s), g(s))\end{aligned}$$

Sia ora dunque  $F \subseteq X \times \omega^\omega$  aperto o chiuso, sia  $F' := [T] \setminus \psi^{-1}(F)$  aperto o chiuso, e si consideri il Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili  $G(T, F')$ .

Per il Teorema 1.7, questo è determinato, poiché  $F'$  è aperto o chiuso; ovvero esattamente uno tra i giocatori I e II ha una strategia vincente.

**Caso 1.** Sia  $\sigma'$  una strategia vincente per il giocatore I nel gioco  $G(T, F')$ ,  $\sigma' \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^{<\omega}$  con  $[\sigma'] \subseteq F'$ , ovvero  $[\sigma'] \cap \psi^{-1}(F) = \emptyset$ .

Si costruisce una strategia  $\sigma$  per il giocatore I nel gioco  $G_u^{**}(F)$ :

$$\sigma := \left\{ \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k-1}, a_{2k-1}), A_{2k} \rangle, \mid \langle (A_0, a_0), (A_1, a_1), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \sigma' \right\}.$$

Sia quindi  $(U_i, (V_i, y_i))_{i \in \omega}$  una giocata per I seguendo la strategia  $\sigma$ , e siano

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} V_i, \quad y := (y_i)_{i \in \omega}.$$

Allora esiste  $s \in [\sigma']$  tale che  $(x, y) = \psi(s)$  per costruzione. Siccome  $[\sigma'] \cap \psi^{-1}(F) = \emptyset$  segue che  $(x, y) \notin F$ .

**Caso 2.** Sia  $\sigma'$  una strategia vincente per il giocatore II nel gioco  $G(T, F')$ ,  $\sigma' \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^{<\omega}$  con  $[\sigma'] \cap F' = \emptyset$ , ovvero  $[\sigma'] \subseteq \psi^{-1}(F)$

Si costruisce una strategia  $\sigma$  per il giocatore II nel gioco  $G_u^{**}(F)$ :

$$\sigma := \left\{ \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k-1}, a_{2k-1}), A_{2k} \rangle, \mid \langle (A_0, a_0), (A_1, a_1), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \sigma' \right\}.$$

Sia quindi  $(U_i, (V_i, y_i))_{i \in \omega}$  una giocata per I seguendo la strategia  $\sigma$ , e siano

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} V_i, \quad y := (y_i)_{i \in \omega}.$$

Allora esiste  $s \in [\sigma'] \subseteq \psi^{-1}(F)$  tale che  $(x, y) = \psi(s)$  per costruzione, e pertanto  $(x, y) \in F$ . ■

## 2.4 Teorema di Lusin-Sierpiński

Si dimostra ora un risultato fondamentale, da cui il Teorema di Lusin-Sierpiński seguirà banalmente.

**Teorema 2.12.** Sia  $X$  uno spazio Polacco con una metrica fissata e sia  $\mathcal{W}$  una base debole di  $X$ .

Dato  $F \subseteq X \times \omega^\omega$  si consideri il  $**$ -gioco:  $G_u^{**}(F)$ . Indicato con  $A := \pi_X(F)$ :

1. se I ha una strategia vincente in  $G_u^{**}(F)$ , allora  $A$  è magro in un aperto non vuoto di  $X \times \omega^\omega$ ;
2. se II ha una strategia vincente in  $G_u^{**}(F)$  allora  $A$  è comagro.

*Dimostrazione.*

1. Sia  $\sigma$  una strategia vincente per I, e sia  $U_0$  la prima mossa. Si mostra che  $A$  è magro in  $U_0$ .

Per ogni  $a \in \omega$  e per ogni  $p \in \sigma$  della forma:

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

si definisce  $F_{p,a} \subseteq U_0$ :

$$F_{p,a} = \{z \in U_n \mid \text{per ogni mossa legale } (a, V_n) \\ \text{se } U_{n+1} \text{ è l'unico elemento di } \mathcal{W} \text{ tale che} \\ p^\frown \langle (a, V_n), U_{n+1} \rangle \in \sigma \text{ allora } z \notin U_{n+1}\}$$

- L'insieme  $F_{p,a}$  è mai denso, poiché chiuso e con interno vuoto (Esempio 1.5.2 di [4]).

Infatti, se per assurdo  $\text{Int}(F_{p,a}) \neq \emptyset$ , allora esiste  $W \in \mathcal{W}$  tale che

$$W \subseteq \text{Int}(F_{p,a}), \quad \text{diam}(W) < 2^{-n}$$

pertanto se II gioca  $V_n := W$  allora I dovrà giocare  $U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq F_{p,a}$ . Ma per definizione  $U_{n+1} \cap F_{p,a} = \emptyset$ . Assurdo.

Inoltre, se  $\eta \in U_n \setminus F_{p,a}$ , allora esiste una sequenza

$$p^\frown \langle (a, V_n), U_{n+1} \rangle \in \sigma$$

con  $\eta \in U_{n+1}$ ; siccome  $U_{n+1} \cap F_{p,a} = \emptyset$  segue

$$\eta \in U_{n+1} \subseteq U_n \setminus F_{p,a} \subseteq X \setminus F_{p,a}$$

ovvero  $F_{p,a}$  chiuso.

- Siccome  $\sigma$  e  $\omega$  sono insiemi numerabili allora

$$\bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$$

è un insieme magro, dove  $\sigma' \subseteq \sigma$  è l'insieme delle sequenze di lunghezze dispari.

Sia ora  $x \in A \cap U_0$ . Allora esiste  $y \in \omega^\omega$ ,  $y = (y_i)_{i \in \omega}$  tale che  $(x, y) \in F$ .

Una posizione  $p \in \sigma'$ :

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

è buona per  $(x, y)$  se  $x \in U_n$ . Siccome  $\sigma$  è una strategia vincente per il giocatore I, allora esiste una posizione  $p_{(x,y)} \in \sigma$  buona per  $(x, y)$  e massimale, ovvero ogni estensione di  $p_{(x,y)}$  non è buona. Ma allora, se

$$p_{(x,y)} = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_n \rangle$$

si ha che  $x \in F_{p_{(x,y)}, y_n}$ .

Pertanto  $A \cap U_0 \subseteq \bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$  è magro.

2. Se  $\Pi$  ha una strategia vincente per  $G_u^{**}(F)$ , allora ha una strategia vincente in  $G^{**}(A)$ . Per il Teorema 2.6,  $A$  è comagro. ■

**Teorema di Lusin-Sierpiński 2.13.** Sia  $X$  uno spazio Polacco. Allora ogni insieme analitico di  $X$  ha la Baire Property.

*Dimostrazione.* Siccome  $BP(X)$  è una  $\sigma$ -algebra (per la Proposizione 1.5.9 di [4]) allora è chiusa per complementi, e pertanto se ogni insieme coanalitico ha BP allora si è dimostrata la tesi.

Sia dunque  $C$  un insieme coanalitico e sia  $U \subseteq X$  un aperto. Posto  $A := (X \setminus C) \cup U$ , questo è un insieme analitico, e pertanto esiste un chiuso  $F \subseteq X \times \omega^\omega$  tale che  $A = \pi_X(F)$ .

Per il Teorema di Gale-Stewart, allora, il  $**$ -gioco  $G_u^{**}(F)$  è determinato, ed in particolare vale una tra le condizioni a. e b. del Teorema 2.12.

Per il Teorema 2.6 e il Teorema 2.7, allora, il gioco  $G^{**}(A) = G^{**}((X \setminus C) \cup U)$  è determinato: per il Lemma 2.8 quindi  $C$  ha la BP. ■

## Riferimenti bibliografici

- [1] Pedro Sánchez Terraf (<https://math.stackexchange.com/users/212120/pedro-s%c3%a1nchez-terraf>). *Banach-Mazur game and the Baire property*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/3681151> (version: 2020-05-19). eprint: <https://math.stackexchange.com/q/3681151>. URL: <https://math.stackexchange.com/q/3681151>.
- [2] Wilfrid Hodges e Jouko Väänänen. «Logic and Games». In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. A cura di Edward N. Zalta e Uri Nodelman. Winter 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/win2024/entries/logic-games/> (visitato il 29/05/2025).
- [3] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics 156. New York, NY: Springer New York, 1995. 428 pp. ISBN: 978-1-4612-4190-4. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4.
- [4] Luca Motto Ros. *Notes on Descriptive Set Theory*. Lecture notes for a 48-hour course at the University of Turin. Apr. 2024. URL: <https://sites.google.com/site/lucamottoros/>.