Giochi di Banach-Mazur

Davide Peccioli

4 giugno 2025

Indice

1 Giochi Logici

Le definizioni di questa prima parte sono tratte da [2].

Definizione 1.1. *Un gioco logico è una quadrupla* $\mathcal{G} := (\Omega, f, W_I, W_{II})$ *dove:*

- Ω *è un insieme, chiamato il dominio del gioco;*
- $f : \Omega^{<\omega} \to \{I, II\}$ *è una funzione, chiamata funzione di turno o funzione del giocatore;*
- $W_I, W_{II} \subseteq \Omega^{<\omega} \cup \Omega^{\omega}$ *sono tali che*
    1. $W_I \cap W_{II} = \emptyset$*;*
    2. *per ogni* $\boldsymbol{a} \in W_\bullet$ *e per ogni* $\boldsymbol{b} \in \Omega^{<\omega} \cup \Omega^{\omega}$*:*

$$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{b} \in W_\bullet$$

Gli elementi di $\Omega^{<\omega}$ *sono chiamati posizioni del gioco* $\mathcal{G}$*, mentre un elemento di* Ω^{ω} *è detto giocata di* $\mathcal{G}$*.*

I giocatori I e II giocano scegliendo a turno elementi di Ω. La funzione di turno f associa a ciascuna posizione uno dei due giocatori: se

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = \mathrm{I}$$

allora l'elemento a_{n+1} sarà scelto dal giocatore I.

Si dirà che il giocatore I vince la giocata $\boldsymbol{a}$ se $\boldsymbol{a} \in W_{\mathrm{I}}$; si dirà che il giocatore II vince la giocata $\boldsymbol{b}$ se $\boldsymbol{b} \in W_{\mathrm{II}}$.

Definizione 1.2. *Un gioco è detto totale se* $\Omega^{\omega} \subseteq W_I \cup W_{II}$*.*

Si definiscano i seguenti insiemi:

$$\Omega_{\mathrm{I}}^{<\omega} := \left\{ s \in \Omega^{<\omega} \mid f(s) = \mathrm{I} \right\}$$
$$\Omega_{\mathrm{II}}^{<\omega} := \left\{ s \in \Omega^{<\omega} \mid f(s) = \mathrm{II} \right\}$$

Una strategia per un giocatore è un insieme di regole che descrivono esattamente come quel giocatore dovrebbe scegliere la sua mossa, in base a tutte le mosse precedenti.

Definizione 1.3. *Una strategia per il giocatore* j *(con* $j = I, II$*) è una funzione*

$$\varphi : \Omega_j^{<\omega} \to \Omega$$

Una strategia è detta vincente se quel giocatore vince ogni giocata in cui viene utilizzata, a prescindere da cosa gioca l'altro.

Definizione 1.4. *Un gioco si dice determinato se esiste una strategia vincente per I o per II.*

Definizione 1.5. *Due giochi logici* $\mathcal{G}$ *e* $\mathcal{G}'$ *con giocatori I e II sono detti equivalenti se sono soddisfate entrambe le seguenti ipotsi:*

1. *esiste una strategia vincente per I in* $\mathcal{G}$ *sse esiste una strategia vincente per I in* $\mathcal{G}'$
2. *esiste una strategia vincente per II in* $\mathcal{G}$ *sse esiste una strategia vincente per II in* $\mathcal{G}'$

1.1 Giochi di Gale-Stewart

Sia A un insieme non vuoto, e sia $C \subseteq A^\omega$.

Definizione 1.6. *Si definisce il* <u>*gioco di Gale-Stewart*</u> *associato ad C come il gioco logico seguente:*

$$G(A, C) = G(A) \coloneqq (A, \psi, C, A^\omega \setminus C)$$

dove la funzione $\psi : A^{<\omega} \to \{I, II\}$ è così definita

$$\psi(s) \coloneqq \begin{cases} I & \mathrm{lh}(s) \text{ è pari} \\ II & \mathrm{lh}(s) \text{ è dispari} \end{cases}$$

Pertanto il gioco può essere codificato come segue:

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & a_0 & & a_2 & & a_4 & & \dots \\ \mathrm{II} & & a_1 & & a_3 & & \dots & \end{array}$$

e il giocatore I vince se e solo se $(a_n)_{n\in\omega} \in C$.

1.1.1 Strategia per un gioco di Gale-Stewart

Nel caso di un gioco di Gale-Stewart, è possibile vedere una strategia φ per il giocatore I in tre modi diversi, del tutto equivalenti.

1. Una mappa $\psi : A^{<\omega} \to A^{<\omega}$ tale che, per ogni $s \in A^{<\omega}$ valga che lunghezza sia

   $$\mathrm{lh}\,\varphi(s) = \mathrm{lh}(s) + 1$$

   Intuitivamente, questa funzione associa alla sequenza degli (a_{2i+1}) giocati dal giocatore II una sequenza degli (a_{2i}) per il giocatore I:

   $$\varphi(\emptyset) = \langle a_0 \rangle, \quad \varphi(\langle a_1 \rangle) = \langle a_0, a_2 \rangle, \quad \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle) = \langle a_0, a_2, a_4 \rangle.$$

2. Una mappa $\psi : A^{<\omega} \to A$.

   Intuitivamente, questa funzione associa alla sequenza degli (a_{2i+1}) giocati dal giocatore II l'elemento $a_j \in A$ che deve giocare il giocatore I:

   $$\varphi(\emptyset) = a_0, \quad \varphi(\langle a_1 \rangle) = a_2, \quad \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle) = a_4.$$

3. Una albero $\sigma \subseteq A^{<\omega}$ tale che:

   (a) σ sia potato e non vuoto;

   (b) se $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$ allora per ogni $a_{2j+1} \in A$: $\langle a_0, \dots, a_{2j+1} \rangle \in \sigma$;

   (c) se $\langle a_0, \dots, a_{2j-1} \rangle \in \sigma$ allora esiste un unico $a_{2j} \in A$ tale che $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$.

Una strategia è detta <u>vincente</u> se il suo corpo $[\sigma] \in A$.

1.1.2 Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili

Spesso è comodo considerare giochi in cui I e II non possano giocare ogni elemento di A, ma debbano seguire delle regole. Quindi, è necessario dare un alberto potato non vuoto $T \subseteq A^{<\omega}$, che determina le posizioni ammissibili.

In questa situazione I e II si alternano giocando $\langle a_0, \ldots, a_n, \ldots, \rangle$ in maniera tale che, ad ogni passo $n \in \omega$

$$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \in T$$

Si scriverà, in questo caso, $G(T, C)$.

Si noti che questo non modifica il formalismo, in quanto è sufficiente cambiare gli insiemi di vittoria C e $A^\omega \setminus C$ in maniera da far perdere automaticamente il giocatore che effettua una mossa illegale.

Inoltre, il gioco definito sopra $G(T, C)$ è equivalente al gioco $G(A, C')$, dove

$$C' := \Big\{ x \in A^\omega \mid \big[\exists\, n (x \restriction n \notin T) \wedge \text{il minore } n \text{ tale che } x \restriction n \notin T \text{ è pari} \big] \vee (x \in [T] \wedge x \in C) \Big\} .$$

1.2 Teorema di Gale-Stewart

Sia A uno spazio topologico discreto e sia A^ω dotato della topologia prodotto.

Teorema di Gale-Stewart 1.7. Sia T un albero potato non vuoto su A. Se $C \subseteq [T]$ è aperto o chiuso in $[T]$, allora il gioco $G(T, C)$ è determinato.

2 Insiemi analitici e BP

Lo scopo di questa sezione è dimostrare il fatto che, in uno spazio Polacco, ogni sottoinsieme analitico ha la Baire Property. Per farlo si sfruttano i giochi di Banach-Mazur. Le dimostrazioni sono tratte da [3] salvo diversamente indicato.

2.1 Gioco di Choquet

Definizione 2.1. *Sia (X, τ) uno spazio topologico non vuoto. Il gioco di Choquet G_X è un gioco di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di X:*

$$\begin{array}{ccccccccc} I & U_0 & & U_1 & & U_2 & & \cdots & \\ II & & V_0 & & V_1 & & \cdots & & \end{array}$$

tali che $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots$.

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$$

e, poiché il gioco è totale, il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset.$$

Teorema 2.2. Uno spazio topologico X è uno spazio topologico di Baire se e solo se il giocatore I non ha una strategia vincente nel gioco di Choquet G_X.

Definizione 2.3. *Uno spazio topologico X è detto spazio di Choquet se il giocatore II ha una strategia vincente in G_X.*

Osservazione. Se il giocatore I non ha una strategia vincente, non è detto che il giocatore II ne abbia una.

Viceversa, però, se II ha una strategia vincente, allora necessariamente I non ne ha una. Quindi ogni spazio di Choquet è uno spazio topologico di Baire.

Inoltre, dal Teorema 8.17 di [3], ogni spazio Polacco è uno spazio di Choquet.

Proposizione 2.4. I sottospazi aperti non vuoti di uno spazio di Choquet sono spazi di Choquet.

Il prodotto finito di Spazi di Choquet sono spazi di Choquet.

2.2 Gioco di Banach-Mazur

Sia X uno spazio topologico non vuoto, e sia $A \subseteq X$.

Definizione 2.5. *Il gioco di Banach-Mazur (detto anche **-gioco) di A, denotato con $G^{**}(A)$ oppure con $G^{**}(A, X)$ è un gioco di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di X*

$$\begin{array}{lccccccc} I & U_0 & & U_1 & & U_2 & & \cdots \\ II & & V_0 & & V_1 & & \cdots & \end{array}$$

tali che $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n \subseteq A.$$

Teorema 2.6. Sia X uno spazio topologico non vuoto, e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi. Allora A è comagro se e solo se il giocatore II ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur $G^{**}(A)$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Se A è comagro, allora esistono $(W_n)_{n\in\omega}$ aperti densi di X tali che

$$\bigcap_{n\in\omega} W_n \supseteq A.$$

Il giocatore II gioca $V_n \coloneqq W_n \cap U_n$; questo è aperto, e inoltre è non vuoto poiché W_n è denso in X.

($\Leftarrow$): Sia σ una strategia vincente di II. Si costruisce $\sigma' \subseteq \sigma$ albero potato e non vuoto per induzione sulla lunghezza delle stringhe.

- $\emptyset \in \sigma'$.
- Sia $s = \langle U_0, V_0, \ldots, U_n \rangle$. Allora esiste un unico $V_n \subseteq U_n$ tale che $s^\frown V_n \in \sigma$. Si pone $s^\frown V_n \in \sigma'$.

- Sia $s = \langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$. Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq V_n$ si definisce U^* l'unico sottoinsieme di U tale che
$$s^\frown \langle U, U^* \rangle \in \sigma$$

  È possibile, tramite un'applicazione del Lemma di Zorn, garantire l'esistenza di una collezione massimale $\mathcal{U}_s$ di aperti non vuoti $U \subseteq V_n$ tale che la collezione $\mathcal{V}_s := \{U^* \mid U \in \mathcal{U}_s\}$ sia composta da insiemi a due a due disgiunti.

  Infatti, data una catena di collezioni di aperti che soddisfino la proprietà richiesta $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ ordinata dall'inclusione, allora
$$\mathcal{U}^\star := \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$$
  è un maggiorante della catena, in quanto detto
$$\mathcal{V}^\star := \{U^* \mid U \in \mathcal{U}^\star\}$$
  dati $V, V' \in \mathcal{V}^\star$ allora esiste $\mathcal{U}_{\alpha_0}$ ed esistono $U_0, U_1 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ tali che
$$U_0^* = V, \quad U_1^* = V'$$
  e pertanto $V \cap V' = \emptyset$.

  Dunque, per ogni $U \in \mathcal{U}_s$, $s^\frown U \in \sigma'$.

  Inoltre $\bigcup \mathcal{V}_s$ è denso in V_n. Infatti, se per assurdo esistesse $B \subseteq V_n$ aperto tale che $B \cap \bigcup \mathcal{V}_s = \emptyset$, allora $\mathcal{U}_s \cup \{B\}$ viola la massimalità di $\mathcal{U}_s$.

Sia ora, per ogni $n \in \omega$:
$$W_{n+1} := \bigcup_{\substack{s \in \sigma' \\ \mathrm{lh}(s) = 2n}} \bigcup \mathcal{V}_s = \bigcup_{\langle U_0, V_0, \ldots, U_{n+1}, V_{n+1} \rangle \in \sigma'} V_{n+1}$$

Per ogni $n \in \omega$, $W_{n+1} \subseteq X$ è denso.

- W_1 è denso, poiché $\mathcal{U}_\emptyset$ è una collezione di aperti di X tali che $\mathcal{V}_\emptyset$ sia composta da insiemi a due a due disgiunti, e pertanto, se vi fosse $B \subseteq X$ aperto tale che $B \cap W_1 = \emptyset$, allora $\mathcal{U}_\emptyset \cup \{B\}$ viola la massimalità di $\mathcal{U}_\emptyset$.
- Se W_{n+1} è denso, allora lo è anche W_{n+2}. Sia $B \subseteq X$ aperto.

  Siccome W_{n+1} è denso allora $W_{n+1} \cap B \neq \emptyset$, ed esiste $\widetilde{s} = \langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$ tale che $B \cap \bigcup \mathcal{V}_{\widetilde{s}} \neq \emptyset$.

  Quindi esistono $V_n \supseteq U \supseteq V$ tali che $\widetilde{s}^\frown \langle U, V \rangle \in \sigma'$, con $V \cap B \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, allora $\mathcal{U}_{\widetilde{s}} \cup \{V_n \cap B\}$ contraddice la massimalità di $\mathcal{U}_{\widetilde{s}}$.

  Poiché $\bigcup \mathcal{V}_{s^\frown \langle U, V \rangle}$ è denso in V, allora $\bigcup \mathcal{V}_{s^\frown \langle U, V \rangle} \cap B \neq \emptyset$, ed inoltre
$$\bigcup \mathcal{V}_{\widetilde{s}^\frown \langle U, V \rangle} \subseteq W_{n+2}$$
  e pertanto $W_{n+2} \cap B \neq \emptyset$.

Per finire, si dimostra che $\bigcap_{n\in\omega} W_{n+1} \subseteq A$. Sia $x \in \bigcap_{n\in\omega} W_{n+1}$.

Allora esiste $(U_i, V_i)_{i\in\omega} \in [\sigma']$ tale che $x \in V_n$ per ogni n. Questa si costruisce per induzione.

- Poiché $x \in W_1$, allora esiste $\langle U_0, V_0, U_1, V_1\rangle \in \sigma'$ tale che $x \in V_1$.
- Sia ora $p = \langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n\rangle \in \sigma'$ tale che $x \in V_n$.

  Siccome $x \in W_{n+1}$ allora esiste $p' \in \sigma'$,

  $$p' \coloneqq \langle U'_0, V'_0, \ldots, U'_{n+1}, V'_{n+1}\rangle$$

  tale che $x \in V_{n+1}$. Necessariamente p' estende p.

  Infatti, si supponga per assurdo che $p \neq \langle U'_0, V'_0, \ldots, U'_n, V'_n\rangle$, e sia $j \leq n$ il primo indice tale che

  $$\langle U_j, V_j\rangle \neq \langle U'_j, V'_j\rangle.$$

  Necessariamente allora $U_j \neq U'_j$, poiché V_j e V'_j sono univocamente determinati dall'insieme precedente. In particolare, però:

  $$U_j, U'_j \in \mathcal{U}_{\langle U_0, V_0, \ldots, U_{j-1}, V_{j-1}\rangle} = \mathcal{U}_{\langle U'_0, V'_0, \ldots, U'_{j-1}, V'_{j-1}\rangle}$$

  e pertanto, per definizione, $V_j \cap V_{j'} = \emptyset$. Assurdo, poiché $x \in V_j \cap V'_j$.

Dunque $\langle U_0, V_0, \ldots, U_n, V_n, U'_{n+1}, V'_{n+1}\rangle$ estende la sequenza iniziale.

In particolare, quindi $x \in \bigcap_{n\in\omega} V_n$.

Poiché σ è una strategia vincente per il giocatore II, allora per ogni $(U_i, V_i)_{i\in\omega} \in [\sigma'] \subseteq [\sigma]$,

$$\bigcap_{i\in\omega} U_i = \bigcap_{i\in\omega} V_i \subseteq A$$

e dunque $x \in A$. ■

Teorema 2.7. Se X è uno spazio topologico di Choquet non vuoto ed esiste una distanza d su X le cui palle aperte sono aperti di X, allora:

A è magro in un aperto non vuoto se e solo se il giocatore I ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur $G^{**}(A)$.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): Se A è magro in $Y \subseteq X$, sia per ogni $n \in \omega$: $W_n \subseteq Y$ aperti densi di Y, con

$$\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq Y \setminus A.$$

Poiché Y è uno spazio di Choquet, allora nel gioco:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & & B_1 & & B_2 & & \ldots \\ \text{II} & A_0 & & A_1 & & \ldots & \end{array}$$

con gli aperti non vuoti $Y \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$ in cui I vince sse $\bigcap_{n\in\omega} B_n \neq \emptyset$, I ha una strategia vincente. Questo infatti è un gioco di Choquet a giocatori invertiti.

Sia quindi σ la strategia vincente di I in questo gioco di Choquet.

Nel gioco $G^{**}(A)$, il giocatore I pone $U_0 \coloneqq Y$. Si costruisce per induzione la strategia vincente per I.

Al passo $n+1$-esimo, sia $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ la sequenza di insiemi giocati. Si pone, per ogni $i \leq n$: $V_i' \coloneqq V_i \cap W_i$, e si sceglie U_{n+1} come l'unico sottoinsieme aperto non vuoto di V_n tale che

$$(V_0', U_1, V_1', U_2, \dots, V_n', U_{n+1}) \in \sigma.$$

Allora $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$ e inoltre

$$\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n' \subseteq \bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq Y \setminus A$$

e dunque $\bigcap_{n\in\omega} U_n \nsubseteq A$.

($\Leftarrow$): Sia σ una strategia vincente per I in $G^{**}(A)$, e sia U_0 l'elemento di partenza per σ.

Si costruisce una strategia σ' per I, vincente, e tale che l'insieme giocato al passo n-esimo U_n abbia diametro (rispetto alla metrica d):

$$\operatorname{diam}(U_n) < 2^{-n}.$$

Al passo $n+1$, sia $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ la sequenza di insiemi giocati, e sia $v_n \in V_n$. Si definisce

$$V_n' \coloneqq V_n \cap B_d(v_n, 2^{-n-1}), \qquad \operatorname{diam}(V_n) \leq 2^{-n}$$

che è un aperto non vuoto. Si pone infine U_{n+1} come l'unico sottoinsieme aperto di V_n' tale che

$$(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n', U_{n+1}) \in \sigma.$$

Questo U_{n+1} è la risposta secondo la strategia σ', in quanto $\operatorname{diam}(U_n) \leq \operatorname{diam}(V_n') \leq 2^{-n}$.

Siccome σ' è una strategia vincente per I, allora

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\omega} U_n$$

e inoltre

$$\operatorname{diam}\left(\bigcap_{n\in\omega} U_n\right) = 0$$

Segue che $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}$, con $x \in U_0 \setminus A$.

Si definisce l'aperto

$$W_n \coloneqq \bigcup_{\langle U_0, V_0, \dots, U_n\rangle \in \sigma'} U_n.$$

Questo è denso in U_0: se $B \subseteq U_0$ è aperto, allora sicuramente $\langle U_0, B\rangle \in \sigma'$. Si costruisce $\langle U_0, B, U_1, V_1, \dots, U_n\rangle \in \sigma'$, e in particolare $U_n \subseteq B$ e pertanto $W_n \cap B \supseteq U_n \neq \emptyset$.

Inoltre $\bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq U_0 \setminus A$, dunque la tesi. ■

Lemma 2.8. Sia X uno spazio topologico di Choquet non vuoto tale che esista una distanza d su X le cui palle aperte sono aperti di X. Sia $A \subseteq X$.

Se per ogni aperto $U \subseteq X$ il gioco $G^{**}\big((X \setminus A) \cup U\big)$ è determinato allora $A \subseteq X$ ha BP.

L'idea per questa dimostrazione è stata tratta da [1].

Dimostrazione. Sia $A \subseteq X$. Si definisce l'aperto

$$U(A) \coloneqq \bigcup \left\{U \subseteq X \text{ aperto} \mid U \setminus A \text{ è magro}\right\}.$$

Allora $U(A) \setminus A$ è magro e inoltre, se A ha la BP, allora $A =^* U(A)$. Questo segue direttamente dal Teorema 8.29 di [3].

In particolare quindi il gioco è determinato per

$$G^{**}\left((X \setminus A) \cup U(A)\right).$$

Necessariamente è il giocatore II a vincere questo gioco. Infatti, si supponga per assurdo che I abbia una strategia vincente. Allora, per il Teorema 2.7 $(X \setminus A) \cup U(A)$ è magro in un aperto non vuoto B. In particolare, quindi $U(A)$ è magro in B, ovvero $U(A) \cap B$ è magro in B.

- Se $U(A) \cap B \neq \emptyset$, siccome $B \subseteq X$ è un aperto di uno spazio di Baire, allora è uno spazio di Baire; inoltre $U(A) \cap B$ è un aperto non vuoto di B, quindi è <u>non magro</u>. Assurdo.
- Se invece $U(A) \cap B = \emptyset$, si consideri il seguente insieme, magro per definizione:

$$\big((X \setminus A) \cup U(A)\big) \cap B = \big((X \setminus A) \cap B\big) \cup \big(U(A) \cap B\big) = (X \setminus A) \cap B = B \setminus A$$

  Allora, per definizione di $U(A)$, $B \subseteq U(A)$. Assurdo.

Pertanto, per il Teorema 2.6, $(X \setminus A) \cup U(A)$ è comagro. Ma

$$(X \setminus A) \cup U(A) = X \setminus \big(A \setminus U(A)\big)$$

e pertanto $A \setminus U(A)$ è magro. Per il risultato precedente $U(A) \setminus A$ è magro, e dunque

$$A \triangle U(A)$$

è magro, ovvero A ha la BP. ■

2.3 Gioco di Banach-Mazur unfolded

Definizione 2.9. *Una <u>base debole</u> per uno spazio topologico (X, τ) è una collezione di aperti $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq \tau$ tali che, per ogni aperto non vuoto di X, $\emptyset \neq U \subseteq X$ esista $\alpha_0 \in \Omega$ tale che*

$$A_{\alpha_0} \subseteq U.$$

Definizione 2.10. *Sia X uno spazio Polacco non vuoto con una metrica fissata e sia $\mathcal{W}$ una base debole numerabile di X.*

Dato $F \subseteq X \times \omega^\omega$, il gioco di Banach-Mazur unfolded $G_u^{**}(F)$ è il gioco di Gale-Stewart codificato come segue:

$$\begin{array}{llllll} I & U_0 & & U_1 & & \dots \\ II & & y_0, V_0 & & y_1, V_1 & \dots \end{array}$$

tali che:

- *per ogni $i \in \omega$: $U_i, V_i \in \mathcal{W}$, $y_n \in \omega$;*
- $\operatorname{diam}(U_n), \operatorname{diam}(V_n) < 2^{-n}$*;*
- $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

posto

$$\{x\} \coloneqq \bigcap_{i \in \omega} \operatorname{Cl}_X(U_n) = \bigcap_{i \in \omega} \operatorname{Cl}_X(V_n)$$

e $y \coloneqq (y_i)_{i \in \omega} \in \omega^\omega$, il giocatore II vince sse

$$(x, y) \in F \subseteq X \times \omega^\omega.$$

Lemma 2.11. Se F è aperto o chiuso di $X \times \omega^\omega$, allora $G_{\mathrm{u}}^{**}(F)$ è determinato.

Dimostrazione. Si costruisce un $\mathcal{A}$-schema su X.

- Per ogni $\langle (A_0, a_0), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \mathcal{A}^{<\omega}$, si definisce

  $$B_{\langle (A_0,a_0),\dots,(A_k,a_k)\rangle} \coloneqq \begin{cases} \bigcap_{i \le k} \operatorname{Cl}_X(A_i) & \forall\, i \le k:\ \operatorname{diam}(A_i) < 2^{-i} \\ & A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_k \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

  Ovviamente, per ogni $s \in \mathcal{A}^{<\omega}$ e per ogni $a \in \mathcal{A}$:

  $$B_{s^\frown a} \subseteq B_s$$

  ed inoltre per ogni $x \in \mathcal{A}^\omega$: $\operatorname{diam}(B_{x \restriction n}) \to 0$.

  Inoltre ciascun B_s è chiuso (poiché intersezione finita di chiusi oppure il vuoto) e pertanto, per il Lemma 1.3.6, questo schema induce una funzione continua

  $$f : [T] \to X, \quad T \coloneqq \left\{ s \in \mathcal{A}^{<\omega} \mid B_s \neq \emptyset \right\}.$$

- Si osserva che $T = \left\{ \langle (A_i, a_i) \rangle_{i \le k} : A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots A_k \wedge \forall\, i \le k :\ \operatorname{diam} A_i < 2^{-i} \right\}$, ovvero è esattamente l'albero delle posizioni ammissibili di $G_{\mathrm{u}}^{**}(F)$, ed inoltre T è un albero potato non vuoto.

- La funzione

  $$\begin{aligned} g : \mathcal{A}^\omega &\longrightarrow \omega^\omega \\ \big((A_i, a_i)\big)_{i \in \omega} &\longmapsto (a_{2i+1})_{i \in \omega} \end{aligned}$$

  è continua.

- Si ottiene quindi una funzione continua

$$\begin{aligned}\psi : [T] &\longrightarrow X \times \omega^\omega \\ s &\longmapsto \big(f(s), g(s)\big)\end{aligned}$$

Sia ora dunque $F \subseteq X \times \omega^\omega$ aperto o chiuso, sia $F' \coloneqq [T] \setminus \psi^{-1}(F)$ aperto o chiuso, e si consideri il gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili $G(T, F')$.

Per il Teorema 1.7, questo è determinato, poiché F' è aperto o chiuso; ovvero esattamente uno tra i giocatori I e II ha una strategia vincente.

Caso 1. Sia σ' una strategia vincente per il giocatore I nel gioco $G(T, F')$, $\sigma' \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^{<\omega}$ con $[\sigma'] \subseteq F'$, ovvero $[\sigma'] \cap \psi^{-1}(F) = \emptyset$.

Si costruisce una strategia σ per il giocatore I nel gioco $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$:

$$\sigma \coloneqq \left\{ \begin{matrix} \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k-1}, a_{2k-1}), A_{2k} \rangle, \\ \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k+1}, a_{2k+1}) \rangle \end{matrix} \mid \langle (A_0, a_0), (A_1, a_1), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \sigma' \right\}.$$

Sia quindi $\big(U_i, (V_i, y_i)\big)_{i\in\omega}$ una giocata per I seguendo la strategia σ, e siano

$$\{x\} \coloneqq \bigcap_{i\in\omega} U_i = \bigcap_{i\in\omega} V_i, \quad y \coloneqq (y_i)_{i\in\omega}.$$

Allora esiste $s \in [\sigma']$ tale che $(x, y) = \psi(s)$ per costruzione. Siccome $[\sigma'] \cap \psi^{-1}(F) = \emptyset$ segue che $(x, y) \notin F$.

Caso 2. Sia σ' una strategia vincente per il giocatore II nel gioco $G(T, F')$, $\sigma' \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^{<\omega}$ con $[\sigma'] \cap F' = \emptyset$, ovvero $[\sigma'] \subseteq \psi^{-1}(F)$

Si costruisce una strategia σ per il giocatore II nel gioco $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$:

$$\sigma \coloneqq \left\{ \begin{matrix} \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k-1}, a_{2k-1}), A_{2k} \rangle, \\ \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k+1}, a_{2k+1}) \rangle \end{matrix} \mid \langle (A_0, a_0), (A_1, a_1), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \sigma' \right\}.$$

Sia quindi $\big(U_i, (V_i, y_i)\big)_{i\in\omega}$ una giocata per I seguendo la strategia σ, e siano

$$\{x\} \coloneqq \bigcap_{i\in\omega} U_i = \bigcap_{i\in\omega} V_i, \quad y \coloneqq (y_i)_{i\in\omega}.$$

Allora esiste $s \in [\sigma'] \subseteq \psi^{-1}(F)$ tale che $(x, y) = \psi(s)$ per costruzione, e pertanto $(x, y) \in F$. ■

2.4 Teorema di Lusin-Sierpiński

Si dimostra ora un risultato fondamentale, da cui il Teorema di Lusin-Sierpiński seguirà banalmente.

Teorema 2.12. Sia X uno spazio Polacco con una metrica fissata e sia $\mathcal{W}$ una base debole di X.

Dato $F \subseteq X \times \omega^\omega$ si consideri il **-gioco: $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$. Indicato con $A \coloneqq \pi_X(F)$:

1. se I ha una strategia vincente in $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$, allora A è magro in un aperto non vuoto di $X \times \omega^\omega$;
2. se II ha una strategia vincente in $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$ allora A è comagro.

Dimostrazione.

1. Sia σ una strategia vincente per I, e sia U_0 la prima mossa. Si mostra che A è magro in U_0.

   Per ogni $a \in \omega$ e per ogni $p \in \sigma$ della forma:

   $$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

   si definisce $F_{p,a} \subseteq U_0$:

   $$\begin{aligned} F_{p,a} = \{z \in U_n \mid & \text{ per ogni mossa legale } (a, V_n) \\ & \text{se } U_{n+1} \text{ è l'unico elemento di } \mathcal{W} \text{ tale che} \\ & p^\frown\langle (a, V_n), U_{n+1}\rangle \in \sigma \text{ allora } z \notin U_{n+1}\} \end{aligned}$$

   - L'insieme $F_{p,a}$ è mai denso, poiché chiuso e con interno vuoto (Esempio 1.5.2 di [4]).

     Infatti, se per assurdo $\mathrm{Int}(F_{p,a}) \neq \emptyset$, allora esiste $W \in \mathcal{W}$ tale che

     $$W \subseteq \mathrm{Int}(F_{p,a}), \quad \mathrm{diam}(W) < 2^{-n}$$

     pertanto se II gioca $V_n \coloneqq W$ allora I dovrà giocare $U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq F_{p,a}$. Ma per definizione $U_{n+1} \cap F_{p,a} = \emptyset$. Assurdo.

     Inoltre, se $\eta \in U_n \setminus F_{p,a}$, allora esiste una sequenza

     $$p^\frown\langle (a, V_n), U_{n+1}\rangle \in \sigma$$

     con $\eta \in U_{n+1}$; siccome $U_{n+1} \cap F_{p,a} = \emptyset$ segue

     $$\eta \in U_{n+1} \subseteq U_n \setminus F_{p,a} \subseteq X \setminus F_{p,a}$$

     ovvero $F_{p,a}$ chiuso.

   - Siccome σ e ω sono insiemi numerabili allora

     $$\bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$$

     è un insieme magro, dove $\sigma' \subseteq \sigma$ è l'insieme delle sequenze di lunghezze dispari.

   Sia ora $x \in A \cap U_0$. Allora esiste $y \in \omega^\omega$, $y = (y_i)_{i \in \omega}$ tale che $(x, y) \in F$.

   Una posizione $p \in \sigma'$:

   $$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

   è <u>buona</u> per (x, y) se $x \in U_n$. Siccome σ è una strategia vincente per il giocatore I, allora esiste una posizione $p_{(x,y)} \in \sigma$ buona per (x, y) e massimale, ovvero ogni estensione di $p_{(x,y)}$ <u>non è buona</u>. Ma allora, se

   $$p_{(x,y)} = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_n \rangle$$

   si ha che $x \in F_{p_{(x,y)}, y_n}$.

   Pertanto $A \cap U_0 \subseteq \bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$ è magro.

2. Se II ha una strategia vincente per $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$, allora ha una strategia vincente in $G^{**}(A)$. Per il Teorema 2.6, A è comagro. ■

Teorema di Lusin-Sierpiński 2.13. Sia X uno spazio Polacco. Allora ogni insieme analitico di X ha la Baire Property.

Dimostrazione. Siccome $\mathrm{BP}(X)$ è una σ-algebra (per la Proposizione 1.5.9 di [4]) allora è chiusa per complementi, e pertanto se ogni insieme coanalitico ha BP allora si è dimostrata la tesi.

Sia dunque C un insieme coanalitico e sia $U \subseteq X$ un aperto. Posto $A \coloneqq (X \setminus C) \cup U$, questo è un insieme analitico, e pertanto esiste un chiuso $F \subseteq X \times \omega^\omega$ tale che $A = \pi_X(F)$.

Per il Teorema di Gale-Stewart, allora, il **-gioco $G^{**}_{\mathrm{u}}(F)$ è determinato, ed in particolare vale una tra le condizioni a. e b. del Teorema 2.12.

Per il Teorema 2.6 e il Teorema 2.7, allora, il gioco $G^{**}(A) = G^{**}\big((X \setminus C) \cup U\big)$ è determinato: per il Lemma 2.8 quindi C ha la BP. ■

Riferimenti bibliografici

[1] Pedro Sánchez Terraf (https://math.stackexchange.com/users/212120/pedro-s%c3%a1nchez-terraf). *Banach-Mazur game and the Baire property*. Mathematics Stack Exchange. URL:https://math.stackexchange.com/q/3681151 (version: 2020-05-19). eprint: https://math.stackexchange.com/q/3681151. URL: https://math.stackexchange.com/q/3681151.

[2] Wilfrid Hodges e Jouko Väänänen. «Logic and Games». In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. A cura di Edward N. Zalta e Uri Nodelman. Winter 2024. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2024. URL: https://plato.stanford.edu/archives/win2024/entries/logic-games/ (visitato il 29/05/2025).

[3] Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics 156. New York, NY: Springer New York, 1995. 428 pp. ISBN: 978-1-4612-4190-4. DOI: 10.1007/978-1-4612-4190-4.

[4] Luca Motto Ros. *Notes on Descriptive Set Theory*. Lecture notes for a 48-hour course at the University of Turin. Apr. 2024. URL: https://sites.google.com/site/lucamottoros/.