Esercizi TDI - Foglio 5

Davide Peccioli

24 maggio 2025

1 Esercizio 1

Let E be an equivalence relation on a Polish space X. A set $A \subseteq X$ is called **E-invariant** if $x \in A$ and $y\ E\ x$ implies $y \in A$, for all $x, y \in X$. Suppose that E is analytic, that is, $E \in \mathbf{\Sigma}^1_1(X^2)$. Show that if $A, B \subseteq X$ are disjoint analytic E-invariant sets, then there is a Borel E-invariant set $C \subseteq X$ separating A from B, that is, $A \subseteq C$ and $C \cap B = \emptyset$.

Hint: Recursively define sets A_n, $C_n \subseteq X$ so that $A_0 = A$, C_n is a Borel set separating A_n from B, and $A_{n+1} \supseteq C_n$ is E-invariant, analytic, and disjoint from B.

1.1 Soluzione

Claim: Esistono due famiglie $(A_n)_{n\in\omega}, (C_n)_{n\in\omega}$ di sottoinsiemi di X, tali che

- $A_0 = A$;
- $\forall\, n \in \omega$: $A_n \subseteq C_n \subseteq A_{n+1}$;
- $\forall\, n \in \omega$: $C_n \in \mathbf{Bor}(X)$ e $C_n \cap B = \emptyset$
- $\forall\, n \in \omega$: A_n è E-invariante, analitico.

Se tali famiglie esistono, sia $C \coloneqq \bigcup_{n\in\omega} C_n$.

- C è E-invariante. Infatti, siano $x, y \in X$, con $x\ E\ y$. Se $x \in C$, allora esiste $n \in \omega$ tale che $x \in C_n \subseteq A_{n+1}$; poiché A_{n+1} è E-invariante, allora $y \in A_{n+1} \subseteq C_{n+1} \subseteq C$, e pertanto $y \in C$.
- $C \in \mathbf{Bor}(X)$, poiché unione numerabile di Boreliani.
- $A \subseteq C$; infatti $A = A_0 \subseteq C_0 \subseteq C$.
- $C \cap B = \emptyset$, poiché ciascun C_n è disgiunto ta B.

Dimostazione del claim: si procede per induzione.

a. Sia $A_0 \coloneqq A$, E-invariante e analitico. Allora $A_0, B \subseteq X$ sono due insiemi analitici disgiunti, e pertanto esiste, per il Teorema 3.2.1, un Boreliano $C_0 \subseteq X$ tale che

$$A_0 \subseteq C_0; \quad C_0 \cap B = \emptyset.$$

b. Per il passo induttivo, si supponga di aver costruito $(A_i)_{i \leq n}$ e $(C_i)_{i \leq n}$. Si costruiscono A_{n+1}, C_{n+1}.

L'insieme A_{n+1} è definito chiudendo C_n rispetto alla relazione di equivalenza E, ovvero

$$C_n \subseteq A_{n+1} \coloneqq \left\{ x \in X \mid \exists\, y \in C_n \ (x \; E \; y) \right\}.$$

- Ovviamente $A_n \subseteq C_n \subseteq A_{n+1}$, poiché E è riflessiva.
- A_{n+1} è E-invariante per definizione, poiché E è transitiva e simmetrica.
- A_{n+1} è analitico, poiché $(X \times C_n) \cap E$ è analitico, e A_{n+1} è

  $$\pi_1 \left((X \times C_n) \cap E \right)$$

  dove $\pi_1 : X \times X \to X$ è la proiezione sul primo fattore (per la proposizione 3.1.5).

  L'insieme $(X \times C_n) \cap E$ è analitico poiché $\mathbf{\Sigma}^1_1$ è chiusa per intersezioni finite e:

  - E è analitico per ipotesi;
  - C_n è Boreliano per ipotesi, dunque analitico, e, detta $\pi_2 : X \times X \to X$ la proiezione sul secondo fattore,

    $$X \times C_n = \pi_2^{-1}(C_n)$$

    e siccome $\mathbf{\Sigma}^1_1$ è chiusa per retroimmagini continue, anche $X \times C_n$ è analitico.
- Si nota che $A_{n+1} \cap B = \emptyset$ poiché, se per assurdo esistesse $x \in A_{n+1} \cap B$ allora ci sarebbe $y \in C_n$ tale che

  $$x \; E \; y$$

  e siccome B è E-invariante, allora $y \in B$. Dunque $y \in B \cap C_n \neq \emptyset$. Assurdo.

Dunque gli insiemi $A_{n+1}, B \subseteq X$ sono analitici e disgiunti, e pertanto esiste, per il Teorema 3.2.1, un Boreliano $C_{n+1} \subseteq X$ tale che

$$A_{n+1} \subseteq C_{n+1}; \quad C_{n+1} \cap B = \emptyset \qquad \blacksquare$$

2 Esercizio 2

Let E be an equivalence relation on a Polish space X. A **partial transversal** for E is a set $T \subseteq X$ meeting each E-equivalence class in at most one point. Show that the following are equivalent:

a. E admits an uncountable analytic partial transversal;

b. E admits an uncountable Borel partial transversal;

c. there is a Borel function $f : \mathbb{R} \to X$ such that $f(r_0) \not\!E \; f(r_1)$ for all distinct $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$.

2.1 Soluzione

2.1.1 a. implica b.

Osservazione: se $T \subseteq X$ è un insieme trasversale parziale, allora ogni $T' \subseteq T$ è ancora un insieme trasversale parziale.

Inoltre, ogni insieme analitico A non numerabile ammette un sottoinsieme Boreliano B non numerabile, in quanto:

- siccome A è analitico, allora A ha la PSP (per il Teorema 3.4.1);
- siccome A è non numerabile, allora esiste

$$\iota : 2^\omega \to A$$

una immersione topologica, ovvero ι continua e iniettiva;

- pertanto, per il Corollario 3.2.7, $B \coloneqq \iota(2^\omega) \subseteq T$ è Boreliano (poiché $2^\omega \in \mathbf{Bor}(2^\omega)$ e ι iniettiva) ed è ovviamente non numerabile, poiché ha cardinalità $2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Pertanto l'insieme analitico trasversale parziale T ammette un sottoinsieme Boreliano non numerabile $T' \subseteq T$, e per l'Osservazione iniziale, T' è un insieme trasversale parziale.

2.1.2 b. implica a.

Questo è ovvio, poiché $\mathbf{Bor}(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ per il Corollario 3.1.4.

2.1.3 b. implica c.

Sia $T' \subseteq X$ un insieme Boreliano trasversale parziale. Allora, per il Corollario 3.2.7 esiste un chiuso $F \subseteq \omega^\omega$ e una funzione continua e iniettiva

$$g : F \subseteq \omega^\omega \to X$$

tale che $g(F) = T'$.

Inoltre, per il Teorema 1.3.17, esiste una biiezione continua

$$h : F \subseteq \omega^\omega \to \mathbb{R}.$$

In particolare, per il Corollario 3.2.6, h è un Borel-isomorfismo, e pertanto $h^{-1} : \mathbb{R} \to F$ è una funzione Boreliana.

Si pone quindi $f \coloneqq g \circ h^{-1}$. Questa è una funzione Boreliana iniettiva (poiché composizione di funzioni iniettive)

$$f : \mathbb{R} \to X.$$

Siano dunque $r_0 \neq r_1 \in \mathbb{R}$. Allora $f(r_0) \neq f(r_1)$, e $f(r_0), f(r_1) \in T'$. Se per assurdo

$$f(r_0)\ E\ f(r_1)$$

si avrebbe che T' contiene due elementi distinti della stessa classe di E-equivalenza. Assurdo.

Pertanto, se $r_0 \neq r_1 \in \mathbb{R}$, allora $f(r_0)\ \not{E}\ f(r_1)$.

2.1.4 c. implica b.

La funzione f è necessariamente iniettiva, poiché se per assurdo esistessero $r_0 \neq r_1 \in \mathbb{R}$ tali che $f(r_0) = f(r_1)$, allora per la riflessività di E:

$$f(r_0)\ E\ f(r_1)$$

e questo contraddice l'ipotesi.

Si consideri dunque $A \subseteq \mathbb{R}$ non numerabile, $A \in \mathbf{Bor}(\mathbb{R})$: allora $f(A) \subseteq X$ è Boreliano per il Corollario 3.2.7, ed è inoltre un insieme trasversale parziale per E: infatti se per assurdo vi fossero $x \neq y \in f(A)$ tali che $x\ E\ y$ allora, siccome f è iniettiva, esistono $x_0 \neq y_0 \in A$ tali che $x = f(x_0)$, $y = f(y_0)$, ovvero

$$f(x_0)\ E\ f(y_0).$$

Questo contraddice l'ipotesi. ■

3 Esercizio 3

Let E be an equivalence relation on a Polish space X. A **transversal** for E is a set $T \subseteq X$ meeting every E-equivalence class in exactly one point. A **selector** for E is a map $s : X \to X$ selecting one element from each E-equivalence class, that is, $s(x) \in [x]_E$ and $s(x) = s(y)$ if $x\ E\ y$. Show that if E is analytic, then the following are equivalent:

a. E admits an analytic transversal;

b. E admits a Borel transversal;

c. E admits a Borel selector.

3.1 Soluzione

3.1.1 c. implica b.

Sia $s : X \to X$ un selettore Boreliano per E e sia $T \coloneqq s(X)$.

Allora T è trasversale. Infatti incontra ogni classe di E-equivalenza esattamente una volta.

- Almeno una volta: Per ogni $x \in X$ esiste $t \in T$ tale che $x\ R\ t$: $t = s(x)$.
- Al più una volta: Siano $x \neq y \in T$ e siano $x_0, y_0 \in X$ tali che

  $$s(x_0) = x, \quad s(y_0) = y.$$

  Per definizione $x\ E\ x_0$ e $y\ E\ y_0$. Se per assurdo $x\ E\ y$ allora $x_0\ E\ y_0$ per transitività di E. Per definizione, allora

  $$s(x_0) = s(y_0)$$

  ovvero $x = y$. Assurdo.

Inoltre, sia

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \times X \\ x &\longmapsto \big(x, s(x)\big) \end{aligned}$$

Questa è una funzione Boreliana, poiché s è Boreliana: $f = \mathrm{Id}_X \times s$ e per le proprietà di pag. 54, f è Boreliana.

Allora, detta $D \subseteq X \times X$ la diagonale,

$$D := \big\{(x, x) \mid x \in X\big\}$$

si ha che D è chiuso, poiché X è metrizzabile e quindi Haussdorf. Inoltre $T = f^{-1}(D)$

- ($\subseteq$): Se $t \in T$, allora $s(t) = t$, poiché altrimenti $s(t) \in T$ sarebbe un elemento distinto da t della classe $[t]_E$. Pertanto $f(t) = \big(t, s(t)\big) = (t, t) \in D$.
- ($\supseteq$): Se $t \in f^{-1}(D)$ allora $s(t) = t$ e quindi $t \in s(X) = T$.

Dunque, siccome f è Boreliana e D è chiuso, T è un Boreliano.

3.1.2 b. implica a.

Questo è ovvio, poiché $\mathbf{Bor}(X) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ per il Corollario 3.1.4.

3.1.3 a. implica c.

Sia $T \subseteq X$ un insieme analitico trasversale per E.

Siccome T è trasversale per E, allora è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} \varphi : X/E &\longrightarrow T \\ [x]_E &\longmapsto t \in [x]_E. \end{aligned}$$

poiché per ogni classe di E-equivalenza esiste un unico elemento $t \in T$ tale che $t \in [x]_E$.

Si definisce dunque la funzione $s : X \to T : x \mapsto \varphi\left([x]_E\right)$. Questa è un selettore, poiché:

- per ogni $x \in X$: $s(x) = \varphi\left([x]_E\right) = t \in [x]_E$;
- se $x \; E \; y$ allora $[x]_E = [y]_E$ e pertanto

$$s(x) = \varphi\left([x]_E\right) = \varphi\left([y]_E\right) = s(y).$$

Resta da dimostrare che s sia Boreliana. Sfruttando il Teorema 3.2.4 è sufficiente dimostrare che $\mathrm{graph}(s) \subseteq X \times X$ sia analitico. Si ha che

$$\mathrm{graph}(s) = E \cap (X \times T)$$

infatti:

- se $(x, y) \in \mathrm{graph}(s)$ allora $y = s(x)$, e poiché s è un selettore: $x \; E \; s(x)$ e quindi $(x, y) \in E$; inoltre $x \in X$ e $y = s(x) \in T$;

- viceversa, se $(x, y) \in E \cap (X \times T)$ allora $y \in T$ e $x \; E \; y$; inoltre y è l'unico elemento di T tale che $x \; E \; y$, e pertanto, per definizione $y = s(x)$.

Sia T che E sono analitici per ipotesi. Inoltre $X \times T = \pi_2^{-1}(T)$ è analitico, in quanto retroimmagine continua di un analitico (per la Proposizione 3.1.5), e dunque $E \cap (X \times T) = \text{graph}(s)$ è analitico. ■

4 Esercizio 4

Prove the following theorem:

> Let X be a Polish space. Then every $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$ can be written as $A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$, where A_ξ is Borel for every $\xi < \omega_1$.

by completing the details of the following steps:

a. First prove the theorem for $X = \text{LO}$ and $A = \text{WO}$ as follows:
   - Given $\omega \leq \xi < \omega_1$, let WO_ξ be the set of codes for well-orders of ω with order type $\leq \xi$. Show that each WO_ξ is analytic.
   - Argue that there is a Borel set A_ξ such that $\text{WO}_\xi \subseteq A_\xi \subseteq \text{WO}$.

     Optional: Show that WO_ξ itself is Borel by showing that its complement is analytic as well.
   - Conclude that $\text{WO} = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$.

b. Use the fact that WO is $\mathbf{\Pi}_1^1$-complete to prove the theorem for $X = \omega^\omega$ and an arbitrary $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(\omega^\omega)$.

c. Use the Borel isomorphism theorem for Polish spaces to transfer the result to an arbitrary uncountable Polish space X.

d. What happens if X is a countable Polish space?

4.1 Soluzione

4.1.1 Parte a.

Si consideri lo spazio polacco $X \coloneqq \text{LO} \subseteq 2^{\omega \times \omega}$ e si adotti la notazione dell'Esempio 3.1.8: l'insieme NWO è analitico, mentre l'insieme WO è coanalitico. È dunque possibile porre

$$A \coloneqq \text{WO} \in \mathbf{\Pi}_1^1(\text{LO}).$$

- Sia $\omega \leq \xi < \omega_1$ fissato. Sia WO_ξ l'insieme di tutti gli elementi di WO con order type $\leq \xi$: un buon ordine $\langle A, \preceq \rangle$ ha order type ξ' se e solo se esiste una biiezione $f : A \to \xi'$ tale che, per ogni $a, b \in A$

  $$a \preceq b \iff f(a) < f(b)$$

  Dunque $x \in \text{WO}$ ha order type ξ' se e solo se esiste una funzione biiettiva $f : \omega \to \xi'$ tale che per ogni $m, n \in \omega$:

  $$x(m, n) = 1 \iff f(m) < f(n)$$

Si consideri quindi $\mathrm{WO}^{=\xi'}$ l'insieme di tutti gli elementi di WO con order type esattamente ξ': per ogni $x \in \mathrm{WO}$:

$$x \in \mathrm{WO}^{=\xi'} \quad \iff \quad \exists\, f \in (\xi')^\omega \text{ biiettiva } \forall\, m,n \in \omega \ \big(x(m,n) = 1 \iff f(m) < f(n)\big)\,.$$

Inoltre, se $x \in \mathrm{LO}$, la condizione di destra garantisce che $x \in \mathrm{WO}$, poiché la biiezione f è un isomorfismo di ordini e ξ' è ben ordinato (in quanto ordinale). Pertanto, per ogni $x \in \mathrm{LO}$:

$$x \in \mathrm{WO}^{=\xi'} \quad \iff \quad \exists\, f \in (\xi')^\omega \text{ biiettiva } \forall\, m,n \in \omega \ \big(x(m,n) = 1 \iff f(m) < f(n)\big)\,.$$

Osservazione 1: per ogni $\xi' < \omega_1 = \omega^+$, si ha che $|\xi| = \aleph_0$, e pertanto ξ' è numerabile.

Osservazione 2: per ogni $\xi' < \omega_1$, ξ' è uno spazio polacco; infatti ogni ordinale numerabile è omeomorfo ad un sottoinsieme chiuso e numerabile di $\mathbb{R}$ e pertanto è polacco. Siccome prodotto numerabile di spazi polacchi è ancora polacco, $(\xi')^\omega$ è uno spazio polacco.

Si definisce quindi:

$$A_{m,n} := \Big\{(x,f) \in \mathrm{LO} \times (\xi')^\omega \mid \big(x(m,n) = 1 \iff f(m) < f(n)\big) \wedge f \text{ biiettiva}\Big\}$$

Questo è un insieme $\mathbf{Bor}\left(\mathrm{LO} \times (\xi')^\omega\right)$, poiché tutte le condizioni sono Boreliane:

$$\begin{aligned} (x,f) \in A_{m,n} \quad \iff \quad & \big[x(m,n) = 1 \iff f(m) < f(n)\big] \wedge \\ & \wedge \Big[\forall\, \lambda, \mu \in \omega \ \big(f(\lambda) = f(\mu)\big) \implies (\lambda = \mu)\Big] \wedge \\ & \wedge \Big[\forall\, \lambda < \xi' \ \exists\, k \in \omega \ \big(f(k) = \lambda\big)\Big] \end{aligned}$$

Le quantificazioni sono tutte numerabili in virtù dell'Osservazione 1.

Pertanto

$$A_{m,n} \in \mathbf{Bor}\left(\mathrm{LO} \times (\xi')^\omega\right) \subseteq \mathbf{\Sigma}^1_1\left(\mathrm{LO} \times (\xi')^\omega\right),$$

e dunque anche $\bigcap_{m,n\in\omega} A_{m,n}$ è $\mathbf{\Sigma}^1_1\left(\mathrm{LO} \times (\xi')^\omega\right)$.

Definita

$$\pi_{\mathrm{LO}} : \mathrm{LO} \times (\xi')^\omega \to \mathrm{LO}$$

la proiezione sul primo fattore, allora

$$\mathrm{WO}^{=\xi'} = \pi_{\mathrm{LO}}\left(\bigcap_{m,n\in\omega} A_{m,n}\right).$$

Dunque applicando la Proposizione 3.1.5 (per l'osservazione precedente $(\xi')^\omega$ è Polacco) si ottiene che $\mathrm{WO}^{=\xi'}$ è $\mathbf{\Sigma}^1_1(\mathrm{LO})$.

Inoltre,

$$\mathrm{WO}_\xi = \bigcup_{\xi' \leq \xi} \mathrm{WO}^{=\xi'}$$

e pertanto questo dimostra che $\mathrm{WO}_\xi \in \mathbf{\Sigma}^1_1(\mathrm{LO})$, poiché $\mathbf{\Sigma}^1_1$ è chiuso per unioni numerabili (per la Proposizione 3.1.5) e ξ numerabile per l'Osservazione 1.

- Sia $\omega \leq \xi < \omega_1$ fissato. È possibile applicare il Teorema 3.2.1 a WO_ξ e NWO (infatti sono entrambi analitici e $\mathrm{WO}_\xi \cap \mathrm{NWO} \subseteq \mathrm{WO} \cap \mathrm{NWO} = \emptyset$): esiste A_ξ Boreliano tale che:

$$\mathrm{WO}_\xi \subseteq A_\xi, \qquad A_\xi \cap \mathrm{NWO} = \emptyset$$

  Siccome $\mathrm{NWO} = X \setminus \mathrm{WO}$ si ha che $A_\xi \subseteq \mathrm{WO}$:

$$\mathrm{WO}_\xi \subseteq A_\xi \subseteq \mathrm{WO}.$$

  Per ogni $\xi < \omega$ si pone $A_\xi = \emptyset \in \mathbf{Bor}(\mathrm{LO})$.

- Vale la seguente uguaglianza: $\mathrm{WO} = \bigcup_{\omega \leq \xi < \omega_1} \mathrm{WO}_\xi$. ($\supseteq$): è ovvio, poiché per ogni $\omega \leq \xi < \omega_1$ si ha $\mathrm{WO}_\xi \subseteq \mathrm{WO}$. ($\subseteq$): ciascun buon ordine lineare ha order type minore di ω_1, e pertanto se $x \in \mathrm{WO}$ allora esiste $\xi < \omega_1$ tale che $x \in \mathrm{WO}_\xi$.

  Pertanto si ha che

$$\mathrm{WO} = \bigcup_{\omega \leq \xi < \omega_1} \mathrm{WO}_\xi \subseteq \bigcup_{\omega \leq \xi < \omega_1} A_\xi = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$$

  ed inoltre, per ogni $\xi < \omega_1$, $A_\xi \subseteq \mathrm{WO}$ e dunque

$$\bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi \subseteq \mathrm{WO}$$

  Per doppia inclusione si ha proprio $\mathrm{WO} = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$.

4.1.2 Parte b.

Sia $X := \omega^\omega$ e $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$.

Siccome WO è $\mathbf{\Pi}^1_1$-completo, allora esiste una funzione continua

$$f : \omega^\omega \to \mathrm{LO}$$

tale che $f^{-1}(\mathrm{WO}) = A$.

Per il punto precedente è possibile scrivere $\mathrm{WO} = \bigcup_{\xi < \omega_1} B_\xi$ con $B_\xi \in \mathbf{Bor}(\mathrm{LO})$, e quindi

$$A = f^{-1}(\mathrm{WO}) = f^{-1}\left(\bigcup_{\xi < \omega_1} B_\xi\right) = \bigcup_{\xi < \omega_1} f^{-1}(B_\xi).$$

Posto $A_\xi := f^{-1}(B_\xi)$, si ha che $A_\xi \in \mathbf{Bor}(X)$ poiché $B_\xi \in \mathbf{Bor}(\mathrm{LO})$ e f continua. Pertanto

$$A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$$

con A_ξ Boreliani.

4.1.3 Parte c.

Sia X uno spazio polacco non numerabile, e sia $A \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$. Per il Teorema 3.2.9 esiste un isomorfismo Boreliano:

$$F : \omega^\omega \to X$$

In particolare $B \coloneqq F^{-1}(A) \in \mathbf{\Pi}^1_1(X)$ per il Corollario 3.1.16, poiché F è Boreliana. Per il punto precedente,

$$B = \bigcup_{\xi<\omega_1} B_\xi$$

con $B_\xi \in \mathbf{Bor}(\omega^\omega)$

Siccome F è una biiezione, allora $A = F(B)$:

$$A = F(B) = F\left(\bigcup_{\xi<\omega_1} B_\xi\right) = \bigcup_{\xi<\omega_1} F(B_\xi).$$

Posto ora $A_\xi \coloneqq F(B_\xi)$, questi sono Boreliani per il Corollario 3.2.7, poiché F Boreliana iniettiva e B_ξ Boreliano.

4.1.4 Parte d.

Se X è numerabile allora il teorema è banale: ogni sottoinsieme di X è unione numerabile di singoletti, che sono chiusi, e pertanto ogni sottoinsieme di X è un Boreliano. ■