Esercizi TDI - Foglio 4

Davide Peccioli

12 maggio 2025

1 Esercizio 1

Prove that for any Polish space X and $x \in X$, the singleton $\{x\}$ is $\mathbf{\Pi}^0_1$-complete if and only if x is not isolated in X. Conclude that the set

$$C_1 = \{x \in 2^\omega \mid \exists n\ (x(n) = 0)\}$$

from Proposition 2.1.31 of the notes is $\mathbf{\Sigma}^0_1$-complete.

1.1 Soluzione

Siccome X è uno spazio metrizzabile, allora $\{x\} \subseteq X$ è chiuso, e pertanto $\{x\} \in \mathbf{\Pi}^0_1(X)$. Bisogna quindi dimostrare che $\{x\}$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard sse x è **non isolato** in X.

1.1.1 Implicazione " $\implies$ "

Sia $C \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$, e sia $f : \omega^\omega \to X$ continua tale che

$$f^{-1}(x) = C.$$

Si supponga per assurdo che x sia isolato. Allora $\{x\} \subseteq X$ è aperto, e quindi $C \subseteq \omega^\omega$ è aperto (retroimmagine continua di un aperto).

Per l'arbitrarietà di C, questo implica che ogni chiuso di ω^ω è un clopen. Inoltre, se $A \subseteq \omega^\omega$ è aperto, allora $\omega^\omega \setminus A$ è chiuso e quindi clopen, e pertanto A è un chiuso:

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(\omega^\omega) = \mathbf{\Delta}^0_1(\omega^\omega) = \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega).$$

Questo contraddice il Theorem 2.1.17 delle note.

1.1.2 Implicazione " $\impliedby$ " **Modificato**

Sia $x \in X$ un punto non isolato, ovvero x un punto di accumulazione di X, e sia $B \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$.

- Si fissi $d : X \to \mathbb{R}$ una metrica completa su X.
- Siccome x è un punto di accumulazione di X, allora esiste una successione $(y_n)_{n\in\omega} \subseteq X \setminus \{x\}$ tale che $y_n \to x$, ovvero, per ogni intorno U di x esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j \geq N$, $y_j \in U$.

- Si costruisce $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una famiglia di aperti di X tali che
  - per ogni $n \in \omega$: $U_n \setminus \{x\} \neq \emptyset$;
  - l'intersezione $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}$;
  - $\operatorname{diam}(U_n) \to 0$;
  - per ogni $n \in \omega$: $\operatorname{Cl}(U_{n+1}) \subsetneqq U_n$

  e una successione $v_n \subseteq X \setminus \{x\}$ tale che $v_n \in U_n \setminus \operatorname{Cl}(U_{n+1})$.

  Sia $U_0 = X$. Si supponga di aver costruito U_n, e sia $\alpha \in U_n \setminus \{x\}$. Tale α esiste, poiché esistono infiniti elementi della successione $(y_j)_{j\in\omega}$ dentro U_n intorno di x.

  Detto $r := \min\left\{2^{-n-1}, d(x,\alpha)/2\right\} > 0$, sia $U'_n := B_d(x,r)$. Necessariamente $\alpha \notin U'_n$ e $U'_n \subsetneqq U_n$.

  È quindi possibile porre $U_{n+1} := B_d(x, r/2)$:
  $$\operatorname{Cl}(U_{n+1}) = \operatorname{Cl}\left(B_d(x,r/2)\right) \subseteq B_d^{\mathrm{cl}}(x,r/2) \subseteq B_d(x,r) = U'_n \subsetneqq U_n.$$

  Si ponga inoltre $v_n := \alpha$, $v_n \in U_n \setminus \operatorname{Cl}(U_{n+1})$.

  Questa famiglia soddisfa tutte le proprietà elencate.

- Siccome B è un chiuso di ω^ω, allora esiste un albero potato $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $B = [T]$, i.e.
  $$B = \left\{\alpha \in \omega^\omega \mid \forall n \in \omega\ (\alpha \restriction n \in T)\right\}$$

- Si costruisce un ω-schema $\left\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\right\}$ su X:
  - se $s \in T$, allora $B_s := U_{\mathrm{lh}(s)}$; in particolare, quindi $\emptyset \in T$ e $B_\emptyset = U_0 = X$;
  - se $s \notin T$, sia j_s il più grande indice tale che $s \restriction j_s \in T$; si pone $B_s := \left\{v_{j_s}\right\}$.

- Questo definisce effettivamente uno schema tale che $\operatorname{Cl}(B_{s^\frown a}) \subseteq B_s$ e ciascun $B_s \neq \emptyset$: pertanto è indotta una funzione continua totale (per il Lemma 1.3.6)
  $$F : \omega^\omega \to X$$

- Resta da mostrare che $F^{-1}(x) = B$. Questo per definizione garantisce che $\{x\}$ sia un $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard.

  Per ogni $\beta \in B$,
  $$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\restriction n}$$
  dove $\beta \restriction n \in T$. Quindi $B_{\beta\restriction n} = U_n$. Quindi
  $$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}.$$

  Viceversa, se $\beta \notin B$, allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta \restriction n_0 \notin T$ e pertanto
  $$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\restriction n} \subseteq B_{\beta\restriction n_0}$$
  e per costruzione $x \notin B_{\beta\restriction n_0}$.

1.1.3 Insieme C_1

Dal momento che $\mathbf{\Sigma}^0_1 = \check{\mathbf{\Pi}}^0_1$ segue che C_1 è $\mathbf{\Sigma}^0_1$-completo se e solo se $2^\omega \setminus C_1$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo.

Si ha che $x \in 2^\omega \setminus C_1$ se e solo se per ogni $n \in \omega$, $x(n) \neq 0$, ovvero $x(n) = 1$.

Pertanto $2^\omega \setminus C_1 = \{u\}$, dove

$$\begin{aligned} u : \omega &\longrightarrow 2 \\ n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Per la caratterizzazione di cui sopra, C_1 è $\mathbf{\Sigma}^0_1$-completo se e solo se u non è un punto isolato di 2^ω.

Si consideri ora la successione $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq 2^\omega$:

$$x_n(j) = \begin{cases} 1 & j < n \\ 0 & j \geq n \end{cases}$$

Si ha che $x_n \to u$, e pertanto u non è un punto isolato di 2^ω (per ogni intorno I di u esiste $N \in \omega$ tale che $x_N \in I \setminus \{u\}$). ■

2 Esercizio 2

Prove that for any Polish space and $A \subseteq X$, if A is not open then it is $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard. Conclude that a set A is truly closed (i.e. closed but not open) if and only if it is $\mathbf{\Pi}^0_1$-complete, and similarly for $\mathbf{\Sigma}^0_1$.

2.1 Soluzione

2.1.1 Non aperti sono $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard **Modificato**

Sia A un insieme non aperto, e sia $C \subseteq \omega^\omega$ un chiuso fissato.

Sia dunque $a_0 \in A \setminus \mathrm{Int}(A)$. In particolare, quindi $a_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus A) \supseteq A \setminus \mathrm{Int}(A)$.

- Si fissi $d : X \to \mathbb{R}$ una metrica completa su X.
- Siccome $a_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus A)$, allora esiste una successione $(y_n)_{n\in\omega} \subseteq X \setminus A$ tale che $y_n \to a_0$, ovvero, per ogni intorno U di a_0 esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j \geq N$, $y_j \in U$.
- Si costruisce $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una famiglia di aperti di X tali che
  - per ogni $n \in \omega$: $U_n \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$;
  - l'intersezione $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{a_0\}$;
  - $\mathrm{diam}(U_n) \to 0$;
  - per ogni $n \in \omega$: $\mathrm{Cl}(U_{n+1}) \subsetneqq U_n$

  e una successione $v_n \subseteq X \setminus A$ tale che $v_n \in U_n \setminus \mathrm{Cl}(U_{n+1})$.

  Sia $U_0 = X$. Si supponga di aver costruito U_n, e sia $\alpha \in U_n \setminus A$. Tale α esiste, poiché esistono infiniti elementi della successione $(y_j)_{j\in\omega}$ dentro U_n intorno di a_0, e tutti questi elementi <u>non appartengono ad A</u>.

Detto $r \coloneqq \min\left\{2^{-n-1}, d(a_0,\alpha)/2\right\} > 0$, sia $U'_n \coloneqq B_d(a_0,r)$. Necessariamente $\alpha \notin U'_n$ e $U'_n \subsetneq U_n$.

È quindi possibile porre $U_{n+1} \coloneqq B_d(a_0, r/2)$:

$$\mathrm{Cl}(U_{n+1}) = \mathrm{Cl}\left(B_d(a_0, r/2)\right) \subseteq B_d^{\mathrm{cl}}(a_0, r/2) \subseteq B_d(a_0, r) = U'_n \subsetneq U_n.$$

Si ponga inoltre $v_n \coloneqq \alpha$, $v_n \in U_n \setminus \mathrm{Cl}(U_{n+1})$, $v_n \notin A$.

Questa famiglia soddisfa tutte le proprietà elencate.

- Siccome C è un chiuso di ω^ω, allora esiste un albero potato $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $C = [T]$, i.e.

$$C = \left\{\alpha \in \omega^\omega \mid \forall n \in \omega \ (\alpha \upharpoonright n \in T)\right\}$$

- Si costruisce un ω-schema $\left\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\right\}$ su X:
  - se $s \in T$, allora $B_s \coloneqq U_{\mathrm{lh}(s)}$; in particolare, quindi $\emptyset \in T$ e $B_\emptyset = U_0 = X$;
  - se $s \notin T$, sia j_s il più grande indice tale che $s \upharpoonright j_s \in T$; si pone $B_s \coloneqq \left\{v_{j_s}\right\}$.
- Questo definisce effettivamente uno schema tale che $\mathrm{Cl}(B_{s^\frown a}) \subseteq B_s$ e ciascun $B_s \neq \emptyset$: pertanto è indotta una funzione continua totale (per il Lemma 1.3.6)

$$F : \omega^\omega \to X$$

- Resta da mostrare che $F^{-1}(A) = C$. Questo per definizione garantisce che A sia un $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard.

  Per ogni $\beta \in C$,
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\upharpoonright n}$$
  dove $\beta \upharpoonright n \in T$. Quindi $B_{\beta\upharpoonright n} = U_n$. Quindi
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{a_0\} \subseteq A.$$

  Viceversa, se $\beta \notin C$, allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta \upharpoonright n_0 \notin T$ e pertanto
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\upharpoonright n} \subseteq B_{\beta\upharpoonright n_0}$$
  e per costruzione, siccome $B_{\beta\upharpoonright n_0} = \{v_m\}$ per qualche $m \in \omega$, e $v_m \notin A$ per costruzione, allora
$$A \cap B_{\beta\upharpoonright n_0} = \emptyset$$
  e pertanto $F(\beta) \notin A$.

2.1.2 Caratterizzazione dei chiusi ma non aperti

- Se A è chiuso ma non aperto, allora A è $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard e inoltre $A \in \mathbf{\Pi}^0_1$. Per definizione, quindi A è un $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo.

  Viceversa, se A è un chiuso $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard, si supponga per assurdo che sia aperto. Allora, per ogni $B \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$ esiste una funzione continua $F : \omega^\omega \to X$ tale che $F^{-1}(A) = B$, ovvero $B \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. Si avrebbe quindi che ogni chiuso di ω^ω sia un clopen. Come argomentato nell'esercizio precedente, questo genera un assurdo.

- L'insieme A è aperto ma non chiuso se e solo se $X \setminus A$ è chiuso ma non aperto, se e solo se $X \setminus A$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo per il punto precedente.

  Per il Lemma 2.1.23, $X \setminus A$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo se e solo se A è $\check{\mathbf{\Pi}}^0_1$-completo, ma (per l'Example 2.1.10)
  $$\check{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \mathbf{\Sigma}^0_1$$
  e pertanto A è aperto ma non chiuso se e solo se A è $\mathbf{\Sigma}^0_1$-completo. ■

3 Esercizio 3

Prove that the sets

$$C_0 = c_0 \cap [0,1]^\omega = \left\{ (x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega \;\middle|\; x_n \to 0 \right\}$$
$$C = \left\{ (x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega \;\middle|\; (x_n)_{n\in\omega} \text{ converges} \right\}$$

are both $\mathbf{\Pi}^0_3$-complete.

Hint. For the hardness part, compare these sets with the $\mathbf{\Pi}^0_3$-complete set C_3 from Exercise 2.1.27 in the notes.

3.1 Soluzione

3.1.1 C_0 e C sono degli insiemi $\mathbf{\Pi}^3_0$.

a. Insieme C_0.

   Si ha che $(x_j)_{j\in\omega} \in C_0$ se e solo se $(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$ e:
   $$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n > N \; \left(|x_n| \le \varepsilon \right)$$
   ovvero, se $U_{n,\varepsilon} \coloneqq \left\{ (x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega : |x_n| \le \varepsilon \right\}$, allora
   $$C_0 = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon}.$$

   Quindi, dette $\pi_m : [0,1]^\omega \to [0,1]$ le m-esime proiezioni (continue per definizione di topologia prodotto):
   $$U_{n,\varepsilon} = \pi_n^{-1}\left([-\varepsilon, \varepsilon] \right)$$

e pertanto $U_{n,\varepsilon}$ è chiuso. Per il Lemma 2.1.5:

$$\bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} \in \mathbf{\Pi}^0_1$$
$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}^0_2$$
$$C_0 = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} \in \mathbf{\Pi}^0_3.$$

e si ottiene che $C_0 \in \mathbf{\Pi}^0_3\left([0,1]^\omega\right)$.

b. Insieme C.

Si ha che $(x_j)_{j\in\omega} \in C$ se e solo se $(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$ e

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n, m > N \; (|x_n - x_m| \leq \varepsilon)$$

ovvero, se $V^\varepsilon_{m,n} \coloneqq \left\{(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega : |x_n - x_m| \leq \varepsilon\right\}$, allora

$$C = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m}.$$

Poiché la funzione $(\pi_n - \pi_m) : [0,1]^\omega \to \mathbb{R}$ è continua, allora

$$V^\varepsilon_{n,m} \coloneqq (\pi_n - \pi_m)^{-1}\left([-\varepsilon, \varepsilon]\right)$$

e quindi $V^\varepsilon_{n,m}$ è chiuso. Per il Lemma 2.1.5:

$$\bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m} \in \mathbf{\Pi}^0_1$$
$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m} \in \mathbf{\Sigma}^0_2$$
$$C = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m} \in \mathbf{\Pi}^0_3$$

e si ottiene che $C \in \mathbf{\Pi}^0_3\left([0,1]^\omega\right)$.

3.1.2 Hardness

È noto (Esercizio 2.1.27) che l'insieme $C_3 \coloneqq \left\{x \in \omega^\omega \mid \lim_{n\to\infty} x(n) = \infty\right\}$ sia $\mathbf{\Pi}^0_3$-hard. Pertanto si cercano delle funzioni continue

$$\omega^\omega \xrightarrow{F} [0,1]^\omega \xrightarrow{G} [0,1]^\omega$$

tali che

$$F^{-1}(C_0) = C_3, \qquad G^{-1}(C) = C_0.$$

Questo, per mezzo del Lemma 2.1.23, garantisce che C_0, C siano insiemi $\mathbf{\Pi}^0_3$-hard (e quindi, per il punto precedente, completi).

Le due funzioni si definiscono come segue:

$$\begin{aligned} F : \omega^\omega &\longrightarrow [0,1]^\omega \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto \big(\phi(x_j)\big)_{j\in\omega} \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad \begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\longrightarrow [0,1] \\ m &\longmapsto \begin{cases} 1/m & m \neq 0 \\ 1 & m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : [0,1]^\omega &\longrightarrow [0,1]^\omega \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto (y_j)_{j\in\omega} \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad y_j := \begin{cases} 0 & j \text{ dispari} \\ x_{j/2} & j \text{ pari.} \end{cases}$$

a. <u>F è continua.</u>

La funzione F è continua poiché lo è su ciascuna componente (in quanto $\mathbb{N}$ ha la topologia discreta).

b. <u>G è continua.</u>

La funzione F è continua poiché lo è su ciascuna componente:

- la componente j-esima di G, con j dispari, è data dalla funzione costante nulla, continua;
- la componente j-esima di G, con j pari, è data dalla funzione proiezione $\pi_{j/2} : [0,1]^\omega \to [0,1]$, continua per definizione di topologia prodotto.

c. <u>$F^{-1}(C_0) = C_3$.</u>

Si dimostra che $\alpha \in C_3$ sse $F(\alpha) \in C_0$.

- Se $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \in C_3$ allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j > N$ si ha$x_j \neq 1$.

  Pertanto, per ogni $j > N$, $\phi(x_j) = 1/x_j$ e, siccome $x_j \to \infty$, $\phi(x_j) \to 0$. Quindi $F(\alpha) \in C_0$.

- Viceversa, sia $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \notin C_3$. Si supponga per assurdo che $(y_j)_{j\in\omega} = F(\alpha) \in C_0$.

  Allora, definitivamente, $y_j = 1/x_j$ (e in particolare $x_j \neq 0 \neq y_j$), poiché altrimenti non si avrebbe convergenza a 0. In particolare, $x_j = 1/y_j$, definitivamente:

  $$\lim_{j\to\infty} x_j = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{y_j} = \infty$$

  poiché $y_j \to 0$. Quindi $(x_j)_{j\in\omega} \in C_3$. Assurdo.

  Si ottiene perciò che $F(\alpha) \notin C_0$.

d. <u>$G^{-1}(C) = C_0$.</u>

Si dimostra che $\alpha \in C_0$ sse $G(\alpha) \in C$.

- Se $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \in C_0$ allora la successione $\beta = (y_j)_{j\in\omega} := G(\alpha)$ converge a 0, e pertanto converge: $G(\alpha) \in C$.
- Viceversa, se $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \notin C_0$, allora la successione $\beta = (y_j)_{j\in\omega} := G(\alpha)$ non converge, in quanto presenta due sottosuccessioni $((y_{2j+1})_{j\in\omega}$ e $(y_{2j})_{j\in\omega})$ con caratteri diversi: $G(\alpha) \notin C$. ∎

4 Esercizio 4

Prove that for any $0 < p < \infty$ the set

$$\ell^p \cap [0,1]^\omega = \left\{ (x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega \mid \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

is $\mathbf{\Sigma}^0_2$-complete.

Hint. Recall that a series of positive terms converges if and only if the sequence of partial sums is bounded from above. For the hardness part, compare this set with the $\mathbf{\Sigma}^0_2$-complete set Q_2 from the notes.

4.1 Soluzione

4.1.1 Insieme $\mathbf{\Sigma}^0_2$

Sia $x = (x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$.

Si ha che $(x_j)_{j\in\omega} \in \ell^p \cap [0,1]^\omega$ se e solo se

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty$$

se e solo se

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

se e solo se, sfruttando l'hint,

$$\exists\, L \in \mathbb{Q}^+ \ \forall\, N \in \mathbb{N} \ \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \right) \leq L$$

Sia dunque

$$\begin{aligned} G^p_N : [0,1]^\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto \sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \end{aligned}$$

Questa è una mappa continua, poiché composizione di mappe continue (proiezioni, continue per la definizione di topologia prodotto, e somma finita ed elevamento a potenza) e pertanto il seguente è un insieme chiuso:

$$V^N_L := \left\{ (x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega \mid \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \right) \leq L \right\} = (G^p_N)^{-1}\left([0,L]\right).$$

In definitiva

$$\begin{aligned} V_L^N &\in \mathbf{\Pi}_1^0 \\ \bigcap_{N\in\mathbb{N}} V_L^N &\in \mathbf{\Pi}_1^0 \\ \ell^p \cap [0,1]^\omega = \bigcup_{L\in\mathbb{Q}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} V_L^N &\in \mathbf{\Sigma}_2^0. \end{aligned}$$

4.1.2 Insieme $\mathbf{\Sigma}_2^0$-hard

È noto che l'insieme

$$Q_2 \coloneqq \Big\{x \in 2^\omega \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, k \geq n\ \ \big(x(k) = 0\big)\Big\}$$

sia $\mathbf{\Sigma}_2^0$-hard.

Si vuole quindi trovare una funzione continua

$$F : 2^\omega \longrightarrow [0,1]^\omega$$

tale che $F^{-1}\left(\ell^p \cap [0,1]^\omega\right) = Q_2$. Questo, per il Lemma 2.1.23, garantisce che $\ell^p \cap [0,1]^\omega$ sia $\mathbf{\Sigma}_2^0$-hard, e quindi $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completo.

- Considerando che $2 = \{0,1\} \subseteq [0,1]$, si può definire F come l'inclusione, ovvero

$$\begin{aligned} F : 2^\omega &\longrightarrow [0,1]^\omega \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto (x_j)_{j\in\omega} \end{aligned}$$

- Questa è una funzione continua, poiché è continua su ciascuna componente (infatti $\{0,1\}$ ha la topologia di sottospazio rispetto a $[0,1]$, e per definizione quindi l'inclusione è continua).
- Inoltre, $F^{-1}\left(\ell^p \cap [0,1]^\omega\right) = Q_2$. In particolare, si dimostra che $\alpha \in Q_2$ sse $F(\alpha) \in \ell^p \cap [0,1]^\omega$
  - Sia $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \in Q_2$. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_j = 0$ per ogni $j > N$, e pertanto

    $$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty$$

    Pertanto $F(\alpha) \in \ell^p \cap [0,1]^\omega$.
  - Sia $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \notin Q_2$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \geq n$ tale che $x_{k_n} = 1$. Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un numero infinito di indici j tali che $x_j = 1$, e dunque $\lim_{j\to\infty} x_j \neq 0$ e dunque la serie

    $$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p$$

    diverge. Pertanto $F(\alpha) \notin \ell^p \cap [0,1]^\omega$. ■

5 Esercizio 5

Show that the collection of all sequences $(x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega$ having an irrational accumulation point is analytic.

5.1 Soluzione

Sia $A_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ l'insieme di tutti gli $(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$ con un punto di accumulazione irrazionale.

Si ricorda che $p \in [0,1]$ è un punto di accumulazione per $(x_j)_{j\in\omega}$, per definizione, se:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\forall\, N \in \mathbb{N} \;\exists\, n > N \;\; \big(x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\big)\,.$$

In particolare, $p \in [0,1]$ è un punto di accumulazione per $(x_j)_{j\in\omega}$ se e solo se:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\forall\, N \in \mathbb{N} \;\exists\, n > N \;\; \big(x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\big)\,.$$

Per il Remark 3.1.10, quindi, siccome $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ è uno spazio polacco, $A_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ è un insieme analitico, in quanto definito dalla seguente formula:

$$\exists\, p \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \;\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\forall\, N \in \mathbb{N} \;\exists\, n > N \;\; \big(x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\big)$$

composta unicamente (tranne che per il primo esistenziale), da quantificazioni numerabili, e da una formula atomica: $x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$, che definisce un boreliano di $([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]^\omega$, in quanto, data la funzione continua

$$\begin{aligned} F_n : ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]^\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big(p, (x_j)_{j\in\omega}\big) &\longmapsto x_n - p \end{aligned}$$

si ha che

$$\Big\{\big(p, (x_j)_{j\in\omega}\big) \in ([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]^\omega \mid x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\Big\} = F_n^{-1}\big[(-\varepsilon, \varepsilon)\big]$$

è un aperto. $\blacksquare$