Esercizi TDI - Foglio 2

Davide Peccioli

4 aprile 2025

1 Esercizio 1

Prove that the map

$$\omega^\omega \to 2^\omega, \quad x \mapsto \underbrace{0\dots0}_{x(0)}1\underbrace{0\dots0}_{x(1)}1\underbrace{0\dots0}_{x(2)}1\dots$$

is a (topological) embedding, and argue that this provides an alternative proof of the fact that

$$\left\{x \in 2^\omega \mid x(n) = 1 \text{ for infinitely many } n \in \omega\right\}$$

is a dense Polish subspace of 2^ω. In contrast, show that 2^ω cannot be embedded as a dense subset in ω^ω.

[Hint. Use compactness.]

1.1 Soluzione

1.1.1 Prima parte

Sia $f : \omega^\omega \to 2^\omega$ la funzione descritta e sia, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$:

$$\boldsymbol{N}_s := \left\{x \in \omega^\omega \mid x \restriction s = s\right\}$$

Si costruisce quindi l'ω-schema associato ad f:

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &:= \left\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\right\}\\ B_s &:= f(\boldsymbol{N}_s)\end{aligned}$$

Si applica il lemma 1.3.9.

- L'insieme B_s è aperto in 2^ω, per definizione di topologia prodotto (sono insiemi con un numero finito di componenti fissate).
- Sia $s \in \omega^{<\omega}$ e siano $x, y \in \omega$, $x \neq y$. Se per assurdo $B_{s^\frown x} \cap B_{s^\frown y} \neq \emptyset$, ovvero

  $$f(\boldsymbol{N}_{s^\frown x}) \cap f(\boldsymbol{N}_{s^\frown y}) \neq \emptyset,$$

  allora esistono $a \in \boldsymbol{N}_{s^\frown x}$, $b \in \boldsymbol{N}_{s^\frown y}$ tali che $f(a) = f(b)$. Siccome f è iniettiva $a = b$, ma $\boldsymbol{N}_{s^\frown x} \cap \boldsymbol{N}_{s^\frown y} = \emptyset$. Assurdo.

Per il punto (c) si ha che f è una immersione topologica.

1.1.2 Seconda parte

Sia
$$A \coloneqq \left\{x \in 2^\omega \mid x(n) = 1 \text{ per un numero infinito di } n \in \omega\right\}$$

Si ha che $A = f(\omega^\omega)$. Infatti, l'inclusione "$\supseteq$" è ovvia. Per il viceversa, si definisce per ogni $y \in A$, l'insieme
$$Z_y \coloneqq \left\{n \in \omega \mid y(n) = 1\right\} \subseteq \omega$$

Si ordina Z_y in maniera crescente, $Z_y \coloneqq (y_i)_{i\in\omega}$.

Posto $x \in \omega^\omega$ tale:
$$x(i) \coloneqq \begin{cases} y_0 & i = 0 \\ y_i - y_{i-1} - 1 & i > 0 \end{cases}$$

vale che $y = f(x)$.

Questo dimostra che A è un sottospazio polacco di 2^ω, poiché omeomorfo a ω^ω spazio polacco.

Inoltre, sia $y \in 2^\omega$, e sia, per ogni $n \in \omega$:

$$x_n(i) \coloneqq \begin{cases} y(i) & i \leq n \\ 1 & i > n \end{cases}$$

Allora $x_n \in A$ e $x_n \to y$, in quanto, considerata la distanza su 2^ω:

$$d(\eta, \tau) \coloneqq \begin{cases} 0 & \eta = \tau \\ 2^{-(n+1)} & \eta \neq \tau \text{ e } n \text{ è il più piccolo t.c. } \eta(n) \neq \tau(n) \end{cases}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \omega$, $N \coloneqq \lceil -\ln_2(\varepsilon) - 1\rceil$ tale che per ogni $n > N$: $d(x_n, y) < \varepsilon$. Quindi A è denso in 2^ω, per la caratterizzazione della chiusura per successioni.

1.1.3 Terza parte

Lo spazio ω^ω è metrizzabile, e pertanto T2.

Si supponga che per assurdo esista $\iota : 2^\omega \to \omega^\omega$ immersione topologica tale che $\iota(2^\omega) \eqqcolon X$ sia denso in ω^ω.

Siccome 2^ω è compatto, allora X è compatto, ed inoltre $\mathrm{Cl}(X) = \omega^\omega$. Ma in uno spazio di Hausdorff i compatti sono chiusi, e pertanto
$$X = \mathrm{Cl}(X) = \omega^\omega$$

Questo è un assurdo, poiché ω^ω non è compatto. ■

2 Esercizio 2

A set $A \subseteq \omega^\omega$ is **bounded** if there is $z \in \omega^\omega$ such that for all $x \in A$ we have $x(n) \leq z(n)$ for all $n \in \omega$. Prove that the following conditions are equivalent for an arbitrary $F \subseteq \omega^\omega$:

a. F is compact;

b. F is closed and bounded;

c. $F = [T]$ with T a finitely branching tree (i.e. every node in T has only finitely many successors).

Conclude that $A \subseteq \omega^\omega$ is contained in a compact set (equivalently, has compact closure) if and only A is bounded, and therefore ω^ω is not locally compact.

2.1 Soluzione

Sia, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$: $\boldsymbol{N}_s \coloneqq \{x \in \omega^\omega \mid x \restriction s = s\}$.

2.1.1 a. implica b.

Siccome ω^ω è metrizzabile è uno spazio T2. Se F è compatto allora è chiuso. Resta da dimostrare che F sia limitato.

Per ogni $x \in F$ e per ogni $n \in \omega$ si consideri l'aperto

$$U_{x,n} \coloneqq \{y \in F \mid y \restriction n = x \restriction n\}$$

Si ottiene quindi $U_x \coloneqq F \cap \bigcup_{n\in\omega} U_{x,n}$ aperto in F, e pertanto $\{U_x\}_{x\in F}$ è un ricoprimento aperto di F.

Dal momento che F è compatto, esiste $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq F$ tali che

$$\bigcup_{i=1,\ldots,m} U_{x_i} = F$$

e pertanto è sufficiente porre $z \in \omega^\omega$:

$$z(\eta) \coloneqq \max \{x_i(\eta)\}$$

per ottenere la tesi.

2.1.2 b. implica a.

Siccome F è limitato, esiste $z \in \omega^\omega$ tale che per ogni $x \in F$ e per ogni $n \in \omega$ si ha

$$x(n) \leq z(n)$$

Si consideri quindi, per ogni $n \in \omega$: $A_n \subseteq \omega$, $A_n \coloneqq z(n)+1 = \{0, 1, 2, \ldots, z(n)\}$. Questo è compatto in quanto finito con la topologia discreta.

Per il Teorema di Tychonoff $A \coloneqq \prod_{n\in\omega} A_n$ è compatto. Inoltre

$$F \subseteq A$$

in quanto, se $x \in F$ allora per ogni $n \in \omega$: $x(n) < z(n) + 1$ i.e. $x(n) \in \big(z(n)+1\big) = A_n$ e pertanto $x \in A$.

Quindi F è chiuso dentro A compatto, quindi F è compatto.

2.1.3 b. implica c.

Per la proposizione 1.3.3 esiste un albero potato T_F tale che $F = [T_F]$, con

$$T_F \coloneqq \big\{x \restriction n \mid x \in F \,\wedge\, n \in \omega\big\}$$

Resta da dimostrare che T_F sia a ramificazione finita. Se per assurdo esistesse $s \in T_F$ tale che, per ogni $i \in \omega$:

$$s^\frown i \in T_F$$

Pertanto, per ogni $i \in \omega$, esiste $x_i \in F$ tale che $x_i \restriction \mathrm{lh}(s) + 1 = s^\frown i$ ed in particolar modo, per ogni $i \in \omega$ vale che $x_i\big(\mathrm{lh}(s)+2\big) = i$. Per ogni $z \in \omega^\omega$, quindi, esiste $n \coloneqq \mathrm{lh}(s) + 2$ ed esiste $x \in F$, $x \coloneqq x_{i_0}$ con $i_0 = z(n) + 1$ tale per cui

$$z\,(n) \leq x(n) = x_{i_0}(n) = i_0 = z(n) + 1.$$

Assurdo poiché F è limitato.

2.1.4 c. implica b.

Sia T un albero a ramificazione finita, ovvero tale che per ogni $s \in T$:

$$R_s \coloneqq \big\{n \in \omega \mid s^\frown n \in T\big\} \subseteq \omega$$

è un insieme finito, con

$$F = [T] = \big\{x \in \omega^\omega \mid \forall\, n \in \omega\ (x \restriction n \in T)\big\}$$

Per la proposizione 1.3.3 F è chiuso, e pertanto resta da dimostrare che F sia limitato.

- Per ogni $n \in \omega$, $T_n \coloneqq \big\{t \in T \mid \mathrm{lh}(t) = n\big\}$ è finito.

  Per induzione, $T_0 = \big\{\emptyset\big\}$. Se T_n è finito, allora

  $$T_{n+1} = \big\{t \in T \mid \exists\, s \in T_n \,\wedge\, \exists\, m \in \omega\ (s^\frown m = t)\big\}$$

  ovvero

  $$T_{n+1} = \bigcup_{s \in T_n} \bigcup_{m \in R_s} \{s^\frown m\}$$

  unione finita di singoletti, e pertanto finito.

- Si definisce $z \in \omega^\omega$ come segue:

  $$\forall\, n \in \omega : \quad z(n) \coloneqq 1 + \max_{s \in T_n} \max R_s$$

- Claim: z così definito è tale che, per ogni $x \in F$ e per ogni $n \in \omega$: $z(n) \geq x(n)$.

  Infatti, se per assurdo esistesse $\widetilde{x} \in F$ e $\widetilde{n} \in \omega$ tali che $\widetilde{x}(\widetilde{n}) > z(\widetilde{n})$, allora $\widetilde{x} \restriction \widetilde{n}+1 \in T$ poiché $F = [T]$, ed in particolar modo,

$$(\widetilde{x} \restriction \widetilde{n}+1) \in T_{\widetilde{n}+1}$$

  Pertanto $\widetilde{x}(\widetilde{n}) \in R_{\widetilde{x} \restriction \widetilde{n}}$ e $\widetilde{x} \restriction \widetilde{n} \in T_{\widetilde{n}}$. Quindi $z(\widetilde{n}) \geq 1 + \widetilde{x}(\widetilde{n})$. Assurdo.

2.1.5 Locale compattezza

Sia $A \subseteq \omega^\omega$.

- Se esiste $C \subseteq \omega^\omega$ compatto e tale che $A \subseteq C$, allora C è limitato e quindi A è limitato.
- Se A è limitato e $z \in \omega^\omega$ ne è testimone, allora sia $(a_n)_{n \in \omega} \subseteq A$ una successione convergente ad a.

  Allora per ogni $n \in \omega$, $a \in \boldsymbol{N}_{a \restriction n+1}$, e quindi esiste $N \in \omega$ tale che $a_N \in \boldsymbol{N}_{a \restriction n+1}$ e pertanto

$$a(n) = a_N(n) \leq z(n)$$

  dove l'ultima disuguaglianza vale perché $a_N \in A$ limitato.

  Per la caratterizzazione della chiusura in termini di successioni, si è dimostrato che $\mathrm{Cl}(A)$ è limitato (e ovviamente chiuso), quindi compatto, e

$$A \subseteq \mathrm{Cl}(A) \qquad \blacksquare$$

3 Esercizio 3

A subset of a topological space is σ-compact (or K_σ) if it can be written as a countable union of compact spaces. (For example, finitedimensional Euclidean spaces $\mathbb{R}^n$ are σ-compact.) A set $A \subseteq \omega^\omega$ is eventually bounded if there is $z \in \omega^\omega$ such that for all $x \in A$ there is $n \in \omega$ for which $x(m) \leq z(m)$ for all $m \geq n$. Prove that the following conditions are equivalent for an arbitrary $A \subseteq \omega^\omega$:

a. A is contained in a σ-compact set;

b. A is eventually bounded.

Conclude that $F \subseteq \omega^\omega$ is a σ-compact set if and only if it is F_σ and eventually bounded, and that ω^ω is not σ-compact. Provide an explicit example of a subset of the Baire space which is σ-compact but not compact. Argue that ω^ω cannot be embedded as an F_σ (so neither closed) set into a σ-compact Polish space like $\mathbb{R}^n$.

3.1 Soluzione

3.1.1 b. implica a.

Sia A definitivamente limitato, e sia $z \in \omega^\omega$ testimone. Si ponga, per ogni $n \in \omega$

$$A_n \coloneqq \Big\{ x \in A \mid \forall\, i \in \omega \ \ \big(x(i) \leq \max \{n, z(i)\} \big) \Big\} \subseteq A$$

Si noti che A_n è limitato, poiché posto $y_n(i) \coloneqq \max\left\{n, z(i)\right\}$, $y_n \in \omega^\omega$.

Sia ora $x_0 \in A$. Allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che, per ogni $m \geq n_0$: $x(m) \leq z(m)$. Sia quindi $N \coloneqq \max_{m<n_0} x(m)$. Allora

$$\forall\, i \in \omega \quad x(i) \leq \max\left\{N, z(i)\right\}$$

e pertanto $x(i) \leq y_N(i)$ e $x \in A_N$.

Segue che $A = \bigcup_{n\in\omega} A_n$. Siccome ciascun A_n è **limitato**, allora esiste $K_n \supseteq A_n$ compatto (per l'esercizio precedente), e quindi

$$A \subseteq \bigcup_{n\in\omega} K_n$$

3.1.2 a. implica b.

Senza perdita di generalità si dimostra che se A è σ-compatto, allora A è definitivamente limitato (in quanto se C è definitivamente limitato allora anche $B \subseteq C$ lo è).

Sia quindi

$$A = \bigcup_{n\in\omega} K_n$$

e K_n compatto per ogni $n \in \omega$. Allora, per l'esercizio precedente, K_n è chiuso e limitato. Sia quindi y_n un testimone della limitatezza di K_n.

Si definisce quindi $z \in \omega^\omega$: per ogni $i \in \omega$:

$$z(i) \coloneqq \max\left\{y_0(i), \dots, y_i(i)\right\}$$

Allora, per ogni $x \in A$ esiste $N \in \omega$ tale che $x \in K_N$: pertanto, per ogni $m > N$:

$$\begin{aligned} x(m) \leq y_N(m) &\leq \max\left\{y_0(m), \dots, y_N(m)\right\} \\ &\leq \max\left\{y_0(m), \dots, y_N(m), \dots, y_m(m)\right\} = z(m). \end{aligned}$$

3.1.3 Caratterizzazione dei σ-compatti

Se $F \subseteq \omega^\omega$ è σ-compatto allora:

- è $\boldsymbol{F_\sigma}$ in quanto unione numerabile di compatti, che per la caratterizzazione dell'esercizio precedente sono chiusi;
- è definitivamente limitato per la dimostrazione (3.1.2).

Se $F \subseteq \omega^\omega$ è un insieme $\boldsymbol{F_\sigma}$ e definitivamente limitato, allora è contenuto in un insieme σ-compatto K. Si scrivano:

$$F \coloneqq \bigcup_{n\in\omega} C_n, \qquad K \coloneqq \bigcup_{m\in\omega} K_m$$

con C_n chiusi e K_m compatti. Allora

$$F = F \cap K = \bigcup_{n,m\in\omega} (C_n \cap K_m)$$

dove $(C_n \cap K_m) \subseteq K_m$ è un chiuso in un compatto, e quindi compatto e pertanto F è σ-compatto.

Inoltre, se ω^ω fosse σ-compatto, allora dovrebbe essere definitivamente limitato. Ma per ogni $z \in \omega^\omega$ esiste $z' \in \omega^\omega$ tale che per ogni $n \in \omega$ esiste $m \geq n$ per cui $z'(m) > z(m)$: è sufficiente porre, per ogni $i \in \omega$: $z'(i) = z(i) + 1$.

3.1.4 Insieme σ-compatto ma non compatto

Per il Teorema di Tychonoff, per ogni $n \in \omega$ gli insiemi

$$C_n \coloneqq \prod_{m \in \omega} \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

sono compatti, e pertanto $C \coloneqq \bigcup_{n \in \omega} C_n$ è σ-compatto.

Per ogni $z \in \omega^\omega$, si ponga $N \coloneqq z(0)$. Allora esiste $x \in C_{N+1}$ tale che $x(0) = N + 1$, e quindi $x(0) > z(0)$. Pertanto C non è limitato, e quindi non è compatto.

3.1.5 Immersione di ω^ω

Siano per assurdo X uno spazio polacco σ-compatto (ovvero $X = \bigcup_{m \in \omega} K_m$ con K_m compatti) ed ι una immersione:

$$\iota : \omega^\omega \to X$$

tale per cui $\iota(\omega^\omega)$ sia un insieme $\boldsymbol{F}_\sigma$ di X.

Allora esistono $C_n \subseteq X$ chiusi tali che

$$\iota(\omega^\omega) = \bigcup_{n \in \omega} C_n.$$

Inoltre si ha

$$\iota(\omega^\omega) = \left(\bigcup_{n \in \omega} C_n \right) \cap \left(\bigcup_{m \in \omega} K_m \right) = \bigcup_{n,m \in \omega} C_n \cap K_m$$

e pertanto

$$\omega^\omega = \bigcup_{n,m \in \omega} \iota^{-1}(C_n \cap K_m).$$

Ma $C_n \cap K_m \subseteq K_m$ sono compatti in quanto chiusi di un compatto, e siccome ι è un omeomorfismo con la sua immagine, $\iota^{-1}(C_n \cap K_m)$ sono compatti.

Quindi ω^ω è σ-compatto. Assurdo. ■

4 Esercizio 4

Show that for every nonempty Polish space X there is a continuous open surjection $f : \omega^\omega \to X$.

[Hint. First show that if X is a second countable metric space, then for every open U and every $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ there is a countable covering $(U_n)_{n \in \omega}$ of U such that $\mathrm{Cl}\,(U_n) \subseteq U$ and $\mathrm{diam}\,(U_n) < \varepsilon$, for all $n \in \omega$. Use this to build an appropriate \$$\omega$\$-scheme inducing the function f.]

4.1 Soluzione

4.1.1 Claim

Se X è uno spazio metrico secondo numerabile, allora per ogni $U \subseteq X$ aperto e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste un ricoprimento aperto numerabile $(U_n)_{n\in\omega}$ di U tale che $\mathrm{Cl}(U_n) \subseteq U$ e $\mathrm{diam}(U_n) < \varepsilon$, per ogni $n \in \omega$.

4.1.2 Dimostrazione del claim

Sia (X, d) lo spazio metrico in considerazione. Si denotino con

$$B_d(x, r) \coloneqq \left\{ y \in X \mid d(x, y) < r \right\}.$$

Siccome X è secondo numerabile allora X è separabile, e pertanto $U \subseteq X$ è separabile. Sia quindi C sottoinsieme denso di U, numerabile. Allora, per ogni $c \in C$ esiste $0 < r_c < \varepsilon$ tale che $B_d(c, r_c) \subseteq U$, poiché U aperto e quindi intorno di ogni suo punto. In particolare, si richiede che

$$r_c \coloneqq \sup \left\{ r \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \mid B_d(c, r) \subseteq U \right\}.$$

Si consideri quindi:

$$\mathcal{B}_U \coloneqq \left\{ B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right) \mid c \in C \right\}$$

- Si ha, per ogni $c \in C$, che $B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right)$ è aperto e $\mathrm{diam}\left(B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right)\right) < \varepsilon$.
- Sia ora $c \in C$ fissato, e sia $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right)$ successione convergente a x. Allora, siccome $d(x, x_n) < \frac{r_c}{2}$ definitivamente:

$$\begin{aligned} d(x, c) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, c) \\ &< \frac{r_c}{2} + \frac{r_c}{2} < r_c \end{aligned}$$

  e pertanto $x \in U$. Quindi, per la caratterizzazione della chiusura per successioni,

$$\mathrm{cl}\left(B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right)\right) \subseteq U.$$

- Infine, si ha che l'unione $\bigcup \mathcal{B}_U = U$. Infatti, se $y \in U \setminus C$ allora esiste $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tale che $B_d(y, \delta) \subseteq U$. In particolare, esiste $c \in B_d(y, \delta/2) \cap C$ (poiché C è denso in U). Si ha quindi che $y \in B_d(c, \delta/2) \subseteq U$: infatti, se per assurdo esistesse $x \in B_d(c, \delta/2) \setminus U$ allora

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, c) + d(c, y) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta \end{aligned}$$

  e pertanto $x \in B_d(y, \delta) \subseteq U$. Assurdo.

Dunque $\delta/2 < \varepsilon/2$ e $B_d(c, \delta/2) \subseteq U$, e dunque $r_c \geq \delta/2$ per massimalità. Pertanto

$$B_d(c, r_c) \supseteq B_d(c, \delta/2) \ni y,$$

e quindi $y \in \bigcup \mathcal{B}_U$.

In conclusione $\mathcal{B}_U$ è il ricoprimento aperto numerabile cercato.

4.1.3 Dimostrazione dell'esercizio

Sia d una metrica completa fissata su X spazio polacco.

Si costruisce per induzione su $\mathrm{lh}(s)$ un ω-schema $\mathcal{S}$ su (X, d). Sia $B_{\langle\,\rangle} = X$.

Sia ora $s \in \omega^{<\omega}$ tale per cui B_s è definito. Sia $(U_n)_{n\in\omega}$ il ricoprimento aperto numerabile di B_s del claim. Questo è tale che:

- $\bigcup_{n\in\omega} U_n = B_s$
- gli U_n sono aperti, per ogni $n \in \omega$;
- $U_n \subseteq \mathrm{Cl}(U_n) \subseteq B_s$;
- $\mathrm{diam}(U_n) \leq 2^{-\,\mathrm{lh}(s)}$;
- senza perdità di generalità, e possibile supporre che ciascun $U_n \neq \emptyset$ (si sostituisce nel ricoprimento a ciascun $U_n = \emptyset$ il primo $U_m \neq \emptyset$).

Si pone quindi, per ogni $a \in \omega$: $B_{s^\frown a} \coloneqq U_a$.

Si è in questo modo definito un ω-schema su X che induce una funzione

$$f : D_{\mathcal{S}} \to X.$$

Per il lemma 1.3.6, f è tale che

a. f è continua per il punto (a);

b. f è suriettiva per il punto (d);

c. $D_{\mathcal{S}} = \omega^\omega$ per il punto (e);

d. f è aperta per il punto (d). ■

5 Esercizio 5

Recall the notion of Cantor-Bendixson rank of a Polish space from Section 1.4 in the notes for the course. For each ordinal $\alpha < \omega_1$, provide an example of a Polish space X with Cantor-Bendixson rank α. (Optional: show that such an X can always be taken as a countable space, and that if α is a successor ordinal than X can be taken to be compact.)

[Hint. To geometrically visualize the problem it is easier to work in $\mathbb{R}^2$. Use a construction by transfinite recursion over α. The cases $\alpha = 0, 1$ are easy. For $\alpha = 2$ consider $X = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \omega\}$ with $\mathrm{x_n \to x}$\$ and all x_n isolated. This suggest the strategy when $\alpha = \beta + 1$ is successor:

consider a sequence of spaces of Cantor-Bendixson rank β and construe them as a sequence of spaces accumulating towards a point. For limit cases, consider the (disjoint) sum of spaces with Cantor-Bendixson rank cofinal in α.]

5.1 Osservazione

Per ogni spazio topologico X si ha che $x \notin X'$ se e solo se $\{x\} \cap X$ è un aperto di X.

5.2 Lemma

Sia α un ordinale limite, siano $(X_\beta)_{\beta<\alpha}$ una famiglia di spazi polacchi e sia

$$X \coloneqq \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta.$$

Allora, per ogni ordinale λ:

$$X^{(\lambda)} = \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta^{(\lambda)}$$

5.2.1 Dimostrazione del lemma

Si ricorda la topologia dell'unione disgiunta: $U \subseteq \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta$ è aperto se e solo se, detta

$$\varphi_{\beta_i} : X_{\beta_i} \to \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta$$

l'iniezione canonica, per ogni $\beta_i < \alpha$ l'insieme $\varphi_{\beta_i}^{-1} \subseteq X_{\beta_i}$ è aperto.

Per induzione su λ.

- Caso base: $\lambda = 0$: banale.
- Caso base: $\lambda = 1$: bisogna dimostrare che

  $$\left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta\right)' = \coprod_{\beta<\alpha} X'_\beta$$

  Sia $x \in \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta$. Allora esiste un unico β_0 tale che $x \in X_{\beta_0}$.

  Dunque, se $x \notin \left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta\right)'$ allora:

  - per ogni $\beta \neq \beta_0$, $x \notin X_\beta$ e quindi $x \notin X'_\beta \subseteq X_\beta$;
  - per β_0, $\{x\} \subseteq X_{\beta_0}$ è aperto, e quindi $x \notin X'_{\beta_0}$;

  pertanto $x \notin \coprod_{\beta<\alpha} X'_\beta$.

  Viceversa, se $x \notin \coprod_{\beta<\alpha} X'_\beta$ significa che $\{x\} \subseteq X_{\beta_0}$ è aperto e pertanto per ogni $\beta < \alpha$ l'insieme $\varphi_\beta^{-1}\left(\{x\}\right)$ è aperto (poiché uguale a $\emptyset$ se $\beta \neq \beta_0$ e uguale a $\{x\}$ se $\beta = \beta_0$). Pertanto

$\{x\} \subseteq \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta$ è aperto, e dunque

$$x \notin \left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta\right)'$$

- Ordinale successore: $\lambda = \gamma + 1$.

$$\begin{aligned} X^{(\lambda)} &= \left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta\right)^{(\lambda)} = \left(\left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta\right)^{(\gamma)}\right)' \\ &= \left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta^{(\gamma)}\right)' = \coprod_{\beta<\alpha} (X_\beta^{(\gamma)})' \\ &= \coprod_{\beta<\alpha} (X_\beta^{(\gamma+1)}) = \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

- Ordinale limite λ:

$$\begin{aligned} X^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma<\lambda} X^{(\gamma)} = \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta\right)^{(\gamma)} \\ &= \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\coprod_{\beta<\alpha} X_\beta^{(\gamma)}\right) = \coprod_{\beta<\alpha} \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\beta^{(\gamma)} \\ &= \coprod_{\beta<\alpha} X_\beta^{(\lambda)} \end{aligned}$$

■

5.3 Soluzione dell'esercizio

Si costruiscono, per ricorsione, spazi polacchi $X_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ con rango di Cantor-Bendixson α e tali che $X_\alpha^\infty = \emptyset$.

Questo garantisce che ciascun X_α sia uno spazio polacco numerabile.

5.3.1 Caso base

Per $\alpha = 0$ deve valere che $X_0^{(0)} = X_0 = \emptyset$. Pertanto si pone $X_0 = \emptyset$.

Per $\alpha = 1$ deve valere che $X_1^{(1)} = X_1' = \emptyset$. Pertanto si pone $X_1 = \omega \subseteq \mathbb{R}$.

5.3.2 Ordinale successore

Sia $\alpha = \beta+1$ un ordinale successore, e sia $X_\beta \subseteq \mathbb{R}$ uno spazio polacco con rango di Cantor-Bendixson β e tale che $X_\beta^\infty = \emptyset$.

Sia $\{y_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ una successione convergente ad $y \in \mathbb{R}$, composta da punti isolati tali che per ogni $n \in \omega$: $y_n < y$. Per ciascun $n \in \omega$ sia $U_n \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto tale che $y_n \subseteq U_n$ e che $\forall\, m \neq n$: $\mathrm{Cl}(U_n) \cap \mathrm{Cl}(U_m) = \emptyset$.

Sia ora, per ogni $n \in \omega$, $\Phi_n : \mathbb{R} \to U_n$ un omeomorfismo (è sufficiente considerare una contrazione dell'arco tangente). Siano X_n le immagini di X_β tramite Φ_n:

$$X_n \coloneqq \Phi_n(X_\beta) \subseteq U_n.$$

Si definisce $X_\alpha \coloneqq \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n$. Questo è spazio polacco in quanto unione numerabile di spazi polacchi.

Per induzione su $\lambda < \alpha$:

$$X_\alpha^{(\lambda)} = \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\lambda)}$$

- Caso base: per $\lambda = 0$ è banale.
- Ordinale successore: sia $\lambda < \alpha$, $\lambda = \gamma + 1$. Si dimostra che

$$\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} (X_n^{(\gamma)})' = \left(\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}\right)'$$

  Si consideri $x \notin \left(\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}\right)'$, $x \neq y$.

  Allora $\{x\} \subseteq \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}$ è aperto: per ogni $n \in \omega$ si ha che $\{x\} \cap X_n^{(\gamma)}$ è aperto in $X_n^{(\gamma)}$ e quindi per ogni $n \in \omega$: $(x \notin X_n^{(\gamma)})'$, ovvero

$$x \notin \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} \left(X_n^{(\gamma)}\right)'.$$

  Se invece per assurdo $y \notin \left(\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}\right)'$ allora $\setminus\{y\} \subseteq \{y\} \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}$ è aperto e quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap \left(\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}\right) = \{y\}$$

  Siano ora $y_{n_0}, y_{n_1}, y_{n_2} \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ (che esistono poiché $y_n \to y$), con $y_{n_0} < y_{n_1} < y_{n_2}$. Allora, siccome $U_{n_1} = (a, b)$ per certi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $y_{n_0} < a$ e $b < y_{n_1} < y$, si ha:

$$U_{n_1} \subseteq (y - \varepsilon, y).$$

  Siccome $\lambda < \alpha$ ovvero $\gamma + 1 < \beta + 1$ allora $\gamma < \beta$ e pertanto, per ogni $n \in \omega$: $X_n^{(\gamma)} \neq \emptyset$. Quindi

$$\emptyset \neq \Phi_{n_1}(X_\beta^{(\gamma)}) = X_{n_1}^{(\gamma)} \subseteq U_{n_1} \subseteq (y - \varepsilon, y)$$

e pertanto

$$(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \cap \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right) \supseteq \{y\} \cup \Phi_{n_1}(X_\beta^{(\gamma)}) \supsetneqq \{y\}$$

Assurdo. Quindi $y \in \left(\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)} \right)'$

Viceversa, se $x \notin \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} (X_n^{(\gamma)})'$ allora per ogni $n \in \omega$:

$$x \notin (X_n^{(\gamma)})'$$

e pertanto $\{x\} \subseteq X_n^{(\gamma)}$ è aperto. Ma $X_n^{(\gamma)}$ è aperto di $\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}$ e quindi anche $\{x\}$ lo è:

$$x \notin \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\lambda)} \right)'.$$

Si noti che per ogni $n \in \omega$ si ha che $X_n^{(\gamma)}$ è aperto di $\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)}$ poiché

$$X_n^{(\gamma)} = U_n \cap \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right)$$

dove U_n è un aperto di $\mathbb{R}$.

Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} X_\alpha^{(\lambda)} &= \left(X_\alpha^{(\gamma)} \right)' \\ &= \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} (X_n^{\gamma})' = \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

- Ordinale limite: sia $\lambda < \alpha$ un ordinale limite. Allora

$$\begin{aligned} X_\alpha^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma<\lambda} X_\alpha^{(\gamma)} = \bigcap_{\gamma<\lambda} \left(\{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)} \right) \\ &= \{y\} \cup \bigcap_{\gamma<\lambda} \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\gamma)} \\ &= \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} \bigcap_{\gamma<\lambda} X_n^{(\gamma)} = \{y\} \cup \bigcup_{n\in\omega} X_n^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Pertanto $X_\alpha^{(\beta)} = \{y\}$ e $X_\alpha^{(\alpha)} = \emptyset$.

5.3.3 Ordinale limite

Sia $\alpha < \omega_1$ un ordinale limite, e sia per ogni $\beta < \alpha$: X_β uno spazio polacco con rango di Cantor-Bendixson β e tale che $X_\beta^\infty = \emptyset$.

Sia $(\beta_n)_{n\in\omega}$ una successione di ordinali cofinale in α. Senza perdita di generalità è possibile considerare ciascun X_{β_n} contenuto nell'intervallo $I_n \coloneqq (n-1/2, n+1/2)$, per mezzo di un omeomorfismo $\mathbb{R} \to I_n$.

Allora si pone $X_\alpha \coloneqq \coprod_{n<\omega} X_{\beta_n}$, $X_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ è uno spazio polacco in quanto unione numerabile di spazi polacchi.

Inoltre $X_\alpha^\infty = \emptyset$ e X ha rango di Cantor-Bendixson α. Infatti, per ogni $\lambda < \alpha$ esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta_{n_0} > \lambda$ per cofinalità di $(\beta_n)_{n\in\omega}$ e pertanto:

$$X_\alpha^{(\lambda)} = \coprod_{n<\omega} X_{\beta_n}^{(\lambda)} \supseteq X_{\beta_{n_0}}^{(\lambda)} \neq \emptyset$$

mentre

$$X_\alpha^{(\alpha)} = \coprod_{n<\omega} X_{\beta_n}^{(\alpha)} = \coprod_{n<\omega} \emptyset = \emptyset. \qquad \blacksquare$$