Giochi di Banach-Mazur

Davide Peccioli

Università degli Studi di Torino

4 giugno 2025

Gioco Logico

Definizione 1.1

Un gioco logico è una quadrupla $\mathcal{G} := (\Omega, f, W_{\mathsf{I}}, W_{\mathsf{II}})$ dove:

- Ω è un insieme, chiamato il dominio del gioco;
- $f : \Omega^{<\omega} \to \{\mathsf{I}, \mathsf{II}\}$ è una funzione, chiamata funzione di turno o funzione del giocatore;
- $W_{\mathsf{I}}, W_{\mathsf{II}} \subseteq \Omega^{<\omega} \cup \Omega^{\omega}$ sono tali che
  1. $W_{\mathsf{I}} \cap W_{\mathsf{II}} = \emptyset$;
  2. per ogni $\boldsymbol{a} \in W_{\bullet}$ e per ogni $\boldsymbol{b} \in \Omega^{<\omega} \cup \Omega^{\omega}$:
  $$\boldsymbol{a} \subseteq \boldsymbol{b} \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{b} \in W_{\bullet}$$

Gli elementi di $\Omega^{<\omega}$ sono chiamati posizioni del gioco $\mathcal{G}$, mentre un elemento di Ω^{ω} è detto giocata di $\mathcal{G}$.

DATOGLIERE

I giocatori I e II giocano scegliendo a turno elementi di Ω. La funzione di turno f associa a ciascuna posizione uno dei due giocatori: se

$$f(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \mathsf{I}$$

allora l'elemento a_{n+1} sarà scelto dal giocatore I.

Si dirà che il giocatore I vince la giocata $\boldsymbol{a}$ se $\boldsymbol{a} \in W_{\mathsf{I}}$; si dirà che il giocatore II vince la giocata $\boldsymbol{b}$ se $\boldsymbol{b} \in W_{\mathsf{II}}$.

Definizione 1.2

Un gioco è detto totale se $\Omega^\omega \subseteq W_{\mathsf{I}} \cup W_{\mathsf{II}}$.

Strategia per un gioco logico

Una strategia per un giocatore è un insieme di regole che descrivono esattamente come un giocatore debba giocare, in base a tutte le mosse precedenti.

Una strategia è detta <u>vincente</u> per un giocatore se questo vince ogni giocata in cui ne fa uso, a prescindere dalle mosse dell'altro giocatore.

Definizione 1.4

Un gioco si dice <u>determinato</u> se esiste una strategia vincente per **I** o per **II**.

Giochi logici equivalenti

Definizione 1.5

Due giochi logici $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}'$ con giocatori **I** e **II** sono detti equivalenti se sono soddisfate entrambe le seguenti ipotsi:

1. esiste una strategia vincente per **I** in $\mathcal{G}$ sse esiste una strategia vincente per **I** in $\mathcal{G}'$
2. esiste una strategia vincente per **II** in $\mathcal{G}$ sse esiste una strategia vincente per **II** in $\mathcal{G}'$

Giochi di Gale-Stewart

Definizione 1.6

Sia A un insieme non vuoto, e sia $C \subseteq A^\omega$. Si definisce il gioco di Gale-Stewart associato ad C come il gioco logico seguente:

$$G(A, C) = G(A) \coloneqq (A, \psi, C, A^\omega \setminus C)$$

dove la funzione $\psi : A^{<\omega} \to \{\mathsf{I}, \mathsf{II}\}$ è così definita

$$\psi(s) \coloneqq \begin{cases} \mathsf{I} & \mathrm{lh}(s) \text{ è pari} \\ \mathsf{II} & \mathrm{lh}(s) \text{ è dispari} \end{cases}$$

DATOGLIERE

Pertanto il gioco può essere codificato come segue:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & a_4 & & \ldots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & & \ldots & \end{array}$$

e il giocatore I vince se e solo se $(a_n)_{n\in\omega} \in C$.

Strategia per un gioco di Gale-Stewart

Si specializza la definizione di strategia per un gioco logico al caso particolare di un gioco di Gale-Stewart.

Una strategia per un gioco $G(A, C)$ è un albero $\sigma \subseteq A^{<\omega}$ tale che:

1. σ sia potato e non vuoto;
2. se $\langle a_0, \ldots, a_{2j} \rangle \in \sigma$ allora per ogni $a_{2j+1} \in A$: $\langle a_0, \ldots, a_{2j+1} \rangle \in \sigma$;
3. se $\langle a_0, \ldots, a_{2j-1} \rangle \in \sigma$ allora esiste un unico $a_{2j} \in A$ tale che $\langle a_0, \ldots, a_{2j} \rangle \in \sigma$.

Una strategia è detta vincente se il suo corpo $[\sigma] \in A$.

Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili

Spesso è comodo considerare giochi in cui I e II non possano giocare ogni elemento di A, ma debbano seguire delle regole. Quindi, è necessario dare un alberto potato non vuoto $T \subseteq A^{<\omega}$, che determina le posizioni ammissibili.

In questa situazione I e II si alternano giocando $(a_i)_{i\in\omega}$ in maniera tale che, ad ogni passo $n \in \omega$

$$\langle a_0, \ldots, a_n \rangle \in T$$

Si scriverà, in questo caso, $G(T, C)$.

Teorema di Gale-Stewart

Sia A uno spazio topologico discreto e sia A^ω dotato della topologia prodotto.

Teorema di Gale-Stewart 1.7

Sia T un albero potato non vuoto su A. Se $C \subseteq [T]$ è aperto o chiuso in $[T]$, allora il gioco $G(T, C)$ è determinato.

Gioco di Choquet

Definizione 2.1

Sia (X, τ) uno spazio topologico non vuoto. Il gioco di Choquet G_X è un gioco di Gale-Stewart totale codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di X:

I	U_0		U_1		U_2		$\cdots$
II		V_0		V_1		$\cdots$	

tali che $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$
Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset.$$

DATOGLIERE

Teorema 2.2

Uno spazio topologico X è uno spazio topologico di Baire se e solo se il giocatore I non ha una strategia vincente nel gioco di Choquet G_X.

Definizione 2.3

Uno spazio topologico X è detto spazio di Choquet se il giocatore II ha una strategia vincente in G_X.

DATOGLIERE

In particolare, ogni spazio Polacco è uno spazio di Choquet.

Gioco di Banach-Mazur

Sia X uno spazio topologico non vuoto, e sia $A \subseteq X$.

Definizione 2.5

Il gioco di Banach-Mazur (o anche **-gioco) di A, denotato con $G^{**}(A)$ oppure con $G^{**}(A, X)$ è un gioco di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di X

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{I} & U_0 & & U_1 & & U_2 & & \cdots & \\ \text{II} & & V_0 & & V_1 & & \cdots & & \end{array}$$

tali che $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \ldots$
Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq A.$$

DATOGLIERE

Teorema 2.6

Sia X uno spazio topologico non vuoto, e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme qualsiasi. Allora A è comagro se e solo se il giocatore II ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur $G^{**}(A)$.

Teorema 2.7

Se X è uno spazio topologico di Choquet non vuoto ed esiste una distanza d su X le cui palle aperte sono aperti di X, allora:
A è magro in un aperto non vuoto se e solo se il giocatore I ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur $G^{**}(A)$.

Dimostrazione Teorema 2.7 ($\Rightarrow$)

Se A è magro in $Y \subseteq X$, sia per ogni $n \in \omega$: $W_n \subseteq Y$ aperto denso di Y, con

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A.$$

Poiché Y è uno spazio di Choquet, allora nel gioco:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & & B_1 & & B_2 & & \dots & \\ \text{II} & A_0 & & A_1 & & \dots & & \end{array}$$

con gli aperti non vuoti $Y \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$ in cui I vince sse $\bigcap_{n \in \omega} B_n \neq \emptyset$, I ha una strategia vincente. Questo infatti è un gioco di Choquet a giocatori invertiti.

Sia quindi σ la strategia vincente di I in questo gioco di Choquet. *(cont.)*

Dimostrazione Teorema 2.7 ($\Rightarrow$) (cont.)

Nel gioco $G^{**}(A)$, il giocatore I pone $U_0 \coloneqq Y$. Si costruisce per induzione la strategia vincente per I.

Al passo $n+1$-esimo, sia $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ la sequenza di insiemi giocati. Si pone, per ogni $i \leq n$: $V_i' \coloneqq V_i \cap W_i$, e si sceglie U_{n+1} come l'unico sottoinsieme aperto non vuoto di V_n tale che

$$(V_0', U_1, V_1', U_2, \dots, V_n', U_{n+1}) \in \sigma.$$

Allora $\bigcap_{n\in\omega} U_n \neq \emptyset$ e inoltre

$$\bigcap_{n\in\omega} U_n = \bigcap_{n\in\omega} V_n' \subseteq \bigcap_{n\in\omega} W_n \subseteq Y \setminus A$$

e dunque $\bigcap_{n\in\omega} U_n \not\subseteq A$. ■

Dimostrazione Teorema 2.7 ($\Leftarrow$)

Sia σ una strategia vincente per I in $G^{**}(A)$, e sia U_0 l'elemento di partenza per σ.

Esiste allora una strategia σ' per I, vincente, e tale che l'insieme giocato al passo n-esimo U_n abbia diametro (in una metrica fissata):

$$\mathrm{diam}(U_n) < 2^{-n}.$$

Allora $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}$, con $x \in U_0 \setminus A$. *(cont.)*

Dimostrazione Teorema 2.7 ($\Leftarrow$) (cont.)

Sia quindi

$$W := \left\{ x \in U_0 \mid \exists\, (U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma']\ x \in \bigcap_{n \in \omega} U_i \right\}$$

- W è denso in U_0, poiché per ogni $B \subseteq U_0$ esiste $p = (U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma']$ tale che $V_0 = B$, e, siccome $p \in [\sigma']$ allora

  $$\bigcap_{n \in \omega} U_i = \{x\} \subseteq U_1 \subseteq V_0 = B$$

  e dunque $W \cap B \neq \emptyset$.
- Inoltre $W \subseteq U_0 \setminus A$, per costruzione di σ'.

Pertanto A è magro in U_0. $\blacksquare$

DATOGLIERE

Lemma 2.8

Sia X uno spazio topologico di Choquet non vuoto tale che esista una distanza d su X le cui palle aperte sono aperti di X. Sia $A \subseteq X$.
Se per ogni aperto $U \subseteq X$ il gioco $G^{**}\big((X \setminus A) \cup U\big)$ è determinato allora $A \subseteq X$ ha BP.

DATOGLIERE

Definizione 2.9

Una base debole per uno spazio topologico (X, τ) è una collezione di aperti $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq \tau$ tali che, per ogni aperto non vuoto di X, $\emptyset \neq U \subseteq X$ esista $\alpha_0 \in \Omega$ tale che

$$A_{\alpha_0} \subseteq U.$$

Gioco di Banach-Mazur unfolded

Sia X uno spazio polacco non vuoto con una metrica fissata e sia $\mathcal{W}$ una base debole numerabile di X.

Definizione 2.10

Dato $F \subseteq X \times \omega^\omega$, il gioco di Banach-Mazur unfolded $G^{**}_{\mathsf{u}}(F)$ è il gioco di Gale-Stewart codificato come segue:

$$\begin{array}{llllll} \text{I} & U_0 & & U_1 & & \dots \\ \text{II} & & y_0, V_0 & & y_1, V_1 & \dots \end{array}$$

tali che:

- per ogni $i \in \omega$: $U_i, V_i \in \mathcal{W}$, $y_n \in \omega$;
- $\operatorname{diam}(U_n), \operatorname{diam}(V_n) < 2^{-n}$;
- $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$ *(cont.)*

DATOGLIERE

Definizione 2.10 (cont.)

Posto

$$\{x\} \coloneqq \bigcap_{i\in\omega} \mathrm{Cl}_X(U_n) = \bigcap_{i\in\omega} \mathrm{Cl}_X(V_n)$$

e $y \coloneqq (y_i)_{i\in\omega} \in \omega^\omega$, il giocatore II vince sse

$$(x, y) \in F \subseteq X \times \omega^\omega.$$

Lemma 2.11

Se F è aperto o chiuso di $X \times \omega^\omega$, allora $G^{**}_{\mathsf{u}}(F)$ è determinato.

DATOGLIERE

Teorema 2.12

Sia X uno spazio polacco con una metrica fissata e sia $\mathcal{W}$ una base debole di X.
Dato $F \subseteq X \times \omega^\omega$ si consideri il **-gioco: $G^{**}_{\mathsf{u}}(F)$. Indicato con $A \coloneqq \pi_X(F)$:

1. se I ha una strategia vincente in $G^{**}_{\mathsf{u}}(F)$, allora A è magro in un aperto non vuoto di X;
2. se II ha una strategia vincente in $G^{**}_{\mathsf{u}}(F)$ allora A è comagro.

Dimostrazione Teorema 2.12(1)

Sia σ una strategia vincente per I, e sia U_0 la prima mossa. Si mostra che A è magro in U_0.

Per ogni $a \in \omega$ e per ogni $p \in \sigma$ della forma:

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \ldots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

si definisce $F_{p,a} \subseteq U_0$:

$$\begin{aligned} F_{p,a} = \{z \in U_n \mid & \text{ per ogni mossa legale } (a, V_n) \\ & \text{se } U_{n+1} \text{ è l'unico elemento di } \mathcal{W} \text{ tale che} \\ & p^\frown\langle (a, V_n), U_{n+1} \rangle \in \sigma \text{ allora } z \notin U_{n+1}\} \end{aligned}$$

L'insieme $F_{p,a}$ è mai denso, poiché chiuso e con interno vuoto. *(cont.)*

Dimostrazione 2.12(1) (cont.)

Sia ora $x \in A \cap U_0$. Allora esiste $y \in \omega^\omega$, $y = (y_i)_{i \in \omega}$ tale che $(x, y) \in F$.

Una posizione $p \in \sigma$:

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

è <u>buona</u> per (x, y) se $x \in U_n$. Siccome σ è una strategia vincente per il giocatore I, allora esiste una posizione $p_{(x,y)} \in \sigma$ buona per (x, y) e massimale, ovvero ogni estensione di $p_{(x,y)}$ <u>non è buona</u>. Ma allora, se

$$p_{(x,y)} = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_n \rangle$$

si ha che $x \in F_{p_{(x,y)}, y_n}$.

Pertanto $A \cap U_0 \subseteq \bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$ è magro. ■

Teorema di Lusin-Sierpiński

Teorema di Lusin-Sierpiński 2.13

Sia X uno spazio polacco. Allora ogni insieme analitico di X ha la Baire Property.

Dimostrazione.

Siccome $\mathrm{BP}(X)$ è una σ-algebra allora è chiusa per complementi, e pertanto se ogni insieme coanalitico ha BP allora si è dimostrata la tesi.
Sia dunque C un insieme coanalitico e sia $U \subseteq X$ un aperto. Posto $A \coloneqq (X \setminus C) \cup U$, questo è un insieme analitico, e pertanto esiste un chiuso $F \subseteq X \times \omega^\omega$ tale che $A = \pi_X(F)$.
Per il Teorema di Gale-Stewart 1.7 (e per il Lemma 2.11), allora, il **-gioco $G^{**}_{\mathsf{u}}(F)$ è determinato, ed in particolare vale una tra le condizioni 1. e 2. del Teorema 2.12.
Per i Teoremi 2.26 e 2.27, allora, il gioco $G^{**}(A) = G^{**}\left((X \setminus C) \cup U\right)$ è determinato: per il Lemma 2.8, quindi C ha la BP. ∎

Bibliografia minimale