

# Giochi di Banach-Mazur

Davide Peccioli

Università degli Studi di Torino

4 giugno 2025

## Definizione 1.1

Un gioco logico è una quadrupla  $\mathcal{G} := (\Omega, f, W_I, W_{II})$  dove:

- $\Omega$  è un insieme, chiamato il dominio del gioco;
- $f : \Omega^{<\omega} \rightarrow \{I, II\}$  è una funzione, chiamata funzione di turno o funzione del giocatore;
- $W_I, W_{II} \subseteq \Omega^{<\omega} \cup \Omega^\omega$  sono tali che
  - ①  $W_I \cap W_{II} = \emptyset$ ;
  - ② per ogni  $a \in W_\bullet$  e per ogni  $b \in \Omega^{<\omega} \cup \Omega^\omega$ :
$$a \subseteq b \implies b \in W_\bullet.$$

Gli elementi di  $\Omega^{<\omega}$  sono chiamati posizioni del gioco  $\mathcal{G}$ , mentre un elemento di  $\Omega^\omega$  è detto giocata di  $\mathcal{G}$ .

I giocatori I e II giocano scegliendo a turno elementi di  $\Omega$ . La funzione di turno  $f$  associa a ciascuna posizione uno dei due giocatori: se

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = I$$

allora l'elemento  $a_{n+1}$  sarà scelto dal giocatore I.

Si dirà che il giocatore I vince la giocata  $a$  se  $a \in W_I$ ; si dirà che il giocatore II vince la giocata  $b$  se  $b \in W_{II}$ .

## Definizione 1.2

Un gioco è detto totale se  $\Omega^\omega \subseteq W_I \cup W_{II}$ .

# Strategia per un gioco logico

Una strategia per un giocatore è un insieme di regole che descrivono esattamente come un giocatore debba giocare, in base a tutte le mosse precedenti.

Una strategia è detta vincente per un giocatore se questo vince ogni giocata in cui ne fa uso, a prescindere dalle mosse dell'altro giocatore.

## Definizione 1.4

Un gioco si dice determinato se esiste una strategia vincente per I o per II.

# Giochi di Gale-Stewart

## Definizione 1.6

Sia  $A$  un insieme non vuoto, e sia  $C \subseteq A^\omega$ . Si definisce il gioco di Gale-Stewart associato ad  $C$  come il gioco logico seguente:

$$G(A, C) = G(A) := (A, \psi, C, A^\omega \setminus C)$$

dove la funzione  $\psi : A^{<\omega} \rightarrow \{I, II\}$  è così definita

$$\psi(s) := \begin{cases} I & \text{lh}(s) \text{ è pari} \\ II & \text{lh}(s) \text{ è dispari} \end{cases}$$

Pertanto il gioco può essere codificato come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & a_4 & \dots \\ \text{II} & & a_1 & & a_3 & & \dots \end{array}$$

e il giocatore I vince se e solo se  $(a_n)_{n \in \omega} \in C$ .

# Strategia per un gioco di Gale-Stewart

Si specializza la definizione di strategia per un gioco logico al caso particolare di un gioco di Gale-Stewart.

Una strategia per un gioco  $G(A, C)$  è un albero  $\sigma \subseteq A^{<\omega}$  tale che:

- 1  $\sigma$  sia potato e non vuoto;
- 2 se  $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$  allora per ogni  $a_{2j+1} \in A$ :  $\langle a_0, \dots, a_{2j+1} \rangle \in \sigma$ ;
- 3 se  $\langle a_0, \dots, a_{2j-1} \rangle \in \sigma$  allora esiste un unico  $a_{2j} \in A$  tale che  $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$ .

Una strategia è detta vincente se il suo corpo  $[\sigma] \in A$ .

# Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili

Spesso è comodo considerare giochi in cui I e II non possano giocare ogni elemento di  $A$ , ma debbano seguire delle regole. Quindi, è necessario dare un albero potato non vuoto  $T \subseteq A^{<\omega}$ , che determina le posizioni ammissibili.

In questa situazione I e II si alternano giocando  $(a_i)_{i \in \omega}$  in maniera tale che, ad ogni passo  $n \in \omega$

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle \in T$$

Si scriverà, in questo caso,  $G(T, C)$ .



# Teorema di Gale-Stewart

Sia  $A$  uno spazio topologico discreto e sia  $A^\omega$  dotato della topologia prodotto.

## Teorema di Gale-Stewart 1.7

Sia  $T$  un albero potato non vuoto su  $A$ . Se  $C \subseteq [T]$  è aperto o chiuso in  $[T]$ , allora il gioco  $G(T, C)$  è determinato.

# Gioco di Choquet

## Definizione 2.1

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico non vuoto. Il gioco di Choquet  $G_X$  è un gioco di Gale-Stewart totale codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di  $X$ :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & U_0 & & U_1 & & U_2 & \dots \\ & & & & & & \\ \text{II} & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

tali che  $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset.$$

## Teorema 2.2

Uno spazio topologico  $X$  è uno spazio topologico di Baire se e solo se il giocatore I non ha una strategia vincente nel gioco di Choquet  $G_X$ .

## Definizione 2.3

Uno spazio topologico  $X$  è detto spazio di Choquet se il giocatore II ha una strategia vincente in  $G_X$ .

In particolare, ogni spazio Polacco è uno spazio di Choquet.

# Gioco di Banach-Mazur

Sia  $X$  uno spazio topologico non vuoto, e sia  $A \subseteq X$ .

## Definizione 2.5

Il gioco di Banach-Mazur (o anche  $**$ -gioco) di  $A$ , denotato con  $G^{**}(A)$  oppure con  $G^{**}(A, X)$  è un gioco di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di  $X$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & U_0 & & U_1 & & U_2 & \dots \\ & & & & & & \\ \text{II} & & V_0 & & V_1 & & \dots \end{array}$$

tali che  $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq A.$$

## Teorema 2.6

Sia  $X$  uno spazio topologico non vuoto, e sia  $A \subseteq X$  un sottoinsieme qualsiasi. Allora  $A$  è comagro se e solo se il giocatore II ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur  $G^{**}(A)$ .

## Teorema 2.7

Se  $X$  è uno spazio topologico di Choquet non vuoto ed esiste una distanza  $d$  su  $X$  le cui palle aperte sono aperti di  $X$ , allora:  
 $A$  è magro in un aperto non vuoto se e solo se il giocatore I ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur  $G^{**}(A)$ .

## Dimostrazione Teorema 2.7 ( $\Rightarrow$ )

Se  $A$  è magro in  $Y \subseteq X$ , sia per ogni  $n \in \omega$ :  $W_n \subseteq Y$  aperto denso di  $Y$ , con

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A.$$

Poiché  $Y$  è uno spazio di Choquet, allora nel gioco:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & & B_1 & B_2 & \dots \\ \text{II} & A_0 & & A_1 & \dots \end{array}$$

con gli aperti non vuoti  $Y \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$  in cui I vince sse  $\bigcap_{n \in \omega} B_n \neq \emptyset$ , I ha una strategia vincente. Questo infatti è un gioco di Choquet a giocatori invertiti.

Sia quindi  $\sigma$  la strategia vincente di I in questo gioco di Choquet. (*cont.*)

## Dimostrazione Teorema 2.7 ( $\Rightarrow$ ) (cont.)

Nel gioco  $G^{**}(A)$ , il giocatore I pone  $U_0 := Y$ . Si costruisce per induzione la strategia vincente per I.

Al passo  $n + 1$ -esimo, sia  $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$  la sequenza di insiemi giocati. Si pone, per ogni  $i \leq n$ :  $V'_i := V_i \cap W_i$ , e si sceglie  $U_{n+1}$  come l'unico sottoinsieme aperto non vuoto di  $V_n$  tale che

$$(V'_0, U_1, V'_1, U_2, \dots, V'_n, U_{n+1}) \in \sigma.$$

Allora  $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$  e inoltre

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V'_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A$$

e dunque  $\bigcap_{n \in \omega} U_n \not\subseteq A$ . ■

## Dimostrazione Teorema 2.7 ( $\Leftarrow$ )

Sia  $\sigma$  una strategia vincente per I in  $G^{**}(A)$ , e sia  $U_0$  l'elemento di partenza per  $\sigma$ .

Esiste allora una strategia  $\sigma'$  per I, vincente, e tale che l'insieme giocato al passo  $n$ -esimo  $U_n$  abbia diametro (in una metrica fissata):

$$\text{diam}(U_n) < 2^{-n}.$$

Allora  $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}$ , con  $x \in U_0 \setminus A$ . (cont.)



## Dimostrazione Teorema 2.7 ( $\Leftarrow$ ) (cont.)

Sia quindi

$$W := \left\{ x \in U_0 \mid \exists (U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma'] \ x \in \bigcap_{n \in \omega} U_i \right\}$$

- $W$  è denso in  $U_0$ , poiché per ogni  $B \subseteq U_0$  esiste  $p = (U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma']$  tale che  $V_0 = B$ , e, siccome  $p \in [\sigma']$  allora

$$\bigcap_{n \in \omega} U_i = \{x\} \subseteq U_1 \subseteq V_0 = B$$

e dunque  $W \cap B \neq \emptyset$ .

- Inoltre  $W \subseteq U_0 \setminus A$ , per costruzione di  $\sigma'$ .

Pertanto  $A$  è magro in  $U_0$ .



### Lemma 2.8

Sia  $X$  uno spazio topologico di Choquet non vuoto tale che esista una distanza  $d$  su  $X$  le cui palle aperte sono aperti di  $X$ . Sia  $A \subseteq X$ . Se per ogni aperto  $U \subseteq X$  il gioco  $G^{**}((X \setminus A) \cup U)$  è determinato allora  $A \subseteq X$  ha BP.

## Definizione 2.9

Una base debole per uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è una collezione di aperti  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq \tau$  tali che, per ogni aperto non vuoto di  $X$ ,  $\emptyset \neq U \subseteq X$  esista  $\alpha_0 \in \Omega$  tale che

$$A_{\alpha_0} \subseteq U.$$

# Gioco di Banach-Mazur unfolded

Sia  $X$  uno spazio polacco non vuoto con una metrica fissata e sia  $\mathcal{W}$  una base debole numerabile di  $X$ .

## Definizione 2.10

Dato  $F \subseteq X \times \omega^\omega$ , il gioco di Banach-Mazur unfolded  $G_u^{**}(F)$  è il gioco di Gale-Stewart codificato come segue:

$$\begin{array}{llll} \text{I} & U_0 & U_1 & \dots \\ \text{II} & y_0, V_0 & y_1, V_1 & \dots \end{array}$$

tali che:

- per ogni  $i \in \omega$ :  $U_i, V_i \in \mathcal{W}$ ,  $y_n \in \omega$ ;
- $\text{diam}(U_n), \text{diam}(V_n) < 2^{-n}$ ;
- $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

(cont.)

## Definizione 2.10 (cont.)

Posto

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} \text{Cl}_X(U_n) = \bigcap_{i \in \omega} \text{Cl}_X(V_n)$$

e  $y := (y_i)_{i \in \omega} \in \omega^\omega$ , il giocatore II vince sse

$$(x, y) \in F \subseteq X \times \omega^\omega.$$

## Lemma 2.11

Se  $F$  è aperto o chiuso di  $X \times \omega^\omega$ , allora  $G_u^{**}(F)$  è determinato.

## Teorema 2.12

Sia  $X$  uno spazio polacco con una metrica fissata e sia  $\mathcal{W}$  una base debole di  $X$ .

Dato  $F \subseteq X \times \omega^\omega$  si consideri il  $**$ -gioco:  $G_u^{**}(F)$ . Indicato con  $A := \pi_X(F)$ :

- ① se I ha una strategia vincente in  $G_u^{**}(F)$ , allora  $A$  è magro in un aperto non vuoto di  $X$ ;
- ② se II ha una strategia vincente in  $G_u^{**}(F)$  allora  $A$  è comagro.

## Dimostrazione Teorema 2.12(1)

Sia  $\sigma$  una strategia vincente per I, e sia  $U_0$  la prima mossa. Si mostra che  $A$  è magro in  $U_0$ .

Per ogni  $a \in \omega$  e per ogni  $p \in \sigma$  della forma:

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

si definisce  $F_{p,a} \subseteq U_0$ :

$$F_{p,a} = \{z \in U_n \mid \text{per ogni mossa legale } (a, V_n) \\ \text{se } U_{n+1} \text{ è l'unico elemento di } \mathcal{W} \text{ tale che} \\ p \frown \langle (a, V_n), U_{n+1} \rangle \in \sigma \text{ allora } z \notin U_{n+1}\}$$

L'insieme  $F_{p,a}$  è mai denso, poiché chiuso e con interno vuoto. (cont.)

## Dimostrazione 2.12(1) (cont.)

Sia ora  $x \in A \cap U_0$ . Allora esiste  $y \in \omega^\omega$ ,  $y = (y_i)_{i \in \omega}$  tale che  $(x, y) \in F$ .

Una posizione  $p \in \sigma$ :

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

è buona per  $(x, y)$  se  $x \in U_n$ . Siccome  $\sigma$  è una strategia vincente per il giocatore I, allora esiste una posizione  $p_{(x,y)} \in \sigma$  buona per  $(x, y)$  e massimale, ovvero ogni estensione di  $p_{(x,y)}$  non è buona. Ma allora, se

$$p_{(x,y)} = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_n \rangle$$

si ha che  $x \in F_{p_{(x,y)}, y_n}$ .

Pertanto  $A \cap U_0 \subseteq \bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$  è magro. ■



# Teorema di Lusin-Sierpiński

## Teorema di Lusin-Sierpiński 2.13

Sia  $X$  uno spazio polacco. Allora ogni insieme analitico di  $X$  ha la Baire Property.

### Dimostrazione.

Siccome  $BP(X)$  è una  $\sigma$ -algebra allora è chiusa per complementi, e pertanto se ogni insieme coanalitico ha BP allora si è dimostrata la tesi. Sia dunque  $C$  un insieme coanalitico e sia  $U \subseteq X$  un aperto. Posto  $A := (X \setminus C) \cup U$ , questo è un insieme analitico, e pertanto esiste un chiuso  $F \subseteq X \times \omega^\omega$  tale che  $A = \pi_X(F)$ .

Per il Teorema di Gale-Stewart 1.7 (e per il Lemma 2.11), allora, il  $**$ -gioco  $G_u^{**}(F)$  è determinato, ed in particolare vale una tra le condizioni 1. e 2. del Teorema 2.12.

Per i Teoremi 2.26 e 2.27, allora, il gioco  $G^{**}(A) = G^{**}((X \setminus C) \cup U)$  è determinato: per il Lemma 2.8, quindi  $C$  ha la BP. ■

# Bibliografia minimale



Alexander S. Kechris. *Classical Descriptive Set Theory*. Graduate Texts in Mathematics 156. New York, NY: Springer New York, 1995.



«Logic and Games». In: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Winter 2024. URL: <https://plato.stanford.edu/archives/win2024/entries/logic-games/>.



Luca Motto Ros. *Notes on Descriptive Set Theory*. Apr. 2024.



Pedro Sánchez Terraf. *Banach-Mazur game and the Baire property*. Mathematics Stack Exchange. URL: <https://math.stackexchange.com/q/3681151>.