Esercizi TDI - Foglio 4

Davide Peccioli

10 maggio 2025

1 Esercizio 1

Prove that for any Polish space X and $x \in X$, the singleton $\{x\}$ is $\mathbf{\Pi}^0_1$-complete if and only if x is not isolated in X. Conclude that the set

$$C_1 = \{x \in 2^\omega \mid \exists n \; (x(n) = 0)\}$$

from Proposition 2.1.31 of the notes is $\mathbf{\Sigma}^0_1$-complete.

1.1 Soluzione

Siccome X è uno spazio metrizzabile, allora $\{x\} \subseteq X$ è chiuso, e pertanto $\{x\} \in \mathbf{\Pi}^0_1(X)$. Bisogna quindi dimostrare che $\{x\}$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard sse x è **non isolato** in X.

1.1.1 Implicazione " $\implies$ "

Sia $C \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$, e sia $f : \omega^\omega \to X$ continua tale che

$$f^{-1}(x) = C.$$

Si supponga per assurdo che x sia isolato. Allora $\{x\} \subseteq X$ è aperto, e quindi $C \subseteq \omega^\omega$ è aperto (retroimmagine continua di un aperto).

Per l'arbitrarietà di C, questo implica che ogni chiuso di ω^ω è un clopen. Inoltre, se $A \subseteq \omega^\omega$ è aperto, allora $\omega^\omega \setminus A$ è chiuso e quindi clopen, e pertanto A è un chiuso:

$$\mathbf{\Sigma}^0_1(\omega^\omega) = \mathbf{\Delta}^0_1(\omega^\omega) = \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega).$$

Questo contraddice il Theorem 2.1.17 delle note.

1.1.2 Implicazione " $\impliedby$ "

Sia $x \in X$ un punto non isolato, ovvero x un punto di accumulazione di X, e sia $B \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$.

Si fissi $d' : X \to \mathbb{R}$ una metrica completa su X. Sia ora $y \in X \setminus \{x\}$, e sia d la metrica normalizzata:

$$d(i,j) \coloneqq \frac{d'(i,j)}{d'(x,y)}$$

Dunque esiste un punto $y \in X$ tale che $d(x,y) = 1$.

- Sia $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una famiglia di aperti di X tali che
  - per ogni $n \in \omega$: $U_n \setminus \{x\} \neq \emptyset$;
  - l'intersezione $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}$;
  - $\operatorname{diam}(U_n) \to 0$;
  - per ogni $n \in \omega$: $\mathrm{Cl}(U_{n+1}) \subsetneq U_n$.

  Tale famiglia esiste in virtù del fatto che x sia un punto di accumulazione. Infatti, poiché X è T1, allora ogni intorno di x ha una quantità infinita di punti, ed è sufficiente costruire gli intorni per induzione.

  Sia $U_0 = B_d(x, 2^{-1})$. Si supponga di aver costruito U_n, e sia $\alpha \in U_n \setminus \{x\}$.

  Detto $r \coloneqq \min\left\{2^{-n-1}, d(x,\alpha)/2\right\} > 0$, sia $U'_n \coloneqq B_d(x,r)$. Necessariamente $\alpha \notin U'_n$ e $U'_n \subsetneq U_n$.

  È quindi possibile porre $U_{n+1} \coloneqq B_d(x, r/2)$:

$$\mathrm{Cl}(U_{n+1}) = \mathrm{Cl}\left(B_d(x,r/2)\right) \subseteq B_d^{\mathrm{cl}}(x,r/2) \subseteq B_d(x,r) = U'_n \subsetneq U_n.$$

- Sia ora $\{V_n\}_{n\in\omega}$ una famiglia di aperti non vuoti di X tali che, per ogni $n \in \omega$

$$\mathrm{Cl}(V_0) \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}(U_0), \qquad \mathrm{Cl}(V_{n+1}) \subseteq U_n \setminus \mathrm{Cl}(U_{n+1}).$$

  Tali V_n esistono. Infatti, entrambi i seguenti insiemi sono aperti non vuoti

$$X \setminus \mathrm{Cl}(U_0), \qquad U_n \setminus \mathrm{Cl}(U_{n+1}) = U_n \cap \left(X \setminus \mathrm{Cl}(U_{n+1})\right)$$

  e pertanto contengono una palla aperta $B_d(\alpha, \delta)$. È sufficiente considerare, quindi, l'insieme $B_d(\alpha, \delta/2) \ni \alpha$ poiché, come sopra:

$$\mathrm{Cl}\left(B_d(\alpha, \delta/2)\right) \subseteq B_d(\alpha, \delta)$$

- Per ogni $n \in \omega$, sia $\left\{W_j^n\right\}_{j\in\omega}$ una famiglia di aperti non vuoti tale che, per ogni $j \in \omega$

$$\mathrm{Cl}(W_j^n) \subseteq V_n, \qquad \mathrm{Cl}(W_{j+1}^n) \subseteq W_j^n.$$

  Tali W_j^n esistono. Infatti, siccome V_n è aperto non vuoto, allora esiste $\alpha \in V_n$ ed esiste $\delta \in (0,1)$ tale che

$$B_d(\alpha, \delta) \subseteq V_n$$

  Come sopra, ponendo $W_j^n \coloneqq B_d(\alpha, \delta \cdot 2^{-n-2})$ si ottengono gli aperti cercati. Ciascun $W_j^n \ni \alpha$.
- Siccome B è un chiuso di ω^ω, allora esiste un albero potato $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $B = [T]$, i.e.

$$B = \left\{\alpha \in \omega^\omega \mid \forall\, n \in \omega\ (\alpha \restriction n \in T)\right\}$$

- Si costruisce un ω-schema $\left\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\right\}$ su X:

- sia $B_\emptyset \coloneqq X$;
- se $s \in T$, allora $B_s \coloneqq U_{\mathrm{lh}(s)}$;
- se $s \notin T$, sia j_s il più grande indice tale che $s \restriction j_s \in T$; si pone $B_s \coloneqq W^{j_s}_{\mathrm{lh}(s)}$.

- Questo definisce effettivamente uno schema tale che $\mathrm{Cl}(B_{s^\frown a}) \subseteq B_s$ e ciascun $B_s \neq \emptyset$: pertanto è indotta una funzione continua totale (per il Lemma 1.3.6)

$$F : \omega^\omega \to X$$

- Resta da mostrare che $F^{-1}(x) = B$. Questo per definizione garantisce che $\{x\}$ sia un $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard.

  Per ogni $\beta \in B$,
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\restriction n}$$
  dove $\beta \restriction n \in T$. Quindi $B_{\beta\restriction n} = U_n$. Quindi
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{x\}\,.$$

  Viceversa, se $\beta \notin B$, allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta \restriction n_0 \notin T$ e pertanto
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\restriction n} \subseteq B_{\beta\restriction n_0}$$
  e per costruzione $x \notin B_{\beta\restriction n_0}$.

1.1.3 Insieme C_1

Dal momento che $\mathbf{\Sigma}^0_1 = \check{\mathbf{\Pi}}^0_1$ segue che C_1 è $\mathbf{\Sigma}^0_1$-completo se e solo se $2^\omega \setminus C_1$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo.

Si ha che $x \in 2^\omega \setminus C_1$ se e solo se per ogni $n \in \omega$, $x(n) \neq 0$, ovvero $x(n) = 1$.

Pertanto $2^\omega \setminus C_1 = \{u\}$, dove

$$\begin{aligned} u : \omega &\longrightarrow 2 \\ n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Per la caratterizzazione di cui sopra, C_1 è $\mathbf{\Sigma}^0_1$-completo se e solo se u non è un punto isolato di 2^ω.

Si consideri ora la successione $(x_n)_{n\in\omega} \subseteq 2^\omega$:

$$x_n(j) = \begin{cases} 1 & j < n \\ 0 & j \geq n \end{cases}$$

Si ha che $x_n \to u$, e pertanto u non è un punto isolato di 2^ω (per ogni intorno I di u esiste $N \in \omega$ tale che $x_N \in I \setminus \{u\}$). ■

2 Esercizio 2

Prove that for any Polish space and $A \subseteq X$, if A is not open then it is $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard. Conclude that a set A is truly closed (i.e. closed but not open) if and only if it is $\mathbf{\Pi}^0_1$-complete, and similarly for $\mathbf{\Sigma}^0_1$.

2.1 Soluzione

2.1.1 Non aperti sono $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard

Sia A un insieme non aperto, e sia $C \subseteq \omega^\omega$ un chiuso fissato.

Sia dunque $a_0 \in A \setminus \mathrm{Int}(A)$. In particolare, quindi $a_0 \in \mathrm{Cl}(X \setminus A) = A \setminus \mathrm{Int}(A)$.

Sia $x \in X$ un punto non isolato, ovvero x un punto di accumulazione di X, e sia $B \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$.

Si fissi $d' : X \to \mathbb{R}$ una metrica completa su X. Sia ora $y \in X \setminus A$, e sia d la metrica normalizzata:

$$d(i,j) \coloneqq \frac{d'(i,j)}{d'(a_0,y)}$$

Dunque esiste un punto $y \in X$ tale che $d(a_0, y) = 1$.

- Sia $\{U_n\}_{n\in\omega}$ una famiglia di aperti di X tali che
  - per ogni $n \in \omega$: $U_n \setminus \{x\} \neq \emptyset$;
  - l'intersezione $\bigcap_{n\in\omega} U_n = \{a_0\}$;
  - $\mathrm{diam}(U_n) \to 0$;
  - per ogni $n \in \omega$: $\mathrm{Cl}(U_{n+1}) \subsetneq U_n$.

  Tale famiglia esiste, come dimostrato nel punto precedente. In particolare, si prenda $U_0 = B_d(a_0, 1/2)$.
- Sia ora $\{V_n\}_{n\in\omega}$ una famiglia di chiusi non vuoti, con *vanishing diameter*, di X tali che, per ogni $n \in \omega$
  $$\mathrm{Cl}(V_0) \subseteq X \setminus \mathrm{Cl}(U_0), \qquad \mathrm{Cl}(V_{n+1}) \subseteq U_n \setminus \mathrm{Cl}(U_{n+1}).$$
  e tali che $V_n \cap A = \emptyset$. È sufficiente considerare V_n come un singoletto.
- Siccome C è un chiuso di ω^ω, allora esiste un albero potato $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $C = [T]$, i.e.
  $$C = \left\{\alpha \in \omega^\omega \mid \forall n \in \omega\ (\alpha \restriction n \in T)\right\}$$
- Si costruisce un ω-schema $\left\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\right\}$ su X:
  - sia $B_\emptyset \coloneqq X$;
  - se $s \in T$, allora $B_s \coloneqq U_{\mathrm{lh}(s)}$;
  - se $s \notin T$, sia j_s il più grande indice tale che $s \restriction j_s \in T$; si pone $B_s \coloneqq V_{j_s}$.
- Questo definisce effettivamente uno schema tale che $\mathrm{Cl}(B_{s^\frown a}) \subseteq B_s$ e ciascun $B_s \neq \emptyset$: pertanto è indotta una funzione continua totale (per il Lemma 1.3.6)
  $$F : \omega^\omega \to X$$

- Resta da mostrare che $F^{-1}(A) = C$. Questo per definizione garantisce che A sia un $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard.

  Per ogni $\beta \in C$,
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\restriction n}$$
  dove $\beta \restriction n \in T$. Quindi $B_{\beta\restriction n} = U_n$. Quindi
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} U_n = \{a_0\} \subseteq A.$$

  Viceversa, se $\beta \notin C$, allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta \restriction n_0 \notin T$ e pertanto
$$F(\beta) \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\beta\restriction n} \subseteq B_{\beta\restriction n_0}$$
  e per costruzione, siccome $B_{\beta\restriction n_0}$ è contenuto in qualche V_m, $A \cap B_{\beta\restriction n_0} = \emptyset$, e pertanto $F(\beta) \notin A$

2.1.2 Caratterizzazione dei chiusi ma non aperti

- Se A è chiuso ma non aperto, allora A è $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard e inoltre $A \in \mathbf{\Pi}^0_1$. Per definizione, quindi A è un $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo.

  Viceversa, se A è un chiuso $\mathbf{\Pi}^0_1$-hard, si supponga per assurdo che sia aperto. Allora, per ogni $B \in \mathbf{\Pi}^0_1(\omega^\omega)$ esiste una funzione continua $F : \omega^\omega \to X$ tale che $F^{-1}(A) = B$, ovvero $B \in \mathbf{\Sigma}^0_1$. Si avrebbe quindi che ogni chiuso di ω^ω sia un clopen. Come argomentato nell'esercizio precedente, questo genera un assurdo.

- L'insieme A è aperto ma non chiuso se e solo se $X \setminus A$ è chiuso ma non aperto, se e solo se $X \setminus A$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo per il punto precedente.

  Per il Lemma 2.1.23, $X \setminus A$ è $\mathbf{\Pi}^0_1$-completo se e solo se A è $\check{\mathbf{\Pi}}^0_1$-completo, ma (per l'Example 2.1.10)
$$\check{\mathbf{\Pi}}^0_1 = \mathbf{\Sigma}^0_1$$
  e pertanto A è aperto ma non chiuso se e solo se A è $\mathbf{\Sigma}^0_1$-completo. ■

3 Esercizio 3

Prove that the sets

$$C_0 = c_0 \cap [0,1]^\omega = \left\{(x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega \;\middle|\; x_n \to 0\right\}$$
$$C = \left\{(x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega \;\middle|\; (x_n)_{n\in\omega} \text{ converges}\right\}$$

are both $\mathbf{\Pi}^0_3$-complete.

Hint. For the hardness part, compare these sets with the $\mathbf{\Pi}^0_3$-complete set C_3 from Exercise 2.1.27 in the notes.

3.1 Soluzione

3.1.1 C_0 e C sono degli insiemi $\mathbf{\Pi}_0^3$.

a. Insieme C_0.

Si ha che $(x_j)_{j\in\omega} \in C_0$ se e solo se $(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$ e:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n > N \;\; \big(|x_n| \leq \varepsilon\big)$$

ovvero, se $U_{n,\varepsilon} \coloneqq \big\{(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega : |x_n| \leq \varepsilon\big\}$, allora

$$C_0 = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon}.$$

Quindi, dette $\pi_m : [0,1]^\omega \to [0,1]$ le m-esime proiezioni (continue per definizione di topologia prodotto):

$$U_{n,\varepsilon} = \pi_n^{-1}\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big)$$

e pertanto $U_{n,\varepsilon}$ è chiuso. Per il Lemma 2.1.5:

$$\bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} \in \mathbf{\Pi}_1^0$$

$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} \in \mathbf{\Sigma}_2^0$$

$$C_0 = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} \in \mathbf{\Pi}_3^0.$$

e si ottiene che $C_0 \in \mathbf{\Pi}_3^0\big([0,1]^\omega\big)$.

b. Insieme C.

Si ha che $(x_j)_{j\in\omega} \in C$ se e solo se $(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$ e

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \;\exists\, N \in \mathbb{N} \;\forall\, n,m > N \;(|x_n - x_m| \leq \varepsilon)$$

ovvero, se $V^\varepsilon_{m,n} \coloneqq \big\{(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega : |x_n - x_m| \leq \varepsilon\big\}$, allora

$$C = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m}.$$

Poiché la funzione $(\pi_n - \pi_m) : [0,1]^\omega \to \mathbb{R}$ è continua, allora

$$V^\varepsilon_{n,m} \coloneqq (\pi_n - \pi_m)^{-1}\big([-\varepsilon,\varepsilon]\big)$$

e quindi $V^\varepsilon_{n,m}$ è chiuso. Per il Lemma 2.1.5:

$$\bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m} \in \mathbf{\Pi}_1^0$$

$$\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m} \in \mathbf{\Sigma}_2^0$$

$$C = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n,m>N} V^\varepsilon_{n,m} \in \mathbf{\Pi}_3^0$$

e si ottiene che $C \in \mathbf{\Pi}^0_3\left([0,1]^\omega\right)$.

3.1.2 Hardness

È noto (Esercizio 2.1.27) che l'insieme $C_3 := \left\{x \in \omega^\omega \mid \lim_{n\to\infty} x(n) = \infty\right\}$ sia $\mathbf{\Pi}^0_3$-hard. Pertanto si cercano delle funzioni continue

$$\omega^\omega \xrightarrow{F} [0,1]^\omega \xrightarrow{G} [0,1]^\omega$$

tali che

$$F^{-1}(C_0) = C_3, \qquad G^{-1}(C) = C_0.$$

Questo, per mezzo del Lemma 2.1.23, garantisce che C_0, C siano insiemi $\mathbf{\Pi}^0_3$-hard (e quindi, per il punto precedente, completi).

Le due funzioni si definiscono come segue:

$$\begin{aligned} F : \omega^\omega &\longrightarrow [0,1]^\omega \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto \left(\phi(x_j)\right)_{j\in\omega} \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad \begin{aligned} \phi : \mathbb{N} &\longrightarrow [0,1] \\ m &\longmapsto \begin{cases} 1/m & m \neq 0 \\ 1 & m = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G : [0,1]^\omega &\longrightarrow [0,1]^\omega \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto (y_j)_{j\in\omega} \end{aligned} \qquad \text{dove} \qquad y_j := \begin{cases} 0 & j \text{ dispari} \\ x_{j/2} & j \text{ pari.} \end{cases}$$

a. <u>F è continua.</u>

   La funzione F è continua poiché lo è su ciascuna componente (in quanto $\mathbb{N}$ ha la topologia discreta).

b. <u>G è continua.</u>

   La funzione F è continua poiché lo è su ciascuna componente:

   - la componente j-esima di G, con j dispari, è data dalla funzione costante nulla, continua;
   - la componente j-esima di G, con j pari, è data dalla funzione proiezione $\pi_{j/2} : [0,1]^\omega \to [0,1]$, continua per definizione di topologia prodotto.

c. <u>$F^{-1}(C_0) = C_3$.</u>

   Si dimostra che $\alpha \in C_3$ sse $F(\alpha) \in C_0$.

   - Se $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \in C_3$ allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j > N$ si ha$x_j \neq 1$.

     Pertanto, per ogni $j > N$, $\phi(x_j) = 1/x_j$ e, siccome $x_j \to \infty$, $\phi(x_j) \to 0$. Quindi $F(\alpha) \in C_0$.

   - Viceversa, sia $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \notin C_3$. Si supponga per assurdo che $(y_j)_{j\in\omega} = F(\alpha) \in C_0$.

     Allora, definitivamente, $y_j = 1/x_j$ (e in particolare $x_j \neq 0 \neq y_j$), poiché altrimenti non si avrebbe convergenza a 0. In particolare, $x_j = 1/y_j$, definitivamente:

     $$\lim_{j\to\infty} x_j = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{y_j} = \infty$$

poiché $y_j \to 0$. Quindi $(x_j)_{j\in\omega} \in C_3$. Assurdo.

Si ottiene perciò che $F(\alpha) \notin C_0$.

d. $\underline{G^{-1}(C) = C_0.}$

Si dimostra che $\alpha \in C_0$ sse $G(\alpha) \in C$.

- Se $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \in C_0$ allora la successione $\beta = (y_j)_{j\in\omega} := G(\alpha)$ converge a 0, e pertanto converge: $G(\alpha) \in C$.
- Viceversa, se $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \notin C_0$, allora la successione $\beta = (y_j)_{j\in\omega} := G(\alpha)$ non converge, in quanto presenta due sottosuccessioni $((y_{2j+1})_{j\in\omega}$ e $(y_{2j})_{j\in\omega})$ con caratteri diversi: $G(\alpha) \notin C$. ■

4 Esercizio 4

Prove that for any $0 < p < \infty$ the set

$$\ell^p \cap [0,1]^\omega = \left\{ (x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega \mid \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

is $\mathbf{\Sigma}^0_2$-complete.

Hint. Recall that a series of positive terms converges if and only if the sequence of partial sums is bounded from above. For the hardness part, compare this set with the $\mathbf{\Sigma}^0_2$-complete set Q_2 from the notes.

4.1 Soluzione

4.1.1 Insieme $\mathbf{\Sigma}^0_2$

Sia $x = (x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$.

Si ha che $(x_j)_{j\in\omega} \in \ell^p \cap [0,1]^\omega$ se e solo se

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty$$

se e solo se

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

se e solo se, sfruttando l'hint,

$$\exists\, L \in \mathbb{Q}^+ \ \forall\, N \in \mathbb{N} \ \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \right) \leq L$$

Sia dunque

$$\begin{aligned} G_N^p : [0,1]^\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto \sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \end{aligned}$$

Questa è una mappa continua, poiché composizione di mappe continue (proiezioni, continue per la definizione di topologia prodotto, e somma finita ed elevamento a potenza) e pertanto il seguente è un insieme chiuso:

$$V_L^N \coloneqq \left\{ (x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega \mid \left(\sum_{n=0}^{N} |x_n|^p \right) \leq L \right\} = (G_N^p)^{-1} \big([0,L]\big).$$

In definitiva

$$\begin{aligned} V_L^N &\in \mathbf{\Pi}_1^0 \\ \bigcap_{N\in\mathbb{N}} V_L^N &\in \mathbf{\Pi}_1^0 \\ \ell^p \cap [0,1]^\omega = \bigcup_{L\in\mathbb{Q}} \bigcap_{N\in\mathbb{N}} V_L^N &\in \mathbf{\Sigma}_2^0. \end{aligned}$$

4.1.2 Insieme $\mathbf{\Sigma}_2^0$-hard

È noto che l'insieme

$$Q_2 \coloneqq \Big\{ x \in 2^\omega \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, k \geq n\ \ \big(x(k) = 0\big) \Big\}$$

sia $\mathbf{\Sigma}_2^0$-hard.

Si vuole quindi trovare una funzione continua

$$F : 2^\omega \longrightarrow [0,1]^\omega$$

tale che $F^{-1}\left(\ell^p \cap [0,1]^\omega\right) = Q_2$. Questo, per il Lemma 2.1.23, garantisce che $\ell^p \cap [0,1]^\omega$ sia $\mathbf{\Sigma}_2^0$-hard, e quindi $\mathbf{\Sigma}_2^0$-completo.

- Considerando che $2 = \{0,1\} \subseteq [0,1]$, si può definire F come l'inclusione, ovvero

$$\begin{aligned} F : 2^\omega &\longrightarrow [0,1]^\omega \\ (x_j)_{j\in\omega} &\longmapsto (x_j)_{j\in\omega} \end{aligned}$$

- Questa è una funzione continua, poiché è continua su ciascuna componente (infatti $\{0,1\}$ ha la topologia di sottospazio rispetto a $[0,1]$, e per definizione quindi l'inclusione è continua).
- Inoltre, $F^{-1}\left(\ell^p \cap [0,1]^\omega\right) = Q_2$. In particolare, si dimostra che $\alpha \in Q_2$ sse $F(\alpha) \in \ell^p \cap [0,1]^\omega$

– Sia $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \in Q_2$. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_j = 0$ per ogni $j > N$, e pertanto

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{j=0}^{N} |x_j|^p\right)^{1/p} < \infty$$

Pertanto $F(\alpha) \in \ell^p \cap [0,1]^\omega$.

– Sia $\alpha = (x_j)_{j\in\omega} \notin Q_2$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \geq n$ tale che $x_{k_n} = 1$. Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un numero infinito di indici j tali che $x_j = 1$, e dunque $\lim_{j\to\infty} x_j \neq 0$ e dunque la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p$$

diverge. Pertanto $F(\alpha) \notin \ell^p \cap [0,1]^\omega$. ■

5 Esercizio 5

Show that the collection of all sequences $(x_n)_{n\in\omega} \in [0,1]^\omega$ having an irrational accumulation point is analytic.

5.1 Soluzione

Sia $A_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ l'insieme di tutti gli $(x_j)_{j\in\omega} \in [0,1]^\omega$ con un punto di accumulazione irrazionale.

Si ricorda che $p \in [0,1]$ è un punto di accumulazione per $(x_j)_{j\in\omega}$, per definizione, se:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ \big(x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\big)\,.$$

In particolare, $p \in [0,1]$ è un punto di accumulazione per $(x_j)_{j\in\omega}$ se e solo se:

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ \big(x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\big)\,.$$

Per il Remark 3.1.10, quindi, siccome $[0,1]\setminus\mathbb{Q}$ è uno spazio polacco, $A_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}}$ è un insieme analitico, in quanto definito dalla seguente formula:

$$\exists\, p \in [0,1]\setminus\mathbb{Q}\ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{Q}^+\ \forall\, N \in \mathbb{N}\ \exists\, n > N\ \big(x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\big)$$

composta unicamente (tranne che per il primo esistenziale), da quantificazioni numerabili, e da una formula atomica: $x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)$, che definisce un boreliano di $([0,1]\setminus\mathbb{Q}) \times [0,1]^\omega$, in quanto, data la funzione continua

$$\begin{aligned} F_n : ([0,1]\setminus\mathbb{Q}) \times [0,1]^\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \big(p, (x_j)_{j\in\omega}\big) &\longmapsto x_n - p \end{aligned}$$

si ha che

$$\Big\{\big(p, (x_j)_{j\in\omega}\big) \in ([0,1]\setminus\mathbb{Q}) \times [0,1]^\omega \mid x_n \in (p-\varepsilon, p+\varepsilon)\Big\} = F_n^{-1}\left[(-\varepsilon, \varepsilon)\right]$$

è un aperto. ■