Teoria dei modelli

Silvia Barbina

Scuola Estiva di Logica 2025

Indice

1 Preliminari

Si lavora con un linguaggio
$$\mathcal{L} = \left\{ \{R_i\}_{i\in I}, \{f_j\}_{j\in J}, \{c_k\}_{k\in K} \right\}$$

Definizioni di base:

1. Una <u>teoria</u> è un insieme di $\mathcal{L}$-enunciati:
2. Una $\mathcal{L}$-struttura M è un modello della teoria T se per ogni $\sigma \in T$, $M \vDash \sigma$. Si scrive $M \vDash T$.

   T è <u>coerente</u>, o <u>consistente</u>, se ammette un modello.
3. Con $\mathrm{Mod}(T)$ si indica la classe di tutti i modelli tella teoria T.
4. Con $\mathrm{Th}(M)$ si indica la teoria della struttura M, ossia
$$\mathrm{Th}(M) := \{\sigma : M \vDash \sigma, \sigma \text{ enunciato}\}.$$
5. Se T è una teoria e σ è un enunciato,
$$T \vDash \sigma \text{ per ogni } M \vDash T$$
6. T è una teoria <u>completa</u> se per ogni enunciato σ si ha
$$T \vDash \sigma \quad \text{o} \vDash \neg\sigma.$$
7. Scriviamo $M \equiv N$, e diremo che M, N sono <u>elementarmente equivalenti</u> se
$$\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$$

Alcune domande naturali:

1. Data T, possiamo descrivere $\mathrm{Mod}(T)$? In generale, la domanda ha senso quando T è completa
2. Data M (struttura), $\mathrm{Th}(M)$ è sempre completa. Come sono fatti i modelli di $\mathrm{Th}(M)$?
3. Come stabilire se una data teoria T è completa?
4. Data una struttura M, è possibile descrivere $\mathrm{Th}(M)$ in modo efficace? (per esempio mediante degli assiomi)

Esempio 1.1. Sia T una teoria ω-categorica, ossia avente un unico modello infinito numerabile a meno di isomorfismo. Allora

- T è completa;
- i modelli infinito numerabili di T sono tutti isomorfi;
- una classificazione di $\mathrm{Mod}(T)$ si ha banalmente per T totalmente categorica.

<u>Abusi di notazioni</u>.

- Una struttura verrà denotata dal suo dominio M; non distinguiamo tra simboli nel linguaggio e le loro interpretazioni in M.
- Se $A \subseteq M$, definiamo un'espansione di $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(A) = L \cup \big\{ a \mid a \in A \big\}\,.$$

  Una $\mathcal{L}(A)$-formula ha parametri in A.
- Scriviamo "$\varphi \in \mathcal{L}$" per "φ è una $\mathcal{L}$-formula".
- Tuple di variabili/costanti si denotano con x/a, e, occasionalmente $\bar{x}/\bar{a}$. $|x|$ denota la lunghezza della tupla x (ex: $a \in M^{|a|}$)
- M, N, U, V denotano struttura e A, B, C sono sottoinsiemi del dominio di una struttura.

1.1 Immersioni e immersioni elementari

Se M, N sono due $\mathcal{L}$-struttura, allora

1. $f : M \to N$ è una <u>immersione</u> se e solo se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ <u>atomica</u> (oppure senza quantificatori) e $\forall a \in M^{|x|}$

$$M \vDash \varphi(a) \quad \iff \quad N \vDash \varphi\Big(f(a)\Big)$$

   Troviamo una copia isomorfa di M dentro N.
2. $f : M \to N$ è una <u>immersione elementare</u> se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ e $\forall a \in M^{|x|}$

$$M \vDash \varphi(a) \quad \iff \quad N \vDash \varphi\Big(f(a)\Big)$$

Inoltre

1. M è <u>sottostruttura</u> di N ($M \subseteq N$) se l'inclusione $i : M \to N$ è una immersione.
2. M è <u>sottostruttura elementare</u> di N ($M \preceq N$) se l'inclusione $i : M \to N$ è una immersione elementare.
3. Una immersione biiettiva è un isomorfismo ed è, in particolare, un'immersione elementare.
4. Ogni immersione è iniettiva

$$M \vDash a = b \quad \iff \quad N \vDash f(a) = f(b)$$

Esempio 1.2. Sia $\mathcal{L}_{lo} = \{<\}$, con $<$ simbolo di relazione binaria. Allora $(\mathbb{R}, <)$ è una $\mathcal{L}_{lo}$-struttura, dove $<$ è (interpretato come) l'ordine usuale sui reali.

Gli intervalli $[0,1]$ e $[0,2] \subseteq \mathbb{R}$ sono $\mathcal{L}_{lo}$ strutture e sono entrambi sottostrutture di $\mathbb{R}$. Inoltre $[0,1] \cong [0,2]$, con $x \mapsto 2x$ isomorfismo.

<u>Ma</u> l'inclusione $[0,1] \subseteq [0,2]$ non è elementare. Infatti, sia

$$\varphi(x): \quad \forall y \ (y < x \lor y = x)$$

allora $[0,1] \vDash \varphi(1)$ ma $[0,1] \nvDash \varphi(1)$.

Altre osservazioni: $[0,1] \not\preceq \mathbb{R}$ e $[0,1] \not\equiv \mathbb{R}$. Però $[0,1] \equiv [0,2]$ poiché $[0,1] \cong [0,2]$.

Teorema 1.3. (Criterio di Tarski-Vaught) Per ogni sottoinsieme $A \subseteq N$, sono fatti equivalenti:

1. A è il dominio di una sottostruttura elementare $M \preceq N$;
2. per ogni formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ con $|x| = 1$

$$N \vDash \exists\, x\ \varphi(x) \quad \Longrightarrow \quad N \vDash \varphi(b) \text{ per qualche } b \in A$$

Definizione 1.4. *Sia λ un ordinale. Allora una catena di $\mathcal{L}$-strutture è una successione $\langle M_i \mid i < \lambda \rangle$ tale che, per ogni $i < j < \lambda$, $M_i \subseteq M_j$.*

L'unione della catena è la struttura M dove

- il dominio è $\bigcup_{i<\lambda} M_i$;
- c costante, allora $c^M = c^{M_i}$ per qualche $i < \lambda$;
- f funzione, $\bar{a} \in M^n$, allora $f^M(\bar{a}) = f^{M_i}(\bar{a})$ per i tale che $\bar{a} \in M_i^n$;
- R relazione, allora $R^M = \bigcup_{i<\lambda} R^{M_i}$.

1.2 Teorema di Lowenheim-Skolem all'ingiù

Teorema 1.5. Sia N una $\mathcal{L}$-struttura con $|N| \geq |\mathcal{L}| + \omega$, e sia $A \subseteq N$.

Allora per ogni λ tale che $|A| + |\mathcal{L}| \leq \lambda \leq |N|$ esiste $M \preceq N$ tale che

1. $A \subseteq M$
2. $|M| = \lambda$.

2 Due Teorie

2.1 Teoria degli ordini lineari

Sia $\mathcal{L}_{lo} = \{<\}$, con $<$ relazione binaria. Una $\mathcal{L}_{lo}$ struttura è un ordine lineare se soddisfa

1. $\forall x\ \neg(x < x)$;
2. $\forall x, y, z\ \Big[(x < y \wedge y < z) \implies x < z\Big]$;
3. $\forall x, y\ [x < y \vee y < x \vee x = y]$.

Un ordine lineare è denso se soddisfa

1. $\exists x, y\ [x < y]$
2. $\forall x, y\ \Big[(x < y) \implies \exists z\ (x < z \wedge z < y)\Big]$.

Un ordine lineare è senza estremi se

1. $\forall x$

??? (vedi Ordine lineare, Ordine denso, Ordine senza punto finale)

(T_{lo} e T_{dlo})

2.2 Teoria dei grafi

Sia $\mathcal{L}_{\text{gph}} = \{R\}$. Un grafo è una $\mathcal{L}_{\text{gph}}$-struttura che soddisfa

??? (Vedi Teoria dei grafi, Teoria dei grafi aleatori)

(T_{gph} e T_{rg})

I modelli di T_{dlo} e T_{rg} sono necessariamente infiniti.

2.3 Risultati per T_{dlo} e T_{rg}

Definizione 2.1. *Siano M, N due $\mathcal{L}$-strutture. Un'immersione parziale è una mappa iniettiva*

$$p : \operatorname{dom}(p) \subseteq M \to N$$

tale che

1. *per ogni relazione n-aria R, $a \in \operatorname{dom}(p)^n$*

$$a \in R^M \iff p(a) \in R^N$$

2. *per ogni funzione n-aria f, $a, f^M(a) \in \operatorname{dom}(p)^n$*

$$p\Big(f^M(a)\Big) = f^N\Big(p(a)\Big)$$

3. *per ogni costante c tale che $c^M \in \operatorname{dom}(p)$*

$$p(c^M) = c^N$$

Definizione 2.2. *M, N sono parzialmente isomorfe se esiste una collezione $I \neq \emptyset$ di immersioni parziali tali che*

1. *se $p \in I$ e $a \in M$, esiste $\hat{p} \in I$ con $p \subseteq \hat{p}$ e $a \in \operatorname{dom}(\hat{p})$;*
2. *se $p \in I$ e $b \in M$, esiste $\hat{p} \in I$ con $p \subseteq \hat{p}$ e $b \in \operatorname{rng}(\hat{p})$.*

Lemma 2.3. (Andirivieni, o back-and-forth) Se $|M| = |N| = \omega$ e M, N sono parzialmente isomorfe via I, allora $M \cong N$.

Dimostrazione. Enumeriano M, N, dicendo

$$M = \langle a_i : i < \omega \rangle$$
$$N = \langle b_i : i < \omega \rangle$$

Definiamo induttivamente una catena $\langle p_i : i < \omega \rangle$ di immersioni parziali con $a_i \in \operatorname{dom}(p_{i+1})$ e $b_i \in \operatorname{rng}(p_{i+1})$.

Sia $p_0 \in I$ arbitrario. Al passo $i+1$, usiamo le proprietà 1. e 2. della definizione per ottenere p_{i+1}.

Allora $p = \bigcup_{i \in \omega} p_i$ è l'isomorfismo cercato. ■

Teorema 2.4. Siano $M, N \vDash T_{\text{dlo}}$ con $|M| = |N| = \omega$. Allora $M \cong N$.

Dimostrazione. Se $p : M \to N$ è un'immersione parziale con $\left|\text{dom}(p)\right| < \omega$ e $c \in M$, allora, per gli assiomi di T_{dlo} è possibile trovare $d \in N$ tale che $p \cup \left\{(c, d)\right\}$ è ancora un'immersione parziale.

Analogamente, se $d \in N$ e $p : M \to N$ è un'immersione parziale con $\left|\text{dom}(p)\right| < \omega$, troviamo $c \in N$ tale che $p \cup \left\{(c, d)\right\}$ è ancora un'immersione parziale.

Dunque $I = \{p : M \to N \text{ immersione parziale finita}\}$ rende M e N parzialmente isomorfe.

Per il lemma dell'andirivieni, $M \cong N$. ■

Corollario 2.5. T_{dlo} è ω-categorica.

Osservazione. Ogni teoria ω-categorica T con un modello infinito è completa. Infatti, se $M, N \vDash T$ e $\varphi \in L$ è enunciato t.c. $M \vDash \varphi$, siano $M', N' \vDash T$ con $\left|M'\right| = \left|N'\right| = \omega$, $M' \vDash M$, $N' \vDash N$ (che esistono per LW). Allora $M' \cong N'$ e, per elementarità, $N \vDash \varphi$.

Corollario 2.6. T_{dlo} è completa.

Teorema 2.7. T_{rg} è coerente.

Dimostrazione. Si definisce un grafo su ω come segue: per $i < j$, $R(i, j)$ sse la cifra i-esima nell'espansione binaria di j è 1.

Dimostrare che $\langle \omega, R \rangle \vDash T_{\text{rg}}$. ■

Teorema 2.8. Siano $M, N \vDash T_{\text{rg}}$ con $|M| = |N| = \omega$. Allora $M \cong N$.

Dimostrazione. Siano $m_0 \in M$, $n_0 \in N$. Allora $\langle m_0, n_0 \rangle$ è un'immersione parziale.

Dunque $I = \{p : M \to N \text{ immersione parziale finita}\} \neq \emptyset$.

Siano ora $p \in I$ e $m \in M$. Considero $U, V \subseteq \text{rng}(p)$

$$\begin{aligned} U &= \left\{p(a) \in \text{rng}(p) \mid R(m, a)\right\} \\ V &= \left\{p(a) \in \text{rng}(p) \mid (m, a)\right\} \end{aligned}$$

Dunque esiste $n \in N$ tale che, per ogni $a \in \text{dom}(p)$

$$M \vDash R\big(m, a\big) \quad \Longleftrightarrow \quad R\big(n, p(a)\big)$$

... ■

Corollario 2.9. T_{rg} è ω-categorica e completa.

Il modello numerabile Γ di T_{rg} si chiama grafo di Rado, o random graph.

Ogni grafo finito e ogni grafo numerabile si immerge in Γ.

Inoltre Γ è ultraomogeneo: ogni isomorfismo tra sottografi finiti di Γ si estende ad un automorfismo di Γ.

Anche $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ è ultraomogeneo. ...

Definizione 2.10. *Una mappa $f : \text{dom}(f) \subseteq M \to N$ si dice elementare se $\forall \varphi(x) \in \mathcal{L}$, $a \in \text{dom}(f)^{|x|}$*

$$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi\big(f(a)\big).$$

Proposizione 2.11. Una mappa è elementare sse ogni sua restrizione finita lo è.

Dimostrazione. ($\Rightarrow$): ovvio.

($\Leftarrow$): siano $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ e $a \in M$ tali che

$$M \vDash \varphi(a) \quad \wedge \quad N \nvDash \varphi(f(a))$$

Allora $f \restriction \{a\}$ è finita e non elementare. ∎

Teorema 2.12. Siano $M, N \vDash T_{\text{dlo}}$ (o T_{rg}), e sia $p : M \to N$ un'immersione parziale. Allora p è elementare.

Dimostrazione. In virtù della proposizione precedente, basta il caso $|p| < \omega$.

Siano $M' \preceq M$, $N' \preceq N$ tali che $\left|M'\right| = \left|N'\right| = \omega$ e

$$\begin{aligned} \text{dom}(p) &\subseteq M' \\ \text{rng}(p) &\subseteq N' \end{aligned}$$

Allora per andirivieni fra M' e N', p si estende a $\pi : M' \cong N'$.

In particolare, p è elementare. ∎

Corollario 2.13. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, < \rangle$

3 Tipi

Tutte le strutture si intendono in un linguaggio $\mathcal{L}$ fissato.

Definizione 3.1. *Un tipo $p(x)$ è un insieme di $\mathcal{L}$-formule le cui variabili libere sono in $x = \langle x_i : i < \lambda \rangle$, con λ cardinale.*

Notazione: $p(x) \subseteq \mathcal{L}$

Definizione 3.2. *Un tipo $p(x)$ è*

- *soddifacibile in M* se $\exists a \in M^{|x|}$ *tale che*

$$M \vDash \varphi(a) \qquad \textit{per ogni } \varphi(x) \in p(x);$$

scriviamo $M \vDash p(a)$*, oppure* $M, a \vDash p(x)$ *e diciamo che* a *realizza* $p(x)$ *in* M*;*

- *soddisfacibile se è soddisfacibile in qualche* M*;*
- *finitamente soddisfacibile in M se ogni* $q(x) \subseteq p(x)$ *finito è soddisfacibile in* M*;*
- *finitamente soddisfacibile se ogni* $q(x) \subseteq p(x)$ *finito è soddisfacibile.*

Spesso si dice "consistente" invece di "soddisfacibile".

Esempio 3.3. Sia $M = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, sia $\varphi_n(x)$ la formula "ci sono almeno n elementi $< x$", e sia

$$p(x) = \left\{ \varphi_n(x) \mid n \in \omega \right\}.$$

- $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M.
- $p(x)$ non è soddisfacibile in M.

Teorema 3.4. (Teorema di Compattezza) Una teoria T è coerente se e solo se è coerente ogni sottoinsieme finito di T.

Un corollario è

Teorema 3.5. (compattezza per tipi) Se $p(x)$ è un tipo finitamente soddisfacibile, allora $p(x)$ è soddisfacibile.

Lemma 3.6. (Lemma del diagramma) Sia $a = \langle a_i : i < \lambda \rangle$ una enumerazione della struttura M. Sia $q(x)$ il diagramma di M:

$$q(x) = \left\{ \varphi(x) \in \mathcal{L} \mid M \vDash \varphi(a) \right\}, \quad |x| = |a| = \lambda.$$

Allora $q(x)$ è soddisfacibile in una struttura N se e solo se esiste $\beta : M \to N$ immersione elementare.

Dimostrazione. ($\Leftarrow$): $N \vDash q\big(\beta(a)\big)$. ($\Rightarrow$): Se $b \in N^{|x|}$ è tale che $N \vDash q(b)$, allora

$$\beta : a_i \mapsto b_i, \quad i < \lambda$$

è una immersione elementare. Quindi

$$M \vDash \varphi(a) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi(x) \in q(x) \quad \Longleftrightarrow \quad N \vDash \varphi(b) = \varphi\big(\beta(a)\big). \qquad \blacksquare$$

Se $A \subseteq M$, consideriamo i tipi in $\mathcal{L}(A)$, detti con parametri in A, o su A.

In particolare, se $A = M$ e $p(x) \subseteq \mathcal{L}(M)$, esistono:

1. $a = \langle a_i : i < |M| \rangle$ enumerazzione
2. $q(x, z) \subseteq \mathcal{L}$

tali che $p(x) = q(x, a)$.

Allora il lemma precedente si può enunciare come segue.

Lemma 3.7. Sia $\mathrm{Th}(M_M)$ la teoria di M in $\mathcal{L}(M)$. Se $N \models \mathrm{Th}(M_M)$, allora $M \preceq N$.

Teorema 3.8. Sia M una struttura e $p(x) \subseteq \mathcal{L}(M)$ un tipo finitamente soddisfacibile in M. Allora $p(x)$ è realizzato in qualche $N \succeq M$.

Esempio 3.9. Sia $M = (0,1) \subseteq \mathbb{Q}$ una $\mathcal{L}_{lo}$-struttura. Siano

1. $a_n = 1 - 1/n \in M$ per $n \in \omega \setminus \{0\}$;
2. $p(x) = \{a_n < x : n \in \omega\}$.

Allora $p(x) \in \mathcal{L}(M)$ è finitamente sodidsfacibile in M, ma non è realizzato. Viceversa

$$\mathbb{Q}, 1 \models p(x)$$

e sappiamo che $M \preceq \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. (del Teorema~3.8) Siano:

1. a una enumerazione di M;
2. $p(x) = p'(x, a)$ con $p'(x, z) \subseteq \mathcal{L}$, $|z| = |a| = |M|$;
3. $q(z) = \big\{\varphi(z) \mid M \models \varphi(a)\big\}$.

Allora $p'(x, z) \cup q(z)$ è finitamente soddisfacibile, per ipotesi. Per compattezza, esiste una struttura N e c, d tali che

$$N, c, d \models p'(x, z) \cup q(z)$$

e in particolare $N \models q(d)$ e dunque esiste $\beta : M \to N$ immersione elementare. Possiamo assumere $M \preceq N$. ∎

Un corollario è questo importante teorema.

Teorema 3.10. (Lowenheim-Skolem all'insù) Sia $|M| \geq \omega$. Allora per ogni $\lambda \geq |M| + |\mathcal{L}|$ esiste $N \succeq M$ con $|N| = \lambda$.

Dimostrazione. Sia $x = \langle x_i : i < \lambda \rangle$ una tupla di variabili distinte, e sia

$$p(x) = \big\{x_i \neq x_j \mid i < j < \lambda\big\}.$$

Allora $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M, e dunque realizzato in $N \succeq M$, con $|N| \geq \lambda$.

Per Lowenheim-Skolem all'ingiù, possiamo assumere $|N| = \lambda$. ∎

4 Saturazione

Definizione 4.1. *Sia λ un cardinale infinito. La struttura M si dice λ-satura se realizza ogni tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ (per $A \subseteq M$) con*

1. $|x| = 1$
2. *$p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M;*

3. $|A| \leq \lambda$.

M si dice satura se è $|M|$-satura.

Esempio 4.2. Sia $p(x) = \{x \neq a \mid a \in M\} \subseteq \mathcal{L}(M)$:

- $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M;
- $p(x)$ non è soddisfacibile in M.

Definizione 4.3. *Se $A \subseteq M$ e $b \in M^{|b|}$ allora il tipo di b su A è*

$$\operatorname{tp}_M(b/A) \coloneqq \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(A) : M \vDash \varphi(b)\}.$$

Osservazione. Si ha che

1. $\operatorname{tp}(b/A)$ è completo: se $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, si ha $M \vDash \varphi(b)$ o $M \vDash \neg\varphi(b)$;
2. se $A \subseteq M \preceq N$ e $b \in M^{|b|}$
$$\operatorname{tp}_M(b/A) = \operatorname{tp}_N(b/A);$$

Importante se $M \equiv N$, allora $\emptyset : M \dashrightarrow N$ è elementare.

Proposizione 4.4. Sia $f : \operatorname{dom}(f) \subseteq M \to N$ elementare. Allora:

1. $M \equiv N$;
2. Se a enumera $\operatorname{dom}(f)$
$$\operatorname{tp}(a/\emptyset) = \operatorname{tp}\Big(f(a)/\emptyset\Big)$$
e più in generale, se $b \in \operatorname{dom}(f)^{|b|}$, se $A \subseteq \operatorname{dom}(f) \cap N$ e $f \restriction A = \operatorname{Id}_A$:
$$\operatorname{tp}(b/A) = \operatorname{tp}\Big(f(b)/A\Big).$$
3. Se a enumera $\operatorname{dom}(f)$ e $p(x,a) \subseteq L(A)$ è finitamente soddisfacibile in M, allora $p\Big(x, f(a)\Big)$ è finitamente soddisfacibile in N.

   Infatti, se $\{\varphi_1(x,a), \ldots, \varphi_n(x,a)\} \subseteq p(x,a)$ allora
$$M \vDash \exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(x,a)$$
e per elementarità di f
$$N \vDash \exists x \bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i\Big(x, f(a)\Big).$$

Teorema 4.5. Sia N tale che $|\mathcal{L}| + \omega \leq \lambda \leq |N|$. Sono fatti equivalenti:

1. N è λ-satura;
2. se $f : M \dashrightarrow N$ è mappa elementare con $|f| \leq \lambda$ e $b \in M$, allora esiste $\hat{f} \supseteq f$ elementare tale che $b \in \operatorname{dom}(\hat{f})$;

3. se $A \subseteq N$ è tale che $|A| < \lambda$ e $p(z) \subseteq \mathcal{L}(A)$ con $|z| \leq \lambda$ è finitamente soddisfacibile in N, allora $p(z)$ è soddisfacibile in N.

Dimostrazione. (1. $\Rightarrow$ 2.): Sia f come in 2., sia $b \in M$. Sia a un'enumerazione di $\mathrm{dom}(f)$, e sia $p(x, a) = \mathrm{tp}_M(b/a)$.

$p(x, a)$ è soddisfacibile in M, e dunque $p\big(x, f(a)\big)$ è finitamente soddisfacibil e in N e $\big|f(a)\big| < \lambda$, N è λ-satura.

Dunque $p\big(x, f(a)\big)$ è realizzato in N. Sia d tale che $N, d \vDash p\big(x, f(a)\big)$. Allora $\hat{f} = f \cup \big\{(b, d)\big\}$ è la mappa cercata. ∎

Corollario 4.6. Se M, N sono saturi con $|M| = |N|$, allora ogni mappa elementare $f : M \dashrightarrow N$ tale che $|f| < |M|$ si estende ad un isomorfismo $\alpha : M \cong N$.

In particolare, se M, N sono saturi, $\mathrm{Th}(M) = \mathrm{Th}(N)$ e $|M| = |N|$, allora $M \cong N$.

Corollario 4.7. Se $M \vDash T_{\mathrm{dlo}}$ o $M \vDash T_{\mathrm{rg}}$, allora M è ω-saturo.

Ricordiamo che un automorfismo di una struttura M è un isomorfismo $M \to M$. Gli automorfismi di M formano un gruppo, scritto $\mathrm{Aut}(M)$.

Se $A \subseteq M$, si definisce

$$\mathrm{Aut}(M/A) \coloneqq \big\{\alpha \in \mathrm{Aut}(M) \mid \alpha \restriction = \mathrm{Id}_A\big\}.$$

l'insieme degli automorfismi di M che fissano A.

Definizione 4.8. *Sia λ un cardinale infinito. Una struttura N è*

1. *λ-universale se per ogni $M \equiv N$ con $|M| \leq \lambda$, esiste $\beta : M \to N$ immersione elementare, e universale se è $|N|$-universale;*
2. *λ-omogenea se ogni mappa elementare $f : N \dashrightarrow N$, con $|f| < \lambda$, si estende ad $\alpha \in \mathrm{Aut}(N)$, e omogenea se è $|N|$-omogenea;*
3. *ultraomogenea se ogni immersione parziale finita si estende ad un automorfismo.*

Teorema 4.9. Sia N tale che $|N| \geq |L|$. Sono equivalenti:

1. N è satura;
2. N è universale e omogenea.

Definizione 4.10. *Sia $a \in N^{|a|}$ e sia $A \subseteq N$. Allora*

1. *l'orbita di a su A è*
$$O_N(a/A) \coloneqq \big\{\alpha(a) : \alpha \in \mathrm{Aut}(N/A)\big\},$$
dove per definizione alpha$(a_0, \ldots, a_i, \ldots) \coloneqq \big(\alpha(a_0), \ldots, \alpha(a_i), \ldots\big)$;
2. *se $\varphi \in \mathcal{L}(A)$,*
$$\varphi(N) \coloneqq \Big\{a \in N^{|x|} : N \vDash \varphi(a)\Big\}$$
è l'insieme definito da $\varphi(x)$.

Un sottoinsieme di N è <u>*definibile su A*</u> *se è definito da qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$.*

Un sottoinsieme di N è <u>*tipo-definibile su A*</u> *se è nella forma*

$$p(N) \coloneqq \left\{a \in N^{|x|} \mid N \vDash p(a)\right\}$$

per qualche tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

Osservazione. Se $a, b \in N^{|a|}$ e $A \subseteq N$, allora

$$\operatorname{tp}(a/A) = \operatorname{tp}(b/A)$$

se e solo se la mappa

$$\left\{\langle a_i, b_i\rangle \mid i < |a|\right\} \cup \operatorname{Id}_A$$

è una mappa elementare $N \to N$.

Teorema 4.11. Siano N λ-omogenea, $A \subseteq N$, $|A| < \lambda$, e sia $a \in N^{|a|}$, con $|a| < \lambda$.

Sia $p(x) = \operatorname{tp}(a/A)$. Allora

$$O_N(a/A) = p(N).$$

Dimostrazione. ($\subseteq$) Se $b \in O_N(a/A)$ allora $b = \alpha(a)$ per $\alpha \in \operatorname{Aut}(N/A)$ e se $\varphi(x, c) \in \mathcal{L}(A)$ con c parametri,

$$\begin{aligned} N \vDash \varphi(a, c) \quad &\iff \quad N \vDash \varphi\big(\alpha(a), \alpha(c)\big) \\ &\iff \quad N \vDash \varphi(b, c). \end{aligned}$$

($\supseteq$) Se $N \vDash p(b)$ allora $\operatorname{tp}(b/A) = \operatorname{tp}(a/A)$ e

$$f = \left\{\langle a_i, b_i\rangle : i < |a|\right\} \cup \operatorname{Id}_A$$

è elementare con $|f| < \lambda$.

Per λ-omogeneità, esiste $\alpha \supseteq f$, $\alpha \in \operatorname{Aut}(N)$. In particolare, $\alpha \restriction A = \operatorname{Id}_A$, e dunque

$$b \in O_N(a/A).$$

■

5 Modello mostro

Sia T una teoria completa senza modelli finiti. Lavoriamo in $\mathcal{U} \vDash T$ tale che

1. $\mathcal{U}$ è saturo;
2. $|\mathcal{U}| > |M|$ per ogni $M \vDash T$ con cui ci interessa lavorare.

<u>Avvertimento</u>: non ci siamo occupati dell'esistenza di un modello saturo di T.

Definizione 5.1. *N è* <u>*debolmente λ-omogeneo*</u> *se per ogni $f : N \dashrightarrow N$ elementare e tale che $|f| < \lambda$, e per ogni $b \in N$, esiste $c \in N$ tale che $f \cup \left\{\langle b, c\rangle\right\}$ è elementare.*

In particolare, se N è λ-saturo, allora

- N è debolmente λ-omogeneo;
- N è λ-universale.

Terminologia e convenzioni in $\mathcal{U}$.

- "vale $\varphi(x)$", o "$\models \varphi(x)$", se $\mathcal{U} \models \forall x\ \varphi(x)$;
- "$\varphi(x)$ è consistente" se $\mathcal{U} \models \exists x\ \varphi(x)$;
- un tipo $p(x)$ è coerente/consistente se esiste $a \in \mathcal{U}^{|x|}$ tale che $\mathcal{U} \models p(a)$;
- un cardinale λ è piccolo se $\lambda < |\mathcal{U}|$;
- $|\mathcal{U}| = \kappa$;
- un modello è $M \preceq \mathcal{U}$, con $|M|$ piccola;
- A, B, C sono sottoinsiemi piccoli (ovvero di cardinalità piccola) di $\mathcal{U}$;
- $\operatorname{tp}(a/A) \coloneqq \operatorname{tp}_{\mathcal{U}}(a/A)$;
- $O(a/A) \coloneqq O_{\mathcal{U}}(a/A)$.

Altre convensioni

- se non altrimenti specificato, le tuple hanno lunghezza piccola;
- gli insiemi definibili hanno la forma $\varphi(\mathcal{U})$ per $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$;
- i tipi hanno parametri in insiemi piccoli
- gli insiemi tipo-definibili hanno la formula $p(\mathcal{U})$ per qualche tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, A piccolo.

Se $p(x), q(x)$ sono tipi, scriviamo

$$\begin{aligned} p(x) \implies q(x) \quad &\text{per} \quad p(\mathcal{U}) \subseteq q(\mathcal{U}); \\ p(x) \implies \neg q(x) \quad &\text{per} \quad p(\mathcal{U}) \cap q(\mathcal{U}) = \emptyset; \end{aligned}$$

Proposizione 5.2. Se $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, $q(x) \subseteq \mathcal{L}(B)$ sono tipi coerenti e tali che $p(x) \implies \neg q(x)$, allora esistono $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ congiunzione di formule (risp. di $p(x)$ e $q(x)$) tali che

$$\models \varphi(x) \implies \neg \psi(x)$$

Infatti, se $p(\mathcal{U}) \cap q(\mathcal{U}) = \emptyset$, allora

$$p(x) \cup q(x)$$

non è soddisfacibile in $\mathcal{U}$, e dunque (siccome $\mathcal{U}$ è saturo), non è finitamente soddisfacibile.

Proposizione 5.3. Se $\alpha \in \operatorname{Aut}(\mathcal{U})$ e $\varphi(\mathcal{U}, b)$ è un insieme definibile, allora

$$\alpha\Big[\varphi(\mathcal{U}, b)\Big] = \varphi\Big(\mathcal{U}, \alpha(b)\Big).$$

Analogamente, se $p(x, z) \subseteq \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^{|z|}$

$$\alpha\Big[p(\mathcal{U}, b)\Big] = p\Big(\mathcal{U}, \alpha(b)\Big).$$

Definizione 5.4. *Un insieme $D \subseteq \mathcal{U}^\lambda$ (per $\lambda < \kappa$) è <u>invariante</u> su $A \subseteq \mathcal{U}$ se per ogni $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$,*

$$\alpha[D] = D.$$

o, equivalentemente,

$$\forall a \in D \quad O(a/A) \subseteq D.$$

Osservazione. Se $b \models \mathrm{tp}(a/A)$, allora, per omogeneità esiste $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $\alpha(a) = b$, dunque $b \in O(a/A)$.

Quindi D è invariante se e solo se

$$\forall a \in D,\ \forall b \in \mathcal{U}, \quad \mathrm{tp}(a/A) = \mathrm{tp}(b/A) \implies b \in D.$$

Teorema 5.5. Sia $A \subseteq \mathcal{U}$. Per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, sono equivalenti:

1. esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che
$$\models \forall x \left[\psi(x) \iff \varphi(x)\right];$$
2. $\varphi(\mathcal{U})$ è invariante su A.

Notiamo che la condizione 1. dice che $\varphi(\mathcal{U})$ è definibile su A.

Osservazione. Sottoinsiemi finiti e cofiniti di $\mathcal{U}$ sono sempre definibili.

Dimostrazione. (del Teorema 5.5) (2. $\Rightarrow$ 1.): Siano $\varphi(x, z) \in \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^{|z|}$ tali che $\varphi(\mathcal{U}, b)$ è invariante su A.

Sia $c \models \mathrm{tp}(b/A)$. Per omogeneità, $c = \alpha(b)$ per qualche $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$. Allora

$$\alpha\Big[\varphi(\mathcal{U}, b)\Big] = \varphi(\mathcal{U}, c)$$

me ma per invarianza $\alpha\Big[\varphi(\mathcal{U}, b)\Big] = \varphi(\mathcal{U}, b)$, e pertanto

$$\varphi(\mathcal{U}, c) = \varphi(\mathcal{U}, b).$$

Allora, se $q(z) \coloneqq \mathrm{tp}(b/A)$

$$q(z) \implies \forall x \left[\varphi(x, b) \iff \varphi(x, z)\right].$$

Per saturazione/compattezza, esiste $\chi(z) \in q(z)$ tale che

$$\models \chi(z) \implies \forall x \left[\varphi(x, b) \iff \varphi(x, z)\right].$$

Allora $\varphi(\mathcal{U}, b)$ è definito da

$$\exists z\ [\chi(z) \land \psi(x, z)] \in \mathcal{L}(A).$$

■

5.1 Eliminazione dei quantificatori

Proposizione 5.6. Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Sono fatti equivalenti:

1. esiste $\psi(x)$ senza quantificatori tale che
$$\vDash \forall x \left[\varphi(x) \iff \psi(x)\right].$$

2. per ogni immersione parziale $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$, $a \in \mathrm{dom}(p)^{|x|}$
$$\vDash \varphi(a) \iff \varphi\big(p(a)\big).$$

Dimostrazione. (1. ⇒ 2.): abbastanza ovvia.

(2. ⇒ 1.): Per $a \in \mathcal{U}^{|x|}$, sia
$$\mathrm{qftp}(a) \coloneqq \left\{\chi(x) \in \mathrm{tp}(a/\emptyset) \mid \chi(x) \text{ senza quantificatori}\right\}$$
e sia
$$\mathcal{F} \coloneqq \left\{q(x) \mid q(x) = \mathrm{qftp}(a) \text{ per } a \in \varphi(\mathcal{U})\right\}.$$
Vogliamo dimostrare che
$$\varphi(\mathcal{U}) = \bigcup_{q \in \mathcal{F}} q(\mathcal{U}).$$
Per $\subseteq$ è ovvio per definizione di $\mathcal{F}$.

Per $\supseteq$, sia $q(x) \in \mathcal{F}$, $q(x) = \mathrm{qftp}(a)$ e sia $b \vDash q(x)$.

Allora $a_i \mapsto b_i$ è immersione parziale, dunque per ipotesi $\vDash \varphi(b)$.

Dunque $q(\mathcal{U}) \subseteq \varphi(\mathcal{U})$, e dunque $\varphi(\mathcal{U}) \supseteq \bigcup_{q \in \mathcal{F}} q(\mathcal{U})$.

In particolare $q(x) \implies \varphi(x)$ per ogni $q(x) \in \mathcal{F}$. Allora esiste $\psi_q(x) \in q(x)$ tale che
$$\vDash \psi_q(x) \implies \varphi(x)$$
(per compattezza/saturazione).

FINIRE DIMOSTRAZIONE ■

Definizione 5.7. *Una teoria T ha l'<u>eliminazione dei quantificatori</u> (q.e.) se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ esiste $\psi(x)$ senza quantificatori tale che*
$$T \vDash \forall x \left[\varphi(x) \iff \psi(x)\right].$$

Se T è completa e ha q.e., il tipo di $a \in \mathcal{U}^{|a|}$ è determinato di $\mathrm{qftp}(a)$.

Teorema 5.8. Sia T completa senza modelli finiti. Sono fatti equivalenti:

1. T ha q.e.
2. ogni immersione parziale $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ è elementare;

3. per ogni $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ con $|p| < |\mathcal{U}|$ e $b \in \mathcal{U}$, esiste $\hat{p} \supseteq p$ immersione parziale con $|\hat{p}| < |\mathcal{U}|$ e $b \in \mathrm{dom}(\hat{p})$;
4. per ogni $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ con $|p| < \omega$ e $b \in \mathcal{U}$, esiste $\hat{p} \supseteq p$ immersione parziale con $|\hat{p}| < \omega$ e $b \in \mathrm{dom}(\hat{p})$.

Dimostrazione. (1. $\Rightarrow$ 2.): Ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ è equivalente a $\psi(x)$ senza quantificatori, e p preserva $\psi(x)$.

(2. $\Rightarrow$ 1.): p è immersione parziale, dunque p elementare, e dunque p preserva ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$.

Dal teorema precedente, $\varphi(x)$ è equivalente a $\psi(x)$ senza quantificatori, e questo vale per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$.

(2. $\Rightarrow$ 3.): Sia p parziale e $|p| < |\mathcal{U}|$. Allora p è elementare e per omogeneità di $\mathcal{U}$, $p \subseteq \alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$. Pertanto è sufficiente porre $\hat{p} \coloneqq p \cup \big\{ \langle b, \alpha(b) \rangle \big\}$.

(3. $\Rightarrow$ 2.) (traccia): Se $p_0 \subseteq p$, $|p_0| < \omega$, estendiamo p_0 ad $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$ per back-and-forth. Allora p_0 è elementare. ■

5.2 Insiemi definibili e algebrici

Definizione 5.9. *1. $a \in \mathcal{U}$ è definibile su $A \subseteq \mathcal{U}$ se $\{a\}$ è definibile su A (ovvero $\varphi(\mathcal{U}) = \{a\}$ per qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$).*

2. $a \in \mathcal{U}$ è algebrico su $A \subseteq \mathcal{U}$ se esiste $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $a \in \varphi(\mathcal{U})$ e $\big|\varphi(\mathcal{U})\big| < \omega$. (Una tale $\varphi(x)$ si dice algebrica).

3. La chiusura definibile di $A \subseteq \mathcal{U}$ è

$$\mathrm{dcl}(A) = \big\{ a \in \mathcal{U} \mid a \text{ è definibile su } A \big\} .$$

4. La chiusura algebrica di $A \subseteq \mathcal{U}$ è

$$\mathrm{acl}(A) = \big\{ a \in \mathcal{U} \mid a \text{ è algebrico su } A \big\} .$$

Ovviamente $\mathrm{dcl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(A)$

Esempio 5.10. Sia $T_{\mathrm{do}} = \mathrm{Th}(\mathbb{Z}, <)$. Si dimostra che T_{do} è assiomatizzata da

$$\begin{aligned} \forall x\ &\neg(x < x) \\ \forall x, y, z\ &\big[(x < y \wedge y < z) \implies x < z\big] \\ \forall x, y\ &\big[\big] \end{aligned}$$

FINIRE GLI ASSIOMI.

T_{do} è completa, ma non è ω-categorica. (ad esempio $2.\mathbb{Z} \vDash T_{\mathrm{do}}$).

Considerando invece $\mathbb{Q}.\mathbb{Z} \vDash T_{\mathrm{do}}$ (ovvero $\mathbb{Q}$ copie di $\mathbb{Z}$): questo è un modello saturo (ovvero ω-saturo e numerabile).

Un modello mostro $\mathcal{U} \vDash T_{\mathrm{do}}$ ha la forma $\mathcal{V}.\mathbb{Z}$, dove $\mathcal{V} \vDash T_{\mathrm{dlo}}$ è un modello mostro.

Osservazione. Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, con $|x| < \omega$.

$$\left|p(\mathcal{U})\right| \geq \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|p(\mathcal{U})\right| = |\mathcal{U}|\,.$$

In particolare, se $\varphi(x)$ non è algebrica, allora $\left|\varphi(\mathcal{U})\right| = |\mathcal{U}|$.

Infatti, sia

$$q(x) = p(x) \cup \left\{x \neq d \mid d \in p(\mathcal{U})\right\}$$

tipo con parametri in $A \cup p(\mathcal{U})$. Allora $q(x)$ è finitamente soddisfacibile.

Supponiamo $\omega \geq \left|p(\mathcal{U})\right| < |\mathcal{U}|$. Allora per saturazione $\mathcal{U} \vDash q(b)$ per qualche $b \in \mathcal{U}$.

Allora $\mathcal{U} \vDash p(b)$, ma $b \neq d$ per ogni $d \in p(\mathcal{U})$. Assurdo.

L'unica possibilità è che $|p|\,(\mathcal{U}) = |\mathcal{U}|$.

Proposizione 5.11. Per $a \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq \mathcal{U}$ sono fatti equivalenti:

1. $a \in \mathrm{dlc}(A)$;
2. $O(a/A) = \{a\}$.

Dimostrazione. (1. $\Rightarrow$ 2.): Sia $\{a\}$ definito da $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, ossia $\varphi(\mathcal{U}) = \{a\}$.

Ma $\varphi(\mathcal{U})$ è invariante su A, e quindi $O(a/A) \subseteq \varphi(U) = \{a\}$.

(2. $\Rightarrow$ 1.): $O(a/A) = \{a\}$ è definibile (da $x = a$) ed è invariante su A (perché è un'orbita).

Ma allora $\{a\}$ è definibile da $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, e quindi

$$a \in \mathrm{dlc}(A)$$

■

Teorema 5.12. Se $a \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq \mathcal{U}$, sono fatti equivalenti:

1. $a \in \mathrm{acl}(A)$;
2. $\left|O(a/A)\right| < \omega$;
3. $a \in M$ per ogni mdoello M tale che $A \subseteq M$.

Dimostrazione. (1. $\Leftrightarrow$ 2.): è simile al caso definibile su A.

(1. $\Rightarrow$ 3.): Se $a \in \mathrm{acl}(A)$ allora esiste $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che

$$\vDash \varphi(a) \wedge \exists^{=n} x\ \varphi(x).$$

Allora se $M \preceq \mathcal{U}$ e $A \subseteq M$, si ha

$$M \vDash \exists^{=n} x\ \varphi(x)$$

Poiché ogni testimone di $\varphi(x)$ in M è un testimone in $\mathcal{U}$, $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq M$; in particolare, $a \in M$.

(3. $\Rightarrow$ 1.): se $a \notin \mathrm{acl}(A)$, allora $p(x) = \mathrm{tp}(a/A)$ è tale che $\left|p(\mathcal{U})\right| \geq \omega$, e dunque

$$\left|p(\mathcal{U})\right| = |\mathcal{U}|$$

e $p(\mathcal{U}) \setminus M \neq \emptyset$ per ogni modello $M \supseteq A$.

Se $b \in p(\mathcal{U}) \setminus M$, spostiamo

- b in a con $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U}/A)$;
- M in $\alpha[M] \preceq \mathcal{U}$

e $a = \alpha(b) \notin \alpha[M]$. ■

Corollario 5.13. Vale
$$\mathrm{acl}(A) = \bigcap \left\{ M \preceq \mathcal{U} \mid A \subseteq M \right\}.$$

Proposizione 5.14. Alcune proprietà di $\mathrm{acl}(A)$:

1. carattere finito: se $a \in \mathrm{acl}(A)$ allora esiste $A_0 \subseteq A$ finito tale che $a \in \mathrm{acl}(A_0)$
2. $A \subseteq \mathrm{acl}(A)$;
3. $A \subseteq B \implies \mathrm{acl}(A) \subseteq \mathrm{acl}(B)$;
4. $\mathrm{acl}\left(\mathrm{acl}(A)\right) = \mathrm{acl}(A)$.

Proposizione 5.15. Se $\beta \in \mathrm{Aut}(\mathcal{U})$ e $A \subseteq \mathcal{U}$, allora
$$\beta\left[\mathrm{acl}(A)\right] = \mathrm{acl}\left(\beta[A]\right).$$

Dimostrazione. Sia $a \in \mathrm{acl}(A)$ algebrico per la formula $\varphi(x, b)$, $b \in \mathcal{U}^{|b|}$.

Allora $\left|\varphi(\mathcal{U}, b)\right| < \omega$, e valgono

1. $\vDash \varphi\Big(\beta(a), \beta(b)\Big)$;
2. $\left|\varphi(\mathcal{U}, \beta(b))\right| < \omega$

poiché β è automorfismo.

Segue che $\beta(a)$ è algebrico su $\beta(b)$, e dunque
$$\beta\left[\mathrm{acl}(A)\right] \subseteq \mathrm{acl}\left(\beta[A]\right).$$ ■

6 Teorie Fortemente Minimali

Ricordiamo che in ogni struttura M, gli insiemi finiti e cofiniti sono sempre definibili.

Definizione 6.1. *Una struttura M è minimale se tutti i suoi sottoinsiemi definibili sono finiti o cofiniti.*

- *M è fortemente minimale se è minimale e ogni sua estensione elementare è minimale.*
- *Una teoria T coerente e senza modelli finiti è fortemente minimale se per ogni $\varphi(x, \overline{z}) \in \mathcal{L}$ esiste $n \in \omega$ tale che*
$$T \vDash \forall \overline{z} \ \left[\exists^{\leq n} x \ \varphi(x, \overline{x}) \vee \exists^{\leq n} x \ \neg\varphi(x, \overline{x})\right]$$

Sia ora T una teoria completa con modello mostro $\mathcal{U}$.

Definizione 6.2. *Sia $a \in \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$. Allora a è indipendente da B se $a \notin \operatorname{acl}(B)$.*

B è un insieme indipendente se per ogni $b \in B$, b è indipendente da $B \setminus \{b\}$.

Proposizione 6.3. $\operatorname{Th}(M)$ è fortemente minimale sse M è fortemente minimale.

Esempio 6.4. Sia $L = \{E\}$, con E relazione binaria. Sia M numerabile e E interpretata come relazione di equivalenza, tale che per ogni $n \in \omega \setminus \{0\}$, M contiene esattamente una classe di equivalenza di cardinalità n, e nessuna classe di cardinalità ω.

Allora M è minimale (e inoltre $\operatorname{Th}(M)$ ha q.e.) e ammette $N \succeq M$ dove E ha una classe di equivalenza infinita (e non cofinita).

—

Lavoriamo in T completa, fortemente minimale, con modello mostro $\mathcal{U}$.

Esempio 6.5. Sia $\mathbb{K}$ un campo, e sia $\mathcal{L}_{\mathbb{K}} = \left\{+, -, 0, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{K}}\right\}$.

Si assiomatizza un campo vettoriale V su $\mathbb{K}$, dove tutto è interpretato nel modo usuale (i λ sono funzioni unarie che rappresentano il prodotto per scalari): questo dà luogo a $T_{\mathrm{VS}\mathbb{K}}$.

È possibile vedere che $T_{\mathrm{VS}\mathbb{K}}$:

- è completa;
- ha q.e.;

e pertanto:

- i termini sono combinazioni lineari $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$;
- le formule atomiche sono uguaglianze tra combinazioni lineari.

Per q.e., $T_{\mathrm{VS}\mathbb{K}}$ è fortemente minimale.

Esempio 6.6. Sia $\mathcal{L}_{\mathrm{rng}} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$. Allora ACF è la $\mathcal{L}_{\mathrm{rng}}$-teoria che include:

- gli assiomi di gruppo abeliano;
- gli assiomi di monoide commutativo;
- gli assiomi di campo
- assiomi per la chiusura algebrica.

Sia $\chi_p \equiv [1 + 1 + \cdots + 1 = 0]$, dove 1 è ripetuto p volte.

- per p primo, sia $\mathrm{ACF}_p \coloneqq \mathrm{ACF} \cup \left\{\chi_p\right\}$;
- $\mathrm{ACF}_0 \coloneqq \mathrm{ACF} \cup \left\{\neg\chi_n \mid n \in \omega\right\}$.

È possibile mostrare che ACF_p e ACF_0 sono complete e hanno q.e.

Allora:

- le formule atomiche con parametri sono equazioni polinomiali;

- una formula atomica con una variabile e parametri in A è equivalente a $p(x) = 0$, dove $p(x)$ è un polinomio nel sottocampo generato da A.

Quindi:

- le formule atomiche con parametri e una solo variabile libera definiscono insiemi finiti;
- le formule quantifier-free con una variabile e parametri definiscono insiemi finiti o cofiniti.

Per q.e., ACF_p e ACF_0 sono fortemente minimali.

FINIRE CON LE SLIDES

Lemma 6.7. (Lemma dello scambio). Siano $B \subseteq \mathcal{U}$, $a, b \in \mathcal{U} \setminus \mathrm{acl}(B)$. Allora

$$b \in \mathrm{acl}(aB) \qquad \Longleftrightarrow \qquad a \in \mathrm{acl}(bB)$$

dove con $aB \coloneqq B \cup \{a\}$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $a \in \mathrm{acl}(bB)$ e $b \notin \mathrm{acl}(aB)$.

Sia $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}(B)$ tale che

$$\models \varphi(a, b) \wedge \exists^{\leq n} x \ \varphi(x, b)$$

per qualche $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Consideriamo ora

$$\psi(a, y) : \quad \varphi(a, y) \wedge \exists^{\leq n} x \ \varphi(x, y)$$

con $\psi(a, y) \in \mathcal{L}(aB)$.

Siccome $b \notin \mathrm{acl}(aB)$, allora $\left|\psi(a, \mathcal{U})\right| \geq \omega$, e dunque

$$\left|\psi(a, \mathcal{U})\right| = |\mathcal{U}| \, .$$

Inoltre, per forte minimalità, $\left|\neg\psi(a, \mathcal{U})\right| < \omega$.

Sia M un modello, $B \subseteq M$: allora $M \cap \psi(a, \mathcal{U}) \neq \emptyset$: sia quindi $c \in M \cap \psi(a, \mathcal{U})$. Allora

$$\models \psi(a, c) \wedge \exists^{\leq n} x \ \psi(x, c)$$

ossia $a \in \mathrm{acl}(cB)$.

Dunque $M \supseteq B$ implica $a \in M$. Per la caratterizzazione, $a \in \mathrm{acl}(B)$. Assurdo. ■

Definizione 6.8. *Se $B \subseteq C \subseteq \mathcal{U}$, B è una base di C se*

1. *B è indipendente;*
2. *$C \subseteq \mathrm{acl}(B)$ (o, equivalentemente, se $\mathrm{acl}(B) = \mathrm{acl}(C)$).*

Proposizione 6.9. Se B è un insieme indipendente e $a \notin \mathrm{acl}(B)$, allora

$$B \cup \{a\}$$

è ancora un insieme indipendente.

Corollario 6.10. Se $B \subseteq C \subseteq \mathcal{U}$, sono fatti equivalenti:

1. B è una base di C;
2. B è un sottoinsieme indipendente massimale di C.

Teorema 6.11. (basi di sottoinsiemi di $\mathcal{U}$). Sia $C \subseteq \mathcal{U}$. Allora

1. se $B \subseteq C$ è indipendente, allora B si può estendere ad una base di C;
2. se A e B sono basi di C, allora $|A| = |B|$.

Definizione 6.12. *Sia $C \subseteq \mathcal{U}$ algebricamente chiuso (ossia $C = \operatorname{acl}(C)$) e sia A una base di C. Allora $\dim(C) \coloneqq |A|$ è la <u>dimensione di C</u>*

Definizione 6.13. *Se $a \notin \operatorname{acl}(A)$, a si dice <u>trascendente</u> su A.*

In una struttura fortemente minimale, tutti gli elementi trascendenti hanno lo stesso tipo su A.

Teorema 6.14. Sia $f : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ una mappa elementare, e siano

$$b \notin \operatorname{acl}\Big(\operatorname{dom}(f)\Big); \quad c \notin \operatorname{acl}\Big(\operatorname{rng}(f)\Big).$$

Allora $f \cup \Big\{\langle b, c\rangle\Big\}$ è elementare.

Dimostrazione. Sia a una enumerazione di $\operatorname{dom}(f)$ e sia $\varphi(x, a) \in \mathcal{L}(a)$ (con $|x| = 1$).

Mostriamo $\vDash \varphi(b, a) \iff \varphi\Big(c, f(a)\Big)$.

- <u>Caso 1</u>: $\big|\varphi(\mathcal{U}, a)\big| < \omega$. Allora $\Big|\varphi\Big(\mathcal{U}, f(a)\Big)\Big| < \omega$.

  Poiché $b \notin \operatorname{acl}(A)$ e $c \notin \operatorname{acl}\Big(f(a)\Big)$,

  $$\vDash \neg\varphi(b, a) \land \neg\varphi\Big(c, f(a)\Big).$$

- <u>Caso 2</u>: FINIRE DALLE SLIDE ■

Corollario 6.15. Ogni biiezione fra sottoinsiemi indipendenti di $\mathcal{U}$ è elementare.

Ricordiamo: in qualsiasi teoria T, se $M \vDash T$ e $A \subseteq M$, allora $\operatorname{acl}(A) \subseteq M$. In particolare, ciascun modello è algebricamente chiuso.

Se T è fortemente minimale, questo implica che ogni modello ha una dimensione.

Teorema 6.16. Siano $M, N \preceq \mathcal{U}$ tali che $\dim(M) = \dim(N)$. Allora $M \cong N$.

COMPLETARE CON LA DIMOSTRAZIONE

Se T è fortemente minimale e $\lambda > |\mathcal{L}|$, allora T è λ-categorica.

Infatti: per $A \subseteq \mathcal{U}$, si ha $\big|\operatorname{acl}(A)\big| \leq \big|\mathcal{L}(A)\big| + \omega$ poiché

- ci sono al più $\big|\mathcal{L}(A)\big| + \omega$ formule

- ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ ha al più finite soluzioni.

Se $|M| = \lambda > |\mathcal{L}|$, allora una base deve avere cardinalità λ. Ma ogni due modelli di dimensione λ sono isomorfi.

Morale: i modelli di una teoria fortemente minimale sono determinati a meno di isomorfismi dalla loro dimensione, dunque dalla loro cardinalità se la cardinalità è strettamente maggiore della cardinalità del linguaggio.

Teorema 6.17. Sia N un modello, $|N| \geq |\mathcal{L}|$. Sono fatti equivalenti:

1. N è saturo;
2. $\dim(N) = |N|$.

Vedi questo sito web: `https://www.forkinganddividing.com/`.