

1 Categorie

Definizione 1. Una categoria \mathcal{C} è composta dai seguenti oggetti:

1. una classe $\text{Ob}(\mathcal{C})$ i cui elementi sono detti oggetti di \mathcal{C} ;
2. per ogni coppia di oggetti (X, Y) in $\text{Ob}(\mathcal{C})$: un insieme $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dei morfismi (o delle frecce);
3. per ogni tripla di oggetti (X, Y, Z) in $\text{Ob}(\mathcal{C})$: una mappa

$$\begin{aligned}\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f;\end{aligned}$$

soggetti alle seguenti proprietà:

1. se $X, Y, X', Y' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ e $(X, Y) \neq (X', Y')$, allora

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') = \emptyset$$

2. per ogni quadrupla (X, Y, Z, W) di oggetti in $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e per ogni $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W)$ valga

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;$$

3. per ogni oggetto X in $\text{Ob}(\mathcal{C})$ esiste $\mathbb{1}_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tale che

- (a) per ogni Y in $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e per ogni $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

$$g \circ \mathbb{1}_X = g$$

- (b) per ogni Y in $\text{Ob}(\mathcal{C})$ e per ogni $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$

$$\mathbb{1}_X \circ h = h$$

Notazione: In luogo di $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, quando la categoria è ben specificata, spesso si scriverà

$$X \xrightarrow{f} Y; \quad f : X \longrightarrow Y$$

Proposizione 2. Sia \mathcal{C} una categoria. Per ogni $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ esiste un'unica $\mathbb{1}_X$

Dimostrazione. Sia $\mathbb{1}'_X$ un'altra unità. Allora

$$\mathbb{1}_X = \mathbb{1}_X \circ \mathbb{1}'_X = \mathbb{1}'_X$$

■

Vedi degli esempi di categorie.

2 Topologia Algebrica [CORSO]

2.1 DONE Lezione 1

- Categoria e Categorie-Esempi
- Inverso-Categoriale
- Isomorfismo
- Unicità-inverso
- Funtore-Covariante
- Funtore-Controvariante
- Funzioni-e-isomorfismi
- Trasformazioni-Naturali

2.2 DONE Lezione 2

- R-Moduli
- Morfismi-R-Moduli
- Primo Teorema di Isomorfismo (Moduli)
- Categoria-degli-R-Moduli
- Sottomoduli
- Generatori-Modulo
- Insiemi-linearmemente-indipendenti
- Modulo-Libero
- Modulo-Finitamente-Generato
- Quoziente di modulo FG è FG
- Teorema-della-Base
- Moduli-Quoziente-Mod-Liberi
- Caratterizzazione-Moduli-FG
- Scomposizione-Modulo-Quozienti-Liberi
- PID
- PID-Sottomoduli-sono-liberi
- Torsione-Moduli

2.3 DONE Lezione 3

- Torsione di moduli su un dominio di integrità
- Modulo libero da torsione
- Modulo di torsione
- Modulo libero da torsione finitamente generato è libero
- Rango di un modulo FG
- Teorema fondamentale dei moduli finitamente generati su un PID
- Successione di R-Moduli
- Successione di R-Moduli ESATTA
- Caratterizzazione di alcune successioni esatte di R-Moduli
- SEC
- Teorema di Spezzamento SEC
- SEC con modulo finale libero
- Funtore da RMod a Rmod - Torsione

2.4 DONE Lezione 4 [100%]

- Lemma del cinque
- Complesso di catene
- Categoria Complessi di Catene
- Modulo di omologia dei complessi di catene
- Morfismo tra complessi di catene induce morfismo tra moduli di omologia
- Funtore tra ChR e RMod
- Zig-Zag Lemma (studiare dim)

2.5 DONE Lezione 5 [100%]

- Omotopia tra funzioni continue
- Omotopia tra morfismi di complessi di catene
- Funtore di omologia di funzioni omotope
- Categoria omotopica dei complessi di catene
- Complessi di catene omotopicamente equivalenti
- Complesso di catene aciclico
- Complesso di catene contraibile

- Complesso di catene contraibile è aciclico (studiare dim)
- Complesso di catene aciclico libero è contraibile (studiare dim)
- Indipendenza Affine
- Simplessi
- Simplesso Standard
- Faccia di un simplesso
- Complesso Simpliciale
- Sottocomplesso Simpliciale
- Supporto di un complesso simpliciale
- Complesso Simpliciale generato da un simplesso
- Topologia debole di un complesso simpliciale
- Scheletro di un complesso simpliciale
- Complesso Simpliciale totalmente ordinato

2.6 DONE Lezione 6 [100%]

- Modulo delle catene simpliciali
- Mappe di bordo tra moduli di catene simpliciali
- Complesso di catene simpliciali
- Omologia Simpliciale
- Notazione per i simplessi
- Calcolo dell'omologia simpliciale per il complesso di catene generato da un 2-simplesso
- Omologia Simpliciale per il complesso di catene simpliciali di un complesso simpliciale generato da un generico simplesso
- Complesso Augmentato di un complesso simpliciale
- Omologia Ridotta di un complesso simpliciale
- Complesso di catene relative
- Omologia Simpliciale Relativa
- Successione esatta di una coppia di complesso e sottocomplesso in omologia

2.7 DONE Lezione 7 [100%]

- Mappa simpliciale
- Categoria di complessi e mappe simpliciali

- Funtore diesis da complessi simpliciali a complessi di catene
- Funtore di omologia da Categoria- Pl a categoria R-Mod
- Funtore da complessi simpliciali a spazi topologici
- Simplesso singolare
- Operatori di facciata del simplesso standard
- Mappa di bordo tra moduli di catene singolari
- Omologia Singolare

2.8 DONE Lezione 8 [100%]

- Funtore da Top a ChR
- Funtore di omologia singolare
- Riassunto funtori di omologia
- Calcolo dell'omologia del punto
- Significato geometrico del modulo di omologia singolare 0
- Complesso di catene singolare Augmentato
- Omologia Singolare Ridotta
- Spazio topologico aciclico
- Insieme stellato
- Estensione di un simplesso singolare in uno spazio stellato
- Insieme stellato è spazio topologico aciclico
- Coppia topologica
- Complesso di catene singolari relative
- Omologia Singolare Relativa
- Successione esatta di una coppia topologica

2.9 DONE Lezione 9 [100%]

- Teorema dell'invarianza per omotopia
- Spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno moduli di omologia singolare isomorfi
- Spazio topologico contraibile
- Spazio topologico contraibile è aciclico
- Retratto di uno spazio topologico
- Retratto di deformazione di uno spazio topologico

- Retratto di deformazione forte di uno spazio topologico
- Inclusione di un retratto induce iniezione in omologia singolare
- Categoria-TopP
- Funtore da TopP a ChR - diesis
- Funtore da TopP a RMod - di omologia
- Diagramma commutativo dell'omologia di due coppie topologiche

2.10 DONE Lezione 10 [100%]

- Equivalenze omotopiche tra coppie topologiche induce isomorfismo tra omologia singolare relativa
- Gruppo abelianizzato
- Ogni funzione da un gruppo ad un gruppo abeliano fattorizza tramite il gruppo abelianizzato
- Funtore da Grp a Ab
- Teorema di Hurewicz (studiare dimostrazione)

2.11 Lezione 11 [91%]

- Mappa naturale tra il funtore del gruppo di omotopia e il primo gruppo di omologia
- Teorema di Escissione
- Sottocomplesso di catene
- Complesso di catene Somma
- Quoziente di complesso di catene e sottocomplesso
- Complesso di catene Immagine
- Morfismo tra complessi di catene
- SEC di Complessi di Catene
- Teoremi di isomorfismo
- Complesso di catene singolare somma
- Complesso di catene singolare intersezione
- Calcolo dell'omologia singolare della sfera e dell'omologia singolare relativa del disco rispetto alla sfera TODO

2.12 Lezione 12 [60%]

- Suddivisione baricentrica
- Mappa di suddivisione tra complessi di catene singolari TODO

- Mappa di suddivisione è omotopa a identità
- Mesh di un elemento del modulo delle catene singolari TODO
- Teorema di Escissione

2.13 Lezione 13 [88%]

- Somma diretta di complessi di catene
- Omologia della somma diretta di complessi di catene
- Teorema di Mayer-Vietoris
- Prodotto wedge di spazi topologici puntati
- Calcolo dell'omologia singolare del toro TODO
- Teorema del punto fisso di Brower
- Omologia Locale
- Omologia Locale di una varietà topologica
- Teorema di invarianza della dimensione

2.14 Lezione 14 [88%]

- Grado di un endomorfismo della sfera
- Zig-Zag Lemma per due SEC con funzioni finali opposte
- Grado di una matrice ortogonale come endomorfismo della sfera
- Gruppo ortogonale speciale è connesso per archi TODO?
- Endomorfismo di una sfera senza punti fissi è omotopa alla mappa antipodale
- Teorema Fondamentale dell'Algebra
- Coppia topologica buona
- Contrazione di un sottospazio topologico ad un punto
- Omologia Singolare Relativa di una coppia topologica buona

2.15 DONE Lezione 15 [100%]

- Attaccamento di una k-cellula a uno spazio topologico
- Omologia per attaccamento di k-cellula
- CW-complesso

2.16 DONE Lezione 16 [100%]

- CW-complesso
- Struttura di CW-complesso per spazio proiettivo reale
- Unione finita di compatti è compatta
- Struttura di CW-complesso per spazio proiettivo complesso
- Omologia singolare di CW-complessi
- Complesso di catene cellulari
- Omologia Cellulare

2.17 Lezione 17 [57%]

- Sistema diretto
- Limite diretto
- Funtore covariante applicato ad un sistema diretto
- Omologia singolare di CW-complessi come limite diretto
- Omologia singolare di CW-complessi
- Calcolo esplicito della mappa di bordo per il complesso di catene cellulari: [Complesso di catene cellulari](#)
- Calcolo dell'omologia singolare del toro

2.18 Lezione 18 [25%]

- Mappe di bordo tra moduli di catene cellulari dello spazio proiettivo reale
- Proposizione sull'omologia singolare per CW-cpx: Omologia singolare di CW-complessi
- Teorema di Confronto tra omologia singolare e simpliciale
- Funtore esatto e funtori derivati sinistri?

2.19 Lezione 19 [0%]

- Prodotto tensoriale di moduli
- Funtore prodotto tensoriale
- Modulo graduato
- Complesso di catene come modulo graduato
- Prodotto tensoriale di complessi di catene
- Omologia del prodotto tensoriale di complessi di catene: [Teorema di Künneth](#)

2.20 Lezione 20

- Teorema di Künneth
- Teorema dei coefficienti universali

3 Morfismo inverso (Teoria delle Categorie)

Definizione 1. Sia \mathcal{C} una *Categoria*, X, Y oggetti in \mathcal{C} . Dato $f : X \rightarrow Y$:

- un inverso destro di f è $g : Y \rightarrow X$ tale che

$$f \circ g = \mathbb{1}_Y;$$

- un inverso sinistro di f è $g : Y \rightarrow X$ tale che

$$g \circ f = \mathbb{1}_X;$$

- un inverso bilatero di f è $g : Y \rightarrow X$ tale che

$$f \circ g = \mathbb{1}_Y, \quad g \circ f = \mathbb{1}_X;$$

4 Isomorfismo

4.1 Definizione Categoriale

Sia \mathcal{C} una *categoria* e sia $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$; se f ammette un *inverso bilatero* g , allora

- f è un **isomorfismo**;
- g è l'inversa di f , $g = f^{-1}$ (*l'inverso è unico*)
- X e Y sono **isomorfi**. Scriviamo $X \cong Y$.

5 Unicità dell'inverso

5.1 Teoria delle Categorie

Proposizione 1. Sia \mathcal{C} una categoria, siano $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ e sia $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tale che i morfismi

$$g_s, g_d \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

siano g_s l'*inverso destro* di f , e g_d l'*inverso sinistro* di g .

Allora $g_d = g_s$ e l'inverso è unico.

Dimostrazione. Consideriamo il diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbb{1}_Y & & & \\
 & & \swarrow & \curvearrowright & \searrow & & \\
 Y & \xrightarrow{g_d} & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g_s} & X \\
 & & \curvearrowleft & \nearrow & & & \\
 & & \mathbb{1}_X & & & &
 \end{array}$$

È noto che $g_s \circ f = \mathbb{1}_X$ e $f \circ g_d = \mathbb{1}_Y$ poiché inverse. Per associatività

$$g_s \circ (f \circ g_d) = (g_s \circ f) \circ g_d$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 g_s \circ \mathbb{1}_Y &= g_s \circ (f \circ g_d) \\
 &= (g_s \circ f) \circ g_d = \mathbb{1}_X \circ g_d
 \end{aligned}$$

e dunque $g_s = g_d$.

Inoltre, se g'_s fosse un altro inverso sinistro, allora

$$g'_s = g_d = g_s.$$

■

6 Istituzioni di Geometria [CORSO]

6.1 Istituzioni di Geometria (9 cfu)

6.1.1 Geometria Algebrica (3 cfu)

- Anello-dei-polinomi
- Campo Algebricamente Chiuso
- Spazio Affine
- Varietà Algebrica Affine
- Spazio Proiettivo
- Polinomi Omogenei
- Varietà Algebrica Proiettiva
- Infinitezza Campi alg chiusi
- Insiemi finiti di punti dello spazio proiettivo
- Insiemi finiti di punti dello spazio affine come zeri di due polinomi
- Anello dei polinomi ad ideali principali
- Anello Noetheriano
- Ideali Generati di un Anello Noetheriano

- Teorema della Base di Hilbert
- Campi sono anelli Noetheriani
- Zeri di un ideale generato in uno spazio affine
- Ideale di polinomi omogeneo
- Luogo di zeri di un ideale omogeneo
- Varietà Algebriche luogo di zeri di finiti polinomi
- Topologia di Zariski affine
- Topologia di Zariski proiettiva
- Ideale di un sottoinsieme
- Zeri di un ideale di un sottoinsieme affine
- Zeri di un ideale di un sottoinsieme proiettivo
- Spazio topologico Noetheriano
- Topologia di Zariski affine è noetheriana
- Caratterizzazione topologia noetheriana
- Spazio topologico Noetheriano è compatto
- Sottospazio irriducibile
- Scomposizione di sp top noetheriani in componenti irriducibili
- Caratterizzazione di sottospazi affini irriducibili tramite ideali
- Spazio affine è irriducibile
- Morfismo tra varietà algebriche affini
- Morfismo tra varietà algebriche affini è continuo
- Morfismo tra varietà algebriche affini non è chiuso
- Morfismo tra varietà algebriche proiettive
- Curva Razionale Normale
- Mappa di Veronese
- Varietà Algebrica Quasi Proiettiva QP
- Morfismo tra varietà algebriche QP
- Mappa di Segre
- Proiezioni da prodotti di varietà proiettive sono morfisi
- Copie dello spazio proiettivo dentro la varietà di Segre sono lineari
- Varietà proiettiva dentro prodotti di spazi proiettivi

- Prodotti di varietà QP
- Grafico di un morfismo proiettivo è varietà
- Proiezione su un iperpiano dentro allo spazio proiettivo
- Teorema proiezione su un iperpiano di una varietà è varietà
- Fattori non costanti comuni tra polinomi
- Risultante per polinomi in più variabili
- Cono in uno spazio proiettivo
- Morfismo da varietà proiettiva a varietà qp è chiuso
- Morfismo da varietà proiettiva connessa allo spazio affine unidimensionale è costante
- Ipersuperficie dello spazio proiettivo interseca ogni varietà connessa diversa da un solo punto
- Radicale di un ideale
- Radicale di un ideale è ideale
- Ideale Radicale
- Ideale radicale e anello quoziante
- Ideale primo è radicale
- Nullstellensatz
- Nullstellensatz debole
- Nullstellensatz debole implica Nullstellensatz
- Corrispondenza ideali radicali e chiusi algebrici dello spazio affine
- Anello delle coordinate
- Algebra su un campo
- Algebra su un campo finitamente generata
- K-Algebre fin generate e ridotte come anelli delle coordinate di varietà affini

6.1.2 Geometria Differenziale

- Varietà Topologica
- Esempi fondamentali di varietà topologiche
- Immagini tramiti omeomorfismi di varietà topologiche sono varietà topologiche
- Atlante topologico
- La sfera n-dimensionale è varietà topologica
- Spazio proiettivo è varietà topologica

- Spazio delle matrici reali invertibili è varietà topologica
- Gruppo lineare complesso è varietà topologica
- Connessione per archi di varietà topologiche
- Cambio di carte per un atlante topologico
- Atlante astratto
- Compatibilità tra atlanti astratti e varietà topologiche
- Atlante topologico differenziabile
- Atlanti differenziabili compatibili
- Struttura Differenziabile
- Esistenza e unicità di una struttura differenziabile per ogni atlante
- Esempi fondamentali di varietà differenziabili
- Varietà Topologica omeomorfa a varietà differenziabile ne eredita la struttura
- Varietà topologiche in dimensione minore uguale a tre hanno struttura differenziabile
- Strutture differenziabili sulla sfera 7 dimensionale
- Prodotto di varietà differenziabili è varietà differenziabile
- Toro ha struttura di varietà differenziabile
- Teorema dell'inversa locale
- Teorema della funzione implicita
- Differenziale del determinante di una matrice reale
- Gruppo lineare speciale è varietà differenziabile
- Gruppo ortogonale è una varietà differenziabile
- Gruppo ortogonale è sconnesso e compatto
- Funzioni C^{infinity} tra varietà differenziabili
- Restrizione di funzioni reali C^{infinity} su varietà differenziabili definite in forma implicita è ancora C^{infinity}
- Lemma di incollamento tra funzioni C^{infinity} tra varietà differenziabili
- Funzione sulle carte indotta da funzione C^{infinity} tra due varietà è C^{infinity}
- Composizione di funzioni C^{infinity} è C^{infinity}
- Diffeomorfismo tra varietà differenziabili
- Diffeomorfismo tra le strutture differenziali sui numeri reali
- Gruppo dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile

- Rivestimento
- Rivestimenti e gruppo fondamentale
- Teorema del rivestimento universale
- Rivestimento n:1
- Teorema sui rivestimenti di varietà differenziabili
- Germi di funzioni
- Spazio dei germi di funzioni è algebra reale
- Derivazione su una varietà differenziabile
- Derivazioni Canoniche su una varietà differenziabile
- Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile
- Teorema sulla base dello spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile
- Cambio di base sullo spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile
- Curve su varietà e loro derivata
- Vettori dello spazio tangente ad una varietà in un punto come derivate di curve
- Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili
- Differenziale di composizione di funzioni tra varietà
- Differenziale di diffeomorfismo tra varietà è isomorfismo
- Differenziale in coordinate locali su una varietà differenziabile
- Cambiamento del differenziale in coordinate locali tramite un cambio di coordinate su varietà differenziabili
- Immersione di varietà differenziabili
- Sommersione di varietà differenziabili
- Embedding di varietà differenziabili
- Immersione iniettiva chiusa è embedding
- Sottovarietà differenziabile
- Esempio di sottovarietà tramite il teorema della funzione implicita
- Teorema delle slice delle sottovarietà
- Teorema del rango per funzioni reali
- Teorema della funzione implicita tra varietà differenziabili
- Immersione da compatti è embedding
- Immagine dello spazio tangente ad un punto di una sottovarietà tramite il differenziale dell'immersione

- Restrizione di funzioni a sottovarietà e loro differenziale
- Funzione Propria
- Compattezza e Compattezza per successioni
- Funzioni Cinfintio tra varietà e proprie sono chiuse
- Teoremi di Whitney
- Fibrato tangente
- Atlante differenziabile induce una topologia
- Campo vettoriale su una varietà differenziabile
- Componenti locali di un campo vettoriale
- Componenti locali di un campo vettoriale sono Cinfinito
- Azione di un campo vettoriale su una funzione
- Funzioni da una varietà ai reali Cinfinito
- Azione di un campo vettoriale su una funzione è Cinfinito
- Insieme dei derivatori di una varietà
- Insieme dei campi vettoriali come spazio vettoriale reale e come modulo
- Push-Forward di campi vettoriali
- Campi vettoriali F-riferiti
- Differenziale dell'inclusione del fibrato tangente ad una sottovarietà
- Restrizione di un campo vettoriale ad una sottovarietà
- Varietà Differenziabile Pettinabile
- Pettinabilità delle sfere
- Varietà Differenziabile Parallelizzabile
- Parallelizzabilità delle sfere
- Bracket di campi vettoriali
- Scrittura locale del bracket di campi vettoriali
- Bracket di campi vettoriali F-riferiti
- Bracket di campi vettoriali ristretti a sottovarietà

7 Istituzioni di Analisi [CORSO]

7.1 Istituzioni di Analisi (9 cfu)

8 Istituzioni di Logica [CORSO]

8.1 Istituzioni di Logica (9 cfu)

8.1.1 Fondamenti di Logica

- Linguaggio del prim'ordine
- Estensione di un linguaggio del prim'ordine
- Struttura del prim'ordine
- Morfismo tra strutture del prim'ordine
- Immersione elementare
- Sottostruttura del prim'ordine
- Sottostruttura generata da un insieme
- Termine del prim'ordine
- Formula del prim'ordine
- Variabile libera di una formula
- Enunciato del prim'ordine
- Formula con parametri
- Chiusura universale di una formula
- Formula valida
- Formula soddisfacibile
- Sostituzione di termini in una formula
- Interpretazione di un termine
- Soddisfazione di una formula
- Formula consistente
- Insieme definito da una formula del prim'ordine
- Insieme di formule indipendenti
- Tipo - Teoria dei Modelli
- Modello di un insieme di formule
- Conseguenza logica
- Equivalenza logica tra due enunciati

- Teoria del Prim'ordine
- Insieme di assiomi per una teoria
- Teoria massimamente consistente
- Teoria soddisfacibile
- Teoria completa
- Caratterizzazione di teoria completa
- Strutture elementarmente equivalenti
- Sottostruttura elementare
- Teoria di una struttura
- Teoria di una struttura con parametri
- Modello assiomatizzabile

8.1.2 Basic Set Theory

Section 16

- Paradosso di Russel
- Morse Kelly Set Theory
- Sequenze e stringhe
- Potenza di una classe
- Prodotto cartesiano generalizzato
- Axiom of Choice
- Funzione di scelta
- Operazione su una classe MK
- Axiom of global Choice
- Zermelo Franklin Set Theory

Section 18

- Relazione left-narrow MK
- Relazione well-founded MK
- Buon ordine MK
- Classe ben ordinata ammette una classe-funzione di scelta MK
- Classe Transitiva
- Ordinali

- Insiemi ben ordinati sono isomorfi ad un ordinale unico
- Proprietà degli ordinali
- Ordinale omega
- Ordinale limite
- Topologia sugli ordinali
- Classe finita e infinita MK
- Classe ben ordinabile MK
- Cardinali
- Cardinalità
- Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder
- Numeri di Hartogs
- Numero di Hartogs di un ordinale
- Aritmetica dei cardinali
- Ordine prodotto
- Ordine lessicografico
- Buon ordine di Godel per OrdxOrd
- Order Type del prodotto cartesiano di un cardinale è il cardinale stesso
- Insieme dei sottoinsiemi con order type fissato
- Equipotenza dell'insieme delle sequenze finite

Section 19

- Funzione Ricorsiva
- Teorema di Ricorsione - caso speciale
- Chiusura transitiva di una relazione MK
- Teorema di Ricorsione
- Rango di una relazione well-founded
- Collasso di Mostowski
- Relazione estensionale
- Lemma del collasso di Mostowski
- Punto Fisso di funzioni continue e crescenti sugli ordinali
- Funzione Aleph

- Aritmentica per gli ordinali
- Rango di un insieme
- Gerarchia di Von Neumann
- Modelli di ZFC nella Gerarchia di Von Neumann *
- Complessità di una formula nel linguaggio della teoria degli insiemi * -> Complessità di una formula
- Formula assoluta
- Assoltezza delle formule tra un insieme transitivo e un modello di MK *
- Insieme transitivo e assiomi di ZFC *

Section 20

- Cardinal exponentiation
- Collezione dei sottoinsiemi ben ordinabili di cardinalità limitata
- Classe funzione Beth
- Cardinalità dei reali
- Ipotesi del continuo
- Ipotesi del continuo generalizzata
- CH e GCH sono indipendenti dall'assiomatizzazione della Teoria degli Insiemi
- Relazione tra reali e omega1
- Forme deboli di AC
- Esiste funzione di scelta sse ben ordinabile
- Axiom equivalenti ad AC *:
 - Zorn Lemma
 - Weak Zorn Lemma
 - MaxHaus
 - Teichmüller-Tukey Lemma
 - Axiom of Multiple Choices
 - Kurepa's maximality principle
- Classe di equivalenza di Scott *
- Order type di una classe qualunque *
- Cardinalità senza AC
- AC e comparabilità delle cardinalità *

- Axiom of countable Choice *
- Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile *
- Axiom of dependent Choices *

Section 21

- Somma di cardinali
- Prodotto di cardinali
- Proprietà di prodotto e somma generalizzata di cardinali
- Somma generalizzata di cardinali è minore del supremum dei cardinali
- Cardinalità dell'unione di insiemi è minore del supremum della cardinalità degli insiemi per la cardinalità dell'insieme degli indici
- Somma di cardinali è minore del prodotto di cardinali
- Teorema di Cantor
- Funzione cofinale *
- Proprietà di funzioni cofinali e cofinalità di un ordinale *
- Ordinale regolare *
- Cardinali infiniti hanno numero di Hartogs regolare *
- Ogni cardinale singolare è estremo superiore di una sequenza crescente di cardinali regolari *
- Ordinale elevato alla sua cofinalità è maggiore a se stesso *
- Formula di Hausdorff *
- Teorema di Bukovsky-Hechler *
- Operazione su una classe MK *
- Chiusura rispetto ad una collezione di operatori di una sottoclasse *
- Maggiorazioni della cardinalità della chiusura rispetto ad una collezione di operatori *
- Topologia sugli ordinali *
- Ordinale è compatto sse zero o successore *
- Spazio topologico totalmente disconnesso *
- Spazio topologico regolare *
- Spazio topologico completamente regolare *
- Spazio topologico completamente regolare che non surietta su \mathbb{R} è totalmente disconnesso *
- Caratterizzazione funzioni continue e monotone da sottoinsieme degli ordinali agli ordinali *
- Caratterizzazione di sottoinsiemi chiusi e illimitati in un cardinale regolare o Ord *

- Club set *
- Club set di un cardinale è un filtro proprio del cardinale *
- Filtro kappa-completo *
- Club set di un cardinale è un filtro k-completo *
- Ordinale chiuso rispetto ad una operazione *
- Insieme degli ordinali chiusi rispetto ad una operazione e sottoinsiemi di un cardinale chiusi e illimitati *
- Intersezione diagonale di una sequenza *
- Intersezione diagonale di una sequenza di chiusi e illimitati di un cardinale è un chiuso e illimitato *
- Sottoinsieme stazionario di un cardinale *
- Lemma di Fodor *
- [BROKEN LINK: c37241a6-6c89-469b-b08c-bfd075ee6737] *
- Cardinale limite forte *
- Modelli di ZFC nella Gerarchia di Von Neumann *
- Universo *
- Universo se e solo se nella gerarchia di Von Neumann di un cardinale fortemente inaccessibile *

8.1.3 Model Theory

Capitolo 1 (1)

- Esercizio 1.17

Capitolo 2 (22)

- Strutture elementarmente equivalenti su un sottoinsieme (flashcard fatte)
- Esercizi 2.16, 2.17, 2.18, 2.19 (flashcard fatte)
- Analisi non-standard (flashcard fatte)
- Lemma 2.21
- Proposizione 2.22
- Proposizione 2.24
- Esercizi 2.26, 2.29, 2.30, 2.31, 2.32, 2.33, 2.34
- Chiusura logica di una teoria
- Teoria massimamente soddisfacibile (flashcard fatte)
- Esecizi 2.52, 2.53

- Esercizi 2.43, 2.44
- Lemma 2.54
- Cardinalità dell'insieme delle formule di un linguaggio del prim'ordine
- Teorema 2.55
- Esercizi 2.56, 2.57
- Notazione TEORIA DEI MODELLI

Capitolo 3 (0) Niente

Capitolo 4 (0) Niente

Capitolo 5 (2)

- Teorema di Compattezza
- Tipo - Teoria dei Modelli
- Tipo finitamente consistente è consistente
- Esercizio 5.9
- Immersione elementare induce isomorfismo
- Teorema 5.7
- Teorema 5.8

Capitolo 6 (8)

- Mappe parziali tra strutture del prim'ordine
- Ordine
- Lemma 6.1
- Teoria lambda-categorica
- Corollario 6.4
- Esercizi 6.8, 6.10
- Teoria dei grafi
- Esiste un grafo aleatorio
- Corollario 6.16
- Esercizi 6.18, 6.19, 6.22.(1->2)

Capitolo 7 (5)

- Categorie di modelli e morfismi parziali
- Componente connessa di una categoria di modelli e morfismi parziali
- Modello lambda ricco
- Modello lambda universale
- [BROKEN LINK: 47112750-3aa0-48a1-a11c-4860dc95be50]
- Caratterizzazione di modello lambda-ricco
- Lemma di estensione di morfismi tra modelli ricchi
- Teorema 7.8
- Teorema 7.11
- Teoria con eliminazione dei quantificatori
- Esempio 7.15
- Esercizi 7.16 e 7.17

Capitolo 8 (10)

- Teoria dei gruppi abeliani *
- Proposizioni 8.5
- Teoria dei gruppi abeliani privi di torsione *
- Proposizione 8.7 *
- Teoria dei gruppi abeliani divisibili *
- Lemma 8.9 *
- Corollario 8.10 *
- Corollario 8.11 *
- Proposizione 8.18 *
- Teoria dei campi
- Lemma 8.20 *
- Corollari 8.21, 8.22, 8.23 *

Capitolo 9 (10)

- Soddisfazione di un tipo e mappa elementare
- Modello lambda saturo
- Catena elementare di modelli

- Teoremi 9.3, 9.5
- Modello MOSTRO
- Osservazione 9.24
- Gruppo degli automorfismi che fissano un sottoinsieme e tipo di un elemento
- Esercizi 9.30, 9.28, 9.31, 9.32, 9.34, 9.33, 9.35 (per il 9.33: [mathoverflow](#))

Capitolo 10 (0) Niente

Capitolo 11 (12)

- Elementi algebrici e definibili - Teoria dei Modelli
- Teorema 11.2, 11.3
- Automorfismo e chiusura algebrica in un modello mostro
- Struttura minimale
- Teorema 11.17
- Base di un insieme dentro un modello mostro
- Teorema 11.19, 11.20, 11.23
- Esercizi 11.7, 11.13, 11.14, 11.16, 11.26, 11.27

8.1.4 Ricorsione

Capitolo 1: Cenni di ricorsività

1. Sezione 1.1: Funzioni ricorsive
 - Funzioni primitive ricorsive (flascard fatte)
 - Proprietà di chiusura delle funzioni primitive ricorsive (flascard fatte)
 - Quoziente e resto sono funzioni ricorsive primitive (flascard fatte)
 - Biiezione canonica tra N e N^2 (flascard fatte)
 - Operatore di minimizzazione non limitato (flascard fatte)
 - Funzioni ricorsive (flascard fatte)
 - Inversa di una funzione totale iniettiva e ricorsiva è ricorsiva (flascard fatte)
 - Tesi di Church (flascard fatte)
 - Funzioni ricorsive in più dimensioni (flascard fatte)
2. Sezione 1.2
 - Insieme ricorsivo (flascard fatte)
 - Insieme ricorsivo primitivo (flascard fatte)

- Proprietà di chiusura degli insiemi ricorsivi (flascard fatte)
 - Funzioni ricorsive definite per casi (flascard fatte)
 - Funzioni ricorsive per minimizzazione su un predicato (flascard fatte)
 - Grafico di una funzione ricorsiva è ricorsiva (flascard fatte)
3. Sezione 1.3: Insiemi semiricorsivi
- Insieme semiricorsivo (flascard fatte)
 - Proprietà di chiusura degli insiemi semiricorsivi (flascard fatte)
 - Teorema di Post (flascard fatte)
 - Insieme semiricorsivo come range di funzioni ricorsive (flascard fatte)
 - Insieme ricorsivo come range di funzione ricorsiva totale crescente (flascard fatte)
 - Funzioni parziali con grafico semiricorsivo sono ricorsive (flascard fatte)
4. Sezione 1.4: Ricorsività su altri insiemi e codifiche
- Codifica di un insieme numerabile (flashcard fatte)
 - Insiemi ricorsivi tramite codifica (flashcard fatte)
 - Teorema Cinese dei resti (flashcard fatte)
 - Funzione beta di Gödel (flashcard fatte)
 - Codifica delle sequenze finite tramite beta di Gödel (flashcard fatte)
5. Sezione 1.5: Alcune applicazioni della codifica di sequenze
- Funzione memoria (flashcard fatte)
 - Generalizzazione schema di Ricorsione (flashcard fatte)
 - Teorema di Forma Normale di Kleene (flashcard fatte)
 - Grafico di una funzione ricorsiva parziale è semiricorsivo (flashcard fatte)
 - Funzione ricorsiva sse il suo grafico è semiricorsivo (flashcard fatte)
 - Caratterizzazione funzioni ricorsive tramite grafico (flashcard fatte)
 - Insieme semiricorsivo come dominio di funzione ricorsiva parziale (flashcard fatte)
 - Funzione ricorsiva parziale con dominio ricorsivo è restrizione di funzione ricorsiva totale (flashcard fatte)
6. Sezione 1.6: Gerarchia aritmetica
- [BROKEN LINK: a6dd5cae-c225-49d4-8945-602100951278] (flashcard fatte)

Capitolo 2: Definibilità nel modello standard

1. Sezione 2.1: Complessità delle definizioni
 - Complessità di una formula del modello standard (flashcard fatte)
 - Modello standard dell'aritmetica (flashcard fatte)
 - Insieme definibile nel modello standard (flashcard fatte)
2. Sezione 2.2: Ricorsività vs definibilità
 - Definizione equivalente di funzioni ricorsive (flashcard fatte)
 - Funzioni ricorsive vs definibili (flashcard fatte)

Capitolo 3: Teorie formali dell'aritmetica

1. Sezione 3.1: Aritmetica di Peano del second'ordine
 - Aritmetica di Peano del second'ordine (flashcard fatte)
2. Sezione 3.2: Aritmetica di Robinson e aritmetica di Peano del prim'ordine
 - Aritmetica di Robinson (flashcard fatte)
 - Aritmetica di Peano del prim'ordine (flashcard fatte)
 - Numerali (flashcard fatte)
3. Sezione 3.3: Rappresentabilità delle funzioni ricorsive in Q
 - Insieme rappresentato da una formula (flashcard fatte)
 - Aritmetica di Robinson rappresenta funzioni ricorsive totali e prediciati ricorsivi (flashcard fatte)
 - Descrizione modelli dell'aritmetica di Robinson (flashcard fatte)

Capitolo 4: Incompletezza e indecidibilità

1. Sezione 4.1: Aritmetizzazione della sintassi
 - Buona codifica di un linguaggio (flashcard fatte)
 - Teoria ricorsivamente assiomatizzabile (flashcard fatte)
 - Codifica delle dimostrazioni a partire dagli assiomi (flashcard fatte)
2. Sezione 4.2: Primo teorema di incompletezza di Gödel
 - Primo Teorema di Incompletezza di Gödel (flashcard fatte)
 - Teoria Coerente (flashcard fatte)
 - Teoria omega-coerente (flashcard fatte)
 - Teoria completa (flashcard fatte)

3. Sezione 4.3: Decidibilità
 - Teoria decidibile (flashcard fatte)
 - Teoria completa e ricorsivamente assiomatizzabile è decidibile (flashcard fatte)
 - Estensione finita di una teoria decidibile è decidibile (flashcard fatte)
 - Aritmetica di Robinson è essenzialmente indecidibile (flashcard fatte)
 - Teoria decidibile e coerente ha estensione decidibile coerente e completa (flashcard fatte)
4. Sezione 4.4: Teorema di Tarski e Teorema di Church
 - Teorema dell'indefinibilità della verità (flashcard fatte)
 - Teorema di Church (flashcard fatte)

9 Istituzioni di Fisica [CORSO]

L^AT_EX - Gestione Multi-file

Davide Peccioli

10 febbraio 2026

9.1 Lezione 2 - <2025-09-24 Mer>

- Definizione: Vector space over \mathbb{C} .
- Examples of vector spaces.
- Definizione: Linear independent vectors.
- Definizione: Vector subspace.
- Definizione: Span and basis.
- Definizione: Quotient space.
- Definizione: Direct sum of vector spaces.
- Definizione: Cartesian product of vector spaces.
- Definizione: Tensor product of vector spaces.
- Definizione: Inner product on a vector space.
- Definizione: Orthogonal vectors and orthonormal/orthogonal basis.
- Definizione: Kronecker delta.
- Proposizione: Graham-Schmidt.
- Proposizione: Cauchy-Schwartz inequality.
- Definizione: Norm and Norm defined by a scalar product.
- Definizione: Distance and Distance induced by a norm.
- Proposizione: Law of parallelogram and inner product induced by a norm.
- Definizione: Linear map and vector space of linear maps.
- Definizione: Isometric map (Isometry).

9.2 Lezione 3 - <2025-09-26 Ven>

Appunti mandati da Elisa

9.3 Lezione 4 - <2025-09-30 Mar>

- Definizione: Operatore idempotente
 - Definizione: Operazione di Proiezione
 - Proposizione: Caratterizzazione somma di proiettori ortogonali
 - *Completeness relation*
 - Algebra commutativa e rappresentazione di un'algebra in uno spazio vettoriale
 - Definizione: equivalenza di rappresentazioni
 - Rappresentazione somma diretta
 - Cambio di base
- ... Dal libro hassaniMathematicalPhysicsModern2013

9.4 Lezione 5 - <2025-10-01 Mer>

Dal libro di Hassani^[1] (in ordine sparso):

- Definition 6.1.4
- Lemma 6.1.5 (lui ha fatto la dimostrazione, assente sul libro)
- Theorem 6.1.6
- Theorem 6.2.10 + proof
- Introduzione del paragrafo 6.3 (prima delle Proposition 6.3.1)
- Definition 6.4.1
- Proposition 6.4.2
- Theorem 6.4.3 + proof
- Proposition 6.4.4 + proof
- Theorem 6.4.7 + proof
- Theorem 6.4.8 + proof
- Corollary 6.4.9
- Corollary 6.4.13
- Definition 6.4.16
- Lemma 6.4.17 + proof
- Theorem 6.4.18 (solo enunciato, farà la dimostrazione la prossima volta)

10 Funtore Covariante

Definizione 1. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ due categorie. Un funtore covariante

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$$

è una funzione tale che

1. per ogni $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ si ha che $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$;
2. per ogni $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ si ha che

$$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(X), F(Y))$$

tali che

1. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
2. $F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$

Esempio 2. Un funtore covariante è il gruppo fondamentale^[2]:

$$\begin{aligned} \Pi_1 : \mathbf{Top}^* &\longrightarrow \mathbf{Grp} \\ (X, p) &\longmapsto \Pi_1(X, p) \end{aligned}$$

dove se $f : (X, p) \longrightarrow (Y, q)$ il gruppo fondamentale induce

$$\begin{aligned} \Pi_1(f) : \Pi_1(X, p) &\longrightarrow \Pi_1(Y, q) \\ [\gamma] &\longmapsto [f \circ \gamma] \end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} \Pi_1(f \circ g) &= \Pi_1(f) \circ \Pi_1(g) \\ \Pi_1(\text{id}_{(X, p)}) &= \mathbf{1}_{\Pi_1(X, p)}. \end{aligned}$$

Notazione Se F è un funtore covariante e $X \xrightarrow{f} Y$ allora

$$F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

e si indica con $f_* := F(f)$. f_* si dice il push forward di f tramite F .

11 Funtore Controvariante

Definizione 1. Siano $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ due categorie. Un funtore controvariante

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$$

è una funzione tale che

1. per ogni $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ si ha che $F(X) \in \text{Ob}(\mathcal{C}')$;

2. per ogni $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ si ha che

$$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(F(Y), F(X))$$

tali che

$$1. F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$$

$$2. F(\mathbf{1}_X) = \mathbf{1}_{F(X)}$$

Esempio 2. Consideriamo il funtore $\mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}^{[3]}$ tale che

$$X \rightarrow C^0(X) := \{\varphi : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$$

e tale che $X \xrightarrow{f} Y$ venga mandata in

$$\begin{aligned} C^0(X) &\leftarrow C^0(Y) \\ (X \xrightarrow{\varphi \circ f} \mathbb{R}) &\longleftarrow (Y \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Notazione. Se F è un funtore **controvariante** e $X \xrightarrow{f} Y$ allora

$$F(X) \xleftarrow{F(f)} F(Y)$$

e si indica con $f^* := F(f)$. f^* si dice **pull back** di f tramite F .

12 Gruppo-Fondamentale

13 Esempi di categorie

Ecco alcuni esempi di categorie

\mathcal{C}	$\text{Ob}(\mathcal{C})$	$\text{Hom}_{\mathcal{C}}$	\circ
Set	Insiemi	funzioni	composizione di funzioni
Top	Spazi topologici	funzioni continue	composizione di funzioni
Top*	Spazi top. puntati	funzioni continue puntate	composizione di funzioni
Grp	Gruppo	omomorfismi	composizione di funzioni
	Vertici di un grafo Γ	cammini tra due vertici	concatenazione di cammini

Si sono qui viste le categorie:

- [Categoria-Set](#)
- [Categoria-Top](#)
- [Categoria-Top*](#)
- [Categoria-Grp](#)

- 14 **Categoria-Set**
- 15 **Categoria-Top**
- 16 **Categoria-Top***
- 17 **Categoria-Grp**
- 18 **Categoria-VectR**
- 19 **Funtori e isomorfismi**

Proposizione 1. Se $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ è un funtore e $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ sono isomorfi allora in \mathcal{C}' si ha che sono isomorfi:

$$F(X) \cong F(Y)$$

20 Funtore

I funtori tra due Categorie possono essere:

- Funtore-Covariante
- Funtore-Controvariante

21 Trasformazione Naturale

Definizione 1. Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie e siano $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ due funtori covarianti. Una trasformazione naturale da F a G

$$T : F \rightarrow G$$

è l'insieme dei morfismi $T = (T_X)_{X \in \text{Ob}(\mathcal{C})}$

$$T_X : F(X) \rightarrow G(X)$$

per ogni X oggetto in \mathcal{C} tali che, per ogni $X \xrightarrow{f} Y$ in \mathcal{C} il diagramma seguente commuti

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ T_X \downarrow & & \downarrow T_Y \\ G(X) & \xrightarrow{G(f)} & G(Y) \end{array}$$

ovvero

$$T_Y \circ F(f) = G(f) \circ T_X.$$

22 Categoria-Top2

23 R-Moduli

Definizione 1. Sia R un *anello* commutativo con unità. Un R -modulo è un *gruppo abeliano* $(M, +)$ con un'azione di R su M :

$$\begin{aligned}\cdot : R \times M &\longrightarrow M \\ (r, m) &\longmapsto rm\end{aligned}$$

tale che, se $\mathbf{1}$ è l'identità di R

$$\begin{array}{ll} \forall r, s \in R, m \in M & r(sm) = (rs)m \\ \forall r, s \in R, m \in M & (r+s)m = rm + sm \\ \forall r \in R, m_1, m_2 \in M & r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2 \\ \forall m \in M & \mathbf{1}m = m. \end{array}$$

Esempio 2. 1. Se R è un *campo*, allora gli R moduli sono tutti e soli gli *spazi vettoriali* su R .

2. Se $R = \mathbb{Z}$ allora gli \mathbb{Z} -moduli sono tutti e soli i *gruppi abeliani*.

Notazione. Sia M un R -modulo e sia $e \in M$. Il modulo **generato** da e si denota con

$$R \cdot e := \{re : r \in R\}.$$

24 Anello

24.1 Morfismo di Anelli

25 Anello commutativo

26 Anello unitario

27 Anello commutativo con unità

Definizione 1. Un anello commutativo con unità è una struttura algebrica $\langle A, +, \cdot \rangle$ tale che

1. $\langle A, + \rangle$ è un *gruppo abeliano* con elemento neutro 0 o 0_A ; l'inverso additivo si chiamerà opposto;
2. \cdot è associativa, commutativa e con elemento neutro 1_A , 1 (1_A sarà detto *unità* di A);
3. proprietà distributiva di \cdot rispetto a $+$:

$$\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

27.1 Esempi di anelli commutativi con unità

Esempio 2. Sono esempi di anelli commutativi con unità:

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n, A[X]^{[4]}$;
- $F(S, A) = \{\text{insieme delle funzioni tra } S \text{ insieme e } A \text{ anello}\}$, dove

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s), \quad (f \cdot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$$

e inoltre $1_{F(S, A)}$ è la funzione costante 1_A .

- $C(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}^{589}$ per X spazio topologico; sottoanello di $F(X, \mathbb{R})$.

27.2 Sottoanello commutativo con unità

Definizione 3. Se $\langle A, +, \cdot \rangle$ è un anello commutativo con unità, un sottoinsieme $B \subseteq A$ è detto sottoanello se:

- B è chiuso rispetto alle operazioni di $\langle A, +, \cdot \rangle$;
- $1_A \in B$, con $1_B = 1_A$.

Esempio 4. Consideriamo $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$: \mathbb{Z} è un sottoanello di \mathbb{Q} .

Viceversa, $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ è sottoinsieme chiuso rispetto alle operazioni, ma non è sottoanello in quanto non contiene l'unità.

Si consideri invece $B \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$B := \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

B è un anello commutativo con unità (è chiuso per le operazioni, ha una sua unità $1_B := (1, 0)$), ma non è un sottoanello, in quanto $1_B \neq 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = (1, 1) \notin B$.

27.3 Omomorfismo di anelli commutativi con unità

Definizione 5. Se A, B sono anelli commutativi con unità, un omomorfismo di anelli è una funzione

$$f : A \rightarrow B$$

tale che, per ogni $a_1, a_2 \in A$

1. $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2)$;
2. $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2)$;
3. $f(1_A) = 1_B$.

Osservazione. Se $A \subseteq B$ è sottoanello, e

$$\begin{aligned} \iota : A &\hookrightarrow B \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli.

Definizione 6. Un isomorfismo di anelli è un omomorfismo di anelli **biettivo**.

Osservazione. La condizione di cui sopra è sufficiente affinché l'inversa di un isomorfismo sia ancora un omomorfismo.

Proposizione 7. Si ha:

- composizione di omomorfismi è un omomorfismo;
- se $f : A \rightarrow B$ è un isomorfismo, allora $f^{-1} : B \rightarrow A$ è un isomorfismo.

28 Gruppo

28.1 Definizione

Un gruppo è un insieme G dotato di una operazione $* : G \times G \rightarrow G$ tale che

- dati $a, b, c \in G$: $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- esiste $e \in G$ tale che per ogni $a \in G$: $a * e = e * a = a$;
- per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che $a * a' = a' * a = e$.

Si denota con $\langle G, *\rangle$ oppure con $\langle G, *, e \rangle$.

29 Spazio-Vettoriale

30 Campo

31 Morfismo tra R-Moduli

Definizione 1. Siano M, N due R-Moduli. Un **morfismo** da M a N è un omomorfismo di gruppi $f : M \rightarrow N$ tale che

$$\forall a \in R, m \in M : f(a \cdot m) = a \cdot f(m).$$

32 Isomorfismo tra R-Moduli

Definizione 1. Siano M, N due R-Moduli. Se esiste $f : M \rightarrow N$ morfismo tra moduli biettivo e tale che $f^{-1} : N \rightarrow M$ è morfismo tra moduli, allora diciamo:

- $M \cong N$ sono isomorfi;
- f è un isomorfismo.

Proposizione 2. Se $f : M \rightarrow N$ è un morfismo tra moduli biettivo, allora f è un isomorfismo.

33 Morfismo di Gruppi

33.1 Isomorfismo di gruppi

34 Categoria degli R-Moduli

Se R è un [Anello](#) commutativo con unità, allora la categoria **RMod** ha oggetti gli [R-Moduli](#) e morfismi i [Morfismi-R-Moduli](#).

35 Sottomoduli

Sia R un [anello commutativo con unità](#).

Definizione 1. Sia M un [R-modulo](#). N si dice un **sottomodulo** di M , e si scrive

$$N \subseteq_R M$$

un **sottogruppo** di M tale che

$$\forall a \in R, \forall n \in N : an \in N.$$

Proposizione 2. Sia $f : M_1 \longrightarrow M_2$ un [morfismo tra R-moduli](#), e sia (vedi Kernel)

$$\text{Ker}(f) := \{m \in M_1 : f(m) = 0\}$$

Allora $\text{Ker}(f) \subseteq_R M_1$. Inoltre $\text{Im}(f) = f(M_1) \subseteq_R M_2$

35.1 Sottomoduli dell'anello sono ideali

Osservazione. Se si considera R come un [R-modulo](#), allora ogni sottomodulo di R è un suo ideale.

36 Quoziente di moduli

Se M, N sono due [R-moduli](#) e $N \subseteq_R M$ è sottomodulo, allora il [gruppo abeliano](#) del quoziente M/N eredita una struttura di [R-modulo](#) data da

$$\begin{aligned} R \times M/N &\longrightarrow M/N \\ (r, m+N) &\longmapsto rm+N \end{aligned}$$

Anche citato come:

36.1 Quoziente di Moduli

36.2 Quoziente di moduli è invariante per iniezione

Se M, N sono due [R-moduli](#) e $N \subseteq_R M$ è sottomodulo. Sia $\varphi : M \rightarrow P$ un [morfismo di moduli](#).

Lemma 1. Se il morfismo $\varphi : M \rightarrow P$ è **iniettivo**, allora induce un **isomorfismo** con il quoziente tra le **immagini**:

$$\frac{M}{N} \cong \frac{\varphi[M]}{\varphi[N]}.$$

37 Somma di sottomoduli

Se M è un **R -modulo** e $A_1, A_2 \subseteq_R M$ sono sottomoduli, allora si definisce il sottomodulo $A_1 + A_2 \subseteq_R M$:

$$A_1 + A_2 := \{a_1 + a_2 \in M : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$$

Proposizione 1. Si ha che^[5]

$$A_1 + A_2 \cong \frac{A_1 \oplus A_2}{A_1 \cap A_2}$$

sono **isomorfi**.

Dimostrazione. Tale **isomorfismo** è **indotto** dalla seguente **SEC**:

$$0 \longrightarrow A_1 \cap A_2 \xrightarrow{\alpha} A_1 \oplus A_2 \xrightarrow{\beta} A_1 + A_2 \longrightarrow 0$$

I **morfismi** coinvolti sono definiti esplicitamente come segue:

1. Il morfismo α :

$$\begin{aligned} \alpha : A_1 \cap A_2 &\longrightarrow A_1 \oplus A_2 \\ \alpha(x) &= (x, x) \end{aligned}$$

2. Il morfismo β :

$$\begin{aligned} \beta : A_1 \oplus A_2 &\longrightarrow A_1 + A_2 \\ \beta(a_1, a_2) &= a_1 - a_2 \end{aligned}$$

È sufficiente dimostrare l'esattezza.

- Ovviamente α è iniettivo e β è suriettivo. Questo garantisce l'esattezza nei due estremi.
- Resta quindi l'esattezza centrale, ovvero da dimostrare che $\ker(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ ^[6].

$(a_1, a_2) \in \ker \beta$ se e solo se $a_1 - a_2 = 0$ se e solo se $a_1 = a_2$: se e solo se

- $a_1 = a_2 = a \in A_1 \cap A_2$
- $(a_1, a_2) = \alpha(a)$.

■

38 Intersezione di sottomoduli

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum. [DA FINIRE](#)

39 Sottogruppo

39.1 Sottogruppo Normale

40 Modulo generato da un insieme

Definizione 1. Sia R un *anello commutativo con unità*, e sia M un *R-modulo*. Sia $S \subseteq M$ un *sottoinsieme*. L'*R-modulo generato da S* è il più piccolo *sottomodulo* di M che contenga S :^[7]

$$(S) := \bigcap_{\substack{N \text{ sottomodulo di } M \\ S \subseteq N}} N.$$

È possibile mostrare che

$$(S) = \{r_1m_1 + \cdots + r_km_k \mid k \in \mathbb{N}, r_i \in R, m_i \in S \subseteq M\}.$$

Definizione 2. Quando $(S) = M$, S si dice insieme di generatori di M .

Notazione: quando $S = \{e\}$, si indica $R \cdot e := (S)$.

Osservazione. Ogni modulo ammette un insieme di generatori banale,

$$S = M.$$

41 Insieme linearmente indipendente

41.1 Moduli

Definizione 1. Sia R un *anello commutativo con unità*, e sia M un *R-modulo*. $E \subseteq M$ si dice *linearmente indipendente* se per ogni $e_1, \dots, e_n \in E$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in R$

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0 \implies a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Osservazione. Osserviamo che non tutti i moduli hanno insiemi linearmente indipendenti. Consideriamo $\mathbb{Z}_2^{[8]}$ come \mathbb{Z} -modulo (siccome è un [gruppo abeliano](#)):

$$\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

Entrambi gli insiemi $\{\bar{0}\}, \{\bar{1}\}$ sono linearmente dipendenti:

- $\{\bar{0}\}$: per ogni $z \in \mathbb{Z}$: $z \cdot \bar{0} = \bar{0}$
- $\{\bar{1}\}$: $2 \cdot \bar{1} = \bar{0}$, ma 2 non è lo zero di \mathbb{Z} .

Dunque \mathbb{Z}_2 come \mathbb{Z} -modulo non ammette insiemi linearmente indipendenti.

Tuttavia, considerando \mathbb{Z}_2 come \mathbb{Z}_2 -modulo, questo è addirittura uno [spazio vettoriale](#) (poiché \mathbb{Z}_2 è campo).

41.2 Vettori

42 Gruppi \mathbf{Z}_p

Sono tutti i [gruppi](#) della forma

$$\mathbb{Z}_p := \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$$

dove, per $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$,

$$p\mathbb{Z} = \{pz : z \in \mathbb{Z}\}$$

43 Modulo Libero

Sia R un [anello abeliano con unità](#).

Definizione 1. Sia M un [R-modulo](#). $E \subseteq M$ si dice **base di M** se

- E è [linearmente indipendente](#)
- E è un [insieme di generatori](#).

Definizione 2. Un [R-modulo](#) si dice **libero** se ammette una base.

Proposizione 3. Sia M un [R-modulo](#). Sono fatti equivalenti:

1. $E \subseteq M$ è base di M .
2. ogni $m \in M$ si può scrivere **in modo unico** come

$$m = \sum_{i=1}^k a_i e_i \quad a_i \in R, \quad m_i \in E$$

3. M è isomorfo alla somma diretta^[9] # TODO unire i concetti di modulo libero e somma diretta

$$M \cong \bigoplus_{e \in E} R \cdot e \cong R^{(E)}.$$

Esempio 4. R considerato come R -modulo è libero.

44 Estensione morfismo di R -Moduli definito su una base

Sia R un anello abeliano con unità.

Osservazione. Se M, N sono due R -moduli, e E è un base di M , allora è possibile definire un qualsiasi morfismo $\alpha : M \rightarrow N$ dichiarandone l'azione solo sugli elementi di una base E di M , e poi imponendo che sia un morfismo: per ogni $m \in M$:

$$\alpha(m) = \underset{\dagger}{\alpha} \left(\sum_{i=1}^k r_i e_i \right) = \sum_{i=1}^k r_i \alpha(e_i) \quad r_i \in R, e_i \in E$$

dove \dagger è per la caratterizzazione della base.

45 Somma Diretta di moduli

Sia R un anello commutativo con unità, e sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di R -moduli.

La somma diretta degli M_i è l' R -modulo dato da:

$$M := \bigoplus_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i = 0 \text{ salvo un numero finito di indici}\}$$

(dove con $(x_i)_{i \in I}$ si intende una successione).

- La struttura di gruppo di M è la seguente: se $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in M$, si definisce

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} := (x_i + y_i)_{i \in I}$$

- La struttura di R -modulo, invece, è dato dall'azione, per ogni $a \in R$

$$a(x_i)_{i \in I} := (ax_i)_{i \in I}.$$

Spesso la successione $(x_i)_{i \in I}$ si scrive come somma formale $\sum_{i \in I} x_i$.

Notazione: quando per ogni $i \in I$, $M_i = A$, allora si denota:

$$\bigoplus_{i \in I} M_i =: A^{(I)}.$$

Notazione: se $I = \{i\}$, allora $R^{(I)} =: R \cdot i$.

Osservazione. Si noti che la somma diretta è associativa e commutativa (https://it.wikipedia.org/wiki/Somma_diretta)

45.1 Somma diretta dell'anello è modulo libero

Proposizione 1. Sia R un anello commutativo con unità. Allora, per ogni insieme non vuoto I , la somma diretta^[10]

$$R^{(I)}$$

è un modulo libero di rango $|I|^{[11]}$.

Dimostrazione. Consideriamo, per ogni $i \in I$, l'elemento $e_i \in R^{(I)}$,

$$e_i = (e_i(j))_{j \in I}$$

tale che $e_i(j) = \delta_{ij}^{[12]}$ per ogni $j \in I$. Allora ogni $(x_i)_{i \in I} \in R^{(I)}$ può essere scritto come

$$(x_i)_{i \in I} = \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \neq 0}} x_i e_i.$$

L'insieme $\{e_i \mid i \in I\}$ è una base di $R^{(I)}$, detta base canonica. ■

Osservazione. È quindi possibile considerare come base di $R^{(I)}$ proprio l'insieme I , che è possibile considerare come sottoinsieme $I \subseteq R^{(I)}$.

45.2 Somma diretta di morfismi di moduli

Definizione 2. Siano $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $\{N_\alpha\}_{\alpha \in I}$ due famiglie di *R-moduli* indicizzate da un insieme I di cardinalità arbitraria. Sia data una famiglia di *morfismi* $\{f_\alpha : M_\alpha \rightarrow N_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

La **somma diretta della famiglia di morfismi**, denotata con $\bigoplus_{\alpha \in I} f_\alpha$, è l'unico *morfismo di moduli*:

$$\bigoplus_{\alpha \in I} f_\alpha : \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} N_\alpha$$

definito sugli elementi della somma diretta (ovvero le famiglie $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ tali che $x_\alpha \neq 0$ solo per un numero finito di indici) come:

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in I} f_\alpha \right) ((x_\alpha)_{\alpha \in I}) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in I}$$

La definizione è ben posta poiché, se $x_\alpha = 0$ per quasi tutti gli α , allora anche $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ per quasi tutti gli α (essendo f_α morfismo, manda 0 in 0).

46 Modulo Finitamente Generato

Sia R un anello commutativo con unità.

Definizione 1. Un *R-modulo* M si dice **finitamente generato** se esiste $S \subseteq M$ **finito** tale che S sia un insieme di generatori:

$$M = (S).$$

Proposizione 2. Un *R-modulo libero* e finitamente generato ammette una *base* finita.

Osservazione. Immagine di un modulo finitamente generato tramite *morfismo* è ancora un modulo finitamente generato.

47 Teorema della Base

47.1 Moduli

Sia R un *anello commutativo con unità*.

Teorema 1. Ogni *base* di un *R-modulo libero* ha la stessa *cardinalità*.

47.2 Spazi vettoriali

48 Cardinalità

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Se X è un *insieme ben ordinabile*, la *cardinalità* di X è il più piccolo ordinale $|X|$ in *biiezione* con X .

Osservazione. In particolare, se $\alpha \in \text{Ord}$, allora $|\alpha|$ è il più piccolo ordinale $\beta \asymp \alpha$: $|\alpha| \leq \alpha$.

Osservazione. La cardinalità di un insieme, quando esiste, è un *cardinale*.

Proposizione 2. Siano α, β due *ordinali* e si consideri l'*ordinale omega*: ω

1. Se $\alpha \geq \omega$ (vedi *Relazione d'ordine sugli ordinali*), allora

$$|\alpha| = |\text{S}(\alpha)|$$

(vedi *Successore di un insieme MK*)

2. Se $|\alpha| \leq \beta \leq \alpha$ allora $|\alpha| = |\beta|$.
3. $|\alpha| = |\beta|$ se e solo se $\alpha \asymp \beta$ (vedi *Classi equipotenti MK*)
4. $|\alpha| < |\beta|$ se e solo se $\alpha \preceq \beta$.

In particolare, se X, Y sono due *classi ben ordinabili*, allora

- $|X| \leq |Y|$ se e solo se $X \preceq Y$ (vedi *Classe si inietta MK*)
- $|X| = |Y|$ se e solo se $X \asymp Y$ (vedi *Classi equipotenti MK*)

Dimostrazione. 1. Consideriamo

$$f : \text{S}(\alpha) \rightarrow \alpha : \quad \beta \mapsto \begin{cases} \text{S}(\beta) & \beta < \omega \\ \beta & \omega \leq \beta < \alpha \\ 0 & \beta = \alpha \end{cases}$$

Questa è una biiezione, e pertanto $\alpha \asymp \text{S}(\alpha)$ (vedi *Classi equipotenti MK*) e quindi $|\alpha| = |\text{S}(\alpha)|$

2. Sia $f : \alpha \rightarrow |\alpha|$ una biiezione. Dunque, siccome $|\alpha| \leq \beta$

$$f : \alpha \rightarrow \beta$$

è **iniettiva**. Inoltre se $\beta \leq \alpha$ allora $\beta \subseteq \alpha$ (vedi [Proprietà degli ordinali](#)) e dunque l'identità

$$i : \beta \rightarrow \alpha$$

è **iniettiva**. Per il [Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder](#), $\alpha \asymp \beta$.

3. Ovvvia conseguenza delle [proprietà dei cardinali](#).

4. Ovvvia conseguenza delle [proprietà dei cardinali](#).

■

48.1 Definizione senza AC

La definizione precedente è valida per ogni insieme se si assume [AC](#), poiché [AC](#) implica che ogni insieme sia ben ordinabile..

Senza assumere AC si può definire la cardinalità di un insieme X come segue: [DA FINIRE](#)

49 Ogni modulo è quoziante di modulo libero

Sia R un [anello abeliano con unità](#).

Teorema 1. Ogni [R-modulo](#) M è quoziante di un [R-modulo libero](#), ovvero esiste un [R-modulo](#) L , [libero](#), tale che siano [isomorfi](#)

$$M \cong L/N.$$

Dimostrazione. Si consideri il modulo $R^{(M)} := \bigoplus_{m \in M} R$ ^[13] e il [morfismo di R-moduli](#)

$$\begin{aligned} f : R^{(M)} &\longrightarrow M \\ (r_m)_{m \in M} &\longmapsto \sum_{m \in M} m \cdot r_m. \end{aligned}$$

dove la somma è quella del [gruppo](#) $(M, +)$ ^[14]. La somma ha senso in quanto per definizione di somma diretta, è finita. È facile vedere che questo sia effettivamente un morfismo.

- Per il [primo teorema di isomorfismo](#):^[15]

$$f[R^{(M)}] \cong R^{(M)} / \ker f.$$

- Il $\ker f$ è un [sotto-R-modulo](#), $N := \ker f \subseteq_R R^{(M)}$.
- $f[R^{(M)}] = R^{(M)}$, in quanto f è [suriettiva](#)^[16]

Siccome $L := R^{(M)}$ è [modulo libero](#), si ha la tesi. ■

50 Kernel

Definizione 1. Siano A, B *gruppi* con $0_B \in B$ l'elemento neutro. Se $f : A \rightarrow B$, si definisce il *kernel di f* come la *retroimmagine*:

$$\ker f := f^{-1}[\{0_B\}].$$

Proposizione 2. Se f è un *morfismo di gruppi* ed è *iniettiva*, allora $\ker f = \{0_A\}$.

50.1 Invarianza del kernel per iniezioni

Lemma 3. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due *morfismi di gruppi*. Se g è *iniettiva*, allora:

$$\ker(f) = \ker(g \circ f)$$

51 Funzione Suriettiva

51.1 Generalizzazione in MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

51.1.1 Classe-Funzione Suriettiva

52 Caratterizzazione moduli finitamente generati

Sia R un *anello abeliano con unità*.

Proposizione 1. Un *R-modulo M* è *finitamente generato* se e solo se si può scrivere $M \cong L/N^{[17]}$ con L *modulo libero*, L è *finitamente generato*.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Sia $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ un insieme di generatori di M , e si consideri la funzione dalla *somma diretta*

$$\begin{aligned} f : R^{(E)} &\longrightarrow M \\ (r_j)_{e_j \in E} &\longmapsto \sum_{e_j \in E} e_j \cdot r_j. \end{aligned}$$

- f è ovviamente un *morfismo*;
- f è suriettiva, poiché M è *finitamente generato*.

Dunque, per il *Primo teorema di Isomorfismo*

$$M \cong R^{(E)} / \ker f$$

e quindi $L = R^{(E)}$ è *libero e finitamente generato*.

(\Leftarrow) : Sia $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base finita di L , e sia

$$\begin{aligned}\pi : L &\longrightarrow M \cong L/N \\ l &\longmapsto l + N\end{aligned}$$

la **proiezione**; questa è un **morfismo di R -moduli**. Siccome π è suriettiva e $\{e_1, \dots, e_n\}$ genera L , allora

$$\{\pi(e_1), \dots, \pi(e_n)\}$$

genera M . ■

53 Scomposizione di un modulo con quoziante libero

Sia R un **anello abeliano con unità**, e sia M un **R -modulo**.

Proposizione 1. Se $N \subseteq_R M^{[18]}$ è tale che M/N è **libero**, allora esiste $P \subseteq_R M$ tale che

$$P \cong M/N, \quad M \cong P \oplus N.$$

Dimostrazione. Sia

$$\begin{aligned}\pi : M &\longrightarrow M/N \\ m &\longmapsto m + N\end{aligned}$$

la proiezione sul **quoziante**, e sia $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ una **base** di M/N .

Per ogni e_i , fissiamo $\tilde{e}_i \in \pi^{-1}(e_i)$, $\tilde{e}_i \in M$. L'insieme

$$\tilde{E} := \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$$

è **linearmente indipendente**, poiché π è un **morfismo**. Sia P il **modulo generato da \tilde{E}** , ovvero

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \tilde{e}_i : a_i \in R \right\}$$

- **Claim:** $P \cap N = \{0\}$.

Se $m \in P \cap N$ allora $m \in P$, dunque

$$m = \sum_{i=1}^k a_i \tilde{e}_i$$

ma $m \in N$, e quindi $\pi(m) = 0$, dunque

$$0 = \pi(m) = \sum_{i=1}^k a_i e_i$$

dove l'ultima uguaglianza vale poiché π è un **morfismo**.

Siccome E è **linearmente indipendente**, allora $\forall i, a_i = 0$, e dunque $m = 0$.

- **Claim:** $M \cong P \oplus N$.

Sia $\psi : P \oplus N \rightarrow M$, definita come

$$\psi(p, n) := p + n$$

Si verifica facilmente che ψ sia un **morfismo**. Inoltre

- ψ è **suriettiva**: infatti $\forall m \in M$ scriviamo

$$\pi(m) = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

Sia dunque $p := \sum_{i=1}^n a_i \tilde{e}_i \in P$ e sia $n := m - p$.

Allora $n \in N$, siccome

$$\pi(n) = \pi(m - p) = \pi(m) - \pi(p) = \left(\sum_{i=1}^n a_i e_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \underbrace{\pi(\tilde{e}_i)}_{=e_i} \right) = 0.$$

Inoltre $\psi(p, n) = p + n = p + (m - p) = m$.

- ψ è **iniettiva**: se $\psi(p, n) = 0$ allora $n = -p$ e siccome sia N che P sono **sottomoduli** allora

$$n, p \in P \cap N = \{0\}$$

e pertanto $n = p = 0$ e $(n, p) = (0, 0)$.

- **Claim:** $P \cong M/N$:

Consideriamo la restrizione $\pi|_P : P \rightarrow M/N$, che è morfismo.

Inoltre, la funzione

$$\begin{aligned} \sigma : M/N &\longrightarrow P \\ \sum_{i=1}^n a_i e_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i \tilde{e}_i \end{aligned}$$

è il morfismo inverso. ■

54 Funzione Iniettiva

54.1 Generalizzazione in MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

54.1.1 Classe-Funzione iniettiva MK

Una classe funzione F si dice iniettiva se

$$\forall x, y \in \text{dom } F [F(x) = F(y) \rightarrow x = y].$$

Diremo che una classe A si inietta in un'altra B se esiste una classe-funzione iniettiva $F : A \rightarrow B$.

55 PID

Definizione 1. Un anello commutativo con unità R è detto **dominio ad ideali principali (PID)** se

1. $\forall a, a' \in R$, se $aa' = 0$ allora $a = 0$ oppure $a' = 0$ (ovvero R è un **Dominio di integrità**);
2. per ogni **ideale** I di R esiste $a \in R$ tale che $I = (a)$ ^[19]

Esempio 2. Sono PID i campi, \mathbb{Z} e $\mathbb{K}[x]$ ^[20] con la divisione euclidea

56 Ideale

57 Ideale-Generato

57.1 Ideale finitamente generato

Sia A un **Anello**. $I \subseteq A$ **Ideale** si dice finitamente generato se esiste $T \subseteq A$ finito tale per cui

$$I = \langle T \rangle$$

58 Anello dei polinomi

58.1 Notazione

Sia \mathbb{K} un **campo**. Si denota l'**anello dei polinomi a coefficienti in \mathbb{K}** con:

$$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

58.2 Definizione

DA FINIRE

59 PID Sottomoduli di moduli liberi sono liberi

Sia R un **anello commutativo con unità**.

Teorema 1. Se R è un **PID** e M è un **R -modulo libero**, allora per ogni $N \subsetneq_R M$ sottomodulo proprio, N è **libero**.

Inoltre, se M è **finitamente generato**, allora anche N è **finitamente generato**, e vale^[21]:

$$\operatorname{rg} N < \operatorname{rg} M$$

Corollario 2. Se R è un **PID** ogni **R -modulo** è **quoziente** di due **R -moduli liberi**.

Corollario 3. Se R è un **PID** ogni R -modulo finitamente generato è **quoziente** di due R -moduli liberi finitamente generati.

I corollari seguono rispettivamente da “Ogni modulo è quoziente di modulo libero” e “Caratterizzazione moduli finitamente generati”.

60 Torsione di un modulo

Sia R un **PID**, e sia M un **R -modulo**.

Definizione 1. Per ogni $m \in M$ si definisce **annullatore di m** :

$$\text{ann}_R(m) := \{a \in R : am = 0\} \subseteq R$$

Questo è un **ideale** di R . Siccome R è un **PID**, allora

$$\text{ann}_R(m) = (a)$$

per qualche $a \in R$.

Definizione 2. La **torsione di M** è

$$\text{Tor}_R(M) = \{m \in M : \text{ann}_R(m) \neq \{0\}\}.$$

La torsione, quindi, è l'insieme degli elementi del modulo che **hanno** annullatori non banali.

61 Campo Algebricamente Chiuso

Un **Campo** si dice **algebricamente chiuso** se ogni suo **polinomio** ad una variabile non costante ha almeno una **radice**

62 Polinomio

62.1 Coefficiente direttore

63 Luogo di zeri di polinomi

63.1 Polinomi

63.1.1 Osservazione

Se $T \subseteq S \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)), allora

$$V(S) \subseteq V(T).$$

Infatti, se $p \in V(S)$ allora per ogni $f \in S$ si ha che $f(p) = 0$ e, in particolare, per ogni $g \in T \subseteq S$ si ha che $g(p) = 0$ e, pertanto, $p \in V(T)$.

63.2 Polinomi omogenei

63.3 Ideali

63.4 Ideali omogenei

64 Spazio Affine

64.1 Notazione

Si indica con ${}^*\text{spazio affine}$ sul campo \mathbb{K} lo spazio

$$\mathbb{A}_{\mathbb{K}}^n := \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \dots \mathbb{K} = \mathbb{K}^n$$

in cui però si perde la struttura di [Spazio-Vettoriale](#).

65 Varietà Algebrica Affine

65.1 Definizione di base

Sia \mathbb{K} un [Campo Algebricamente Chiuso](#) e sia $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (Vedi [Anello-dei-polinomi](#)). Una **varietà algebrica affine** è il [luogo degli zeri](#) di T : $X = V(T)$, dove

$$V(T) = \{p \in \mathbb{A}^n : f(p) = 0 \ \forall f \in T\}$$

(vedi [Spazio Affine](#))

Alla luce delle proprietà degli [Zeri di un ideale generato in uno spazio affine](#), si può dare la seguente definizione:

65.2 Definizione più complessa

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#). $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ si dice **varietà algebrica affine** se esiste un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che

$$Y = V(I)$$

(vedi [Luogo di zeri](#))

65.3 TODO Notazione

[matematica_lm:geo_alg](#)

Spesso, quando si parla di varietà affine, si fa riferimento ad una [varietà QP isomorfa come varietà QP](#) ad un [chiuso algebrico](#) di \mathbb{A}^n .

65.4 [?] Osservazione

[geo_alg:matematica_lm](#)

Una varietà algebrica affine può incontrare una retta in due modi possibili:

- la varietà contiene la retta;
- la varietà e la retta hanno un numero **finito** di intersezioni.

Infatti,

66 Spazio Proiettivo

- Quello reale è una varietà differenziabile (vedi)

67 Polinomi Omogenei

Sia $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi

67.1 Definizione

Un polinomio $F \in S$ si dice **omogeneo** di grado d se per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha che

$$F(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

67.2 Insiemi di polinomi omogeni

Definiamo

$$\begin{aligned} S^h &= \{\text{polinomi omogenei}\} \subseteq S \\ S_d &= \{\text{polinomi omogeni di grado } d\} \subseteq S \end{aligned}$$

Si ha che S^h è solo un sottoinsieme di S , mentre S_d è un sottogruppo di S , con la convenzione che il polinomio nullo sia di grado qualsiasi, e per di più:

$$S = \bigoplus_{d=0}^{+\infty} S_d$$

(vedi Somma-Diretta).

67.2.1 Dimensione di S_d come spazio vettoriale

Consideriamo $I = (i_0, \dots, i_n)$ un multi-indice; definiamo $x^I \in S$ come

$$x^I := x_0^{i_0} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

Allora l'insieme $\{x^I\}_{I \in D}$, con $D = \{(i_0, \dots, i_n) : \sum i_j = d, i_j \geq 0\}$ è una base di S_d .

Da qui segue che

$$\dim S_d = \binom{n+d}{d}$$

68 Varietà Algebrica Proiettiva

Definizione 1. Sia \mathbb{K} un [Campo Algebricamente Chiuso](#), sia $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) e sia $T \subseteq S^h$ (vedi [Polinomi Omogenei](#)). Una **varietà algebrica proiettiva** è il luogo degli zeri di T .

$$X = V(T) := \{p \in \mathbb{P}^n : f(p) = 0 \ \forall f \in T\}$$

(Vedi [Spazio Proiettivo](#))

In virtù della definizione di [Luogo di zeri di un ideale omogeneo](#) e della [caratterizzazione degli ideali omogenei](#), si ha che, siccome $T \subseteq S^h$,

$$V(T) = V(\langle T \rangle)$$

Dunque, una varietà proiettiva è il luogo di zeri di un ideale omogeneo. Notazione: In \mathbb{P}^n siano, per ogni $i = 0, \dots, n$

$$U_i := \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n : x_i \neq 0\}$$

Osservazione. Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una varietà algebrica proiettiva, e sia $T \subseteq S^h$ tale che $X = V(T)$. Definendo

$$X_i := X \cap U_i \subseteq U_i \subseteq \mathbb{A}^n$$

si ha che X_i è una [Varietà Algebrica Affine](#). Infatti, se $T = \{F_\alpha\}_\alpha$, definendo per ogni α

$$f_\alpha^i(y_1, \dots, y_n) := F_\alpha(y_1 : \dots : 1 : \dots : y_n)$$

dove 1 è all' i -esima posizione (vedi [Deomogenizzazione](#)), si ha che

$$X_i = V(\{f_\alpha^i\}_\alpha)$$

Dunque, ogni varietà algebrica proiettiva può essere vista come unione di varietà algebriche affini.

Osservazione. Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ una varietà affine, e sia $T = \{f_\alpha\}_\alpha \subseteq S$ tale che $Y = V(T)$.

$$Y \subseteq \mathbb{A}^n = U_0 \subseteq \mathbb{P}^n$$

Se per ogni α si definisce

$$F_\alpha(x_0 : \dots : x_n) := x_0^{\deg f_\alpha} f_\alpha \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

(vedi [Omogenizzazione](#)), se $X = V(\{F_\alpha\}_\alpha)$ allora

$$Y = U_0 \cap X.$$

Esempio: [Cubica Gobba](#)

69 Omogenizzazione

Sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)). Si definisce una funzione α , detta, **omogenizzatore** nella variabile x_0 , che associa ad f un **polinomio omogeneo** $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$:

$$F(x_0, \dots, x_n) = x_0^{\deg f} \left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

dove $\deg f$ è il [grado di \$f\$](#) .

70 Grado di un polinomio

71 Deomogenizzazione

Sia \mathbb{K} un [Campo Algebricamente Chiuso](#), e sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) un **polinomio omogeneo**. Si definisce una funzione β_i che **deomogenizza** sulla i -esima coordinata, e che associa ad F il polinomio **non omogeneo**

$$f(y_1, \dots, y_n) := F(y_1, \dots, 1, \dots, y_n)$$

dove l' i -esima coordinata di F è sostituita con l'elemento 1 del [Campo](#)

72 Infinitezza Campi alg chiusi

Proposizione 1. Sia \mathbb{K} un [Campo Algebricamente Chiuso](#). Allora \mathbb{K} contiene infiniti elementi.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che

$$\mathbb{K} = \{a_1, \dots, a_n\}$$

per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Consideriamo $p \in \mathbb{K}[x]$,

$$p(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i) + 1$$

Siccome per ogni i , si ha che $p(a_i) = 1$, \mathbb{K} non è algebricamente chiuso. Assurdo. ■

73 Cubica Gobba

Sia \mathbb{K} un [Campo Algebricamente Chiuso](#), e sia $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\mathbb{K}}$ (vedi [Spazio Proiettivo](#))

73.1 Definizione

Consideriamo

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{P}_x^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_z^3 \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3] \end{aligned}$$

L'insieme $C \subseteq \mathbb{P}^3$, $C := \gamma(\mathbb{P}^1)$ è detto **cubica gobba**.

73.2 Varietà algebrica proiettiva

Ci si chiede se $C := \gamma(\mathbb{P}^1)$ è una varietà algebrica proiettiva, ovvero se è possibile trovare degli $F_i \in \mathbb{K}[z_0 : z_1 : z_2 : z_3]$ (vedi Anello-dei-polinomi) tali che (vedi Luogo di zeri)

$$C = V(F_i)$$

Siano $F_1, F_2, F_3 \in \mathbb{K}[z_0, z_1, z_2, z_3]$ definiti come segue:

$$\begin{aligned} F_1 &:= z_0 z_3 - z_1 z_2 \\ F_2 &:= z_1^2 - z_0 z_2 \\ F_3 &:= z_2^2 - z_3 z_1 \end{aligned}$$

È immediato vedere che $C \subseteq V(F_1, F_2, F_3)$. Infatti, sia

$$\tilde{z} = [\tilde{z}_0 : \tilde{z}_1 : \tilde{z}_2 : \tilde{z}_3] \in C$$

e sia dunque $\tilde{x} \in \gamma^{-1}(\tilde{z})$,

$$\tilde{x} = [\tilde{x}_0 : \tilde{x}_1]$$

Calcoliamo dunque

$$\begin{aligned} F_1(\tilde{z}) &= F_1(\tilde{x}_0^3, \tilde{x}_0^2 \tilde{x}_1, \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^2, \tilde{x}_1^3) \\ &= \tilde{x}_0^3 \tilde{x}_1^3 - \tilde{x}_0^2 \tilde{x}_1 \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^2 = 0 \\ F_2(\tilde{z}) &= F_2(\tilde{x}_0^3, \tilde{x}_0^2 \tilde{x}_1, \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^2, \tilde{x}_1^3) \\ &= (\tilde{x}_0^2 \tilde{x}_1)^2 - \tilde{x}_0^3 \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^2 = 0 \\ F_3(\tilde{z}) &= F_3(\tilde{x}_0^3, \tilde{x}_0^2 \tilde{x}_1, \tilde{x}_0 \tilde{x}_1^2, \tilde{x}_1^3) \\ &= (\tilde{x}_0 \tilde{x}_1^2)^2 - \tilde{x}_1^3 \tilde{x}_0^2 \tilde{x}_1 = 0 \end{aligned}$$

Viceversa, sia $p = [p_0 : p_1 : p_2 : p_3] \in V(F_1, F_2, F_3) \subseteq \mathbb{P}^3$. Almeno uno tra p_0 e p_3 è non nullo. Infatti, se per assurdo $p_0 = p_3 = 0$ allora:

- siccome $F_2(p) = 0$ allora $p_1^2 = p_0 p_2$ e dunque $p_1 = 0$;
- siccome $F_3(p) = 0$ allora $p_2^2 = p_3 p_1$ e dunque $p_2 = 0$;

il risultato è che $p = 0$ (assurdo poiché $p \in \mathbb{P}^3$).

Supponiamo quindi che $p_0 \neq 0$. Dividendo tutte le coordinate per p_0 , possiamo assumere $p_0 = 1$. Unendo questa informazione al fatto che $P \in V(F_1, F_2, F_3)$ si ottiene

$$\begin{aligned} p_3 &= p_1 p_2 \\ p_1^2 &= p_2 \\ p_2^2 &= p_3 \end{aligned}$$

e pertanto $p = [1 : p_1 : p_1^2 : p_1^3]$

Ricordando che $\gamma[x_0 : x_1] = [x_0^3 : x_0^2 x_1 : x_0 x_1^2 : x_1^3]$ si ha che

$$p = \gamma[1 : p_1]$$

73.3 Curva piana

Ci si chiede se la cubica gobba, sia una [Curva Piana](#), ovvero sia contenuta in $H \subseteq \mathbb{P}^3$ piano.

$$H : a_0z_0 + a_1z_1 + a_2z_2 + a_3z_3 = 0$$

Si ha che $C \subseteq H$ se e solo se $\forall [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$

$$a_0x_0^3 + a_1x_0^2x_1 + a_2x_0x_1^2 + a_3x_1^3 = 0 \quad (1)$$

Ci chiediamo dunque se esistono a_1, \dots, a_3 tali per cui la condizione di cui sopra è vera. Ricordiamo che $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$.

- In U_0 si può porre $x_0 = 1$, e la condizione diventa:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = 0$$

Questo è un polinomio in una variabile, che pertanto ha un numero **finito** di soluzioni.

- In U_1 valgono considerazioni simili, e pertanto in U_0 ci sono un numero **finito** di soluzioni

Pertanto, l'equazione polinomiale (1) ha un numero finito di soluzioni, e pertanto non possono esistere dei coefficienti tali per cui (1) è vera per ogni $[x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ (siccome \mathbb{P}^1 ha infiniti punti)^[22] Dunque, C non è una curva piana.

74 Curva Piana

75 Anello dei polinomi ad una indeterminata di un PID è PID

Proposizione 1. Sia A un [PID](#). Allora $A[x]$ [anello dei polinomi](#) è un [PID](#).

Proposizione 2. Sia \mathbb{K} un [Campo](#), e sia $\mathbb{K}[x]$ l'[Anello-dei-polinomi](#) ad una variabile. Allora $\mathbb{K}[x]$ è un [PID](#).

Corollario 3. Applicando la proposizione 1, per induzione, si ha che $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un [PID](#).

76 Anello Noetheriano

76.1 Definizioni

Un [anello commutativo con unità](#) A si dice Noetheriano (vedi [Emmy Noether](#)) se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

1. Ogni suo [Ideale](#) I è [finitamente generato](#)
2. Ogni catena ascendente di ideali

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_j \subseteq$$

è stazionaria, ovvero esiste n tale per cui per ogni $k > 0$

$$I_{n+k} = I_n$$

(vedi [ACC](#))

76.2 Dimostrazione

Le due condizioni di cui sopra sono equivalenti

76.2.1 $1 \rightarrow 2$

Sia $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_j \subseteq \dots$ una catena ascendente di ideali. Sia

$$I := \bigcup_j I_j$$

I è ancora un ideale, e per 1. si ha che $I = (r_1, \dots, r_n)$ per $r_i \in I$, poiché I è finitamente generato. Per ogni $k = 1, \dots, n$ sia j_k tale che

$$r_{j_k} \in I_{j_k}$$

Sia dunque $N = \max \{j_k\}_k$. Si ha che $r_1, \dots, r_n \in I_N$, e pertanto $(r_1, \dots, r_n) \subseteq I_N$ e $I_N \subseteq I$.

Dunque $I_N = I$ e, per ogni $k \geq 0$ si ha

$$I_{N+m} \supseteq I_N = I, \quad I_{N+m} \subseteq I$$

e pertanto $I_{N+m} = I_N$.

76.2.2 $2 \rightarrow 1$

Osservazione: se I è un ideale non finitamente generato, e $r_1, \dots, r_n \in I$, allora anche $I \setminus (r_1, \dots, r_n)$ è non finitamente generato. Infatti, se per assurdo $I \setminus (r_1, \dots, r_n)$ fosse generato da t_1, \dots, t_k , allora I sarebbe generato da $t_1, \dots, t_k, r_1, \dots, r_n$.

Sia I un ideale **non** finitamente generato, e sia $a_1 \in I$ tale che $(a_1) \subsetneq I$. Allora $I \setminus (a_1)$ è non finitamente generato. Sia $a_2 \in I \setminus (a_1)$ tale che $(a_1, a_2) \subsetneq I$. Allora $I \setminus (a_1, a_2)$ è non finitamente generato.

Continuando in questo modo si crea una catena di ideali

$$(a_1) \subsetneq (a_1, a_2) \subsetneq (a_1, a_2, a_3) \subsetneq \dots$$

non stazionaria.

77 Emmy Noether

78 Catena Stazionaria

Una [Catena](#) I_1, I_2, \dots si dice **stazionaria** se esiste n tale per cui per ogni $k > 0$

$$I_{n+k} = I_n$$

79 ACC

Per **ACC** si intende ascendent [chain condition](#)

80 Catena

NOTA: quando si parla di [classi](#), se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

Definizione 1. Sia X un insieme (o una classe) e sia R un ordine (stretto). Un sottoinsieme (o sottoclasse) $C \subseteq X$ è una [catena](#) se

$$\forall x, y \in C \ (x \neq y \rightarrow (x R y \vee y R x))$$

Definizione 2. Una catena $C \subseteq X$ si dice [massimale](#) se per ogni $C' \subseteq X$

se $C \subsetneq C'$ allora C' non è una catena.

81 Insiemi finiti di punti dello spazio proiettivo

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e sia $\Gamma = \{p_1, \dots, p_d\} \subseteq \mathbb{P}^n$ (vedi [Spazio Proiettivo](#)). Γ è una [Varietà Algebrica Proiettiva](#)? Esiste $T \subseteq \mathbb{K}[x_0 : \dots : x_n]^h$ tale che $\Gamma = V(T)$? (vedi [Anello-dei-polinomi](#) e [Luogo di zeri](#))?

81.1 Fatto 1:

È possibile trovare $T \subseteq \mathbb{K}[x_0 : \dots : x_n]$ tale che

$$\forall F \in T, \deg F \leq d$$

(vedi [Grado-Polinomi](#))

81.1.1 Dim.

Per dimostrarlo si trova, per ogni $q \in \mathbb{P}^n \setminus \Gamma$ un polinomio $F_q \in \mathbb{K}[x_0 : \dots : x_n]$ tale che $F_q(q) \neq 0$ e $F_q(p_i) = 0$ per ogni $p_i \in \Gamma$.

Sia dunque H_{iq} il polinomio equazione dell'[Iperpiano](#) che passa per p_i e non passa per q : questo è un polinomio di primo grado, ed esiste sempre, poiché $p_i \neq q$. Si ha quindi che $F_q = H_{1q} \cdots \cdots H_{dq}$ è un polinomio di grado d .

81.2 Fatto 2

Se Γ è contenuto in una retta, **non è possibile** trovare T tale che

$$\forall F \in T, \deg F \leq d - 1$$

81.2.1 Dim

Si dimostra che, in virtù del fatto 1, esiste $F \in T$ tale che $\deg F = d$.

Siano P, Q tali che la retta

$$\ell : \lambda P + \mu Q$$

contenga Γ . Dunque, per ogni $p_i \in \Gamma$ esiste $[\lambda_i : \mu_i] \in \mathbb{P}^1$ tale che $p_i = \lambda_i P + \mu_i Q$

Sia $F \in T$. $F \circ \ell$ è un polinomio omogeneo in due variabili di grado uguale ad F (poiché ℓ è di primo grado)

Se $\deg F = \deg F \circ \ell \leq d - 1$, siccome $F \circ \ell$ ha almeno d radici (poiché $V(T) = \Gamma \subseteq \ell$), si ha che $F \circ \ell \equiv 0^{[23]}$ e dunque $\ell \subseteq V(F)$.

Quindi, se $\forall F \in T$, $\deg F \leq d - 1$, allora $\ell \subseteq V(T)$. Questo è assurdo, poiché la retta ha infiniti punti mentre $\Gamma = V(T)$ ne ha un numero finito.

81.3 Fatto 3

Se $d \leq 2n$ e Γ è in [Posizione Generale](#), allora si può trovare T tale che

$$\forall F \in T, \deg F \leq 2$$

81.4 Fatto 4

Se $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^2$, allora $\Gamma = V(F_1, F_2)$.

82 Posizione Generale

83 Insiemi finiti di punti dello spazio affine come zeri di due polinomi

Proposizione 1. Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#) e sia $\Gamma = \{p_1, \dots, p_d\} \subseteq \mathbb{A}^2$ (vedi [Spazio Affine](#)). Allora esistono $F_1, F_2 \in \mathbb{K}[x, y]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) tali che $\Gamma = V(F_1, F_2)$ (vedi [Luogo di zeri](#)).

Questa proposizione è una variazione di [Fatto 4](#)

Dimostrazione. Si scelga una [base](#) di \mathbb{A}^2 tale per cui tutte le coordinate x dei punti p_1, \dots, p_d siano distinte. Questo è sempre possibile farlo poiché i punti sono finiti, mentre i versori y sono infiniti.

Sia quindi $p_i = (a_i, b_i)$. Posto

$$F_1 : \prod_{i=1}^d (x - a_i)$$

$$F_2 : y - f(x)$$

se $f(x)$ è un polinomio tale che, $\forall i$ valga

$$f(a_i) = b_i$$

allora $\Gamma = V(F_1, F_2)$. Ma $f(x)$ esiste, poiché per $a_i \neq a_j, \forall i \neq j$ si può applicare la formula del Polinomio di Lagrange. ■

84 Iperpiano proeittivo

85 Teorema Fondamentale dell'Algebra

Teorema 1. Sia $f(z)$ un polinomio in $\mathbb{C}[z]$ di grado ≥ 1 .

Allora esiste $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $f(z_0) = 0$

Dimostrazione. WLOG sia $f(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$. Supponiamo per assurdo che $\forall z \in \mathbb{C}: f(z) \neq 0$.

Allora è ben definita la funzione^[24], considerata $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{S}^1 &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ z &\longmapsto \frac{f(z)}{|f(z)|} \end{aligned}$$

- f_1 è omotopa alla funzione costante:

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) &\longmapsto \frac{f(z \cdot t)}{|f(z \cdot t)|} \end{aligned}$$

dove $H(z, 1) = f_1(z)$, $H(z, 0) = \frac{a_0}{|a_0|}$. Quindi f_1 ha grado 0

- f_1 è omotopa a z^n : considero infatti la funzione continua

$$\begin{aligned} H_0 : \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ (z, t) &\longmapsto \frac{f(z/t)}{|f(z/t)|} \end{aligned}$$

dove $\frac{f(z/t)}{|f(z/t)|}$ è solo un “memo” per identificare la funzione: definita per ogni $t \in [0, 1]$:

$$\frac{f(z/t)}{|f(z/t)|} := \frac{z^n + a_{n-1} z^{n-1} t + \dots + a_1 z t^{n-1}}{\left| z^n + a_{n-1} z^{n-1} t + \dots + a_1 z t^{n-1} \right|}.$$

Allora $H_1(z, 1) = f_1(z)$, mentre $H_1(z, 0) = \frac{z^n}{\|z^n\|} = z^n$, e pertanto $\deg f_1 = n \neq 0$.

Assurdo. ■

86 Base di uno spazio vettoriale

87 Polinomio di Lagrange

88 Ideali Generati di un Anello Noetheriano

Sia A un [Anello Noetheriano](#), e sia $I = \langle T \rangle$ un [Ideale-Generato](#). Allora I è un [Ideale finitamente generato](#), e, in particolare, esiste $T' \subseteq T$ **finito** tale che $I = \langle T' \rangle$.

89 Teorema della Base di Hilbert

89.1 Teorema

Sia A un [Anello Noetheriano](#). Allora l'[Anello-dei-polinomi](#) ad una indeterminata $A[X]$ è un [Anello Noetheriano](#).

89.1.1 dim.

Per assurdo, sia $I \subseteq A[X]$ un ideale non finitamente generato. Sia $f_1 \in I$ il polinomio di grado **minimo** tale che $(f_1) \neq I$. Si denoti con $d_1 = \deg f_1$. Sia $f_2 \in I \setminus (f_1)$ il polinomio di grado minimo tale che $(f_1, f_2) \neq I$. Si denoti con $d_2 = \deg f_2$.

Si costruisce in questo modo la sequenza f_1, f_2, \dots , ed in particolare si ha che

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \dots$$

Inoltre, $\forall i$ si ha che $f_i \notin (f_1, \dots, f_{i-1})$.

Sia ora a_i il [coefficiente direttore](#) di f_i , e si consideri l'ideale

$$J = (a_1, a_2, a_3, \dots) \subseteq A$$

Poiché A è un [anello noetheriano](#) e la seguente è una [Catena](#) ascendente

$$(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq (a_1, a_2, a_3) \subseteq \dots$$

allora esiste N tale che

$$J = (a_1, a_2, \dots, a_N)$$

Siccome $a_{N+1} \in J$, si ha che

$$a_{N+1} = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$$

per alcuni $\lambda_i \in A$.

Sia ora

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{i=1}^N \lambda_i f_i \cdot x^{d_{N+1}-d_i} \\
&= \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_i x_i^{d_i} + \dots) \cdot x^{d_{N+1}-d_i} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i x^{d_{N+1}} + \dots \\
&= a_{N+1} x^{d_{N+1}} + \dots
\end{aligned}$$

dunque g è un polinomio di grado d_{N+1} , e, per costruzione, $g \in (f_1, \dots, f_N)$. Inoltre, per costruzione, $f_{N+1} \notin (f_1, \dots, f_N)$ ma coefficiente direttore a_{N+1} , come g .

Il polinomio $f_{N+1}-g$ ha grado strettamente minore di d_{N+1} e non appartiene a (f_1, \dots, f_N) .^[25] Pertanto il polinomio scelto f_{N+1} non è quello con grado minimo a soddisfare le richieste. Assurdo.

89.2 Corollario

Sia A un Anello Noetheriano. Allora l'anello dei polinomi $A[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano.

90 Campi sono anelli Noetheriani

Sia \mathbb{K} un Campo. Allora \mathbb{K} ha solo due ideali,

$$\{0\} = \langle 0 \rangle, \quad \mathbb{K} = \langle 1 \rangle$$

Pertanto, \mathbb{K} è un Anello Noetheriano.

90.1 Corollario

$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un anello noetheriano, per il Teorema della Base di Hilbert.

91 Ideali di un campo

91.1 Teorema

Sia A un Anello commutativo.

A è un Campo se e solo se i suoi unici ideali sono $\{0\}$ e A .

92 Zeri di un ideale generato in uno spazio affine

92.1 Proposizione

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, e sia $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi Anello-dei-polinomi). Allora

$$V(T) = V(\langle T \rangle) \subseteq \mathbb{A}^n$$

92.1.1 Dimostrazione

Infatti:

1. $T \subseteq \langle T \rangle$ e dunque $V(T) \supseteq V(\langle T \rangle)$ (poiché meno equazioni significano più soluzioni);
2. Sia $x \in V(T)$, allora per ogni $t \in T$ si ha $t(x) = 0$. Sia ora $p \in \langle T \rangle$, allora $p = \sum a_i t_i$ per $a_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $t_i \in T$, e dunque $p(x) = 0$. Pertanto $x \in V(\langle T \rangle)$. Dunque $V(T) \subseteq V(\langle T \rangle)$.

92.2 Corollario

Sia X una Varietà Algebrica Affine. Allora $X = V(T_0)$, dove $T_0 \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un insieme **finito**

92.2.1 Dimostrazione

Sia $T \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $X = V(T)$. Per la proposizione, $X = V(\langle T \rangle)$. Inoltre, per il Teorema della Base di Hilbert, $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un Anello Noetheriano e, pertanto, per il corollario Ideali Generati di un Anello Noetheriano, $\langle T \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è finitamente generato.

$$\langle T \rangle = (t_1, \dots, t_k)$$

Applicando nuovamente la proposizione, $V(\langle T \rangle) = V(t_1, \dots, t_k)$. Ponendo $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\}$ si ha la tesi.

93 Ideale di polinomi omogeneo

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, e sia $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi. Siano S_d i sottogruppi omogenei di S .

93.1 Definizione

I Ideale di S si dice **omogeneo** se

$$I = \bigoplus_{d \geq 0} (S_d \cap I)$$

ovvero se, dato $F \in I$ e

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_d$$

con F_i omogenei, si ha che $F_0, F_1, \dots, F_d \in I$.

93.2 Proposizione

Un ideale è omogeneo se e solo se è generato da Polinomi Omogenei.

94 Luogo di zeri di un ideale omogeneo

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e sia $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi.

94.1 Definizione

Se I è un ideale omogeneo allora si definisce

$$V(I) := V(I^h) \subseteq \mathbb{P}^n$$

dove con I^h si intende l'insieme dei polinomi omogenei di I e $V(I^h)$ è definito come Luogo di zeri (vedi anche Varietà Algebrica Proiettiva).

94.1.1 Osservazione

La definizione precedente è necessaria, poiché I omogeneo non contiene soltanto polinomi omogenei, e dunque non ha intrinsecamente senso chiedersi quali siano, in ambito proiettivo, gli zeri di tutti i suoi polinomi.

95 Varietà Algebriche luogo di zeri di finiti polinomi

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

95.1 Varietà algebriche affini

Una Varietà Algebrica Affine è il Luogo di zeri di un numero finito di polinomi.

95.1.1 Dimostrazione

Vedi il corollario di “Zeri di un ideale generato in uno spazio affine”

95.2 Varietà Algebriche proiettive

Una Varietà Algebrica Proiettiva è il Luogo di zeri di un numero finito di Polinomi Omogenei.

95.2.1 Dimostrazione

Si è visto che ogni varietà algebrica proiettiva è luogo di zeri di un ideale omogeneo. Per la caratterizzazione degli ideali omogenei, ogni ideale omogeneo è generato da polinomi omogenei, ma siccome l'Anello-dei-polinomi è noetheriano (grazie al Teorema della Base di Hilbert), si ha che ogni ideale generato è finitamente generato (per il teorema sugli ideali generati in un anello noetheriano).

96 Topologia di Zariski affine

Nella [topologia euclidea](#), gli zeri di [funzioni continue](#) sono usualmente chiusi, pertanto ha senso definire una topologia come segue:

96.1 Definizione

La [topologia](#) di Zariski su \mathbb{A}^n è quella che ha per chiusi tutte e sole le [varietà algebriche affini](#); ovvero, $C \subseteq \mathbb{A}^n$ è chiuso se e solo se C è il [luogo di zeri](#) di [polinomi](#).

96.1.1 Dimostrazione che sia una topologia

Contiene \emptyset e \mathbb{A}^n Infatti, $\emptyset = V(1)$ e $\mathbb{A}^n = V(0)$.

Chiuso per intersezioni Siano, per $i \in I$, $X_i = V(T_i)$, con $T_i \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#))

$\bigcap_{i \in I} X_i$ è una varietà algebrica, infatti

$$\bigcap_{i \in I} V(T_i) = V\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right)$$

Chiuso per unioni finite Siano $X_1 = V(T_1)$ e $X_2 = V(T_2)$. Allora $X_1 \cup X_2 = V(T_1) \cup V(T_2) = V(T_1 \cdot T_2)$ dove

$$T_1 \cdot T_2 := \{fg : f \in T_1, g \in T_2\}$$

Per doppia inclusione, sia $p \in V(T_1) \cup V(T_2)$; allora $p \in V(T_i)$ per $i = 1$ oppure $i = 2$. Senza perdita di generalità suppongo $p \in V(T_1)$, cioè $f(p) = 0$ per ogni $f \in T_1$. Per ogni $h \in T_1 \cdot T_2$, $h = fg$ con $f \in T_1$, e quindi $h(p) = f(p)g(p) = 0g(p) = 0$, e dunque $p \in V(T_1 \cdot T_2)$. Viceversa, sia $p \in V(T_1 \cdot T_2)$ e sia $p \notin V(T_1)$. Bisogna dimostrare che $p \in V(T_2)$. Siccome $p \notin V(T_1)$, esiste $\tilde{f} \in T_1$ tale che $\tilde{f}(p) \neq 0$. Inoltre, $\forall g \in T_2$, si ha che $\tilde{f}g \in T_1 \cdot T_2$, e, pertanto, $\tilde{f}g \in T_1 \cdot T_2$.

$$0 = (\tilde{f}g)(p) = \tilde{f}(p)g(p)$$

e quindi $g(p) = 0$, poiché $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un [Dominio di integrità](#), e, pertanto, $p \in V(T_2)$.

97 Topologia Euclidea

Definizione 1. Una funzione continua

98 Dominio di integrità

99 Ideale di un sottoinsieme

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#).

99.1 Varietà affini.

Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ un sottoinsieme (vedi Spazio Affine). Si definisce l'**ideale di Y**

$$I(Y) := \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(p) = 0, \forall p \in Y\}$$

99.1.1 Proposizione

$I(Y)$ è un Ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi Anello-dei-polinomi).

99.1.2 Osservazione:

Valgono le seguenti proprietà, per $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ e $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. $1. Y \subseteq V(I(Y))$ (vedi Luogo di zeri), poiché

$$I(Y) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(p) = 0 \forall p \in Y\}$$

e dunque, se $y \in Y$, allora per ogni $f \in I(Y)$ si ha che $f(y) = 0$

1. $J \subseteq I(V(J))$ dal momento che se $f \in J$ allora per ogni $p \in V(J)$ si ha che $f(p) = 0$ e pertanto $f \in I(V(J))$.
2. Se $A \subseteq B \subseteq \mathbb{A}^n$ allora $I(B) \subseteq I(A)$. Sia $f \in I(B)$. Allora per ogni $b \in B$ si ha che $f(b) = 0$. In particolare, per ogni $a \in A \subseteq B$ si ha che $f(a) = 0$, e pertanto $f \in I(A)$.

99.2 Varietà proiettive

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ un sottoinsieme. (Vedi Spazio Proiettivo). Si definisce l'ideale di X l'ideale generato di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$: (vedi Polinomi Omogenei)

$$I(X) := \langle \{F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]^h : \forall p \in X, F(p) = 0\} \rangle$$

99.2.1 Osservazione

In accordo con quanto fatto in “Luogo di zeri di un ideale omogeneo”, con

$$I(X)^h \subseteq I(X)$$

si intende l'insieme degli polinomi omogenei di $I(X)$.

Si noti inoltre che

$$V(I(X)) = V(I(X)^h)$$

per definizione.

100 Chiusura Topologica

100.1 Caratterizzazione dei chiusi in termini di chiusura

Un sottoinsieme $C \subseteq X$ è **chiuso** se e solo se $\text{Cl}_X(C) = C$.

101 Topologia

102 Zeri di un ideale di un sottoinsieme affine

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

102.1 Proposizione

Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ un sottoinsieme (vedi Spazio Affine), e sia $I(Y)$ il suo ideale. Allora, considerando la Topologia di Zariski, si ha che la Varietà Algebrica Affine

$$V(I(Y)) = \overline{Y}$$

(vedi Luogo di zeri) dove con \overline{Y} si intende la chiusura di Y nella topologia citata.

102.1.1 Osservazione

Se $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ è già una Varietà Algebrica Affine, allora, per definizione, è un chiuso nella topologia di Zariski, e, pertanto,

$$Y = \overline{Y} = V(I(Y))$$

102.1.2 Dimostrazione

Chiaramente si ha che $Y \subseteq V(I(Y))$, poiché

$$I(Y) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] : f(p) = 0 \ \forall p \in Y\}$$

e dunque, se $y \in Y$, allora per ogni $f \in I(Y)$ si ha che $f(y) = 0$.

Dunque, per le proprietà della Chiusura Topologica,

$$\overline{Y} \subseteq \overline{V(I(Y))} = V(I(Y))$$

Viceversa, siccome \overline{Y} è chiuso, allora $\overline{Y} = V(J)$ per un qualche Ideale $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Come sopra,

$$J \subseteq I(V(J))$$

dal momento che se $f \in J$ allora per ogni $p \in V(J)$ si ha che $f(p) = 0$ e pertanto $f \in I(V(J))$.
Dunque

$$J \subseteq I(V(J)) = I(\overline{Y}) \subseteq I(Y)$$

poiché $Y \subseteq \overline{Y}$ (vedi Ideale di un sottoinsieme)

Dunque $J \subseteq I(Y)$ e, in particolare (vedi Luogo di zeri)

$$V(I(Y)) \subseteq V(J)$$

ma $V(J) = \overline{Y}$ e pertanto si ha la tesi.

103 Spazio topologico Noetheriano

Uno Spazio topologico si dice **Noetheriano** se ogni catena discendente di chiusi è stazionaria

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \cdots \supseteq Y_n \supseteq \cdots$$

Equivalentemente, se ogni catena ascendente di aperti è stazionaria.

104 Topologia di Zariski affine è noetheriana

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

104.1 Proposizione

La Topologia di Zariski affine è noetheriana.

104.1.1 Dimostrazione

Sia

$$Y_1 \supseteq \cdots \supseteq Y_n \supseteq \cdots$$

una catena discendente di chiusi di \mathbb{A}^n (vedi Spazio Affine). Ciascuno di questi è una Varietà Algebrica Affine, ovvero Luogo di zeri di un Ideale dell'Anello-dei-polinomi: Considero la catena

$$I(Y_1) \subseteq I(Y_2) \subseteq \cdots \subseteq I(Y_n) \subseteq \cdots$$

(si veda Ideale di un sottoinsieme) dentro a $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Siccome l'Anello-dei-polinomi è Anello Noetheriano (per il Teorema della Base di Hilbert), questa catena è stazionaria e pertanto esiste k tale per cui

$$I(Y_k) = I(Y_{k+1}) = \cdots = I(Y_{k+h})$$

Dunque si ha che

$$V(I(Y_k)) = V(I(Y_{k+1})) = \cdots = V(I(Y_{k+h})) = \cdots$$

e, siccome gli Y_j sono chiusi si ha che

$$Y_k = Y_{k+1} = \cdots = Y_{k+h} = \cdots$$

e pertanto la catena iniziale è stazionaria.

105 Caratterizzazione topologia noetheriana

105.1 Lemma

Uno spazio topologico X è noetheriano se e solo se ogni famiglia non vuota di chiusi ha un elemento minimale (rispetto a \subseteq). Equivalentemente, se ogni famiglia non vuota di aperti ha un elemento massimale.

105.1.1 Dimostrazione

“ \rightarrow ” Sia X uno spazio topologico noetheriano, e sia $\mathcal{F} = \{Y_i\}_{i \in I}$ una famiglia di chiusi. Se per assurdo \mathcal{F} non ha elementi minimali, sia $Y_1 \in \mathcal{F}$.

Allora esiste $Y_2 \in \mathcal{F}$ tale che $Y_2 \subsetneq Y_1$, esiste $Y_3 \in \mathcal{F}$ tale che $Y_3 \subsetneq Y_2$ e così via.

Si è quindi creata una catena $Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$ non stazionaria. Assurdo, poiché X noetheriano per hp.

“ \leftarrow ” Si consideri una catena discendente

$$Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq Y_3 \supseteq \dots$$

di chiusi. La famiglia di chiusi $\mathcal{F} := \{Y_i\}$ ha un elemento minimale, e dunque la catena è stazionaria.

106 Spazio topologico Noetheriano è compatto

106.1 Teorema

Sia X uno [Spazio topologico noetheriano](#). Allora ogni [sottospazio](#) $Y \subseteq X$ è [compatto](#).

106.1.1 Dimostrazione

Sia $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un [ricoprimento aperto](#) di Y . Sia \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} := \{U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_n} : \alpha_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

la famiglia di unioni finite di elementi di \mathcal{U} . Siccome X è noetheriano, per il [teorema di caratterizzazione](#), \mathcal{F} ha un elemento massimale U ,

$$U = U_{\beta_1} \cup \dots \cup U_{\beta_k}$$

Si ha che $\{U_{\beta_i}\}_{i=1,\dots,k}$ è un ricoprimento aperto finito di Y , e pertanto Y è compatto. Infatti $Y \subseteq U$.

Se per assurdo $Y \not\subseteq U = U_{\beta_1} \cup \dots \cup U_{\beta_k}$, sia $p \in Y \setminus U$. Allora esiste $U_\gamma \in \mathcal{F}$ tale che $p \in U_\gamma$. Inoltre

$$U \cup U_\gamma \subsetneq U$$

e pertanto U non è massimale. Assurdo.

106.1.2 Corollario

Se X è uno [spazio topologico noetheriano](#), allora X è [compatto](#).

107 Spazio topologico compatto

108 Sottospazio Topologico

Definizione 1. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme di X . La topologia di sottospazio (o topologia indotta) su Y è la collezione τ_Y definita come:

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

Gli elementi di τ_Y sono detti aperti in Y . La coppia (Y, τ_Y) è detta sottospazio topologico di X .

Osservazione. Analogamente per i chiusi: un sottoinsieme $C \subseteq Y$ è chiuso nella topologia di sottospazio se e solo se è l'intersezione di Y con un insieme chiuso di X .

$$C \text{ chiuso in } Y \iff \exists K \text{ chiuso in } X \text{ tale che } C = K \cap Y$$

108.1 Proprietà Transitive

Proposizione 2. Sia Y un sottospazio di X . Valgono le seguenti proprietà di transitività:

1. **Transitività dell'apertura:** Se Y è un insieme aperto in X , allora ogni sottoinsieme aperto in Y è anche aperto in X .

$$(Y \text{ aperto in } X) \wedge (A \text{ aperto in } Y) \implies A \text{ aperto in } X$$

2. **Transitività della chiusura:** Se Y è un insieme chiuso in X , allora ogni sottoinsieme chiuso in Y è anche chiuso in X .

$$(Y \text{ chiuso in } X) \wedge (C \text{ chiuso in } Y) \implies C \text{ chiuso in } X$$

109 Ricoprimento

110 Sottospazio irriducibile

110.1 Definizione

Sia X uno spazio topologico, e sia $Y \subseteq X$ un suo sottospazio. Y si dice irriducibile se non è possibile scrivere

$$Y = Y_1 \cup Y_2$$

con Y_1, Y_2 chiusi propri di Y .

110.1.1 Osservazione

Segue banalmente che se Y è irriducibile allora Y è连通的. Il viceversa non è vero.

Controesempio Si consideri in A^2 (vedi Spazio Affine) e si consideri la varietà (vedi Luogo di zeri)

$$Y = V(xy) = \{xy = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = 0\} = V(x) \cup V(y)$$

Nella topologia di Zariski, Y è连通的 ma non è irriducibile.

110.1.2 Proprietà 1

Sia Y uno spazio topologico irriducibile. $U \subseteq Y$ aperto non vuoto, allora $\overline{U} = Y$ (vedi [Chiusura Topologica](#))

Dimostrazione Se per assurdo $\overline{U} \neq Y$ (dunque anche $U \neq Y$) allora $Y = \overline{U} \cup (Y \setminus U)$ unione di chiusi propri, quindi Y non è irriducibile. Assurdo.

110.1.3 Proprietà 2

Sia $Y \subseteq X$. Y è irriducibile se e solo se \overline{Y} è irriducibile.

111 Spazio topologico connesso

111.1 Proposizione.

Sia X uno [spazio topologico](#). Sono fatti equivalenti:

1. X è sconnesso;
2. esistono A, B aperti, non vuoti, disgiunti tali che $X = A \cup B$;
3. esistono C, D chiusi, non vuoti, disgiunti tali che $X = C \cup D$.

112 Scomposizione di sp top noetheriani in componenti irriducibili

112.1 Teorema

Sia X uno [spazio topologico noetheriano](#), e sia $Y \subseteq X$ un [sottospazio chiuso](#). Allora esiste un numero finito di chiusi [irriducibili](#)

$$Y_1, \dots, Y_n$$

tali che $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_n$.

Inoltre, se $\forall i \neq j$ si ha $Y_i \not\subseteq Y_j$, allora la decomposizione è unica. Le Y_i si chiamano **componenti irriducibili** di Y .

112.1.1 Dimostrazione

Esistenza Sia \mathcal{F} la famiglia dei chiusi di X che non ammettono una decomposizione finita. Se $\mathcal{F} \neq \emptyset$ allora esiste $Y \in \mathcal{F}$ minimale, poiché X è noetheriano. Y non è irriducibile (poiché altrimenti sarebbe già decomposto) e pertanto esistono Y_1, Y_2 chiusi propri di Y tali che $Y = Y_1 \cup Y_2$.

Per minimalità di Y , $Y_1, Y_2 \notin \mathcal{F}$, e pertanto entrambi ammettono una decomposizione finita. Dunque Y ammette una decomposizione finita, assurdo.

TODO Unicità

matematica_lm:geo_alg Siano

$$Y = Y_1 \cup \cdots \cup Y_n = Y'_1 \cup \cdots \cup Y'_s$$

due decomposizioni in componenti irriducibili.

Intersecando con Y_1 :

$$Y \cap Y_1 = Y_1 = \left(\bigcup_{i=1}^s Y'_i \right) \cap Y_1 = \bigcup_{i=1}^s Y'_i \cap Y_1$$

Siccome Y_1 è irriducibile, si ha che esiste i_0 tale che $Y_1 = Y'_{i_0} \cap Y_1$. Senza perdita di generalità, poniamo $i_0 = 1$. Questo significa che $Y_1 \subseteq Y'_1$

Intersecando nuovamente con Y'_1 :

$$Y \cap Y'_1 = \left(\bigcup_{j=1}^n Y_j \right) \cap Y'_1 = Y'_1$$

Dunque si ha che $Y'_1 = \bigcup_{j=1}^n (Y_j \cap Y'_1)$. Siccome Y'_1 è irriducibile, deve esistere j_0 tale che $Y'_1 = Y'_{j_0} \cap Y'_1$ e dunque $Y'_1 \subseteq Y'_{j_0}$. Necessariamente, $j_0 = 1$, poiché, se per assurdo $j_0 \neq 1$:

$$Y_1 \subseteq Y'_1 \subseteq Y_{j_0}$$

che contraddice l'ipotesi.

Dunque $Y_1 = Y'_1$

Si ha che^[26]

$$Y_2 \cup \cdots \cup Y_n = Y'_2 \cup \cdots \cup Y'_s$$

e dunque, iterando il procedimento di prima n volte, si ottiene la tesi.

113 Caratterizzazione di sottospazi affini irriducibili tramite ideali

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

113.1 Teorema

Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ (vedi Spazio Affine).

Y è irriducibile nella topologia di Zariski se e solo se l'ideale $I(Y)$ è primo.

113.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_alg

“ \rightarrow ” Siano $f_1, f_2 \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) tali che $f_1 f_2 \in I(Y)$.

Siano $Y_1 := Y \cap V(f_1)$ e $Y_2 := Y \cap V(f_2)$.

Siccome $f_1 f_2 \in I(Y)$ si ha che $V(f_1) \cup V(f_2) = Y$ ^[27]

$$Y_1 \cup Y_2 = (Y \cap V(f_1)) \cup (Y \cap V(f_2)) = Y \cap (V(f_1) \cup V(f_2)) = Y$$

Dal momento che Y è irriducibile, si ha che $Y = Y_1 \subseteq V(f_1)$, e quindi $I(Y) \supseteq I(V(f_1))$ (vedi [Ideale di un sottoinsieme](#)) e pertanto $f_1 \in I(Y)$.

“ \leftarrow ” Supponiamo che $Y = Y_1 \cup Y_2$ non sia irriducibile. Allora $I(Y) = I(Y_1) \cap I(Y_2)$ ^[28]

Se $Y_{1,2} \subsetneq Y$, allora $I(Y_{1,2}) \supsetneq I(Y)$. Siano dunque:

$$f_1 \in I(Y_1) \setminus I(Y), \quad f_2 \in I(Y_2) \setminus I(Y)$$

Sicuramente $f_1 f_2 \in I(Y_1) \cap I(Y_2) = I(Y)$, infatti se $p_i \in Y_i$ allora $f_i(p_i) = 0$ e dunque $f_1 f_2(p) = 0$. Pertanto $I(Y)$ non è primo.

114 Ideale primo

115 Topologia di Zariski proiettiva

115.1 Definizione

La [topologia](#) di Zariski su \mathbb{P}^n (vedi [Spazio Proiettivo](#)) è quella che ha per chiusi tutte e sole le varietà algebriche proiettive.

116 Proprietà Operazioni tra insiemi

Scambio di unioni/intersezioni e immagini/retroimmagini di funzione

117 Spazio affine è irriducibile

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#).

117.1 Proposizione

\mathbb{A}^n (vedi [Spazio Affine](#)) con la [topologia](#) di Zariski è irriducibile

117.1.1 Dimostrazione

Per la [caratterizzazione](#) degli irriducibili con la [topologia](#) di Zariski [affine](#), \mathbb{A}^n è irriducibile se e solo se il suo [ideale](#) $I(\mathbb{A}^n)$ è [primo](#).

Claim: $I(\mathbb{A}^n) = (0)$. (vedi Ideale-Generato e Ideale di un sottoinsieme)

Dal momento che $(0) = \{0\}$, è sufficiente dimostrare che se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $f \neq 0$, allora esiste $p \in \mathbb{A}^n$ tale che $f(p) \neq 0$. Questo implica che $I(\mathbb{A}^n) = \{0\}$. Si dimostra per induzione su n .

1. Caso base: $n = 1$ Dal momento che \mathbb{K} è algebricamente chiuso, \mathbb{K} è infinito, mentre per ogni $f \in \mathbb{K}[x_1]$ di grado d , f ha al più d radici distinte (per il Teorema Fondamentale dell'Algebra).
2. Passo induttivo Supponiamo l'ipotesi vera per un numero di variabili minori o uguali ad $n - 1$, e sia $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Se x_n non compare in f si ha la tesi per ipotesi induttiva.

Altrimenti, scriviamo

$$f = \sum_{i=0}^d f_i x_n^i, \quad f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$$

dove d è il grado di f riferito alla variabile x_n .

Per ipotesi induttiva, esiste $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{A}^{n-1}$ tale che $f_d(a_1, \dots, a_{n-1}) \neq 0$. Pertanto, il polinomio

$$g(x_n) = f(a_1, \dots, a_{n-1}, x_n)$$

non è il polinomio nullo (infatti almeno il coefficiente di grado massimo è non nullo). Applicando nuovamente l'ipotesi induttiva, si ha che esiste $a_n \in \mathbb{A}$ tale che $g(a_n) \neq 0$, e pertanto si è trovato (a_1, \dots, a_n) tale che

$$f(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \neq 0.$$

Claim: (0) è un ideale primo perché l'anello dei polinomi $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è un dominio di integrità (poiché l'Anello dei polinomi è ad ideali principali e dunque è un dominio di integrità).

118 Caratterizzazione domini d'integrità tramite ideali primi

118.1 Proposizione

Sia A un anello commutativo. A è un dominio d'integrità se e solo se l'ideale generato da $0 \in A$ è un ideale primo.

119 Morfismo tra varietà algebriche affini

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà algebriche affini. (Vedi Spazio Affine)

119.1 Definizione

Una funzione $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo tra varietà affini se esiste una mappa polinomiale

$$\bar{f} : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^m$$

tale che, per ogni $x \in X$, $f(x) = \bar{f}(x)$.

119.1.1 Precisazione

Per mappa polinomiale si intende

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

con $f_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)).

119.1.2 Osservazione

La definizione richiede che $\bar{f}(X) \subseteq Y$, pertanto non tutti i polinomi di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ danno luogo a morfismi da $X \rightarrow Y$.

119.2 Isomorfismo tra varietà algebriche affini

119.2.1 Definizione

Un morfismo $F : X \rightarrow Y$ è un [isomorfismo](#) se

- F è [biunivoca](#) (e quindi esiste F^{-1});
- F^{-1} è un morfismo.

119.3 Esempi di morfismi

119.3.1 Esempio 1

Sia $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ (vedi [Spazio delle matrici](#)) e sia $B \in \mathbb{K}^n$.

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^n \\ x &\longmapsto Ax + B \end{aligned}$$

è un morfismo, poiché è polinomiale (data da polinomi di primo grado).

Inoltre, F è invertibile se e solo se A è [invertibile](#) (ovvero $\det A \neq 0$, vedi [Determinante di una matrice](#)).

119.3.2 Esempio 2

Sia $n > m$, e consideriamo

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{A}^n &\longrightarrow \mathbb{A}^m \\ (x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1, \dots, x_m) \end{aligned}$$

la proiezione sulle prime m coordinate.

Evidentemente è un morfismo, poiché le mappe sono polinomiali. Allo stesso tempo è evidente che non sia un isomorfismo.

119.3.3 Esempio 3

Sia $f \in \mathbb{K}[x]$, e sia $g(x, y) = y - f(x)$, $g \in \mathbb{K}[x, y]$. Consideriamo $X = V(g) \subseteq \mathbb{A}^2$ (vedi [Luogo di zeri](#)). X è il [grafico](#) di f .

Si hanno le mappe

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}^1 &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$

che è un morfismo poiché polinomiale, e la sua inversa

$$\begin{aligned} F^{-1} : X &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

che è morfismo per l'esempio precedente, poiché proiezione sul primo fattore.

Dunque F è un isomorfismo.

120 Spazio delle matrici

121 Funzione Biunivoca

121.1 Generalizzazione in MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

121.1.1 Classe-Funzione Biiettiva

122 Matrice Invertibile

123 Determinante di una matrice

124 Grafico di una funzione

125 Morfismo tra varietà algebriche affini è continuo

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#) e siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ [varietà algebriche affini](#). (Vedi [Spazio Affine](#))

125.1 Proposizione

Il [morfismo](#) $F : X \longrightarrow Y$ è una [funzione continua](#) rispetto alla [topologia di Zariski](#).

125.1.1 Dimostrazione

Sia $C \subseteq Y$ un chiuso. La tesi è che $F^{-1}(C)$ sia chiuso in X .

Siccome Y è un chiuso di \mathbb{A}^m , allora C è un chiuso di \mathbb{A}^m (vedi Sottospazio topologico), e dunque esistono $g_1, \dots, g_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ tali che

$$C = V(g_1, \dots, g_s) = V(g_1) \cap \dots \cap V(g_s).$$

(vedi Luogo di zeri)

Dunque $F^{-1}(C) = \bigcap F^{-1}(V(g_i))$. (vedi Immagine e retroimmagine tramite una funzione).

È sufficiente dimostrare che $F^{-1}(V(g))$ sia chiuso.

$a = (a_1, \dots, a_n) \in F^{-1}(V(g))$ se e solo se $F(a) \in V(g)$ (vedi Immagine e retroimmagine tramite una funzione), se e solo se $g(F(a)) = 0$. Pertanto

$$F^{-1}(V(g)) = V(g \circ F).$$

126 Morfismo tra varietà algebriche affini non è chiuso

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e siano $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ varietà algebriche affini. (Vedi Spazio Affine).

126.1 Osservazione

I morfismi tra varietà algebriche affini non sono chiusi.

126.1.1 Controesempio

Consideriamo $X = V(xy - 1) \subseteq \mathbb{A}^2$ (vedi Luogo di zeri e Anello-dei-polinomi), e sia

$$\begin{aligned} F : \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathbb{A}^1 \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Si ha che $F(X) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$, che non è chiuso in \mathbb{A}^1 .

- 127 Funzioni aperte e chiuse**
- 127.1 Caratterizzazione biezioni aperte
- 128 Restrizione di funzione aperta ad un aperto**
- 129 Restrizione di una funzione chiusa ad un chiuso**
- 130 Spazio affine unidimensionale senza un punto non è chiuso**

130.1 Proposizione

Sia \mathbb{K} un [Campo Algebricamente Chiuso](#), e sia \mathbb{A}^1 lo [Spazio Affine](#). Allora per ogni $p \in \mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^1 \setminus \{p\}$ non è chiuso nella [topologia di Zariski](#).

130.1.1 Dimostrazione

$\mathbb{A}^1 \setminus \{p\}$ è chiuso, per definizione, se è una [Varietà Algebrica Affine](#).

Supponiamo per assurdo che lo sia. Allora esistono $f_1, \dots, f_k \in \mathbb{K}[x]$ (vedi [anello dei polinomi](#)) tali che

$$\mathbb{A}^1 \setminus \{p\} = V(f_1, \dots, f_k) = V(f_1) \cap \dots \cap V(f_k)$$

(vedi [Luogo di zeri](#)).

Per il [Teorema Fondamentale dell'Algebra](#), i polinomi di $\mathbb{K}[x]$ di grado d hanno al massimo d zeri, e dunque $V(f_i)$ è un insieme finito, così come $V(f_1, \dots, f_k)$.

Ma \mathbb{K} è algebricamente chiuso, [dunque \$\mathbb{K}\$ è infinito](#), e quindi anche \mathbb{A}^1 e $\mathbb{A}^1 \setminus \{p\}$ lo sono. Assurdo.

131 Morfismo tra varietà algebriche proiettive

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#) e siano $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ [varietà algebriche proiettive](#). (Vedi [spazio proiettivo](#))

131.1 Definizione

La funzione $F : X \longrightarrow Y$ è un morfismo di varietà proiettive se, $\forall p \in X$:

- esiste $U \subseteq X$ [aperto](#) con $p \in U$;
- esistono F_0, \dots, F_m [polinomi omogenei](#) dello stesso [grado](#) senza zeri comuni su U tali che $F|_U = [F_0(x) : \dots : F_m(x)]$.

131.2 Isomorfismo tra varietà algebriche proiettive

131.2.1 Definizione

Un morfismo $F : X \rightarrow Y$ è un **isomorfismo** se

- F è **biunivoca** (e quindi esiste F^{-1});
- F^{-1} è un morfismo.

132 Curva Razionale Normale

Sia \mathbb{K} un **campo algebricamente chiuso**. La curva razionale normale è una generalizzazione della **Cubica Gobba**.

Si definisce

$$\begin{aligned}\nu_d : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_{[z_0:\dots:z_d]}^d \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_1^d]\end{aligned}$$

(vedi **Spazio Proiettivo e Varietà Algebrica Proiettiva**)

Ovviamente ν_d è un **morfismo**. Sia $C := \nu_d(\mathbb{P}^1)$. C è la curva razionale normale.

132.1 C è una **Varietà Algebrica Proiettiva**.

Sia A la **matrice**:

$$A = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & \dots & z_{d-1} \\ z_1 & z_2 & \dots & z_d \end{bmatrix}$$

e sia $Y = V(\text{rank } A - 1)$ (vedi **Luogo di zeri e Rango di una matrice**). Questa è una espressione polinoimale, infatti $\text{rank } A = 1$ se e solo se tutti i **minor** 2×2 di A hanno determinante nullo. Pertanto Y è il luogo delle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} z_0 z_2 = z_1^2 \\ z_1 z_3 = z_2^2 \\ \vdots \\ z_{d-2} z_d = z_{d-1}^2 \end{cases}$$

Si ha che $C = Y$.

132.1.1 $C \subseteq Y$

Questa inclusione è ovvia: se $p = [p_0 : p_1] \in \mathbb{P}^1$ e $q = [q_0 : \dots : q_d] = \nu_d(p)$, allora

$$q = [p_0^d : p_0^{d-1}p_1 : \dots : p_1^d]$$

Facendo i calcoli si ha

$$\begin{aligned} q_0 q_2 &= p_0^d p_0^{d-2} p_1^2 = p_0^{2d-2} p_1^2 = (p_0^{d-1} p_1)^2 = q_3^2 \\ &\vdots \\ q_i q_{i+2} &= (p_0^{d-i} p_1^i) (p_0^{d-i-2} p_1^{i+2}) = p_0^{d-i+d-i-2} p_1^{2i+2} \\ &= p_0^{2(d-i-1)} p_1^{2(i+1)} = (p_0^{d-i-1} p_1^{i+1})^2 = q_{i+1}^2 \end{aligned}$$

e dunque i punti di C sono soluzioni del sistema.

132.1.2 $Y \subseteq C$

Sia $p \in Y$, $p = [p_0 : \dots : p_d]$. p risolve il sistema di equazioni.

Se $p_0 = 0$ allora $p_1 = 0$ (applicando la prima equazione). Se $p_1 = 0$ allora $p_2 = 0$ (applicando la seconda equazione). In generale, se $p_i = 0$ per $i \leq d-2$ si ha che $p_{i+1} = 0$ applicando la $i+1$ -esima equazione.

Dunque, se $p_0 = 0$ allora $\forall i = 1, \dots, d-1$ si ha che $p_i = 0$. Ovviamente $p_d = 1$, altrimenti $p \notin \mathbb{P}^d$.

Allo stesso modo, se $p_d = 0$, allora $\forall i = 2, \dots, d-1$ si ha che $p_i = 0$. Ovviamente $p_0 = 1$, altrimenti $p \notin \mathbb{P}^d$.

Quindi almeno uno tra p_0 e p_d è non nullo.

Suppongo $p_0 \neq 0$. Allora posso scrivere

$$p = [1 : t_1 : \dots : t_d]$$

tali che

$$\begin{cases} t_2 = t_1^2 \\ t_1 \cdot t_3 = t_2^2 \\ t_2 \cdot t_4 = t_3^2 \\ \vdots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_2 = t_1^2 \\ t_3 = t_2^2/t_1 = t_1^3 \\ t_4 = t_3^2/t_2 = t_1^4 \\ \vdots \\ t_i = t_1^i \end{cases}$$

e dunque $p = \nu_d([1 : t_1])$, e $p \in C$.

132.2 ν_d è un isomorfismo

Consideriamo la corestrizione

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C \subseteq \mathbb{P}_{[z_0:\dots:z_d]}^d \\ [x_0 : x_1] &\longmapsto [x_0^d : x_0^{d-1} x_1 : \dots : x_1^d] \end{aligned}$$

Questa mappa è un [isomorfismo](#). Per dimostrarlo, si scrive esplicitamente l'inversa.

Fissiamo $p \in C$.

Sia $H_i = V(z_i)$ per ogni $i = 0, \dots, d$. Per l'argomento visto sopra, $p \notin H_0 \cap H_d$ e dunque $p \in U_0 \cup U_d$, dove

$$U_i = \{z_i \neq 0\}$$

È possibile dunque definire l'inversa come:

$$\nu_d^{-1}(z) = \begin{cases} [z_0 : z_1] & z \in C \cap U_0 \\ [z_{d-1} : z_d] & z \in C \cap U_d \end{cases}$$

132.2.1 ν_d^{-1} è veramente l'inversa

Sia $p = \nu_d[x_0 : x_1]$, quindi

$$p = [x_0^d : x_0^{d-1}x_1 : \dots : x_0x_1^{d-1} : x_1^d]$$

Se $p \in U_0$, si ha che $\nu_d^{-1}(p) = [x_0^d : x_0^{d-1}x_1] = x_0^{d-1}[x_0 : x_1] = [x_0 : x_1]$. Se $p \in U_d$, si ha che $\nu_d^{-1}(p) = [x_0x_1^{d-1} : x_1^d] = x_1^{d-1}[x_0 : x_1] = [x_0 : x_1]$.

132.2.2 ν_d^{-1} è ben definito.

Sia ora $z \in C \cap U_0 \cap U_d$, $z = \nu_d[x_0 : x_1]$

$$\frac{z_1}{z_0} = \frac{x_0^{d-1}x_1}{x_0^d} = \frac{x_1}{x_0} = \frac{x_1 x_1^{d-1}}{x_0 x_1^{d-1}} = \frac{z_d}{z_{d-1}}$$

e dunque $[z_0 : z_1] = [z_{d-1} : z_d]$.

133 Mappa di Veronese

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso. Si consideri \mathbb{P}^n con coordinate $[x_0 : \dots : x_n]$ (si veda Spazio Proiettivo).

Sia $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi, e si $S_d \subseteq S$ l'insieme dei polinomi omogenei di grado d . Sia $N := \dim S_d - 1$ (vedi Dimensione di S_d come spazio vettoriale):

$$N = \binom{n+d}{d} - 1$$

Consideriamo $I = (i_0, \dots, i_n)$ un multi-indice; definiamo $x^I \in S$ come

$$x^I := x_0^{i_0} \cdot \dots \cdot x_n^{i_n}$$

Su \mathbb{P}^N usiamo le coordinate $\{z_I\}_{I \in D}$, dove

$$D = \left\{ I = (i_0, \dots, i_n) : \sum_{j=0}^n i_j = d, i_j \geq 0 \right\}$$

ordinate in ordine lessicografico. Questo è semplicemente il “nome” della coordinata, per semplicità. Ad esempio, se $n = d = 2$ e $N = 5$, le coordinate di \mathbb{P}^5 saranno

$$[z_{(0,0,2)} : z_{(0,1,1)} : z_{(0,2,0)} : z_{(1,0,1)} : z_{(1,1,0)} : z_{(2,0,0)}]$$

I multiindici sono solo un “nome” per le coordinate di \mathbb{P}^N .

Si definisce la **mappa di Veronese**

$$\begin{aligned}\nu_{n,d} : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^N = \mathbb{P}(S_d^*) \\ [x_0 : \dots : x_n] &\longmapsto [\dots : x^I : \dots]\end{aligned}$$

(vedi [Spazio vettoriale duale](#))

Questa mappa è un **morfismo** tra **varietà algebriche proiettive**, con una definizione globale sul suo dominio.

133.1 Varietà di Veronese

L’immagine $V_{n,d} := \nu_{n,d}(\mathbb{P}^n)$ è detta **varietà di Veronese** di tipo (n, d) .

133.1.1 Dimostrazione che sia realmente una varietà

Per $I, J \in D$, poniamo $I + J = (i_0 + j_0, \dots, i_n + j_n)$.

Posto Y il [luogo delle soluzioni](#) delle equazioni quadratiche

$$z_I z_J = z_K z_L \quad \forall I, J, K, L : I + J = K + L$$

si ha che $V_{n,d} = Y$.

$V_{n,d} \subseteq Y$ Sia $p = [p_0 : \dots : p_n] \in \mathbb{P}^n$, e consideriamo $\nu_{n,d}(p) = [\dots : P_I : \dots]$ con le coordinate di cui sopra. Siano

$$\begin{array}{lll} I = (i_0, \dots, i_n) & & i_0 + \dots + i_n = d \\ J = (j_0, \dots, j_n) & & j_0 + \dots + j_n = d \\ K = (k_0, \dots, k_n) & & k_0 + \dots + k_n = d \\ L = (l_0, \dots, l_n) & & l_0 + \dots + l_n = d \end{array}$$

tali che $I + J = K + L$.

$$\begin{aligned}P_I P_J &= (x_0)^{i_0} \dots (x_n)^{i_n} \cdot (x_0)^{j_0} \dots (x_n)^{j_n} \\ &= (x_0)^{i_0+j_0} \dots (x_n)^{i_n+j_n} \\ &= (x_0)^{k_0+l_0} \dots (x_n)^{k_n+l_n} \\ &= (x_0)^{k_0} \dots (x_n)^{k_n} \cdot (x_0)^{l_0} \dots (x_n)^{l_n} = P_K P_L\end{aligned}$$

$Y \subseteq V_{n,d}$ Sia K_ℓ il multi-indice composto da soli zeri, ma con d nella posizione ℓ -esima:

$$K_\ell = (0, \dots, 0, d, 0, \dots, 0)$$

per $0 \leq \ell \leq n$.

Sia dunque $P = [\dots : P_I : \dots] \in Y$.

1. Claim: esiste ℓ_0 tale $P_{K_{\ell_0}} \neq 0$. Sia i_{\max} il massimo indice che compare tra tutti i multiindici I tali che $P_I \neq 0$. La tesi è dimostrare che $i_{\max} = d$.

Sia $P_{(\dots : i_{\max} : \dots)} \neq 0$. Se $i_{\max} \leq d-1$, allora esiste un indice $j > 0$ nel multiindice $(\dots : i_{\max} : \dots)$. Sia dunque I questo multiindice:

$$I = (\dots : i_{\max} : \dots : j : \dots)$$

Siccome $j \geq 0$ e $i_{\max} \leq d-1$, entrambi questi indici sono elementi di D :

$$\begin{aligned} J &= (\dots, i_{\max} + 1, \dots, j - 1, \dots) \\ K &= (\dots, i_{\max} - 1, \dots, j + 1, \dots) \end{aligned}$$

e inoltre $J + K = I + I$. Dunque è soddisfatta l'equazione

$$P_I^2 = P_J P_K$$

Siccome $P_I \neq 0$, necessariamente $P_J \neq 0 \neq P_K$, e pertanto è presente un indice $> i_{\max}$. Assurdo.

Dunque $i_{\max} = d$, e la tesi è dimostrata.

2. **TODO** $P \in V_{n,d}$ MATEMATICA_LM:GEO_ALG Supponiamo che $P_{K_0} \neq 0$. Siano:

$$\begin{aligned} q_0 &\coloneqq P_{(d,0,\dots,0)} = P_{K_0} \neq 0 \\ q_1 &\coloneqq P_{(d-1,1,0,\dots,0)} \\ &\vdots \\ q_i &\coloneqq P_{(d-1,0,\dots,1,\dots,0)} \end{aligned}$$

dove ad q_i , il multiindice è composto da $d-1$ in posizione zero, 1 in posizione i , e 0 altrove.

Sicuramente $[q_0 : \dots : q_n] \in \mathbb{P}^n$, siccome $q_0 \neq 0$ per ipotesi.

Sia $\nu_{n,d}([q_0 : \dots : q_n]) = Q := [\dots : Q_I : \dots]$ Vale che $P = Q$. Infatti, se $I = (i_0, \dots, i_n)$:

$$\begin{aligned} Q_I &= (q_0)^{i_0} \dots (q_n)^{i_n} \\ &= (P_{(d,0,\dots,0)})^{i_0} (P_{(d-1,1,0,\dots,0)})^{i_1} \dots (P_{(d-1,0,\dots,0,1)})^{i_n} \end{aligned}$$

133.2 TODO $\nu_{n,d}$ è un **Isomorfismo tra varietà algebriche proiettive** matematica_lm:geo_alg

134 Rango di una matrice

135 Minori di una matrice

136 Mappa di Segre

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

136.1 TODO Versione Baby

matematica_lm:geo_alg

Si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}_{[z_0:\dots:z_3]}^3 \\ ([x_0:x_1], [y_0:y_1]) &\longmapsto [x_0y_0 : x_0y_1 : x_1y_0 : x_1y_1]\end{aligned}$$

(vedi Spazio Proiettivo).

Sia $Q = \sigma(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$. È possibile dimostrare che

$$Q = V(z_0z_3 - z_1z_2)$$

(vedi Luogo di zeri)

136.2 Morfismo di Segre.

Siano $m, n \geq 0$, e sia $N = (n+1)(m+1) - 1$, e si consideri la seguente applicazione:

$$\begin{aligned}\sigma_{n,m} : \mathbb{P}_x^n \times \mathbb{P}_y^m &\longrightarrow \mathbb{P}_{z=z_{ij}}^N \\ ([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) &\longmapsto [\dots : x_iy_j : \dots]\end{aligned}$$

Segue da banali calcoli che $\sigma_{n,m}$ sia ben definita. Sia $\Sigma_{m,n} := \sigma_{n,m}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m)$.

La mappa $\sigma_{n,m}$ è descritta dalle equazioni $z_{ij} = x_iy_j$, ovvero

$$A := \begin{bmatrix} z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0m} \\ \vdots & & & \\ z_{n0} & x_{z_{n1}} & \dots & z_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 & \dots & y_m \end{bmatrix}$$

Notiamo che la matrice A è di **rango** 1, poiché ogni riga è multipla di $[y_0 \ \dots \ y_m]$. Inoltre, la condizione $\text{rank } A = 1$ è polinomiale: tutti i determinanti dei minori 2×2 sono nulli.

Dunque: $\Sigma_{n,m} \subseteq V(\text{rank } A = 1)$ (vedi Luogo di zeri).

136.2.1 Dimostriamo l'uguaglianza

Sia $p \in V(\text{rank } A = 1)$, $p = [\dots : p_{ij} : \dots]$.

Supponiamo che $p_{00} \neq 0$. È dunque possibile porre $p_{00} = 1$. Considerando l'equazione, presente tra quelle che definiscono $\text{rank } A = 0$:

$$z_{00} z_{ij} = z_{i0} z_{0j}$$

e applicandola a p , si ottiene che $p_{ij} = p_{i0} p_{0j}$.

Dunque, posti

$$\begin{aligned} A &= [1 : p_{10} : p_{20} : \dots : p_{n0}] \in \mathbb{P}^n \\ B &= [1 : p_{01} : p_{02} : \dots : p_{0m}] \in \mathbb{P}^m \end{aligned}$$

si ha che $p = \sigma_{n,m}(A, B)$.

136.2.2 La mappa di Segre è iniettiva

Siano $(A, B), (A', B') \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ tali che

$$\sigma_{n,m}(A, B) \sigma_{n,m}(A', B') = P$$

con $P = [\dots : p_{ij} : \dots]$.

Supponiamo che $p_{00} \neq 0$. È possibile porre quindi $p_{00} = 1$. Segue che, se

$$\begin{aligned} A &= [a_0 : \dots : a_n] \\ B &= [b_0 : \dots : b_m] \\ A' &= [a'_0 : \dots : a'_n] \\ B' &= [b'_0 : \dots : b'_m] \end{aligned}$$

allora

1. $a'_0 b'_0 \neq 0$ e pertanto, poiché \mathbb{K} è un campo, $a'_0 \neq 0$ e $b'_0 \neq 0$. È dunque possibile porre entrambi = 1, e si ottiene che

$$\begin{aligned} A' &= [1 : a'_1 : \dots : a'_n] \\ B' &= [1 : b'_1 : \dots : b'_m] \end{aligned}$$

1. $a_0 b_0 \neq 0$ e pertanto, poiché \mathbb{K} è un campo, $a_0 \neq 0$ e $b_0 \neq 0$. È dunque possibile porre entrambi = 1, e si ottiene che

$$\begin{aligned} A &= [1 : a_1 : \dots : a_n] \\ B &= [1 : b_1 : \dots : b_m] \end{aligned}$$

A questo punto si sfrutta il fatto che:

$$\begin{aligned} a_i &= a_i b_0 = p_{i0} = a'_i b'_0 = a'_i & \forall i = 1, \dots, n \\ b_j &= a_0 b_j = p_{0j} = a'_0 b'_j = b'_j & \forall j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

e pertanto $A = A'$ e $B = B'$.

136.3 Prodotto di spazi proiettivi come varietà proiettiva

Si definisce $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ come varietà proiettiva con la struttura indotta da $\sigma_{n,m}$,

$$\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}^N$$

137 Multi-indice

138 Spazio vettoriale duale

139 Varietà Algebrica Quasi Proiettiva QP

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

139.1 Definizione

Una varietà quasi proiettiva è (sono fatti equivalenti):

1. un aperto di una varietà proiettiva;
2. un localmente chiuso (ovvero intersezione di un aperto e di un chiuso) di \mathbb{P}^n . (vedi Spazio Proiettivo)

139.1.1 Topologia di Zariski qp

La topologia di Zariski di una varietà qp è la topologia di sottospazio rispetto alla topologia di Zariski proiettiva.

139.1.2 Osservazione

Una varietà proiettiva è una varietà QP, ma anche una Varietà Algebrica Affine è una varietà QP.

140 Insieme localmente chiuso

141 Morfismo tra varietà algebriche QP

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso e siano X, Y varietà QP.

141.1 Definizione

La funzione $F : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà qp se, $\forall p \in X$:

- esiste $U \subseteq X$ aperto con $p \in U$;
- esistono F_0, \dots, F_m polinomi omogenei dello stesso grado senza zeri comuni su U tali che $F|_U = (F_0(x), \dots, F_m(x))$.

141.1.1 Osservazione

È possibile dimostrare che quando le varietà QP coinvolte sono [varietà affini](#), allora la definizione di morfismo QP è equivalente a quella di [morfismo tra varietà affini](#).

141.2 Isomorfismo tra varietà algebriche QP

141.2.1 Definizione

Un morfismo $F : X \rightarrow Y$ è un [isomorfismo](#) se

- F è [biunivoca](#) (e quindi esiste F^{-1});
- F^{-1} è un morfismo.

142 Proiezioni da prodotti di varietà proiettive sono morfisi

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#). Consideriamo la proiezione

$$\begin{aligned}\pi_1 : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\ ([x_0 : \dots : x_n], [y_0 : \dots : y_m]) &\longmapsto [x_0 : \dots : x_n]\end{aligned}$$

(vedi [Spazio Proiettivo](#)).

142.1 Proposizione

π_1 è un [morfismo](#), dove $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ è una [varietà proiettiva](#) con la [struttura indotta](#) dalla [mappa di Segre](#).

142.1.1 Dimostrazione

Per definizione, questo significa chiedersi se $\pi_1 \circ \sigma^{-1} : \Sigma_{n,m} \rightarrow \mathbb{P}^n$ sia un morfismo, dove σ è la mappa di Segre della dimensione giusta.

$$\begin{array}{ccc} & \Sigma_{n,m} & \\ \sigma \nearrow & & \searrow \pi_1 \circ \sigma^{-1} \\ \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{P}^n \end{array}$$

Sia $p \in \mathbb{P}_{z=z_{ij}}^N$, dove $N = (n+1)(m+1) - 1$. Pertanto

$$p = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0m} \\ \vdots & & & \\ p_{n0} & p_{n1} & \dots & p_{nm} \end{bmatrix} \neq 0$$

Pertanto esiste una colonna non nulla. Dunque $\mathbb{P}^N = \bigcup A_j$, dove A_j è l'insieme di punti con la j -esima colonna non nulla. A_j è un [aperto](#), poiché complementare dell'insieme dei punti con la j -esima colonna nulla (vedi [Topologia di Zariski proiettiva](#).)

Su $\Sigma_{n,m} \subseteq \bigcup A_j$ si definisce la mappa

$$p = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0m} \\ \vdots & & & \\ p_{n0} & p_{n1} & \dots & p_{nm} \end{bmatrix} \longmapsto [p_{0j} : p_{1j} : \dots : p_{nj}] \in \mathbb{P}^n \text{ se } p \in A_j$$

Questo è un **morfismo**. Infatti

1. è localmente polinomiale e composta da polinomi omogenei di primo grado, senza zeri comuni sugli aperti A_j (siccome per definizione su A_j la j -esima colonna è non nulla);
2. è ben definita: infatti, se $p \in \Sigma_{n,m}$ allora $\text{rank } p = 1$ (vedi [Rango di una matrice](#)), e pertanto tutte le colonne sono proporzionali.

Resta da dimostrare che questa mappa sia effettivamente $\pi \circ \sigma^{-1}$. Sia $p \in \Sigma_{n,m}$ come sopra, $p = \sigma(x, y)$ con $x = [x_0 : \dots : x_n]$, $y = [y_0 : \dots : y_m]$.

Applicando la mappa a p si ottiene

$$\begin{aligned} [p_{0j} : p_{1j} : \dots : p_{nj}] &= [x_0 y_j : x_1 y_j : \dots : x_n y_j] \\ &= [x_0 : x_1 : \dots : x_n]. \end{aligned}$$

143 Copie dello spazio proiettivo dentro la varietà di Segre sono lineari

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#).

143.1 Proposizione

Sia $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \Sigma_{n,m}$ la [mappa di Segre](#). (vedi [Spazio Proiettivo](#)). Allora, per $p \in \mathbb{P}^n$ e $q \in \mathbb{P}^m$, gli spazi

$$\sigma(\{p\} \times \mathbb{P}^m), \quad \sigma(\mathbb{P}^n \times \{q\})$$

sono descritti da equazioni di primo grado.

143.1.1 Dimostrazione

Fissiamo $p \in \mathbb{P}^n$, $p = [p_0 : \dots : p_n]$.

Si ha che

$$z = [\dots : z_{ij} : \dots] \in \sigma(\{p\} \times \mathbb{P}^m)$$

se e solo se le colonne sono proporzionali a p . Pertanto, se e solo se

$$\forall j, \quad \text{rank} \begin{bmatrix} z_{0j} & p_0 \\ z_{1j} & p_1 \\ \vdots & \\ z_{nj} & p_n \end{bmatrix} = 1$$

(vedi [Rango di una matrice](#)). Come già osservato, questo succede se e solo se i [determinanti](#) dei [minori](#) della [matrice](#) sono tutti nulli. Queste condizioni sono tutte polinomiali di primo grado.

144 Luogo di zeri di polinomi dentro prodotti di spazi proiettivi

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#), e sia $\Sigma_{n,m} \subseteq \mathbb{P}_{z=z_{ij}}^{N=(n+1)(m+1)-1}$ la [varietà di Segre](#) (vedi [Spazio Proiettivo](#)) Preso F un [polinomio omogeneo](#) in $\mathbb{K}[z_{ij}]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) di [grado](#) d , si ha che

$$Y := V(F) \cap \Sigma_{n,m}$$

(vedi [Luogo di zeri](#)) è una [varietà algebrica](#) di \mathbb{P}^N ed è $\subseteq \Sigma_{n,m}$. Pertanto, per [definizione](#), $\sigma^{-1}(Y)$, dove σ è la [mappa di Segre](#) della dimensione giusta, è una varietà algebrica di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

In Y , attraverso la mappa di Segre, posso scrivere $z_{ij} = x_i y_j$. Posso pertanto ottenere delle equazioni polinomiali in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ [biomogenee](#) di [bigrado](#) (d, d) .

144.1 Proposizione

Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m]$, F [biomogeneo](#) di [bigrado](#) (d, e) . È ben definito

$$X = V(F) \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$$

(vedi [Luogo di zeri di polinomi](#)). X è una [varietà algebrica](#) proiettiva.

Equivalentemente, esistono $F_1, \dots, F_k \in \mathbb{K}[z_{ij}]$ polinomi omogenei tali che

$$\sigma(V(F)) = \Sigma_{n,m} \cap V(F_1, \dots, F_k)$$

144.1.1 Dimostrazione

Caso $e = d$ F è un polinomio biomogeneo di [bigrado](#) (d, d) . Pertanto, siccome in $\Sigma_{n,m}$ si ha che $z_{ij} = x_i y_j$, si ottiene un polinomio omogeneo $F_1 \in \mathbb{K}[z_{ij}]$ sostituendo in F a ciascun prodotto $x_i y_j$ la variabile z_{ij} .

Caso $d < e$ Osserviamo che $F = 0$ se e solo se

$$x_0 F = x_1 F = \dots = x_n F = 0$$

Iterando questo processo, si ottiene che $F = 0$ se e solo se

$$x_0^{e-d} F = x_1^{e-d} F = \dots = x_n^{e-d} F = 0$$

Tutti i polinomi $x_i^{e-d} F$ sono biomogenei di [bigrado](#) (e, e) e pertanto, applicando il punto precedente, si ha la tesi. Inoltre $k \leq n + 1$.

145 Polinomi BiOmogenei

146 Bigrado di un polinomio

147 Prodotti di varietà QP

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

147.1 Caso proiettivo

Siano $X \subseteq \mathbb{P}_x^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}_y^m$ due varietà algebriche proiettive,

$$\begin{aligned} X &= V(F_1, \dots, F_k) \\ Y &= V(G_1, \dots, G_l) \end{aligned}$$

con $F_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, $G_j \in \mathbb{K}[y_0, \dots, y_m]$. (Vedi [Luogo di zeri, Anello-dei-polinomi](#)).

Posto $d_i := \deg F_i$, $e_j := \deg G_j$ (vedi [Grado-Polinomi](#)), poiché

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] &\subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m] \\ \mathbb{K}[y_0, \dots, y_m] &\subseteq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_m] \end{aligned}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \text{bideg}_{x,y} F_i &= (d_i, 0) \\ \text{bideg}_{x,y} G_j &= (0, e_j) \end{aligned}$$

(vedi [Bigrado di un polinomio](#))

Pertanto, tutti gli F_i, G_j sono polinomi biomogenei, e quindi

$$\begin{aligned} V(F_1, \dots, F_k) &\subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \\ V(G_1, \dots, G_l) &\subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \end{aligned}$$

sono varietà algebriche di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$. In particolare

$$\begin{aligned} V(F_1, \dots, F_k) &= X \times \mathbb{P}^m \\ V(G_1, \dots, G_l) &= \mathbb{P}^n \times Y \end{aligned}$$

147.1.1 Definizione

Si definisce il prodotto tra X e Y come

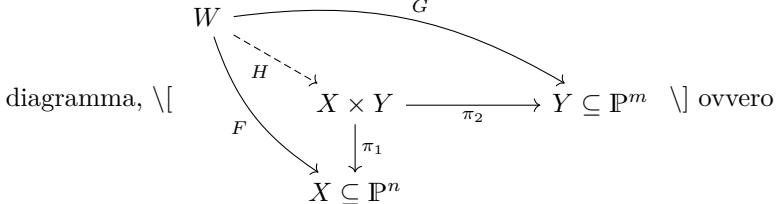
$$X \times Y := (X \times \mathbb{P}^m) \cap (\mathbb{P}^n \times Y) = V(F_1, \dots, F_k, G_1, \dots, G_l)$$

sottovarietà di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

147.1.2 Proposizione

È rispettata la proprietà universale del prodotto per la tripla $(X \times Y, \pi_1, \pi_2)$, dove π_1, π_2 sono le proiezioni.

Dimostrazione Sia W una varietà algebrica proiettiva, e siano $F : W \rightarrow X$ e $G : W \rightarrow Y$ due morfismi. Dimostriamo che esiste un unico $H : W \rightarrow X \times Y$ morfismo che fa commutare il



$$\pi_1 \circ H = F, \quad \pi_2 \circ H = G.$$

1. Esistenza di H Si definisce

$$\begin{aligned} H : W &\longrightarrow X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \\ w &\longmapsto (F(w), G(w)) \end{aligned}$$

È ovvio che la funzione rispetti le condizioni citate. È però necessario che sia un morfismo. H è un morfismo se e solo se $\sigma \circ H$ è un morfismo, dove σ è la mappa di Segre della giusta dimensione (per definizione).

Sia $p \in W$:

- poiché F è un morfismo, esiste un intorno $U \subseteq W$ di p tale che F sia localmente polinomiale, ovvero

$$F|_U = [F_0 : \dots : F_n]$$

- poiché G è un morfismo, esiste un intorno $V \subseteq W$ di p tale che G sia localmente polinomiale, ovvero

$$G|_V = [G_0 : \dots : G_m]$$

Dunque in $U \cap V$ si ha che

$$\sigma \circ H = [\dots : F_i G_j : \dots]$$

che è un morfismo.

2. Unicità di H Segue dal fatto che i morfismi sono realmente funzioni.

148 Proprietà universale del prodotto

Sia \mathcal{C} una categoria. Siano $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Un prodotto è una tripla $(X \times Y, p, q)$ con $X \times Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e

$$p \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, X), \quad q \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X \times Y, Y)$$

tale che, per ogni oggetto $H \in \text{Ob } \mathcal{C}$ e ogni coppia di frecce

$$p' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, X), \quad q' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, Y)$$

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{p'} & X \\ & \searrow h & \downarrow q \\ & X \times Y & \xrightarrow{p} X \\ & \swarrow q' & \downarrow q \\ & Y & \end{array}$$

esiste un'unica freccia $h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(H, X \times Y)$ tale che il seguente diagramma commuti: \[

\]

149 Grafico di un morfismo proiettivo è varietà

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

149.1 Proposizione

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^m$ una varietà algebrica proiettiva (vedi spazio proiettivo), e sia $F : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ un morfismo. Indicando con Γ_F il suo grafico,

$$\Gamma_F := \{(x, F(x)) \in X \times \mathbb{P}^n\} \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$$

si ha che

1. Γ_F è una sottovarietà di $X \times \mathbb{P}^n$ (vedi Prodotto di spazi proiettivi come varietà proiettiva, Prodotti di varietà QP);
2. $\Gamma_F \cong X$ isomorfismo.

149.1.1 Dimostrazione

Sottovarietà Sia $\mathcal{U} = \{U_{\alpha}\}_{\alpha}$ un ricoprimento aperto di X tale che $F|_{U_{\alpha}}$ è polinomiale per ogni α .

Sia $W_{\alpha} := U_{\alpha} \times \mathbb{P}^m$. W_{α} è aperto.^[29] Quindi $\mathcal{W} := \{W_{\alpha}\}_{\alpha}$ è un ricoprimento aperto di $X \times \mathbb{P}^m$.

Sia ora $x \in U_{\alpha}$, e sia $F = [F_0 : \dots : F_m]$ la scrittura polinomiale di F su U_{α} . $(x, P) \in \Gamma_F \cap W_{\alpha}$ se e solo se $P = F(x)$, ovvero se e solo se, posto $P = [P_0 : \dots : P_m]$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} P_0 & P_1 & \dots & P_m \\ F_0(x) & F_1(x) & \dots & F_m(x) \end{bmatrix} = 1$$

(vedi Rango di una matrice). Questo equivale a richiedere che tutti i minori 2×2 abbiano determinante nullo. Dunque

$$\Gamma_F \cap W_{\alpha} = V(y_i F_j(x_0, \dots, x_n) - y_j F_i(x_0, \dots, x_n))$$

Questi sono tutti polinomi biomogenei di bigrado $(\deg F, 2)$ (vedi grado di un polinomio), siccome tutte le F_i hanno lo stesso grado per definizione di morfismo proiettivo.

Siccome per ogni α $\Gamma_F \cap W_{\alpha}$ è chiuso, allora Γ_F è chiuso, ovvero è una varietà proiettiva.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\widetilde{F}} & \Gamma_F & \xrightarrow{\pi_1} & X \\ \text{Isomorfismo} & \text{Dal momento che è varietà, basta considerare i morfismi: } & \backslash [& & \\ & & x \longmapsto (x, F(x)) \longmapsto x & & \\ \backslash] & & & & \end{array}$$

150 Intersezione con un ricoprimento aperto è chiusa allora chiuso

150.1 Proposizione

Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{A} = \{A_\alpha\}$ un suo ricoprimento aperto. Se $C \subseteq X$ è tale che per ogni α si ha che $C \cap A_\alpha$ è chiuso allora C è chiuso.

150.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_alg

151 Proiezione su un iperpiano dentro allo spazio proiettivo

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso. Si consideri \mathbb{P}^n spazio proiettivo, e sia $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un iperpiano, ovvero il luogo degli zeri di un polinomio di primo grado:

$$H = V(F)$$

Sia $p \in \mathbb{P}^n \setminus H$ fissato. Allora per ogni $q \in \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ si definisce ℓ_{pq} la retta che passa tra p e q . La proiezione da p su H è l'applicazione

$$\begin{aligned} \pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} &\longrightarrow H \\ q &\longmapsto \ell_{pq} \cap H \end{aligned}$$

π_p è un morfismo, poiché è polinomiale. Infatti, scegliendo a dovere le coordinate, si ponga

$$\begin{aligned} p &= [0 : \cdots : 0 : 1] \\ H &= V(x_n) \end{aligned}$$

dunque, per ogni $q = [q_0 : \cdots : q_n] \neq p$ si ha che

$$\pi_p(q) = [q_0 : \cdots : q_{n-1} : 0] \in H$$

Infatti, siccome la retta ℓ_{pq} si può parametrizzare come

$$\lambda p + \mu q, \quad [\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1$$

oppure con

$$q + t p = [q_0 : \cdots : q_{n-1} : q_n + t], \quad t \in \mathbb{K}$$

e il punto di ℓ_{pq} con $x_n = 0$ ha coordinate $[q_0 : \cdots : q_{n-1} : 0]$

Se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ e $p \notin X$, allora $\pi_p|_X$ è ancora un morfismo

152 Teorema: Proiezione su un iperpiano di una varietà è varietà

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, sia $p \in \mathbb{P}^n$ fissato (vedi Spazio Proiettivo), $H \subseteq \mathbb{P}^n$ un iperpiano, e sia

$$\pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \longrightarrow H$$

la proiezione da p su H .

152.1 Teorema

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una sottovarietà algebrica proiettiva. Allora $\pi_p(X)$ è una sottovarietà di H .

152.1.1 Lemma

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ una sottovarietà algebrica proiettiva, $p \notin X$ e ℓ una qualsiasi retta per p .

$\ell \cap X \neq \emptyset$ se e solo se per ogni $F, G \in I(X)^h$ (vedi Ideale di un sottoinsieme e Polinomi Omogenei), F e G hanno uno zero in comune su $\ell \setminus \{p\}$.

Dimostrazione del lemma

1. Implicazione \rightarrow : Se $r \in \ell \cap X$ allora $r \in \ell$ e $r \neq p$, siccome $p \notin X$. Siccome $r \in X$, allora $\forall F \in I(X)^h$ si ha che $F(r) = 0$. Pertanto $r \in \ell \setminus \{p\}$ è radice comune di tutti i polinomi di $I(X)^h$.
2. Implicazione \leftarrow : Per assurdo, supponiamo ogni coppia di polinomi $F, G \in I(X)^h$ abbia uno zero in comune su $\ell \setminus \{p\}$ e che $\ell \cap X = \emptyset$.

Sia $F \in I(X)$ tale che $F(p) \neq 0$. Tale polinomio esiste poiché $p \notin X$. Infatti, si ha che $X = V(I(X)^h)$.

Siano p_1, \dots, p_k i punti di ℓ nei quali si annulla F , $p_1, \dots, p_k \notin X$ (esistono poiché per ipotesi ogni coppia di polinomi ha uno zero in comune su $\ell \setminus \{p\}$, e pertanto ogni polinomio deve avere almeno uno zero in $\ell \setminus \{p\}$). Per ogni $i = 1, \dots, k$ sia $G_i \in I(X)^h$ un polinomio tale che $G_i(p_i) \neq 0$. Tali polinomi esistono perché $p_i \notin X$.

A meno di moltiplicare per coordinate non nulle in p_i , possiamo supporre che i G_i siano tutti dello stesso grado. Pertanto

$$G := \sum_{i=1}^k \lambda_i G_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

è un polinomio omogeneo che non si annulla in nessuno degli p_i . Pertanto F e G non hanno zeri comuni su $\ell \setminus \{p\}$. Assurdo.

152.1.2 Dimostrazione del teorema

Scegliendo opportunamente le coordinate, sia

$$p = [0 : \cdots : 0 : 1], \quad H = V(x_n)$$

(vedi [Luogo di zeri](#)).

Sia $q \in H$, $q = [q_0 : \cdots : q_{n-1} : 0]$.

$q \in \pi_p(X)$ se e solo se la [retta](#) ℓ_{pq} che passa per p e per q interseca X , ovvero se e solo se

$$\ell_{pq} \cap X \neq \emptyset$$

Per il lemma, questo è vero se e solo se per ogni $F, G \in I(X)^h$ esiste $r \in \ell_{pq} \setminus \{p\}$ tali che $F(r) = G(r) = 0$.

È possibile parametrizzare la retta $\ell_{pq} \setminus \{p\}$ con un unico parametro,

$$\ell : q + t p$$

ovvero $\ell(t) : [q_0 : \cdots : q_{n-1} : t]$. Dunque F e G hanno uno zero in comune su ℓ_{pq} , per definizione, sse esiste t_0 tale che

$$F(\ell(t_0)) = G(\ell(t_0))$$

$F \circ \ell$ e $G \circ \ell$ sono polinomi di $\mathbb{K}[t]$. Questi polinomi hanno uno zero comune se e solo se hanno un [fattore](#) non costante in comune (poiché \mathbb{K} algebricamente chiuso), se e solo se (per il [lemma](#), vedi [Risultante](#))

$$\text{Res}(F \circ \ell, G \circ \ell) = 0$$

Ma per costruzione $\text{Res}(F \circ \ell, G \circ \ell) = \text{Res}_{x_n}(F, G)(q)$ (vedi [Risultante per polinomi in più variabili](#)), e pertanto

$$q \in \pi_p(X) \iff \text{Res}_{x_n}(F, G)(q) = 0$$

Siccome $\text{Res}_{x_n}(F, G)$ è un [polinomio omogeneo](#), allora

$$\pi_p(X) = V\left(\{\text{Res}_{x_n}(F, G) : F, G \in I(X)^h\}\right)$$

153 Fattori non costanti comuni tra polinomi

Sia A un [UFD](#). ([Allora](#) $A[X]$ è un UFD)

Siano $f, g \in A[x]$,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_0 \end{aligned}$$

153.1 Lemma 1

f e g hanno fattori comuni non costanti se e solo se esiste $h \in A[x]$ tale che

- $\deg h < n + m = \deg fg$ (vedi Grado-Polinomi)
- f e g dividono h .

153.1.1 Dimostrazione

“ \rightarrow ” Supponiamo che f e g abbiano come fattore comune non costante $k \in A[x]$:

$$f = uk, \quad g = vk$$

con $u, v \in A[x]$, $\deg u < \deg f$, $\deg v < \deg g$.

Allora si ponga $h = uvk$.

$$\deg h = \deg u + \deg vk < \deg f + \deg g = n + m$$

“ \leftarrow ” Sia $h = uf = vg$. Allora $\deg(u) = \deg h - \deg f < n = \deg g$ Dunque i fattori di g non possono essere dentro ad u , e pertanto ci sono fattori di g dentro ad f .

153.2 Matrice di Sylvester

La matrice di Sylvester tra f e g è una matrice $(n+m) \times (n+m)$

$$S_{f,g} = \begin{bmatrix} \overbrace{a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m}^{m+1} & \overbrace{0 \ 0 \ \dots \ 0}^{n-1} \\ 0 \ a_0 \ a_1 \ \dots \ a_m & 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \ddots \ \ddots \\ 0 \ \dots \ 0 \ a_0 & \cdots \ \cdots \ \cdots \ a_m \\ \hline b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n & 0 \ 0 \ \dots \ 0 \\ 0 \ b_0 \ b_1 \ \dots \ b_n & 0 \ \dots \ 0 \\ \vdots & \ddots \ \ddots \\ 0 \ \dots \ 0 \ b_0 & \cdots \ \cdots \ \cdots \ b_n \end{bmatrix}_{n \times m}$$

Il risultante è

$$\text{Res}(f, g) := \det S_{f,g} \in A$$

(vedi Determinante di una matrice)

153.3 Lemma 2

f e g hanno un fattore non costante in comune se e solo se $\text{Res}(f, g) = 0$.

153.3.1 Dimostrazione

Dal lemma 1, f, g hanno un fattore non costante in comune se e solo se esiste $h \in A[x]$ di grado minore di $m + n$ divisibile per f e per g . Ma tale h esiste se e solo se i polinomi seguenti sono [linearmente dipendenti](#):

$$E = \{f, xf, x^2f, \dots, x^{n-1}f, g, xg, x^2g, \dots, x^{m-1}g\}$$

- Se tali polinomi sono linearmente dipendenti allora esiste $\{\alpha_i\}_{i=0}^{n+m-1}$ non tutti nulli tale che

$$\alpha_0 f + \alpha_1 xf + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1} f + \alpha_n g + \alpha_{n+1} xg + \dots + \alpha_{n+m-1} x^{m-1} g = 0$$

Pertanto

$$\underbrace{(\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1})}_u f = \underbrace{-(\alpha_n + \alpha_{n+1} x + \dots + \alpha_{n+m-1} x^{m-1})}_v g$$

Siccome $\deg u < \deg g$, ci devono necessariamente essere dei fattori di g dentro ad f , e pertanto esiste h per il lemma precedente.

- Viceversa, se h esiste allora $h = uf = vg$ con

$$p = \deg u < \deg g = n, \quad q = \deg v < \deg f = m$$

e pertanto $uf - vg$ è [combinazione lineare](#) di elementi di E ; infatti

$$uf = (c_p x^p + \dots + c_0) f = c_p (x^p f) + \dots + c_1 (xf) c_0 f, \quad p < n$$

Siccome $uf - vg = 0$ a è combinazione lineare coefficienti non nulli, allora E è linearmente dipendente.

Siccome la Matrice di Sylvester ha per righe le componenti dei polinomi di E rispetto alla base $\{1, x, x^2, \dots, x^{m+n-1}\}$, E è linearmente dipendente se e solo se $\det S_{f,g} = 0$ (vedi [Determinante di una matrice](#)).

154 UFD

154.1 Anello di polinomi di un UFD è UFD

155 Fattorizzazione

156 Divisione

156.1 Divisione intera

156.1.1 Quoziente di una divisione intera

156.1.2 Resto di una divisione intera

157 Combinazione Lineare

158 Risultante per polinomi in più variabili

Sia A un [UFD](#). Allora anche $A[x_0, \dots, x_{\ell-1}]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) è un UFD, per induzione, dato che se A ufd allora $A[x]$ ufd.

Sia dunque \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#), e consideriamo $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_\ell] = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{\ell-1}][x_\ell]$.

Infatti per $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_\ell]$, si può pensare a

$$f(x_0, \dots, x_\ell) = \sum f_i(x_0, \dots, x_{\ell-1})x_\ell^i, \quad f_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{\ell-1}]$$

Dunque, se $f, g \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_\ell]$ si ha che (vedi [Risultante e Fattori non costanti comuni tra polinomi](#)) f e g hanno [fattori](#) non costanti (ovvero un [polinomio](#) che contiene x_ℓ) in comune se e solo se

$$\text{Res}_{x_\ell}(f, g) = 0$$

dove con Res_{x_ℓ} si intende il risultante calcolato con i coefficienti rispetto alla variabile x_ℓ . Infatti \mathbb{K} è un UFD, e dunque il risultato vale.

158.1 Proposizione

Si ha che $\text{Res}_{x_\ell}(f, g) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{\ell-1}]$ è un [polinomio omogeneo](#). Se $m = \deg f, n = \deg G$ (vedi [grado di un polinomio](#)) allora il grado del risultante è

$$m \deg_{x_\ell} G + n \deg_{x_\ell} F - \deg_{x_\ell} F \cdot \deg_{x_\ell} G$$

159 Retta proiettiva

160 Zeri di un ideale di un sottoinsieme proiettivo

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#).

160.1 Proposizione

Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ un sottoinsieme, e sia $I(Y)$ il suo **ideale**. Allora, considerando la **topologia di Zariski**, si ha che la **varietà algebrica proiettiva** (vedi [Luogo di zeri di un ideale omogeneo](#))

$$V(I(Y)) = \overline{Y}$$

(vedi [Luogo di zeri](#)) dove con \overline{Y} si intende la **chiusura** di Y nella **topologia** citata.

160.1.1 Osservazione

Se Y è una varietà algebrica, allora

$$Y = \overline{Y} = V(I(Y))$$

Inoltre, per la definizione di **ideale di un sottoinsieme** in ambito proiettivo,

$$Y = V(I(Y)^h)$$

(vedi [Polinomi Omogenei](#))

161 Cono in uno spazio proiettivo

Sia \mathbb{K} un **campo algebricamente chiuso**, e si consideri \mathbb{P}^n **spazio proiettivo**.

Siano $p \in \mathbb{P}^n$ e $X \subseteq \mathbb{P}^n \setminus \{p\}$ una **varietà algebrica**.

Si definisce il cono su X di vertice p :

$$C_p X := \bigcup_{q \in X} \ell_{pq}$$

dove ℓ_{pq} è la **retta** passante per p e q .

161.1 TODO Proposizione

`matematica_lm:geo_alg`

Questo cono è una varietà

162 Morfismo da varietà proiettiva a varietà qp è chiuso

Sia \mathbb{K} un **campo algebricamente chiuso**, e sia \mathbb{P}^n **spazio proiettivo**.

162.1 Teorema 1

Sia X una **varietà proiettiva**, Y una **varietà quasi proiettiva**. Se $f : X \rightarrow Y$ è un **morfismo**, allora f è **chiusa**.

162.2 Teorema 2

Sia X una varietà proiettiva, Y una varietà quasi proiettiva. Allora la proiezione dal prodotto su Y

$$\begin{aligned}\pi_Y : X \times Y &\longrightarrow Y \\ (x, y) &\longmapsto y\end{aligned}$$

è chiusa.

162.2.1 Relazione tra compattezza e varietà proiettive

Il teorema 2 afferma che se X è una varietà proiettiva, allora per ogni Y varietà affine la proiezione $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ è chiusa. Il Teorema di Kuratowski-Mrówka afferma che se A è un generico spazio topologico, A è compatto se e solo se per ogni spazio topologico B si ha che

$$\pi_B : A \times B \longrightarrow B$$

è chiusa.

Pertanto, in geometria algebrica, la nozione di compattezza è equivalente a quella di proiettiva.

162.2.2 Relazione tra Hausdorff e varietà qp.

Se Y è una varietà qp, allora Δ_Y (la diagonale) è chiuso dentro $Y \times Y$ (vedi Topologia prodotto). Questo non implica che Y sia T2, poiché la topologia di $Y \times Y$ non è la topologia prodotto, ma significa che tutti i teoremi che riguardano la compattezza che nella dimostrazione sfruttano l'argomento della diagonale sono ancora validi.

Questo definisce la proprietà che le varietà qp sono separate.

162.2.3 Dimostrazione che 2->1

Basta dimostrare che $f(X)$ è chiuso in Y . Infatti, se $Z \subseteq X$ è chiuso allora è varietà proiettiva, e quindi

$$f|_Z : Z \longrightarrow Y$$

è un morfismo, e quindi $f|_Z(Z) = f(Z) \subseteq Y$ è chiuso.

Si ha che il grafico di f , $\Gamma_f \subseteq X \times Y$ è una varietà (vedi Grafico di un morfismo proiettivo è varietà), e quindi è un chiuso. Pertanto $\pi_Y(\Gamma_f) = f(X)$ è chiuso, poiché per il teorema 2 π_Y è chiusa.

162.2.4 TODO Dimostrazione di 2

matematica_lm:geo_alg

È sufficiente dimostrare il teorema per $X = \mathbb{P}^n$.^[30]

(Lezione 9, appunti di Piero)

163 Teorema di Kuratowski-Mrówka

163.1 Teorema

Uno spazio topologico X è compatto se e solo se, per ogni spazio topologico Y , la proiezione

$$\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$$

è chiusa.

164 Topologia prodotto

165 Diagonale di uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico. La sua diagonale, denotata con Δ o con Δ_X è un sottoinsieme del prodotto $X \times X$,

$$\Delta := \{(x, x) \in X \times X\}$$

166 Caratterizzazione spazi T2 con la diagonale

167 Spazio topologico di Hausdorff

Uno spazio topologico X si dice di Hausdorff (oppure T2) se per ogni $p, q \in X$, se $p \neq q$ allora esistono

- U intorno aperto di p ;
- V intorno aperto di q ;

tali che $U \cap V = \emptyset$.

168 Morfismo da varietà proiettiva connessa allo spazio affine unidimensionale è costante

Corollario del TEOREMA

168.1 Corollario

Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso, sia X una varietà algebrica proiettiva e connessa. Se $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1$ (vedi Spazio Affine) è un morfismo, allora f è costante.

168.1.1 Dimostrazione

Siccome f è un morfismo, allora f è continua nella **topologia di Zariski**. Pertanto $f(X)$ è connesso.

Siccome X è una varietà algebrica proiettiva (ovvero un chiuso) e f è una funzione chiusa (per il **TEOREMA**), allora $f(X) \subseteq \mathbb{A}^1$ è chiuso. Dentro ad \mathbb{A}^1 con la **topologia di Zariski**, gli unici chiusi sono insiemi finiti di punti e \mathbb{A}^1 stesso. Infatti ciascun polinomio in una indeterminata di grado d , in un campo algebricamente chiuso, ha esattamente d zeri.

Consideriamo ora $g : X \rightarrow \mathbb{P}^1$, $g(x) = [1 : f(x)]$. g è sicuramente un **morfismo** e per il **TEOREMA** $g(X) \subseteq \mathbb{P}^1$ è chiuso. Ma $g(X) = i(f(X))$, dove l'inclusione è un **morfismo**

$$\begin{aligned} i : \mathbb{A}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ t &\longmapsto [1 : t] \end{aligned}$$

Se $f(X) = \mathbb{A}^1$, allora $g(X) = \mathbb{P}^1 \setminus \{[0 : 1]\}$ che non è chiuso dentro \mathbb{P}^1 (poiché dentro \mathbb{P}^1 gli unici chiusi sono \mathbb{P}^1 stesso e gli insiemi finiti di punti).

Pertanto $f(X)$ è un insieme finito di punti di \mathbb{A}^1 , connesso. Pertanto $f(X)$ è un punto, ed f è costante.

169 Ipersuperficie dello spazio proiettivo interseca ogni varietà connessa diversa da un solo punto.

Corollario del **TEOREMA**. Sia \mathbb{K} un campo algebricamente chiuso.

169.1 Corollario

Sia $X \subseteq \mathbb{P}^n$ (vedi **spazio proiettivo**) una varietà algebrica proiettiva connessa, $X \neq \{p\}$ per qualche p . Sia $Y \subseteq \mathbb{P}^n$ una ipersuperficie. Allora $X \cap Y \neq \emptyset$

169.1.1 Dimostrazione

Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ (vedi **Anello-dei-polinomi**) omogeneo tale che $Y = V(F)$. (vedi **Luogo di zeri**).

Se $X \cap Y = \emptyset$, allora per ogni $x \in X$ si ha che $F(x) \neq 0$.

Pertanto, se $d = \deg F$ (vedi **Grado-Polinomi**), allora le funzioni

$$f_i[x_0 : \dots : x_n] := \frac{x_i^d}{F[x_0 : \dots : x_n]}$$

sono **morfismi** $X \rightarrow \mathbb{A}^1$.

Per il **corollario precedente**, tutte queste funzioni sono costanti su X . Dunque X è composto da un unico punto. Assurdo.

170 Immagine continua di spazio connesso è connessa

171 Varietà Algebrica IPERSUPERFICIE

Una varietà algebrica X (proiettiva, affine o qp) si dice **ipersuperficie** se è definita da una singola equazione, ovvero se

$$X = V(F)$$

per un appropriato **polinomio** F (vedi [Luogo di zeri](#)).

172 Radicale di un ideale

Sia S un [anello commutativo](#), e sia $J \subseteq S$ un [ideale](#). Si definisce il **radicale di J** :

$$\sqrt{J} = r(J) = \{f \in S : \exists m \geq 1 : f^m \in J\}$$

Ovviamente $J \subseteq \sqrt{J}$.

173 Radicale di un ideale è ideale

173.1 Proposizione

Sia S un [anello commutativo](#), $J \subseteq S$ un [ideale](#) e \sqrt{J} il [radicale](#) di J . Allora \sqrt{J} è un ideale.

173.1.1 Dimostrazione

Somma Siano $f, g \in \sqrt{J}$. Allora $f^r, g^s \in J$ per qualche $r, s \in \mathbb{N}$.

Allora $(f + g)^{r+s} \in J$, poiché

$$(f + g)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} \binom{r+s}{i} f^i g^{r+s-i}$$

per il [teorema del coefficiente binomiale](#): quindi ciascun termine della somma contiene una potenza di f maggiore o uguale ad r oppure una potenza di g maggiore o uguale a s . Quindi $f + g \in \sqrt{J}$.

Prodotto Siano $f, g \in \sqrt{J}$. Allora $f^r, g^s \in J$ per qualche $r, s \in \mathbb{N}$. Senza perdita di generalità si supponga $r > s$.

Allora $(fg)^r \in J$, poiché

$$(fg)^r = f^r \cdot g^s \cdot g^{r-s}$$

con $g^{r-s} \in S$.

Quindi $fg \in \sqrt{J}$.

174 Teorema del coefficiente binomiale

175 Ideale Radicale

Sia S un [anello commutativo](#), $J \subseteq S$ un [ideale](#). J si dice **ideale radicale** o **radicale** se

$$J = \sqrt{J}$$

dove con \sqrt{J} si intende il [radicale di \$J\$](#) .

176 Nullstellensatz

176.1 Nullstellensatz

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#), e sia $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un [ideale](#). Sia $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n$ (vedi [Spazio Affine](#) e [Luogo di zeri](#)). Allora

$$I(V(J)) = \sqrt{J}$$

dove $I(V(J))$ è l'[ideale](#) del luogo di [zeri](#) di J (vedi [Varietà Algebrica Affine](#)), e \sqrt{J} è il [radicale](#) di J .

177 Nullstellensatz debole

177.1 Nullstellensatz debole

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#), e sia $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un [ideale](#). Sia $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n$ (vedi [Spazio Affine](#) e [Luogo di zeri](#)).

Se J è un ideale proprio, ovvero $J \neq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, allora $V(J) \neq \emptyset$.

178 Ideale primo è radicale

Sia S un [anello commutativo](#). Se I è un [ideale primo](#), allora I è [radicale](#).

Infatti, se $f^r \in I$, allora $f \cdots f^{r-1} \in I$.

Siccome l'ideale è primo, allora $f \in I$ oppure $f^{r-1} \in I$. Iterando si ottiene la tesi.

179 Nullstellensatz debole implica Nullstellensatz

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#), e sia $J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un [ideale](#). Sia $V(J) \subseteq \mathbb{A}^n$ (vedi [Spazio Affine](#) e [Luogo di zeri](#)).

179.1 Lemma di Rabinowitsch.

Il [Nullstellensatz debole](#) implica il [Nullstellensatz](#)

179.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_alg

$I(V(J)) \subseteq \sqrt{J}$ Sia $f \in I(V(J))$ (vedi [Ideale di un sottoinsieme](#)). Per definizione, $\forall x \in V(J)$ si ha che $f(x) = 0$. Siccome

$$J \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

posso considerare $J' = \langle J, x_{n+1} \cdot f - 1 \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ (vedi [Ideale-Generato](#) e [Anello-dei-polinomi](#)).

Necessariamente $\emptyset = V(J') \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. Infatti, se $p \in V(J')$ allora $p \in V(J) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, e dunque $f(p) = 0$; pertanto $(x_{n+1} \cdot f - 1)(p) \neq 0$. Assurdo.

Per il Nullestellensatz debole, $J' = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n+1}] = (1)$. Pertanto esistono $h_i \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_{n+1}]$ ed $f_i \in J$ tali che

$$1 = h_0 \cdot (x_{n+1} \cdot f - 1) + \sum_{i=1}^k h_i f_i$$

Inoltre, si ha che per ogni $i = 1, \dots, k$,

$$\begin{aligned} h_i f_i &= (a_0 + a_1 x_{n+1} + \dots + a_m x_{n+1}^m) f_i \\ &= (a_0 f_1) + (a_1 f_i) x_{n+1} + \dots + (a_m f_i) x_{n+1}^m \end{aligned}$$

con $a_j \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, poiché $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}] = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n][x_{n+1}]$.

Pertanto, siccome ogni $a_j f_i \in J$ per definizione di ideale, si ha per per $g_i \in J$

$$1 = h_0 \cdot (x_{n+1} \cdot f - 1) + \sum_{i=0}^s g_i x_{n+1}^i$$

Moltiplicando entrambi i lati per f^s :

$$f^s = f^s \cdot h_0 \cdot (x_{n+1} \cdot f - 1) + f^s \sum_{i=0}^s g_i x_{n+1}^i$$

Sia ora $Y = x_{n+1} \cdot f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Allora $f^s x_{n+1}^i = Y^i f^{s-i}$, dunque

$$f^s = f^s \cdot h_0 \cdot (Y - 1) + \sum_{i=0}^s Y^i f^{s-i} g_i$$

L'uguaglianza iniziale era polinomiale, e pertanto indica che, per ogni valore assegnato alle variabili x_1, \dots, x_{n+1} , l'espressione a destra vale 1. Pertanto, tutte le uguaglianze successive sono sempre valide per qualsiasi valore assegnato alle singole variabili. In particolare, assegnando ad x_{n+1} il valore $1/f$, ovvero ad Y il valore 1, si ottiene

$$f^s = \sum_{i=0}^s f^{s-i} g_i, \quad g_i \in J$$

Pertanto $f^s \in J$, dunque $f \in \sqrt{J}$, quindi $I(V(J)) \subseteq \sqrt{J}$

$\sqrt{J} \subseteq I(V(J))$ Sia $f \in \sqrt{J}$. Allora esiste $r \geq 1$ tale che $f^r \in J$.

Sia $p \in V(J)$. Allora $f^r(p) = 0$. Ma siccome \mathbb{K} è un [dominio](#), e per definizione

$$f^r(p) = [f(p)]^r$$

allora $f(p) = 0$.

Dunque $f \in I(V(J))$.

180 Corrispondenza ideali radicali e chiusi algebrici dello spazio affine

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#). Sia $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei [polinomi](#), e sia \mathbb{A}^n lo [spazio affine](#).

180.1 TODO Corrispondenza ideali radicali e chiusi algebrici dello spazio affine matematica_lm:geo_alg

181 Anello delle coordinate

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#). Sia $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ una [varietà affine](#) (vedi [Spazio Affine](#)), e sia $I(Y)$ il suo [ideale](#).

181.1 Definizione

L'anello delle coordinate di Y è

$$\mathbb{K}[Y] := \frac{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}{I(Y)}$$

Questo è l'anello delle funzioni polinomiali su Y , ovvero i [morfismi](#)

$$Y \longrightarrow \mathbb{A}^1$$

182 K-Algebre fin generate e ridotte come anelli delle coordinate di varietà affini

Sia \mathbb{K} un [campo algebricamente chiuso](#).

182.1 Teorema

Un [anello](#) R è una [K-algebra](#) finitamente generata e [ridotta](#) se e solo se esiste $Y \subseteq \mathbb{A}^n$ varietà affine tale che

$$R \cong \mathbb{K}[Y]$$

(vedi [Anello delle coordinate](#)).

182.1.1 Dimostrazione

TODO Implicazione <- matematica_lm:geo_alg Ricordando la Corrispondenza ideali radicali e chiusi algebrici dello spazio affine, si ha che $I(Y)$ è un ideale radicale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ (vedi Anello-dei-polinomi) e pertanto $\mathbb{K}[Y]$ anello quoziante è un Anello ridotto.

Inoltre $\mathbb{K}[Y]$ è finitamente generato perché lo è $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Che sia una \mathbb{K} -algebra

183 Algebra su un anello

Definizione 1. Sia R un [anello](#). A si dice una R -algebra se:

1. A è un [\$R\$ -modulo](#);
2. esiste $g : A \times A \rightarrow A$ bilineare, ovvero per ogni $r \in R$ e per ogni $a, b \in A$

$$g(r \cdot a, b) = g(a, r \cdot b) = r \cdot g(a, b).$$

Definizione 2. Una R -algebra A dotata di prodotto $g : A \times A \rightarrow A$ si dice:

- associativa se per ogni $a, b, c \in A$:

$$g(a, g(b, c)) = g(g(a, b), c)$$

- commutativa, se per ogni $a, b \in A$:

$$g(a, b) = g(b, a);$$

- anticommutativa se per ogni $a, b \in A$:

$$g(a, b) = -g(b, a)$$

(si ricorda che A ha la struttura di R -modulo, e quindi $-a := -1 \cdot a$).

Osservazione. Se A è un [anello commutativo](#) e $f : R \rightarrow A$ è un omomorfismo di anelli, allora

- è possibile dotare A della struttura di R -modulo ponendo, per ogni $r \in R$ e $a \in A$:

$$r \cdot a := f(r)a;$$

- il prodotto dell'anello è chiaramente una funzione bilineare

e dunque A ha una struttura di R -algebra.

Osservazione. In particolare, se A è un anello e $R \subseteq A$ è un sottoanello, allora A è una R -algebra.

Osservazione. Se \mathbb{K} è un campo, allora una \mathbb{K} -algebra è uno spazio vettoriale V (in quanto i \mathbb{K} -moduli sono i \mathbb{K} -spazi vettoriali) dotato di una funzione bilineare $g : V \times V \rightarrow V$.

184 Morfismo tra algebre

Sia R un anello.

Definizione 1. Se A, B sono due R -algebre (con prodotti $f : A \times A \rightarrow A$ e $g : B \times B \rightarrow B$) allora un morfismo $F : A \rightarrow B$ è un morfismo di R -moduli tale che, per ogni $a, b \in A$:

$$F(f(a, b)) = g(F(a), F(b)).$$

185 Sottoanello

186 \mathbb{K} -Algebra finitamente generata

Sia \mathbb{K} un campo.

Definizione 1. Una \mathbb{K} -algebra R (vedi Anello) si dice **finitamente generata** se esiste un sottoinsieme finito $S \subseteq R$ tale che ogni elemento di R si possa scrivere come combinazione lineare a coefficienti in \mathbb{K} di elementi di S .

187 Anello ridotto

Un anello R si dice ridotto se non contiene elementi nilpotenti non nulli.

188 Nilpotenza in un anello

Un elemento a di un anello R si dice **nilpotente** se esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$a^n = 0$$

189 Ideale radicale e anello quoziante

189.1 Proposizione

Sia R un anello. Un ideale $I \subseteq R$ è **radicale** se e solo se l'anello quoziante R/I è ridotto.

190 Quoziente di anello e ideale

191 Varietà Topologica

Definizione 1. Uno spazio topologico M si dice **varietà topologica n -dimensionale** se:

1. M è uno spazio topologico di Hausdorff
2. M è uno spazio topologico a base numerabile
3. $\forall p \in M$ esiste U intorno aperto di p in M ed esiste

$$\Phi : U \longrightarrow V$$

omeomorfismo. (U, Φ) si dice **carta topologica**.

192 Spazio topologico a base numerabile

Uno spazio topologico si dice a **base numerabile** se ammette almeno una base con una cardinalità numerabile.

192.1 Topologia Euclidea è a base numerabile

Una base numerabile per la Topologia Euclidea di \mathbb{R}^n è

$$\mathcal{B} = \left\{ B_q \left(\frac{1}{m} \right) : q \in \mathbb{Q}^n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

che è numerabile perché \mathbb{Q}^n è numerabile e \mathbb{N} è numerabile.

193 Intorno

194 Omeomorfismo

Se X, Y sono due spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ è un **omeomorfismo** se

1. f è continua;
2. f è biunivoca;
3. f^{-1} è continua (vedi [Funzione Inversa](#)).

195 Funzione Inversa

196 Base di una topologia

Sia $\langle X, \tau \rangle$ uno spazio topologico. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ è una base della topologia se $\forall A \in \tau$ esiste $\{B_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tale che

$$A = \bigcup_{i \in I} B_i$$

197 Insieme numerabile

Un insieme X si dice numerabile se esiste una funzione biunivoca tra X ed un sottoinsieme (anche improprio) dei numeri naturali.

198 Esempi fondamentali di varietà topologiche

198.1 \mathbb{R}^n è una varietà topologica

Si ha che \mathbb{R}^n è una varietà topologica. Infatti è T2, a base numerabile (vedi [Topologia Euclidea è a base numerabile](#)) e

$$\text{Id} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

è un [omeomorfismo](#).

198.2 Aperti di \mathbb{R}^n sono varietà topologica

Nella topologia di sottospazio, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto ereditano da \mathbb{R}^n essere T2 e a base numerabile.
Inoltre

$$\text{Id} : U \longrightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$$

è un omeomorfismo.

199 Immagini tramiti omeomorfismi di varietà topologiche sono varietà topologiche

199.1 Proposizione

Sia M una varietà topologica, X spazio topologico e

$$f : M \longrightarrow X$$

un omeomorfismo. Allora X è una varietà topologica

199.1.1 TODO Dimostrazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

200 Atlante topologico

Definizione 1. Se M è una [varietà topologica](#), un [atlante topologico](#) di M è una famiglia

$$\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$$

dove $\{U_\alpha\}$ è un [ricoprimento aperto](#) di M e

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$$

è una [carta topologica](#) per certi $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$.

201 La sfera n-dimensionale è varietà topologica

201.1 Esempio

La [sfera](#)

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

è una [varietà topologica](#)

201.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

202 Spazio proiettivo è varietà topologica

202.1 Esempio

Lo spazio $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (vedi [Spazio Proiettivo](#)) è una [varietà topologica](#)

202.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

203 Spazio delle matrici reali invertibili è varietà topologica

203.1 Esempio

Sia

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : A \text{ invertibile}\}$$

il [gruppo lineare reale](#) (vedi [Spazio delle matrici](#)). $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ è una [varietà topologica](#). Inoltre è [sconnesso](#).

203.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

204 Gruppo lineare

Sia \mathbb{K} un [campo](#). Il [gruppo lineare](#) di dimensione n è

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \mathbb{K}^{n,n} : \det A \neq 0\}$$

(vedi [Spazio delle matrici](#) e [Determinante di una matrice](#))

È un [gruppo](#).

205 Gruppo lineare complesso è varietà topologica

205.1 Esempio

Il gruppo lineare complesso

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) := \{A \in \mathbb{C}^{n,n} : \det A \neq 0\}$$

è una varietà topologica. È connesso e semplicemente connesso.

206 Spazio topologico semplicemente connesso

207 Connessione per archi di varietà topologiche

207.1 Proposizione

Sia M una varietà topologica.

1. M è localmente CPA
2. Le componenti connesse di M sono CPA.

208 Spazio topologico localmente connesso per archi

Uno spazio topologico X si dice **localmente connesso per archi** (localmente cpa) se per ogni $x \in X$ e per ogni U intorno aperto di x esiste $W \subseteq U$ intorno aperto di x tale che W sia **connesso per archi**.

209 Spazio topologico connesso per archi

210 Atlante topologico differenziabile

Definizione 1. Sia M una varietà topologica, e sia $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante topologico. \mathcal{U} si dice **atlante topologico differenziabile** o **atlante differenziabile** se tutti i cambi di carte sono dei diffeomorfismi tra aperti di \mathbb{R}^n .

Osservazione. Se M è una varietà topologica con un'unica carta, (M, φ) , allora $\{(M, \varphi)\}$ è un atlante differenziabile, infatti l'unico cambio di carte è $\text{Id} = \varphi \circ \varphi^{-1}$

211 Cambio di carte per un atlante topologico

Sia M una varietà topologica, e sia $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante topologico.

Per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si considera

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

omeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n , detto **cambio di carte**.

Se $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$, allora il diagramma è il seguente

$$\begin{array}{ccccc} & & U_\alpha \cap U_\beta & & \\ & \swarrow \varphi_\alpha & & \searrow \varphi_\beta & \\ V_\alpha \supseteq \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}} & & & \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subseteq V_\beta \end{array}$$

212 Diffeomorfismo reale

213 Atlante astratto

Sia M un insieme. Un **atlante astratto** di M è una collezione $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ dove $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento di M , e dove, per certi $V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$$

sono biezioni tali che, per ogni α, β , se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora

- $\varphi(U_\alpha \cap U_\beta)$ aperto di \mathbb{R}^n ;
- $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ è un omeomorfismo tra aperti di \mathbb{R}^n .

$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ è detta **carta** dell'atlante.

213.0.1 Topologia indotta da un atlante

Un atlante astratto induce una topologica su M . $A \subseteq M$ aperto se e solo se, per ogni α tale che $A \cap U_\alpha \neq \emptyset$,

$$\varphi_\alpha(A \cap U_\alpha)$$

è un aperto in \mathbb{R}^n .

214 Compatibilità tra atlanti astratti e varietà topologiche

214.1 Proposizione 1

Sia M un insieme e sia $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante astratto. Se per ogni $p, q \in M$ vale una tra le seguenti

- $p, q \in U_\alpha$ per qualche α ;
- esistono α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ e $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$;

allora la topologia indotta da \mathcal{U} è T2.

214.2 Proposizione 2

Sia M un insieme e sia $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante astratto. Se \mathcal{U} ha una quantità numerabile di carte, allora la topologia indotta è numerabile.

214.3 Proposizione

Se M è una varietà topologica e $\mathcal{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante topologico, allora \mathcal{U} induce su M la stessa topologia.

215 Atlanti differenziabili compatibili

215.1 Definizione

Due atlanti differenziabili su una varietà topologica M si dicono compatibili se la loro unione è ancora un atlante differenziabile.

215.2 Proposizione

La compatibilità di atlanti è una relazione di equivalenza.

216 Relazione di equivalenza

Una relazione binaria si dice relazione di equivalenza se è:

- riflessiva;
- simmetrica;
- transitiva.

217 Struttura Differenziabile

Siano $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ due atlanti differenziabili. Diremo che $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ se ogni carta di \mathcal{U} appartiene ad \mathcal{U}' .

Definizione 1. Una *struttura differenziabile* è un atlante differenziabile che sia *massimale* rispetto all'inclusione.

Una varietà topologica con una struttura differenziabile fissata si dice una *varietà differenziabile*

Nota: Esistenza e unicità di una struttura differenziabile per ogni atlante

Definizione 2. Una *varietà differenziabile* è uno spazio topologico M di Haussdorff e a base numerabile, dotato di un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ dove:

- $U_\alpha \subseteq M$ è un *aperto*;
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ (ovvero $\{U_\alpha\}_\alpha$ è un *ricoprimento*);
- $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *omeomorfismo*;

e \mathcal{A} è un atlante differenziabile, ovvero per ogni $\alpha, \beta \in A$: se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è una *mappa \mathcal{C}^∞* . Inoltre \mathcal{A} è massimale rispetto all'inclusione.

218 Esistenza e unicità di una struttura differenziabile per ogni atlante

218.1 Teorema

Ogni atlante differenziabile è contenuto in un'unica struttura differenziabile.

218.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

219 Esempi fondamentali di varietà differenziabili

\mathbb{R}^n , aperti di \mathbb{R}^n , $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (vedi Spazio Proiettivo) e S^n sono varietà differenziabili

220 Varietà Topologica omeomorfa a varietà differenziabile ne eredità la struttura

220.1 Proposizione

Sia M una varietà topologica, sia N una varietà differenziabile, e sia

$$F : M \longrightarrow N$$

un omeomorfismo.

M eredita una struttura di varietà differenziabile; se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante differenziabile di N , allora

$$\left\{ \left(F^{-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ F \right) \right\}$$

è un atlante differenziabile su M .

220.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

221 Varietà topologiche in dimensione minore uguale a tre hanno struttura differenziabile unica

221.1 Teorema

Ogni varietà topologica di dimensione 1,2,3 ha una struttura differenziabile. Inoltre, questa struttura è unica a meno di diffeomorfismi.

Dalla dimensione 4 in poi esistono varietà topologiche che non ammettono struttura differenziabile.

222 Strutture differenziabili sulla sfera 7 dimensionale

222.1 Teorema (Milnor)

Sulla sfera S^7

$$S^7 := \{x \in \mathbb{R}^8 : \|x\| = 1\}$$

esistono 28 strutture differenziabili non diffeomorfe.

223 Prodotto di varietà differenziabili è varietà differenziabile

223.1 Proposizione

Siano M, N varietà differenziabili. Allora $M \times N$ eredita una naturale struttura di varietà differenziabile.

224 Toro ha struttura di varietà differenziabile

224.1 Proposizione

Il [toro](#) n -dimensionale

$$\mathbb{T}^n := S^1 \times \cdots \times S^1$$

ha una struttura di [varietà](#) differenziabile

224.1.1 Dimostrazione

Si applica il [teorema](#).

225 Toro

Definizione 1. Si definisce il toro n -dimensionale come il [prodotto cartesiano](#)

$$\mathbb{T}^n := S^1 \times \cdots \times S^1$$

dove S^1 è la [circonferenza](#).

226 Teorema dell'inversa locale

226.1 Teorema dell'inversa locale

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un [aperto](#), e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione di [classe \$C^\infty\$](#) . Sia $p \in \Omega$ tale che il [differenziale](#) di F in p

$$F_{\star}|_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sia un [isomorfismo](#).

Allora esistono $U \subseteq \Omega$ intorno aperto di p , $V \subseteq \mathbb{R}^n$ intorno aperto di $F(p)$ tali che

$$F|_U : U \rightarrow V$$

sia un [diffeomorfismo](#).

227 Classe C di una funzione

228 Differenziale di una funzione reale

229 Isomorfismo tra spazi vettoriali

230 Teorema della funzione implicita

230.1 Teorema della funzione implicita

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ aperto e $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione di classe C^∞ . Sia $a \in F(\Omega)$ un valore regolare per F (ovvero $F_*|_p$ è suriettivo per ogni $p \in F^{-1}(a)$).

Allora $M_a := F^{-1}(a)$ ha una naturale struttura di varietà differenziabile.

230.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

In questa dimostrazione si assumerà per vero il Teorema dell'inversa locale.

231 Valore Regolare di una funzione

232 Differenziale del determinante nel gruppo lineare reale

232.1 Proposizione

Sia $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (vedi Gruppo lineare) e sia $x \in \mathbb{R}^{n,n}$. Allora

$$\det_\star|_A = \det A \cdot \mathrm{tr}(A^{-1}x)$$

(vedi Differenziale di una funzione reale, Determinante di una matrice e Traccia di una matrice)

232.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

233 Traccia di una matrice

234 Gruppo lineare speciale è varietà differenziabile

234.1 Proposizione

Sia $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ il [gruppo lineare speciale](#) reale, (vedi [Gruppo lineare](#))

$$\text{SL}(n, \mathbb{R}) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$$

Esso ha una naturale struttura di [varietà differenziabile](#).

234.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

235 Gruppo lineare speciale

Sia \mathbb{K} un campo. Il [gruppo lineare speciale](#) è un [sottogruppo](#) del [gruppo lineare](#),

$$\text{SL}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) : \det A = 1_{\mathbb{K}}\} \subseteq \text{GL}(n, \mathbb{K})$$

(vedi [Determinante di una matrice](#)).

236 Gruppo ortogonale è una varietà differenziabile

236.1 Proposizione

Il [gruppo ortogonale](#) reale:

$$\text{O}(n, \mathbb{R}) = \text{O}(n) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : A A^T = \mathbf{1}\}$$

è una [varietà differenziabile](#). (Vedi [Gruppo lineare](#))

236.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

237 Gruppo ortogonale

Sia \mathbb{K} un campo. Il [gruppo ortogonale](#) è il [sottogruppo](#) del [gruppo lineare](#):

$$\text{O}(n, \mathbb{K}) := \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid A A^T = \mathbf{1}\} = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{K}) \mid \det A = \pm 1\}$$

(vedi [Matrice Trasposta](#))

238 Matrice Trasposta

239 Gruppo ortogonale reale è sconnesso e compatto

Sia $O(n)$ il [gruppo ortogonale](#) reale, (vedi [Gruppo lineare](#))

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A A^T = \mathbf{1}\}.$$

1. $O(n)$ è [sconnesso](#).
2. $O(n)$ è [compatto](#).

240 Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili

Definizione 1. Siano M, N due [varietà differenziabili](#) (di dimensioni m, n rispettivamente) e sia $F : M \rightarrow N$. F si dice essere una funzione C^∞ se per ogni $p \in M$ esistono:

- (U, φ) una [carta](#) di M con $p \in U$;
- (V, ψ) una [carta](#) di N con $F(U) \subseteq V$;

tali che

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

è una [funzione \$C^\infty\$](#) (come funzione reale).

$$\begin{array}{ccccc} & U \subseteq M & \xrightarrow{F} & N \supseteq V & \\ & \swarrow \varphi & & & \searrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supseteq \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} & & & \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Proposizione 2. Le funzioni C^∞ tra varietà sono [continue](#).

Osservazione. Se $N = \mathbb{R}^n$, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ è C^∞ se per ogni $p \in M$ esiste una carta di M , (U, φ) , con $p \in U$ tale che è C^∞ la seguente:

$$F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

In particolare, se $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ si scrive $F \in C^\infty(M)$.

240.1 Funzioni reali Cinfinito da una varietà differenziabile

Definizione 3. Sia M una varietà differenziabile. Si definisce l'insieme

$$C^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è funzione } C^\infty\}$$

(vedi Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili)

Questo è un anello con la somma e prodotto tra funzioni definiti puntualmente: per ogni $f, g \in C^\infty(M)$

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p); \quad (f \cdot g)(p) := f(p) \cdot g(p).$$

241 Restrizione di funzioni reali Cinfinito su varietà differenziabili definite in forma implicita è ancora Cinfinito

Sia $M_a := F^{-1}(a)$ una varietà differenziabile definita in forma implicita, ovvero esiste

$$F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$$

funzione C^∞ (come funzione tra aperti di \mathbb{R}^N), ed esiste $a \in F(\Omega)$ valore regolare.

Sia $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ una funzione C^∞ (come funzione tra aperti di \mathbb{R}^N).

Allora $G|_{M_a} : M_a \rightarrow \mathbb{R}^k$ è una funzione C^∞ tra varietà differenziabili.

242 Lemma di incollamento tra funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili

242.1 Lemma di incollamento

Siano M, N due varietà differenziabili, e sia $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ un atlante di M . Se per ogni α esiste una funzione C^∞ (tra varietà differenziabili, poiché aperti di una varietà differenziabile sono varietà differenziabili)

$$F_\alpha : U_\alpha \rightarrow N$$

tale che se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora

$$F_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} \equiv F_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

allora la funzione ben definita

$$\begin{aligned} F : M &\rightarrow N \\ p &\mapsto F_\alpha(p) \text{ se } p \in U_\alpha \end{aligned}$$

è una funzione C^∞

243 Aperti di una varietà differenziabile sono varietà differenziabili

Proposizione 1. Sia M una varietà differenziabile, e sia $A \subseteq M$ un suo aperto. Allora A eredita una naturale struttura di varietà differenziabile

Dimostrazione. Vedi MathOverflow

■

244 Funzione sulle carte indotta da funzione Cinfinito tra due varietà è Cinfinito

244.1 Proposizione

Siano M, N due varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ . Sia (U, φ) una carta di M , (V, ψ) una carta di N tali che $F(U) \cap V \neq \emptyset$.

Allora $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ è una funzione C^∞ (tra aperti di $\mathbb{R}^n / \mathbb{R}^m$). \[

$$\begin{array}{ccc} U \subseteq M & \xrightarrow{F} & N \supseteq V \\ \varphi \swarrow & & \searrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supseteq \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} & V \end{array}$$

\]

244.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

245 Composizione di funzioni Cinfinito è Cinfinito

245.1 Teorema

Siano M, N, O tre varietà differenziabili, e siano

$$F : M \rightarrow N, \quad G : N \rightarrow O$$

due funzioni C^∞ tra varietà differenziabili. Allora $G \circ F : M \rightarrow O$ è una funzione C^∞ .

245.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

246 Diffeomorfismo tra varietà differenziabili

Definizione 1. Siano M, N due **varietà differenziabili**. $F : M \rightarrow N$ si dice **diffeomorfismo** se è

- una **funzione C^∞**
- una **funzione invertibile**
- la sua inversa è C^∞

M ed N si dicono **diffeomorfe**

247 Diffeomorfismo tra le strutture differenziali sui numeri reali

247.1 Teorema

Su \mathbb{R} tutte le strutture di **varietà differenziabile** sono **diffeomorfe**.

248 Gruppo dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile

Sia M una **varietà differenziabile**. Si definisce il gruppo dei **diffeomorfismi** di M come

$$\text{Diff}(M) := \{F : M \rightarrow M : F \text{ diffeomorfismo}\}$$

Questo è un **gruppo** con la composizione di funzioni, ed è un invariante, ovvero se per due varietà i gruppi dei diffeomorfismi sono diversi, allora queste non sono **diffeomorfe**.

249 Rivestimento Topologico

249.1 Definizione

Sia X uno **spazio topologico**. Un **rivestimento** su X è una coppia (\widetilde{X}, π) dove \widetilde{X} è uno **spazio topologico** e $\pi : \widetilde{X} \rightarrow X$ è **continua**, **suriettiva** e tale che, per ogni $p \in X$, esiste $U \subseteq X$ **aperto**, $p \in U$ tale che

$$\pi^{-1}(U) = \coprod_i \widetilde{U}_i$$

(vedi **Unione disgiunta**) dove $\widetilde{U}_i \subseteq \widetilde{X}_i$ **aperto** e $\pi|_{\widetilde{U}_i} : \widetilde{U}_i \rightarrow U$ è un **omeomorfismo** per ogni i .

Per $p_0 \in X$ fissato, $\pi^{-1}(p_0)$ è discreto, e si dice la **fibra** di p_0 .

250 Unione disgiunta

250.1 Unione disgiunta di insiemi

Dati due [insiemi](#) A, B , la loro unione disgiunta, indicata con $A \amalg B$ o con $A \uplus B$ è

$$A \amalg B = A \uplus B = (\{0\} \times A) \cup (\{1\} \times B)$$

(vedi [Prodotto cartesiano](#) e [Unione](#))

250.2 Unione disgiunta di spazi topologici

Definizione 1. Sia $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una famiglia indicizzata di [spazi topologici](#). L'[unione disgiunta](#) (o somma topologica) è l'insieme X definito come l'unione disgiunta insiemistica:

$$X = \coprod_{i \in I} X_i := \bigcup_{i \in I} (X_i \times \{i\})$$

dotato della [topologia dell'unione disgiunta](#) τ . Un sottoinsieme $U \subseteq X$ è definito aperto in X (cioè $U \in \tau$) se e solo se la sua intersezione con ogni spazio componente è aperta nella topologia originale di quello spazio. Formalmente:

$$U \in \tau \longleftrightarrow \forall i \in I, \quad U \cap X_i \in \tau_i$$

dove identifichiamo X_i con la sua immagine canonica in X .

Osservazione. Questa topologia è [la più fine](#) (la più grande) che rende [continue](#) tutte le iniezioni canoniche $\iota_j : X_j \rightarrow X$. Inoltre, in questa topologia, ogni X_i è sia un sottoinsieme aperto che un sottoinsieme chiuso di X .

Proposizione 2. Sia $X = \coprod_{i \in I} X_i$ l'unione disgiunta della famiglia di spazi topologici $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ e siano $\iota_j : X_j \rightarrow X$ le iniezioni canoniche per ogni $j \in I$. Per ogni spazio topologico Z e per ogni famiglia di funzioni continue $\{f_i : X_i \rightarrow Z\}_{i \in I}$, esiste un'unica funzione continua $f : X \rightarrow Z$ tale che il seguente diagramma commuti per ogni $i \in I$:

$$f \circ \iota_i = f_i$$

La funzione f è definita puntualmente come:

$$f(x) = f_i(x) \quad \text{se } x \in X_i$$

e si indica con $f = \coprod_{i \in I} f_i$.

In termini categoriali, questo caratterizza l'unione disgiunta come il [coprodotto](#) nella [categoria degli spazi topologici](#) [Top](#).

251 Rivestimenti e gruppo fondamentale

Sia X uno spazio topologico T2, a base numerabile, connesso e localmente cpa. Sia (\widetilde{X}, π) un suo rivestimento, con \widetilde{X} T2, a base numerabile, connesso e localmente cpa. Siano $x_0 \in X, \tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Allora

$$\pi_* : \Pi_1(\widetilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \Pi_1(X, x_0)$$

è iniettiva. (Vedi Gruppo fondamentale e Funtore del Gruppo Fondamentale)

252 Funtore del Gruppo Fondamentale

253 Teorema del rivestimento universale

253.1 Teorema

Sia X uno spazio topologico T2, a base numerabile, connesso e localmente cpa.

Allora esiste un unico (a meno di isomorfismi) rivestimento (\widetilde{X}, π) di X , connesso, tale che $\Pi_1(\widetilde{X}) = \{0\}$ (vedi Gruppo-Fondamentale). Questo si dice rivestimento universale di X . Inoltre, se $\Pi_1(X)$ è finito, allora $|\Pi_1(X)|$ è la cardinalità delle fibre di X .

254 Rivestimento n:1

254.1 Definizione

Sia X uno spazio topologico, e sia (\widetilde{X}, π) un suo rivestimento. Il rivestimento si dice $n : 1$ se per ogni $x \in X$

$$|\pi^{-1}(x)| = n$$

(vedi Cardinalità)

255 Teorema sui rivestimenti di varietà differenziabili

255.1 Teorema

Sia M una varietà differenziabile, e sia (\widetilde{M}, π) un rivestimento. Allora esiste un'unica struttura differenziabile su \widetilde{M} rispetto alla quale π è una funzione C^∞ .

256 Germi di funzioni

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , e sia $p \in M$. Si definisce

$$\mathcal{F}_p := \{f : U \longrightarrow \mathbb{R} : U \subseteq M \text{ aperto, } f \text{ è } C^\infty\}$$

(vedi Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili)

In \mathcal{F}_p si definisce una relazione d'equivalenza \sim :

$$f \sim g \iff \exists U \subseteq M : f|_U = g|_U$$

con U intorno di p .

Si indica quindi con

$$C_p^\infty := \mathcal{F}_p / \sim$$

il quoziante. Se $f \in \mathcal{F}_p$ si indica con $f_p \in C_p^\infty$ la sua classe d'equivalenza. f_p si dice il germe di f in p .

256.1 Osservazione

Se $f_p \in C_p^\infty$ allora ha senso chiedersi il valore $f_p(p)$, poiché tutti i rappresentanti di f_p hanno lo stesso valore in p .

257 Quoziente rispetto a relazione di equivalenza

258 Spazio dei germi di funzioni è algebra reale

258.1 Proposizione

Sia M una varietà differenziabile, sia $p \in M$ e sia C_p^∞ l'insieme dei germi in p . Allora C_p^∞ è una \mathbb{R} -algebra.

259 Derivazione su una varietà differenziabile

Definizione 1. Sia M una **varietà differenziabile**, e sia $p \in M$. Una **derivazione** su M in p è una funzione

$$\mathbf{v} : C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$$

(vedi [Germi di funzioni](#)), **R-lineare** e che verifichi la regola di Leibniz, ovvero

1. $\mathbf{v}(\lambda f_p) = \lambda \mathbf{v}(f_p)$ per ogni $f_p \in C_p^\infty$;
2. $\mathbf{v}(f_p g_p) = \mathbf{v}(f_p)g(p) + f(p)\mathbf{v}(f_p)$ per ogni $f_p, g_p \in C_p^\infty$.

259.1 TODO Esempio: Derivazioni su \mathbb{R} . matematica_lm:geo_diff

260 Derivazioni Canoniche su una varietà differenziabile

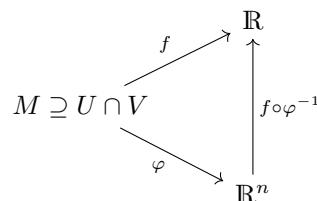
Sia M una **varietà differenziabile** di dimensione n , e sia $p \in M$ fissato. Sia (U, φ) una **carta** su M , con $p \in U$.

Definizione 1. Per ogni $f_p \in C_p^\infty$ (vedi [Germi di funzioni](#)), di cui f è un **rappresentante** in un intorno V di p , e per ogni $k = 1, \dots, n$ si definisce la **derivazione** v_k :

$$v_k(f_p) := \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^k} \Big|_{\varphi(p)}$$

Le v_k sono dette **derivazioni canoniche**.

Questa è una **derivata parziale** su \mathbb{R}^n :



Inoltre $v_k(f_p)$ è ben definita; infatti due rappresentanti di f_p , f, g , coincidono in un intorno di p , e quindi $f \circ \varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1}$ coincidono in un intorno di $\varphi(p)$, e quindi hanno la stessa derivata.

Notazione: Se $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, allora si scrive

$$v_k := \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p$$

261 Funzione Lineare

262 Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile

262.1 Definizione

Sia M una [varietà differenziabile](#), e sia $p \in M$. Lo spazio tangente ad M in p è

$$T_p M := \{v : C_p^\infty \longrightarrow \mathbb{R} : v \text{ derivazione}\}$$

(vedi [Derivazione su una varietà differenziabile](#) e [Germi di funzioni](#))

262.2 Osservazione

$T_p M$ è uno [spazio vettoriale](#) reale. Inoltre $T_p M \subseteq \mathcal{L}(C_p^\infty; \mathbb{R})$ è un [sottospazio vettoriale](#). (Vedi [Spazio delle funzioni lineare](#))

262.3 Descrizione alternativa

Si ha che:

$$\{\dot{\alpha}(0) : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M \text{ funzione } C^\infty\} = T_p M$$

(vedi [Derivata di curve su varietà come derivazioni](#))

262.3.1 Vettori dello spazio tangente ad una varietà in un punto come derivate di curve

Proposizione 1. Sia M una [varietà differenziabile](#) e sia $p \in M$. Sia $\mathbf{v} \in T_p M$ (vedi [Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile](#)).

Allora esiste $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$ [funzione \$C^\infty\$](#) tale che (vedi [Curve su varietà e loro derivata](#))

$$\begin{aligned}\alpha(0) &= p \\ \dot{\alpha}(0) &= \mathbf{v}\end{aligned}$$

263 Sottospazio vettoriale

264 Spazio delle funzioni lineare

265 Derivata parziale

266 Base dello spazio tangente di una varietà differenziabile

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , sia $p \in M$ e siano $\{v_1, \dots, v_n\}$ le derivazioni canoniche.

266.1 Teorema

$\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di $T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile).

266.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

267 Cambio di base sullo spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , sia $p \in M$, e siano (U, φ_α) , (V, φ_β) due carte di M , con $p \in U \cap V$. Siano

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha &= (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n) \\ \varphi_\beta &= (x_\beta^1, \dots, x_\beta^n)\end{aligned}$$

Ciascuna delle $x_\gamma^i : U \cap V \rightarrow \mathbb{R}$, e pertanto $(x_\gamma^i)_p \in \mathcal{F}_p$ (Vedi Germi di funzioni).

φ_α induce la base di $T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile e Teorema sulla base dello spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\alpha^n} \Big|_p \right\}$$

φ_β induce la base di $T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile e Teorema sulla base dello spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_\beta^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_\beta^n} \Big|_p \right\}$$

267.1 Proposizione

La matrice del cambiamento di base A_r^k è

$$A_r^k = \frac{\partial}{\partial x_\beta^r} \Big|_p \left(x_\alpha^i \right)_p$$

dove, con la notazione di Einstein

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta^r} \Big|_p = A_r^k \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k} \Big|_p$$

267.1.1 TODO Dimostrazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

267.1.2 Notazione

La matrice A_r^k si indica anche come segue:

$$A_r^k = \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^r} \Big|_p = \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^r}(p)$$

268 Matrice del cambiamento di base

269 Notazione di Einstein

270 Derivata di curve su varietà come derivazioni

Sia M una varietà differenziabile. Sia $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una funzione C^∞ (si ricorda infatti che aperti di \mathbb{R} sono varietà), e sia $p := \alpha(0)$.

Si definisce $\dot{\alpha}(0) \in T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile) come segue: se $f_p \in C_p^\infty$ (vedi Germi di funzioni) e f è un suo rappresentante,

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \alpha \uparrow & \nearrow f \circ \alpha & \\ (-\varepsilon, \varepsilon) & & \end{array}$$

e dunque si può definire

$$\dot{\alpha}(0)f_p := \frac{d}{dt} (f \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0}$$

(vedi [Derivata](#))

270.1 Proposizione

$\dot{\alpha}(0)$ è ben definito ed è una [derivazione](#).

270.2 Osservazione

Si ha dunque che l'insieme

$$\{\dot{\alpha}(0) : \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \text{ funzione } C^\infty\} \subseteq T_p M$$

271 Derivata

272 Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili

Siano M, N due [varietà differenziabili](#), e sia $F : M \rightarrow N$ una [funzione \$C^\infty\$](#) , e sia $p \in M$.

272.1 Definizione

Il [differenziale](#) di F in p è l'applicazione (vedi [Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile](#))

$$F_*|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

che per ogni $f_{F(p)} \in C^\infty_{F(p)}(N)$ (vedi [Germi di funzioni](#)) e per ogni $v \in T_p M$ (vedi [Derivazione su una varietà differenziabile](#)):

$$F_*|_p(v)(f_{F(p)}) := v[(f \circ F)_p]$$

272.2 Proposizione

$F_*|_p$ è ben definito e [lineare](#).

272.2.1 TODO Dimostrazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

272.3 TODO Osservazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

Se $f : M \rightarrow M$ è l'identità, allora il suo differenziale

$$f_*|_p : T_p M \rightarrow T_p M$$

è l'identità

273 Differenziale di composizione di funzioni tra varietà

273.1 Proposizione

Siano M, N, L delle varietà differenziabili, e siano F, G delle funzioni C^∞ tra varietà:

$$F : M \longrightarrow N, \quad G : N \longrightarrow L$$

Allora, per ogni $p \in M$, il differenziale della composizione (che è C^∞)

$$(G \circ F)_\star|_p = G_\star|_{F(p)} \circ F_\star|_p$$

273.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

274 Differenziale di diffeomorfismo tra varietà è isomorfismo

274.1 Proposizione

Siano M, N due varietà differenziabili, e sia $F : M \longrightarrow N$ un diffeomorfismo. Allora per ogni $p \in M$ il differenziale (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile)

$$F_\star|_p : T_p M \longrightarrow T_{F(p)} N$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali.

274.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

275 Differenziale in coordinate locali su una varietà differenziabile

Siano M, N varietà differenziabili (di dimensione, rispettivamente, n, m), e sia $F : M \longrightarrow N$ una funzione C^∞ . Sia $p \in M$ e $q := F(p) \in N$. Allora esistono (U, φ) carta di M , (V, ψ) carta di N , con $p \in U$ e $F(U) \subseteq V$ tali che

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$$

è funzione C^∞

Siano

$$\begin{aligned}\varphi &= (x^1, \dots, x^n) \\ \psi &= (y^1, \dots, y^m)\end{aligned}$$

Queste inducono le seguenti basi (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile e Derivazioni Canoniche su una varietà differenziabile):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\} \text{ base di } T_p M$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial y^1} \Big|_q, \dots, \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_q \right\} \text{ base di } T_q N$$

Siccome il differenziale $F_*|_p : T_p M \longrightarrow T_q N$ è lineare, è rappresentato da una matrice (A_i^k) ; in particolare

$$F_*|_p \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right) = A_i^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_q$$

con la Notazione di Einstein.

275.1 Proposizione

Indicando con $(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^r$ la r -esima componente di $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$, si ha che la matrice (A_i^r) è

$$A_i^r = \frac{\partial (\psi \circ F \circ \varphi^{-1})^r}{\partial x^i} (\varphi(p))$$

(vedi Derivata parziale) Questa scrittura ha senso perché $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ è una funzione da aperti di \mathbb{R}^n in aperti di \mathbb{R}^m .

Dunque

$$(A_i^r) = J_{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} (\varphi(p))$$

dove J è la Matrice Jacobiana

275.1.1 TODO Dimostrazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

275.2 Notazione

Si scrive che

$$F_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial F^k}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial y^k} \right)$$

con la Notazione di Einstein.

276 Matrice Jacobiana

277 Cambiamento del differenziale in coordinate locali tramite un cambio di coordinate su varietà differenziabili

277.1 TODO Proposizione

matematica_lm:geo_diff

277.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

278 Immersione di varietà differenziabili

Siano M, N due varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

278.1 Definizione

Se per ogni $p \in M$, il differenziale $F_*|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è iniettivo, allora F si dice immersione.

279 Embedding di varietà differenziabili

Siano M, N due varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

279.1 Definizione

Se F è una immersione e

$$F : M \rightarrow F(M)$$

è un omeomorfismo (dove $F(M)$ ha la topologia di sottospazio), allora F si dice un *embedding*x

279.1.1 Osservazione

Se F immersione non è iniettiva, allora F non è un embedding.

280 Sottovarietà differenziabile

Definizione 1. Sia M una varietà differenziabile, e sia $N \subseteq M$ un sottinsieme. N è una sottovarietà differenziabile se ha una struttura differenziabile tale che l'iniezione

$$\begin{aligned} i : N &\hookrightarrow M \\ p &\mapsto p \end{aligned}$$

sia un embedding (ovvero i è C^∞ e la topologia di N sia quella indotta da M).

Osservazione. Ogni aperto $U \subseteq M$ è una sottovarietà differenziabile.

281 Esempio di sottovarietà tramite il teorema della funzione implicita

281.1 TODO Esempio

matematica_lm:geo_diff

282 Teorema delle slice delle sottovarietà

282.1 Teorema

Sia M una [varietà differenziabile](#) di dimensione n , e sia $N \subseteq M$ una [sottovarietà](#) di dimensione k . Allora per ogni $p \in N$, esiste una [carta](#) (U, ψ) di M con $p \in U$ tale che

$$\psi(U \cap N) = \psi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\})$$

dove $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$.

(U, ψ) si dice **slice** di N .

282.1.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

Vedi Lezione 7 Ist. Geo Diff

282.1.2 Viceversa

Se $N \subseteq M$ è un sottinsieme tale che per ogni $p \in N$ esista una [carta](#) (U, ψ) di M con $p \in U$ tale che

$$\psi(U \cap N) = \psi(U) \cap (\mathbb{R}^k \times \{\mathbf{0}\})$$

dove $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n-k}$, allora N ha una naturale struttura di [sottovarietà](#) di M .

TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff Vedi Lezione 7 Ist. Geo Diff

283 Teorema del rango per funzioni reali

283.1 Teorema

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ una [funzione \$C^\infty\$](#) ([come funzione reale](#)) tale che per ogni $p \in \Omega$

$$\text{rank } J_F(p) = k$$

(vedi [Rango di una matrice](#), [Matrice Jacobiana](#), [Differenziale di una funzione reale](#)).

Allora per ogni $p \in \Omega$ esiste una [carta](#) (U, φ) di \mathbb{R}^n con $p \in U$ ed esiste una [carta](#) (V, ψ) di \mathbb{R}^m , con $F(U) \subseteq V$ tali che

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^n) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

283.1.1 TODO Osservazione matematica_lm:geo_diff

Questo teorema implica il [TIV](#).

283.1.2 TODO Dimostazione matematica_lm:geo_diff

284 Teorema della funzione implicita tra varietà differenziali

284.1 Teorema

Siano M, N due [varietà differenziabili](#) tali che $\dim M = m + n$, $\dim N = m$, e sia $F : M \rightarrow N$ una [funzione \$C^\infty\$](#) . Sia $a \in N$ un valore regolare di F , (ovvero per ogni $p \in F^{-1}(a)$ il [differenziale](#) $F_*|_p$ è suriettivo).

Allora $M_a := F^{-1}(a)$ ha una naturale struttura di [sottovarietà](#) di M . M_a si dice [sottovarietà](#) definita in forma implicita.

284.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

284.1.2 TODO Relazione tra spazi tangentici matematica_lm:geo_diff

Se $N = \mathbb{R}$ e $p \in M_a$, allora

$$T_p M_a = \left\{ v \in T_p M : v(F_p) = 0 \right\}$$

dove F_p è il [germe](#) di F in p .

284.1.3 Generalizzazione

Siano M, N due [varietà differenziabili](#) tali che $\dim M = m + n$, $\dim N = m$, e sia $F : M \rightarrow N$ una [funzione \$C^\infty\$](#) . Detto

$$\text{Crit}(F) = \{p \in M : F_*|_p \text{ non è suriettivo}\}$$

si ha che

$$M_a := F^{-1}(a) \setminus \text{Crit}(F)$$

ha una naturale struttura di [sottovarietà](#) di M .

285 Immagine dello spazio tangente ad un punto di una sottovarietà tramite il differenziale dell'inclusione

285.1 Proposizione

Sia M una [varietà differenziabile](#) e sia $N \subseteq M$ una [sottovarietà](#). Se $i : N \hookrightarrow M$ è l'inclusione, allora l'immagine del suo [differenziale](#)

$$i_*|_p(T_p N) \subseteq T_p M$$

(vedi [Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile](#)) In particolare

$$i_*|_p(T_p N) = \{v \in T_p M : \forall f \in \mathcal{F}_p : f|_N \equiv 0, v(f_p) = 0\}$$

(vedi [Derivazione su una varietà differenziabile, Germi di funzioni](#))

285.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

286 Immersione da compatti è embedding

286.1 Proposizione

Siano M, N due [varietà differenziabili](#), e sia

$$i : N \hookrightarrow M$$

una [immersione iniettiva](#).

Se N è [compatto](#), allora i è un [embedding](#), poiché è [chiuso](#).

287 Restrizione di funzioni a sottovarietà e loro differenziale

Siano M, Z [varietà differenziabili](#), e sia $N \subseteq M$ una [sottovarietà](#).

287.1 Proposizione

Se $F : M \rightarrow Z$ è una [funzione \$C^\infty\$](#) tra varietà, allora

1. $F|_N : N \rightarrow Z$ è una funzione C^∞ tra varietà;
2. $(F_\star|_p)|_{i_\star|_p(T_p N)} = (F|_N)_\star|_p$ (vedi [Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili](#) e [Immagine dello spazio tangente ad un punto di una sottovarietà tramite il differenziale dell'immersione](#))

287.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

288 Funzione Propria

Siano X, Y [spazi topologici](#), $F : X \rightarrow Y$ [funzione continua](#).

Definizione 1. F si dice [propria](#) se per ogni $K \subseteq Y$ [compatto](#), la [retroimmagine](#) $F^{-1}(K) \subseteq X$ è [compatto](#).

289 Compattezza e Compattezza per successioni

Sia X uno [spazio topologico T2](#) e a base numerabile. $K \subseteq X$ è [compatto](#) se e solo se è [compatto per successioni](#), ovvero se ogni [successione](#) in K ha una [sottosuccessione convergente](#).

290 Spazio topologico compatto per successioni

291 Successione

292 Sottosuccessione

293 Convergenza per una successione

294 Funzioni C[∞] tra varietà e proprie sono chiuse

294.1 Proposizione

Siano M, N varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ . Se F è propria, allora F è chiusa.

294.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

294.1.2 Corollario

Una immersione iniettiva propria è un embedding. (Segue banalmente dal fatto che Immersione iniettiva chiusa è embedding)

295 Immersione iniettiva chiusa è embedding

Siano M, N varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una immersione.

295.1 Proposizione

Se F è iniettiva e chiusa, allora F è un embedding.

295.1.1 Dimostrazione

Se F è iniettiva, allora F è biunivoca tra M e $F(M)$. Inoltre F è chiusa implica che F^{-1} sia continua, dunque

$$F : M \rightarrow F(M)$$

è omeomorfismo.

296 Teoremi di Whitney

296.1 Teorema I

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Allora esistono

$$i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$$

un embedding proprio e

$$j : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

una immersione.

296.2 Teorema II

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n . Allora esiste

$$i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

un embedding e, se $n \geq 2$, esiste

$$j : M \longrightarrow \mathbb{R}^{2n-1}$$

immersione.

297 Fibrato tangente

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n .

297.1 Definizione

Si definisce il fibrato tangente $T M$:

$$T M := \coprod_{p \in M} T_p M$$

(vedi Unione disgiunta e Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile) dotato di una naturale proiezione sulla varietà,

$$\begin{aligned} \pi : T M &\longrightarrow M \\ v \in T_p M &\longmapsto p \end{aligned}$$

297.1.1 Esercizio

La funzione $\pi : T M \longrightarrow M$ è una sommersione

297.2 Struttura di varietà differenziabile

Se (U, φ) è una carta di M , definisco

$$\widetilde{U} := \pi^{-1}(U) = \coprod_{p \in U} T_p U$$

e una funzione

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi} : \widetilde{U} &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ v &\longmapsto (\varphi \circ \pi(v), \varphi_{\star|_{\pi(v)}}(v)) \end{aligned}$$

(vedi Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili)

L'insieme $\{(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})\}$ è un atlante differenziabile di $T M$.

298 Atlante differenziabile induce una topologia

298.1 Teorema.

Sia X un insieme, e sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ una famiglia in cui $U_\alpha \subseteq X$ e $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^N$ iniettiva tale che

1. per ogni α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$
 $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$

è aperto di \mathbb{R}^N e la funzione

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è una funzione C^∞ tra aperti di \mathbb{R}^N ;

2. $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento di X e ammette un sottoricoprimento numerabile;
3. per ogni $p, q \in X$ vale una delle seguenti:
 - esiste α tale che $p, q \in U_\alpha$;
 - esistono α, β tali che $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ e $p \in U_\alpha, q \in U_\beta$.

Allora esiste una topologia di X T2 e a base numerabile rispetto alla quale $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ è un atlante differenziabile.

299 Sommersione di varietà differenziabili

Siano M, N due varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

299.1 Definizione

Se per ogni $p \in M$, il differenziale $F_{\star}|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ è suriettivo, allora F si dice sommersione.

300 Campo vettoriale su una varietà differenziabile

Sia M una varietà differenziabile, e sia $U \subseteq M$ aperto.

Definizione 1. Un campo vettoriale su U è una funzione C^∞ (infatti Aperti di una varietà differenziabile sono varietà differenziabili)

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \end{aligned}$$

tale che per ogni $p \in U$, $X_p \in T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile e Fibrato tangente)

Si denota con

$$\Gamma(U) := \{X : U \rightarrow TM : X \text{ campo vettoriale}\}$$

301 Componenti locali di un campo vettoriale

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , e sia $X \in \Gamma(M)$ (vedi Campo vettoriale su una varietà differenziabile); sia (U, φ) carta di M con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, $p \in U$.

Dunque $X_p \in T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile), e

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$$

è una base di $T_p M$ (vedi Teorema sulla base dello spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile), e quindi

$$X_p = X_p^r \frac{\partial}{\partial x^r} \Big|_p$$

con $X_p^r \in \mathbb{R}$ (usando la notazione di Einstein).

Si hanno quindi n funzioni

$$\begin{aligned} X^r : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto X_p^r \end{aligned}$$

che sono le componenti del campo rispetto alla carta (U, φ) .

In particolare, se $\tilde{\varphi}$ è la mappa di $T M$ indotta da φ e le π_j sono

$$\begin{aligned} \pi_j : \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_{2n}) &\longmapsto x_j \end{aligned}$$

allora $X^r = \varphi_{n+j} \circ \tilde{\varphi} \circ X$.

301.1 TODO Scrrittura come $X = X^r \frac{\partial}{\partial x^r}$ matematica_lm:geo_diff

302 Componenti locali di un campo vettoriale sono Cinfinito

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , e sia X una funzione

$$\begin{aligned} X : M &\longrightarrow T M \\ p &\longmapsto X_p \in T_p M \end{aligned}$$

(vedi Fibrato tangente) e, fissata (U, φ) una carta di M , siano X^1, \dots, X^n le sue componenti locali, ovvero $X^i = \pi_{n+i} \circ \tilde{\varphi} \circ X$ dove le π_j sono le proiezioni da \mathbb{R}^{2n} ad \mathbb{R} e la $\tilde{\varphi}$ è la carta indotta su $T M$.

302.1 Proposizione

X è una funzione C^∞ se e solo se per ogni carta (U, φ) di M le funzioni X^1, \dots, X^n sono C^∞ .

302.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

303 Azione di un campo vettoriale su una funzione

Sia M una varietà differenziabile, e sia $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione C^∞ . Sia $X \in \Gamma(M)$ (vedi Campo vettoriale su una varietà differenziabile).

303.1 Definizione

Si definisce $X(f)$:

$$\begin{aligned} X(f) : M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto X_p(f_p) \end{aligned}$$

dove $X_p \in T_p M$ ed è pertanto una [derivazione](#), mentre f_p è il [germe](#) di f .

304 Azione di un campo vettoriale su una funzione è Cinfinito

Sia M una [varietà differenziabile](#), sia $X \in \Gamma(F)$ (vedi [Campo vettoriale su una varietà differenziabile](#)) e $f \in C^\infty(M)$ (vedi [Funzioni da una varietà ai reali Cinfinito](#)).

304.1 Proposizione

Si ha che $X(F)$ è una [funzione \$C^\infty\$](#) .

304.1.1 TODO Dimostrazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

305 Insieme dei derivatori su una varietà

Sia M una [varietà differenziabile](#), e sia $C^\infty(M)$ l'[anello delle funzioni reali](#). Si definisce l'insieme dei derivatori

$$\text{Der}(M) := \{\Phi : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M) : \Phi \text{ } \mathbb{R}\text{-lineare, soddisfa Leibniz}\}$$

dove Φ soddisfa Leibniz se per ogni $f, g \in C^\infty(M)$

$$\Phi(fg) = \Phi(f)g + f\Phi(g)$$

vedi [Funzione Lineare](#).

305.1 Campi vettoriali come derivatori

Ogni [campo vettoriale](#) induce un derivatore su M . Infatti, se $X \in \Gamma(M)$, allora per ogni $f \in C^\infty(M)$ si ha che $X(f) \in C^\infty(M)$ (vedi [Azione di un campo vettoriale su una funzione](#) e [Azione di un campo vettoriale su una funzione è Cinfinito](#)), e quindi è possibile vedere

$$X : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

305.1.1 TODO Dimostrazione

[matematica_lm:geo_diff](#)

305.2 Proposizione

Ogni $\Phi \in \text{Der}(M)$ è indotto da un campo vettoriale. (Quindi $\Gamma(M) \cong \text{Der}(M)$).

305.2.1 TODO Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

306 Insieme dei campi vettoriali come spazio vettoriale reale e come modulo

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\Gamma(M)$ l'insieme dei campi vettoriali su M .

306.1 Proposizione 1

$\Gamma(M)$ ha una struttura di spazio vettoriale reale.

306.2 Proposizione 2

$\Gamma(M)$ ha una struttura di modulo su $C^\infty(M)$ (vedi Anello delle funzioni da una varietà ai reali Cinfinito).

306.2.1 [?] Dimostrazione

matematica_lm:geo_diff

Se $f, g \in C^\infty(M)$ e $X, Y \in \Gamma(M)$ definisco $fX + gY \in \Gamma(M)$; lo definisco per ogni $p \in M$ come derivazione:

$$(fX + gY)_p h_p := f(p) X_p(h_p) + g(p) Y_p(h_p)$$

307 Push-Forward di campi vettoriali

Siano M, N varietà differenziabili e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ , con differenziale

$$F_*|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

Se F è un diffeomorfismo, allora F induce F_* funzione tra campi vettoriali

$$F_* : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(N)$$

tale per cui, se $p = F^{-1}(q)$

$$F_*(X)_q := F_*|_p(X_p)$$

307.1 Proposizione

F_* è un isomorfismo di spazi vettoriali (infatti l'insieme dei campi vettoriali è uno spazio vettoriale reale) e

$$(F_*)^{-1} = (F^{-1})_*$$

308 Campi vettoriali F-riferiti

Siano M, N varietà differenziabili, e sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ con differenziale

$$F_*|_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

Siano $X \in \Gamma(M)$, $Y \in \Gamma(N)$ campi vettoriali.

308.1 Definizione

X e Y si dicono F -riferiti se per ogni $p \in M$

$$F_*|_p(X_p) = Y_{F(p)}$$

308.2 Teorema di caratterizzazione

X, Y sono F -riferiti se e solo se, per ogni $g \in C^\infty(N)$ (vedi Anello delle funzioni da una varietà ai reali Cinfinito) si ha che

$$X(g \circ F) = Y(g) \circ F$$

(vedi Azione di un campo vettoriale su una funzione)

309 Differenziale dell'inclusione del fibrato tangente ad una sottovarietà

Sia M una varietà differenziabile, e sia $N \subseteq M$ una sottovarietà, $i : N \hookrightarrow M$ l'inclusione. Allora $i_*(T N) \subseteq T M$ (vedi Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili e Fibrato tangente) è una sottovarietà di $T M$, dove

$$\begin{aligned} i_* &: T N \rightarrow T M \\ v \in T_p N &\mapsto i_*|_p(v) \in T_p M \end{aligned}$$

310 Restrizione di un campo vettoriale ad una sottovarietà

Sia M una varietà differenziabile, e sia $N \subseteq M$ una sottovarietà, $i : N \hookrightarrow M$ l'inclusione.

310.1 Proposizione

Se $X \in \Gamma(M)$ (vedi Campo vettoriale su una varietà differenziabile) e per ogni $p \in N$ si ha che

$$X_p \in i_*|_p(T_p N)$$

allora $X|_N \in \Gamma(N)$. (vedi Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili e Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile)

311 Varietà Differenziabile Pettinabile

311.1 Definizione

Una **varietà differenziabile** M si dice **pettinabile** se esiste $X \in \Gamma(M)$ **campo vettoriale** tale che per ogni $p \in M$

$$X_p \neq \mathbf{0}_{T_p M}$$

(vedi **Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile**).

312 Pettinabilità delle sfere

Teorema 1. Sia \mathbb{S}^n la **sfera n -dimensionale**. \mathbb{S}^n è **pettinabile** se e solo se n è dispari.

Proposizione 2. Se n è pari, allora non esistono campi vettoriali mai nulli su \mathbb{S}^n .

313 Varietà Differenziabile Parallelizzabile

313.1 Definizione

Una **varietà differenziabile** M di dimensione n si dice **parallelizzabile** se esistono $X_1, \dots, X_n \in \Gamma(M)$ **campi vettoriali** tali che, per ogni $p \in M$,

$$\{(X_1)_p, \dots, (X_n)_p\}$$

è una **base** di $T_p M$ (vedi **Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile**)

314 Parallelizzabilità delle sfere

Sia \mathbb{S}^n la **sfera n -dimensionale**

314.1 Teorema

\mathbb{S}^n è **parallelizzabile** se e solo se $n = 1, 3, 7$

315 Sfera n -dimensionale

Osservazione. È una **varietà Topologica**

316 Bracket di campi vettoriali

Sia M una **varietà differenziabile**. Si definisce

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\longrightarrow \Gamma(M) \\ (X, Y) &\longmapsto [X, Y] \end{aligned}$$

il bracket di X, Y (vedi [Campo vettoriale su una varietà differenziabile](#))

In particolare, per ogni $f \in C^\infty(M)$ (vedi [Anello delle funzioni da una varietà ai reali Cinfinito](#) e [Azione di un campo vettoriale su una funzione e Campi vettoriali come derivatori](#)),

$$[X, Y](f) := X(Y(f)) - Y(X(f))$$

316.1 TODO Il bracket è realmente un campo vettoriale matematica_lm:geo_diff

316.2 Proprietà

Siano $X, Y, Z \in \Gamma(M)$ e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

1. $[\lambda X + \mu Y, Z] = \lambda [X, Z] + \mu [Y, Z]$ (è \mathbb{R} -bilineare);
2. $[X, Y] = -[Y, X]$ è antisimmetrica;
3. soddisfa l'identità di Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

Queste tre proprietà si riassumono dicendo che $\langle \Gamma(M), [\cdot, \cdot] \rangle$ è un'[algebra di Lie](#).

316.2.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

317 Algebra di Lie

Definizione 1. Uno [spazio vettoriale](#) V dotato di un'ulteriore operazione $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ tale che:

1. $[v, w] = -[w, v]$ (anticommutatività);
2. $[au + bv, w] = a[u, w] + b[v, w]$ (linearità);
3. $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$ (identità di Jacobi),

è detto algebra di Lie.

318 Scrittura locale del bracket di campi vettoriali

Sia M una [varietà differenziabile](#), e siano $X, Y \in \Gamma(M)$ (vedi [Campo vettoriale su una varietà differenziabile](#)).

Sia (U, φ) , $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ una [carta](#) su M . Questo induce, su U :

$$X|_U = X^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad Y|_U = Y^r \frac{\partial}{\partial x^r}$$

con la [Notazione di Einstein](#). Vedi [Componenti locali di un campo vettoriale](#).

318.1 Proposizione

Si ha che

$$[X, Y]|_U = \left(X^k \frac{\partial Y^r}{\partial x^k} - Y^k \frac{\partial X^r}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^r}$$

318.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

319 Bracket di campi vettoriali F-riferiti

Siano M, N varietà differenziabili, $X_1, X_2 \in \Gamma(M)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(N)$ campi vettoriali. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ tale che X_i è F -riferito ad Y_i (per $i = 1, 2$).

319.1 Proposizione

Si ha che il bracket $[X_1, X_2]$ è F -riferito al bracket $[Y_1, Y_2]$. In particolare, se $F : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo, allora

$$F_*([X_1, X_2]) = [F_*(X_1), F_*(X_2)]$$

(vedi Push-Forward di campi vettoriali)

319.1.1 TODO Dimostrazione matematica_lm:geo_diff

320 Bracket di campi vettoriali ristretti a sottovarietà

320.1 Proposizione

Sia M una varietà differenziabile, $N \subseteq M$ una sottovarietà. Siano $X, Y \in \Gamma(M)$ campi vettoriali tali che $X_p, Y_p \in T_p N$ per ogni $p \in N$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile)

Allora il bracket $[X, Y]_p \in T_p N$ per ogni $p \in N$.

320.1.1 TODO Dimostrazione geo_diff:matematica_lm

321 Torsione di moduli su un dominio di integrità è sotto-modulo

Proposizione 1. Sia R un anello, e sia M un R -modulo. Se R è un dominio di integrità, allora la torsione: $\text{Tor}_R(M) \subseteq_R M$ è un sottomodulo.

322 Modulo libero da torsione

Sia R un anello, e sia M un R -modulo.

Definizione 1. Se la torsione di M :

$$\text{Tor}_R(M) = \{0\}$$

allora M si dice libero da torsione

323 Modulo di torsione

Sia R un anello, e sia M un R -modulo.

Definizione 1. Se la *torsione* di M :

$$\text{Tor}_R(M) = M$$

allora M si dice *modulo di torsione*.

324 Modulo libero da torsione finitamente generato è libero

Teorema 1. Sia R un PID, e sia M un R -modulo. Se M è libero da torsione e finitamente generato, allora M è libero.

Corollario 2. Sia R un PID, e sia M un R -modulo finitamente generato. Allora esistono L modulo libero e T modulo di torsione tale che^[31]

$$M \cong L \oplus T$$

In particolare^[32]

$$M \cong M / \text{Tor}_R(M) \oplus \text{Tor}_R(M).$$

Dimostrazione. (del Corollario 32) Siccome R è un dominio di integrità, allora $\text{Tor}_R(M) \subseteq_R M$ è un sottomodulo, e pertanto

$$M' := M / \text{Tor} M$$

è un R -modulo.

- **Claim:** M' è libero da torsione.

Sia quindi $[m] \in \text{Tor} M'$. Allora esiste $r \in R \setminus \{0\}$ tale che

$$0 = r[m] = [rm]$$

ovvero, per definizione di quoziente, $rm \in \text{Tor} M$. Pertanto esiste $s \in R \setminus \{0\}$ tale che

$$0 = s \cdot (rm) = (sr)m$$

con $sr \neq 0$. Quindi $m \in \text{Tor} M$. Segue che $[m] = 0$.

- M' è finitamente generato poiché M è finitamente generato.

Per il Teorema, M' è libero, poiché libero da torsione.

Per il teorema di scomposizione:

$$M \cong M / \text{Tor} M \oplus \text{Tor} M$$

■

325 Quoziente di modulo FG è FG

Sia R un anello commutativo con unità, e sia M un R -modulo.

Proposizione 1. Se M è finitamente generato e $N \subseteq_R M$ è un sottomodulo, allora M/N è finitamente generato.

Dimostrazione. abstract algebra - Is the quotient of a finitely generated module finitely ge... ■

326 Teorema fondamentale dei moduli finitamente generati su un PID

Teorema 1. Sia R un PID e sia M un R -modulo finitamente generato. Allora esistono $r_1, \dots, r_k \in R$ tali che^[33]

$$r_1 \mid r_2 \mid \dots \mid r_{k-1} \mid r_k, \quad \text{Tor}M \cong R/(r_1) \oplus R/(r_2) \oplus \dots \oplus R/(r_k)$$

In particolare, M è isomorfo a^[34]

$$M \cong R^m \oplus R/(r_1) \oplus R/(r_2) \oplus \dots \oplus R/(r_k)$$

e questa scomposizione è unica a meno di permutazioni, nel senso che se

$$M \cong R^{m'} \oplus R/(r'_1) \oplus R/(r'_2) \oplus \dots \oplus R/(r'_{k'})$$

allora $m = m'$, $k = k'$ e $r_i = r'_{\sigma(i)}$ per qualche permutazione σ .

327 Divisore

Questo concetto ha senso in un PID???

328 Permutazione

329 Successione di R-Moduli ESATTA

Definizione 1. Sia R un anello commutativo con unità. Una successione di R -moduli

$$\dots \xrightarrow{f_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} \dots$$

si dice esatta se per ogni $i \in \mathbb{Z}$ ^[35]

$$\text{Im}(f_{i+1}) = \ker(f_i)$$

330 Successione di R-Moduli

Definizione 1. Sia R un **anello** commutativo con unità. Una **successione di R -moduli** è una **successione di morfismi** nella categoria degli **R -moduli**, ovvero una famiglia $\{(M_n, f_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{Z}$

- M_n è un **R -modulo**;
- $f_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ è un **morfismo**.

331 Caratterizzazione di alcune successioni esatte di R-Moduli

Teorema 1. Sia R un **anello** commutativo con unità, e siano $M, N, P, 0$ degli **R -moduli**, e siano f, g dei **morfismi**.

- La **successione**

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N$$

è **esatta** se e solo se f è **iniettiva**.

- La **successione**

$$M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

è **esatta** se e solo se f è **suriettiva**

- La **successione**

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \longrightarrow 0$$

è **esatta** se e solo se f è **biiettiva** (ovvero è un **isomorfismo**)

- La **successione**

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$$

è **esatta** se e solo se f è **iniettiva** e $\ker g = \text{Im } f \cong M^{[36]}$ se e solo se, per il **primo teorema di isomorfismo**^[37]

$$\text{Im } g \cong N/M$$

- La **successione**

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

è **esatta** se e solo se $\text{Im } g \cong N/M$, f **iniettiva** e g **suriettiva**, se e solo se $P \cong N/M$.

332 SEC di Moduli

Sia R un **anello** commutativo con unità, e siano $M, N, P, 0$ **R -moduli**.

Definizione 1. La **successione esatta**

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

si dice **successione esatta corta (SEC)**

Osservazione. Per l'appropriato [teorema di caratterizzazione](#), si ha che

$$P \cong N/M$$

333 Teorema di Spezzamento SEC

Sia R un [anello](#) commutativo con unità.

Teorema 1. Si consideri la [SEC](#) di [R-moduli](#):

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

φ ψ

Sono fatti equivalenti:

1. esiste un [morfismo](#) $\psi : P \longrightarrow N$ tale che $g \circ \psi = \text{id}_P$ (e ψ si dice **sezione**);
2. esiste un [sottomodulo](#) $N' \subseteq_R N$ tale che^[38]

$$N \cong N' \oplus \text{Im } f$$

e tale che $g|_{N'} : N' \longrightarrow P$ sia un [isomorfismo](#) (ovvero $N \cong M \oplus P$).

3. esiste un [morfismo](#) $\varphi : N \longrightarrow M$ tale che $\varphi \circ f = \text{Id}_M$ (e φ si dice **retrazione**)

Definizione 2. Se vale una delle condizioni di cui sopra, la SEC si dice **spezzante**.

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 3.): Per ogni $n \in N$, esistono $n' \in N'$ e $m \in M$ tali che

$$n = n' + f(m)$$

Inoltre questi sono unici poiché f è iniettiva e $N = N' + \text{Im } f$.

Si definisce pertanto

$$\varphi(n) = m$$

che è ben definita per l'unicità della scrittura di cui sopra. Inoltre, questa è un morfismo (lasciato per esercizio).

$$\varphi \circ f(m) = \varphi(0 + f(m)) = m$$

(1. \Rightarrow 2.): Supponiamo esista un morfismo $\psi : P \longrightarrow N$ tale che $g \circ \psi = \text{Id}_P$. Si definisca $N' := \text{Im } \psi$. Inoltre, $N' \subseteq_R N$.

- **Claim 1:** $\text{Im } f \cap N' = \{0\}$

Sia $n \in \text{Im } f \cap N'$.

- Poiché la catena è esatta, allora $\text{Im } f = \ker g$, e dunque $n \in \ker g$, e quindi $g(n) = 0$.
- Inoltre $n \in N' = \text{Im } \psi$, e dunque esiste $p \in P$ tale che $\psi(p) = n$.

Dunque

$$0 = g(n) = g \circ \psi(p) = p$$

e pertanto $n = \psi(0)$. Siccome ψ è morfismo, allora $n = 0$.

- **Claim 2:** $g|_{N'} : N' \rightarrow P$ iniettiva e suriettiva

Sia $n' \in N'$ tale che $g(n') = 0$. Allora $n' \in \ker g \cap N' = \text{Im } f \cap N' = \{0\}$ e dunque $n' = 0$. Pertanto $g|_{N'}$ è iniettiva.

Sia ora $p \in P$. Allora $g(\psi(p)) = p$ e $\psi(p) \in N'$.

- **Claim 3:** $\text{Im } f + N' = N$

Sia $n \in N$. Allora $g(n) \in P$ e $\psi(g(n)) \in N' = \text{Im } \psi$. Sia $n' := \psi(g(n))$.

$$\begin{aligned} g(n - n') &= g(n) - g(n') \\ &= g(n) - g(\psi(g(n))) \\ &= g(n) - g \circ \psi(g(n)) \\ &= g(n) - g(n) = 0 \end{aligned}$$

e pertanto $(n - n') \in \ker g = \text{Im } f$. Dunque esiste $m \in M$ tale che $n - n' = f(m)$ e

$$n = n' + f(m).$$

(3. \Rightarrow 1.): Supponiamo che esista il morfismo $\varphi : N \rightarrow M$. Voglio costruire $\psi : P \rightarrow N$.

Per ogni $p \in P$, si scelga $n_p \in g^{-1}(p)$. Allora

$$\psi(p) := n_p - f \circ \varphi(n_p)$$

- **Claim 1:** ψ è ben definita

Fissato $p \in P$, siano $n, n' \in g^{-1}(p)$.

Notiamo che $g(n - n') = g(n) - g(n') = p - p = 0$, pertanto $n - n' \in \ker g = \text{Im } f$ e pertanto esiste $m \in M$ tale che

$$n' = n - f(m)$$

Dunque

$$\begin{aligned} n' - f \circ \varphi(n') &= n - f(m) - f(\varphi(n - f(m))) \\ &= n - f(m) - f(\varphi(n) - \varphi \circ f(m)) \\ &= n - f(m) - f\varphi(n) + f\varphi f(m) \\ &= n - f\varphi(m) = n - f \circ \varphi(n) \end{aligned}$$

- **Claim 2:** $g \circ \psi = \text{Id}_P$

Sia $p \in P$ e sia $n_p \in g^{-1}(p)$.

$$g(\psi(p)) = g(n_p - f\varphi(n)) = g(n_p) - gf\varphi(n) = p$$

poiché $g(n_p) = p$ e $\ker g = \text{Im } f$.

- **Claim 3:** ψ è un morfismo

■

334 Spezzamento SEC con modulo finale libero

Sia R un anello commutativo con unità.

Proposizione 1. Si consideri la SEC:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{\begin{smallmatrix} g \\ \psi \end{smallmatrix}} P \longrightarrow 0$$

Se P è libero, allora $N \cong M \oplus P^{[39]}$.

Dimostrazione. Sia $E \subseteq P$ una base. Per ogni $e_i \in E$ si fissi $\bar{e}_i \in g^{-1}(e_i)$. Si definisce

$$\psi\left(\sum a_i e_i\right) := \sum a_i \bar{e}_i$$

che è morfismo per definizione, $\psi : P \longrightarrow N$.

Inoltre $g \circ \psi = \text{Id}_P$. Pertanto, per il teorema di spezzamento,

$$N \cong M \oplus P. \quad \blacksquare$$

335 Teoremi di isomorfismo

335.1 Primo Teorema di Isomorfismo

335.1.1 Primo Teorema di Isomorfismo (Teoria dei Gruppi)

Teorema 1. Sia $\phi : G \rightarrow H$ un omomorfismo di gruppi. Allora il nucleo $\ker(\phi)$ è un sottogruppo normale di G e vi è un isomorfismo:^[40]

$$G / \ker(\phi) \cong \text{im}(\phi)$$

dato da

$$\begin{aligned} G / \ker(\phi) &\longrightarrow \text{im}(\phi) \\ g + \ker(\phi) &\longmapsto \phi(g). \end{aligned}$$

Osservazione. Pertanto, se $\phi : G \rightarrow H$ è iniettivo, allora $G \cong \phi[G]$.

335.1.2 Primo Teorema di Isomorfismo (Moduli)

Teorema 2. Sia $\psi : M \rightarrow N$ un omomorfismo di R -moduli. Allora:

$$M / \ker(\psi) \cong \text{im}(\psi)$$

335.1.3 Primo Teorema di Isomorfismo (Anelli)

Teorema 3. Sia $f : R \rightarrow S$ un omomorfismo di anelli. Allora $\ker(f)$ è un ideale di R e:

$$R / \ker(f) \cong \text{im}(f)$$

335.2 Secondo Teorema di Isomorfismo

335.2.1 Secondo Teorema di Isomorfismo (Teoria dei Gruppi)

335.2.2 Secondo Teorema di Isomorfismo (Moduli)

335.2.3 Secondo Teorema di Isomorfismo (Anelli)

335.3 Terzo Teorema di Isomorfismo

335.3.1 Terzo Teorema di Isomorfismo (Teoria dei Gruppi)

335.3.2 Terzo Teorema di Isomorfismo (Moduli)

335.3.3 Terzo Teorema di Isomorfismo (Anelli)

335.4 Teoremi di Isomorfismo per complessi di catene

Teorema 4. Siano $\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{B}_\bullet, \mathcal{C}_\bullet$ complessi di catene di R -moduli. Valgono i seguenti teoremi di isomorfismo:

1. **Primo Teorema di Isomorfismo:** Sia $f_\bullet : \mathcal{A}_\bullet \rightarrow \mathcal{B}_\bullet$ un morfismo di complessi. Allora esiste un isomorfismo di complessi di catene:

$$\mathcal{A}_\bullet / \ker(f_\bullet) \cong \text{Im}(f_\bullet)$$

2. **Secondo Teorema di Isomorfismo:** Siano \mathcal{S}_\bullet e \mathcal{T}_\bullet sottocomplessi di \mathcal{C}_\bullet . Allora esiste un isomorfismo:

$$(\mathcal{S}_\bullet + \mathcal{T}_\bullet) / \mathcal{T}_\bullet \cong \mathcal{S}_\bullet / (\mathcal{S}_\bullet \cap \mathcal{T}_\bullet)$$

3. **Terzo Teorema di Isomorfismo:** Siano $\mathcal{S}_\bullet \subseteq \mathcal{T}_\bullet \subseteq \mathcal{C}_\bullet$ sottocomplessi. Allora esiste un isomorfismo:

$$(\mathcal{C}_\bullet / \mathcal{S}_\bullet) / (\mathcal{T}_\bullet / \mathcal{S}_\bullet) \cong \mathcal{C}_\bullet / \mathcal{T}_\bullet$$

336 Lemma del cinque

Sia R un [anello](#) commutativo con unità, e siano $H, H', L, L', M, M', N, N', P, P'$ degli [R-moduli](#).

Lemma 1. Si consideri il [seguente](#) diagramma commutativo a righe [esatte](#).

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M & \xrightarrow{\gamma} & N & \xrightarrow{\delta} & P \\ \downarrow \eta & & \cong \downarrow \varphi & & \downarrow \psi & & \theta \downarrow \cong & & \rho \downarrow \\ H' & \xrightarrow{\alpha'} & L' & \xrightarrow{\beta'} & M' & \xrightarrow{\gamma'} & N' & \xrightarrow{\delta'} & P' \end{array}$$

Se η è [suriettiva](#), ρ è [iniettiva](#) e φ, θ sono [isomorfismi](#), allora ψ è un [isomorfismo](#).

Dimostrazione. (per *diagram chasing*).

- Suriettività.

Sia $m' \in M'$. Allora, siccome θ è un isomorfismo, esiste un unico $n \in N$ tale che

$$\theta(n) = \gamma'(m')$$

Consideriamo $\rho(\delta(n)) \in P'$. Per la commutatività del diagramma

$$\rho(\delta(n)) = \delta'(\theta(n)) = \delta'(\gamma'(m')) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza viene dal fatto che $\ker \delta' = \text{Im } \gamma'$ per l'esattezza delle righe.

Ma ρ è iniettivo per ipotesi, pertanto $\delta(n) = 0$ e quindi $n \in \ker \delta = \text{Im } \gamma$.

Quindi esiste $m \in M$ tale che $n = \gamma(m)$.

Considero ora $m' - \psi(m)$, e calcolo

$$\begin{aligned} \gamma'(m' - \psi(m)) &= \gamma'(m) - \gamma'\psi(m) \\ &= \gamma'(m) - \theta\gamma(m) \end{aligned}$$

ma $n = \gamma(m)$ e $\theta(n) = \gamma'(m')$, e pertanto questo termine vale 0.

Dunque $m' - \psi(m) \in \ker \gamma' = \text{Im } \beta'$, e quindi esiste $l' \in L'$ tale che

$$\beta'(l') = m' - \psi(m)$$

e, siccome φ è un isomorfismo, esiste un unico $l \in L$ tale che

$$\varphi(l) = l'$$

Pertanto

$$m' - \psi(m) = \beta' \circ \varphi(l) = \psi\beta(l)$$

e dunque $m' = \psi(m) + \psi\beta(l)$ e quindi

$$m' = \psi(m + \beta(l))$$

e quindi ψ suriettiva.

- Iniettività.

Sia $m \in M$ tale che $\psi(m) = 0$.

$$0 = \gamma'\psi(m) = \theta\gamma(m)$$

Siccome θ è un isomorfismo, allora $\gamma(m) = 0$ e quindi

$$m \in \ker \gamma = \text{Im } \beta$$

ed esiste $\ell \in L$ tale che $m = \beta(\ell)$.

$$\beta'\varphi(\ell) = \psi\beta(\ell) = \psi(m) = 0$$

e dunque $\varphi(\ell) \in \ker \beta' = \text{Im } \alpha'$ e dunque esiste $h' \in H'$ tale che

$$\alpha'(h') = \varphi(\ell)$$

Siccome η è suriettiva, allora esiste $h \in H$ tale che $\eta(h) = h'$.

$$\varphi(\ell) = \alpha'(h') = \alpha'\eta(h) = \varphi\alpha(h)$$

e siccome φ è un isomorfismo, allora $\ell = \alpha(h)$

Inoltre $m = \beta(\ell) = \beta\alpha(h)$ ma $\ker(\beta) = \text{Im}(\alpha)$ e quindi $m = 0$. ■

337 Complesso di catene

337.1 Complesso di catene di R -moduli

Sia R un [anello](#) commutativo con unità.

Definizione 1. *Un complesso di catene è una [successione](#) di coppie*

$$\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

tali che

- C_n sia un [R-modulo](#);
- $\partial_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$ è un [morfismo di moduli](#) tale che

$$\partial_n \circ \partial_{n-1} \equiv 0$$

(se e solo se $\text{Im } \partial_n \subseteq \ker \partial_{n-1}$).

Gli elementi di C_n si dicono n -catene.

338 Categoria dei Complessi di Catene di R-Moduli

Sia R un [anello](#) commutativo con unità. Si definisce la [categoria](#) \mathbf{Ch}_R dei complessi di catene di R -moduli come segue:

338.1 Oggetti

I [complessi di catene](#) di R -moduli \mathcal{C}_\bullet ;

338.2 Morfismi tra complessi di catene

Se $\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n^C)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ e $\mathcal{D}_\bullet = \{(D_n, \partial_n^D)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sono due complessi di catene, allora un morfismo

$$f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet$$

è una collezione di **morfismi tra R -moduli**

$$\{f_n : C_n \longrightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

tali che, per ogni n ,

$$f_{n-1} \circ \partial_n^C = \partial_n^D \circ f_n$$

ovvero commuti il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+3}^C} & C_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}^C} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^C} & C_{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-2}^C} & \cdots \\ & & f_{n+2} \downarrow & & f_{n+1} \downarrow & & f_n \downarrow & & f_{n-1} \downarrow & & f_{n-2} \downarrow & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+3}^D} & D_{n+2} & \xrightarrow{\partial_{n+2}^D} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^D} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^D} & D_{n-2} & \xrightarrow{\partial_{n-2}^D} & \cdots \end{array}$$

Definizione 1. Sia $f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet$ un morfismo di complessi di catene.

- Il morfismo f_\bullet si dice **iniettivo** (o monomorfismo) se ogni componente $f_n : C_n \rightarrow D_n$ è un **omonomorfismo iniettivo** di moduli.
- Il morfismo f_\bullet si dice **suriettivo** (o epimorfismo) se ogni componente $f_n : C_n \rightarrow D_n$ è un **omonomorfismo suriettivo** di moduli.
- Il morfismo f_\bullet si dice **biettivo** (o isomorfismo) se è sia iniettivo che suriettivo (ovvero se ogni f_n è un **isomorfismo** di moduli).

339 Modulo di omologia dei complessi di catene

Sia R un **anello** commutativo con unità.

Definizione 1. Sia $\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un **complesso di catene di R -moduli**. Fissato $n \in \mathbb{Z}$ si definiscono

- il **modulo** degli n -cicli^[41]:

$$Z_n(\mathcal{C}_\bullet) := \ker(\partial_n)$$

- il **modulo** degli n -bordi:^[42]

$$B_n(\mathcal{C}_\bullet) := \text{Im}(\partial_{n+1})$$

Per la definizione di complesso di catene si ha che $B_n \subseteq Z_n$ e pertanto si definisce l' n -esimo modulo di omologia di \mathcal{C}_\bullet come^[43]

$$H_n(\mathcal{C}_\bullet) := Z_n(\mathcal{C}_\bullet)/B_n(\mathcal{C}_\bullet).$$

Se $z_n \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet)$ allora gli elementi di $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ sono

$$[z_n] = z_n + B_n(\mathcal{C}_\bullet)$$

340 Morfismo tra complessi di catene induce morfismo tra moduli di omologia

Sia R un anello commutativo con unità. Siano $\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n^C)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \mathcal{D}_\bullet = \{(D_n, \partial_n^D)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ due complessi di catene, e sia

$$f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet$$

un morfismo,

$$f_\bullet = \{f_n : C_n \longrightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Allora $\forall n \in \mathbb{Z}$ il morfismo f_\bullet induce

$$\begin{aligned} H_n(\mathcal{C}_\bullet) &\xrightarrow{f_*} H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \\ z_n + B_n(\mathcal{C}_\bullet) &\longmapsto f_n(z_n) + B_n(\mathcal{C}'_\bullet) \end{aligned}$$

tra i moduli di omologia.

Proposizione 1. Si ha che:

- f_* è ben definita;
- f_* è un morfismo di moduli.

Dimostrazione. Si consideri il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_{n+1} & & \downarrow f_n & & \downarrow f_{n-1} \\ \cdots & \longrightarrow & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^D} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Per mostrare la buona definizione è necessario mostrare che:

1. Se $z_n \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet)$, allora $f_n(z_n) \in Z_n(\mathcal{D}_\bullet)$.

Sia quindi $z_n \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet)$. Allora $\partial_n^C z_n = 0$, e pertanto $f_{n-1} \partial_n^C z_n = 0$. Per commutatività:

$$\partial_n^D f_n(z_n) = f_{n-1} \partial_n^C z_n = 0$$

e pertanto $f_n(z_n) \in Z_n(\mathcal{D}_\bullet)$.

2. Se $[z_n] = [z'_n] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$, allora $[f_n(z_n)] = [f_n(z'_n)]$.

Se $[z_n] = [z'_n]$, allora esiste $h \in C_{n+1}$ tale che

$$z_n = z'_n + \partial_{n+1}^C h.$$

Allora:

$$\begin{aligned} f_n(z_n) &= f_n(z'_n + \partial_{n+1}^C h) = f_n(z'_n) + f_n(\partial_{n+1}^C h) \\ &= f_n(z'_n) + \partial_{n+1}^D f_{n+1}(h) \end{aligned}$$

e quindi $[f_n(z_n)] = [f_n(z'_n)]$.

Il fatto che sia un morfismo segue banalmente. ■

341 Zig-Zag Lemma (per complessi di catene)

Sia R un anello commutativo con unità. Siano $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet, \mathcal{C}''_\bullet$ dei complessi di catene e $f_\bullet : \mathcal{C}'_\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$, $g_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}''_\bullet$ sono morfismi, con

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\bullet &= \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathcal{C}'_\bullet &= \{(C'_n, \partial'_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathcal{C}''_\bullet &= \{(C''_n, \partial''_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

e i morfismi sono

$$\begin{aligned}f_\bullet &= \{f_n : C'_n \rightarrow C_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ g_\bullet &= \{g_n : C_n \rightarrow C''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Teorema 1. Se la seguente è una SEC di \mathbf{Ch}_R (vedi Categoria Complessi di Catene)

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet \longrightarrow 0$$

allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste una mappa

$$\partial_\star^{(n)} : H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \rightarrow H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet)$$

tale che la seguente successione di R -moduli è esatta:^[44]

$$\begin{array}{ccccc} & & & \cdots & \\ & & \partial_\star^{(n+1)} & & \\ & \swarrow & & & \\ H_n(\mathcal{C}'_\bullet) & \xrightarrow[H_n(f_\bullet)]{} & H_n(\mathcal{C}_\bullet) & \xrightarrow[H_n(g_\bullet)]{} & H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \\ & & \partial_\star^{(n)} & & \\ & \swarrow & & & \\ H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet) & \xrightarrow[H_{n-1}(f_\bullet)]{} & H_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet) & \xrightarrow[H_{n-1}(g_\bullet)]{} & H_{n-1}(\mathcal{C}''_\bullet) \\ & & \partial_\star^{(n-1)} & & \\ & \swarrow & & & \\ \cdots & & & & \end{array}$$

Dimostrazione. Si consideri il seguente diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_{n+1} \downarrow & & \partial_{n+1} \downarrow & & \partial''_{n+1} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{f_n} & C_n & \xrightarrow{g_n} & C''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_n \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \partial''_n \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_{n-1} \downarrow & & \partial_{n-1} \downarrow & & \partial''_{n-1} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-2} & \xrightarrow{f_{n-2}} & C_{n-2} & \xrightarrow{g_{n-2}} & C''_{n-2} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_{n-2} \downarrow & & \partial_{n-2} \downarrow & & \partial''_{n-2} \downarrow \\
 & & \cdots & & \cdots & & \cdots
 \end{array}$$

- Costruzione di ∂_\star .

Sia $z''_n + B_n(\mathcal{C}_\bullet'') \in H_n(\mathcal{C}_\bullet'')$.

Siccome g_n è suriettiva, esiste $c_n \in C_n$ tale che $g_n(c_n) = z''_n$:

$$g_{n-1}(\partial_n c_n) = \partial'_n g_n(c_n) = \partial'_n z''_n = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è per $z''_n \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet'')$.

Pertanto, $\partial_n c_n \in \ker g_{n-1} = \text{Im } f_{n-1}$ ^[45].

Siccome tutte le f_i sono iniettive, in particolare, esiste un unico $c'_{n-1} \in C'_{n-1}$ tale che $\partial_n c_n = f_{n-1}(c'_{n-1})$

- Claim: $c'_{n-1} \in Z'_{n-1} \subseteq C'_{n-1}$

Dobbiamo dimostrare che $\partial'_{n-1} c'_{n-1} = 0$.

$$f_{n-2}(\partial'_{n-1} c'_{n-1}) = \partial_{n-1} f_{n-1}(c'_{n-1}) = \partial_{n-1} \partial_n c_n = 0$$

che è nullo poiché $\partial_{n-1} \partial_n \equiv 0$. Siccome f_{n-2} è iniettiva, allora $\partial'_{n-1} c'_{n-1} = 0$

Utilizzando la notazione di cui sopra, definiamo

$$\partial_\star(z''_n + B_n(\mathcal{C}_\bullet'')) := c'_{n-1} + B_{n-1}(\mathcal{C}_\bullet')$$

- Buona definizione di ∂_*

– Dimostriamo che ∂_* non dipenda dalla scelta di $c_n \in g_n^{-1}(z_n'')$.

Siano allora $c_n, \hat{c}_n \in g_n^{-1}(z_n'') \subseteq C_n$. Analogamente a prima, esistono e sono unici $c'_{n-1}, \hat{c}'_{n-1} \in C'_{n-1}$ tali che

$$\begin{aligned} f_{n-1}(c'_{n-1}) &= \partial_n c_n \\ f_{n-1}(\hat{c}'_{n-1}) &= \partial_n \hat{c}_n \end{aligned}$$

Inoltre

$$g_n(c_n - \hat{c}_n) = g_n(c_n) - g_n(\hat{c}_n) = 0$$

e dunque $c_n - \hat{c}_n \in \ker g_n = \text{Im } f_n$.

Quindi esiste c'_n tale che $c_n - \hat{c}_n = f_n(c'_n)$.

$$\partial_n(c_n - \hat{c}_n) = \partial_n f_n(c'_n) = f_{n-1}(\partial'_n c'_n)$$

dove l'ultima uguaglianza vale per la commutatività del diagramma. Inoltre, siccome ∂_n è un **morfismo di R -moduli**, $\partial_n(c_n - \hat{c}_n) = \partial_n c_n - \partial_n \hat{c}_n$.

Pertanto:

$$f_{n-1}(\partial'_n c'_n) = f_{n-1}(c'_{n-1}) - f_{n-1}(\hat{c}'_{n-1}) = f_{n-1}(c'_{n-1} - \hat{c}'_{n-1})$$

e, siccome f_{n-1} è iniettiva,

$$c'_{n-1} - \hat{c}'_{n-1} = \partial'_n c'_n$$

e quindi

$$c'_{n-1} = \hat{c}'_{n-1} + \partial'_n c'_n$$

In definitiva si ha che

$$c'_{n-1} + B_n(\mathcal{C}'_\bullet) = \hat{c}'_{n-1} + B_n(\mathcal{C}'_\bullet)$$

– Dimostriamo che ∂_* non dipenda dalla scelta del rappresentante z_n'' . (Lasciato per esercizio) ■

Corollario 2. Date le due SEC:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{-g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet \longrightarrow 0$$

Tramite lo Zig-Zag Lemma vi sono i due morfismi tra i moduli di omologia

$$H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet)$$

$$H_n(\mathcal{C}''_\bullet) \xrightarrow{\partial'_*} H_{n-1}(\mathcal{C}'_\bullet)$$

Allora $\partial'_* = -\partial_*$.

342 Funtore da ChR a RMod - di omologia

Sia R un **anello** commutativo con unità.

Siano $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet$ **complessi di catene** e sia $f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet$ un **morfismo**. Fissato $n \in \mathbb{Z}$, la mappa che assegna^[46]

$$\mathcal{C}_\bullet \longmapsto H_n(\mathcal{C}_\bullet)$$

$$(f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}'_\bullet) \longmapsto \begin{pmatrix} f_\star : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \rightarrow H_n(\mathcal{C}'_\bullet) \\ [z] \mapsto [f_n(z)] \end{pmatrix}$$

è un **funtore covariante** tra le **categorie dei complessi di catene** e degli **R -moduli**,

$$(H_n, \star) : \mathbf{Ch}_R \rightarrow \mathbf{RMod}$$

detto n -esimo **funtore di omologia**.

343 SEC di Complessi di Catene

Sia R un **anello** commutativo con unità. Siano $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{C}'_\bullet, \mathcal{C}''_\bullet$ dei **complessi di catene** e $f_\bullet : \mathcal{C}'_\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$, $g_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}''_\bullet$ **morfismi**.

Una **successione esatta corta** di complessi di catene è

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}'_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{C}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}''_\bullet \longrightarrow 0$$

tale che, se

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\bullet &= \{(C_n, \partial)\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathcal{C}'_\bullet &= \{(C'_n, \partial')\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathcal{C}''_\bullet &= \{(C''_n, \partial'')\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

e i morfismi sono

$$\begin{aligned} f_\bullet &= \{f_n : C'_n \rightarrow C_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ g_\bullet &= \{g_n : C_n \rightarrow C''_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la seguente è una **SEC** di R -moduli:

$$0 \longrightarrow C'_n \xrightarrow{f_n} C_n \xrightarrow{g_n} C''_n \longrightarrow 0$$

ovvero se il [seguente](#) diagramma commutativo è a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n+1} & \xrightarrow{f_{n+1}} & C_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & C''_{n+1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_{n+1} \downarrow & & \partial_{n+1} \downarrow & & \partial''_{n+1} \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_n & \xrightarrow{f_n} & C_n & \xrightarrow{g_n} & C''_n \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_n \downarrow & & \partial_n \downarrow & & \partial''_n \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & C'_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{g_{n-1}} & C''_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \partial'_{n-1} \downarrow & & \partial_{n-1} \downarrow & & \partial''_{n-1} \downarrow \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots &
 \end{array}$$

Generalizzando:

Definizione 1. Una [successione di complessi di catene e morfismi di catene](#)

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet^{i-1} \xrightarrow{f_\bullet^{i-1}} \mathcal{C}_\bullet^i \xrightarrow{f_\bullet^i} \mathcal{C}_\bullet^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

si dice [esatta](#) se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ la successione indotta sui moduli componenti è [esatta](#), ovvero se:^[47]

$$\text{Im}(f_n^{i-1}) = \ker(f_n^i) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Equivalentemente, la successione è esatta se $\text{Im}(f_\bullet^{i-1}) = \ker(f_\bullet^i)$ come [sottocomplessi](#).

344 Omotopia tra funzioni continue

Siano X, Y spazi topologici, $f, g : X \rightarrow Y$ funzioni continue.

Definizione 1. Le funzioni f, g si dicono [omotopiche](#) se esiste una [omotopia](#), ovvero

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

continua (dove il dominio ha la [topologia prodotto](#)), e tale che

$$\forall x \in X, \quad H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x)$$

345 Omotopia tra morfismi di complessi di catene

Sia R un [anello](#) commutativo con unità, e siano $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{D}_\bullet$ due [complessi di catene](#) di [R-moduli](#):

$$\mathcal{C}_\bullet = \left\{ (C_n, \partial_n^C) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{D}_\bullet = \left\{ (D_n, \partial_n^D) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

e siano $f_\bullet, g_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{D}_\bullet$ due [morfismi](#),

$$f_\bullet = \{f_n : C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad g_\bullet = \{g_n : C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^C} & C_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^C} & C_n & \xrightarrow{\partial_n^C} & C_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^C} \cdots \\
& \swarrow s_{n+1} & \downarrow f_{n+1} & \swarrow s_n & \downarrow f_n & \swarrow s_{n-1} & \downarrow f_{n-1} & \swarrow s_{n-2} \\
\cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^D} & D_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}^D} & D_n & \xrightarrow{\partial_n^D} & D_{n-1} & \xrightarrow{\partial_{n-1}^D} \cdots
\end{array}$$

Figura 1: f_\bullet, g_\bullet omotopi.

Definizione 1. Le mappe f_\bullet, g_\bullet si dicono **omotopiche**, e si scrive $f_\bullet \sim g_\bullet$ se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esistono morfismi tra **R-moduli**

$$s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$$

tali che

$$f_k - g_k = s_{k-1} \circ \partial_k^C + \partial_{k+1}^D \circ s_k$$

come raffigurato in Figura 1

346 Applicazione del funtore di omologia a funzioni omotope tra complessi di catene

Sia R un **anello** commutativo con unità, e siano $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{D}_\bullet$ due **complessi di catene** di **R-moduli**:

$$\mathcal{C}_\bullet = \left\{ (C_n, \partial_n^C) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{D}_\bullet = \left\{ (D_n, \partial_n^D) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

e siano $f_\bullet, g_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{D}_\bullet$ due **morfismi**,

$$f_\bullet = \{f_n : C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad g_\bullet = \{g_n : C_n \rightarrow D_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Proposizione 1. Se $f_\bullet \sim g_\bullet$ sono **omotope**, allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l' n -esimo **funtore di omologia** è uguale:

$$H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet) : H_n(\mathcal{C}_\bullet) \longrightarrow H_n(\mathcal{D}_\bullet)$$

Dimostrazione. Siano $\{s_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ i morfismi che rendono $f_\bullet \sim g_\bullet$.

Ricordiamo che per ogni $[z_n] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ il **funtore agisce**:

$$\begin{aligned}
H_n(f_\bullet)[z_n] &= [f_n(z_n)] \\
H_n(g_\bullet)[z_n] &= [g_n(z_n)]
\end{aligned}$$

Dunque, svolgendo il calcolo direttamente, fissato $[z_n] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ (vedi anche [Quoziente di Moduli](#))

$$\begin{aligned}
H_n(f_\bullet)[z_n] - H_n(g_\bullet)[z_n] &= [f_n(z_n)] - [g_n(z_n)] \\
&= [(f_n - g_n)(z_n)] \\
&= [(s_{n-1} \circ \partial_n^C + \partial_{n+1}^D \circ s_n)(z_n)] \\
&= [s_{n-1} \circ \partial_n^C(z_n)] + [\partial_{n+1}^D \circ s_n(z_n)]
\end{aligned}$$

Ma $z_n \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet)^{[48]}$, e dunque $\partial_n^C(z_n) = 0$, mentre $\text{Im } \partial_{n+1}^D = B_n(\mathcal{D}_\bullet)$ e pertanto

$$[\partial_{n+1}^D \circ s_n(z_n)] = [0]$$

Si ottiene che, per ogni $[z_n] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$

$$H_n(f_\bullet)[z_n] - H_n(g_\bullet)[z_n] = 0$$

■

347 Categoria omotopica dei complessi di catene

Sia R un anello commutativo con unità.

Sia \sim è la relazione di equivalenza di omotopia tra morfismi di complessi di catene.

Definizione 1. Si definisce la categoria $\mathbf{h}\text{-Ch}_R$ data da:

1. $\text{Ob}(\mathbf{h}\text{-Ch}_R) = \text{Ob}(\mathbf{Ch}_R)^{[49]}$;
2. Per ogni $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{D}_\bullet \in \text{Ob}(\mathbf{h}\text{-Ch}_R)$ si definisce il quoziante:

$$\text{Hom}_{\mathbf{h}\text{-Ch}_R}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{D}_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbf{Ch}_R}(\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{D}_\bullet) / \sim .$$

347.1 Funtore da $\mathbf{h}\text{-Ch}_R$ a \mathbf{RMod} - di omologia

Inoltre, il funtore di omologia:

$$H_n : \mathbf{Ch}_R \rightarrow \mathbf{RMod}$$

induce un funtore

$$H_n : \mathbf{h}\text{-Ch}_R \rightarrow \mathbf{RMod}$$

nella categoria degli R -moduli.

348 Complessi di catene omotopicamente equivalenti

Sia R un anello commutativo con unità.

Definizione 1. Siano $\mathcal{C}_\bullet, \mathcal{D}_\bullet$ due complessi di catene di R -moduli. Questi si dicono omotopicamente equivalenti, e si scrive $\mathcal{C}_\bullet \sim \mathcal{D}_\bullet$ se esistono morfismi

$$f_\bullet : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{D}_\bullet, \quad g_\bullet : \mathcal{D}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$$

tali che la loro composizione sia omotopa all'identità, ovvero

$$f_\bullet \circ g_\bullet \sim \text{id}_{\mathcal{D}_\bullet}, \quad g_\bullet \circ f_\bullet \sim \text{id}_{\mathcal{C}_\bullet}.$$

Proposizione 2. Se $\mathcal{C}_\bullet \sim \mathcal{D}_\bullet$ allora i loro moduli di omologia sono isomorfi:

$$\forall n : \quad H_n(\mathcal{C}_\bullet) \cong H_n(\mathcal{D}_\bullet)$$

Dimostrazione. Per definizione esistono: $\mathcal{C}_\bullet \xrightleftharpoons[g_\bullet]{f_\bullet} \mathcal{D}_\bullet$ e, applicando il [funtore di omologia](#), si ottiene

$$H_n(f_\bullet \circ g_\bullet) = H_n(\text{Id}_{\mathcal{D}_\bullet}) = \text{Id}_{H_n(\mathcal{D}_\bullet)}$$

ovvero $H_n(f_\bullet)$ invertibile e quindi [isomorfismo](#). ■

349 Complesso di catene aciclico

Sia R un [anello](#) commutativo con unità e sia \mathcal{C}_\bullet un [complesso di catene](#).

Definizione 1. \mathcal{C}_\bullet si dice **aciclico** se per ogni $n \in \mathbb{Z}$, il suo n -esimo [modulo di omologia](#) è nullo,

$$H_n(\mathcal{C}_\bullet) = 0$$

350 Complesso di catene contraibile

Sia R un [anello](#) commutativo con unità e sia \mathcal{C}_\bullet un [complesso di catene](#),

$$\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Siano $\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet}, \mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet} : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$ due [morfismi](#):

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet} &= \{\text{Id}_n : C_n \rightarrow C_n : c \mapsto c\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet} &= \{\mathbb{O}_n : C_n \rightarrow C_n : c \mapsto 0\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Definizione 1. \mathcal{C}_\bullet si dice **contraibile** se i [morfismi](#) $\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet}$ e $\mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet}$ sono [omotopi](#),

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet} \sim \mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet}$$

351 Complesso di catene contraibile è aciclico

Sia R un [anello](#) commutativo con unità e sia \mathcal{C}_\bullet un [complesso di catene](#),

$$\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Proposizione 1. Se \mathcal{C}_\bullet è **contraibile**, allora è **aciclico**.

Dimostrazione. Siano $\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet}, \mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet} : \mathcal{C}_\bullet \rightarrow \mathcal{C}_\bullet$ i due [morfismi](#):

$$\begin{aligned}\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet} &= \{\mathbb{1}_n : C_n \rightarrow C_n : c \mapsto c\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet} &= \{\mathbb{O}_n : C_n \rightarrow C_n : c \mapsto 0\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

Per ipotesi, questi sono [omotopiche](#):

$$\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet} \sim \mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet}$$

Sia n fissato, e sia $H_n(\mathcal{C}_\bullet)$ l' n -esimo **modulo di omologia** di \mathcal{C}_\bullet . Per la **funzionalità** di H_n ^[50]

$$H_n(\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet}) = \mathbb{1}_{H_n(\mathcal{C}_\bullet)}.$$

Sia ora $[z] \in H_n(\mathcal{C}_\bullet)$.

$$[z] = \mathbb{1}_{H_n(\mathcal{C}_\bullet)}[z] = H_n(\mathbb{1}_{\mathcal{C}_\bullet})[z] = H_n(\mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet})[z]$$

dove l'ultima uguaglianza vale **poiché le due funzioni sono omotopiche**; ma

$$H_n(\mathbb{O}_{\mathcal{C}_\bullet})[z] = [\mathbb{O}_n(z)] = [0].$$

■

352 Complesso di catene aciclico libero è contraibile

Proposizione 1. Sia R un **PID**, sia \mathcal{C}_\bullet un **complejo de catenes libres**. Se \mathcal{C}_\bullet è **aciclico**, allora \mathcal{C}_\bullet è **contraible**.

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, siccome R è un PID e C_n è un **modulo libre**, allora i **sottomoduli** $B_n, Z_n \subseteq_R C_n$ ^[51] sono liberi.

Sia E_n una **base** di $Z_n = \ker \partial_n$ ^[52]. Per ogni $e_i \in E_n$ si fissi $\tilde{e}_i \in \partial_{n+1}^{-1}(e_i) \subseteq C_{n+1}$.

Si definisce il **morfismo**

$$\begin{aligned} \sigma_n : Z_n &\longrightarrow C_{n+1} \\ \sum a_i e_i &\longmapsto \sum a_i \tilde{e}_i \end{aligned}$$

Osserviamo che $\partial_{n+1} \circ \sigma_n = \text{Id}^{[53]}$, (\star) .

Si definisce inoltre il morfismo $\tau_n : C_n \rightarrow C_n$: $\tau_n = \mathbb{1}_{C_n} - \sigma_{n-1} \circ \partial_n$

Osserviamo che, per ogni $c_n \in C_n$:

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \tau_n(c_n) &= \partial_n (c_n - \sigma_{n-1}(\partial_n c_n)) \\ &= \partial_n c_n - \underbrace{\partial_n \circ \sigma_{n-1}}_{=\text{Id}}(\partial_n c_n) \\ &= \partial_n c_n - \partial_n c_n = 0. \end{aligned}$$

Pertanto $\text{Im } \tau_n \subseteq \ker \partial_n = Z_n$ e dunque $\tau_n : C_n \rightarrow Z_n$

Definisco $s_n : C_n \rightarrow C_{n+1}$ **mappa di omotopia**

$$s_n = \sigma_n \circ \tau_n$$

Verifichiamo in particolar modo che valga

$$s_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ \partial_n = \mathbb{1}_n - \mathbb{O}_n = \mathbb{1}_n$$

Dunque

$$\begin{aligned}
s_{n-1} \circ \partial_n(c_n) + \partial_{n+1} \circ s_n(c_n) &= \sigma_{n-1} \circ \tau_{n-1} \circ \partial_n c_n + \underbrace{\partial_{n+1} \circ \sigma_n}_{=\mathbb{1}_n} \circ \tau_n(c_n) \\
&= \sigma_{n-1}(\partial_n c_n - \sigma_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n c_n) + \tau_n(c_n) \\
&= \sigma_{n-1} \circ \partial_n c_n + \tau_n(c_n) \\
&= \sigma_{n-1} \circ \partial_n c_n + (c_n - \sigma_{n-1} \circ \partial_n c_n) = c_n = \mathbb{1}_n(c_n). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

353 Complesso di catene libero

Sia R un anello commutativo con unità, e sia \mathcal{C}_\bullet un complesso di catene,

$$\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

Definizione 1. \mathcal{C}_\bullet si dice *libero* se per ogni n il *modulo* C_n è *libero*.

354 Indipendenza Affine

Siano $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{A}^n$ punti di uno spazio affine.

Definizione 1. p_1, \dots, p_k si dicono *affinamente indipendenti* se i vettori $\overrightarrow{p_1 p_2}, \overrightarrow{p_1 p_3}, \dots, \overrightarrow{p_1 p_k}$ sono *linearmente indipendenti*.

355 Simplesso

Definizione 1. Siano $p_0, \dots, p_q \in \mathbb{R}^{n+1}$ punti affinamente indipendenti. Si definisce il q -simplesso

$$[p_0, \dots, p_q] := \left\{ t_0 p_0 + \dots + t_q p_q : t_i \in [0, 1], \sum t_i = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

e si dirà che $\dim[p_0, \dots, p_q] = q$.

356 Simplesso standard

357 Simplesso Standard

Definizione 1. Si consideri \mathbb{R}^q con la base canonica $\{e_1, e_2, \dots, e_q\}$, dove

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

in cui l'unico 1 è nella posizione i -esima.

Si definisce il q -simplesso standard come il *simplesso*:

$$\Delta_q := [0, e_1, \dots, e_q] \subseteq \mathbb{R}^q$$

358 Faccia di un simplesso

Definizione 1. Siano $p_0, \dots, p_q \in \mathbb{R}^n$. Se $\{p_{i_0}, \dots, p_{i_k}\} \subseteq \{p_0, \dots, p_q\}$, allora i **simplessi**

$$\Delta' = [p_{i_0}, \dots, p_{i_k}] \subseteq [p_0, \dots, p_q] = \Delta$$

Tali simplessi sono detti **faccia** di Δ , e si scrive $\Delta' \preceq \Delta$. Se $k = q - 1$ allora sono **facciata**.

359 Complesso Simpliciale

Definizione 1. Un complesso simpliciale K in \mathbb{R}^{n+1} è un insieme

$$K = \{\sigma_i\}_{i \in I}$$

dove σ_i sono **simplessi** di \mathbb{R}^{n+1} tali che

1. Se $\sigma \in K$ e $\tau \preceq \sigma$ è una **faccia** allora $\tau \in K$;
2. Se $\tau_1, \tau_2 \in K$ e $\sigma = \tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$, allora $\sigma \preceq \tau_1$ e $\sigma \preceq \tau_2$ ^[54]

360 Sottocomplesso Simpliciale

Definizione 1. Sia K un **complejo simpliciale**. $K' \subseteq K$ è un sottocompleso simpliciale se soddisfa le seguenti condizioni:

1. se $\sigma \in K'$ e $\tau \preceq \sigma$ è una **faccia** allora $\tau \in K'$;
2. Se $\tau_1, \tau_2 \in K'$ e $\sigma = \tau_1 \cap \tau_2 \neq \emptyset$, allora $\sigma \preceq \tau_1$ e $\sigma \preceq \tau_2$

Osservazione. Un sottocompleso di K è un qualsiasi $K' \subseteq K$ che sia ancora un complesso.

361 Supporto di un complesso simpliciale

Sia K un **complejo simpliciale** di \mathbb{R}^{n+1} , $K = \{\sigma_i\}_{i \in I}$ ^[55]

Definizione 1. Il **supporto** di K è l'insieme

$$|K| := \bigcup_{i \in I} \sigma_i \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

362 Topologia debole di un complesso simpliciale

Definizione 1. Sia K un **complejo simpliciale** in \mathbb{R}^{n+1} , e sia $|K|$ il suo **supporto**.

Si definisce una **topologia** su $|K|$, detta topologia debole: $C \subseteq |K|$ è **chiuso** se e solo se, per ogni $\sigma \in K$, $C \cap \sigma \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ è **chiuso**.

Proposizione 2. Se K è un insieme finito, allora la topologia debole di $|K|$ è uguale alla **topologia indotta** $|K| \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Esempio 3. In \mathbb{R}^2 , sia K formato dai seguenti **simplessi**: detto $P_\theta = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$:

$$K = \{[0]\} \cup \{[P_\theta], [0, P_\theta]\}_{\theta \in [0, 2\pi]}.$$

Si ha che $|K| = B_1(0)$ (vedi [Palla n-dimensionale](#)).

Consideriamo l'insieme

$$C = \{(x, y) \in |K| : x > 0\} \cup \{0\}$$

C non è un chiuso nella topologia indotta, ma lo è nella topologia debole, poiché

$$C = \bigcup_{-\pi/2 < \theta < \pi/2} [0, P_\theta]$$

363 Scheletro di un complesso simpliciale

Sia K un [complejo simpliciale](#), e sia $q \in \mathbb{N}$.

Definizione 1. Si definisce il q -[scheletro di \$K\$](#) , $K^q \subseteq K$ come l'insieme dei [\$q\$ -simplessi](#) di K :

$$K^q = \{\sigma \in K : \dim \sigma = q\}$$

364 Modulo delle catene simpliciali

Definizione 1. Sia K un [complejo simpliciale totalmente ordinato](#) e sia R un [PID](#).

Allora, per ogni $q \in \mathbb{N}$, se K^q è il q -[scheletro di \$K\$](#) , si definisce il [modulo](#) delle catene simpliciali:^[56]

$$C_q(K) = R^{(K^q)} = \left\{ \sum a_i \sigma_i : a_i \in R, \sigma_i \in K^q \right\}$$

dove le somme sono formali:

$$\sum a_i \sigma_i = (a_i)_{\sigma_i \in K^q},$$

Notazione. Se τ è una [permutazione](#) degli elementi $(0, \dots, q)$ allora si indica con:

$$[p_{\tau(0)}, \dots, p_{\tau(q)}] := \text{sgn}(\tau) [p_0, \dots, p_q]$$

365 Complejo Simpliciale generato da un simplesso

Siano $p_0, \dots, p_q \in \mathbb{R}^{n+1}$, e sia $\sigma = [p_0, \dots, p_q] \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ un q -[simplesso](#).

Definizione 1. Con $K(\sigma)$ si indica il più piccolo [complejo simpliciale](#) tale che $\sigma \in K(\sigma)$.

Con $K(\sigma)^*$ si indica

$$K(\sigma)^* := K(\sigma) \setminus \{\sigma\}$$

366 Palla n-dimensionale

367 Complesso Simpliciale totalmente ordinato

Sia K un complesso simpliciale, e sia K^0 il suo 0-scheletro. È ovvio verificare che per ogni simplex $\sigma \in K$:

$$\sigma = [p_0, \dots, p_q]$$

per qualche $p_0, \dots, p_q \in K^0$.

Definizione 1. K si dice **totalmente ordinato** se è stato fissato un ordine totale $<$ su K^0 .

Quando K è totalmente ordinato ogni $\sigma \in K$ è denotato da

$$\sigma = [p_0, \dots, p_q]$$

con $p_0 < \dots < p_q$. Non è corretto scrivere $[p_1, p_0, \dots, p_q]$.

368 Mappe di bordo tra moduli di catene simpliciali

Sia R un PID.

Sia K un complesso simpliciale totalmente ordinato, e sia per ogni q l' R -modulo delle catene simpliciali $C_q(K)$. Si definisce il morfismo:

$$\begin{aligned} \partial_q : C_q(K) &\longrightarrow C_{q-1}(K) \\ [p_0, \dots, p_q] &\longmapsto \sum_{i=0}^q (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] \end{aligned}$$

Proposizione 1. Per ogni q si ha che $\partial_{q-1}\partial_q = 0$.

Dimostrazione. Siccome $C_q(K)$ è libero, è sufficiente mostrarlo su una base.

Sia $[p_0, \dots, p_q] \in K^q$ un q -simplex. Per definizione:

$$\partial_q[p_0, \dots, p_q] = \sum_{i=0}^q (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q].$$

Dunque

$$\begin{aligned}
\partial_{q-1}(\partial_q[p_0, \dots, p_q]) &= \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}[p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] \\
&= \sum_{i=0}^q (-1)^i \left[\sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] + \sum_{j=i}^{q-1} (-1)^j [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_{j+1}, \dots, p_q] \right] \\
&= \sum_{\substack{j < i \\ i,j=0}}^q (-1)^{i+j} [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] + \sum_{\substack{j+1 > i \\ i,j=0}}^q -(-1)^{i+j+1} [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, \hat{p}_{j+1}, \dots, p_q] \\
&\stackrel{\dagger}{=} \sum_{\substack{j < i \\ i,j=0}}^q (-1)^{i+j} [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] + \sum_{\substack{i' > j' \\ i',j'=0}}^q -(-1)^{i'+j'} [p_0, \dots, \hat{p}_{j'}, \dots, \hat{p}_{i'}, \dots, p_q] \\
&= \sum_{\substack{j < i \\ i,j=0}}^q (-1)^{i+j} [p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_q] - \sum_{\substack{i' > j' \\ i',j'=0}}^q (-1)^{i'+j'} [p_0, \dots, \hat{p}_{j'}, \dots, \hat{p}_{i'}, \dots, p_q] = 0
\end{aligned}$$

dove l'uguaglianza (\dagger) si è ottenuta ponendo $j' = i$ e $i' = j + 1$. ■

369 Complesso di catene simpliciali

Sia R un **PID**. Sia K un **complesso simpliciale totalmente ordinato**, e siano, per ogni q :

- $C_q(K)$ il **modulo delle catene simpliciali**;
- $\partial_q : C_q(K) \rightarrow C_{q-1}(K)$ la **mappa di bordo**.

Allora

$$\mathcal{C}_\bullet(K) := \{(C_q(K), \partial_q)\}_q$$

è un **completo di catene**, detto **completo di catene simpliciali**.

370 Omologia Simpliciale

Sia R un **PID** e sia K un **complesso simpliciale totalmente ordinato**.

Definizione 1. Per ogni $q \in \mathbb{N}$ si definisce l'**omologia simpliciale di K** , $H_q(K)$, come il **q -esimo modulo di omologia** del **completo di catene simpliciali**:

$$H_q(K) := H_q(\mathcal{C}_\bullet(K))$$

371 Calcolo dell'omologia simpliciale per il complesso di catene generato da un 2-simplesso

Sia $\sigma = [p_0, p_1, p_2]$ un **2-simplesso**, e sia $K = K[\sigma]$ il **completo simpliciale generato** da σ . Sia R un **PID**.

Denotando con

$$e_{i_0, \dots, i_k} = [p_{i_0}, \dots, p_{i_k}]$$

si ha che i complessi di catene simpliciali sono i seguenti moduli liberi^[57]:

$$\begin{aligned} C_0(K) &= R^{\{\{e_0, e_1, e_2\}\}} \\ C_1(K) &= R^{\{\{e_{01}, e_{02}, e_{12}\}\}} \\ C_2(K) &= R^{\{\{e_{012}\}\}} = R \cdot e_{012} \end{aligned}$$

Le mappe di bordo sono le seguenti:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2(K) & \xrightarrow{\partial_2} & C_1(K) & \xrightarrow{\partial_1} & C_0(K) \xrightarrow{\partial_0} 0 \\ & & e_{012} & \longmapsto & e_{12} - e_{02} + e_{01} & & \\ & & e_{01} & \longmapsto & e_1 - e_0 & & \\ & & e_{02} & \longmapsto & e_2 - e_0 & & \\ & & e_{12} & \longmapsto & e_2 - e_1 & & \end{array}$$

Si vogliono calcolare i moduli di omologia.

• Modulo di omologia 2

Si ha che ∂_2 è una mappa iniettiva^[58], e quindi $\ker \partial_2 = \{0\}$. Inoltre, ovviamente, $\partial_3 \equiv 0$, e dunque $\text{Im } \partial_3 = \{0\}$. Dunque

$$H_2(K) = \frac{\ker \partial_2}{\text{Im } \partial_3} = \{0\} / \{0\} = 0$$

• Modulo di omologia 1

Per il primo teorema di isomorfismo, $\text{Im } \partial_2 \cong C_2(K) / \{0\}$, con base $\{e_{12} - e_{02} + e_{01}\}$.

Consideriamo invece un generico elemento di $C_1(K)$, ovvero, fissati $a, b, c \in R$,

$$ae_{01} + be_{02} + ce_{12}.$$

Per calcolare il $\ker \partial_1$ imponiamo

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_1(ae_{01} + be_{02} + ce_{12}) \\ &= ae_1 - ae_0 + be_2 - be_0 + ce_2 - ce_1 \iff \begin{cases} a - c = 0 \\ -a - b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \\ &= e_1(a - c) + e_0(-a - b) + e_2(b + c) \end{aligned}$$

dove la doppia implicazione vale perché $e_0, \{e_1, e_2\}$ è base di $C_0(K)$.

Dunque, $x \in \ker \partial_1$ se e solo se $x = c(e_{01} - e_{02} + e_{12})$ e dunque

$$\ker \partial_1 = R \cdot (e_{01} - e_{02} + e_{12})$$

Pertanto

$$H_1(K) = \frac{R \cdot (e_{01} - e_{02} + e_{12})}{R \cdot (e_{01} - e_{02} + e_{12})} = 0$$

- **Modulo di omologia 0**

Siccome $\partial_0 \equiv 0$, allora $\ker \partial_0 = C_0(K) = R^{\{e_0, e_1, e_2\}}$. Viceversa, $\text{Im } \partial_1 = R^{\{e_1 - e_0, e_2 - e_0, e_2 - e_1\}}$, e dunque

$$H_0(K) = \frac{R^{\{e_0, e_1, e_2\}}}{R^{\{e_1 - e_0, e_2 - e_0, e_2 - e_1\}}} = R \cdot e_0$$

372 Omologia Simpliciale per un complesso simpliciale generato

Sia R un PID. Sia σ_n un qualsiasi **simplesso** in \mathbb{R}^m , e sia $K = K(\sigma_n)$ il **complejo simpliciale generato** da σ_n .

Allora, l'**omologia simpliciale** di K è

$$H_q(K) = \begin{cases} 0 & q > 0 \\ R \cdot e_0 & q = 0 \end{cases}$$

dove e_0 indica lo 0 simplesso generato da un punto **di K^0** , in accordo con la notazione.

373 Notazione per i simplessi

Sia $\{p_0, \dots, p_q\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ **affinamente indipendenti** fissato.

Si denota il **simplesso**

$$e_{i_0, \dots, i_k} = [p_{i_0}, \dots, p_{i_k}].$$

374 Complesso Augmentato di un complesso simpliciale

Sia R un PID e sia K un **complejo simpliciale totalmente ordinato**. Sia

$$\mathcal{C}_\bullet(K) := \left\{ (C_q(K), \partial_q) \right\}_q$$

il **complejo delle catene simpliciali** di K .^[59]

Definizione 1. Si definisce **complejo aumentato di K** il **complejo di catene**

$$\widetilde{\mathcal{C}}_\bullet(K) := \left\{ (\widetilde{C}_q(K), \widetilde{\partial}_q) \right\}_q$$

dove si ha:

$$\cdots \longrightarrow C_q(K) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} \widetilde{C}_{-1}(K) := R$$

$$\sum a_i[p_i] \longmapsto \sum a_i$$

Figura 2: Il Complesso Augmentato di K .

- per $q \geq 0$: $\widetilde{C}_q(K) := C_q(K)$, e
 $\widetilde{C}_{-1}(K) := R$

- per $q \geq 1$: $\tilde{\partial}_q := \partial_q$, e

$$\begin{aligned}\tilde{\partial}_0 : C_0(K) &\longrightarrow R \\ \sum a_i[p_i] &\longmapsto \sum a_i.\end{aligned}$$

come illustrato in Figura 2.

Proposizione 2. $\widetilde{\mathcal{C}}_\bullet(K)$ è un complesso di catene.

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $\tilde{\partial}_0 \circ \partial_1 = 0$, e lo si mostra solo sugli elementi della base. Sia $[p, q] \in K^1$ ^[60]:

$$\tilde{\partial}_0 \circ \partial_1 ([p, q]) = \tilde{\partial}_0 ([q] - [p]) = 1 - 1 = 0$$

■

375 Omologia Ridotta di un complesso simpliciale

Sia R un PID e sia K un complesso simpliciale totalmente ordinato.

Definizione 1. L'omologia simpliciale ridotta di K , $\widetilde{H}_q(K)$, è l'omologia del complesso augmentato di K , ovvero

$$\widetilde{H}_q(K) := H_q(\widetilde{\mathcal{C}}_\bullet(K))$$

Teorema 2. Indicata con $H_q(K)$ l'omologia simpliciale di K , si ha che^[61]

$$\widetilde{H}_q(K) = \begin{cases} H_q(K) & q > 0 \\ H_0(K) \oplus R & q = 0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione per i diversi valori di q .

- $q > 0$

Per ogni $q > 0$, si ha che $q \geq 1$ e quindi^[62]

$$\widetilde{H}_q(K) = \frac{\ker \tilde{\partial}_q}{\text{Im } \tilde{\partial}_{q+1}} = \frac{\ker \partial_q}{\text{Im } \partial_{q+1}} = H_q(K)$$

- $q = 0$

Si consideri la seguente successione di morfismi:

$$0 \longrightarrow \frac{\ker \tilde{\partial}_0}{\text{Im } \partial_1} \xrightarrow{f} \frac{\ker \partial_0}{\text{Im } \partial_1} \longrightarrow \frac{C_0(K)}{\ker \partial_0} \longrightarrow 0$$

- f è l'inclusione, poiché $\ker \tilde{\partial}_0 \subseteq \ker \partial_0 = C_0$ e dunque la f è **iniettiva**:
- inoltre per il **terzo teorema di isomorfismo**:

$$\frac{C_0(K)}{\ker \tilde{\partial}_0} = \frac{\ker \partial_0}{\ker \tilde{\partial}_0} \cong \frac{\ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1}{\ker \tilde{\partial}_0 / \text{Im } \partial_1}$$

e **quindi** la successione è realmente **esatta**.

Siccome^[63]

$$\frac{C_0(K)}{\ker \tilde{\partial}_0} \cong R$$

sostituendo si ottiene la **SEC**:

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(K) \longrightarrow H_0(K) \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

dove R è **libero**. Pertanto, per il **Teorema di Spezzamento** (e il suo **corollario**):

$$H_0(K) \cong \widetilde{H}_0(K) \oplus R$$

■

Sia R un **PID** e sia K un **complesso simpliciale totalmente ordinato**. Si consideri il **complesso di catene simpliciali**:

$$\mathcal{C}_\bullet(K) = \left\{ (C_q(K), \partial_q) \right\}_q$$

376 Modulo del complesso simpliciale relativo

Sia $L \subseteq K$ un **sottocomplesso**. Allora per ogni q , gli **scheletri** $L^q \subseteq K^q$ e, pertanto:^[64]

$$R^{L^q} \subseteq R^{K^q}$$

il **modulo libero generato** da L^q è **sottomodulo** di quello generato da K^q :

$$C_q(L) = R^{L^q} \subseteq_R R^{K^q} = C_q(K)$$

Quindi il modulo quoziante R^{K^q}/R^{L^q} è **libero**, ed è **isomorfo** a $R^{K^q \setminus L^q}$.

Definizione 1. Si definisce il **modulo del complesso simpliciale relativo** (K, L) :

$$C_q(K, L) := \frac{C_q(K)}{C_q(L)}$$

377 Mappa di bordo tra moduli di complessi simpliciali relativi

Si definisce, per ogni q , la mappa di bordo

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_q : C_q(K, L) &\longrightarrow C_{q-1}(K, L) \\ c_q + C_q(L) &\longmapsto \bar{\partial}_q c_q + C_{q-1}(L)\end{aligned}$$

dove $\bar{\partial}_q$ è la mappa di bordo per $C_q(K)$.

Proposizione 1. Per ogni q ,

1. $\bar{\partial}_q$ è ben definita;
2. $\bar{\partial}_{q+1} \circ \bar{\partial}_q \equiv 0$.

Dimostrazione. 1. È sufficiente mostrare che se, per $\ell_q \in C_q(L)$:

$$c_q = c'_q + \ell_q \iff [c_q] = [c'_q]$$

allora $[\bar{\partial}_q c_q] = [\bar{\partial}_q c'_q]$. In particolare, si mostra che $\bar{\partial}_q \ell_q \in C_{q-1}(L)$ per ogni $\ell_q \in C_q(L)$.

È sufficiente farlo per un elemento $\sigma = [p_0, \dots, p_q] \in L^q$ base di $C_q(L)$:

$$\bar{\partial}_q [p_0, \dots, p_q] = \sum (-1)^j \underbrace{[p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, p_q]}_{\text{in } L^{q-1}}$$

e quindi $\bar{\partial}_q \sigma \in C^{q-1}(L)$.

2. Sia $c + C_q(L) \in C_q(K, L)$. Allora

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_{q-1} \circ \bar{\partial}_q (c + C_q(K)) &= \bar{\partial}_{q-1} (\bar{\partial}_q c + C_{q-1}(L)) \\ &= \bar{\partial}_{q-1} \bar{\partial}_q c + C_{q-2}(L) = 0\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza si ha perché $\bar{\partial}_{q-1} \bar{\partial}_q = 0$ per le mappe di bordo. ■

378 Complesso di catene relative

Mantenendo le notazioni:

Definizione 1. Il complesso di catene relative è il complesso di catene:

$$\mathcal{C}_\bullet(K, L) := \left\{ (C_q(K, L), \bar{\partial}_q) \right\}_q$$

379 Omologia Simpliciale Relativa

Sia R un PID, K un complesso simpliciale totalmente ordinato e $L \subseteq K$ un sottocomplesso. Si consideri il complesso di catene relative $\mathcal{C}_\bullet(K, L)$.

Definizione 1. L'omologia simpliciale relativa della coppia (K, L) è l'omologia del complesso di catene relative.

$$H_q(K, L) := H_q(\mathcal{C}_\bullet(K, L))$$

380 Successione esatta di una coppia di complesso e sotto-complexo in omologia

Sia R un **PID**, K un **complejo simpliciale totalmente ordinato** e $L \subseteq K$ un **sottocomplejo**. Questi danno luogo a tre **complessi di catene**:^[65]

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\bullet(K) &= \left\{ \left(C_q(K), \partial_q^K \right) \right\}_q \\ \mathcal{C}_\bullet(L) &= \left\{ \left(C_q(L), \partial_q^L \right) \right\}_q \\ \mathcal{C}_\bullet(K, L) &= \left\{ \left(C_q(K, L), \bar{\partial}_q \right) \right\}_q\end{aligned}$$

Le righe del seguente diagramma sono **SEC**:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_q(L) & \xhookrightarrow{i_q} & C_q(K) & \xrightarrow{\pi_q} & C_q(K)/C_q(L) = C_q(K, L) \longrightarrow 0 \\ & & \partial_q^L \downarrow & & \partial_q^K \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & C_{q-1}(L) & \xhookrightarrow{i_{q-1}} & C_{q-1}(K) & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & C_{q-1}(K)/C_{q-1}(L) = C_{q-1}(K, L) \longrightarrow 0 \end{array}$$

per la **corretta caratterizzazione**, quindi, dette $i_\bullet := \{i_q : C_q(L) \longrightarrow C_q(K)\}_q$ e $\pi_\bullet = \{\pi_q : C_q(K) \longrightarrow C_q(K, L)\}_q$, allora si ha la seguente **SEC**:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_\bullet(L) \xrightarrow{i_\bullet} \mathcal{C}_\bullet(K) \xrightarrow{\pi_\bullet} \mathcal{C}_\bullet(K, L) \longrightarrow 0$$

È dunque possibile applicare lo **Zig Zag Lemma**, ottenendo la successione esatta in **omologia**:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(\mathcal{C}_\bullet(L)) & \longrightarrow & H_q(\mathcal{C}_\bullet(K)) & \longrightarrow & H_q(\mathcal{C}_\bullet(K, L)) \\ & & & & & \nearrow \partial_* & \\ & & H_{q-1}(\mathcal{C}_\bullet(L)) & \xrightarrow{\quad} & H_{q-1}(\mathcal{C}_\bullet(K)) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

che, per definizione di **omologia simpliciale** e **omologia simpliciale relativa** diventa

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(L) & \longrightarrow & H_q(K) & \longrightarrow & H_q(K, L) \\ & & & & & \nearrow \partial_* & \\ & & H_{q-1}(L) & \xrightarrow{\quad} & H_{q-1}(K) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

381 Quoziente di somma diretta di moduli

Sia R un **anello** commutativo con unità, e sia $\{M_i\}_{i \in I}$ una famiglia di **R -moduli**.

Proposizione 1. Se per ogni $i \in I$, $N_i \subseteq_R M_i$ è un **sottomodulo**, allora il **quoziente** della somma diretta è isomorfo alla somma diretta dei quozienti:

$$\frac{\bigoplus_{i \in I} M_i}{\bigoplus_{i \in I} N_i} \cong \bigoplus_{i \in I} M_i/N_i$$

Corollario 2. Se $M := \bigoplus_{i \in I} M_i$ è la **somma diretta** e, per $J \subseteq I$ si definisce $N := \bigoplus_{j \in J} M_j$, allora il **quoziente**:

$$M/N \cong \bigoplus_{i \in I \setminus J} M_i$$

382 Mappa simpliciale

Siano K, L due **complessi simpliciali**.

Definizione 1. Una **mappa simpliciale** $\varphi : K \rightarrow L$ è una mappa tra gli **0-scheletri**:

$$\varphi_0 : K^0 \rightarrow L^0$$

tale che per ogni **simplesso** $[p_0, \dots, p_q] \in K$

$$\text{ConvexHull}(\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_q)) = \left\{ t_0 \varphi_0(p_0) + \dots + t_q \varphi_0(p_q) \mid t_i \in [0, 1], \sum t_i = 1 \right\} \in L$$

e si pone $\varphi[p_0, \dots, p_q] := \text{ConvexHull}(\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_q))$

Osservazione. Notiamo che l'insieme di cui sopra **non** è necessariamente il simplesso $[\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_q)]$, poiché φ_0 potrebbe non essere **iniettiva**.

Osservazione. Sicuramente $\dim \varphi(\sigma) \leq \dim \sigma$ e si ha l'uguaglianza quando $\varphi_0|_{\{p_0, \dots, p_q\}}$ è **iniettiva**.

383 Categoria di complessi e mappe simpliciali

Si definisce la **categoria** **P1** che ha come oggetti i **complessi simpliciali**, e come morfismi le **mappe simpliciali**.

384 Funtore da P1 a ChR - diesis

Sia R un **PID** e siano K, L due complessi simpliciali totalmente ordinati. Si considerino i due **complessi di catene simpliciali**

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_\bullet(K) &= \left\{ (C_n(K), \partial_n^K) \right\}_n \\ \mathcal{C}_\bullet(L) &= \left\{ (C_n(L), \partial_n^L) \right\}_n. \end{aligned}$$

dove $C_n(K) = R^{(K^n)}$ e $C_n(L) = R^{(L^n)}[66]$.

Definizione 1. Una *mappa simpliciale* $\varphi : K \longrightarrow L$ induce un *morfismo*

$$\varphi_{\#} : \mathcal{C}_{\bullet}(K) \longrightarrow \mathcal{C}_{\bullet}(L), \quad (\varphi_{\#})_n = \left\{ (\varphi_{\#})_n : C_n(K) \longrightarrow C_n(L) \right\}$$

tale che, per ogni *simplesso* $[p_0, \dots, p_n] \in K^n$ ^[67]

$$(\varphi_{\#})_n [p_0, \dots, p_n] = \begin{cases} [\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_n)] & \varphi_0|_{\{p_0, \dots, p_n\}} \text{ è iniettiva} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questo è un *morfismo di moduli*^[68].

Proposizione 2. La mappa $\varphi_{\#}$ così definita è un *morfismo* in **Ch**_R, ovvero il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^K} & C_{n+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^K} & C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n^K} & C_{n-1}(K) \xrightarrow{\partial_{n-1}^K} \cdots \\ & & \downarrow (\varphi_{\#})_{n+1} & & \downarrow (\varphi_{\#})_n & & \downarrow (\varphi_{\#})_{n-1} \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{n+2}^L} & C_{n+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{n+1}^L} & C_n(L) & \xrightarrow{\partial_n^L} & C_{n-1}(L) \xrightarrow{\partial_{n-1}^L} \cdots \end{array}$$

dove i ∂_n sono i *morfismi di bordo*.

Dimostrazione. Si fissi $[p_0, \dots, p_n] \in K^n \subseteq C_n(K)$.

1. Se φ_0 è *iniettiva* su $\{p_0, \dots, p_n\}$, allora

$$\begin{aligned} (\varphi_{\#})_{n-1} \circ \partial_n^K [p_0, \dots, p_n] &= (\varphi_{\#})_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n] \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (\varphi_{\#})_{n-1} [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n] \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i [\varphi_0(p_0), \dots, \widehat{\varphi_0(p_i)}, \dots, \varphi_0(p_n)] \\ &= \partial_n^L [\varphi_0(p_0), \dots, \varphi_0(p_n)] \\ &= \partial_n^L \circ (\varphi_{\#})_n [p_0, \dots, p_n]. \end{aligned}$$

2. Se φ_0 non è *iniettiva* su $\{p_0, \dots, p_n\}$, allora $(\varphi_{\#})_n [p_0, \dots, p_n] = 0$, e quindi

$$\partial_n^L \circ (\varphi_{\#})_n [p_0, \dots, p_n] = 0$$

Si calcola quindi

$$\begin{aligned} (\varphi_{\#})_{n-1} \circ \partial_n^K [p_0, \dots, p_n] &= (\varphi_{\#})_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n] \right) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \underbrace{(\varphi_{\#})_{n-1} [p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n]}_{=0} = 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Corollario 3. La mappa

$$\begin{aligned} K &\xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathcal{C}_\bullet(K) \\ K \xrightarrow{f} L &\xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathcal{C}_\bullet(K) \xrightarrow{f_\#} \mathcal{C}_\bullet(L) \end{aligned}$$

è un **funtore**^[69]

$$(\mathcal{C}_\bullet, \#) : \mathbf{Pl} \longrightarrow \mathbf{Ch}_R$$

385 Funtore da **Pl** a **Top** - di Supporto

385.1 Funtore

La mappa

$$\begin{aligned} K &\xrightarrow{\quad\quad\quad} |K| \\ K \xrightarrow{\varphi} L &\xrightarrow{\quad\quad\quad} |K| \xrightarrow{|\varphi|} |L| \end{aligned}$$

è un **funtore** dalla categoria **Pl** alla categoria **Top**:

$$|\cdot| : \mathbf{Pl} \longrightarrow \mathbf{Top}$$

- **Oggetti:** a K un **complesso simpliciale** si associa il suo **supporto** $|K|$, dotato della **topologia debole**.
- **Morfismi:** sia $\varphi : K \longrightarrow L$ una **mappa simpliciale**.

Per ogni $p \in |K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$ esiste un unico **simplesso** $\sigma_0 = [p_0, \dots, p_q] \in K$ tale che $p \in \sigma_0^{[70]}$, e quindi esistono (e sono unici) dei $t_i \in (0, 1)$ tali che

- $\sum t_i = 1$;
- $p = \sum t_i p_i$.

Si definisce

$$\begin{aligned} |\varphi| : |K| &\longrightarrow |L| \\ p &\longmapsto \sum t_i \varphi_0(p_i) \end{aligned}$$

386 Simplesso singolare

Sia X uno **spazio topologico** e sia Δ_q il q -**simplesso standard** dotato della topologia euclidea.

Definizione 1. Un q -simplesso singolare è una mappa **continua**

$$\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$$

Sia quindi $\Sigma_q(X)$ l'insieme di tutti i q -simplessi singolari,

$$\Sigma_q(X) := \{\sigma : \Delta_q \longrightarrow X : \sigma \text{ continua}\}$$

387 Modulo delle catene singolari su uno spazio topologico.

Sia R un **PID**. Si definisce il **modulo** delle q -**catene singolari** come la **somma diretta**:

$$S_q(X) := R^{(\Sigma_q)} = \left\{ \sum r_i \sigma_i : r_i \in R \right\}$$

dove le somme sono formali. Gli elementi vengono dette **catene singolari**.

388 Operatori di facciata del simplesso standard

Siano Δ_q e Δ_{q-1} i **simplessi standard**:

$$\Delta_{q-1} = [0, e_1, \dots, e_{q-1}] \subseteq \mathbb{R}^q, \quad \Delta_q = [0, e_1, \dots, e_q] \subseteq \mathbb{R}^{q+1}$$

Definizione 1. Si definiscono gli operatori di facciata opposta all' i -esimo vertice di Δ_q :

$$\varepsilon_0^q, \dots, \varepsilon_i^q, \dots, \varepsilon_q^q : \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta_q$$

definito sui vertici come (ponendo per convenzione $e_0 = 0$)

$$\varepsilon_j^q(e_i) := \begin{cases} e_i & i < j \\ e_{i+1} & i \geq j \end{cases}$$

ed esteso per linearità a tutti gli altri punti.

389 Mappa di bordo tra moduli di catene singolari

Sia X uno spazio topologico, e siano, per ogni q , $S_q(X)$ il **modulo delle q -catene singolari su X** ^[71]

Definizione 1. Si definisce la mappa $\partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X)$ come **morfismo** che, per ogni **simplesso singolare** σ

$$\partial_q(\sigma) := \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^q$$

dove le ε_i^q sono gli **operatori di facciata**.

Proposizione 2. Si ha che $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$.

Dimostrazione. Si inizia con il seguente:

- Claim: se $i \leq j$, gli operatori di faccia rispettano:

$$\varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} = \varepsilon_{j+1}^q \circ \varepsilon_i^{q-1}$$

- *Dimostrazione del claim*: per dimostrarlo, è sufficiente considerare $e_k \in \Delta_{q-1}$:

$\varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1}(e_k)$	$k < i$	$k = i <$	$k > i$
$k < j$	$\varepsilon_i^q(e_k) = e_k$	$\varepsilon_i^q(e_k) = e_{k+1}$	$\varepsilon_i^q(e_k) = e_{k+1}$
$k = j$	X	$\varepsilon_i^q(e_{k+1}) = e_{k+2}$	$\varepsilon_i^q(e_{k+1}) = e_{k+2}$
$k > j$	X	X	$\varepsilon_i^q(e_{k+1}) = e_{k+2}$

$\varepsilon_{j+1}^q \circ \varepsilon_i^{q-1}(e_k)$	$k < i$	$k = i$	$k > i$
$k < j$	$\varepsilon_{j+1}^q(e_k) = e_k$	$\varepsilon_{j+1}^q(e_{k+1}) = e_{k+1}$	$\varepsilon_{j+1}^q(e_{k+1}) = e_{k+1}$
$k = j$	X	$\varepsilon_{j+1}^q(e_{k+1}) = e_{k+2}$	$\varepsilon_{j+1}^q(e_{k+1}) = e_{k+2}$
$k > j$	X	X	$\varepsilon_{j+1}^q(e_{k+1}) = e_{k+2}$

E pertanto si ottiene che

$$\varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1}(e_k) = \varepsilon_{j+1}^q \circ \varepsilon_i^{q-1}(e_k) = \begin{cases} e_k & k < i \\ e_{k+1} & i \leq k < j \\ e_{k+2} & k \geq j \end{cases}$$

Sia quindi ora $\sigma \in \Sigma_q(X)$, base di $S_q(X)$.

$$\begin{aligned} \partial_{q-1} \circ \partial_q \sigma &= \partial_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^q \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}(\sigma \circ \varepsilon_i^q) = \sum_{i=0}^q \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} = \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j < i}} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} + \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ i \leq j \leq q-1}} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} = \\ &\stackrel{\dagger}{=} \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j < i}} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} + \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ i \leq j \leq q-1}} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_{j+1}^q \circ \varepsilon_i^{q-1} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j < i}} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} - \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ i \leq j \leq q-1}} (-1)^{i+j+1} \sigma \circ \varepsilon_{j+1}^q \circ \varepsilon_i^{q-1} \\ &\stackrel{\ddagger}{=} \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j < i}} (-1)^{i+j} \sigma \circ \varepsilon_i^q \circ \varepsilon_j^{q-1} - \sum_{\substack{0 \leq j' \leq q \\ j'+1 \leq i' \leq q}} (-1)^{i'+j'} \sigma \circ \varepsilon_{i'}^q \circ \varepsilon_{j'}^{q-1} = 0 \end{aligned}$$

dove:

- (\dagger): è per il claim;
- (\ddagger): si è fatta la sostituzione, nella seconda parte: $i \mapsto j'$
 $j+1 \mapsto i'$ ■

389.1 Complesso di catene singolare

Si definisce il complesso di catene singolare:

$$\mathcal{S}_\bullet(X) := \left\{ (S_q(X), \partial_q) \right\}_q$$

390 Omologia Singolare

Sia R un **PID**.

Definizione 1. Sia X uno **spazio topologico**, e sia $\mathcal{S}_\bullet(X)$ il suo **complesso di catene singolare**. Si definisce, per ogni n , l' n -esimo **modulo di omologia singolare di X** come l' n -esimo **modulo di omologia** del **compleSSO di catene** $\mathcal{S}_\bullet(X)$:

$$H_n(X) := H_n(\mathcal{S}_\bullet(X)).$$

391 Funtore da Top a ChR - diesis

Sia R un **PID**, e siano X, Y due **spazi topologici**.

Si denoti con $\mathcal{S}_\bullet(X), \mathcal{S}_\bullet(Y)$ i **complessi di catene singolari** associati:^[72]

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\bullet(X) &:= \left\{ (S_q(X), \partial_q^X) \right\}_q \\ \mathcal{S}_\bullet(Y) &:= \left\{ (S_q(Y), \partial_q^Y) \right\}_q\end{aligned}$$

(vedi **Modulo della catene singolari** e **Mappa di bordo tra moduli di catene singolari**)

Definizione 1. Sia $f : X \rightarrow Y$ una **funzione continua**. Si definisce, per ogni q ,^[73]

$$\begin{aligned}(f_\#)_q : S_q(X) &\longrightarrow S_q(Y) \\ \Sigma_q(X) \ni \sigma &\longmapsto f \circ \sigma\end{aligned}$$

Proposizione 2. Per ogni q il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q^X} & S_{q-1}(X) \\ (f_\#)_q \downarrow & & \downarrow (f_\#)_{q-1} \\ S_q(Y) & \xrightarrow{\partial_q^Y} & S_{q-1}(Y) \end{array}$$

ovvero le mappe $\{(f_\#)_q\}_q$ inducono un **morfismo tra complessi di catene**:

$$f_\# : \mathcal{S}_\bullet(X) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(Y), \quad f_\# = \{(f_\#)_q : S_q(X) \longrightarrow S_q(Y)\}_q$$

Dimostrazione. Sia $\sigma \in \Sigma_q(X)$ base di $S_q(X)$:

$$\begin{aligned}(f_\#)_{q-1} \circ \partial_q^X(\sigma) &= (f_\#)_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^q \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (f_\#)_{q-1} (\sigma \circ \varepsilon_i^q) \\ &= \sum_{i=0}^q (-1)^i f \circ \sigma \circ \varepsilon_i^q = \sum_{i=0}^q (-1)^i (f \circ \sigma) \circ \varepsilon_i^q \\ &= \partial_q^Y(f \circ \sigma) = \partial_q^Y \circ (f_\#)_q(\sigma)\end{aligned}$$
■

Corollario 3. La mappa

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathcal{S}_\bullet(X) \\ X \xrightarrow{f} Y &\xrightarrow{\quad\quad\quad} \mathcal{S}_\bullet(X) \xrightarrow{f^\#} \mathcal{S}_\bullet(Y) \end{aligned}$$

è un **funtore** dalla categoria **Top** alla categoria **Ch_R**.

$$(\mathcal{S}_\bullet, \#) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ch}_R$$

392 Calcolo dell'omologia singolare del punto

Sia R un **anello commutativo con unità**, sia X lo **spazio topologico** composto da un unico punto $X = \{p\}$, e sia $H_q(X)$ l' **R -modulo** di **omologia singolare** di X .

Proposizione 1. Si ha che

$$H_q(X) = \begin{cases} R & q = 0 \\ 0 & q > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Per ogni $q \geq 0$, esiste un unico **simplesso singolare**:^[74]

$$\begin{aligned} \sigma : \Delta_q &\longrightarrow \{p\} \\ x &\longmapsto p \end{aligned}$$

che indicheremo con $\sigma_n : \Delta_q \rightarrow X$. Pertanto, per ogni q , **il modulo delle catene singolari** è la **somma diretta**:

$$S_q(X) = R \cdot \sigma_q \cong R.$$

Il **morfismo di bordo**, invece, $\partial_q : S_q(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$, per $q > 0$:

$$\partial_q \sigma_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \underbrace{\sigma_q \circ \varepsilon_i^q}_{\sigma_{q-1}} = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_{q-1}$$

e quindi:

$$\partial_q \sigma_q = \begin{cases} 0 & q \text{ dispari} \\ \sigma_{q-1} & q \text{ pari} \end{cases}$$

La situazione è la seguente:

$$S_{2q}(X) \xrightarrow{\partial_{2q}} S_{2q-1} \xrightarrow{\partial_{2q-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} S_2(X) \xrightarrow{\partial_2} S_1(X) \xrightarrow{\partial_1} S_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

$$R \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} R \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{0} 0$$

e pertanto^[75]

$$\begin{aligned} H_0(X) &= \frac{\ker \partial_0}{\text{Im } \partial_1} = \frac{R}{\{0\}} \cong R \\ H_{2q}(X) &= \frac{\ker \partial_{2q}}{\text{Im } \partial_{2q+1}} = \frac{\{0\}}{\{0\}} \cong 0 \\ H_{2q-1}(X) &= \frac{\ker \partial_{2q-1}}{\text{Im } \partial_{2q}} = \frac{R}{R} \cong 0. \end{aligned}$$
■

393 Complesso di catene singolare Augmentato

Sia R un PID. Sia X uno spazio topologico, e sia $\mathcal{S}_\bullet(X)$ il complesso di catene singolare^[76]:

$$\mathcal{S}_\bullet(X) = \left\{ (S_q(X), \partial_q) \right\}_q$$

Definizione 1. Si definisce $\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$, complesso singolare augmentato,

$$\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X) := \left\{ (\tilde{S}_q(X), \tilde{\partial}_q) \right\}_q$$

dove

- per ogni $q \geq 0$: $\tilde{S}_q(X) := S_q(X)$;
- per ogni $q > 0$: $\tilde{\partial}_q := \partial_q$;

e gli altri valori sono:

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{-1}(X) &:= R, & \tilde{\partial}_0 : \tilde{S}_0(X) &\longrightarrow \tilde{S}_{-1}(X) \\ \left[\sum a_i p_i \right] &\longmapsto \sum a_i \end{aligned}$$

Proposizione 2. $\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$ è un complesso di catene.

394 Omologia Singolare Ridotta

Sia R un PID e sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Se $\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$ è il complesso di catene singolare augmentato, si definisce l'omologia singolare ridotta di X come l'omologia di $\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$:

$$\tilde{H}_q(X) := H_q(\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X))$$

Proposizione 2. Analogamente all'omologia simpliciale, indicando con $H_q(X)$ l'omologia singolare di X , si ha che^[77]

$$q > 0 : \tilde{H}_q(X) = H_q(X) \quad H_0(X) = \tilde{H}_0(X) \oplus R.$$

395 Spazio topologico aciclico

Sia R un PID.

Definizione 1. Uno spazio topologico X cpa è detto **aciclico** se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

1. per ogni q , l'omologia singolare di X è

$$\forall q > 0 \quad H_q(X) = 0, \quad H_0(X) = R$$

2. per ogni q , l'omologia singolare ridotta di X è nulla:

$$\widetilde{H}_q(X) = 0$$

3. il complesso di catene singolari aumentato $\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$ è **aciclico**;
4. il complesso di catene singolari aumentato $\tilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$ è **contraibile**.

396 Coprodotto

397 Significato geometrico del modulo di omologia singolare 0

Sia R un PID.

Proposizione 1. Sia X uno spazio topologico e siano $\{X_j\}_{j \in J}$ le sue componenti connesse per archi. Allora:

1. Per ogni q , l'omologia singolare di X è la somma diretta delle omologie di X_j :

$$H_q(X) = \bigoplus_{j \in J} H_q(X_j)$$

2. $H_0(X_j) = R$ per ogni $j \in J$

Pertanto, $H_0(X) \cong R^{(J)}$ ^[78].

Dimostrazione. 1. Sia $\Sigma_q = \{\sigma : \Delta_q \rightarrow X\}$ ^[79] l'insieme dei simplessi singolari di X , e sia

$$\Sigma'_q = \{\sigma : \Delta_q \rightarrow X_j \subseteq X\} \subseteq \Sigma_q$$

- (a) Poiché X_j è componente连通的 per archi e $\sigma \in \Sigma_q$ è continua, allora necessariamente esiste $j \in J$ tale che $\sigma \in \Sigma'_q$. Pertanto^[80]

$$\Sigma_q = \coprod_{j \in J} \Sigma_q^j$$

e pertanto^[81]

$$S_q(X) = R^{(\Sigma_q)} = R^{\left(\coprod_{j \in J} \Sigma_q^j\right)} = \bigoplus_{j \in J} R^{(\Sigma_q^j)} = \bigoplus_{j \in J} S_q(X_j).$$

(b) Allo stesso modo, se $\sigma \in \Sigma_q^j$, allora $\partial_q \sigma \in S_{q-1}(X_j)$.

Pertanto, siccome somma diretta e quozienti commutano, si ottiene che

$$H_q(X) = \bigoplus_{j \in J} H_q(X_j)$$

2. WLOG sia X connesso per archi, e si consideri ∂_{-1} :

$$\begin{aligned} \partial_{-1} : H_0(X) &= \frac{S_0(X)}{\text{Im } \partial_1} \longrightarrow R \\ \left[\sum_i r_i p_i \right] &\longmapsto \sum_i r_i \end{aligned}$$

dove $p_i : \Delta_0 \rightarrow X : * \mapsto p_i \in X$.

- ∂_{-1} è suriettiva, in quanto considerato $p \in X$ $\partial_{-1}[p] = 1$.
- ∂_{-1} + iniettiva. Sia $\sum_i r_i p_i \in S_0(X)$ tale che $\sum_i r_i = 0$. Sia $p_0 \in X$ fissato.

$$\sum_i r_i p_i = \sum_i r_i p_i - \left(\sum_i r_i \right) p_0 = \sum_i r_i (p_i - p_0).$$

Se ora $\sigma_i : \Delta_1 \rightarrow X$ è una curva da p_0 a p_1 (che esiste in quanto X cpa), allora^[82]

$$p_i - p_0 = \partial_1 \sigma_i$$

e quindi

$$\sum_i r_i p_i = \sum_i r_i \partial_1 \sigma_i = \partial_1 \left(\sum_i r_i \sigma_i \right).$$

e pertanto $\sum_i r_i p_i \in \text{Im } \partial_1$ e

$$\left[\sum_i r_i p_i \right] = 0.$$

Quindi ∂_{-1} è isomorfismo. ■

398 Insieme stellato

Definizione 1. Un insieme $X \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice **stellato** se esiste $x_0 \in X$ tale che, per ogni $x \in X$, il segmento

$$[x_0, x] \subseteq X.$$

399 Insieme stellato è spazio topologico aciclico

Proposizione 1. Se $X \subseteq \mathbb{R}^N$ è **stellato**, allora X è uno spazio topologico aciclico.

Dimostrazione. • Siccome X è **stellato**, allora è **cpa**, e quindi l'omologia singolare ridotta:

$$\widetilde{H}_0(X) = 0.$$

- Per quanto riguarda tutti gli altri, la **mappa** $s_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)$ del joint al punto x_0 afferma che

$$\text{Id}_{S_{q+1}(X)}(\sigma) - 0(\sigma) = \sigma = \partial_{q+1}(s_q\sigma) + s_{q-1}(\partial_q\sigma)$$

e pertanto il **complesso di catene singolari** $\mathcal{S}_\bullet(X)$ è **contraibile**, e quindi aciclico.

Segue che $\widetilde{\mathcal{S}}_\bullet(X)$ è **aciclico**, e quindi X aciclico. ■

400 Estensione di un simplex singolare in uno spazio stellato

Sia $X \subseteq \mathbb{R}^N$ **stellato** rispetto a $x_0 \in X$.

Ogni **simplex singolare** $\sigma : \Delta_q \rightarrow X^{[83]}$ può essere esteso ad

$$J_\sigma : \Delta_{q+1} \rightarrow X$$

tramite il **joint** a x_0 : infatti, siccome un generico punto di Δ_{q+1} può essere scritto come:

$$te_{q+1} + (1-t) \cdot p, \quad t \in [0, 1]$$

con $p \in \Delta_q \subseteq \Delta_{q+1}$, allora

$$\begin{aligned} J_\sigma : \Delta_{q+1} &\rightarrow X \\ (te_{q+1} + (1-t) \cdot p) &\mapsto (te_{q+1} + (1-t) \cdot \sigma(p)) \end{aligned}$$

Proposizione 1. Se ε_i^{q+1} sono gli **operatori di facciata**, allora

$$J_\sigma \circ \varepsilon_i^{q+1} = \sigma$$

ed inoltre, per ogni $i = 0, \dots, q$ si ha che

$$J_\sigma \circ \varepsilon_i^{q+1} = J_{\sigma \circ \varepsilon_i^q}$$

Definizione 2. Si definisce la **mappa** $s_q : S_q(X) \rightarrow S_{q+1}(X)^{[84]}$, che per ogni $\sigma \in \Sigma_q$:

$$s_q(\sigma) := (-1)^{q+1} J_\sigma.$$

Lemma 3. Per ogni q si ha e per ogni $\sigma \in \Sigma_q$:^[85]

$$\partial_{q+1}(s_q\sigma) = \sigma - s_{q-1}(\partial_q\sigma).$$

Dimostrazione. Per definizione si ha

$$\partial_{q+1}(s_q\sigma) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i s_q(\sigma) \circ \varepsilon_i^{q+1} = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (-1)^{q+1} J_\sigma \circ \varepsilon_i^{q+1}.$$

Per la proposizione precedente, $J_\sigma \circ \varepsilon_{q+1}^{q+1} = \sigma$ e $J_\sigma \circ \varepsilon_i^{q+1} = J_{\sigma \circ \varepsilon_i^q}$ altrimenti.

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(s_q\sigma) &= (-1)^{q+1}(-1)^{q+1}\sigma - \sum_{i=0}^q (-1)^i (-1)^q J_{\sigma \circ \varepsilon_i^q} = \sigma - \sum_{i=0}^q (-1)^i (-1)^q J_{\sigma \circ \varepsilon_i^q} \\ &= \sigma - \sum_{i=0}^q (-1)^i s_{q-1}(\sigma \circ \varepsilon_i^q) = \sigma - s_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^q \right) \\ &= \sigma - s_{q-1}(\partial_q\sigma). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

401 Coppia topologica

Definizione 1. La coppia (A, X) si dice **coppia topologica** se A, X sono *spazi topologici* tali che

$$A \subseteq X$$

e A sia un *sottospazio* di X .

Sia R un **PID** e sia (A, X) una **coppia topologica**

Definizione 2. Si definisce il **modulo** delle q -catene singolari relative come il *quoziente*^[86]

$$S_q(X, A) = \frac{S_q(X)}{S_q(A)}$$

Definizione 3. Si definisce la mappa di bordo

$$\bar{\partial}_q : S_q(X, A) \longrightarrow S_{q-1}(X, A)$$

che per ogni $\sigma \in \Sigma_q(X)$ ^[87], associa

$$\bar{\partial}_q(\sigma + S_q(A)) := \partial_q\sigma + S_{q-1}(A)$$

Osservazione. Questo è il *quoziente* $S_\bullet(X)/S_\bullet(A)$.

Definizione 4. Il **complesso di catene singolari relative** di (X, A) è il **complesso di catene** di R -moduli:

$$S_\bullet(X, A) = \left\{ (S_q(X, A), \bar{\partial}_q) \right\}_q$$

402 Omologia Singolare Relativa

Sia R un PID e sia (X, A) una coppia topologica. Sia $\mathcal{S}_\bullet(X, A)$ il complesso di catene singolari relativi.

Definizione 1. Si definisce l'*omologia singolare relativa* di (X, A) come l'*omologia del complesso di catene*:

$$H_q(X, A) := H_q(\mathcal{S}_\bullet(X, A))$$

403 Successione esatta dei complessi di catene di una coppia topologica

Sia R un PID e sia (X, A) una coppia topologica. Questo induce:

- il complesso di catene singolari di A ^[88]

$$\mathcal{S}_\bullet(A) := \left\{ (S_q(A), \partial_q^A) \right\}_q ;$$

- il complesso di catene singolari di X

$$\mathcal{S}_\bullet(X) := \left\{ (S_q(X), \partial_q) \right\}_q ;$$

- il complesso di catene singolari relativo di (X, A)

$$\mathcal{S}_\bullet(X, A) := \left\{ (S_q(X, A), \bar{\partial}_q) \right\}_q$$

Proposizione 1. Si hanno le seguenti successioni esatte per l'*omologia singolare relativa*, con l'*omologia singolare* e *omologia singolare ridotta* \widetilde{H}_n

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(\iota_n)_*} H_n(X) \xrightarrow{(\pi_n)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*^{(n)}} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(\iota_{n-1})_*} \dots \\ \dots &\longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si ha che la seguente è una SEC:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow S_q(A) \xrightarrow{\iota_q} S_q(X) \xrightarrow{\pi_q} S_q(X, A) \longrightarrow 0 \\ s &\longmapsto s + S_q(A) \end{aligned}$$

dove ι_q si ha perché $S_q(A) \subseteq S_q(X)$. Inoltre il seguente diagramma commuta per ogni q

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & S_q(A) & \xrightarrow{\iota_q} & S_q(X) & \xrightarrow{\pi_q} & S_q(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \partial_q^A \downarrow & & \partial_q \downarrow & & \bar{\partial}_q \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & S_{q-1}(A) & \xrightarrow{\iota_{q-1}} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\pi_{q-1}} & S_{q-1}(X, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

e pertanto è indotta una SEC di complessi di catene:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(A) \xrightarrow{\iota} \mathcal{S}_\bullet(X) \xrightarrow{\pi} \mathcal{S}_\bullet(X, A) \longrightarrow 0$$

a cui è possibile applicare lo Zig-Zag Lemma, ottenendo la seguente successione esatta di moduli di omologia:^[89]

$$\dots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{(\iota_n)_*} H_n(X) \xrightarrow{(\pi_n)_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_\star^{(n)}} H_{n-1}(A) \xrightarrow{(\iota_{n-1})_*} \dots$$

Applicando lo stesso ragionamento all'omologia singolare ridotta \widetilde{H}_n , si ottiene:

$$\dots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A) \longrightarrow \widetilde{H}_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow \widetilde{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \dots \quad \blacksquare$$

404 Teorema dell'invarianza per omotopia

Sia R un PID.

Teorema 1. Siano X, Y spazi topologici, e siano $f, g : X \longrightarrow Y$ funzioni continue e omotope, $f \circ g$. Allora, considerando il funtore $(\mathcal{S}_\bullet, \#) : \mathbf{Top} \longrightarrow \mathbf{Ch}_R$ ^[90] si ha che $f_\#$ e $g_\#$ siano omotopiche:

$$f_\# \sim g_\# : \mathcal{S}_\bullet(X) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(Y).$$

Corollario 2. Questo implica che, se (H_n, \star) è il funtore di omologia, allora $f_\star = g_\star$.

Dimostrazione. Infatti, due funzioni omotope tra complessi di catene danno luogo alla stessa funzione in omologia. \blacksquare

Lemma 3. Se $j_\bullet^0 \sim j^1_\bullet : \mathcal{S}_\bullet(X) \rightarrow \mathcal{S}_\bullet(X \times I)$ e $H_\bullet : \mathcal{S}_\bullet(X \times I) \rightarrow \mathcal{S}_\bullet(Y)$ sono morfismi, allora

$$H_\bullet \circ j_\bullet^0 \sim H_\bullet \circ j_\bullet^1.$$

Dimostrazione. Si è nella situazione di questo diagramma:

$$\begin{array}{ccccc} S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^X} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q^X} & S_{q-1}(X) \\ j_{q+1}^0 \downarrow \quad j_{q+1}^1 \downarrow & \swarrow s_q & j_q^0 \downarrow \quad j_q^1 \downarrow & \swarrow s_{q-1} & j_{q-1}^0 \downarrow \quad j_{q-1}^1 \downarrow \\ S_{q+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^{X \times I}} & S_q(X \times I) & \xrightarrow{\partial_q^{X \times I}} & S_{q-1}(X \times I) \\ H_{q+1} \downarrow & \textcolor{red}{\ell_q} \dashrightarrow & H_q \downarrow & \textcolor{red}{\ell_{q-1}} \dashrightarrow & H_{q-1} \downarrow \\ S_{q+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^Y} & S_q(Y) & \xrightarrow{\partial_q^Y} & S_{q-1}(Y) \end{array}$$

Ponendo $\ell_q := H_{q+1} \circ s_q$, si ha la tesi:

$$\begin{aligned}
l_{q-1} \circ \partial_q^X + \partial_{q+1}^Y \circ l_q &= H_q \circ s_{q-1} \circ \partial_q^X + \partial_{q+1}^Y \circ H_{q+1} \circ s_q \\
&= H_q \circ s_{q-1} \circ \partial_q^X + H_q \circ \partial_{q+1}^{X \times I} \circ s_q \\
&= H_q [s_{q-1} \circ \partial_q^X + \partial_{q+1}^{X \times I} \circ s_q] \\
&= H_q [j_q^1 - j_q^0] = H_q \circ j_q^1 - H_q \circ j_q^0
\end{aligned}$$

■

Dimostrazione. (idea del Teorema 90, da dimostrare per intero).

X

```

    X ---> X × I ---> Y
    |           |           |
    j^0         f          H
    |           |           |
    X ---> X × I ---> Y
    |           |           |
    j^1         g          H
  
```

$S_\bullet(X)$

```

S_\bullet(X) ---> S_\bullet(X × I) ---> S_\bullet(Y)
|           |           |
j_\#^0      f_\#          H_\#
|           |           |
S_\bullet(X) ---> S_\bullet(X × I) ---> S_\bullet(Y)
|           |           |
j_\#^1      g_\#          H_\#
  
```

Per il lemma è sufficiente mostrare:

$$j_0^\# \sim j_1^\#$$

i.e. $s_n : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$ si costruisce **per induzione**.

Passo base: $s_0 : S_0(X) \rightarrow S_1(X \times I)$

$$\begin{aligned}
\sigma \in \Sigma_0(X) &\longmapsto s_0(\sigma) : \Delta_1 \longrightarrow X \times I \\
(1-t)e_0 + te_1 &\longmapsto (\sigma(e_0), t)
\end{aligned}$$

FUNZIONA.

Ip. induttive: $s_{n-1}, \dots, s_0 \quad \forall X$ sp. top.

1. $X = \Delta_n$, $i_n \in \Sigma_n(\Delta_n)$, i_n identità.

$$z_n := j_1^\#(i_n) - j_0^\#(i_n) - s_{n-1}(\partial i_n)$$

$\partial z_n = 0 + H_n(\Delta_n \times I) = 0$ implica che

$$\exists \beta_{n+1} \in S_{n+1}(X \times I) \text{ t.c. } \partial \beta_{n+1} = z_n$$

2. X generico, $\sigma \in \Sigma_n(X)$ Si definisce $s_n : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$:

$$\sigma \in \Sigma_n(X) \longmapsto (\sigma \times \text{Id})_\# \beta_{n+1}$$

Calcolando $\partial_{n+1}s_n\sigma$ si ha la tesi ricordando:

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_n \times I & \xrightarrow{\sigma \times \text{Id}} & X \times I \\
 \uparrow j^0 & & \uparrow j^0 \\
 \Delta_n & \xrightarrow{\sigma} & X
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 \mathcal{S}_\bullet(\Delta_n \times I) & \xrightarrow{(\sigma \times \text{Id})_\#} & \mathcal{S}_\bullet(X \times I) \\
 \uparrow j_\#^0 & & \uparrow j_\#^0 \\
 \mathcal{S}_\bullet(\Delta_n) & \xrightarrow{\sigma_\#} & \mathcal{S}_\bullet(X)
 \end{array}$$

■

404.1 Spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno moduli di omologia singolare isomorfi

Sia R un PID e siano X, Y spazi topologici.

Corollario 4. Se X, Y sono spazi topologici omotopicamente equivalenti, allora per ogni n i moduli di omologia singolare sono isomorfi:

$$H_n(X) \cong H_n(Y)$$

In particolare, se f, g equivalenze omotopiche,

$$X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$$

allora f_*, g_* sono isomorfismi (applicando il funtore di omologia singolare $(H_n, *)$)

Dimostrazione. Siccome f, g sono equivalenze omotopiche, allora

$$f \circ g \sim \text{Id}_X, \quad g \circ f \sim \text{Id}_Y.$$

Applicando il funtore di omologia singolare si ottiene

$$\text{Id}_{H_n(X)} = H_n(f \circ g) = H_n(f) \circ H_n(g)$$

e pertanto f_* e g_* sono inverse, f_* è invertibile e quindi un isomorfismo. ■

405 Spazio topologico contraibile

Definizione 1. Uno spazio topologico X è **contraibile** se per ogni $p \in X$ le funzioni

$$\begin{array}{ll}
 \{p\} \hookrightarrow X & X \rightarrow \{p\} \\
 p \mapsto p & x \mapsto p
 \end{array}$$

sono equivalenze omotopiche, ovvero X e $\{p\}$ sono omotopicamente equivalenti.

406 Spazio topologico contraibile è aciclico

Sia R un PID.

Proposizione 1. Se uno spazio topologico X è contraibile, allora è aciclico.

Corollario 2. Se X è uno spazio topologico contraibile, allora per ogni q , l'omologia singolare di X è

$$\forall q > 0 \quad H_q(X) = 0, \quad H_0(X) = R$$

Dimostrazione. Segue dall'omologia singolare del punto tramite questo corollario. ■

407 Retratto di uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Un sottospazio $A \subseteq X$, con l'inclusione

$$i_A : A \hookrightarrow X$$

si dice **retratto di X** se esiste una funzione continua, detta **retrazione**

$$r : X \rightarrow A$$

tali che $r \circ i_A = \text{Id}_A$, ovvero che $r(a) = a$ per ogni $a \in A$.

408 Retratto di deformazione di uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Un sottospazio $A \subseteq X$, con l'inclusione

$$i_A : A \hookrightarrow X$$

si dice **retratto di deformazione di X** se esiste una retrazione

$$r : X \longrightarrow A$$

tale che $i_A \circ r \sim \text{Id}_X$ sono omotope.

Osservazione. Si hanno

$$A \xrightleftharpoons[r]{i_A} X$$

con $r \circ i_A = \text{Id}_A$ e $i_A \circ r \sim \text{Id}_X$ funzioni continue.

Pertanto A e X sono omotopicamente equivalenti.

409 Inclusione di un retratto induce iniezione in omologia singolare

Sia R un PID e sia X uno spazio topologico.

Proposizione 1. Sia $A \subseteq X$ un sottospazio, e sia

$$i_A : A \hookrightarrow X$$

l'inclusione. Consideriamo il funtore di omologia singolare (H_n, \star)

1. Se A è un retratto di X , allora

$$(i_A)_\star : H_n(A) \hookrightarrow H_n(X)$$

è iniettiva

2. Se A è un retratto di deformazione di X , allora

$$(i_A)_\star : H_n(A) \hookrightarrow H_n(X)$$

è un isomorfismo.

410 Categoria-TopP

Definizione 1. Si definisce la categoria TopP in cui:

- gli oggetti sono (X, A) coppie topologiche
- i morfismi $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ sono le funzioni continue

$$f : X \longrightarrow Y$$

tali che $f(A) \subseteq B$.

411 Funtore da Pl a R-Mod - di omologia

Sia R un PID.

Si considerino le categorie

- Pl dei complessi simpliciali;
- \mathbf{Ch}_R dei complessi di catene;
- $R\text{-Mod}$ degli R -moduli.

e si considerino i funtori diesis e di omologia:

$$\# : \mathbf{Pl} \longrightarrow \mathbf{Ch}_R, \quad H_n : \mathbf{Ch}_R \longrightarrow R\text{-Mod}$$

Questo dà origine ad un funtore

$$(H_n, \star) : \mathbf{Pl} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

come segue:^[91]

$$\begin{array}{ccccccc} K & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_\bullet(K) & \xrightarrow{\quad} & H_n(K) \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ K & \xrightarrow{f} & L & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{C}_\bullet(L) & \xrightarrow{f_\#} & H_n(L) \end{array}$$

e si indicherà $f_\star := (f_\#)_\star$.

412 Parte interna

413 Funtore da Top a RMod - di omologia singolare

Sia R un PID. Si considerino le categorie

- CATEGORIA **Top**;
- CATEGORIA **Ch_R**;
- CATEGORIA **R-Mod**.

È definito il funtore

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{Top} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{Ch}_R & \xrightarrow{\quad} & R\text{-}\mathbf{Mod} \\ X & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S}_\bullet(X) & \xrightarrow{\quad} & H_q(X) \\ f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{S}_\bullet(Y) \xrightarrow{f_\#} \mathcal{S}_\bullet(Y) \xrightarrow{\quad} H_q(X) \xrightarrow{((f_\#)_q)_q} H_q(Y) \end{array}$$

come composizione del funtore $(\mathcal{S}_\bullet, \#)$ e del funtore (H_q, \star) . Ponendo $f_\star := ((f_\#)_q)_q$, si ha

$$(H_q, \star) : \mathbf{Top} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

413.1 Omologia singolare di spazi topologici omeomorfi

La funtorialità garantisce che spazi topologici omeomorfi abbiano omologia singolare isomorfa.

414 Riassunto funtori di omologia

Sia R un PID. Si considerino le seguenti categorie:

- categoria **Pl** dei complessi simpliciali;
- categoria **Ch_R** dei complessi di catene;
- categoria **R-Mod** degli R -moduli;

- categoria **Top** degli spazi topologici.

Si sono costruiti i seguenti funtori:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (H_n, \star) & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \mathbf{Pl} & \xrightarrow{(\mathcal{C}_\bullet, \#)} & \mathbf{Ch}_R & \xrightarrow{(H_n, \star)} & R\text{-}\mathbf{Mod} \\
 & \downarrow |\cdot| & \uparrow (S_\bullet, \#) & & \swarrow (H_n, \star) \\
 & & \mathbf{Top} & &
 \end{array}$$

dove

- $(\mathcal{C}_\bullet, \#)$ è il Funtore da \mathbf{Pl} a \mathbf{Ch}_R - diesis;
- $|\cdot|$ è il Funtore da \mathbf{Pl} a \mathbf{Top} ;
- $(S_\bullet, \#)$ è il Funtore da \mathbf{Top} a \mathbf{Ch}_R - diesis;
- i funtori (H_n, \star) sono i funtori di omologia:
 - Funtore da \mathbf{Ch}_R e $R\text{-}\mathbf{Mod}$ - di omologia;
 - Funtore da \mathbf{Top} a $R\text{-}\mathbf{Mod}$ - di omologia singolare
 - Funtore da \mathbf{Pl} a $R\text{-}\mathbf{Mod}$ - di omologia

415 Immagine continua di spazio cpa è cpa

416 Segmento tra due punti

417 Spazi topologici omotopicamente equivalenti

Due spazi topologici X, Y si dicono **omotopicamente equivalenti** se esistono due funzioni continue

$$X \xrightleftharpoons[g]{f} Y$$

tali che le loro composizioni siano **omotope** all'identità:

$$g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad f \circ g \sim \text{Id}_Y$$

ovvero esistono continue

$$\begin{array}{ll}
 G : X \times (0, 1) \longrightarrow X & H : Y \times (0, 1) \longrightarrow Y \\
 (x, 0) \longmapsto g \circ f(x) & (y, 0) \longmapsto f \circ g(y) \\
 (x, 1) \longmapsto x & (y, 1) \longmapsto y.
 \end{array}$$

Le due funzioni f, g si dicono equivalenze omotopiche

418 Composizione di funzioni iniettiva o suriettiva o biettiva

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano f, g due funzioni:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

- Se f, g sono **funzioni iniettive**, allora $g \circ f$ è **iniettiva**;
- Se f, g sono **funzioni suriettive**, allora $g \circ f$ è **suriettiva**;
- Se f, g sono **funzioni biettive**, allora $g \circ f$ è **biettiva**;

Inoltre

- Se $g \circ f$ è **suriettiva**, allora g è **suriettiva**;
- Se $g \circ f$ è **iniettiva**, allora f è **iniettiva**.

419 Funtore da TopP a ChR - diesis

Si definisce il **funtore**

$$(\mathcal{S}_\bullet, \overline{\#}) : \mathbf{TopP} \rightarrow \mathbf{Ch}_R$$

tra la **categoria TopP** e la **categoria Ch_R**.

- **Oggetti:** Alla **coppia topologica** (X, A) si associa il **complesso di catene singolare relativo** $\mathcal{S}_\bullet(X, A)$.
- **Morfismi:** Al **morfismo** $(X, A) \xrightarrow{f} (Y, B)$ si associa il **morfismo** $\overline{f_\#} = \{(\overline{f_\#})_q : S_q(X, A) \rightarrow S_q(Y, B)\}$:

$$\begin{aligned} (\overline{f_\#})_q : S_q(X, A) &\longrightarrow S_q(Y, B) \\ c_q + S_q(A) &\longmapsto f_\#(c_q) + S_q(B) \end{aligned}$$

dove $f_\#$ si ottiene da f applicando il **funtore** $(\mathcal{S}_\bullet, \#) : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Ch}_R$.

(È da dimostrare che $\overline{f_\#}$ sia ben definita e definisca un morfismo di complessi di catene.)

420 Morfismo tra coppie topologiche induce diagramma commutativo in omologia

Siano $(X, A), (Y, B)$ **coppie topologiche**, e sia $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ un **morfismo**.

Lemma 1. Il morfismo f induce le **funzioni continue**:

$$f : X \longrightarrow Y, \quad f|_A : A \longrightarrow B$$

Applicando i **funtori**

- **funtore diesis** $(\mathcal{S}_\bullet, \#)$ a $f : X \longrightarrow Y$ e ad $f|_A$;

- funtore diesis $(\mathcal{S}_\bullet, \overline{\#})$ a $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$

si ottiene il seguente diagramma commutativo a righe esatte^[92]:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_\bullet(A) & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{S}_\bullet(X) & \xrightarrow{\pi_X} & \mathcal{S}_\bullet(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & (f|_A)_\# \downarrow & & f_\# \downarrow & & \downarrow \overline{f_\#} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_\bullet(B) & \xrightarrow{i_B} & \mathcal{S}_\bullet(Y) & \xrightarrow{\pi_Y} & \mathcal{S}_\bullet(Y, A) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Proposizione 2. Applicando il funtore di omologia (H_n, \star) e lo zigzag lemma, si ottiene il seguente diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(A) & \xrightarrow{(i_A)_\star} & H_n(X) & \xrightarrow{(\pi_A)_\star} & H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_\star^X} H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots \\ & & (f|_A)_\star \downarrow & & f_\star \downarrow & & \downarrow (\overline{f_\#})_\star \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(B) & \xrightarrow{(i_B)_\star} & H_n(Y) & \xrightarrow{(\pi_B)_\star} & H_n(Y, B) \xrightarrow{\partial_\star^Y} H_{n-1}(B) \longrightarrow \cdots \end{array}$$

421 Verbale BMM

Tutti presenti Inizio ore 21:25 Sede della BMM

421.1 Gestione dei parimerito

- Gianrenzo PIANA ha deciso di rinunciare alla propria posizione; al suo posto Graziella ZITO prenderà il posto di Tesoriere
- Giorgia GHIOSO ha deciso di rinunciare alla propria posizione

421.2 Designare le cariche del Direttivo

Carica	Incaricato
Presidente	Renato ARMELLIN
Vicepresidente	Alessandro DANZERO
Tesoriere	Graziella ZITO
Segretario	Davide PECCIOLI
Capobanda	Alessio SCULLINO
Consiglieri	Emanuela BORGHEZIO Fabrizio MONTAGNER Marco RUZZANTE

421.3 Selezione pezzi del concertp

Fabrizio MONTAGNER si impegna a presentare al direttivo una pseudo-scaletta del concerto prima dell'inizio delle prove, così che eventuali pezzi possano essere scartati. Si pongono dei vincoli in merito ai pezzi scartati: nessun pezzo originale di MONTAGNER potrà venir scartato dal direttivo.

421.4 Lezioni presso la scuola media

Il professor Barone chiamerà MONTAGNER per discutere degli sviluppi.

Potrebbe Barone stesso fare le lezioni private agli studenti che scelgono di proseguire. Si delinea la necessità di trovare insegnanti.

421.5 Gestione delle sfilate

Si nominano le figure del vice-capobanda:

- Alessandro DANZERO
- Marco RUZZANTE

È necessario organizzare una prova, prima dell'inizio di marzo, per rinfrescare il libretto e aggiungere nuovi pezzi.

422 Equivalenza omotopica tra coppie topologiche induce isomorfismo tra omologia singolare relativa

Sia R un PID.

Proposizione 1. Siano $(X, A), (Y, B)$ coppie topologiche, e sia

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

un morfismo tale che

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ f|_A &: A \longrightarrow B \end{aligned}$$

siano equivalenze omotopiche.

Allora applicando il funtore di omologia, si ottiene che per ogni n

$$\overline{f_*} : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Si hanno le seguenti successioni esatte:^[93]

$$H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_{n-1}(A) \longrightarrow H_{n-1}(X)$$

$$H_n(B) \longrightarrow H_n(Y) \longrightarrow H_n(Y, B) \longrightarrow H_{n-1}(B) \longrightarrow H_{n-1}(Y)$$

Per il corollario del teorema di invarianza per omotopia, le funzioni $f_*, (f|_A)_*$ ^[94] sono isomorfismi, e pertanto il diagramma seguente è commutativo e a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_n(A) & \longrightarrow & H_n(X) & \longrightarrow & H_n(X, A) & \longrightarrow & H_{n-1}(A) \longrightarrow H_{n-1}(X) \\
 \downarrow (f|_A)_* \cong & & \downarrow f_* \cong & & \downarrow \overline{f}_* & & \downarrow \cong (f|_A)_* & & \downarrow \cong f_* \\
 H_n(B) & \longrightarrow & H_n(Y) & \longrightarrow & H_n(Y, B) & \longrightarrow & H_{n-1}(B) \longrightarrow H_{n-1}(Y)
 \end{array}$$

e dunque, applicando il lemma del cinque, \overline{f}_* è un isomorfismo. ■

423 Funtore da TopP a Rmod - di omologia singolare relativa

Sia R un PID. Si considerino i funtori tra categorie:

1. dalla categoria **TopP** alla categoria **Ch_R**, diesis;
2. dalla categoria **Ch_R** alla categoria **R-Mod**, di omologia.

Componendoli, si ottiene un funtore

$$(H_n, \bar{\star}) : \mathbf{TopP} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

che alle coppie topologiche (X, A) assegna il modulo di omologia singolare relativa

$$H_n(X, A)$$

e ai morfismi

$$f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$$

assegna

$$\overline{f}_* : H_n(X, A) \longrightarrow H_n(Y, B)$$

Spesso si indicherà \overline{f}_* con f_* , rendendo il funtore:

$$(H_n, \star) : \mathbf{TopP} \longrightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$$

424 Funtore da Grp a Ab - abelianizzatore

Consideriamo le categorie

- categoria **Grp** dei gruppi;
- categoria **Ab** dei gruppi abeliani.

Si definisce un funtore

$$(\cdot)^{\text{ab}} : \mathbf{Grp} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

che

- associa a ciascun **gruppo** G il suo **abelianizzato** G^{ab} , **gruppo abeliano**;
- per ciascun **morfismo** $f : G \longrightarrow H$, si considerano le proiezioni al **quoziante** π_G, π_H :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ \pi_G \downarrow & & \downarrow \pi_H \\ G^{\text{ab}} & \dashrightarrow & H^{\text{ab}} \end{array}$$

Allora $\pi_H \circ f : G \longrightarrow H^{\text{ab}}$ è un morfismo da un gruppo ad un gruppo abeliano, e **pertanto** esiste un unico morfismo, che chiameremo f^{ab} tale che il diagramma commuti. Il funtore associa ad $f : G \longrightarrow H$ il morfismo $f^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \longrightarrow H^{\text{ab}}$.

425 Funtore da Ab a Grp - dimenticante

426 Teorema di Hurewicz

Teorema 1. Sia X spazio topologico connesso per archi, $x_0 \in X$.

Sia $\Pi_1(X, x_0)$ il **gruppo fondamentale** di (X, x_0) e $H_1(X)$ lo **Z-modulo** di **omologia singolare** di X (ovvero un **gruppo abeliano**). Allora esiste un **morfismo**, detto Mappa di Hurewicz

$$\varphi : \Pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X)$$

suriettivo tale che^[95] $\ker(\varphi)$ sia l'**abelianizzato** di $\Pi_1(X, x_0)$:

$$\ker(\varphi) = [\Pi_1(X, x_0), \Pi_1(X, x_0)].$$

Corollario 2. Per il **primo teorema di isomorfismo**

$$H_1(X) \cong \Pi_1(X, x_0) / \ker(\varphi) = \Pi_1(X, x_0)^{\text{ab}}$$

427 Trasformazione naturale indotta dal Teorema di Hurewicz

Sia $R = \mathbb{Z}$, siano X, Y spazi topologici cpa. Sia $f : X \rightarrow Y$ funzione continua, $x_0 \in X$, $y_0 := f(x_0) \in Y$. Siano:

$$\begin{aligned} \varphi_X : \Pi_1(X, x_0) &\longrightarrow H_1(X) \\ \varphi_Y : \Pi_1(Y, y_0) &\longrightarrow H_1(Y) \end{aligned}$$

le mappe del Teorema di Hurewicz dal **gruppo fondamentale** di X e Y nel primo gruppo di **omologia singolare**. Si indichi con f_* l'immagine di f sia tramite il **funtore Π_1** che tramite il **funtore H_1** .

Proposizione 1. Il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_X} & H_1(X) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ \Pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{\varphi_Y} & H_1(Y) \end{array}$$

e quindi $\{\varphi_X\}$ è una trasformazione naturale tra i funtori:

- del gruppo fondamentale, Π_1 ;
- di omologia singolare, $H_1 \circ U^{[96]}$

Dimostrazione. Infatti, sia $[\gamma]_\Pi \in \Pi_1(X, x_0)$:

$$\begin{aligned} \varphi_Y \circ f_*[\gamma]_\Pi &= \varphi_Y[f \circ \gamma]_\Pi = [f \circ \gamma]_H \\ f_* \circ \varphi_X[\gamma]_\Pi &= f_*[\gamma]_H = [f \circ \gamma]_H. \end{aligned}$$
■

428 Teorema di Escissione

Sia R un PID.

Teorema 1. Sia (X, A) una coppia topologica e sia $U \subseteq A$ un aperto di X tale che la chiusura $\text{cl}_X(U) \subseteq \overset{\circ}{A}$. Allora i moduli di omologia singolare relativa sono isomorfi:

$$H_q(X \setminus U, A \setminus U) \cong H_q(X, A).$$

Isomorfismo è la mappa indotta da $i : (X \setminus U, A \setminus U) \hookrightarrow (X, A)$ tramite il funtore di omologia.

Teorema 2. Sia X uno spazio topologico e siano $X_1, X_2 \subseteq X$ tali che l'unione delle parti interne dia tutto lo spazio: $X = \overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2$. Allora i moduli di omologia singolare relativa sono isomorfi:

$$H_q(X_1, X_1 \cap X_2) \cong H_q(X, X_2).$$

Isomorfismo è la mappa indotta da $i : (X_1, X_1 \cap X_2) \hookrightarrow (X, X_2)$ tramite il funtore di omologia.

Osservazione. I teoremi sono equivalenti. Questo è chiaro considerando la Figura 3 e ponendo

$$\begin{aligned} X \setminus U &\leftrightarrow X_1 \\ A &\leftrightarrow X_2 \\ A \setminus U &\leftrightarrow X_1 \cap X_2 \end{aligned}$$

428.1 Dimostrazione del Teorema 2

Per tutta la sezione si considerano le ipotesi del Teorema 2

Lemma 3. Se l'inclusione $\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2) \hookrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X)^{[97]}$ induce un isomorfismo in omologia, allora vale il Teorema 2.

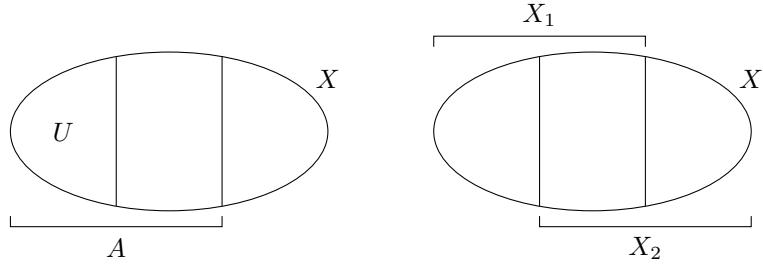


Figura 3: Equivalenza tra ESC e ESC'

Dimostrazione. Si consideri la seguente SEC, tale per la caratterizzazione:^[98]

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X) \longrightarrow \frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)} \longrightarrow 0 \quad (\star)$$

Siccome si ha la seguente catena di sottocompleSSI: $\mathcal{S}_\bullet(X_2) \subseteq \mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2) \subseteq \mathcal{S}_\bullet(X)$, si ottiene anche questa SEC:

$$0 \longrightarrow \frac{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)} \longrightarrow \frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)} \longrightarrow \frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)} \longrightarrow 0 \quad (\star\star)$$

sempre per la caratterizzazione e per il terzo teorema di isomorfismo.

Applicando lo Zig-Zag Lemma alla (\star) , si ottiene

$$H_q(\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)) \xrightarrow[I]{\cong} H_q(\mathcal{S}_\bullet(X)) \xrightarrow{\alpha} H_q\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}\right) \xrightarrow{\beta} H_{q-1}(\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)) \xrightarrow[II]{\cong} H_{q-1}(\mathcal{S}_\bullet(X))$$

dove gli isomorfismi segnati sono per ipotesi. Per esattezza si ha la seguente relazione di nuclei e immagini:

- siccome II è isomorfismo:

$$\{0\} = \text{Im}[\beta] \implies \text{Im } \alpha = \ker \beta = H_q\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}\right);$$

- siccome I è isomorfismo, allora $\ker \alpha = H_q(\mathcal{S}_\bullet(X))$, quindi α è la mappa zero, e quindi $\text{Im}(\alpha) = \{0\}$.

Segue $H_q\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}\right) = \{0\}$, per ogni q .

Applicando invece lo Zig-Zag Lemma alla $(\star\star)$, si ottiene:

$$0 = H_{q+1}\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}\right) \longrightarrow H_{q+1}\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)}\right) \longrightarrow H_{q+1}\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)}\right) \longrightarrow H_q\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}\right) = 0$$

dove gli zeri sono per il punto precedente. Pertanto, si ha l'isomorfismo

$$H_q\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)}\right) \cong H_q\left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)}\right)$$

Per concludere

RHS:

- $H_q \left(\frac{\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)} \right) \cong H_q \left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X_1)}{\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2)} \right)$ per il II teorema di isomorfismo^[99]
- $H_q \left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X_1)}{\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2)} \right) = H_q \left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X_1)}{\mathcal{S}_\bullet^\cap(X_1, X_2)} \right)$ per definizione di complesso di catene singolari intersezione
- $H_q \left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X_1)}{\mathcal{S}_\bullet^\cap(X_1, X_2)} \right) = H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1, X_1 \cap X_2))$ per definizione di complesso di catene singolari relative
- $H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1, X_1 \cap X_2)) = H_q(X_1, X_1 \cap X_2)$ per definizione di omologia singolare relativa.

LHS:

- $H_q \left(\frac{\mathcal{S}_\bullet(X)}{\mathcal{S}_\bullet(X_2)} \right) = H_q(\mathcal{S}_\bullet(X, X_2))$ per definizione di complesso di catene singolari relative
- $H_q(\mathcal{S}_\bullet(X, X_2)) = H_q(X, X_2)$ per definizione di omologia singolare relativa.

Segue la tesi. ■

Proposizione 4. Per ogni $\sigma \in \Sigma_q(X)$ simplexo singolare, esiste m tale che^[100]

$$\text{sd}_q^m(\sigma) \in \mathcal{S}_q^+(X_1, X_2)$$

Dimostrazione. Sia $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ continua. Definiamo^[101]

$$\mathcal{U} := \{U_1 := \sigma^{-1}(\hat{X}_1), U_2 := \sigma^{-1}(\hat{X}_2)\}$$

ricoprimento aperto del simplexo standard Δ_q .

Applicando il Lemma del numero di Lebesgue, sia λ il numero di Lebesgue di \mathcal{U} , e sia m tale che la mesh:

$$\text{mesh}(\text{sd}_q^m(\iota)) \leq \lambda.$$

con $\iota : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ l'identità. Inoltre, per costruzione

$$\text{sd}_q^m(\iota) = \sum a_i \tau_i$$

con τ_i trasformazioni affini. In particolare, quindi, si ha che

$$\text{diam } \text{Im } \tau_i < \lambda \implies \text{Im } \tau_i \subseteq U_1 \text{ o } \text{Im } \tau_i \subseteq U_2.$$

Calcolando adesso $\text{sd}_q^m(\sigma)$:

$$\text{sd}_q^m(\sigma) = \sigma_\# \text{sd}_q^m(\iota) = \sum a_i \sigma \circ \tau_i$$

e ogni $\text{Im}(\sigma \circ \tau_i) \subseteq \hat{X}_1$ oppure $\text{Im}(\sigma \circ \tau_i) \subseteq \hat{X}_2$.

Pertanto, per ogni i , $\sigma \circ \tau_i \in \Sigma_q(\hat{X}_1)$ oppure $\sigma \circ \tau_i \in \Sigma_q(\hat{X}_2)$, e quindi, per definizione di somma di moduli:

$$\text{sd}_q^m(\sigma) \in S_q(X_1) + S_q(X_2) = S_q^+(X_1, X_2). \quad ■$$

Corollario 5. Per ogni $\sigma \in S_q(X)$ catena singolare, esiste m tale che

$$\text{sd}_q^m(\sigma) \in S_q^+(X_1, X_2)$$

Proposizione 6. L'inclusione $S_\bullet^+(X_1, X_2) \hookrightarrow S_\bullet(X)^{589}$ induce un isomorfismo in omologia.

Dimostrazione. La mappa indotta in omologia è

$$\begin{aligned} i_* : H_q(S_\bullet^+(X_1, X_2)) &\longrightarrow H_q(X) \\ [c]_+ &\longmapsto [c]. \end{aligned}$$

È sufficiente mostrare che sia biiettiva, in quanto per funtorialità è un morfismo.

- i_* è suriettiva.

Sia $[c] \in H_q(X)$: allora $c = \sum a_i \sigma_i$, con $\sigma_i \in \Sigma_q(X)$ semplesso singolare, tale che $\partial c = 0^{[102]}$.
Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall i : \quad \text{sd}_q^m(\sigma_i) \in S_q^+(X_1, X_2)$$

che esiste per il lemma precedente. Allora

$$\text{sd}_q^m(c) = \sum_i a_i \text{sd}_q^m(\sigma_i) \in S_q^+(X_1, X_2)$$

ed inoltre $\partial \text{sd}_q^m(c) = \text{sd}_q^m(\partial c) = 0$.

Quindi $[\text{sd}_q^m(c)]_+ \in H_q(S_\bullet^+(X_1, X_2))$ e inoltre

$$i_*[\text{sd}_q^m(c)]_+ = [\text{sd}_q^m(c)] = [c]$$

in quanto **sd** è omotopa all'identità e mappe omotope inducono la stessa funzione in omologia.

- i_* è iniettiva.

Supponiamo che $i_*[c]_+ = 0$. Allora $[c] = 0$, e pertanto esiste $b \in S_{q+1}(X)$ tale che $c = \partial b$, ed esiste m tale che

$$\text{sd}_{q+1}^m(b) \in S_{q+1}^+(X_1, X_2)$$

e quindi $\text{sd}_q^m(c) = \text{sd}_q^m(\partial b) = \partial(\text{sd}_q^m b)$: per le proprietà dei sottocompleSSI, quindi, $\text{sd}_q^m(c) \in S_q^+(X_1, X_2)$.

Ovviamente sd è omotopa all'identità anche sui sottocompleSSI, e quindi

$$[c]_+ = [\text{sd}_q^m c]_+ = [\partial \text{sd}_q^m b]_+ = [0]_+$$

e quindi i_* è iniettiva. ■

429 Gruppo abeliano

429.1 Definizione

Un gruppo abeliano è un insieme G dotato di una operazione $+ : G \times G \rightarrow G$ tale che

- per ogni $a, b \in G$: $a * b = b * a$;
- dati $a, b, c \in G$: $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- esiste $e \in G$ tale che per ogni $a \in G$: $a * e = e * a = a$;
- per ogni $a \in G$ esiste $a' \in G$ tale che $a * a' = a' * a = e$.

Si denota con $\langle G, *\rangle$ oppure con $\langle G, *, e \rangle$.

429.1.1 Osservazione

Un gruppo abeliano è un gruppo in cui l'operazione è commutativa.

430 Ogni funzione da un gruppo ad un gruppo abeliano fattorizza tramite il gruppo abelianizzato

Sia G un gruppo, e sia A un gruppo abeliano.

Proposizione 1. Ogni morfismo^[103] $\varphi : G \longrightarrow A$, se G^{ab} è l'abelianizzato di G e π è la proiezione sul quoziente, fattorizza

$$G \xrightarrow{\pi} G^{\text{ab}} \xrightarrow{\varphi^{\text{ab}}} A$$

ovvero per ogni φ esiste un unico morfismo $\varphi^{\text{ab}} : G^{\text{ab}} \longrightarrow A$ tale che $\varphi = \varphi^{\text{ab}} \circ \pi$

431 Gruppo abelianizzato

Definizione 1. Sia G un gruppo, e sia $[G, G]$ è il sottogruppo commutatore di G , si definisce il gruppo abelianizzato il seguente quoziente:

$$G^{\text{ab}} := \frac{G}{[G, G]}$$

Proposizione 2. Il gruppo G^{ab} è un gruppo abeliano.

432 Commutatore di un gruppo

Sia G un gruppo

Definizione 1. Il sottogruppo commutatore di G , indicato con $[G, G]$, è il sottogruppo generato dall'insieme

$$\left\{ g^{-1}h^{-1}gh \mid g, h \in G \right\}$$

Proposizione 2. Sia $N \subseteq G$ un sottogruppo. Il quoziante G/N è un gruppo abeliano se e solo se $[G, G] \subseteq N$.

433 Quoziente di gruppi

434 Categoria-Ab

435 Giustapposizione di cammini

436 Cammino inverso

437 Lemma di incollamento

438 Calcolo dell'omologia singolare della sfera

Sia R un PID. Siano considerati le sfere e i dischi n -dimensionali:

$$\begin{aligned}\mathbb{D}^n &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \\ \mathbb{S}^{n-1} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}\end{aligned}$$

Si vogliono calcolare i moduli di omologia singolare $H_q(\mathbb{S}^n)$ e di omologia singolare relativa $H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1})$.

Proposizione 1. Si ha che,^[104]

$$H_q(\mathbb{S}^0) = \begin{cases} R \oplus R & q = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

mentre, per ogni $n \geq 1$:

$$H_q(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} R & q = 0, n \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad H_q(\mathbb{D}^n; \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} R & q = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Vedi Dimostrazione 2. ■

439 Disco n-dimensionale

440 Immagine continua di spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso

Sia R un PID. Sia X uno spazio topologico, e sia $X_1, X_2 \subseteq X$. Si denoti con \mathcal{S}_\bullet il complesso di catene singolare: si ha che

$$\mathcal{S}_\bullet(X_1) \subseteq \mathcal{S}_\bullet(X), \quad \mathcal{S}_\bullet(X_2) \subseteq \mathcal{S}_\bullet(X)$$

sono sottocomplessi.

Si denoti con Σ_q , per ogni $q \in \mathbb{Z}$, l'insieme dei q -simplessi singolari, e con S_q l' R -modulo delle q -catene singolari.

441 Complesso di catene singolare somma

Definizione 1. Si definisce il complesso di catene somma $\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)$ come la somma dei sottosimplessi:

$$\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2) := \mathcal{S}_\bullet(X_1) + \mathcal{S}_\bullet(X_2).$$

Osservazione. Questo è un sottocomplesso di $\mathcal{S}_\bullet(X)$, e in particolare:

$$\begin{aligned} S_q^+(X_1, X_2) &= S_q(X_1) + S_q(X_2) \\ &= R^{(\Sigma_q(X_1))} + R^{(\Sigma_q(X_2))} \\ &= R^{(\Sigma_q(X_1) \cup \Sigma_q(X_2))} \end{aligned}$$

dove con $R^{(\cdot)}$ si indica la somma diretta.

442 Complesso di catene singolare intersezione

Definizione 1. Si definisce il complesso di catene intersezione $\mathcal{S}_\bullet^\cap(X_1, X_2)$ come l'intersezione dei sottosimplessi:

$$\mathcal{S}_\bullet^\cap(X_1, X_2) := \mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2).$$

Osservazione. Questo è un sottocomplesso di $\mathcal{S}_\bullet(X)$, e in particolare:

$$\begin{aligned} S_q^\cap(X_1, X_2) &= S_q(X_1) \cap S_q(X_2) \\ &= R^{(\Sigma_q(X_1))} \cap R^{(\Sigma_q(X_2))} \\ &= R^{(\Sigma_q(X_1) \cap \Sigma_q(X_2))} \\ &= R^{(\Sigma_q(X_1 \cap X_2))} = S_q(X_1 \cap X_2) \end{aligned}$$

dove con $R^{(\cdot)}$ si indica la **somma diretta**. Quindi $S_\bullet^\cap(X_1, X_2) = \mathcal{S}_\bullet(X_1 \cap X_2)$

443 Suddivisione baricentrica di un simplesso

Sia $\sigma_0 = [p_0, \dots, p_q]$ un **q-simplesso**.

Si definisce il baricentro di un simplesso $[q_0, \dots, q_m]$:

$$b_{[q_0, \dots, q_m]} := \frac{q_0 + \dots + q_m}{m+1}.$$

Definizione 1. La **suddivisione baricentrica** di σ_0 è il **complesso simpliciale** K che abbia scheletri:

$$\begin{aligned} K_0 &= \{b_\sigma : \sigma \preceq \sigma_0\} \\ \forall r \leq q, \quad K_r &= \{[b_{\sigma_1}, b_{\sigma_2}, \dots, b_{\sigma_{r+1}}] : \sigma_1 \preceq \sigma_2 \preceq \dots \preceq \sigma_{r+1} \preceq \sigma_0\} \end{aligned}$$

dove \preceq indica la **relazione di facciata**.

Proposizione 2. Il **supporto** di K è uguale a σ_0 :

$$|K| = \sigma_0$$

444 Mappa di suddivisione tra complessi di catene singolari

Sia R un **PID**. Sia X uno **spazio topologico**, e sia

$$\mathcal{S}_\bullet(X) = \left\{ \left(S_q(X), \partial_q^X \right) \right\}_q$$

il **complesso di catene singolari**, S_q modulo di catene singolari.

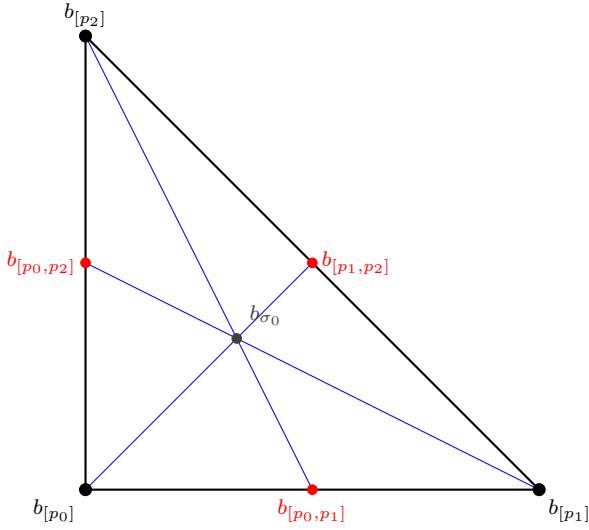


Figura 4: Suddivisione Baricentrica di Δ_2 .

Definizione 1. Per ogni $q \in \mathbb{N}$, si construisce la **mappa di suddivisione**

$$\text{sd}_q^{(X)} : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$$

come segue, per induzione.

- Per $q = 0$, si pone $\text{sd}_0^{(X)} = \text{Id}_X$.
- Per ipotesi induttiva, si supponga costruita per ogni X la mappa: $\text{sd}_{q-1}^{(X)} : S_{q-1}(X) \rightarrow S_{q-1}(X)$.

– Per $X = \Delta_q$ **simplesso standard** e $\iota_q \in S_q(\Delta_q)$, $\iota = \text{id}_{\Delta_q}$.

Sia b il **baricentro** di Δ_q , e sia

$$J_b : S_{q-1}(\Delta_q) \longrightarrow S_q(\Delta_q)$$

il **join ad un punto** (poiché Δ_q è stellato rispetto a b).

Definiamo

$$\text{sd}_q(\iota_q) := J_b \left(\text{sd}_{q-1}(\partial_q^{\Delta_q} \iota_q) \right).$$

– Per X qualsiasi, si **definisce** il **morfismo**

$$\text{sd}_q^{(X)} : S_q(X) \longrightarrow S_q(X)$$

sulla **base** $\Sigma_q(X)$ di $S_q(X) = R^{\Sigma_q(X)/105}$

Se $\sigma \in \Sigma_q(X)$ catena singolare, allora $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$ continua, ed è pertanto possibile applicare il funtore diesis ottenendo

$$\sigma_{\#} : \mathcal{S}_{\bullet}(\Delta_q) \rightarrow \mathcal{S}_{\bullet}(X)$$

dove il morfismo di complessi di catene è definito come segue:

$$\sigma_{\#} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\#}^n : S_n(\Delta_q) \rightarrow S_n(X) \\ \Sigma_n(\Delta_q) \ni \tau \mapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right\}$$

Dunque si definisce $\text{sd}_q^{(X)} \sigma := \sigma_{\#}^q (\text{sd}_q^{(\Delta_n)} \iota_q)$.

Proposizione 2. L'insieme dei morfismi $\text{sd}_q : S_q(X) \rightarrow S_q(X)$ induce un morfismo

$$\text{sd}_{\bullet} : \mathcal{S}_{\bullet}(X) \rightarrow \mathcal{S}_{\bullet}(X)$$

ovvero il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \\ & & \downarrow \text{sd}_{q+1} & & \downarrow \text{sd}_q & & \downarrow \text{sd}_{q-1} & \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \end{array}$$

Corollario 3. È ben definita una mappa tra i moduli di omologia singolare:

$$\text{sd}_{\star} : H_q(X) \rightarrow H_q(X)$$

tramite il funtore di omologia.

444.1 Legame con le trasformazioni affini

Osservazione.

- Se $\iota_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ è l'identità, allora $\text{sd}_q(\iota_q) \in S_q(\Delta_q)$ è

$$\text{sd}_q(\iota_q) = \sum a_i \tau_i$$

con $\tau_i \in \Sigma_q(\Delta_q)$ trasformazioni affini.

- Se $\tau_0 : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ è una trasformazione affine, allora

$$\begin{aligned} \text{sd}_q(\tau_0) &= (\tau_0)_{\#}^q \text{sd}_q(\iota_q) \\ &= (\tau_0)_{\#}^q \sum a_i \tau_i = \sum a_i \tau_0 \circ \tau_i \end{aligned}$$

dove, ovviamente, $\tau_0 \circ \tau_i$ è ancora una trasformazione affine.

Pertanto, si ha che $\text{sd}_q^2(\iota_q) = \sum a_j a_h \tau_i \circ \tau_j$ è ancora somma di trasformazioni affini.

3. Se $\tau : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ **trasformazione affine**, con $P_i := \tau(e_i)^{[106]}$, allora $\text{sd}_q \tau = \sum_i a_i \tau_i$, dove τ_i affine e tale che:

$$\begin{aligned}\tau_i : \Delta_q &\longrightarrow \Delta_q \\ e_0 &\longmapsto P_{i_0} \\ e_1 &\longmapsto \frac{P_{i_0} + P_{i_1}}{2} \\ &\vdots \\ e_q &\longmapsto \frac{P_{i_0} + \cdots + P_{i_q}}{q+1}.\end{aligned}$$

TODO fare bene tutti i calcoli

445 Mappa di suddivisione è omotopa a identità

Sia R un **PID** e sia X uno spazio topologico. Sia $\mathcal{S}_\bullet(X) := \{(S_q(X), \partial_q)\}_q$ il **complesso di catene singolari** di X , e sia

$$\text{sd}_\bullet : \mathcal{S}_\bullet(X) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X)$$

il **morfismo** dato dalla **mappa di suddivisione**. Si indichi con $\text{id}_\bullet : \mathcal{S}_\bullet(X) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X)$ il morfismo identitario.

Proposizione 1. I morfismi $\text{sd}_\bullet \sim \text{id}_\bullet$ sono **omotopi**.

Dimostrazione. Bisogna dimostrare che esistano

$$T_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X)$$

tali che $\text{sd}_q - \text{id}_q = \partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q$:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \\ & \searrow T_{q+1} & \downarrow \text{sd}_{q+1} & \searrow \text{id}_{q+1} & \downarrow T_q & \searrow \text{sd}_q & \searrow \text{id}_q & \searrow T_{q-1} & \searrow \text{sd}_{q-1} & \searrow \text{id}_{q-1} \\ \cdots & \xrightarrow{\partial_{q+2}} & S_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & S_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & S_{q-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \end{array}$$

Si trova T_q per induzione.

Caso base.

Si definisce $T_0 = 0$. Questo funziona:

$$\underbrace{\text{sd}_0(\sigma) - \sigma}_{=0} = \underbrace{\partial_1 0}_{=0} + \underbrace{T_{-1} \partial_0 \sigma}_{=0}.$$

Ipotesi induttiva

Supponiamo che T_{q-1} sia stata definita per ogni X spazio topologico.

- Caso del triangolo. Si ponga $X = \Delta_q$, e si consideri $\iota \in S_q(\Delta_q)$, $\iota = \text{id}_{\Delta_q}$. Si vuole costruire

$$\hat{T}_q : S_q(\Delta_q) \longrightarrow S_{q+1}(\Delta_q)$$

tale che

$$\begin{aligned} \text{sd}(\iota) - \iota &= \partial_{q+1} \hat{T}_q(\iota) + \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) \\ \partial_{q+1} \hat{T}_q(\iota) &= \text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) \end{aligned} \quad (\star)$$

L'unico valore importante per \hat{T}_q è $\hat{T}_q(\iota)$.

Siccome Δ_q è **stellato**, allora è **aciclico**, e pertanto^[107]

$$\begin{aligned} Z_q(S_\bullet(\Delta_q)) &= B_q(S_\bullet(\Delta_q)) \\ \ker \partial_q &= \text{Im } \partial_{q+1} \end{aligned}$$

Quindi, per definire $\hat{T}_q(\iota)$ è sufficiente mostrare che

$$(\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota)) \in \ker \partial_q = \text{Im } \partial_{q+1}$$

Questo basta per scegliere un valore per $\hat{T}_q(\iota) \in S_{q+1}(\Delta_q)$:

$$\begin{aligned} \partial_q(\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota)) &= \partial_q \text{sd}_q(\iota) - \partial_q \iota - \partial_q \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) \\ &= \text{sd}_{q-1}(\partial_q \iota) - \partial_q \iota - (\text{sd}_{q-1}(\partial_q \iota) - \partial_q \iota - \hat{T}_{q-2}(\partial_{q-1} \partial_q \iota)) \\ &= \text{sd}_{q-1}(\partial_q \iota) - \partial_q \iota - (\text{sd}_{q-1}(\partial_q \iota) - \partial_q \iota) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il fatto che \hat{T}_{q-1} esista (per ipotesi induttiva) e rispetti l'uguaglianza \star .

- Caso generale.

Se $\sigma \in \Sigma_q(X)$ **simplesso singolare**, allora $\sigma : \Delta_q \longrightarrow X$ **continua**, ed è pertanto possibile applicare il **funtore diesis** ottenendo

$$\sigma_\# : S_\bullet(\Delta_q) \longrightarrow S_\bullet(X)$$

dove il **morfismo di complessi di catene** è definito come segue:

$$\sigma_\# = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_\#^n : S_n(\Delta_q) \longrightarrow S_n(X) \\ \Sigma_n(\Delta_q) \ni \tau \longmapsto \sigma \circ \tau \end{array} \right\}$$

Si definisce sulla base il **morfismo**

$$\begin{aligned} T_q : S_q(X) &\longrightarrow S_{q+1}(X) \\ \Sigma_q(X) \ni \sigma &\longmapsto \sigma_\#^{q+1} (\hat{T}_q(\iota)) \end{aligned}$$

Dimostriamo che valga

$$\text{sd}_q - \text{id}_q = \partial_{q+1} \circ T_q + T_{q-1} \circ \partial_q \quad (\star')$$

su ogni elemento $\sigma \in \Sigma_q(X)$.

Sia ι come sopra, e sia ε_i^q gli **operatori di facciata**

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} \circ T_q(\sigma) + T_{q-1} \circ \partial_q \sigma &= \partial_{q+1} \sigma_\#^{q+1} (\hat{T}_q(\iota)) + T_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma \circ \varepsilon_i^q \right) \\ &= \sigma_\#^q (\partial_{q+1} \hat{T}_q(\iota)) + \sum_{i=0}^q (-1)^i T_{q-1} (\sigma \circ \varepsilon_i^q) \\ &= \sigma_\#^q (\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota)) + \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma \circ \varepsilon_i^q)_\#^q (\hat{T}_{q-1}(\iota)) \\ &= \sigma_\#^q (\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota)) + \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma)_\#^q ((\varepsilon_i^q)_\#^q (\hat{T}_{q-1}(\iota))) \\ &= \sigma_\#^q (\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota)) + \sum_{i=0}^q (-1)^i (\sigma)_\#^q (\hat{T}_{q-1}(\varepsilon_i^q)) \end{aligned}$$

e dunque questa è ancora uguale a

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} \circ T_q(\sigma) + T_{q-1} \circ \partial_q \sigma &= \sigma_\#^q \left(\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \hat{T}_{q-1}(\varepsilon_i^q) \right) \\ &= \sigma_\#^q \left(\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) + \hat{T}_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\varepsilon_i^q) \right) \right) \\ &= \sigma_\#^q \left(\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) + \hat{T}_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i (\iota \circ \varepsilon_i^q) \right) \right) \\ &= \sigma_\#^q (\text{sd}_q(\iota) - \iota - \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota) + \hat{T}_{q-1}(\partial_q \iota)) \\ &= \sigma_\#^q (\text{sd}_q(\iota) - \iota) \\ &= \sigma_\#^q \text{sd}_q(\iota) - \sigma_\#^q \iota \\ &= \text{sd}_q(\iota) - \text{id}(\sigma). \end{aligned}$$

■

446 Mesh di una catena singolare

Sia R un PID. Si consideri Δ_q il simplex standard.

- Si consideri $\Sigma_q(\Delta_q)$ l'insieme dei simplessi singolari,
- Si consideri $S_q(\Delta_q) = R^{(\Sigma_q(\Delta_q))}$ il modulo delle catene singolari

Per ogni $c \in S_q(\Delta_q)$, siano^[109] $\tau_1, \dots, \tau_n \in \Sigma_q(\Delta_q)$ tali che

$$c = \sum_i a_i \cdot \tau_i, \quad a_i \in R$$

Definizione 1. Si definisce la mesh di c :^[110]

$$\text{mesh}(c) := \max_i \left\{ \text{diam}(\text{Im}(\tau_i)) \right\}_i$$

dove diam è la massima distanza tra due punti di un insieme di \mathbb{R}^k .

Osservazione. Se $\tau : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ trasformazione affine, con $P_i := \tau(e_i)$ ^[111], allora

$$\text{diam}(\text{Im}(\tau)) = \text{diam}[P_0, \dots, P_q] = \max_{i,j} \|P_i - P_j\|.$$

446.1 Legame con la mappa di suddivisione

Si consideri $\text{sd}_q : S_q(\Delta_q) \rightarrow S_q(\Delta_q)$ mappa di suddivisione.

Lemma 2. Se $\tau : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ trasformazione affine, $\tau \in S_q(\Delta_q)$, allora

$$\text{mesh}(\text{sd}_q \tau) \leq \frac{q}{q+1} \text{mesh}(\tau).$$

Corollario 3. Se $\iota_q : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$ è l'identità, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m tale che^[112]

$$\text{mesh}(\text{sd}_q^m(\iota_q)) < \varepsilon$$

Dimostrazione. $\text{mesh}(\text{sd}_q^m(\iota)) \leq \left(\frac{q}{q+1} \right)^m \text{mesh} \iota$. ■

447 Teorema di Mayer-Vietoris (in omologia)

Sia R un PID. Sia X uno spazio topologico e siano $X_1, X_2 \subseteq X$ tali che l'unione delle parti interne sia tutto lo spazio:

$$\overset{\circ}{X}_1 \cup \overset{\circ}{X}_2 = X.$$

Si definiscono le seguenti inclusioni:

$$\begin{aligned} i_1 : X_1 \cap X_2 &\longrightarrow X_1 \\ i_2 : X_1 \cap X_2 &\longrightarrow X_2 \\ j_1 : X_1 &\longrightarrow X \\ j_2 : X_2 &\longrightarrow X. \end{aligned}$$

Teorema 1. Si ha la seguente SEL dei moduli di omologia singolare (detta di Mayer-Vietoris)

$$H_{q+1}(X) \longrightarrow H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} H_q(X) \longrightarrow H_{q-1}(X_1 \cap X_2)$$

dove \bullet_* rappresenta il funtore di omologia e le mappe sono definite come segue:^[113]

$$\begin{aligned} (i_1)_* \oplus (i_2)_* : H_q(X_1 \cap X_2) &\longrightarrow H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \\ c &\longmapsto ((i_1)_*(c), (i_2)_*(c)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (j_1)_* - (j_2)_* : H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) &\longrightarrow H_q(X) \\ (a, b) &\longmapsto (j_1)_*(a) - (j_2)_*(b) \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si ha la seguente SEC di moduli, per ogni q :

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow S_q(X_1) \cap S_q(X_2) \longrightarrow S_q(X_1) \oplus S_q(X_2) \longrightarrow S_q(X_1) + S_q(X_2) \longrightarrow 0 \\ c &\longmapsto (c, c) \\ (s_1, s_2) &\longmapsto s_1 - s_2 \end{aligned}$$

Tutti questi morfismi commutano con le mappe di bordo, e pertanto è ben definita la SEC di complessi:^[114]

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X_1) \oplus \mathcal{S}_\bullet(X_2) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(X_1) + \mathcal{S}_\bullet(X_2) \longrightarrow 0$$

ed è possibile applicare lo Zig-Zag Lemma, ottenendo:

$$H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2)) \longrightarrow H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \oplus \mathcal{S}_\bullet(X_2)) \longrightarrow H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) + \mathcal{S}_\bullet(X_2)) \longrightarrow H_{q-1}(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2))$$

dove le mappe sono date dal funtore di omologia.

Per ciascuno dei moduli di omologia:

- Si noti che $\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2) = \mathcal{S}_\bullet^\cap(X_1, X_2) = \mathcal{S}_\bullet(X_1 \cap X_2)$ complesso di catene singolare intersezione, e pertanto

$$H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2)) = H_q(X_1 \cap X_2).$$

- Per il Teorema di Escissione (la proposizione sul complesso di catene singolare somma),

$$H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) + \mathcal{S}_\bullet(X_2)) \cong H_q(X).$$

con la mappa data dalla semplice inclusione.

- Siccome omologia e somma diretta commutano,

$$\begin{array}{ccc} H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \oplus \mathcal{S}_\bullet(X_2)) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \\ \left[(s_1, s_2)\right] & \longleftrightarrow & ([s_1], [s_2]) \end{array}$$

Componendo i morfismi, costruiamo il seguente diagramma commutativo che lega la successione esatta algebrica (riga superiore) con la successione di Mayer-Vietoris desiderata (riga inferiore):

$$\begin{array}{ccccc} H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \cap \mathcal{S}_\bullet(X_2)) & \xrightarrow{\alpha_*} & H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) \oplus \mathcal{S}_\bullet(X_2)) & \xrightarrow{\beta_*} & H_q(\mathcal{S}_\bullet(X_1) + \mathcal{S}_\bullet(X_2)) \\ \downarrow = & & \downarrow \Phi \cong & & \downarrow \Psi \cong \\ H_q(X_1 \cap X_2) & \xrightarrow{(i_1)_* \oplus (i_2)_*} & H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) & \xrightarrow{(j_1)_* - (j_2)_*} & H_q(X) \end{array}$$

Analizziamo i morfismi verticali e la commutatività dei quadrati:

1. **Primo quadrato (Mappa diagonale):** Ricordiamo che $\alpha(c) = (c, c)$. L'isomorfismo Φ è l'inverso dell'isomorfismo naturale che porta una coppia di classi nella classe della coppia (vedi punto precedente sulla somma diretta). Partendo da $c \in H_q(X_1 \cap X_2)$:

- Percorso alto: $c \xrightarrow{\alpha_*} [(c, c)] \xrightarrow{\Phi} ([c], [c]) \in H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$.
- Percorso basso: $c \mapsto ((i_1)_*(c), (i_2)_*(c))$.

Poiché i_1, i_2 sono inclusioni, le classi coincidono.

2. **Secondo quadrato (Mappa differenza):** Ricordiamo che $\beta(s_1, s_2) = s_1 - s_2$. L'isomorfismo Ψ è indotto dall'inclusione $\iota : S_\bullet(X_1) + S_\bullet(X_2) \hookrightarrow S_\bullet(X)$ (che induce isomorfismo in omologia per il Teorema di Escissione/Barycentric subdivision). Sia $([z_1], [z_2]) \in H_q(X_1) \oplus H_q(X_2)$:

- Percorso basso: $([z_1], [z_2]) \mapsto (j_1)_*([z_1]) - (j_2)_*([z_2])$.
- Percorso alto: $([z_1], [z_2]) \xrightarrow{\Phi^{-1}} [(z_1, z_2)] \xrightarrow{\beta_*} [z_1 - z_2]$ (classe nel complesso somma).

Applicando Ψ (che è indotto dall'inclusione in X), la classe $[z_1 - z_2]$ diventa la classe in $H_q(X)$. Poiché i cicli sono lineari, $[z_1 - z_2] = [z_1] - [z_2]$ in $H_q(X)$, che coincide esattamente con $(j_1)_*([z_1]) - (j_2)_*([z_2])$.

La successione inferiore è quindi esatta poiché isomorfa ad una successione esatta (quella superiore fornita dallo Zig-Zag Lemma). \blacksquare

Osservazione. Se X, Y sono spazi topologici e $f : X \rightarrow Y$ continua tale che, per $X_1, X_2 \subseteq X$, $Y_1, Y_2 \subseteq X$:

$$\begin{aligned} f &: X \longrightarrow Y \\ f|_{X_1} &: X_1 \longrightarrow Y_1 \\ f|_{X_2} &: X_2 \longrightarrow Y_2 \\ f|_{X_1 \cap X_2} &: X_1 \cap X_2 \longrightarrow Y_1 \cap Y_2 \end{aligned}$$

sono tutte **equivalenze omotopiche**, allora:

se $(Y, Y_1, Y_2, Y_1 \cap Y_2)$ rispetta Mayer-Vietoris, lo fa anche $(X, X_1, X_2, X_1 \cap X_2)$.

448 Prodotto wedge di spazi topologici puntati

Siano $(X, x), (Y, y)$ **spazi topologici puntati** tali che

- esiste $U_x \subseteq X$ intorno di x tale che $\{x\} \hookrightarrow U_x$ sia un **retratto di deformazione forte**
- esiste $U_y \subseteq Y$ intorno di y tale che $\{y\} \hookrightarrow U_y$ sia un **retratto di deformazione forte**

Definizione 1. Si definisce la **relazione di equivalenza** \sim sull'unione disgiunta $X \sqcup Y$:

$$r \sim s \iff \begin{cases} r = s \\ r = x \wedge s = y \\ r = y \wedge s = x \end{cases}$$

e si definisce quindi il prodotto wedge di X e Y come il **quoziente**:

$$X \vee Y := X \sqcup Y / \sim$$

con la **topologia quoziente** indotta dalla proiezione $p : X \sqcup Y \rightarrow X \vee Y$.

448.1 Omologia singolare del prodotto wedge di spazi topologici puntati

Proposizione 2. Sia R un PID. Per ogni $q > 0$, l'omologia singolare dello spazio $X \vee Y$ è uguale alla somma diretta dell'omologia singolare di X e Y :

$$H_q(X \vee Y) = H_q(X) \oplus H_q(Y)$$

Dimostrazione. Sia $p = [x] = [y]$, e si definiscano (visti come immagini nel quoziente):

$$\begin{array}{ll} Y_1 = X \cup U_y & X_1 = X \\ Y_2 = Y \cup U_x & X_2 = Y \\ Y_1 \cap Y_2 = U_x \cup U_y & X_1 \cap X_2 = \{p\} \end{array}$$

Allora la quadrupla $(X \vee Y, Y_1, Y_2, Y_1 \cap Y_2)$ soddisfa Mayer-Vietoris, e

$$\text{Id} : (X \vee Y, X_1, X_2, X_1 \cap X_2) \longrightarrow (X \vee Y, Y_1, Y_2, Y_1 \cap Y_2)$$

si restringe a tutte retrazioni di deformazione. Quindi

$$(X \vee Y, X_1, X_2, X_1 \cap X_2) = (X \vee Y, X, Y, p)$$

soddisfa Mayer-Vietoris.

- Per $q > 1$, si ha

$$H_q(p) \longrightarrow H_q(X) \oplus H_q(Y) \longrightarrow H_q(X \vee Y) \longrightarrow H_{q-1}(p)$$

e, vista l'omologia del punto, $H_q(p) = H_{q-1}(p) = 0$, e quindi

$$H_q(X) \oplus H_q(Y) \cong H_q(X \vee Y).$$

- Per $q = 1$:

$$H_1(p) \longrightarrow H_1(X) \oplus H_1(Y) \longrightarrow H_1(X \vee Y) \longrightarrow H_0(p) \longrightarrow H_0(X) \oplus H_0(Y) \longrightarrow H_0(X \vee Y) \longrightarrow 0$$

e ricordando l'omologia del punto, si ottiene:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & R & & \\ & & & & \Downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & H_1(X) \oplus H_1(Y) & \longrightarrow & H_1(X \vee Y) & \xrightarrow{\alpha} & H_0(p) \xrightarrow{\beta} H_0(X) \oplus H_0(Y) \longrightarrow H_0(X \vee Y) \longrightarrow 0 \\ & & & & & & \\ & & & & [p] \longmapsto & & ([p], [p]) = ([x], [y]) \end{array}$$

In particolare, β è iniettiva, e quindi α è il morfismo nullo. Segue:

$$H_1(X) \oplus H_1(Y) \cong H_1(X \vee Y). \quad \blacksquare$$

449 Calcolo dell'omologia singolare del toro

Sia R un PID.

Proposizione 1. Sia \mathbb{T}^2 il toro bidimensionale, spazio topologico. La sua omologia singolare è^[115]

$$H_q(\mathbb{T}^2) := \begin{cases} R & q = 0 \\ R \oplus R & q = 1 \\ R & q = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

450 Teorema del punto fisso di Brower

Sia \mathbb{D}^n il disco n -dimensionale.

Teorema 1. Se $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ è una funzione continua, allora ammette un punto fisso, ovvero esiste $p \in \mathbb{D}^n$ tale che

$$f(p) = p.$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\forall p \in \mathbb{D}^n : f(p) \neq p$

Sia allora $g : \mathbb{D}^n \rightarrow \partial\mathbb{D}^n$, dove $\partial\mathbb{D}^n$ è il bordo, ovvero la sfera:

$$\partial\mathbb{D}^n = \mathbb{S}^{n-1}$$

che a ciascun punto p associa il punto di intersezione per $t > 0$ tra la retta $r_p(t)$ e il bordo \mathbb{S}^{n-1} .

$$r_p(t) = f(p) + t(p - f(p))$$

ben definita poiché per ipotesi $p \neq f(p)$. g è una funzione continua e $g|_{\mathbb{S}^{n-1}} = \text{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$

Applicando il funtore di omologia singolare al seguente diagramma, ricordando che \mathbb{D}^n è stellato e quindi aciclico (e ricordando l'omologia della sfera)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^{n-1} \\ i \uparrow & \nearrow \text{id} & \rightsquigarrow H_{n-1} \\ \mathbb{S}^{n-1} & & H_{n-1}(\mathbb{D}^n) \xrightarrow{g_*} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \\ & & i_* \uparrow \quad \nearrow \text{id} \end{array}$$

si ottiene che $H_{n-1}(\mathbb{D}^n) = 0$ e quindi $i_* = 0$ e quindi

$$\text{id} = g_* \circ i_* = g_* \circ 0 = 0.$$

■

451 Omologia Locale

Sia R un PID e sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Sia $x \in X$. Si definisce l'**omologia locale** di X attorno ad x come l'**omologia singolare relativa** della coppia topologica $(X, X \setminus \{x\})$:

$$H_n(X | x) := H_n(X, X \setminus \{x\})$$

Proposizione 2. Per ogni intorno chiuso U di x si ha che

$$H_n(X | x) \cong H_n(U | x)$$

Dimostrazione. Banale applicazione del Teorema di Escissione:

$$\begin{aligned} H_n(X | x) &= H_n(X, X \setminus \{x\}) \cong H_n\left(X \setminus (X \setminus U); (X \setminus \{x\}) \setminus (X \setminus U)\right) \\ &= H_n(U; U \setminus \{x\}) = H_n(U | x). \end{aligned}$$
■

452 Omologia Locale di una varietà topologica

Sia R un PID.

Proposizione 1. Se X è una varietà topologica di dimensione n , allora per ogni $x \in X$ l'**omologia locale** è

$$H_q(X | x) = \begin{cases} R & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

Dimostrazione. Sia U un intorno di x fissato, e sia $\varphi : U \rightarrow U' \subseteq \mathbb{R}^n : x \mapsto 0$ un omeomorfismo. Consideriamo

$$V' := B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \varepsilon\} \subseteq U'$$

e V la retroimmagine tramite φ : $V = \varphi^{-1}[V']$. Allora $\varphi|_V : V \rightarrow V'$ è un omeomorfismo, così come:

$$\varphi|_V : V \setminus \{x\} \longrightarrow V' \setminus \{0\}.$$

Quindi $\varphi|_V$ induce $(\varphi|_V)_*$ tra i moduli di omologia relativa:

$$(\varphi|_V)_* : H_q(V, V \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} H_q(V', V' \setminus \{0\})$$

che per funzionalità è un isomorfismo.

Inoltre, $V' = \mathbb{D}^n$ e $\partial V' \hookrightarrow V' \setminus \{0\}$ è retratto di deformazione (con \mathbb{D}^n si intende il disco), quindi

$$H_q(V', V' \setminus \{0\}) \cong H_q(V', \partial V') = H_q(\mathbb{D}^n, \mathbb{S}^{n-1}) = \begin{cases} R & q = n \\ 0 & q \neq n \end{cases}$$

dove l'ultima uguaglianza è per l'omologia relativa già calcolata. ■

453 Teorema di invarianza della dimensione

Teorema 1. Sia X una varietà topologica di dimensione n , Y una varietà topologica di dimensione m , e sia

$$f : X \longrightarrow Y$$

un omeomorfismo. Allora $m = n$.

Dimostrazione. Sia R un PID. $f : X \longrightarrow Y$ si estende ad un isomorfismo tra coppie topologiche

$$f : (X, X \setminus \{x\}) \xrightarrow{\cong} (Y, Y \setminus \{f(x)\})$$

che applicando il funtore di omologia relativa, per ogni q diventa un isomorfismo

$$f_* : H_q(X, X \setminus \{x\}) \longrightarrow H_q(Y, Y \setminus \{f(x)\})$$

ovvero, sfruttando l'omologia locale:

$$f_* : H_q(X | x) \xrightarrow{\cong} H_q(Y | f(x))$$

Dunque per ogni q , considerando l'omologia locale delle varietà topologiche

$$\begin{cases} q = n & R \\ q \neq n & 0 \end{cases} = H_q(X, x) \cong H_q(Y, f(x)) = \begin{cases} R & q = m \\ 0 & q \neq m \end{cases}$$

e dunque $m = n$. ■

454 Sottocomplesso di catene

454.1 Sottocomplesso di catene di R -moduli

Sia R un anello commutativo con unità, e sia $\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un complesso di catene di R -moduli.

Definizione 1. Un sottocomplesso \mathcal{D}_\bullet di \mathcal{C}_\bullet è una successione di sottomoduli $D_n \subseteq C_n$ tale che le immagini:

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad \partial_n[D_n] \subseteq D_{n-1}.$$

Il sottocomplesso \mathcal{D}_\bullet è esso stesso un complesso di catene

$$\mathcal{D}_\bullet = \{(D_n, \partial_n^D)\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

con differenziali dati dalla restrizione $\partial_n^D := \partial_n|_{S_n}$.

Un sottocomplesso dà luogo ad una naturale iniezione, ovvero al morfismo di complessi di catene

$$i_\bullet : \mathcal{D}_\bullet \hookrightarrow \mathcal{C}_\bullet, \quad i_\bullet = \{i_n : D_n \hookrightarrow C_n\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

455 Quoziente di complessi di catene

Sia R un anello commutativo con unità, e sia $\mathcal{C}_\bullet = \{(C_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un complesso di catene di R -moduli, $\mathcal{D}_\bullet = \{(D_n, \partial_n^D)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un sottocomplesso di \mathcal{C}_\bullet .

Definizione 1. Il quoziente è il complesso di catene:

$$\mathcal{C}_\bullet/\mathcal{D}_\bullet := \left\{ \left(\frac{C_n}{D_n}, \partial_n^* \right) \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

dove C_n/D_n è il quoziente di R -moduli e

$$\begin{aligned} \partial_n^* : \frac{C_n}{D_n} &\longrightarrow \frac{C_{n-1}}{D_{n-1}} \\ x + D_n &\longmapsto \partial_n x + D_{n-1} \end{aligned}$$

La definizione è ben posta poiché $\partial_n[D_n] \subseteq D_{n-1}$

456 Trasformazione Affine

Definizione 1. Siano V e W due spazi vettoriali su un campo \mathbb{K} . Una mappa $f : V \rightarrow W$ è detta **trasformazione affine** se esistono una trasformazione lineare $L : V \rightarrow W$ e un vettore $b \in W$ tali che:

$$f(v) = L(v) + b \quad \forall v \in V$$

Osservazione. Una trasformazione affine è la **composizione** di una trasformazione lineare seguita da una traslazione.

456.1 Funzione affine reale

Definizione 2. Nel caso specifico in cui $V = W = \mathbb{R}$, una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **affine** se esistono due costanti $m, q \in \mathbb{R}$ tali che:

$$f(x) = mx + q$$

Osservazione. Se $q = 0$, la funzione è lineare (omogenea). Se $m = 0$, la funzione è costante.

Proposizione 3. Le funzioni affini reali preservano le combinazioni affini (baricentriche). Ovvero, se $\sum t_i = 1$:

$$f\left(\sum_i t_i x_i\right) = \sum_i t_i f(x_i)$$

Definizione 4. Siano $V = \mathbb{R}^n$ e $W = \mathbb{R}^m$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ si dice **affine** se esistono una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e un vettore $b \in \mathbb{R}^m$ tali che:

$$f(x) = Ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Osservazione. La matrice A rappresenta la componente lineare della trasformazione (rotazione, scala, deformazione), mentre il vettore b rappresenta la traslazione.

Proposizione 5. Una trasformazione affine in \mathbb{R}^n può essere rappresentata come una trasformazione lineare in \mathbb{R}^{n+1} utilizzando le **coordinate omogenee**. Se associamo a ogni vettore $x \in \mathbb{R}^n$ il vettore

aumentato $\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$, allora l'azione di f corrisponde alla moltiplicazione per una matrice a blocchi \tilde{A} :

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

457 Lemma del numero di Lebesgue

Lemma 1. Siano (X, d) uno spazio metrico compatto e \mathcal{A} un ricoprimento aperto di X .

Allora esiste δ tale che per ogni aperto B in X di diametro minore di δ , esiste $U \in \mathcal{A}$ tale che $B \subseteq U$.

Definizione 2. δ si chiama numero di Lebesgue del ricoprimento \mathcal{A} .

458 Retratto di deformazione forte di uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Un sottospazio $A \subseteq X$, con l'inclusione $i_A : A \hookrightarrow X$ si dice **retratto di deformazione di X** se esiste una retrazione $r : X \rightarrow A$ tale che $i_A \circ r \sim \text{Id}_X^{[116]}$ ed inoltre la funzione

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow X$$

omotopia tra $i_A \circ r$ e Id_X è tale che

$$\forall x \in X : \quad H(x, 0) = i_A \circ r(x), \quad H(x, 1) = x$$

ed inoltre $H(\cdot, t)|_A = \text{Id}_A$, ovvero:

$$\forall a \in A, \forall t \in [0, 1], \quad H(a, t) = a$$

459 Spazio topologico quoziante

Definizione 1. Sia X uno spazio topologico, e Y un insieme qualsiasi. Data $\pi : X \rightarrow Y$ suriettiva, la **topologia quoziante su Y** è la topologia più fine che rende π continua.

Teorema 2. Sia \mathcal{T} la topologia quoziante su Y . Sono fatti equivalenti:

1. $A \in \mathfrak{T}$;
2. $\pi^{-1}(A)^{[117]}$ è un **aperto** di X .

Osservazione. Se X è uno spazio topologico e \sim è una relazione di equivalenza, la topologia sul **quoziente** X/\sim è la topologia quoziante indotta da

$$\begin{aligned}\pi : X &\longrightarrow X/\sim \\ x &\longmapsto [x]_{\sim}.\end{aligned}$$

459.1 Proprietà universale della topologia quoziante

Siano X uno **spazio topologico**, $\pi : X \rightarrow Y$ **suriettiva** e Y dotato della topologia quoziante rispetto a π .

Teorema 3. Per ogni \widetilde{Y} spazio topologico e per ogni $f : X \longrightarrow \widetilde{Y}$ **funzione continua** tale che

$$\forall x, y \in X : \quad \pi(x) = \pi(y) \implies f(x) = f(y)$$

esiste un'unica **funzione continua** $\bar{f} : Y \rightarrow \widetilde{Y}$ tale che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \widetilde{Y} \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! \bar{f} & \\ Y & & \end{array}$$

Proposizione 4. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. \bar{f} è un **omeomorfismo**;
2. f è **continua**, **suriettiva** e **aperta**;
3. f è **continua**, **suriettiva** e **chiusa**.

460 Punto Fisso

Sia A un insieme, e $f : A \longrightarrow A$ una funzione.

460.1 Definizione

Un elemento $a \in A$ si dice **punto fisso** di f se $f(a) = a$.

461 Bordo topologico

462 Grado di un endomorfismo della sfera

Sia $R = \mathbb{Z}$ un PID e sia \mathbb{S}^n la [sfera \$n\$ -dimensionale](#)

Definizione 1. Sia $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una [funzione continua](#). Allora applicando il [funtore di omologia singolare](#), questa induce un [morfismo](#)

$$f_* : H_n(\mathbb{S}^n) \rightarrow H_n(\mathbb{S}^n)$$

ovvero $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ [morfismo di gruppi](#), tale che $f_*(x) = m \cdot x$ per qualche $m \in \mathbb{Z}$. Si definisce il grado di f come

$$\deg f := m$$

Lemma 2. Siano $f, g : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ [funzioni continue](#).

1. Se $f \sim g$ [funzioni omotope](#), allora $\deg f = \deg g$;
2. Se $f \sim \text{Id}$, allora $\deg f = 1$;
3. Se f è omotopa alla funzione costante, allora $\deg f = 0$;
4. $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$

Dimostrazione.

1. Se due funzioni sono omotope, allora [inducono la stessa mappa in omologia](#).
2. Per funtorialità, $(\text{Id}_{\mathbb{S}^n})_* = \text{Id}_{\mathbb{Z}}$ e pertanto $\deg \text{Id} = 1$.
3. Se g è costante, allora g fattorizza come segue:

$$\begin{array}{ccc} & \{p\} & \\ & \nearrow g & \searrow \\ \mathbb{S}^n & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

e per funtorialità

$$\begin{array}{ccc} & H_n(\{p\}) = 0 & \\ 0 \nearrow & & \searrow \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{g} & H_n(\mathbb{S}^n) \end{array}$$

ottenendo che $g_* = 0$, $\deg g = 0$.

4. Applicando il [funtore di omologia singolare](#):

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{S}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{S}^n \\ & & \downarrow & & \\ H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{g_*} & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{f_*} & H_n(\mathbb{S}^n) \\ & & x \longmapsto \deg g \cdot x & & \\ & & y \longmapsto \deg f \cdot y & & \\ & & x \xrightarrow{(f \circ g)_*} (\deg g) \cdot (\deg f) \cdot x & & \end{array}$$

e pertanto la tesi. ■

462.1 Grado dell'endomorfismo di riflessione sulla sfera

Proposizione 3. Sia

$$\begin{aligned} r : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, -x_{n+1}) \end{aligned}$$

Allora $\deg r = -1$

Dimostrazione. Consideriamo i due insiemi

$$\begin{aligned} A^+ &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \geq 0\} \\ A^- &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n \leq 0\} \\ E &= A^+ \cap A^- \end{aligned}$$

Allora E è [omeomorfo](#) alla sfera \mathbb{S}^{n-1} e $r|_E = \text{Id}_E$.

Se consideriamo ora, per $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^+ &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n > -\varepsilon\} \\ A_\varepsilon^- &= \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{S}^n \mid x_n < \varepsilon\} \\ B &= A_\varepsilon^+ \cap A_\varepsilon^- \end{aligned}$$

allora $(\mathbb{S}^n, A_\varepsilon^+, A_\varepsilon^-, B)$ soddisfa **Mayer-Vietoris**, e inoltre la mappa

$$\text{Id} : (\mathbb{S}^n, A^+, A^-, E) \longrightarrow (\mathbb{S}^n, A_\varepsilon^+, A_\varepsilon^-, B)$$

dà origine a tutti **retratti di deformazione**.

Si ripercorre la dimostrazione del Teorema di Mayer-Vietoris. Ottengo le due **SEC**:^[118]

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(E) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(A^+) \oplus \mathcal{S}_\bullet(A^-) \xrightarrow{(j_1)_\# - (j_2)_\#} \mathcal{S}_\bullet(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(E) \longrightarrow \mathcal{S}_\bullet(A^-) \oplus \mathcal{S}_\bullet(A^+) \xrightarrow{(j_2)_\# - (j_1)_\#} \mathcal{S}_\bullet(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

Inoltre r induce tutte le mappe^[119] che rendono il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_\bullet(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_\bullet(A^+) \oplus \mathcal{S}_\bullet(A^-) & \xrightarrow{(j_1)_\# - (j_2)_\#} & \mathcal{S}_\bullet(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (r|_{E})_\# & & \downarrow (r|_{A^+})_\# \oplus (r|_{A^-})_\# & & \downarrow (r)_\# \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{S}_\bullet(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}_\bullet(A^-) \oplus \mathcal{S}_\bullet(A^+) & \xrightarrow{(j_2)_\# - (j_1)_\#} & \mathcal{S}_\bullet(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0 \end{array}$$

e per **funzionalità + Zig-Zag Lemma**

$$\begin{array}{ccccccc} H_n(A^+) \oplus H_n(A^-) & \xrightarrow{j_1 - j_2} & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\partial_\star} & H_{n-1}(E) & \longrightarrow & H_{n-1}(A^+) \oplus H_{n-1}(A^-) \\ r_\star \downarrow & & r_\star \downarrow & & \downarrow \text{Id} & & r_\star \downarrow \\ H_n(A^-) \oplus H_n(A^+) & \xrightarrow{j_2 - j_1} & H_n(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\partial'_\star} & H_{n-1}(E) & \longrightarrow & H_{n-1}(A^-) \oplus H_{n-1}(A^+) \end{array}$$

Per il **lemma**, $\partial'_\star = -\partial_\star$.

Siccome A^+, A^- sono **contraibili**, allora

$$H_n(A^+) = H_n(A^-) = 0 = H_{n-1}(A^+) = H_{n-1}(A^-)$$

e quindi ∂_\star e ∂'_\star sono isomorfismi:

$$\begin{aligned} r_\star &= (\partial'_\star)^{-1} \circ \text{Id} \circ \partial_\star = (\partial'_\star)^{-1} \circ \text{Id} \circ (-\partial'_\star) \\ &= -(\partial'_\star)^{-1} \circ (\partial'_\star) = -\text{Id}. \end{aligned}$$

■

462.1.1 Grado della mappa antipodale sulla sfera

Corollario 4. La mappa antipodale

$$\begin{aligned} a : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

ha grado $\deg a = (-1)^{n+1}$.

463 Grado di una matrice ortogonale come endomorfismo della sfera

Proposizione 1. Sia $A \in O(n)$ una matrice ortogonale (reale). Allora $A : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ e il suo grado è uguale al suo determinante:

$$\deg A = \det A$$

Dimostrazione. Se A è matrice ortogonale, allora $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ “preserva” il prodotto interno:

$$\langle Ax; Ay \rangle = \langle x; y \rangle$$

e quindi anche la norma:

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax; Ax \rangle = \langle x; x \rangle = \|x\|^2.$$

Pertanto $A : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ è ben definita.

Per costruzione, il determinante $\det A = \pm 1$.

- Se $\det A = 1$, allora $A \in SO(n)$ gruppo ortogonale speciale, che è cpa.

Pertanto, esiste un cammino continuo da A a $\mathbb{1}_n$ matrice identità:

$$\begin{aligned} A(t) : [0, 1] &\longrightarrow SO(n) \\ 0 &\longmapsto A \\ 1 &\longmapsto \mathbb{1}_n \end{aligned}$$

e la mappa

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} \\ (t, p) &\longmapsto A(t) \cdot p \end{aligned}$$

è un’omotopia: $H(0, p) = A \cdot p$ e $H(1, p) = p = \mathbb{1}_n \cdot p$.

Quindi $A \sim \text{Id}$ è omotopa, e $\deg A = 1 = \det A$.

- Se $\det A = -1$, allora possiamo considerare

$$r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice della [mappa di riflessione](#). Si ha che $A \cdot r \in \mathrm{SO}(n)$, quindi

$$1 = \deg(A \cdot r) = \deg(A \circ r) = \deg A \cdot \deg r$$

e inoltre $\deg r = -1$. Segue che $\deg A = -1$. ■

464 Gruppo ortogonale speciale reale è connesso per archi

Teorema 1. Sia $\mathrm{SO}(n)$ il [gruppo ortogonale speciale](#) (reale). Allora $\mathrm{SO}(n)$ è [cpa](#).

Dimostrazione. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum. ■

465 Gruppo ortogonale speciale

466 Endomorfismo di una sfera senza punti fissi è omotopa alla mappa antipodale

Proposizione 1. Sia $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ una [funzione continua](#) senza punti fissi. Allora f è [omotopa](#) alla funzione:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ x &\longmapsto -x \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se f non ha punti fissi, allora $\forall p \in \mathbb{S}^n$, $f(p) \neq p$. Si costruisce l'omotopia normalizzata:^[120]

$$H(p, t) := \frac{t \cdot f(p) - (1-t)p}{\|t \cdot f(p) - (1-t)p\|}$$

Se è ben definita, allora è continua, e $H(p, 0) = -p$, $H(p, 1) = f(p)$.

Supponiamo quindi per assurdo che esistano (t_0, p_0) (WLOG $t_0 \neq 0$) tali che

$$\|t_0 \cdot f(p_0) - (1-t_0)p_0\| = 0 \iff t_0 \cdot f(p_0) - (1-t_0)p_0 = 0$$

ovvero sse $f(p_0) = \frac{1-t_0}{t_0} p_0$. Quindi

$$\|f(p_0)\| = \left\| \frac{1-t_0}{t_0} p_0 \right\| = \frac{1-t_0}{t_0} \|p_0\|$$

e quindi $\frac{1-t_0}{t_0} = 1$, ovvero $t_0 = 0$. Assurdo. ■

Corollario 2. Se $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ continua ha grado

$$\deg f \neq (-1)^{n+1}$$

allora f ha punti fissi.

Dimostrazione. È sufficiente considerare il grado della mappa antipodale. ■

467 Coppia topologica buona

Definizione 1. Una coppia topologia (X, A) è detta **buona** se esiste U :

$$A \subseteq U \subseteq X$$

tale che A sia un retratto di deformazione forte di U .

468 Contrazione di un sottospazio topologico ad un punto

Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $A \subseteq X$ un sottospazio.

Definizione 1. Si definisce la relazione di equivalenza \sim su X che identifica tutti i punti di A in un unico punto, lasciando inalterati i punti di $X \setminus A$:

$$x \sim y \iff (x = y) \vee (x \in A \wedge y \in A)$$

Lo spazio quoziante rispetto a questa relazione si denota con X/A , dotato della topologia quoziante indotta dalla proiezione canonica $\pi : X \rightarrow X/A : x \mapsto [x]_\sim$.

Gli elementi di X/A sono:

- I singoletti $\{x\}$ per ogni $x \in X \setminus A$;
- Il punto speciale p_A , (la classe di equivalenza che contiene ogni punto di A).

Osservazione. Un sottoinsieme $U \subseteq X/A$ è aperto se e solo se $\pi^{-1}(U)$ è aperto in X . Esplicitamente, gli aperti di X/A sono di due tipi:

1. Sottoinsiemi aperti di $X \setminus A$ (che non contengono il punto $[A]$);
2. Insiemi della forma $V \cup \{[A]\}$, dove $V \subseteq X \setminus A$ è tale che $V \cup A$ sia un aperto in X (ovvero intorni aperti del sottospazio A in X).

469 Morse Kelly Set Theory

La teoria MK è una \mathcal{L}_\in -teoria della logica del prim'ordine, dove il linguaggio è

$$\mathcal{L}_\in = \{\in\}$$

con \in simbolo di relazione binaria

469.1 Definizioni di base

- Classe MK
- Insieme MK
- Operazioni insiemistiche:
 - Unione
 - Intersezione
 - Sottrazione

- Differenza simmetrica
- Insieme delle parti
- Insieme vuoto MK
- Coppia ordinata
- Generalizzazione delle operazioni insiemistiche
 - Classe Unione Generalizzata MK
 - Classe Intersezione Generalizzata
 - Prodotto cartesiano
- Immagine punto a punto di due classi MK
- Preimmagine di una classe MK
- Restrizione di una classe MK
- Classe delle Classi-Funzioni
- Classe si inietta
- Classe si surietta
- Classe-Funzione Bigettiva
- [BROKEN LINK: a9dda44b-5a98-4c24-9382-15083956fa9c]
- Classi equipotenti MK

469.2 Assiomi di MK

(vedi Insieme di assiomi per una teoria e Enunciato del prim'ordine)

469.2.1 Axiom of Extensionality

$$\forall A \forall B \left((\forall x (x \in A \longleftrightarrow x \in B)) \rightarrow A = B \right)$$

469.2.2 Axiom of Comprehension

Sia $\varphi(x, y_1, \dots, y_n)$ una formula in cui la variabile x occorra libera, e sia A una variabile diversa da x, y_1, \dots, y_n .

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \exists A \forall x (x \in A \longleftrightarrow (\text{Set}(x) \wedge \varphi(x, y_1, \dots, y_n)))$$

Osservazioni La classe A è unica per l'assioma di Extensionality, e si denota

$$A = \{x \mid \varphi(x, y_1, \dots, y_n)\}$$

Questo assioma ci dice che la scrittura $\{x : \varphi(x)\}$ è una **classe** (definibile anche con dei parametri), ma che i suoi elementi devono essere necessariamente **insiemi**. Notiamo inoltre che questo assioma ci consente di scrivere $\{x_1, \dots, x_n\}$ per x_1, \dots, x_n **insiemi**, in quanto questo è

$$\{x_1, \dots, x_n\} := \{x \mid x = x_1 \vee x = x_2 \vee \dots \vee x = x_n\}$$

469.2.3 Axiom of Set-existence

$$\exists x \text{ Set}(x)$$

(vedi [Insieme MK](#))

469.2.4 Axiom of Power-Set

$$\forall A \left(\text{Set}(A) \rightarrow \exists P \left(\text{Set}(P) \wedge (\forall B (B \subseteq A \longleftrightarrow B \in P)) \right) \right)$$

(vedi [Insieme MK](#) e [Sottoclasse MK](#))

P è l'insieme delle parti di A , e si indica con $\wp(A)$.

469.2.5 Axiom of Pairing

$$\forall x \forall y \left(\text{Set}(x) \wedge \text{Set}(y) \rightarrow \text{Set}(\{x, y\}) \right)$$

(vedi [Insieme MK](#))

469.2.6 Axiom of Foundation

$$\forall A \left(A \neq \emptyset \rightarrow (\exists B (B \in A \wedge A \cap B = \emptyset)) \right)$$

Questo assioma ci garantisce che, per ogni classe, ci siano degli elementi al suo interno che non contengano elementi della classe più grande.

469.2.7 Axiom of Union

$$\forall A \left(\text{Set}(A) \rightarrow \text{Set}(\bigcup A) \right)$$

(vedi [Insieme MK](#) e [Classe Unione](#)).

469.2.8 Axiom of Infinity

Esiste un **insieme induttivo**, ovvero:

$$\exists x \left(\text{Set}(x) \wedge \emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \rightarrow S(y) \in x) \right)$$

(vedi [Insieme MK](#) e [Successore di un insieme MK](#)).

469.2.9 Axiom of Replacement

Se F è una **classe-funzione** e A è un insieme, allora $F[A]$ è un **insieme**. (vedi [Immagine punto a punto di due classi MK](#))

469.3 Risultati di base

Ogni sottoclasse di un insieme è un insieme MK Ogni sovraclasse di una classe propria è una classe propria MK Nessuna classe appartiene a se stessa Esistono infiniti insiemi MK Unione di funzioni MK Non esistono classi-funzioni a dominio naturale che formano una catena discendente

470 Classe - Teoria degli insiemi

470.1 Classi per MK

Nell'ambito di MK, una classe è un elemento di un modello della teoria degli insiemi.

Una classe si dice propria se non è un insieme.

471 Insieme

471.1 Insieme per MK

Si è nell'ambito della Morse Kelly Set Theory.

Una classe A è un insieme se e solo se esiste una classe B tale che

$$A \in B$$

La \mathcal{L}_\in -formula “ x è un insieme” è

$$\text{Set}(x) : \quad \exists y (x \in y)$$

472 Paradosso di Russel

472.1 Paradosso di Russel

Si consideri l'insieme

$$R = \{x : x \notin x\}$$

- Se $R \in R$, allora $R \notin R$;
- Se $R \notin R$, allora $R \in R$.

Questo è assurdo.

472.1.1 Soluzione nell'ambito di MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

La classe

$$R = \{x \mid x \notin x\}$$

esiste per l'assioma di Comprehension, e contiene tutti gli **insiemi** x tali che $x \notin x$.

Se $R \in R$, allora $R \notin R$, assurdo. Se invece $R \notin R$, allora

- se R è un **insieme**, si ha la contraddizione che $R \in R$.
- se R è una **classe propria**, allora non vi è alcuna contraddizione.

Quindi R è una classe propria, tale che $R \notin R$.

473 Teoria del Prim'ordine

474 Linguaggio del prim'ordine

475 Termine del prim'ordine

476 Struttura del prim'ordine

Sia \mathcal{L} un **linguaggio del prim'ordine**, e siano \mathcal{M}, \mathcal{N} due \mathcal{L} -**strutture** di **domini**, rispettivamente, M ed N .

477 Proprietà delle mappe tra strutture del prim'ordine

477.1 Delta-Morfismi tra strutture del prim'ordine

Definizione 1. Sia $\Delta \subseteq \mathcal{L}$ un insieme di **formule**. Una **funzione** (che sia **totale** o **parziale**) $F : M \rightarrow N$ tra i **domini** delle strutture è detta Δ -morfismo se per ogni $\varphi(x) \in \Delta$ e per ogni $a \in (\text{dom } F)^x$ ^[121]

$$M \models \varphi(a) \quad \rightarrow \quad N \models \varphi(Fa).$$

In questo caso diciamo che F preserva la verità di tutte le formule di Δ .

477.2 Mappa elementare

Definizione 2. Una **funzione** (che sia **totale** o **parziale**) $F : M \rightarrow N$ tra i **domini** delle strutture è detta mappa elementare se per ogni **formula** $\varphi(x)$ e per ogni $a \in (\text{dom } F)^x$ nel **dominio** di F , si ha

$$M \models \varphi(a) \quad \rightarrow \quad N \models \varphi(Fa)$$

ovvero se F è un Δ -morfismo per $\Delta = \mathcal{L}$ l'insieme di tutte le formule.

477.2.1 Immersione elementare

CFR: Immersione elementare

478 Mappe TOTALI tra strutture del prim'ordine

478.1 Morfismo tra strutture del prim'ordine

Definizione 1. Una funzione totale $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta morfismo se

- per ogni simbolo di relazione R di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^M \rightarrow (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^N$$

- per ogni simbolo di funzione g di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$F[g^M(a_1, \dots, a_n)] = g^N[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

Proposizione 2. Sia $F : M \rightarrow N$ funzione totale. Sono fatti equivalenti:

1. F è un morfismo
2. F è Δ -morfismo per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{at}}$ l'insieme delle formule atomiche, ovvero per ogni formula atomica $\varphi(x)$ e per ogni $a \in M^x$ si ha

$$M \models \varphi(a) \rightarrow N \models \varphi(Fa)$$

478.2 Morfismo pieno tra strutture del prim'ordine

Definizione 3. Una funzione totale $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta morfismo pieno se

- per ogni simbolo di relazione R di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^M \longleftrightarrow (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^N$$

- per ogni simbolo di funzione g di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$F[g^M(a_1, \dots, a_n)] = g^N[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

Proposizione 4. Caratterizzazione come Δ -morfismo DA FINIRE

478.3 Immersione tra strutture del prim'ordine

Definizione 5. Una funzione totale iniettiva $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta immersione se

- per ogni simbolo di relazione R di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^M \longleftrightarrow (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^N$$

- per ogni simbolo di funzione g di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$F[g^M(a_1, \dots, a_n)] = g^N[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

Una immersione è un morfismo pieno iniettivo.

Proposizione 6. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione totale. Sono fatti equivalenti:

1. $F : M \rightarrow N$ è una immersione;
2. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\text{qf}}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula senza quantificatori) e per ogni $a \in M^x$

$$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} (eventualmente parziale) sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{qf}}$.

3. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\text{at}}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula atomica) e per ogni $a \in M^x$

$$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} (eventualmente parziale) sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{at}}$.

DA FINIRE: Siamo sicuri che l'equivalenza regga?? Sono sicuro di 1->2->3 (1->2 note di LMR Logica 1)

478.3.1 Immersione elementare

Definizione 7. Una funzione totale $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta immersione elementare se

- F è una immersione;
- il range $\text{ran } F = F[M]$, visto come sottostruttura di N , è sottostruttura elementare

DA FINIRE:

- Aggiungere il fatto che

Una funzione $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta immersione elementare se per ogni formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$ si ha

$$M \vDash \varphi[a_1, \dots, a_n] \rightarrow N \vDash \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

- Vedi: Immersione elementare induce isomorfismo

478.4 Isomorfismo tra strutture del prim'ordine

Definizione 8. Una funzione totale biiettiva $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta isomorfismo se sia F che la sua inversa F^{-1} sono morfismi tra le due strutture.

Proposizione 9. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione totale biiettiva. Sono fatti equivalenti:

1. $F : M \rightarrow N$ è un isomorfismo;
2. per ogni formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ e per ogni $a \in M^x$

$$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}$.

3. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{at}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula atomica) e per ogni $a \in M^x$

$$M \vDash \varphi(a) \iff N \vDash \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{at}$.

DA FINIRE: Siamo sicuri che l'equivalenza regga?? Sono sicuro di 1->2->3 (1->2 note di LMR Logica 1)

479 Mappe PARZIALI tra strutture del prim'ordine

479.1 Morfismo parziale tra strutture del prim'ordine

479.2 Isomorfismo parziale tra strutture del prim'ordine

480 Sottostruttura del prim'ordine

481 Formula del prim'ordine

481.1 Formula atomica del prim'ordine

481.2 Altezza di una formula

481.3 Formula senza quantificatori del prim'ordine

481.4 Albero sintattico di una formula

482 Variabile libera di una formula

483 Enunciato del prim'ordine

484 Chiusura universale di una formula

485 Soddisfazione di una formula

485.1 Insieme definito da una formula

485.1.1 Insieme definito da una formula del prim'ordine

486 Modello di un insieme di formule

487 Conseguenza logica

488 Equivalenza logica tra due enunciati

Due \mathcal{L} -enunciati si dicono logicamente equivalenti se il loro valore di verità è lo stesso in ogni struttura del linguaggio.

489 Equivalenza logica tra due formule

Due \mathcal{L} -formule si dicono logicamente equivalenti se i loro insiemi di verità coincidono in ogni struttura del linguaggio.

489.1 Equivalenza tra due formule in un modello

Fissata una \mathcal{L} -struttura M , due formule φ, ψ si dicono equivalenti in M se

$$M \models \varphi(\mathbf{x}) \longleftrightarrow \psi(\mathbf{x}).$$

490 Insieme di assiomi per una teoria

491 Teoria soddisfacibile

Una teoria T si dice soddisfacibile se esiste un modello di T .

492 Teoria finitamente soddisfacibile

Una teoria T si dice finitamente soddisfacibile se ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.

493 Teoria massimamente soddisfacibile

Una teoria T si dice massimamente soddisfacibile se è soddisfacibile e non esiste alcuna teoria S soddisfacibile t.c. $T \subsetneq S$.

493.1 Teorie massimamente soddisfacibili coincidono con la loro chiusura logica

Se T è massimamente soddisfacibile, detta $T' = \text{ccl}(T)$ la sua chiusura logica, si ha

$$T = T'.$$

494 Teoria completa

Definizione 1. Una teoria del prim'ordine T si dice completa se per ogni enunciato σ nel suo linguaggio si ha che T dimostrì

$$T \vdash \sigma \quad \text{oppure} \quad T \vdash \neg\sigma.$$

Se ciò non accade, T si dice incompleta. Gli enunciati σ tali che $T \not\vdash \sigma$ e $T \not\vdash \neg\sigma$ si dicono indipendenti da T .

495 Strutture elementarmente equivalenti

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#).

495.1 Definizione

Due \mathcal{L} -[strutture](#) M, N si dicono [elementarmente equivalenti](#) se

$$M \models \varphi \longleftrightarrow N \models \varphi$$

per ogni \mathcal{L} -[enunciato](#) φ . (vedi [Enunciato vero in un modello del prim'ordine](#)). In tal caso si scrive $M \equiv N$.

495.2 Definizione

Si dice che M, N sono [elementarmente equivalenti su](#) $\setminus(A)$ se:

1. $A \subseteq M \cap N$;
2. $M \models \varphi \longleftrightarrow N \models \varphi$ per ogni [enunciato](#) $\varphi \in \mathcal{L}(A)$.

496 Teoria di una struttura

497 Formula valida

498 Formula soddisfacibile

499 Sostituzione di termini in una formula

500 Operazioni insiemistiche

500.1 Unione

500.1.1 Unione generalizzata

500.2 Intersezione

500.3 Sottrazione insiemistica

500.4 Differenza simmetrica tra due insiemi

500.5 Sottoinsieme

500.6 Generalizzazione nell'ambito MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Siano A, B due classi. Prr l'assioma di Comprehension, possiamo scrivere

500.6.1 Unione di classi MK

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Per l’Axiom of Extensionality, è commutativa.

Classe Unione Generalizzata MK Sia A una classe. Si definisce la classe unione:

$$\bigcup A = \bigcup_{x \in A} x := \{y \mid \exists x (x \in A \wedge y \in x)\}$$

Questa è una classe per l’Axiom of Comprehension

Se x, y sono insiemi, allora per l’Axiom of pairing $\{x, y\}$ è un insieme, e si ha che

$$x \cup y = \bigcup \{x, y\}$$

500.6.2 Intersezione di classi MK

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Per l’Axiom of Extensionality, è commutativa.

Classe Intersezione Generalizzata Sia A una classe. Si definisce la classe intersezione

- se $A \neq \emptyset$ (vedi Insieme vuoto MK)

$$\bigcap A = \bigcap_{x \in A} x := \{y \mid \forall x (x \in A \rightarrow y \in x)\}$$

tale classe esiste per l’Axiom of Comprehension.

- se $A = \emptyset$ allora $\bigcap A = \emptyset$.

La classe intersezione è sempre un insieme, poiché per ogni $x \in A$ si ha che

$$\bigcap A \subseteq x$$

e x è un insieme.

500.6.3 Sottrazione di classi MK

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Per l’Axiom of Extensionality, è commutativa.

500.6.4 Differenza simmetrica di classi MK

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Per l’Axiom of Extensionality, è commutativa.

500.6.5 Sottoclasse MK

Scriveremo $A \subseteq B$ (e diremo che A è una sottoclasse di B) se e solo se

$$\forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$$

Se $A \neq B$ allora diremo che A è una sottoclasse propria di B , e scriveremo $A \subset B$.

501 Ogni sottoclasse di un insieme è un insieme MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Siano A, B due [classi](#).

501.1 Corollario

Se B è un [insieme](#) e $A \subseteq B$ (vedi [Sottoclasse MK](#)), allora A è un [insieme](#)

501.1.1 Dimostrazione

Se B è un insieme, allora per l'assioma of Power-set esiste P tale che

$$\forall A(A \subseteq B \rightarrow A \in P)$$

e pertanto A è un insieme (per definizione).

502 Ogni sovraclasse di una classe propria è una classe propria MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Siano A, B due [classi](#).

502.1 Corollario

Se B è una [classe propria](#), e $B \subseteq A$ (vedi [Sottoclasse MK](#)), allora A è una classe propria.

502.1.1 Dimostrazione

Se per assurdo A fosse un [insieme](#), allora B sarebbe un [insieme](#). Assurdo

503 Insieme vuoto

503.1 Insieme vuoto MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Se A è un insieme, allora anche

$$A^\neq := \{x \in A \mid x \neq x\} \subseteq A$$

è un insieme

Nessun elemento può far parte di A^\neq e per l'assioma di Extensionality, ogni altra classe vuota deve essere uguale a A^\neq . Si definisce quindi l'**insieme vuoto**:

$$\emptyset := A^\neq$$

504 Coppia ordinata

504.1 Formalizzazione in MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

504.1.1 Coppia ordinata di insiemi (Kuratowski)

Se x, y sono insiemi, allora si definisce la coppia ordinata

$$(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

(che è ancora un insieme per l'assioma of Pairing).

Ovviamente $(x, y) \neq (y, x)$.

504.1.2 Proposizione

Per ogni insiemi x, y, z, w si ha

$$(x, y) = (z, w) \longleftrightarrow x = z \wedge y = w$$

Dimostrazione Si dimostra solo (\rightarrow) perché l'altra implicazione è ovvia

1. Caso 1:

Se $x = y$, allora

$$\{\{x\}\} = (x, y) = (z, w) = \{\{z\}, \{z, w\}\}$$

e dunque $\{x\} = \{z\} = \{z, w\}$.

Questo implica che $x = z$ e $y = w$. Quindi $x = y = z = w$, che implica la tesi.

Allo stesso modo $y = w$ implica la tesi.

2. Caso 2:

Supponiamo ora $x \neq y$ e $z \neq w$.

Siccome $\{x\} \in (x, y) = (z, w) = \{\{z\}, \{z, w\}\}$ allora necessariamente o $x = z$ oppure $x = z = w$. Ma per ipotesi $z \neq w$, e quindi $x = z$.

Siccome $\{x, y\} \in (x, y) = (z, w) = (x, w)$ allora $\{x, y\} = \{x\}$ oppure $\{x, y\} = \{x, w\}$. Per ipotesi $x \neq y$, e quindi

$$\{x, y\} = \{x, w\}$$

e dunque $y \in \{x, w\}$, e dunque $x = y$ oppure $y = w$. Per ipotesi $x \neq y$, dunque $y = w$.

504.1.3 Coppia ordinata di classi

Se A, B sono classi, e almeno una delle due è una classe propria, allora la coppia (A, B) è definita come l'unione disgiunta.

$$(A, B) := A \uplus B$$

505 Nessuna classe appartiene a se stessa

Contesto: Morse Kelly Set Theory

505.1 Osservazione

Sia A una classe tale che $A \in A$. Allora A è un insieme, e pertanto esiste la classe $\{A\}$ (per l'assioma di Comprehension), non vuota poiché $A \in \{A\}$.

Per l'assioma of Foundation, esiste $B \in \{A\}$ tale che $B \cap \{A\} = \emptyset$, ma se $B \in \{A\}$ allora $B = A$. Quindi $A \in A$ e $A \in \{A\}$, e dunque

$$A \in A \cap \{A\} = \cap \{A\} = \emptyset$$

Assurdo.

Inoltre, non esistono insiemi A, B tali che $A \in B$ e $B \in A$

506 Prodotto cartesiano

506.1 Generalizzazione in MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Siano A, B due classi. Si definisce il prodotto cartesiano di A e B come la classe

$$A \times B := \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$$

che esiste per l'Axiom of Comprehension (vedi Coppia ordinata MK)-

506.1.1 MK Prodotto di insiemi è un insieme

Se A e B sono insiemi, allora $A \times B$ è un insieme.

Dimostrazione IdL:matematica_lm Se $x \in A$ e $y \in B$, allora $\{x\}, \{x, y\} \subseteq A \cup B$ e pertanto

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \wp(A \cup B)$$

Dunque $A \times B \subseteq \wp(\wp(A \cup B))$ (vedi Insieme delle parti), e pertanto $A \times B$ è un insieme, poiché l'insieme delle parti è un insieme per l'Axiom of Powerset.

506.2 Prodotto cartesiano generalizzato

Se I è un insieme e $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ è una sequenza di insiemi, allora il prodotto cartesiano generalizzato:

$$\prod_{i \in I} A_i := \{\langle a_i \mid i \in I \rangle \mid \forall i \in I (a_i \in A_i)\}$$

Nota 1: Se $A_{i_0} = \emptyset$, allora $\prod_{i \in I} A_i = \emptyset$. Il viceversa, ovvero “se $I \neq \emptyset$ e ogni $A_i \neq \emptyset$ allora $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ ”, invece, è equivalente all'assioma della scelta.

Nota 2: Nell'ambito della teoria degli insiemi di Morse e Kelly non si può generalizzare ulteriormente il risultato a classi proprie: infatti, affinché sia possibile avere una Classe-Funzione, gli elementi del range dovranno essere degli insiemi.

Se però per ogni $i \in n$: $A_i = A$, la situazione si semplifica.

506.2.1 Potenza di una classe

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della Morse Kelly Set Theory; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

Se X è un insieme (o una classe), $X \times X$ è l'insieme (o la classe) delle coppie ordinate di elementi di X . Questo genera un'ambiguità quando si parla di

$$X^3, X^4, \text{etc.}$$

in quanto $X^3 = X \times (X \times X)$ o $X^3 = (X \times X) \times X$? Infatti, il prodotto cartesiano non è commutativo.

Si sfrutta quindi la definizione di prodotto cartesiano generalizzato, e si pone^[122]

$$X^n := \{\langle a_i \mid i \in n \rangle \text{ sequenza finita}\} = {}^n X = \prod_{i \in I} X$$

Questo rende privo di ambiguità la notazione per l'insieme delle funzioni.

Nota: In questo caso se $X \neq \emptyset$ allora $X^n \neq \emptyset$ anche senza assumere AC.

Si osservi che questa definizione è valida anche per le classi proprie.

507 Successore di un insieme

Sia x un insieme.

Si definisce il **successore di x** come l'insieme

$$S(x) := x \cup \{x\}$$

507.1 Successore di un numero naturale

Ricordando la [definizione di numeri naturali](#) nella teoria degli insiemi, è naturale la definizione di successore:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n + 1 \end{aligned}$$

507.2 Formalizzazione in MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Per l'Axiom of Comprehension, se x è un insieme $\{x\}$ è un insieme e $x \cup \{x\}$ è un insieme.

507.2.1 Osservazione

Per ogni insieme x , $x \neq S(x)$. Infatti $x \in S(x)$, ma $x \notin x$ (vedi [Nessuna classe appartiene a se stessa](#)) e pertanto, per l'Axiom of Extentionality, $x \neq S(x)$.

508 Esistono infiniti insiemi MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#).

508.1 Proposizione

La classe di tutti gli insiemi contiene infiniti elementi.

508.1.1 Dimostrazione

Si parta dall'[insieme vuoto](#) \emptyset , e se ne consideri il [successore](#):

$$S(\emptyset) = \{\emptyset\}$$

Si può considerare quindi la seguente lista di insiemi distinti:

$$\begin{aligned} \{\emptyset\} &= S(\emptyset) \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\} &= S(\{\emptyset\}) \\ \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &= S(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) \end{aligned}$$

Pertanto, vi sono infiniti insiemi.

509 Classe induttiva

509.1 Definizione

Una [classe](#) I si dice **induttiva** se

$$\emptyset \in I \wedge \forall x \ (x \in I \rightarrow S(x) \in I)$$

dove $S(x)$ è il [successore](#) di x .

510 Insieme dei numeri naturali

510.1 Principio di induzione

510.2 Costruzione in MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory.

510.2.1 Definizione

IdL:matematica_lm

Sia \mathcal{J} la classe di tutti gli insiemi induttivi (che esiste per l'Axiom of Comprehension). Si definisce \mathbb{N} come l'insieme intersezione:

$$\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{J}$$

Pertanto \mathbb{N} è il più piccolo insieme contenente \emptyset (vedi Insieme vuoto MK) e chiuso per l'operazione di successore. Si definiscono:

$$\begin{aligned} 0 &:= \emptyset \\ 1 &:= S(0) \\ 2 &:= S(1) \\ &\vdots \end{aligned}$$

510.2.2 Proposizione

\mathbb{N} è un insieme induttivo e se $n \in \mathbb{N}$ allora $n = 0$ oppure $n = S(m)$ per qualche $m \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione

1. Insieme induttivo

\mathbb{N} è sicuramente un insieme poiché è una intersezione. Inoltre $\emptyset \in \mathbb{N}$ poiché $\forall J \in \mathcal{J} (\emptyset \in J)$. Inoltre, se $n \in \mathbb{N}$ allora $\forall J \in \mathcal{J} (n \in J)$, e siccome J induttivo allora $S(n) \in J$. Dunque $\forall J \in \mathcal{J} (S(n) \in J)$ e dunque $S(n) \in \mathbb{N}$.

2. Elementi di \mathbb{N}

Supponiamo per assurdo che $n \in \mathbb{N} \setminus \{\emptyset\}$ (vedi Sottrazione di classi MK) sia tale che $S(m) \neq n$ per ogni $m \in \mathbb{N}$. Allora $J := \mathbb{N} \setminus \{n\}$ è un insieme induttivo, e dunque $J \in \mathcal{J}$ e quindi $\mathbb{N} \subseteq J$. Ma $J \subset \mathbb{N}$, contraddizione.

510.2.3 Induzione per i naturali

Sia $I \subseteq \mathbb{N}$ (vedi Sottoclasse MK) tale che

1. $\emptyset \in I$;
2. $\forall n (n \in I \rightarrow S(n) \in I)$

Allora $I = \mathbb{N}$.

Dimostrazione Basta mostrare che $N \subseteq I$, ma I è un insieme induttivo per definizione.

511 Relazione Binaria

512 Relazione inversa

513 Funzione

514 Funzione inversa

515 Composizione di funzioni

516 Formalizzazione in MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

516.1 Classe-Relazione Binaria MK

Una **relazione binaria**, o più semplicemente una relazione, è una [classe](#) i cui elementi sono [coppie ordinate](#).

516.2 Funzione

516.2.1 Relazione Funzionale MK

Una relazione binaria R è **funzionale** (o Classe-Funzione) se $(x, y), (x, y') \in R$ implica che $y = y'$. In tal caso, con $R(x)$ indichiamo l'unico y tale che $(x, y) \in R$ (se esiste).

516.2.2 Funzione MK

Una **funzione** è una relazione funzionale che sia anche un [insieme](#).

516.3 Composizione di relazioni binarie MK

Se R ed S sono due relazioni binarie, allora la **composizione di R con S** è la classe

$$R \circ S := \{(x, z) \mid \exists y \ ((x, y) \in S \wedge (y, z) \in R)\}$$

Se in particolare R ed S sono relazioni funzionali, allora $R \circ S$ è una relazione funzionale, e $R \circ S(x) = R(S(x))$.

516.4 Relazione inversa MK

Se R è una relazione binaria, si definisce la relazione inversa di R :

$$\check{R} := \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

516.4.1 Classe-Funzione inversa MK

Se F è una Classe-Funzione [iniettiva](#), allora \breve{F} è una Classe-Funzione, denotata con F^{-1} . Si dice che F è [invertibile](#). Vale che, per ogni elemento del [dominio](#), la composizione è l'identità:

$$\forall x \in \text{dom}(F) [(F^{-1} \circ F)(x) = x], \quad \forall x \in \text{rng}(F) [(F \circ F^{-1})(x) = x]$$

Inoltre, l'[immagine punto a punto](#) di A tramite F coincide con la [retroimmagine](#) di A tramite F^{-1} , dunque la notazione seguente è priva di ambiguità:

$$F^{-1}[A].$$

517 Dominio di una funzione

517.1 Generalizzazione in MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Sia R una [classe relazione](#).

517.1.1 Dominio di una Classe-Relazione

Si definiscono il dominio, il range e il campo di R come segue:

$$\begin{aligned}\text{dom}(R) &:= \{x \mid \exists y (x, y) \in R\} \\ \text{ran}(R) &:= \{y \mid \exists x (x, y) \in R\} \\ \text{fld}(R) &:= \text{dom}(R) \cup \text{ran}(R)\end{aligned}$$

(vedi [Unione di classi MK](#)), che esistono per l'Axiom of comprehension.

Proposizione 1. Se R è un [insieme](#), allora anche $\text{dom}(R)$, $\text{ran}(R)$, $\text{fld}(R)$ sono insiemi.

518 Unione di funzioni

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

518.1 Proposizione

Sia \mathcal{F} una [classe](#) di funzioni superiormente diretta rispetto a \subseteq (vedi [Sottoclasse MK](#)). Allora l'[unione](#)

$$\bigcup \mathcal{F}$$

è una [relazione funzionale](#).

518.1.1 Dimostrazione

L'unione $\bigcup \mathcal{F}$ è una classe di [coppie ordinate](#), e pertanto è una [relazione](#).

Se $(x, y), (x, y') \in \bigcup \mathcal{F}$, allora $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in g$ per qualche $f, g \in \mathcal{F}$. Pertanto (per definizione di ordine superiormente diretta) esiste $h \in \mathcal{F}$ tale che $f \subseteq h$ e $g \subseteq h$, e dunque

$$(x, y), (x, y') \in h$$

ma h è una funzione, e pertanto $y = y'$.

519 Insieme diretto superiormente

NOTA: quando si parla di [classi](#), se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

Definizione 1. Sia X un [insieme](#) (o una [classe](#)) e sia R una [relazione binaria](#) su X , che sia un [preordine](#).

- X si dice diretto superiormente se

$$\forall x, y \in X \exists z \in X (x R z \wedge y R z).$$

- X si dice diretto inferiormente se

$$\forall x, y \in X \exists z \in X (z R x \wedge z R y).$$

520 Immagine e retroimmagine tramite una funzione

520.1 Generalizzazione in MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

520.1.1 Immagine punto a punto di due classi MK

Siano F e A due [classi](#). L'immagine punto a punto di A tramite F è la classe

$$F[A] = F''A = \{y \mid \exists x \in A ((x, y) \in F)\}$$

520.1.2 Preimmagine di una classe MK

Siano F, A due [classi](#) arbitrarie. La **preimmagine** di A tramite F è la classe

$$F^{-1}[A] := \{x \mid \exists y \in A (x, y) \in F\}$$

521 Insieme delle funzioni

Se A, B sono due insiemi, si indica con

$$A^B, {}^B A := \{f : A \rightarrow B \text{ funzioni}\}$$

521.1 Generalizzazione in MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Se invece A, B sono due classi qualsiasi,

$$A^B = {}^B A := \{F : A \rightarrow B \text{ classi-funzioni}\}$$

vedi: Classe-Funzione

521.1.1 Proprietà

Se A e B sono insiemi, allora A^B è un insieme.

522 Relazione regolare MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Sia X una classe, e sia $R \subseteq X \times X$ una relazione binaria (vedi Prodotto cartesiano di classi MK).

R è regolare (o left-narrow) se, per ogni $x \in X$, il seguente (vedi Coppia ordinata MK)

$$\{y \in X \mid y R x\}$$

è un insieme.

523 Relazione well-founded MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Sia X una classe, e sia R una relazione binaria.

R è ben fondata se ogni sottoclasse non vuota di X contiene un elemento R -minimale, ovvero

$$\forall Y \subseteq X \left(Y \neq \emptyset \rightarrow \exists y \in Y \forall z \in Y (z \neq y \rightarrow (z, y) \notin R) \right)$$

(vedi Coppia ordinata MK)

523.1 Inclusione è irriflessiva, well-founded e left-narrow

Se V è la classe totale, la relazione di inclusione

$$\{(x, y) \in V \mid x \in y\}$$

è irriflessiva, e ben fondata per l'Axiom of Foundation. Inoltre, siccome per ogni x

$$\{y \mid y \in x\} = x$$

e x è un insieme, allora è anche regolare.

Sia $\mathcal{L} = \{R\}$ un linguaggio del prim'ordine composto da un simbolo di relazione binaria, ed M una \mathcal{L} -struttura.

Oppure, sia M una classe e sia $R \subseteq M \times M$ una relazione binaria.

524 Ordine

$\langle M; R \rangle$ è un ordine (o ordine parziale) se

- riflessivo: $\forall x (x R x)$;
- transitivo: $\forall x \forall y \forall z (x R z \wedge z R y \rightarrow x R y)$;
- antisimmetrico: $\forall x \forall y (x R y \rightarrow \neg(y R x))$.

Dunque un ordine è una relazione binaria riflessiva, transitiva e antisimmetrica.

525 Ordine stretto

$\langle M; R \rangle$ è un ordine stretto se

- irriflessivo: $\forall x \neg(x R x)$;
- transitivo: $\forall x \forall y \forall z (x R z \wedge z R y \rightarrow x R y)$.

Dunque un ordine stretto è una relazione binaria irriflessiva, transitiva.

Da questi segue:

- antisimmetrico: $\forall x \forall y (x R y \rightarrow \neg(y R x))$.

526 Ordine lineare

Un ordine, o ordine stretto, $\langle M; R \rangle$, si dice lineare se:

- lineare: $\forall x \forall y (x R y \vee y R x \vee x = y)$.

527 Ordine denso

Un ordine, o ordine stretto, $\langle M; R \rangle$, si dice denso se:

- non banale: $\exists x \exists y (x R y)$
- denso: $\forall x \forall y [(x R y) \rightarrow \exists z (x R z R y)]$

528 Ordine senza punto finale

Un ordine, o ordine stretto, $\langle M; R \rangle$, si dice senza punto finale se:

$$\forall x [\exists y (x R y) \wedge \exists y (y R x)]$$

529 Teoria degli ordini stretti lineare

Si indica con T_{lo} la [teoria](#) degli ordini stretti, lineari. Questa è una [teoria soddisfacibile](#), in quanto $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \models T_{\text{lo}}$ (vedi [Soddisfazione di una formula](#))

530 Teoria degli ordini lineari densi senza punto finale

Si indica con T_{dlo} la [teoria](#) degli ordini stretti, densi, lineari e senza punti finali. Questa è una [teoria soddisfacibile](#), in quanto $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \models T_{\text{dlo}}$ (vedi [Soddisfazione di una formula](#))

531 Massimo e minimo

NOTA: quando si parla di [classi](#), se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di [insiemi](#), il discorso ha validità più generale.

Sia X un [insieme](#) (o una [classe](#)) e sia R una [relazione binaria](#) su X ; sia $Y \subseteq X$ un [sottoinsieme](#) (o [sottoclasse](#)) non vuoto, e sia $a \in P$.

531.1 Elemento Massimo

a si dice massimo di Y se

$$a \in Y \wedge \forall x \in Y (x \neq a \rightarrow x R a);$$

531.2 Elemento Massimale

a si dice elemento R -massimale di Y se

$$a \in Y \wedge \forall x \in Y (x \neq a \rightarrow a R x);$$

531.3 Elemento Minimo

a si dice minimo di Y se

$$a \in Y \wedge \forall x \in Y (x \neq a \rightarrow a R x);$$

531.4 Elemento Minimale

a si dice elemento R -minimale di Y se

$$a \in Y \quad \wedge \quad \forall x \in Y \ (x \neq a \rightarrow x \not R a);$$

531.5 Elemento Maggiorante

a si dice maggiorante di Y se

$$\forall x \in Y \ (x \neq a \rightarrow x R a);$$

531.6 Elemento Minorante

a si dice minorante di Y se

$$\forall x \in Y \ (x \neq a \rightarrow a R x);$$

531.7 Supremum

a è il supremum (o estremo superiore) di Y se è il minimo dei maggioranti di Y .

531.8 Infimum

a è l'infimum (o estremo inferiore) di Y se è il massimo dei minoranti.

532 Buon ordine MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

532.1 Definizione

Sia X una classe, e sia $R \subseteq X \times X$ una relazione binaria (vedi Prodotto cartesiano di classi MK). R si dice **buon ordine** su X se

1. R è un ordine lineare;
2. R è regolare;
3. R è ben fondata.

$\langle X, R \rangle$ si dice **classe ben ordinata**

532.2 Proprietà

Siano $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \trianglelefteq \rangle$ due classi ben ordinate.

1. Se $f : A \longrightarrow A$ è una classe-funzione crescente, allora $\forall a \in A \ (a \leq f(a))$.

Inoltre, se f è bijettiva, allora $f = \text{id}_A$, dove

$$\text{id}_A := \{(x, y) \in A \times A \mid x = y\}$$

(vedi Coppia ordinata MK e Prodotto cartesiano di classi MK)

2. Se $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \trianglelefteq \rangle$ sono **isomorfe**, allora l'isomorfismo è unico.
3. Se $a \in A$, allora $\langle A, \leq \rangle$ e $\langle \text{pred}(a, A; \leq), \leq \rangle$ non sono isomorfi (vedi [Insieme dei predecessori](#)).

533 Classe totale MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Si denota con V la **classe**

$$V := \{x \mid x = x\}$$

che, per l'assioma di Comprehension, comprende tutti e soli gli **insiemi**.

Siccome nessuna classe può appartenere a sé stessa, questa è una **classe propria**.

534 Funzione di scelta

1. Sia \mathcal{A} un insieme non vuoto tale che $\forall A \in \mathcal{A} (A \neq \emptyset)$.

Una **funzione di scelta** per \mathcal{A} è

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$$

tale che per ogni $A \in \mathcal{A}$, $f(A) \in A$.

2. Una **funzione di scelta** su un insieme $X \neq \emptyset$ è una funzione

$$F : \wp(X) \rightarrow X$$

tale che $f \upharpoonright \wp(X) \setminus \{\emptyset\}$ sia una funzione di scelta per $\wp(X)$.

534.1 Funzione di scelta su una classe propria

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

È possibile ampliare il concetto di cui sopra definendo una funzione di scelta per una **classe propria** X come una **classe funzione** F con **dominio**

$$\{y \mid \emptyset \neq y \subseteq X\}$$

(vedi [Insieme vuoto MK](#) e [Sottoclasse MK](#)) e tale che $F(y) \in y$ per ogni $y \in \text{dom } F$.

535 Isomorfismo tra ordini

NOTA: quando si parla di **classi**, se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

535.1 Definizione

Siano X, Y due insiemi (o classi) ordinati da R_1, R_2 e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione (o classe funzione). f è un isomorfismo se è biettiva e

$$\forall x, y \in X \quad x \ R_1 \ y \longleftrightarrow f(x) \ R_2 \ f(y)$$

536 Classe Transitiva

Contesto: Morse Kelly Set Theory

536.1 Definizione

Una classe A si dice transitiva se $\bigcup A \subseteq A^{[123]}$, ovvero se

$$\forall a \ \forall x \ ((a \in A \wedge x \in a) \rightarrow x \in A)$$

536.2 Osservazione

Se A è transitivo e $a \in A$, allora $a \subseteq A$ (vedi Sottoclasse MK).

536.3 Proposizione

Se x è un insieme transitivo, allora $\bigcup x$ e $S(x)$ sono transitivi. (vedi Classe Unione Generalizzata e Successore di un insieme MK)

536.3.1 Dimostrazione

Unione generalizzata Si ha che

$$\bigcup x := \{y \mid \exists z \in x \ (y \in z)\}$$

Se $y \in \bigcup x$ e $k \in y$ allora esiste $z \in x$ tale che $y \in z \in x$. Siccome x è transitivo allora $y \in x$ e quindi

$$k \in y \in x$$

Siccome x è transitivo allora $k \in x$, e dunque $\bigcup x$ è transitivo.

Successore Si ha che (vedi Unione di classi MK)

$$S(x) := x \cup \{x\}$$

Se $y \in S(x)$ allora $y \in x$ oppure $y \in \{x\}$.

1. caso 1 Se $y \in x$ e $k \in y$ allora $k \in x \subseteq S(x)$ poiché x è transitivo, e quindi $k \in S(x)$.
2. caso 2 se $y \in \{x\}$ allora $y = x$. Se $k \in y$ allora $k \in x \subseteq S(x)$ e dunque $k \in S(x)$.

537 Ordinali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

537.1 Definizione

Un **ordinale** è un insieme transitivo tale che tutti i suoi elementi siano transitivi.

Gli ordinali sono generalmente indicati con una lettera greca minuscola, e

Ord

è la classe degli ordinali

537.2 Proprietà

1. Se $\alpha \in \text{Ord}$ allora $\alpha \subseteq \text{Ord}$ (vedi Sottoclasse MK) e $S(\alpha) \in \text{Ord}$ (vedi Successore di un insieme MK).
2. Se x è un insieme di ordinali, allora (vedi Classe Unione Generalizzata)

$$\bigcup x \in \text{Ord}$$

3. La classe Ord è transitiva; infatti, se $\beta \in \alpha \in \text{Ord}$, allora $\alpha \subseteq \text{Ord}$ e quindi $\beta \in \text{Ord}$.
4. Ord è una classe propria.

537.3 Teorema

Siano $\alpha, \beta \in \text{Ord}$ due ordinali. Allora vale esattamente una delle seguenti:

$$\alpha \in \beta; \quad \alpha = \beta; \quad \beta \in \alpha$$

537.3.1 Dimostrazione

Per l'Axiom of foundation (vedi Nessuna classe appartiene a se stessa) necessariamente non possono essere vere due opzioni contemporaneamente.

Basta quindi dimostrare che almeno una delle opzioni è verificata, ovvero che

$$A = \{\alpha \in \text{Ord} \mid \exists \beta \in \text{Ord} \ (\alpha \notin \beta \wedge \alpha \neq \beta \wedge \beta \notin \alpha)\}$$

è vuoto.

Se per assurdo $A \neq \emptyset$, allora, per l'Axiom of Foundation, esiste $\bar{\alpha} \in A$ tale che

$$\bar{\alpha} \cap A = \emptyset$$

Allora

$$B := \{\beta \in \text{Ord} \mid \beta \notin \bar{\alpha} \wedge \beta \neq \bar{\alpha} \wedge \bar{\alpha} \notin \beta\}$$

è non vuota (poiché $\bar{\alpha} \in A$, e dunque esiste β che soddisfa le condizioni di cui sopra) e pertanto, per l'Axiom of Foundation, esiste $\bar{\beta} \in B$ tale che $\bar{\beta} \cap B = \emptyset$.

Se $\gamma \in \bar{\alpha}$, allora $\gamma \notin A$ poiché $\bar{\alpha} \cap A = \emptyset$ e quindi, in particolare

$$\bar{\beta} \in \gamma \vee \bar{\beta} = \gamma \vee \gamma \in \bar{\beta}$$

(poiché se $\gamma \notin A$ allora non esistono $\beta \in \text{Ord}$ tali che nessuna delle tre opzioni valga. Pertanto per $\bar{\beta}$ deve necessariamente valere una delle tre opzioni)

Le prime due opzioni, siccome $\bar{\alpha} \in A \subseteq \text{Ord}$ e quindi $\bar{\alpha}$ è **transitivo**, implicano che $\bar{\beta} \in \bar{\alpha}$. Questo è assurdo, poiché $\bar{\beta} \in B$, e dunque $\bar{\beta} \notin \bar{\alpha}$.

Pertanto $\gamma \in \bar{\beta}$. Siccome $\gamma \in \bar{\alpha}$ è arbitrario, otteniamo $\bar{\alpha} \subseteq \bar{\beta}$.

Sia invece $\gamma \in \bar{\beta}$. Allora $\gamma \notin B$, poiché $\bar{\beta} \cap B = \emptyset$ e in particolare vale una delle seguenti:

$$\bar{\alpha} \in \gamma \vee \bar{\alpha} = \gamma \vee \gamma \in \bar{\alpha}$$

Le prime due opzioni, siccome $\bar{\beta} \in \text{Ord}$ è transitivo, implicano che $\bar{\alpha} \in \bar{\beta}$. Questo è assurdo, poiché $\bar{\beta} \in B$ e dunque $\bar{\alpha} \notin \bar{\beta}$. Pertanto $\gamma \in \bar{\alpha}$. Siccome $\gamma \in \bar{\beta}$ è arbitrario, otteniamo $\bar{\beta} = \bar{\alpha}$.

Dunque $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. Assurdo poiché $\bar{\alpha} \in A$. Dunque $A = \emptyset$.

537.4 Corollario

Dunque \in è un **buon ordine stretto** su Ord .

537.5 Notazione

Se $\alpha, \beta \in \text{Ord}$ scriveremo:

- $\alpha < \beta$ significa $\alpha \in \beta$;
- $\alpha \leq \beta$ significa $\alpha \in \beta$ oppure $\alpha = \beta$.

Se $A \subseteq \text{Ord}$, diciamo che un elemento è il minimo di A se è l'**elemento \in -minimale di A** .

Scriveremo $A \leq \text{Ord}$ per dire che

$$A \in \text{Ord} \vee A = \text{Ord}$$

537.6 Osservazione

Ogni ordinale α è dotato di un **buon ordine**, in quanto $\alpha \subseteq \text{Ord}$. Se $\beta \in \alpha$, allora $\beta = \text{pred}(\beta, \alpha; \leq)$ (vedi **Insieme dei predecessori**).

537.7 Proposizione

Siano α, β due ordinali.

1. Se $f : \alpha \longrightarrow \beta$ è una **funzione crescente**, allora

$$\gamma \leq f(\gamma)$$

per ogni $\gamma \in \alpha$. Inoltre $\alpha \leq \beta$.

2. Se $f : \alpha \rightarrow \beta$ è un [isomorfismo](#), allora $\alpha = \beta$ e f è l'identità.

537.8 Proprietà

Siano $\alpha, \beta \in \text{Ord}$ ordinali, e sia $<$ l'[ordine](#) dato dall'inclusione.

1. $\alpha < \beta$ se e solo se $\alpha \subset \beta$ (vedi [Sottoclass MK](#)).
2. $\alpha \leq \beta$ se e solo se $\alpha \subseteq \beta$.
3. $\alpha < \beta$ se e solo se $S(\alpha) \leq \beta$ (vedi [Successore di un insieme MK](#)).
4. $\alpha < \beta$ se e solo se $S(\alpha) < S(\beta)$.
5. se $x \subseteq \alpha$ allora $\bigcup x = \alpha \vee \bigcup x < \alpha$. (vedi [Classe Unione Generalizzata](#))
6. $\bigcup (S(\alpha)) = \alpha$.
7. $\alpha = S(\bigcup \alpha)$ oppure $\alpha = \bigcup \alpha$.
8. Sono fatti equivalenti
 - (a) $\bigcup \alpha = \alpha$
 - (b) $\alpha = 0$ oppure α è [ordinale limite](#) (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#) e [Ordinale omega](#))
 - (c) $\langle \alpha, < \rangle$ non ha [massimo](#).
9. I tre punti precedenti indicano che: se α è un ordinale successore, allora

$$\bigcup S(\alpha) = \alpha = S(\bigcup \alpha)$$

10. Inoltre, si ha che

$$\alpha = \bigcup \{S(\beta) \mid \beta < \alpha\}$$

537.9 Caratterizzazione degli ordinali limite

Da questo lemma segue banalmente che λ è un [ordinale limite](#) se e solo se

$$\lambda = \bigcup \lambda > 0$$

537.10 Nessuna catena discendente di ordinali

Non esiste nessuna [catena discendente](#) di ordinali, ovvero

$$\neg \exists f \left(f : \mathbb{N} \rightarrow \text{Ord} \wedge \forall n \in \mathbb{N} (f(S(n)) < f(n)) \right)$$

(vedi [Classe-Funzione](#), [Insieme dei numeri naturali MK](#), [Successore di un insieme MK](#))

537.11 Intersezione di una classe di ordinali

Se $\emptyset \neq A \subseteq \text{Ord}$ (vedi Ordinali) è una [sottoclasse](#) non [vuota](#), allora

$$\min A = \bigcap A$$

(vedi [Elemento Minimo](#) e Relazione d'ordine sugli ordinali e [Classe Intersezione Generalizzata](#))

537.12 Unione di una classe di ordinali

Se $A \subseteq \text{Ord}$ (vedi Ordinali) è un [insieme](#), allora $\bigcup A = \sup A$ (vedi [Classe Unione Generalizzata](#) e [Infimum e supremum](#) e Relazione d'ordine sugli ordinali)

538 Funzione Monotona

NOTA: quando si parla di [classi](#), se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

538.1 Funzione Crescente

Siano X, Y due [insiemi](#) (o [classi](#)) [ordinati](#) da R_1, R_2 e sia $f : X \rightarrow Y$ una [funzione](#) (o [classe funzione](#)).

f si dice crescente se

$$\forall x, y \in X \ x \ R_1 \ y \rightarrow f(x) \ R_2 \ f(y)$$

538.2 Funzione Decrescente

Siano X, Y due [insiemi](#) (o [classi](#)) [ordinati](#) da R_1, R_2 e sia $f : X \rightarrow Y$ una [funzione](#) (o [classe funzione](#))

f si dice decrescente se

$$\forall x, y \in X \ x \ R_1 \ y \rightarrow f(y) \ R_2 \ f(x)$$

539 Insiemi ben ordinati sono isomorfi ad un ordinale unico

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

539.1 Teorema

Ogni [insieme ben ordinato](#) è [isomorfo](#) ad un unico [ordinale](#), ed ogni [classe propria ben ordinata](#) è isomorfa a Ord (vedi [Ordinali](#)). Questo isomorfismo è unico.

539.1.1 Dimostrazione

Si dimostra solo per gli insiemi.

Sia $\langle X, \leq \rangle$ un insieme ben ordinato, e sia

$$A := \left\{ \alpha \in \text{Ord} \mid \exists x \in X \ (\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \text{pred}(x), \leq \rangle) \right\}$$

- $A \leq \text{Ord}$.

Supponiamo che

$$f_\alpha : \langle \alpha, \in \rangle \longrightarrow \langle \text{pred}(x), \trianglelefteq \rangle$$

sia un **isomorfismo** che testimonia $\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \text{pred}(x), \trianglelefteq \rangle$. Allora si ha l'isomorfismo, per ogni $\beta \in \alpha$

$$f_\alpha \upharpoonright \beta : \langle \beta, \in \rangle \longrightarrow \langle \text{pred}(f_\alpha(\beta)), \trianglelefteq \rangle$$

e peraltro $\beta \in A$. Dunque A è una classe transitiva di ordinali, e peranto $A \leq \text{Ord}$.

- Sia $F : A \rightarrow X$ la funzione che assegna a ciascun $\alpha \in A$ l'unico $x \in X$ tale che

$$\langle \alpha, \in \rangle \cong \langle \text{pred}(x), \trianglelefteq \rangle.$$

Questa è ben definita, poiché:

$$\text{pred}(x) \cong \alpha \cong \text{pred}(y)$$

allora $x = y$, poiché X è ben ordinato e quindi $X \not\cong \text{pred}(x)$.

- F preserva l'ordine (ovvero F è un isomorfismo tra A e $\text{ran } F$).

Se $\beta \in \alpha$, siano $x = F(\alpha)$ e $y = F(\beta)$. Allora $\alpha \cong \text{pred}(x)$, con isomorfismo f_α . Per il punto precedente, siccome $\beta \in \alpha$ allora $f_\alpha \upharpoonright \beta$ testimonia $\beta \cong \text{pred}(f_\alpha(\beta))$. Siccome $\beta \cong \text{pred}(y)$, allora $y = f_\alpha(\beta) \in \text{pred}(x)$, ovvero $y \trianglelefteq x$.

- $\text{ran } F$ è un segmento iniziale di X ;

se $x \in \text{ran } F$ allora $\text{prec}(x) \cong \alpha$ e pertanto ogni $y \trianglelefteq x$ corrisponde a $\beta \in \alpha$, $\beta \cong \text{pred}(y)$ per il punto precedente. Quindi $y = F(\beta)$.

- $\text{ran } F$ non è l'insieme dei predecessori di nessun elemento di X

Se per assurdo $A \in \text{Ord}$ e $\langle A, \in \rangle \cong \langle \text{pred}(\bar{x}), \trianglelefteq \rangle$, allora $A \in A$. Assurdo

- Dunque $\text{ran } F = X$.

■

539.2 Order type

Se $\langle X, \trianglelefteq \rangle$ è una **classe ben ordinata**, allora il suo **order type** l'unico $\Omega \leq \text{Ord}$ isomorfo a $\langle X, \trianglelefteq \rangle$, ed è denotato con

$$\text{ot} \langle X, \trianglelefteq \rangle = \text{ot}(X)$$

L'unico **isomorfismo**

$$\langle \Omega, \leq \rangle \longrightarrow \langle X, \trianglelefteq \rangle$$

è detto **funzione enumeratrice**, e si scrive

$$X = \langle x_i \mid i < \Omega \rangle$$

Si ha che $\Omega \asymp X$.

In particolare $\text{ot}(A) = \text{Ord}$ per ogni **classe propria** $A \subseteq \text{Ord}$.

539.2.1 Order type di una classe qualunque

539.3 Isomorfismi tra classi ben ordinate

Se $\langle A, \leq \rangle, \langle B, \preceq \rangle$ sono due classi ben ordinate, allora esattamente una delle seguenti è vera:

1. $\exists a \in A (\langle \text{pred}(a), \leq \rangle \cong \langle B, \preceq \rangle)$ (vedi Insieme dei predecessori e Isomorfismo tra ordini);
2. $\exists b \in B (\langle A, \leq \rangle \cong \langle \text{pred}(b), \preceq \rangle);$
3. $\langle A, \leq \rangle \cong \langle B, \preceq \rangle.$

In particolare, due classi proprie ben ordinate sono isomorfe.

540 Intersezione di una sottoclasse degli ordinali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

541 Ordinale Omega

Contesto: Morse Kelly Set Theory

541.1 Teorema

L'insieme \mathbb{N} è un ordinale (poiché insieme transitivo i cui elementi sono ordinali, e quindi transitivi). Si denota

$$\omega = \mathbb{N}$$

541.2 Numeri naturali sono ordinali

1. Ogni numero naturale è un ordinale.
2. Se $n \in \mathbb{N}$ e $x \in n$ allora $x \in \mathbb{N}$ (ovvero \mathbb{N} è un insieme transitivo)

541.2.1 Dimostrazione

Punto a. Supponiamo per assurdo che (vedi Sottrazione di classi MK)

$$X := \mathbb{N} \setminus \text{Ord} \neq \emptyset$$

Allora, per l'Axiom of Foundation, esiste $n \in X$ tale che $n \cap X = \emptyset$.

Siccome $0 = \emptyset$ è un ordinale, segue che $n = S(m) = m \cup \{m\}$ per qualche $m \in \mathbb{N}$ (vedi Successore di un insieme MK), e pertanto $m \in n$, dunque $m \notin X$ (altrimenti $n \cap X \neq \emptyset$).

Dunque $m \in \text{Ord}$ e $S(m) \in \text{Ord} \cap \mathbb{N}$ (vedi Ordinali). Assurdo poiché $n \in X$.

Punto b.

IdL:matematica_lm Supponiamo per assurdo che

$$X := \{n \in \mathbb{N} \mid \exists x \in n \ (x \notin \mathbb{N})\} \neq \emptyset$$

Sia $y \in X$ tale che $y \cap X = \emptyset$ per l'Axiom of Foundation. Sia dunque $\bar{x} \in y$ fissato tale che $\bar{x} \notin \mathbb{N}$ (tale \bar{x} esiste poiché $y \in X$).

Sicuramente $y \neq 0$, e dunque esiste $z \in \mathbb{N}$ tale che $y = S(z) = z \cup \{z\}$ (vedi Successore di un insieme MK). Dunque $\bar{x} \in z$ oppure $\bar{x} = z$.

Se $\bar{x} = z$ allora $\bar{x} \in \mathbb{N}$, assurdo.

Se $\bar{x} \in z$ allora $z \in X$ e $z \in y$, contraddicendo l'ipotesi secondo cui $y \cap X = \emptyset$. Assurdo.

541.3 Ordinale omega è il più piccolo ordinale limite

L'ordinale ω è il più piccolo ordinale limite.

541.3.1 Dimostrazione

Passo 1. ω è effettivamente un ordinale (vedi Ordinale omega)

Passo 2. Non ci sono ordinali limite più piccoli di ω . Infatti, se $\alpha < \omega$, allora $\alpha \in \omega$ e quindi $\alpha = 0$ oppure $\alpha = S(\beta)$ per qualche $\beta \in \omega$. (vedi Successore di un insieme MK)

Passo 3. ω non è un successore.

Supponiamo per assurdo che $\omega = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$: allora $\alpha \in \omega$, e quindi $S(\alpha) \in \omega$, $\omega \in \omega$. Impossibile.

Contesto: Morse Kelly Set Theory

542 Ordinale Successore

Un ordinale α si dice **successore** se

$$\alpha = \beta$$

per qualche β . (vedi Successore di un insieme MK).

542.1 Osservazione

Chiaramente $\alpha < S(\alpha)$ (vedi Relazione d'ordine sugli ordinali), e non esiste alcun ordinale β tale che

$$\alpha < \beta < S(\alpha)$$

543 Ordinale Limite

Un ordinale si dice **limite** se non è un ordinale successore e non è **zero**.

544 Proprietà di base dell'ordine sugli ordinali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

544.1 Proposizione

Siano $\alpha, \beta \in \text{Ord ordinali}$, e sia $<$ l'ordine dato dall'inclusione.

Siano $\alpha, \beta \in \text{Ord ordinali}$, e sia $<$ l'ordine dato dall'inclusione.

1. $\alpha < \beta$ se e solo se $\alpha \subset \beta$ (vedi Sottoclasse MK).
2. $\alpha \leq \beta$ se e solo se $\alpha \subseteq \beta$.
3. $\alpha < \beta$ se e solo se $S(\alpha) \leq \beta$ (vedi Successore di un insieme MK).
4. $\alpha < \beta$ se e solo se $S(\alpha) < S(\beta)$.
5. se $x \subseteq \alpha$ allora $\bigcup x = \alpha \vee \bigcup x < \alpha$. (vedi Classe Unione Generalizzata)
6. $\bigcup (S(\alpha)) = \alpha$.
7. $\alpha = S\left(\bigcup \alpha\right)$ oppure $\alpha = \bigcup \alpha$.
8. Sono fatti equivalenti
 - (a) $\bigcup \alpha = \alpha$
 - (b) $\alpha = 0$ oppure α è ordinale limite (vedi Insieme dei numeri naturali MK e Ordinale omega)
 - (c) $\langle \alpha, < \rangle$ non ha massimo.

544.1.1 TODO Dimostrazione

IdL:matematica_lm

Punto a. Se $\alpha < \beta$ allora $\alpha \in \beta$ e quindi $\alpha \subseteq \beta$ perchè insiemi transitivi. Inoltre $\alpha \neq \beta$.

Viceversa, se $\alpha \subset \beta$, allora $\alpha \neq \beta$ e $\beta \notin \alpha$ (poiché altrimenti $\beta \in \beta$). Dunque $\alpha \in \beta$.

Punto b. Se $\alpha \leq \beta$ allora $\alpha \in \beta$ oppure $\alpha = \beta$ e quindi $\alpha \subseteq \beta$ perchè insiemi transitivi.

Viceversa, se $\alpha \subseteq \beta$, allora $\beta \notin \alpha$ (poiché altrimenti $\beta \in \beta$). Dunque $\alpha \in \beta$ oppure $\alpha = \beta$, e quindi $\alpha \leq \beta$.

Punto c. Sia $\alpha < \beta$. Allora $\beta \notin S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ (se così fosse, allora $\beta \in \alpha$ oppure $\beta = \alpha$. Impossibile poiché $\alpha \in \beta$). Segue quindi che $S(\alpha) \in \beta$ oppure $S(\alpha) = \beta$, da cui la tesi.

Se viceversa $S(\alpha) \leq \beta$, allora $\alpha \in S(\alpha) \in \beta$ e siccome β è un ordinale allora è transitivo, e quindi $\alpha \in \beta$. Inoltre $\alpha \neq \beta$ poiché altrimenti $\beta \in \beta$, assurdo.

Punto d. Sia $\alpha < \beta$. Allora $\beta \notin S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$ (se così fosse, allora $\beta \in \alpha$ oppure $\beta = \alpha$. Impossibile poiché $\alpha \in \beta$). Segue quindi che $S(\alpha) \in \beta$ oppure $S(\alpha) = \beta$.

- Se $S(\alpha) \in \beta$, allora $S(\alpha) \in \beta \in S(\beta)$, e siccome $S(\beta)$ è ordinale e quindi transitivo, si ha $S(\alpha) \in S(\beta)$.
- Se $S(\alpha) = \beta \in S(\beta)$ si ha la tesi.

Viceversa, se $S(\alpha) < S(\beta) = \beta \cup \{\beta\}$ si ha che $S(\alpha) \in \beta$ oppure $S(\alpha) = \beta$, che è $S(\alpha) \leq \beta$. Per il punto c. $\alpha < \beta$.

Punto e. Si ha che $\bigcup x$ è un ordinale poiché $x \subseteq \text{Ord}$ (vedi [Ordinali](#) e [Classe Unione Generalizzata](#)). Allora vale una tra le seguenti:

$$\bigcup x < \alpha; \quad \bigcup x = \alpha; \quad \alpha < \bigcup x$$

Ma se $\alpha \in \bigcup x$ allora esiste qualche $\beta \in x$ tale che

$$\alpha \in \beta \in x \subseteq \alpha$$

Assurdo.

Punto f. $\beta \in \bigcup(S(\alpha))$ se e solo se $\beta \in \eta \in \alpha$ per qualche η oppure $\beta \in \alpha$.

Se $\beta \in \bigcup(S(\alpha))$ allora $\beta \in \eta \in \alpha$ per qualche η oppure $\beta \in \alpha$. Siccome α ordinale e quindi transitivo, $\beta \in \eta \in \alpha$ implica $\beta \in \alpha$.

Viceversa, se $\beta \in \alpha$, allora $\beta \in \bigcup(S(\alpha))$.

TODO Punto g.

IdL:matematica_lm Si consideri $\bigcup \alpha$ un ordinale. Ci sono tre casi:

$$\bigcup \alpha = \alpha; \quad \alpha < \bigcup \alpha; \quad \bigcup \alpha < \alpha$$

Il secondo porta ad una contraddizione. Siccome $\alpha \subseteq S(\alpha)$, allora^[124] $\bigcup \alpha \subseteq \bigcup(S(\alpha))$. Per il punto f. $\bigcup(S(\alpha)) = \alpha$ e quindi

$$\bigcup \alpha \subseteq \alpha \in \bigcup \alpha$$

allora $\alpha \in \alpha$, [assurdo](#).

Necessariamente, quindi,

$$\bigcup \alpha = \alpha \vee \bigcup \alpha < \alpha$$

Se $\bigcup \alpha < \alpha$, allora, per il punto c.,

$$S(\bigcup \alpha) \leq \alpha$$

Supponiamo ora che

$$S(\bigcup \alpha) \in \alpha$$

PERCHÉ????????? Questo genera un assurdo, e pertanto $S(\bigcup \alpha) = \alpha$.

Si è ottenuta la tesi:

$$\bigcup \alpha = \alpha \vee S(\bigcup \alpha) = \alpha$$

544.2 Teorema

Da questo lemma segue banalmente che λ è un **ordinale limite** se e solo se

$$\lambda = \bigcup \lambda > 0$$

545 Topologia sugli ordinali

NOTA: quando si parla di **classi**, se ne parla nell'ambito della **Morse Kelly Set Theory**; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

545.1 Ordinale

Ogni **ordinale** può essere visto come uno **spazio topologico**, con la **topologia** indotta dall'ordine **totale**.

545.2 Classe degli ordinali

Sia $\Omega \leq \text{Ord}$. Una classe $A \subseteq \Omega$ è detta aperta in Ω se

- per ogni $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$ esistono $\beta, \gamma \in \text{Ord}$ tali che

$$\alpha \in (\beta; \gamma) \subseteq A$$

dove $(\beta; \gamma) := \{\eta \in \text{Ord} \mid \beta < \eta < \gamma\}$;

- se $\alpha = 0$ esiste $\gamma \in \text{Ord}$ tale che

$$[0; \gamma) \subseteq A$$

dove $[0; \gamma) := \{\eta \in \text{Ord} \mid 0 \geq \eta < \gamma\}$.

Una classe $C \subseteq \Omega$ è detta chiusa in Ω se $\Omega \setminus C$ è aperto o, equivalentemente, se

$$\forall \lambda \left(0 < \bigcup (C \cap \lambda) = \lambda \rightarrow \lambda \in C \right)$$

Dunque 0 e tutti **ordinali successori** sono **punti isolati** in Ω .

545.3 Funzioni continue tra classi di ordinali

Sia $f : \Omega \rightarrow \text{Ord}$ una **classe funzione**, con $\Omega \leq \text{Ord}$.

- Poiché tutti gli ordinali successori sono punti isolati, la continuità lì non è un problema.
- Si supponga invece che $\gamma < \Omega$ sia limite.
 - Se $f(\gamma)$ è un ordinale successore, allora sarà definitivamente costante prima γ .

- Se $f(\gamma)$ è limite, allora per ogni $\delta < f(\gamma)$ esiste $\beta < \gamma$ tale che $[\beta; \gamma]$ è mappato da f in $[\delta; f(\gamma)]$.

Se $f : \Omega \rightarrow \text{Ord}$ è monotona, allora f è continua se e solo se per ogni $\lambda < \Omega$ limite:

$$f(\lambda) = \sup_{\beta < \lambda} f(\beta) \quad \text{e} \quad \forall X \subseteq \lambda \ (\sup X = \lambda \rightarrow f(\lambda) = \sup_{\nu \in X} f(\nu))$$

Inoltre, se f è crescente allora $f(\lambda)$ è un ordinale limite.

546 Cardinali

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

546.1 Definizione

Un **cardinale** è un [ordinale](#) κ non in [biiezione](#) con nessun $\alpha < \kappa$.

Si indica con Card la [classe](#) dei cardinali.

546.2 Numeri naturali sono cardinali

Ogni [numero naturale](#) è un cardinale (vedi [Numeri naturali sono ordinali](#)), e ω è il primo cardinale infinito (vedi [Ordinale omega](#) e [Ordinale omega è il più piccolo ordinale limite](#))

546.3 Proprietà dei cardinali

Se κ, λ sono cardinali, allora

1. $\kappa = \lambda$ se e solo se $\kappa \asymp \lambda$ (vedi [Classi equipotenti MK](#));
2. $\kappa \leq \lambda$ (vedi [Relazione d'ordine sugli ordinali](#)) se e solo se $\kappa \preceq \lambda$ (vedi [Classe si inietta MK](#)).

546.4 Estremo superiore di un insieme di cardinali è un cardinale

Sia X un [insieme](#) di cardinali. Allora $\sup(X)$ è un cardinale (vedi [Relazione d'ordine sugli ordinali](#) e [Infimum e supremum](#))

546.4.1 Dimostrazione

Se X è un insieme di cardinali, allora X è un insieme di [ordinali](#), e pertanto

$$\sup(X) = \bigcup X =: \lambda$$

(vedi [Classe Unione Generalizzata](#)) ed è un ordinale.

Se per assurdo λ non fosse un cardinale, [allora](#) $|\lambda| < \lambda$ e [pertanto](#) per qualche $\kappa \subseteq \lambda$ (ovvero $\kappa \in X$)

$$|\lambda| < \kappa \leq \lambda$$

e [quindi](#) $|\kappa| = |\lambda|$. Quindi $|\kappa| < \kappa$ e [pertanto](#) κ non è un cardinale. Assurdo (per ipotesi $\kappa \in X$ e X insieme di cardinali, dunque κ è un cardinale).

546.5 Corollario

La classe Card è una classe propria.

546.5.1 Dimostrazione

Supponiamo che Card \subseteq Ord sia un insieme. Allora sup Card \in Card (per il Teorema). Se consideriamo il numero di Hartogs di sup Card si ha che

$$\text{sup Card} < \text{Hrtg}(\text{sup Card}) \in \text{Card}$$

(vedi Numero di Hartogs di un ordinale) Assurdo.

547 Classe ben ordinabile MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

547.1 Definizione

Una classe X si dice **ben ordinabile** se esiste un buon ordine su X o, equivalentemente, se X è in biiezione con qualche $\Omega \leq \text{Ord}$ (vedi Ordinali)

547.1.1 Osservazione

Se X è ben ordinabile e Y è in biiezione con X (o semplicemente se è immagine suriettiva di X), allora Y è ben ordinabile.

Viceversa, se Y è ben ordinabile e $X \preceq Y$ (vedi Classe si inietta MK), allora X è ben ordinabile.

548 Non esistono catene discendenti infinite di naturali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

548.1 Teorema

Non esiste nessuna classe-funzione F tale che $\text{dom } F = \mathbb{N}$ (vedi Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione) e

$$\forall n \in \mathbb{N} : \quad F(S(n)) \in F(n)$$

(vedi Insieme dei numeri naturali MK e Successore di un insieme MK)

548.1.1 Dimostrazione

Supponiamo tale F esista. Sicuramente $\text{ran } F \neq \emptyset$, e pertanto, per l'Axiom of Foundation esiste $y \in \text{ran } F$ tale che

$$y \cap \text{ran } F = \emptyset$$

Sia ora $n \in \mathbb{N}$ tale che $y = F(n)$. Allora $F(S(n)) \in F(n)$ per ipotesi, e $F(S(n)) \in \text{ran } F$ per definizione, e dunque

$$F(S(n)) \in F(n) \cap \text{ran } F = y \cap \text{ran } F = \emptyset$$

549 Classe finita e infinita MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

549.1 Definizione

Una classe si dice **finita** se esiste una funzione biiettiva dalla classe ad un numero naturale, e si dice **infinita** altrimenti.

550 Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

550.1 Teorema

Se A, B sono due insiemi (o due classi) e

$$f : A \longrightarrow B, \quad g : B \longrightarrow A$$

sono due funzioni iniettive (o classi funzioni iniettive), allora esiste

$$h : A \longrightarrow B$$

funzione biiettiva (o classe funzione biiettiva).

551 Numeri di Hartogs

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

551.1 Costruzione del numero di Hartogs

Sia X un insieme qualsiasi, e sia^[125]

$$A := \{(\alpha, f) \mid \alpha \in \text{Ord} \wedge f : \alpha \rightarrow X \text{ iniettiva}\}$$

- Si consideri la funzione

$$\begin{aligned} \Phi : A &\longrightarrow \wp(X \times X) \\ (\alpha, f) &\longmapsto W_{(\alpha, f)} \end{aligned}$$

dove $W_{(\alpha,f)}$ è il buon ordine indotto su $\text{ran}(f) \subseteq X$ da f :

$$x W_{(\alpha,f)} y \iff f^{-1}(x) \leq f^{-1}(y)$$

Dunque f è un isomorfismo tra ordini: $\langle \alpha, \leq \rangle \cong \langle \text{ran}(f), W_{(\alpha,f)} \rangle$.

- Φ è iniettiva: infatti, se $W_{(\alpha,f)} = W_{(\beta,g)}$ allora $\text{ran}(f) = \text{ran}(g)$ e quindi

$$f^{-1} \circ g : \langle \beta, \leq \rangle \rightarrow \langle \alpha, \leq \rangle$$

è un isomorfismo. Dunque $\alpha = \beta$ e $f = g$.

Dunque si definisce

$$\text{Hrtg}(X) := \{\alpha \in \text{Ord} \mid \exists f (\alpha, f) \in A\}$$

- Innanzitutto, $\text{Hrtg}(X)$ è un ordinale: se $\alpha \in \beta \in \text{Hrtg}(X)$ allora $(\beta, g) \in A$ e si ha

$$\alpha \subseteq \beta \xrightarrow{g} X$$

e dunque $g \upharpoonright \alpha$ è testimone di $(\alpha, g \upharpoonright \alpha) \in A$. Quindi $\text{Hrtg}(X)$ è transitivo.

- Inoltre, $\text{Hrtg}(X)$ è il più piccolo ordinale che non si inietta in X :

- Ovviamente $\text{Hrtg}(X)$ non si inietta in X , poiché altrimenti $\text{Hrtg}(X) \in \text{Hrtg}(X)$. Assurdo.
- Inoltre, se $\lambda \in \text{Ord}$ non si inietta in X , allora per definizione non esiste alcuna $f : \lambda \rightarrow X$ iniettiva, e pertanto $\lambda \notin \text{Hrtg}(X)$. Dunque

$$\text{Hrtg}(X) \leq \lambda.$$

- $\text{Hrtg}(X)$ è un cardinale. Se per assurdo $|\text{Hrtg}(X)| < \text{Hrtg}(X)$ allora $|\text{Hrtg}(X)| \in \text{Hrtg}(X)$ e dunque (per definizione)

$$\text{Hrtg}(X) \asymp |\text{Hrtg}(X)| \not\sim X$$

e pertanto $\text{Hrtg}(X) \not\sim X$, ovvero $\text{Hrtg}(X) \in \text{Hrtg}(X)$. Assurdo.

La suriezione $\wp(X \times X) \rightarrow \text{Hrtg}(X)$ è data da $\pi_{\text{Ord}} \circ \Phi^{-1}$.

551.2 Teorema

Per ogni insieme X , $\text{Hrtg}(X)$ è il più piccolo ordinale che non si inietta su X , ed è un cardinale.

Inoltre $\wp(X \times X)$ si surietta su $\text{Hrtg}(X)$ (vedi Insieme delle parti MK)

552 Restrizione di una funzione

552.1 Generalizzazione in MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

552.1.1 Restrizione di una classe MK

Siano F, A due classi qualsiasi. La restrizione di F ad A : $F \upharpoonright A$ è

$$F \upharpoonright A := \{(x, y) \in F \mid x \in A\}.$$

(vedi [Coppia ordinata](#))

Se R è una relazione su una classe X , e $Y \subseteq X$, si indica (con un abuso di notazione)

$$R \upharpoonright Y := R \cap (Y \times Y)$$

553 Numero di Hartogs di un ordinale

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

553.1 Definizione

Sia α un ordinale. Si denota il numero di Hartogs di α come

$$\alpha^+ := \text{Hrtg}(\alpha)$$

Dunque α^+ è il più piccolo cardinale strettamente maggiore di α , e se $\alpha \leq \omega$ (vedi [Ordinale omega](#)) allora

$$\alpha^+ = \bigcup \{\beta \mid |\beta| = |\alpha|\} = \{\beta \mid |\beta| \leq |\alpha|\}$$

(vedi [Classe Unione Generalizzata](#) e [Cardinalità](#))

553.1.1 Ordinale omega1

Si denota ω^+ con ω_1 .

553.1.2 Osservazione

Siccome $\omega \times \omega \asymp \omega$ (vedi [Prodotto cartesiano di classi MK](#) e [Classi equipotenti MK](#)), si ha che esiste una funzione suriettiva

$$\wp(\omega) \rightarrow \omega^+$$

Notiamo inoltre che $\mathbb{R} \asymp \wp(\omega)$

554 Buon ordine di Godel per OrdxOrd

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Si consideri la classe degli ordinali Ord, su cui è definito l'ordine $<$ tra ordinali, e il prodotto cartesiano $\text{Ord} \times \text{Ord}$, su cui è definito l'ordine lessicografico \leq_{lex}

Si definisce il **buon ordine** di Godel \langle_G su $\text{Ord} \times \text{Ord}$: $(\alpha, \beta) <_G (\gamma, \delta)$ se e solo se

$$\max(\alpha, \beta) < \max(\delta, \gamma) \vee (\max(\alpha, \beta) = \max(\gamma, \delta) \wedge (\alpha, \beta) <_{\text{lex}} (\gamma, \delta))$$

(vedi [Massimo e minimo](#))

Si ha che:

- Se $\alpha < \beta$ allora $\alpha \times \alpha$ è un [segmento iniziale](#) di $\beta \times \beta$.
- La classe funzione $\nu \mapsto \text{ot}(\nu \times \nu, <_G)$ è [crescente](#) e [continua](#).

Inoltre, se $F : \text{Ord} \times \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$ è l'isomorfismo tra $\langle \text{Ord} \times \text{Ord}, <_G \rangle$ e $\langle \text{Ord}, \in \rangle$ ([che esiste](#)) allora per ogni $\alpha, \beta \in \text{Ord}$

- $F(\alpha, \beta) \geq \max(\alpha, \beta)$;
- se $F(\alpha, \beta) = \max(\alpha, \beta)$ allora $\alpha = 0$ e ($\beta \in \{0, 1\} \vee \beta$ è limite).

555 Order Type del prodotto cartesiano di un cardinale è il cardinale stesso

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

555.1 Teorema

Sia κ una [cardinale infinito](#), e sia $\kappa \times \kappa$ il [prodotto cartesiano](#).

1. Allora l'[order type](#) del prodotto cartesiano con il [buon ordine](#) di Godel è

$$\text{ot}(\kappa \times \kappa, <_G) = \kappa$$

2. $|\kappa \times \kappa| = \kappa$ (vedi [Cardinalità](#)).

555.1.1 Dimostrazione

La [funzione](#)

$$\begin{aligned} \langle \kappa, < \rangle &\longrightarrow \langle \kappa \times \kappa, <_G \rangle \cong \text{ot}(\kappa \times \kappa, <_G) \\ \alpha &\longmapsto (\alpha, 0) \end{aligned}$$

è una funzione tra ordinali crescente, e [dunque](#) $\kappa \leq \text{ot}(\kappa \times \kappa, <_G)$.

Si dimostra per [induzione](#) su $\kappa \geq \omega$ che $\text{ot}(\kappa \times \kappa, <_G) \leq \kappa$.

- Necessariamente $\text{ot}(\omega \times \omega, <_G) \leq \omega$.
- Si assuma che per ogni ordinale $\omega \leq \alpha < \kappa$: $\text{ot}(\alpha \times \alpha, <_G) \leq \alpha$.

Sia per assurdo $\delta := \text{ot}(\kappa \times \kappa, <_G)$, $\kappa < \delta$, e sia

$$f : \langle \kappa \times \kappa, <_G \rangle \rightarrow \delta = \text{ot}(\kappa \times \kappa, <_G)$$

l'isomorfismo. Allora esiste un'unica coppia $(\lambda_1, \lambda_2) \in \kappa \times \kappa$ tale che $f(\lambda_1, \lambda_2) = \kappa$.

$\lambda_1, \lambda_2 < \kappa$, dunque $\max(\lambda_1, \lambda_2) =: \lambda < \kappa$.

Allora $\kappa \subseteq f[\lambda \times \lambda]$, ma per ipotesi induttiva $|\lambda \times \lambda| \leq \lambda < \kappa$, dunque, siccome f è un isomorfismo

$$\kappa \precsim f[\lambda \times \lambda] \asymp |f[\lambda \times \lambda]| < \kappa$$

Assurdo. ■

<https://math.stackexchange.com/a/2153155/1320017>

555.2 Equipotenza degli insiemi di funzioni tra cardinali

Se κ, λ sono cardinali tali che

$$2 \leq \kappa \leq \lambda$$

e λ è infinito, allora

$${}^\lambda 2 \asymp {}^\lambda \kappa \asymp {}^\lambda \lambda$$

(vedi [Classe delle Classi-Funzioni](#) e [Classi equipotenti MK](#))

555.2.1 Dimostrazione

Dal momento che

$$2 \subseteq \kappa \subseteq \lambda$$

ovviamente

$${}^\lambda 2 \subseteq {}^\lambda \kappa \subseteq {}^\lambda \lambda$$

Inoltre ${}^\lambda \lambda \subseteq \wp(\lambda \times \lambda)$.

Inoltre, per il teorema $|\lambda \times \lambda| = \lambda$, e pertanto

$$\lambda \times \lambda \asymp \lambda$$

(vedi [Classi equipotenti MK](#))

Questo induce una [biiezione](#): $\wp(\lambda \times \lambda) \asymp \wp(\lambda)$.

Ma $\wp(\lambda) \asymp {}^\lambda 2$, in quanto a ciascun $\alpha \subseteq \lambda$ è associata la funzione $f : \lambda \rightarrow 2$:

$$f(x) = \begin{cases} \emptyset & x \notin \alpha \\ \{\emptyset\} & x \in \alpha \end{cases}$$

ricordando che $2 = \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

Si ha quindi la seguente, che dimostra la tesi:

$${}^\lambda 2 \subseteq {}^\lambda \kappa \subseteq {}^\lambda \lambda \subseteq \wp(\lambda \times \lambda) \asymp \wp(\lambda) \asymp {}^\lambda 2$$

556 Insieme dei sottoinsiemi con order type fissato

Contesto: Morse Kelly Set Theory

556.1 Definizione^[126]

Sia $\langle X, \triangleleft \rangle$ un insieme ben ordinato e sia $\alpha \in \text{Ord}$ un ordinale. Si definisce

$$[X]^\alpha := \{Y \subseteq X \mid \text{ot}(Y, \triangleleft) = \alpha\}$$

556.2 Definizione

Sia $\langle X, \triangleleft \rangle$ un insieme ben ordinato e sia $\alpha \in \text{Ord}$ un ordinale. Si definisce

$$[X]^{\leq \alpha} := \{Y \subseteq X \mid \text{ot}(Y, \triangleleft) \leq \alpha\}$$

556.3 Definizione

Sia $\langle X, \triangleleft \rangle$ un insieme ben ordinato e sia $\alpha \in \text{Ord}$ un ordinale. Si definisce

$$[X]^{<\alpha} := \{Y \subseteq X \mid \text{ot}(Y, \triangleleft) < \alpha\}$$

556.4 Cardinalità

Sia κ un cardinale.

- Se $x \in [\kappa]^n$ allora $x = \{\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}\}$ con

$$\alpha_0 < \dots < \alpha_{n-1} < \kappa$$

e pertanto può essere identificato con una sequenza $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \rangle \in {}^n\kappa$.

Questo garantisce l'iniezione $[\kappa]^n \precsim {}^n\kappa$ ^[127]

- Questa iniezione si estende all'insieme delle sequenze finite:

$$[\kappa]^{<\omega} \precsim {}^{<\omega}\kappa$$

Dunque, siccome^[128]

$$\kappa \leq |[\kappa]^n| \leq |[\kappa]^{<\omega}| = \kappa$$

si ottiene

$$\kappa = |[\kappa]^n| = |[\kappa]^{<\omega}|.$$

Pertanto, se X è infinito è ben ordinabile allora

- $[X]^n$ e $[X]^{<\omega}$ sono ben ordinabili
- $|X| = |[X]^n| = |[X]^{<\omega}|$.

557 Equipotenza dell'insieme delle sequenze finite

Contesto: Morse Kelly Set Theory

557.1 Teorema^[129]

Se X è un insieme infinito tale che $X \times X \asymp X$, allora per ogni $n > 0$

$${}^n X \asymp X$$

Inoltre, se $\omega \preceq X$ allora ${}^{<\omega} X \asymp X$

In particolare, se X è ben ordinabile e infinito, allora

$$|{}^{<\omega} X| = |X|$$

557.2 Proposizione

Per ogni insieme X vale

$${}^{<\omega} X \asymp \omega \times {}^{<\omega} X \asymp {}^{<\omega}({}^{<\omega} X)$$

557.2.1 Dimostrazione

Casi banali Se $X = \emptyset$ (vedi Insieme vuoto MK), allora ${}^{<\omega} X = \emptyset$ e il risultato è banale.

Se $X = \{x_0\}$, allora ${}^{<\omega} X \asymp \omega$. Infatti

$${}^{<\omega} X = \{\langle x_0, \dots, x_0 \rangle =: s \mid \text{length}(s) \in \omega\}$$

ed inoltre $\omega \times \omega \asymp \omega$ (per il teorema, dato che ω è un cardinale)

Dunque

$$\begin{aligned} \omega &\asymp {}^{<\omega} X \\ \omega &\asymp \omega \times \omega \asymp \omega \times {}^{<\omega} X \end{aligned}$$

Inoltre, per il punto precedente, siccome $\omega \preceq {}^{<\omega} X$ (vedi Classe si inietta MK), si ha

$${}^{<\omega}({}^{<\omega} X) \asymp {}^{<\omega} X \asymp \omega$$

In generale Si utilizzi la notazione adottata in Insieme delle sequenze finite

Per X con almeno due elementi distinti.

Si dimostra che

$${}^{<\omega}({}^{<\omega} X) \preceq {}^{<\omega} X.$$

trovando un modo per disporre in fila un numero finito di sequenze finite.

Siano x_0, x_1 due elementi distinti di X . Data $s \in {}^{<\omega}X$, sia

$$s' := x_0^{(\text{lh } s)} \cap \langle x_1 \rangle \cap s$$

Dall'iniettività di $s \mapsto s'$ segue che è [iniettiva](#)^[130]:

$${}^{<\omega}({}^{<\omega}X) \rightarrow {}^{<\omega}X : \quad \langle s_0, \dots, s_n \rangle \mapsto s'_0 \cap s'_1 \cap \dots \cap s'_n$$

Inoltre si scrive l'iniezione

$$\omega \times {}^{<\omega}X \rightarrow {}^{<\omega}({}^{<\omega}X) : \quad (n, s) \mapsto \langle \underbrace{s, \dots, s}_{n+1 \text{ times}} \rangle$$

Si ha quindi la seguente catena (vedi [Classe si inietta MK](#))

$${}^{<\omega}({}^{<\omega}X) \precsim {}^{<\omega}X \precsim \omega \times {}^{<\omega}X \precsim {}^{<\omega}({}^{<\omega}X)$$

Per il [Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder](#) segue la tesi.

557.3 Corollario

Per ogni insieme X esiste un insieme Y tale che:

- $X \precsim Y$
- $Y \asymp {}^{<\omega}Y$ e dunque $Y \asymp Y \times Y$.

557.3.1 Dimostrazione

Sia $Y = {}^{<\omega}X$. Ovviamente $X \precsim {}^{<\omega}X$, ed inoltre, per la proposizione precedente,

$${}^{<\omega}X \asymp {}^{<\omega}({}^{<\omega}X)$$

e quindi $Y \asymp {}^{<\omega}Y$.

In particolare, ${}^{<\omega}Y \precsim Y$, e dunque

$$Y \precsim Y \times Y \precsim {}^{<\omega}Y \precsim Y$$

e applicando il [Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder](#) si ottiene che $Y \asymp Y \times Y$.

558 Ordine prodotto

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della [Morse Kelly Set Theory](#); quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

559 Ordine lessicografico

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della **Morse Kelly Set Theory**; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

560 Soluzione Equazione Simone

Trovare una soluzione numerica al seguente problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan\left(\frac{k_x d - n\pi}{2}\right) = \frac{\gamma}{k_x} \\ k_\Phi = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} \\ k_x = \sqrt{k_\Phi^2 (n_{\text{Si}}^2 - n_{\text{eff}}^2)} \\ \gamma = \sqrt{k_\Phi^2 (n_{\text{eff}}^2 - n_{\text{SiO}_2}^2)} \\ n \in \{0, 1\} \\ d = 160E - 9 \end{array} \right.$$

Innanzitutto

$$\frac{\gamma}{k_x} = \sqrt{\frac{n_{\text{Si}}^2 - n_{\text{eff}}^2}{n_{\text{eff}}^2 - n_{\text{SiO}_2}^2}}$$

dove

$$\begin{aligned} n_{\text{Si}}^2 - n_{\text{eff}}^2 &> 0 \\ n_{\text{eff}}^2 - n_{\text{SiO}_2}^2 &> 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$n_{\text{SiO}_2}^2 < n_{\text{eff}}^2 < n_{\text{Si}}^2$$

che diventa

561 Segmento iniziale per un ordine

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della **Morse Kelly Set Theory**; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

Sia X un insieme (o una classe) e sia R una relazione binaria riflessiva o irriflessiva, e transitiva.

- $Y \subseteq X$ è un segmento iniziale per R se

$$\forall y \in Y \ \forall x \in X \ (x R y \rightarrow x \in Y)$$

- $Y \subseteq X$ è un segmento finale per R se

$$\forall y \in Y \ \forall x \in X \ (y R x \rightarrow x \in Y)$$

561.1 Insieme dei predecessori

Sia X un insieme (o una classe), e sia R un ordine.

Per ogni $a \in X$ si definisce

$$\text{pred}(a; X, R) := \{x \in X \mid x R a\}.$$

- Se X è un insieme $\text{pred}(a; X, R)$ è un insieme.
- Se X è una classe propria, allora $\text{pred}(a; X, R)$ è un insieme sse R è regolare.

562 Sequenza

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della Morse Kelly Set Theory; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

Una sequenza è un modo per indicare una funzione $f : I \rightarrow X$: si scriverà, in luogo di f :

$$\langle a_i \mid i \in I \rangle = \langle a_i : i \in I \rangle$$

dove, quindi $a_i = f(i)$. (si osservi che questa notazione viene utilizzata anche quando X è una classe).

Con un abuso di notazione, anche quando f è una Classe-Funzione, si utilizza la stessa scrittura.

562.1 Stringa

Sia X un insieme (o una classe).

Una sequenza indicizzata da $n \in \mathbb{N}$, $s : n \rightarrow X$ (dove $n = \{0, 1, \dots, n-1\} \in \mathbb{N}$) viene detta stringa (oppure sequenza finita). Spesso si indica:

$$s = \langle a_i \mid i \in n \rangle = \langle a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \rangle.$$

Questa quindi è la funzione

$$\begin{aligned} s : n &\subseteq \mathbb{N} \longrightarrow X \\ i &\longmapsto a_i \end{aligned}$$

Il dominio di s viene detto lunghezza della stringa, e si indica con $\text{lh}(s)$.

Vedi anche Section 3.E of Andretta

562.1.1 Insieme delle sequenze finite

Per ogni classe X , si definisce la classe:^[131]

$$X^{<\omega} := \{s \mid s \text{ è una sequenza finita e } \text{ran}(s) \subseteq X\}$$

$X^{<\omega}$ è un insieme se e solo se X è un insieme.

563 Operazione su una classe MK

Una operazione finitaria (o funzione finitaria) su una classe X è una Classe-Funzione^[132]

$$f : X^n \rightarrow X.$$

$n \in N$ viene denotato con $\text{ar}(f)$ ed è l'arietà di f .

564 Axiom of Choice

564.1 Axiom of Choice

Se \mathcal{A} è un insieme non vuoto e per ogni $A \in \mathcal{A}$ ($A \neq \emptyset$), allora esiste^[133] $f : \mathcal{A} \rightarrow \bigcup \mathcal{A}$ tale che

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad (f(A) \in A).$$

565 Axiom of global Choice

L'assioma della scelta globale, formalizzato per la teoria MK, è il seguente rinforzamento di AC: detta V la classe totale

$$(\text{AGC}) \quad \exists F \quad (F : V \setminus \{\emptyset\} \rightarrow V \wedge \forall x \quad (x \neq \emptyset \rightarrow F(x) \in x)).$$

566 Funzione definita per ricorsione

566.1 Theorem 12.3 - Andretta

Siano A, B insiemi non vuoti, e siano

$$\begin{aligned} g &: B \rightarrow A \\ F &: \mathbb{N} \times B \times A \rightarrow A \end{aligned}$$

funzioni. Allora esiste un'unica $f : \mathbb{N} \times B \rightarrow A$ tale che

$$\begin{cases} f(0, b) = g(b) \\ f(n + 1, b) = F(n, b, f(n, b)) \end{cases}$$

567 Teorema di Ricorsione - caso speciale

Contesto: Morse Kelly Set Theory

567.1 Teorema^[134]

Sia A una classe, e sia $\bar{a} \in A$. Sia $F : \omega \times A \rightarrow A$ una relazione funzionale.

Allora esiste un'unica funzione $G : \omega \rightarrow A$ tale che

$$\begin{cases} G(0) = \bar{a} \\ G(S(n)) = F(n, G(n)) \end{cases}$$

567.1.1 Dimostrazione

Sia

$$\mathcal{G} = \left\{ p \mid \exists m \in \omega \ [p : m \rightarrow A \wedge (0 < m \rightarrow p(0) = \bar{a}) \wedge \forall n \ (S(n) < m \rightarrow p(S(n)) = F(n, p(n))) \right\}$$

ovvero l'insieme di tutte le funzioni da un numero naturale in A tali che, quando si resta nel loro dominio,

$$\begin{cases} p(0) = \bar{a} \\ p(S(n)) = F(n, p(n)) \end{cases}$$

Claim Se $p, q \in \mathcal{G}$ allora $p \cup q$ è una funzione, e dunque $p \cup q \in \mathcal{G}$.

Dimostrazione del claim Se per assurdo $p \cup q$ non è una funzione, allora esiste un minimo $n \in \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$ tale che

$$p(n) \neq q(n)$$

Necessariamente $n \neq 0$, poiché $p(0) = \bar{a} = q(0)$, e pertanto $n = S(k)$ per qualche $k \in \mathbb{N}$. Dunque

$$p(n) = F(k, p(k)) = F(k, q(k)) = q(n)$$

dove, siccome $k < n$, allora $p(k) = q(k)$ per minimalità di n . Assurdo.

Costruzione della funzione G Grazie al claim si ottiene che l'unione di \mathcal{G}

$$G := \bigcup \mathcal{G}$$

è una relazione funzionale.

Siccome $G \subseteq \omega \times A$ allora^[135] G è un insieme, e pertanto una funzione.

- Siccome $\{(0, \bar{a})\} \in \mathcal{G}$, allora $G \neq \emptyset$ e $G(0) = \bar{a}$.
- Inoltre, se $S(n) \in \text{dom } G$ è nel dominio per qualche $n \in \omega$ allora

$$G(S(n)) = p(S(n))$$

per qualche $p \in \mathcal{G}$, con^[136] $G(n) = p$, e dunque

$$G(S(n)) = p(S(n)) = F(n, p(n)) = F(n, G(n))$$

Dunque G è una funzione (eventualmente parziale) che soddisfa le ipotesi.

Si deve dimostrare che è una funzione totale. Si dimostra che $\text{dom } G = \omega$. Supponiamo per assurdo che $\text{dom } G \subsetneq \omega$, e sia \bar{n} sia il **minimo** tale che $\bar{n} \notin \text{dom } G$. Dal momento che $0 \in \text{dom } G$, allora $\bar{n} = S(\bar{m})$ per qualche $\bar{m} \in \omega$.

Si definisce

$$\bar{p} = G \cup \left\{ (\bar{n}, F(\bar{m}, G(\bar{m}))) \right\}$$

Si ha che $\bar{p} \in \mathcal{G}$. (Ovvio poiché \bar{n} è il minimo $\notin \text{dom } G$, e quindi $\bar{p} : \bar{n} \rightarrow A$).

Ma dunque $\bar{p} \subseteq G$ e dunque $\bar{n} \in \text{dom } G$. Assurdo.

Unicità della funzione G Sia G' un'altra funzione che soddisfa il teorema, e sia \bar{n} il più piccolo tale che

$$G(\bar{n}) \neq G'(\bar{n})$$

Necessariamente $\bar{n} \neq 0$ poiché $G(0) = G'(0) = \bar{a}$. Allora $\bar{n} = S(\bar{m})$ e pertanto

$$G(\bar{n}) = F(\bar{m}, G(\bar{m})) = F(\bar{m}, G'(\bar{m})) = G'(\bar{n})$$

in quanto $\bar{m} < \bar{n}$ e dunque, per minimalità di \bar{n} , $G(\bar{m}) = G'(\bar{m})$. Assurdo ■

568 Chiusura transitiva di una classe MK

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

568.1 Definizione

Sia X una [classe](#). La chiusura transitiva di X è

$$\begin{aligned} \text{TC}(X) = \left\{ y \mid \exists n \in \omega \ \exists f \in {}^{S(n)}V \ [f(0) \in X \wedge \right. \\ \left. y = f(n) \wedge \forall i < n \ [f(S(i)) \in f(i)] \right] \right\} \end{aligned}$$

dove V è la [classe di tutti gli insiemi](#) (vedi [Classe delle Classi-Funzioni](#), [Successore di un insieme MK](#)).

Si ha che $y \in \text{TC}(X)$ se e solo se esistono $x_0, \dots, x_n \in V$ tali che

$$y \in x_0 \in x_1 \in \dots \in x_n \in X$$

568.1.1 Osservazione

La classe $\text{TC}(X)$ è [transitiva](#). Infatti, se $z \in y \in \text{TC}(X)$ e $f \in {}^{S(n)}V$ testimonia il fatto che $y \in \text{TC}(X)$, allora (vedi [Unione di classi MK](#))

$$f \cup \{(S(n), z)\}$$

testimonia $z \in \text{TC}(X)$.

Inoltre $X \subseteq \text{TC}(X)$ (vedi [Sottoclasse MK](#)) e se $Y \supseteq X$ è transitivo allora^[137] $\text{TC}(X) \subseteq Y$. Dunque $\text{TC}(X)$ è la più piccola classe transitiva che contiene X .

568.2 Chiusura transitiva di un insieme

Se x è un insieme, allora si può definire la chiusura transitiva di x in due modi equivalenti.

568.2.1 Primo metodo

Si usa il Teorema di Ricorsione - caso speciale

Si pone $x_0 = x$ e $x_{n+1} = \bigcup x_n$ (vedi Classe Unione Generalizzata), e si ha:

$$\text{TC}(x) = \bigcup_{n \in \omega} x_n$$

568.2.2 Secondo metodo

Si usa il Teorema di Ricorsione, con $R = \in$ (vedi Inclusione è irriflessiva, well-founded e left-narrow)

$$\text{TC}(x) = x \cup \bigcup_{y \in x} \text{TC}(y)$$

569 Chiusura transitiva di una relazione

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della Morse Kelly Set Theory; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

569.1 Definizione

Sia X un insieme (o una classe), e sia R una relazione su X .

La chiusura transitiva di R è la relazione:^[138]

$$\tilde{R} = \left\{ (x, y) \in X \times X \mid \exists n > 0 \exists f \in {}^{S(n)}X \ [x = f(0) \wedge y = f(n) \wedge \forall i < n \ [f(i), f(S(i)) \in R]] \right\}.$$

In altre parole, $x \tilde{R} y$ se e solo se esistono $x_0, \dots, x_n \in X$ tali che

$$x = x_0 R x_1, x_1 R x_2 \dots, x_{n-1} R x_n = y$$

569.1.1 Osservazione

Per costruzione \tilde{R} è la più piccola relazione transitiva su X tale che^[139] $R \subseteq \tilde{R}$

569.2 Proprietà

Sia X una classe, e sia R una relazione su X . Sia \tilde{R} la sua chiusura transitiva.

1. R è regolare su X se e solo se \tilde{R} è regolare su X .
2. R è ben fondata su X se e solo se \tilde{R} è ben fondata su X .

569.2.1 Dimostrazione

Dimostrazione 1 Siccome $R \subseteq \tilde{R}$ è sufficiente dimostrare che \tilde{R} è left-narrow se lo è R , dal momento che il viceversa è immediato.

1. Claim

Sia $\bar{x} \in X$ fissato. Esiste una sequenza di insiemi $\langle Z_n \mid n \in \omega \rangle$ indicizzata da ω tali che:

$$\begin{aligned} Z_0 &= \{y \in X \mid y R \bar{x}\} \\ Z_{n+1} &= \{y \in X \mid \exists z \in Z_n (y R z)\} = \bigcup_{z \in Z_n} \{y \in X \mid y R z\} \end{aligned}$$

2. Dimostrazione del Claim

Si applichi il Teorema di ricorsione (caso speciale), con

$$\begin{aligned} A &= V \\ \bar{a} &= Z_0 \\ F(n, a) &= \{x \in X \mid \exists y \in a (x R y)\} \end{aligned}$$

ottenendo $G(n) = Z_n$, dove V è la classe di tutti gli insiemi.

3. Fine della dimostrazione

Tramite gli assiomi di Replacement e dell'Unione,

$$\bigcup_{n \in \omega} Z_n$$

è un insieme, ed è uguale a $\{y \in X \mid y \tilde{R} \bar{x}\}$.

Dimostrazione 2 Siccome $R \subseteq \tilde{R}$ è sufficiente dimostrare che \tilde{R} è well-founded se lo è R , dal momento che il viceversa è immediato.

Sia $\emptyset \neq Y \subseteq X$ fissato. Si mostra che vi è un \tilde{R} -elemento minimale.

Si definisce percorso da Y in se stesso come una sequenza finita $\langle z_0, \dots, z_n \rangle$ di elementi di X tali che

1. $z_0, z_n \in Y$
2. per ogni $i < n$ si ha $z_i R z_{i+1}$

Sia dunque

$$\bar{Y} = \{x \in X \mid \exists s (s \text{ è un percorso da } Y \text{ in se stesso} \wedge x \in \text{ran}(s))\}$$

(dove $\text{ran}(s)$ indica il range di s) la classe degli elementi di X visitati da un percorso da Y in se stesso.

Per costruzione, $Y \subseteq \bar{Y}$. Siccome R è well-founded e $\bar{Y} \subseteq X$, sia \bar{y} il R -elemento minimale di \bar{Y} .

Nessun elemento di $\overline{Y} \setminus Y$ può essere minimale rispetto a \overline{Y} (ovvio, siccome vi è una catena di relazioni). Pertanto $\bar{y} \in Y$.

Dimostriamo che \bar{y} sia \tilde{R} -minimale in Y . Supponiamo per assurdo che vi sia $\bar{x} \in Y$ tale che

$$\bar{x} \tilde{R} \bar{y}$$

Dunque esistono z_0, \dots, z_{n+1} elementi \overline{Y} tali che

$$\bar{x} R z_0 R z_1 R \dots R z_{n+1} R \bar{y}$$

Dunque $z_{n+1} R \bar{y}$, contro l'ipotesi che \bar{y} fosse minimale rispetto a R in \overline{Y} .

570 Teorema di Ricorsione

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Teorema 1. Siano X, Z due classi, e sia $R \subseteq X \times X$ una relazione irriflessiva, regolare e ben fondata. Sia V la classe di tutti gli insiemi. Sia $F : Z \times X \times V \rightarrow V^{[140]}$.

Allora vi è un'unica classe-funzione $G : Z \times X \rightarrow V$ tale che per ogni coppia $(z, x) \in Z \times X^{[141]}$

$$G(z, x) = F\left(z, x, G \upharpoonright \{(z, y) \mid y R x\}\right).$$

Osservazione. Per (z, x) fissati,

$$G \upharpoonright \{(z, y) \mid y R x\} \in V$$

per l'Axiom of Replacement, poiché R è left-narrow $\{(z, y) \mid y R x\} \in V$ e dunque $G \upharpoonright \{(z, y) \mid y R x\}$ si può scrivere come l'immagine punto a punto di $\{(z, y) \mid y R x\}$ tramite qualche classe-funzione.

570.1 Dimostrazione del Teorema

570.1.1 Unicità della classe funzione

Siano $G, G' : Z \times X \rightarrow V$ che soddisfano la tesi del teorema, e tali che $G \neq G'$.

Sia $\bar{z} \in Z$ fissato tale che

$$Y := \{x \in X \mid G(\bar{z}, x) \neq G'(\bar{z}, x)\} \neq \emptyset.$$

In particolare, $Y \subseteq X$, e dunque, per la buona fondazione di R , esiste un elemento R -minimale di Y . Sia $\bar{x} \in Y$.

Allora

$$G \upharpoonright \{(\bar{z}, y) \mid y R \bar{x}\} = G' \upharpoonright \{(\bar{z}, y) \mid y R \bar{x}\} =: \bar{p}$$

Siccome R è left-narrow, allora \bar{p} è un insieme (per l'osservazione). Dunque ha senso scrivere

$$\begin{aligned} F(\bar{z}, \bar{x}, \bar{p}) &= G(\bar{z}, \bar{x}) \\ &= G'(\bar{z}, \bar{x}) \end{aligned}$$

Assurdo.

570.1.2 Esistenza

Sia \mathcal{G} la classe di tutte le funzioni p tali che

1. $\text{dom } p \subseteq Z \times X$;
2. $\forall (z, x) \in \text{dom}(p) \forall y \in X (y R x \rightarrow (z, y) \in \text{dom}(p))$.
3. $\forall (z, x) \in \text{dom}(p) [p(z, x) = F(z, x, p \upharpoonright \{(z, y) \mid y R x\})]$

Inoltre, 2. è equivalente alla seguente 2'.

$$\forall (z, x) \in \text{dom}(p) [\{z\} \times \{y \in X \mid y \tilde{R} x\} \subseteq \text{dom}(p)]$$

Claim Se $p, q \in \mathcal{G}$ allora $p \cup q$ è una funzione, e inoltre $p \cup q \in \mathcal{G}$.

Dimostrazione del claim Supponiamo che

$$\{x \in X \mid \exists z \in Z (z, x) \in \text{dom}(p) \cap \text{dom } q \wedge p(z, x) \neq q(z, x)\} \subseteq X$$

sia non vuoto. Per la well-foundness di R , sia \bar{x} l'elemento R -minimale della classe di cui sopra.

Sia $\bar{z} \in Z$ tale che $(\bar{z}, \bar{x}) \in \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$ e $p(\bar{z}, \bar{x}) \neq q(\bar{z}, \bar{x})$.

Per la 2'. si ha che $\{(\bar{z}, y) \mid y R \bar{x}\} \subseteq \text{dom}(p) \cap \text{dom}(q)$. Inoltre, per la R -minimalità di \bar{x} :

$$p \upharpoonright \{(\bar{z}, y) \mid y R \bar{x}\} = q \upharpoonright \{(\bar{z}, y) \mid y R \bar{x}\} =: \bar{r}$$

e pertanto, per 3.

$$p(\bar{z}, \bar{x}) = F(\bar{z}, \bar{x}, \bar{r}) = q(\bar{z}, \bar{x})$$

Assurdo.

È facile verificare che $p \cup q \in \mathcal{G}$.

Costruzione della classe funzione Sia dunque $G = \bigcup \mathcal{G}^{[142]}$. Questa è una classe funzione grazie a **Unione di funzioni MK** (tramite il claim), con dominio $\subseteq Z \times X$. Inoltre, G soddisfa la tesi del thm per ogni $(z, x) \in \text{dom } G$.

Dominio della classe funzione Supponiamo per assurdo che $Z \times X \setminus \text{dom}(G) \neq \emptyset^{[143]}$. Sia allora \bar{x} l'elemento R -minimale di

$$\{x \in X \mid \exists z \in Z (z, x) \notin \text{dom}(G)\} \subseteq X$$

che esiste per well-foundness di R . Sia inoltre $\bar{z} \in Z$ tale che $(\bar{z}, \bar{x}) \notin \text{dom}(G)$.

Per una proposizione precedente \tilde{R} è left-narrow, e pertanto $\{(\bar{z}, y) \mid y \tilde{R} \bar{x}\}$ è un insieme, e dunque per l'osservazione si ha che

$$\bar{p} := G \upharpoonright \{(\bar{z}, y) \mid y \tilde{R} \bar{x}\} \in V$$

Inoltre $\bar{p} \in \mathcal{G}$, e inoltre

$$\bar{p} \cup \{((\bar{z}, \bar{x}), F(\bar{z}, \bar{x}, \bar{p}))\} \in \mathcal{G}.$$

Dunque $(\bar{z}, \bar{x}) \in \text{dom } G$. Assurdo. ■

571 Rango di una relazione

Contesto: Morse Kelly Set Theory. Sia X una classe, e sia R una relazione su X .

Definizione 1. Se R è irriflessiva, regolare e ben fondata, allora si definisce la classe funzione rango $\varrho_{R,X}$ che a $x \in X$ associa^[144]

$$\varrho_{R,X}(x) = \bigcup \{S(\varrho_{R,X}(y)) \mid y R x\}$$

Questa è ben definita per il Teorema di Ricorsione.

Proposizione 2. 1. La classe $\text{ran}(\varrho_{R,X})$ ^[145] è un segmento iniziale di Ord ^[146], ovvero vale una delle seguenti.

- $\text{ran}(\varrho_{R,X}) \in \text{Ord}$;
- $\text{ran}(\varrho_{R,X}) = \text{Ord}$;

in entrambi i casi, per ogni $x \in X$, si ha che $\varrho_{R,X}(x) \in \text{Ord}$.

2. Inoltre $x R y$ implica $\varrho_{R,X}(x) < \varrho_{R,X}(y)$ e vale^[147]

$$\varrho_{R,X}(x) = \inf \{\alpha \in \text{Ord} \mid \forall y (y R x \rightarrow \varrho_{R,X}(y) < \alpha)\}$$

Nella dimostrazione si mostrerà, in particolare, che se X è una classe propria, allora $\text{ran}(\varrho_{R,X}) = \text{Ord}$.

Osservazione. Si ha che $\varrho_{R,X}(x) = 0$ se e solo se x è R -minimale in X , e inoltre $\varrho_{R,X}(x) = \alpha$ se e solo se x è R -minimale rispetto a

$$X \setminus \{y \in X \mid \varrho_{R,X}(y) < \alpha\}$$

Esempio 3. Si consideri la relazione R indicata in figura 5 sull'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$, dove $x \rightarrow y$ indica che $x R y$. Per semplicità, si scrive $\varrho(x)$ in luogo di $\varrho_{R,X}(x)$.

$$\begin{aligned} \varrho(a) &= \bigcup \{S(\varrho(y)) \mid y R a\} = \bigcup \emptyset = \emptyset = 0. \\ \varrho(c) &= 0. \\ \varrho(f) &= 0. \\ \varrho(b) &= \bigcup \{S(\varrho(y)) \mid y R b\} = \bigcup \{S(\varrho(c))\} = \\ &= \bigcup \{S(\emptyset)\} = \bigcup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset\} = 1. \\ \varrho(e) &= 1 \\ \varrho(d) &= \bigcup \{S(\varrho(e))\} = \bigcup \{2\} = 2. \\ \varrho(g) &= \bigcup \{S(\varrho(a)), S(\varrho(b)), S(\varrho(d))\} = \bigcup \{1, 2, 3\} = 3. \end{aligned}$$

Si ricorda inoltre la definizione di numeri naturali:

$$0 := \emptyset, \quad 0 \neq n := \{0, 1, \dots, n-1\}$$

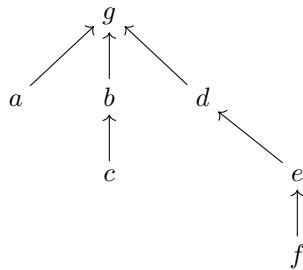


Figura 5: Esempio di relazione sull'insieme $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

572 Relazione binaria estensionale

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Sia X una classe e sia R una relazione binaria su X .

R si dice estensionale se

$$\forall x, y \in X \ (\forall z \in X (z R x \longleftrightarrow z R y) \rightarrow x = y)$$

Nota: il senso di questa definizione è quello di “mimare” l'inclusione, che è estensionale per l'Axiom of Extentionality, che dice

$$\forall X, Y ((\forall x (x \in X \longleftrightarrow x \in Y)) \rightarrow X = Y)$$

573 Lemma del collasso di Mostowski

Contesto: Morse Kelly Set Theory

573.1 Proposizione

Sia X una classe, e sia $R \subseteq X \times X$ (vedi Sottoclasse MK e Prodotto cartesiano di classi MK) una relazione irriflessiva, left-narrow e well-founded.

1. Se R è estensionale su X , allora il collasso di Mostowski $\pi_{R,X}$ è iniettiva e

$$\pi_{R,X} : \langle X, R \rangle \rightarrow \langle \bar{X}, \in \rangle$$

è un isomorfismo (vedi Collazzo transitivo)

2. Se R è un buon ordine stretto su X allora $\pi_{R,X}$ e $\varrho_{R,X}$ coincidono (vedi Rango di una relazione well-founded).

573.1.1 Dimostrazione

Punto a. $\pi_{R,X}$ è iniettiva.

Per assurdo supponiamo che \bar{x} sia l'elemento **R-minimale** tale che, per qualche $\bar{y} \neq \bar{x}$:

$$\pi_{R,X}(\bar{x}) = \pi_{R,X}(\bar{y})$$

- Sia ora $z R \bar{x}$. Per costruzione, $\pi_{R,X}(z) \in \pi_{R,X}(\bar{x}) = \pi_{R,X}(\bar{y})$. Siccome

$$\pi_{R,X}(\bar{y}) = \{\pi_{R,X}(k) \mid k R \bar{y}\}$$

si ha che esiste $w R \bar{y}$ tale che $\pi_{R,X}(z) = \pi_{R,X}(w)$. Per minimalità di \bar{x} , $z = w$, e quindi $z R \bar{y}$. Dunque

$$\forall z (z R \bar{x} \rightarrow z R \bar{y}).$$

- Sia ora $z R \bar{y}$. Per costruzione, $\pi_{R,X}(z) \in \pi_{R,X}(\bar{y}) = \pi_{R,X}(\bar{x})$. Siccome

$$\pi_{R,X}(\bar{x}) = \{\pi_{R,X}(k) \mid k R \bar{x}\}$$

si ha che esiste $w R \bar{x}$ tale che $\pi_{R,X}(z) = \pi_{R,X}(w)$. Per minimalità di \bar{x} , $z = w$ e quindi $z R \bar{x}$. Dunque

$$\forall z (z R \bar{y} \rightarrow z R \bar{x}).$$

Quindi si è dimostrato che

$$\forall z \in X (z R \bar{x} \longleftrightarrow z R \bar{y})$$

Dunque, per **estensionalità** di R , si ha che $\bar{x} = \bar{y}$. Assurdo

$\pi_{R,X}$ biettiva.

Siccome $\bar{X} = \text{ran}(\pi_{R,X})^{[148]}$, allora $\pi_{R,X}$ è **biettiva** tra X e \bar{X} .

$\pi_{R,X}$ è un **isomorfismo**.

Per definizione, se $\pi_{R,X}(x) \in \pi_{R,X}(y)$ allora esiste $z R y$ tale che

$$\pi_{R,X}(x) = \pi_{R,X}(z)$$

ma, per iniettività, si ha che $x = z$ e quindi $x R y$.

Se viceversa $x R y$ allora, per definizione, $\pi_{R,X}(x) \in \pi_{R,X}(y)$. Si è dimostrato quindi che

$$\pi_{R,X} : X \rightarrow \bar{X}$$

è un isomorfismo.

Punto b. Si osservi che banalmente, se x è R -minimale allora

$$\pi_{R,X}(x) = \rho_{R,X}(x) = 0$$

Supponiamo che $\forall y$ se $y R x$ allora $\pi_{R,X}(y) = \rho_{R,X}(y)$. Consideriamo quindi

$$\pi_{R,X}(x) = \{\pi_{R,X}(y) \mid y R x\} = \{\rho_{R,X}(y) \mid y R x\}$$

Siccome $\rho_{R,X}(y) \in \text{Ord}$, allora $\pi_{R,X}(x)$ è un insieme di ordinali, e quindi tutti i suoi elementi sono transitivi.

Inoltre, $\pi_{R,X}(x)$ è un insieme transitivo: se

$$\pi_{R,X}(z) \in \pi_{R,X}(y) \in \pi_{R,X}(x)$$

allora, per il punto precedente, $z R y R x$ e quindi, siccome R è un buon ordine, si ha

$$z R x$$

e quindi, sempre per il punto precedente, $\pi_{R,X}(z) \in \pi_{R,X}(x)$. (Osserviamo che questo discorso ha senso perché tutti gli elementi di $\pi_{R,X}(y)$ sono nella forma $\pi_{R,X}(\xi)$ per definizione).

Si è stabilito dunque che $\pi_{R,X}(x) \in \text{Ord}$.

Siccome R è left-narrow, allora $\{\text{S}(\pi_{R,X}(y)) \mid y R x\}$ è un insieme di ordinali, e vale

$$\pi_{R,X}(x) = \bigcup \{\text{S}(\pi_{R,X}(y)) \mid \pi_{R,X}(y) \in \pi_{R,X}(x)\} = \bigcup \{\text{S}(\pi_{R,X}(y)) \mid y R x\}$$

Quindi

$$\pi_{R,X}(x) = \bigcup \{\text{S}(\pi_{R,X}(y)) \mid y R x\} = \bigcup \{\text{S}(\rho_{R,X}(y)) \mid y R x\} = \rho_{R,X}(x)$$

Applicando l'induzione transfinita, si ottiene che

$$\forall x \in X \quad \pi_{R,X}(x) = \rho_{R,X}(x)$$

573.2 Osservazione

Si è dimostrato che se R è un buon ordine stretto su X allora per ogni $x \in X$ si ha che

$$\pi_{R,X}(x) \in \text{Ord}$$

ed inoltre

$$\pi_{R,X}(x) = \sup \{\text{S}(\pi_{R,X}(y)) \mid y R x\}$$

rispetto alla relazione d'ordine \in su Ord .

574 Collasso di Mostowski

Contesto: Morse Kelly Set Theory

574.1 Definizione

Sia X una classe, e sia $R \subseteq X \times X$ una relazione irriflessiva, left-narrow e well-founded. La classe funzione con dominio X definita come segue

$$\pi_{R,X}(x) = \{\pi_{R,X}(y) \mid y R x\}$$

è il collazzo di Mostowski. Questa è ben definita per il Teorema di Ricorsione

La classe

$$\overline{X} := \text{ran}(\pi_{R,X})$$

è detto collazzo transitivo di R e X .

Si verifica facilmente che \overline{X} è transitivo, e che

$$\forall x, y \in X (y R x \rightarrow \pi_{R,X}(y) \in \pi_{R,X}(x))$$

575 Funzione Aleph

Contesto: Morse Kelly Set Theory

La classe dei cardinali privata di ω è una classe ben ordinata con l'inclusione ed inoltre è una classe propria.

Dunque $\text{Ord} \cong \text{Card} \setminus \omega$ e l'isomorfismo è dato dalla classe-funzione \aleph .

$$\aleph : \text{Ord} \rightarrow \text{Card} \setminus \omega$$

In quanto isomorfismo è crescente e continua.

$$\begin{aligned}\aleph_0 &= \omega \\ \aleph_{S(\alpha)} &= (\aleph_\alpha)^+ \\ \aleph_\lambda &= \sup_{\alpha < \lambda} \aleph_\alpha\end{aligned}$$

Spesso si scrive ω_α in luogo di \aleph_α .

Proposizione 1. Poiché $\aleph : \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$ è crescente e continua, allora ammette punto fisso, ovvero esistono degli cardinali $\kappa = \aleph_\kappa$.

Il più piccolo di questi cardinali è il supremum di

$$\aleph_0, \quad \aleph_{\aleph_0}, \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_0}}, \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}}, \quad \dots$$

576 Punto Fisso di funzioni continue e crescenti sugli ordinali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Lemma 1. Sia $f : \text{Ord} \rightarrow \text{Ord}$ ^[149] una classe-funzione crescente e continua. Allora

$$\forall \alpha \exists \bar{\alpha} (f(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}).$$

577 Aritmetica degli ordinali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Tramite il Teorema di Ricorsione è possibile definire le operazioni di somma, prodotto ed elevamento a potenza per gli ordinali. Si utilizzano simboli diversi per distinguerli dalle equivalenti operazioni per i cardinali.^[150]

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \begin{cases} \alpha & \text{se } \beta = 0 \\ S(\alpha + \gamma) & \text{se } \beta = S(\gamma) \\ \sup_{\gamma < \beta} (\alpha + \gamma) & \text{se } \beta \text{ è limite} \end{cases} \\ \alpha \cdot \beta &= \begin{cases} 0 & \text{se } \beta = 0 \\ (\alpha \cdot \gamma) + \alpha & \text{se } \beta = S(\gamma) \\ \sup_{\gamma < \beta} (\alpha \cdot \gamma) & \text{se } \beta \text{ è limite} \end{cases} \\ \alpha^\beta &= \begin{cases} 1 & \text{se } \beta = 0 \\ (\alpha^\gamma) \cdot \alpha & \text{se } \beta = S(\gamma) \\ \sup_{\gamma < \beta} (\alpha^\gamma) & \text{se } \beta \text{ è limite} \end{cases}\end{aligned}$$

Quando $\alpha, \beta \in \omega$, allora le definizioni si riducono alla definizione ricorsiva di somma, prodotto ed esponente in \mathbb{N} , e quindi sono commutative. Questo non è però vero in generale.

578 Rango di un insieme

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Sia V la classe totale, ordinata con l'inclusione \in . Si definisce il rango di $x \in V$ come il rango di \in rispetto a V : $\varrho_{\in, V}(x)$.^[151]

$$\text{rank}(x) := \varrho_{\in, V}(x) = \bigcup \{S(\text{rank}(y)) \mid y \in x\} \in \text{Ord}$$

dove S è il successore.

Proposizione 2. Dalla definizione segue banalmente che

$$x \in y \rightarrow \text{rank}(x) < \text{rank}(y), \quad x \subseteq y \rightarrow \text{rank}(x) \leq \text{rank}(y).$$

e per induzione si verifica che per ogni ordinale α : $\text{rank}(\alpha) = \alpha$. Inoltre:

1. $\text{rank}(\wp(x)) = S(\text{rank}(x))^{[152]}$;
2. $\text{rank}(\bigcup x) = \sup \{\text{rank}(y) \mid y \in x\}^{[153]}$.

579 Gerarchia di Von Neumann

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Sia α un ordinale. Si definisce V_α come

$$V_\alpha := \{x \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$$

dove rank è il rango di x . La gerarchia di Von Neumann è la classe funzione da Ord a $V^{[154]}$ che ad α associa V_α .

Si noti che $V_\alpha \cap \text{Ord} = \alpha$.

Teorema 2. Per ogni ordinale α , V_α è

1. un insieme
2. transitivo
3. e vale^[155]

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \wp(V_\beta).$$

Corollario 3. Si ha che

1. $V_0 = \emptyset$;
2. Se $\alpha < \beta$ allora $V_\alpha \in V_\beta$ e $V_\alpha \subseteq V_\beta$;
3. $V_{S(\alpha)} = \wp(V_\alpha)^{[156]}$
4. se λ è limite, allora

$$V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha;$$

5. $V = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} V_\alpha$.

Osservazione. Siccome si ha che^[157] $|V_{n+1}| = 2^n$ per ogni $n \in \omega^{[158]}$, si ha che $V_\omega \asymp \omega^{[159]}$ e $V_{\omega+1} \asymp \wp(\omega) \asymp \mathbb{R}$.

Proposizione 4. Se $x, y \in V_\alpha$ allora

$$\begin{aligned} \{x, y\} &\in \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1} \\ (x, y) &= \{\{x\}, \{x, y\}\} \in \wp(\wp(V_\alpha)) = V_{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Osservazione. Segue che $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq V_\omega$, poiché ogni $n \in \mathbb{N}$ è in V_{n+1} e ω è limite.

580 Modelli di ZFC nella Gerarchia di Von Neumann

Vedi:

- Alessandro Andretta, ‘Elements of Mathematical Logic’ (Università degli Studi di Torino, 24 April 2024), pp. 409,410,413

581 Absolutezza di una formula

Siano \mathcal{M}, \mathcal{N} due \mathcal{L} -strutture tali che $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ sia una sottostruttura.

Definizione 1. Una \mathcal{L} -formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ si dice:

- assoluta verso l'alto tra \mathcal{M} e \mathcal{N} se per ogni $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ se^[160]

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

allora $\mathcal{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

- assoluta verso il basso tra \mathcal{M} e \mathcal{N} se per ogni $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$ se

$$\mathcal{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

allora $\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

- assoluta tra \mathcal{M} e \mathcal{N} se per ogni $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{M}$

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

581.1 Nella teoria degli insiemi

Nell’ambito della teoria degli insiemi, utilizzando assiomatizzazioni che consentano di parlare di classi (come MK), le classi proprie non possono essere l’universo di una struttura del prim’ordine. Ciò nonostante, questi concetti possono ancora essere sfruttati: si consideri infatti il linguaggio del prim’ordine $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$. Un qualsiasi insieme non vuoto M può essere visto, in un certo senso, come una “sottostruttura” della classe totale V (infatti $M \subseteq V$, e inoltre il significato di \in è lo stesso).

Ha quindi senso dare questa definizione.

Definizione 2. Una \mathcal{L}_\in -formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ si dice:

- assoluta verso l'alto tra M e V se

$$\forall a_1, \dots, a_n \in M \left((\langle M, \in \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]) \rightarrow \varphi(a_1, \dots, a_n) \right)$$

- assoluta verso il basso tra M e V se

$$\forall a_1, \dots, a_n \in M \left(\varphi(a_1, \dots, a_n) \rightarrow (\langle M, \in \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]) \right)$$

- assoluta tra M e V se

$$\forall a_1, \dots, a_n \in M \left((\langle M, \in \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]) \longleftrightarrow \varphi(a_1, \dots, a_n) \right)$$

582 Zermelo Franklin Set Theory

Ecco una lista di assiomi nella teoria $\mathcal{L}_\in = \{\in\}$.

582.1 Assiomi di ZF^[161]

Extensionality $\forall A \forall B \ ((\forall x (x \in A \longleftrightarrow x \in B)) \rightarrow A = B)$;

Foundation $\forall A \ (A \neq \emptyset \rightarrow (\exists B (B \in A \wedge A \cap B = \emptyset)))$;

Pairing $\forall x \forall y \exists z \ (z = \{x, y\})$;

Union $\forall x \exists y \forall z \ (z \in y \longleftrightarrow \exists u \ (z \in u \in x))$;

Power Set $\forall x \exists y \forall z \ (z \in y \longleftrightarrow x \subseteq z)$;

Infinity $\exists x \ (\emptyset \in x \wedge \forall y \ (y \in x \rightarrow S(y) \in x))$;

Separation (axiom schema) per ogni $\varphi(x, B, y_1, \dots, y_n)$ tale che x occorra libera in φ , e per ogni variabile A diversa da x, B, y_1, \dots, y_n :

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \forall B \exists A \ (x \in A \longleftrightarrow x \in B \wedge \varphi(x, B, y_1, \dots, y_n));$$

Replacement (axiom schema) per ogni $\varphi(x, y, A, z_1, \dots, z_n)$ e per ogni variabile B diversa da x, y, A, z_1, \dots, z_n :

$$\begin{aligned} \forall A \forall z_1 \dots \forall z_n \ (\forall x \ (x \in A \rightarrow \exists! y \ \varphi(x, y, A, z_1, \dots, z_n)) \rightarrow \\ \exists B \ \forall y \ (y \in B \longleftrightarrow \exists x \ (x \in A \wedge \varphi(x, y, A, z_1, \dots, z_n)))) \end{aligned}$$

582.2 ZFC

Se alla lista di cui sopra si aggiunge AC, si ottiene la teoria ZFC.

583 Classe propria e transitiva sottoclasse di Ord è Ord

Contesto: Morse Kelly Set Theory

583.1 Proposizione

Sia Ord la classe degli ordinali, e sia $C \subseteq \text{Ord}$ una sottoclasse. Se C è una classe propria e transitiva allora $C = \text{Ord}$.

583.1.1 Dimostrazione

IdL:matematica_lm

Per assurdo, sia $\alpha \in \text{Ord}$ tale che $\alpha \notin C$.

Per ogni $\beta \in C \subseteq \text{Ord}$ si ha che una delle tre è verificata:

$$\alpha \in \beta; \quad \alpha = \beta; \quad \beta \in \alpha$$

- Se $\alpha \in \beta \in C$, siccome C è transitiva, allora $\alpha \in C$. Assurdo.
- Se $\alpha = \beta \in C$ allora $\alpha \in C$. Assurdo

Dunque $\beta \in \alpha$, e pertanto $C \subseteq \alpha$. Quindi C è un insieme. Assurdo.

584 Induzione transfinita per le relazioni ben fondate

Contesto: Morse Kelly Set Theory

584.1 Teorema

Sia X una classe, e sia $R \subseteq X \times X$ una relazione ben fondata.

Sia $\varphi(x)$ un'proprietà degli elementi di X tale che

$$\forall x \in X \ [\forall y \in X [y R x \rightarrow \varphi(y)] \rightarrow \varphi(x)] \quad (1)$$

Allora vale che $\forall x \in X \varphi(x)$.

584.1.1 Dimostrazione

IdL:matematica_lm

Supponiamo per assurdo che esista $\bar{x} \in X$ tale che $\varphi(x)$ non valga. Per well-foundedness di R supponiamo che questo sia R -minimale. Allora^[162] vi è qualche $y \in X$, $y R \bar{x}$ tale che $\neg \varphi(y)$. Questo è assurdo per minimalità.

585 Collezione dei sottoinsiemi ben ordinabili di cardinalità limitata

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Sia X un insieme e sia κ un cardinale. Si definisce

$$\wp_\kappa(X) := \{Y \subseteq X \mid |Y| < \kappa\}$$

dove $|Y|$ è la cardinalità del sottoinsieme $Y \subseteq X$, che esiste soltanto quando Y è ben ordinabile.

Pertanto questa è la collezione di tutti i sottoinsiemi di X ben ordinabili di cardinalità minore di κ .

585.1 Applicazione ai cardinali

Notiamo che, considerando la [definizione](#) di $[\lambda]^{<\kappa}$ per i [cardinali](#) λ e κ si ha che^[163]

$$\wp_\kappa(\lambda) = [\lambda]^{<\kappa}$$

e, assumendo [AC](#), si ha che

$$|\wp_\kappa(\lambda)| = \lambda^{<\kappa} \leq \lambda^k$$

dove

$$\lambda^{<\kappa} := \sup \{ \lambda^\nu \mid \nu \in \text{Card} \wedge \nu \leq \kappa \}$$

586 Classe funzione Beth

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#) + [AC](#)

Definizione 1. Consideriamo le due classi proprie [Ord](#) e [Card](#). Su definisce la [classe-funzione](#)

$$\beth : \text{Ord} \rightarrow \text{Card}$$

per [ricorsione](#):

$$\beth_0 = \omega; \quad \beth_{\alpha+1} = 2^{\beth_\alpha}; \quad \beth_\lambda = \sup_{\alpha < \lambda} 2^{\beth_\alpha} \text{ per } \lambda \text{ limite}$$

Riferimenti^[164]

587 Ipotesi del continuo

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Definizione 1. Assumendo [AC](#): L'ipotesi del continuo è^[165]

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

ovvero $\mathbb{R} \asymp \omega_1$ (infatti $\mathbb{R} \asymp \wp(\omega)$ ^[166] e $\omega_1 = \aleph_1$).

Equivalentemente, significa che^[167]

$$\forall X \subseteq \mathbb{R} (|X| \leq \aleph_0 \vee |X| = |\mathbb{R}|)$$

Senza [AC](#): L'ipotesi del continua diventa:^[168]

$$\forall A \subseteq \wp(\omega) (A \not\sim \omega \vee A \asymp \wp(\omega))$$

588 Ipotesi del continuo generalizzata

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Assumento AC: L'ipotesi del continuo generalizzata è^[169]

$$\forall \alpha \in \text{Ord} (2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}).$$

Equivalentemente, significa che^[170]

$$\forall X \subseteq \wp(\aleph_\alpha) (|X| \leq \aleph_\alpha \vee |X| = |\wp(\aleph_\alpha)|)$$

Senza AC: L'ipotesi del continua generalizzata diventa:^[171]

$$\forall X \forall A \subseteq \wp(X) (|A| \precsim X \vee A \asymp \wp(X))$$

e quando descritta in questo modo *implica* AC.

589 CH e GCH sono indipendenti dall'assiomatizzazione della Teoria degli Insiemi

Teorema 1. CH che GCH sono indipendenti dalle assiomatizzazioni usuali della teoria degli insiemi (ovvero ZFC e MK+AC)

590 Forme deboli di AC

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Si elencano delle versioni deboli di AC.

590.1 Axiom of Choice - Indice

Definizione 1. Sia I un insieme.

AC_I: data una sequenza $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ tale che per ogni $i \in I$ si ha $A_i \neq \emptyset$ non vuoto, esiste una sequenza

$$\langle a_i \mid i \in I \rangle$$

tale che per ogni $i \in I$ si ha $a_i \in A_i$.

590.1.1 Axiom of countable Choice

Definizione 2. L'Axiom of Countable Choice ACC è AC_ω

ACC: data una sequenza $\langle A_i \mid i \in \omega \rangle$ tale che per ogni $i \in \omega$ si ha $A_i \neq \emptyset$ non vuoto, esiste una sequenza

$$\langle a_i \mid i \in \omega \rangle$$

tale che per ogni $i \in \omega$ si ha $a_i \in A_i$.

590.2 Axiom of Choice - Insieme

Definizione 3. Sia X un insieme.

$\text{AC}(X)$: se X è un insieme non vuoto allora esiste una funzione di scelta su X .

590.3 Axiom of Choice - Insieme e Indice

Definizione 4. Siano I, X due insiemi.

$\text{AC}_I(X)$: Se X è un insieme non vuoto e vi è una funzione^[172]

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow \wp(X) \setminus \{\emptyset\} \\ i &\longmapsto A_i \end{aligned}$$

allora esiste una funzione

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow X \\ i &\longmapsto a_i \in A_i \end{aligned}$$

590.4 Axiom of Dependent Choices

590.5 Implicazioni tra le forme deboli di AC

Proposizione 5. È facile verificare che

$$\begin{aligned} \text{AC}_I &\longleftrightarrow \forall X \text{ AC}_I(X); \\ \text{AC}(X) &\longleftrightarrow \forall I \text{ AC}_I(X); \\ \text{AC} &\longleftrightarrow \forall I \forall X \text{ AC}_I(X) \end{aligned}$$

Inoltre, se esiste $f : X \rightarrow Y$ suriettiva e $J \precsim I^{[173]}$, si ha che

$$\text{AC}_I(X) \rightarrow \text{AC}_J(Y)$$

591 Assiomi equivalenti ad AC

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Teorema 1. I seguenti fatti sono equivalenti ad AC:

- il prodotto cartesiano di insiemi non vuoti è non vuoto;
- ogni funzione suriettiva ha una inversa sinistra^[174];
- ogni insieme X è ben ordinabile^[175]
- $\forall \alpha \in \text{Ord } (\wp(\alpha) \text{ è ben ordinabile})^{[176]}$
- il principio di massimalità di Hausdorff
- il Lemma di Zorn

- il Weak Zorn Lemma
- il Teichmüller-Tukey Lemma
- l'Axiom of Multiple Choices
- Kurepa's maximality principle
- ogni insieme munito di ordine totale è ben ordinabile

591.1 Condizioni uniformi per varianti di AC

Proposizione 2. Sia X un insieme qualsiasi.

1. X è ben ordinabile $\longleftrightarrow \text{AC}(X)^{[177]}$ (cfr. “AC(X) sse X ben ordinabile”).
2. X è ben ordinabile $\rightarrow \text{MAXHAUS}(X) \rightarrow \text{ZORN}(X) \rightarrow \text{wZORN}(X)^{[178]}$
3. $\text{wZORN}(\wp(X \times X))$ implica X ben ordinabile.

VEDI ANCHE: “Implicazioni tra le forme deboli di AC”

Dimostrazione. 1. cfr. “AC(X) sse X ben ordinabile”.

2. Si supponga $\text{AC}(X)$, e sia F una funzione di scelta per X . Sia \leq un ordine su X ; se per assurdo $\langle X, \leq \rangle$ non contiene una catena massimale, allora per ogni $C \subseteq X$ catena, l'insieme

$$K(C) := \{x \in X \mid C \cup \{x\} \text{ è una catena}\}$$

è non vuoto.

Pertanto, si definisce $g : \text{Ord} \rightarrow X^{[179]}$ per ricorsione: $g(0) = F(K(\emptyset))$; per ogni $\alpha \in \text{Ord}$

$$g(\alpha) = F(K(\{g(\beta) \mid \beta < \alpha\})).$$

- Si mostra che g sia ben definita, ovvero che per ogni $\alpha \in \text{Ord}$ l'insieme $G_\alpha := \{g(\beta) \mid \beta < \alpha\}$ sia una catena; per induzione, $G_\emptyset = \emptyset$ è una catena; se per ogni $\beta < \alpha$, G_β è una catena, allora: se α è un ordinale limite $G_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} G_\beta$ è ancora una catena; se $\alpha = S(\gamma)$ è un ordinale successore allora

$$G_\alpha = G_\gamma \cup \{g(\gamma)\}.$$

Inoltre per costruzione $g(\gamma) \in K(G_\gamma)$ e dunque per definizione G_α è una catena.

- Restringendo $g \upharpoonright \text{Hrtg}(X)$ al numero di Hartog di X si ottiene una funzione iniettiva $\text{Hrtg}(X) \rightarrow X$. Assurdo.

Supponiamo ora $\text{MAXHAUS}(X)$, e sia \leq un ordine su X tale che ogni catena abbia un estremo superiore. Sia $C \subseteq X$ è una catena massimale, allora l'estremo superiore di C appartiene a C , e pertanto è un elemento massimale di X .

Ovviamente $\text{ZORN}(X)$ implica $\text{wZORN}(X)$, poiché ogni insieme superiormente diretto è una catena

3.



Contesto: Morse Kelly Set Theory

Teorema 3. Una classe X è ben ordinabile se e solo se esiste una classe-funzione di scelta su X . In particolare, la classe totale V è ben ordinabile se e solo se vale l'Axiom of global Choice.

Corollario 4. Per ogni insieme X : $\text{AC}(X)^{[180]}$ se e solo se X è ben ordinabile.

Dimostrazione. \Leftarrow : Si fissi un buon ordine su X , e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme non vuoto. Si pone $f(A)$ come il minimo di A . Dunque f è una funzione di scelta su X .

\Rightarrow : se $X = \emptyset$ allora $X \in \text{Ord}$ e pertanto ben ordinabile. Dunque WLOG si supponga $X \neq \emptyset$ e sia F la funzione di scelta.

Se per assurdo X non fosse ben ordinabile, allora per ogni ordinale α , $\alpha \not\asymp X^{[181]}$. Per ricorsione quindi si costruisce una funzione $\Phi : \text{Ord} \rightarrow X$.

- Si definisce $x_0 := F(X)$.
- Al passo α si sono costruiti distinti dei punti $\{x_\beta \mid \beta < \alpha\} \subseteq X$;
 - se $X = \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$ allora $X \asymp \alpha$; questo è impossibile per l'ipotesi fatta, e dunque
 - $X \neq \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$; si pone $x_\alpha := F(X \setminus \{x_\beta \mid \beta < \alpha\})$, $x_\alpha \notin \{x_\beta \mid \beta < \alpha\}$.

Restringendo $\Phi \upharpoonright \text{Hrtg}(X)^{[182]}$, si ottiene un iniezione $\text{Hrtg}(X) \rightarrow X$. Assurdo. \blacksquare

Corollario 5. L'assioma della scelta vale se e solo se ogni insieme è ben ordinabile.

Contesto: Morse Kelly Set Theory

592 Zorn Lemma

Il Lemma di Zorn afferma che $\forall X \text{ ZORN}(X)$, dove:

$\text{ZORN}(X)$: se \leq è un ordine su X tale che ogni catena ha un estremo superiore, allora esiste un elemento massimale $x \in X$.

593 Weak Zorn Lemma

Il Lemma di Zorn debole afferma che $\forall X \text{ wZORN}(X)$, dove

$\text{wZORN}(X)$: se \leq è un ordine su X tale che ogni sottoinsieme diretto superiormente ha un estremo superiore, allora esiste un elemento massimale $x \in X$.

594 Principio di Massimalità di Hausdorff

Contesto: Morse Kelly Set Theory

Definizione 1. Il Principio di massimalità di Haussdorf dice che $\forall X \text{ MAXHAUS}(X)$, dove

$\text{MAXHAUS}(X)$: se \leq è un ordine su X , allora esiste $C \subseteq X$ tale che C sia una catena massimale.

595 Catena di implicazioni uniformi MaxHaus, Zorn e wZorn

Contesto: Morse Kelly Set Theory

595.1 Proposizione

Sia X un insieme non vuoto.

X è ben ordinabile implica $\text{MAXHAUS}(X)$ implica $\text{ZORN}(X)$ implica $\text{wZORN}(X)$. (vedi [MaxHaus](#), [Zorn Lemma](#) e [Weak Zorn Lemma](#))

Inoltre $\text{wZORN}(\wp(X \times X))$ implica X ben ordinabile (vedi [Insieme delle parti MK](#) e [Prodotto cartesiano di classi MK](#))

595.1.1 Dimostrazione

Punto 1. Supponiamo che X sia ben ordinabile, e supponiamo per assurdo che \leq sia un buon ordine senza catene massimali.

Sia dunque $C \subseteq X$ una catena, e si definisca l'insieme

$$K(C) := \{x \in X \setminus C \mid C \cup \{x\} \text{ è una catena}\}$$

Questo è non vuoto poiché C non è una catena massimale.

Sia $F : \wp(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ una funzione di scelta fissata (che esiste). Allora la funzione (vedi [Numeri di Hartogs](#))

$$g : \text{Hrtg}(X) \rightarrow X : \alpha \mapsto F(K(\{g(\beta) \mid \beta < \alpha\}))$$

che esiste per il [Teorema di Ricorsione](#), è iniettiva^[183]. Assurdo.

Punto 2. Supponiamo ora $\text{MAXHAUS}(X)$, e sia \leq un ordine su X tale che ogni catena abbia un estremo superiore. Sia $C \subseteq X$ è una catena massimale, allora l'estremo superiore di C appartiene a C , e pertanto è un elemento massimale di X .

Punto 3. L'implicazione Zorn implica wZorn è immediata.

Punto 4. Sia $\mathcal{P} \subseteq \wp(X \times X)$ l'insieme di tutti i buoni ordini R su X tali che $\text{fld}(R) \subseteq X$ (vedi [Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione](#)).

Se $R \in \mathcal{P}$ allora R è un buon ordine su un sottoinsieme $\text{fld}(R) \subseteq X$. $\mathcal{P} \neq \emptyset$ poiché ogni insieme finito è ben ordinabile (vedi anche [Numeri naturali sono cardinali](#))

Per $R, S \in \mathcal{P}$, si ponga $R \trianglelefteq S$ se e solo se

$$\exists a \in \text{fld } S \quad [\text{fld}(R) = \text{pred}(a; S) \wedge R = S \cap \text{fld}(R) \times \text{fld}(R)]$$

(vedi [Insieme dei predecessori](#) e [Prodotto cartesiano di classi MK](#))

Per $\text{wZORN}(\wp(X \times X))$ esiste^[184] $\bar{R} \in \mathcal{P}$ elemento \trianglelefteq -massimale. Se $\text{fld}(\bar{R}) = X$ allora \bar{R} è un buon ordine^[185] su X .

Supponiamo per assurdo che $\text{fld}(\bar{R}) \neq X$. Sia dunque $a \in X \setminus \text{fld}(\bar{R})$, e si consideri (vedi [Coppia ordinata MK](#))

$$S := \bar{R} \cup \{(y, a) \mid y \in \text{fld}(\bar{R})\} \cup \{(a, a)\}$$

Allora^[186] $S \in \mathcal{P}$ e $\bar{R} \trianglelefteq S$, contro la massimalità di \bar{R} . Assurdo

596 AC e comparabilità delle cardinalità

597 Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile

598 Insieme di formule indipendenti

599 Somma di cardinali è minore del prodotto di cardinali

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#) + AC

599.1 Teorema

Se $I \neq \emptyset$ (vedi [Insieme vuoto MK](#)) e se $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ e $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ sono sequenze di cardinali t.c. per ogni $i \in I$ si ha $\kappa_i < \lambda_i$ (vedi [Relazione d'ordine sugli ordinali](#)) allora

$$\sum_{i \in I} \kappa_i < \prod_{i \in I} \lambda_i$$

(vedi [Somma di cardinali](#) e [Prodotto di cardinali](#))

599.1.1 Dimostrazione

È sufficiente mostrare che

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \geq \prod_{i \in I} \lambda_i$$

ovvero che (vedi [Cardinalità](#), [Classe Unione Generalizzata](#) e [Prodotto cartesiano generalizzato](#), [Prodotto cartesiano di classi MK](#))

$$\left| \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i) \right| \geq \left| \bigtimes_{i \in I} \lambda_i \right|$$

Si dimostra quindi^[187] che non esiste alcuna funzione suriettiva

$$F : \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i) \rightarrow \bigtimes_{i \in I} \lambda_i$$

Sia quindi

$$F : \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i) \rightarrow \bigtimes_{i \in I} \lambda_i$$

qualsiasi.

Per ogni $i \in I$ l'insieme (vedi [Prodotto cartesiano generalizzato](#))

$$\{F(i, \alpha)(i) \mid \alpha \in \kappa_i\} \asymp \kappa_i$$

ha [cardinalità](#) κ_i , minore di λ_i , e quindi

$$\{F(i, \alpha)(i) \mid \alpha \in \kappa_i\} \subsetneq \lambda_i$$

Possiamo definire la funzione $f \in \times_{i \in I} \lambda_i$ (vedi [Prodotto cartesiano generalizzato](#)): per ogni $i \in I$

$$f(i) := \min(\lambda_i \setminus \{F(i, \alpha)(i) \mid \alpha \in \kappa_i\})$$

rispetto all'[ordine sugli ordinali](#): infatti, siccome $\lambda_i \in \text{Ord}$ allora $\lambda_i \subseteq \text{Ord}$ e quindi $\emptyset \neq \lambda_i \setminus \{F(i, \alpha)(i) \mid \alpha \in \kappa_i\} \subseteq \text{Ord}$, e dunque [esiste il minimo](#). (vedi [Sottrazione di classi MK](#) e [Insieme vuoto MK](#))

Verifichiamo che $f \notin \text{ran } F$. Se per assurdo $f = F(i_0, \alpha_0)$ allora $f(i_0) = F(i_0, \alpha_0)(i_0)$, ma

$$f(i_0) \notin \{F(i_0, \alpha)(i_0) \mid \alpha \in \kappa_{i_0}\}$$

poiché $f_{i_0} \in \lambda_{i_0} \setminus \{F(i_0, \alpha)(i_0) \mid \alpha \in \kappa_{i_0}\}$. Assurdo.

Dunque $f \notin \text{ran } F$, e quindi F non è suriettiva.

Pertanto, nessuna

$$F : \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i) \rightarrow \bigtimes_{i \in I} \lambda_i$$

è suriettiva.

600 Somma generalizzata di cardinali è minore del supremum dei cardinali

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Proposizione 1. Sia I un insieme ben ordinabile, e sia $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ una sequenza di cardinali tali che, per ogni $i \in I$, $\kappa \geq 1$ (vedi [Relazione d'ordine sugli ordinali](#)). Allora la somma

$$\sum_{i \in I} \kappa_i \leq |I| \cdot \sup_{i \in I} \kappa_i$$

(vedi [Prodotto di cardinali](#), [Cardinalità e Infimum e supremum](#) e [Supremum di un insieme di cardinali è un cardinale](#))

Inoltre se $\max(|I|, \sup_{i \in I} \kappa_i) \geq \omega$ (vedi [Ordinali omega](#)) allora vale l'uguaglianza.

Dimostrazione. L'inclusione (vedi Classe si inietta MK)

$$\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i) \subseteq I \times \sup_{i \in I} \kappa_i$$

prova la disuguaglianza^[188]. (vedi Classe Unione Generalizzata)

Per l'uguaglianza, si fissi un buon ordine \leq su I (in quanto I ben ordinabile).

Per ogni $\alpha \in \sup_{i \in I} \kappa_i \in \text{Ord}$ (vedi Ordinali) sia $i(\alpha) \in I$ l'elemento \leq -minimale tale che

$$\alpha \in \kappa_{i(\alpha)}$$

La funzione

$$\begin{aligned} \sup_{i \in I} \kappa_i &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i) \\ \alpha &\longmapsto (i(\alpha), \alpha) \end{aligned}$$

è iniettiva, e pertanto

$$\sup_{i \in I} \kappa_i \leq \sum_{i \in I} \kappa_i$$

Per monotonia:

$$|I| = \sum_{i \in |I|} 1 \leq \sum_{i \in |I|} \kappa_i \asymp \sum_{i \in I} \kappa_i$$

e quindi $|I| \leq \sum_{i \in I} \kappa_i$. Pertanto

$$\max \left(|I|, \sup_{i \in I} \kappa_i \right) \leq \sum_{i \in I} \kappa_i$$

Pertanto si ha la seguente catena:

$$\max \left(|I|, \sup_{i \in I} \kappa_i \right) \leq \sum_{i \in I} \kappa_i \leq |I| \cdot \sup_{i \in I} \kappa_i$$

Ma se $\omega \leq \max(|I|, \sup_{i \in I} \kappa_i)$ allora (vedi Classe finita e infinita MK)

$$\max \left(|I|, \sup_{i \in I} \kappa_i \right) = |I| \cdot \sup_{i \in I} \kappa_i$$

e pertanto

$$\sum_{i \in I} \kappa_i |I| \cdot \sup_{i \in I} \kappa_i.$$

■

601 Cardinalità dell'unione di insiemi è minore del supremum della cardinalità degli insiemi per la cardinalità dell'insieme degli indici

Contesto: Morse Kelly Set Theory+AC

601.1 Teorema

Se I e $\{X_i \mid i \in I\}$ sono insiemi (vedi Sequenza), allora

$$\left| \bigcup_{i \in I} X_i \right| \leq |I| \cdot \sup_{i \in I} |X_i|$$

(vedi Cardinalità, Classe Unione Generalizzata, Prodotto di cardinali, Relazione d'ordine sugli ordinali, Infimum e supremum e Supremum di un insieme di cardinali è un cardinale)

601.1.1 Dimostrazione

Per ogni $i \in I$ sia $f_i : X_i \rightarrow |X_i|$ una biiezione.

Per ogni $x \in \bigcup_{i \in I} X_i$ sia $i(x) \in I$ tale che $x \in X_{i(x)}$ (è possibile sceglierlo grazie ad AC).

La funzione

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} X_i &\longrightarrow \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times |X_i|) \\ x &\longmapsto (i(x), f_{i(x)}(x)) \end{aligned}$$

è iniettiva e pertanto

$$\left| \bigcup_{i \in I} X_i \right| \leq \sum_{i \in I} |X_i|$$

(vedi Somma di cardinali)

Applicando Somma generalizzata di cardinali è minore del supremum dei cardinali si ottiene

$$\sum_{i \in I} |X_i| \leq |I| \cdot \sup_{i \in I} |X_i|$$

da cui la tesi.

602 Teorema di Cantor

Contesto: Morse Kelly Set Theory (senza AC)

602.1 Teorema di Cantor

Se X è un insieme, allora non esiste alcuna mappa suriettiva:^[189]

$$X \rightarrow \wp(X)$$

602.2 Corollario^[190]

Se vale AC, allora:

Sia I un insieme. Allora

$$|I| < 2^{|I|}$$

dove $|I|$ è la cardinalità di I .

602.2.1 Dimostrazione

Si noti che^[191]

$$\begin{aligned} |I| &= \sum_{i \in |I|} 1 \\ 2^{|I|} &= \prod_{i \in |I|} 2 \end{aligned}$$

e $1 < 2$, e pertanto, applicando il Teorema di Konig, si ha la tesi.

- 603 Funzione cofinale
- 604 Proprietà di funzioni cofinali e cofinalità di un ordinale
- 605 Ordinale regolare
- 606 Cardinali infiniti hanno numero di Hartogs regolare
- 607 Ogni cardinale singolare è estremo superiore di una sequenza crescente di cardinali regolari
- 608 Ordinale elevato alla sua cofinalità è maggiore a se stesso
- 609 Formula di Hausdorff
- 610 Teorema di Bukovsky-Hechler
- 611 Chiusura rispetto ad una collezione di operatori di una sottoclasse
- 612 Maggiorazioni della cardinalità della chiusura rispetto ad una collezione di operatori
- 613 Ordinale è compatto sse zero o successore
- 614 Spazio topologico totalmente disconnesso
- 615 Spazio topologico regolare
- 616 Spazio topologico completamente regolare
- 617 Spazio topologico completamente regolare che non s-rietta su R è totalmente disconnesso
- 618 Caratterizzazione funzioni continue e monotone da sottoinsieme degli ordinali agli ordinali
- 619 Caratterizzazione di sottoinsiemi chiusi e illimitati in un cardinale regolare o Ord
- 620 Club set 311
- 621 Club set di un cardinale è un filtro proprio del cardinale
- 622 Club set di un cardinale è un filtro k-completo
- 623 Filtro kappa-completo

- 624 Ordinale chiuso rispetto ad una operazione**
- 625 Insieme degli ordinali chiusi rispetto ad una operazione e sottoinsiemi di un cardinale chiusi e illimitati**
- 626 Intersezione diagonale di una sequenza**
- 627 Intersezione diagonale di una sequenza di chiusi e illimitati di un cardinale è un chiuso e illimitato**
- 628 Sottoinsieme stazionario di un cardinale**
- 629 Lemma di Fodor**
- 630 Cardinale limite forte**
- 631 Universo**
- 632 Universo se e solo se nella gerarchia di Von Neumann di un cardinale fortemente inaccessibile**
- 633 Proprietà di prodotto e somma generalizzata di cardinali**

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#) + AC

Si considerino le operazioni di [somma](#) e [prodotto](#) tra [cardinali](#) generalizzata. Allora per ogni cardinale κ si ha

$$\begin{aligned}\kappa &= \sum_{i \in \kappa} 1 \\ 2^\kappa &= \prod_{i \in \kappa} 2\end{aligned}$$

(vedi [Elevamento a potenza di Cardinali](#))

Inoltre, queste operazioni sono monotone, nel senso che se $\langle \kappa_i \mid i \in I \rangle$ e $\langle \lambda_i \mid i \in I \rangle$ sono [sequenze](#) di [cardinali](#) t.c. per ogni $i \in I$ si ha $\kappa_i < \lambda_i$ (vedi [Relazione d'ordine sugli ordinali](#)) allora

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I} \kappa_i &\leq \sum_{i \in I} \lambda_i \\ \prod_{i \in I} \kappa_i &\leq \prod_{i \in I} \lambda_i\end{aligned}$$

634 A si inietta in B sse B si surietta su A (AC)

Contesto: Morse Kelly Set Theory

634.1 Teorema^[192]

Si supponga AC.

Siano A, B due insiemi. $A \precsim B$ sse esiste $g : B \rightarrow A$ funzione suriettiva.

634.1.1 TODO Dimostrazione

635 Interpretazione di un termine

636 Sottostruttura generata da un insieme

637 Struttura assiomatizzabile

638 Sottostruttura elementare

Siano $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ due \mathcal{L} -strutture.

Definizione 1. Diciamo che \mathcal{N} è una sottostruttura elementare di \mathcal{M} (oppure che \mathcal{M} è una estensione elementare di \mathcal{N}) se per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ ed ogni $a_1, \dots, a_n \in N$

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{se e solo se} \quad \mathcal{N} \models \varphi[a_1, \dots, a_n].$$

(vedi [Conseguenza logica](#))

Si osservi che se \mathcal{N} è una sottostruttura elementare di \mathcal{M} , allora in particolare:

- è una sottostruttura $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$;
- \mathcal{M} ed \mathcal{N} sono elementarmente equivalenti: $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$.
- l'iniezione $\iota : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ è una immersione elementare

639 Teoria di una struttura con parametri

640 Formula con parametri

641 Sottostrutture sono elementarmente equivalenti su un insieme sse lo sono su ogni sottoinsieme finito

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e siano M, N due \mathcal{L} -strutture.

641.1 Proposizione

Sia $A \subseteq M \cap N$. Allora $M \equiv_A N$ se e solo se, per ogni $B \subseteq A$ finito, $M \equiv_B N$. (vedi [Strutture elementarmente equivalenti su un sottoinsieme](#))

642 Estensione di un linguaggio del prim'ordine

643 Caratterizzazione di teoria completa

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), e sia T una \mathcal{L} -teoria.

643.1 Teorema

Sono fatti equivalenti:

1. T è [completa](#);
2. esiste un'unica [teoria massimamente consistente](#) S tale che $T \subseteq S$;
3. T è [BROKEN LINK: dee43b09-d515-4385-b1fa-6652a8da5773] e per ogni [modello](#) $M \models T$, $T \vdash \text{Th}(M)$ (vedi [Conseguenza logica](#));
4. T è [BROKEN LINK: dee43b09-d515-4385-b1fa-6652a8da5773] e per ogni \mathcal{L} -enunciato φ , $T \vdash \varphi$ oppure $T \vdash \neg\varphi$ (vedi [Conseguenza logica](#));
5. T è [BROKEN LINK: dee43b09-d515-4385-b1fa-6652a8da5773] e per ogni coppia M, N di [modelli](#) di T , $M \equiv N$ (vedi [Strutture elementarmente equivalenti](#)).

644 Criterio di Tarski-Vaught

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), e sia N una \mathcal{L} -struttura.

644.1 Teorema (Criterio di Tarski-Vaught)

Per ogni [sottoinsieme](#) $A \subseteq N$, sono fatti equivalenti:

1. A è il dominio di una sottostruttura elementare $M \preceq N$;
2. per ogni [formula](#) $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$

$$N \models \exists x \varphi(x) \rightarrow N \models \varphi(b) \text{ per qualche } b \in A$$

(vedi [Enunciato vero in un modello del prim'ordine](#))

644.1.1 Dimostrazione

1 implica 2 Se $M \preceq N$ allora $M \equiv_A N$ (vedi [Strutture elementarmente equivalenti su un sottoinsieme](#)), e dunque per ogni $\sigma \in \mathcal{L}(A)$

$$M \models \sigma \longleftrightarrow N \models \sigma$$

Siccome $(\exists x \varphi(x)) \in \mathcal{L}(A)$:

$$\begin{aligned} N \models \exists x \varphi(x) &\rightarrow M \models \exists x \varphi(x) \\ &\rightarrow M \models \varphi(b) \text{ per qualche } b \in A \end{aligned}$$

siccome ora $\varphi(b) \in \mathcal{L}(A)$ allora

$$M \models \varphi(b) \text{ per qualche } b \in A \rightarrow N \models \varphi(b) \text{ per qualche } b \in A.$$

2 implica 1

1. Dominio di una sottostruttura

Si dimostra che $A \subseteq N$ è il dominio di una **sottostruttura**, ovvero che per ogni $f \in \mathcal{L}_{\text{fun}}$ (vedi [Simbolo di funzione](#)) di **arietà** n , e per ogni $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ (vedi [Prodotto cartesiano generalizzato](#)), $f^N \bar{a} \in A$ (vedi [Interpretazione di un termine](#)).

Si ponga dunque $\varphi_{f, \bar{a}}(x)$:

$$f(a_1, \dots, a_n) = x$$

Poiché $N \models \exists x \varphi_{f, \bar{a}}(x)$, allora $N \models \varphi_{f, \bar{a}}(b)$ per qualche $b \in A$ (condizione 2.), e quindi

$$f^N(a_1, \dots, a_n) = b \in A.$$

Sia dunque $M \subseteq N$ la **sottostruttura** di dominio A .

2. Sottostruttura elementare

Si dimostra che per ogni $\xi(x_1, \dots, x_n)$ \mathcal{L} -formula, per ogni $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$:

$$M \models \xi(a_1, \dots, a_n) \iff N \models \xi(a_1, \dots, a_n)$$

(vedi [Caratterizzazione sottostruttura elementare](#)) per [induzione](#) sull'altezza della formula

(a) Passo base

Se $\xi(x_1, \dots, x_n)$ è **atomica**, allora per definizione di **sottostruttura** e di [interpretazione di un termine](#), segue la tesi.

(b) Ipotesi induttiva

Si dimostra solo per il quantificatore esistenziale. Infatti i connettivi \wedge, \vee, \neg sono banali, e \forall è una combinazione di questi con \exists .

Sia $\xi(x_1, \dots, x_n)$ la **formula**

$$\exists y \psi(x_1, \dots, x_n, y)$$

e assumiamo che l'ipotesi valga per $\psi(x_1, \dots, x_n, y)$. Ricordando la definizione di [“Enunciato vero in un modello del prim'ordine”](#), sia $(a_1, \dots, a_n) \in M^n$

$$\begin{aligned} M \models \xi(a_1, \dots, a_n) &\iff M \models \psi(a_1, \dots, a_n, b) \text{ per qualche } b \in A \\ &\iff N \models \psi(a_1, \dots, a_n, b) \\ &\rightarrow N \models \exists y \psi(a_1, \dots, a_n, y) \\ &\iff N \models \xi(a_1, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Bisogna dimostrare che

$$N \models \exists y \psi(a_1, \dots, a_n, y) \rightarrow N \models \psi(a_1, \dots, a_n, b) \text{ per qualche } b \in A$$

ma questo è esattamente la condizione 2.

645 Teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù

Si utilizza la [Notazione TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#).

Teorema 1. Sia N una \mathcal{L} -struttura infinita, e sia $A \subseteq N$ fissato.

Allora esiste una \mathcal{L} -struttura M , con $|M| \leq |\mathcal{L}(A)|$ (vedi [Relazione d'ordine sugli ordinali](#) e [Linguaggio del prim'ordine con parametri](#)) tale che

$$A \subseteq M \preceq N$$

(vedi [Sottostruttura elementare](#))

Dimostrazione. Costruzione della sottostruttura.

Sia $\lambda = |\mathcal{L}(A)|$. Si costruisce per [ricorsione](#) $\langle A_i : i < \omega \rangle$ con $|A_i| \leq \lambda$.

Si pone $A_0 = A$; ovviamente $|A_0| \leq \lambda$.

Si assume per ipotesi induttiva che $|A_i| \leq \lambda$; allora $|\mathcal{L}(A_i)| \leq \lambda$ (segue ovviamente dalle proprietà di base dell'[Aritmetica dei cardinali](#)).

Fissata una variabile x , sia $\langle \varphi_k(x) : k < \lambda \rangle$ una [enumerazione](#) delle formule in $\mathcal{L}(A_i)$ che siano [consistenti](#) in N , e sia $a_k \in N$ tale che $N \models \varphi_k[a_k]$.

Si pone quindi $A_{i+1} := A \cup \{a_k : k < \lambda\}$. Ovviamente quindi $|A_{i+1}| \leq \lambda$.

Costruita quindi $\langle A_i : i < \omega \rangle$, si pone $M := \bigcup_{i < \omega} A_i$. Ovviamente $A = A_0 \subseteq M$, e [inoltre](#)

$$|M| \leq \lambda \cdot \omega = \lambda.$$

Applicazione del Criterio di Tarski Vaught.

Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}(M)$ consistente in N . Siano $\{a_1, \dots, a_n\} \in M$ i [parametri](#) che compaiono in $\varphi(x)$, allora esistono degli $i_j < \omega$ tali che

$$a_j \in A_{i_j}$$

e pertanto esiste $i = \max i_j$ tale che $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A_i)$ (poiché $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_i \subseteq \dots$).

Allora $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A_i)$ è consistente in N , e pertanto per costruzione esiste $a \in A_{i+1} \subseteq M$ tale che $N \models \varphi(a)$.

Dunque esiste $a \in M$ tale che $N \models \varphi[a]$. ■

646 Caratterizzazione sottostruttura elementare su un insieme

Vedi proposizione 2.14 di Zambella

647 Formula consistente

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), e siano M una \mathcal{L} -[struttura](#).

Definizione 1. Una \mathcal{L} -[formula](#) $\varphi(x)$ ^[193] si dice consistente in M se^[194]

$$M \models \exists x \varphi(x).$$

Si dirà che $\varphi(x)$ è consistente se è consistente in qualche \mathcal{L} -struttura N .

648 Tipo - Teoria dei Modelli

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#). Si utilizzerà la [Notazione TEORIA DEI MODELLI](#).

Un **tipo** è un insieme di \mathcal{L} -[formule](#). Si denota con $p(x)$, dove x indicano le [variabili](#) che potrebbero [occorrere](#) tra le formule.

Sia M una \mathcal{L} -[struttura](#).

648.1 Soddisfazione di un tipo

Se per qualche $a \in M^x$ si ha che per ogni $\varphi(x) \in p(x)$ vale $M \models \varphi(a)$ (vedi [Soddisfazione di una formula](#)) si scive una delle seguenti:

$$\begin{aligned} & M \models p(a) \\ & M, (a) \models p(x) \\ & a \models p(x) \end{aligned}$$

Diremo che a è una soluzione o una realizzazione di $p(x)$.

648.2 Tipo soddisfacibile

- Diremo che $p(x)$ è soddisfacibile in M (consistente in M) se ha una soluzione in M .
- Diremo che $p(x)$ è soddisfacibile (consistente) se è realizzato per qualche \mathcal{L} -struttura

648.3 Tipo finitamente soddisfacibile

- Diremo che $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M (o finitamente consistente) se tutti i sottoinsiemi finiti $q(x) \subseteq p(x)$ sono soddisfacibili in M (o, equivalentemente, se la congiunzione arbitraria di formule di $p(x)$ sono soddisfacibili in M).
- Diremo che $p(x)$ è finitamente soddisfacibile se tutti i sottoinsiemi finiti $q(x) \subseteq p(x)$ sono soddisfacibili.

648.4 Tipo di un elemento di una struttura

Sia $a \in M^\lambda$ per qualche **cardinale** λ , e sia x una variabile di lunghezza λ .

Si definisce il **tipo di a in M** come

$$\text{tp}_M(a) := \{\varphi(x) \text{ } \mathcal{L}\text{-formula} \mid M \models \varphi(a)\}$$

(vedi **Soddisfazione di una formula**)

Generalizzando, si scrive $\text{tp}_M(a/A)$, per $A \subseteq M$ come

$$\text{tp}_M(a/A) := \{\varphi(x) \text{ } \mathcal{L}(A)\text{-formula} \mid M \models \varphi(a)\}$$

Questo è un **tipo completo su A** .

Se Δ è un insieme di formule (chiuso per sostituzione di variabili) si definisce il **Δ -tipo di a in M** come

$$\text{tp}_M(a) := \{\varphi(x) \in \Delta \mid M \models \varphi(a)\}$$

648.4.1 Tuple elementarmente equivalenti su un insieme di parametri

Definizione 1. Se $a, b \in M^\lambda$ e $A \subseteq M$, si scrive

$$a \equiv_A b$$

(e si dice che a e b sono equivalenti su A) se

$$\text{tp}_M(a/A) = \text{tp}_M(b/A).$$

648.5 Insieme definito da un tipo

Sia $p(x)$ un tipo, $p(x) = \{\varphi_\alpha(x) \mid \alpha < \lambda\}$.

L'insieme definito da p in M , denotato con $p(M^x)$ è

$$p(M^x) := \{a \in M^x \mid M \models \varphi_\alpha[a], \text{ per ogni } \alpha < \lambda\} = \bigcap_{\alpha < \lambda} \varphi_\alpha(M^x)$$

dove $\varphi_\alpha(M^x)$ è l'**insieme definito** da φ_α .

L'insieme $p(M^x)$ viene detto **tipo-definibile**.

649 Tipi finitamente soddisfacibili sono soddisfacibili

Sia \mathcal{L} un **linguaggio del prim'ordine**.

649.1 Teorema

Ogni **tipo** $p(x_1, \dots, x_n)$ **finitamente soddisfacibile** è **soddisfacibile**.

650 Teorema di Compattezza

650.1 Teorema di compattezza

Una teoria è finitamente soddisfacibile se e solo se è soddisfacibile.

650.2 Corollario

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine.

Sia φ un \mathcal{L} -enunciato tale che $T \models \varphi$. Allora esiste $S \subseteq T$ finito tale che

$$S \models \varphi$$

651 Teorema di Compattezza per tipi

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

651.1 Teorema

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e sia M una \mathcal{L} -struttura infinita. Se $p(x)$ è un tipo di $\mathcal{L}(M)$ -formule finitamente soddisfacibile in M , è realizzato in una estensione elementare di M .

651.1.1 Dimostrazione

Sia a una enumerazione di M . Siccome $p(x)$ è composto da $\mathcal{L}(M)$ -formule, lo si può considerare come il tipo $p(x; a)$, dove $p(x, z)$ è il tipo di \mathcal{L} -formule.

Sia $q(z)$ il tipo $\text{tp}_M(a)$ (vedi Tipo di una tupla in una struttura). Chiaramente $p(x; z) \cup q(z)$ è finitamente soddisfacibile (rappresentante di questo è M).

Allora $p(x; z) \cup q(z)$ è soddisfacibile, e pertanto esiste una \mathcal{L} -struttura N' che soddisfi:

$$N' \models p(c'; a') \cup q(a')$$

per qualche $c' \in (N')^x$ e $a' \in (N')^z$. Ovviamente $N' \models p(c'; a')$.

Detti quindi $a = (a_i)$ e $a' = (a'_i)$, questi sono di lunghezza diversa per definizione, e si pone

$$\begin{aligned} h : M &\longrightarrow N' \\ a_i &\longmapsto a'_i \end{aligned}$$

Questa è una immersione elementare, poiché $N' \models q(a')$.

Allora il suo range $h[M]$ è isomorfo ad M ed è una sottostruttura elementare di N' : $h[M] \preceq N'$. Inoltre h si estende ad un isomorfismo $h : N \rightarrow N'$, con $M \preceq N$, e pertanto esiste $c \in N^x$ tale che $hc = c'$, e pertanto

$$N \models p(c; a)$$

e dunque N realizza $p(x; a)$.

652 Teorema di Löwenheim-Skolem all'insù

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine.

652.1 Teorema

Per ogni \mathcal{L} -struttura M infinita, e per ogni cardinale λ , esiste una \mathcal{L} -struttura N tale che

1. $M \preceq N$ (vedi Sottostruttura elementare);
2. $|N| > \lambda$ (vedi Cardinalità e Relazione d'ordine sugli ordinali).

652.1.1 Dimostrazione

Sia $x = \langle x_i \mid i < \lambda \rangle$ una sequenza di variabili distinte. Il tipo

$$p(x) = \{x_i \neq x_j \mid i < j < \lambda\}$$

è finitamente soddisfacibile su M , in quanto struttura infinita^[195].

Applicando il Teorema di Compattezza per tipi, si ottiene che esiste N tale che $M \preceq N$ e tale che soddisfa $p(x)$.

Pertanto, $|N| \geq \lambda$, in quanto contiene almeno λ elementi distinti.

653 Immersione elementare si estende ad isomorfismo

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e siano M', N due \mathcal{L} -strutture.

Proposizione 1. Se $k : M' \rightarrow N$ è una immersione elementare, allora esiste una \mathcal{L} -struttura M tale che:

1. $M' \preceq M$ è sottostruttura elementare;
2. $M \equiv N$ sono isomorfe, ed esiste $h : M \rightarrow N$ isomorfismo tale che $k \subseteq h$.

654 Lemma di estensione di un isomorfismo parziale tra ordini

Sia $\mathcal{L} = \{<\}$ un linguaggio del prim'ordine, con $<$ simbolo di relazione binaria, e siano M, N due \mathcal{L} -strutture. Si indichi con T_{lo} la teoria degli ordini stretti lineari e T_{dlo} la teoria degli ordini lineari densi.

654.1 Isomorfismo parziale

Sia $k : M \dashrightarrow N$ una funzione parziale. k è un isomorfismo parziale sse, per ogni $a, b \in \text{dom } k$ (vedi Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione)

$$M \vDash a < b \iff N \vDash ka < kb$$

654.2 Proposizione

Se $M \models T_{\text{lo}}$ e $N \models T_{\text{dlo}}$ (vedi [Soddisfazione di una formula](#)) e la [funzione parziale](#) $k : M \dashrightarrow N$ è un [isomorfismo parziale](#) finito^[196], allora, per ogni $b \in M$ esiste un [isomorfismo parziale](#)

$$h : M \dashrightarrow N$$

tale che

1. $b \in \text{dom } h$ (vedi [Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione](#))
2. per ogni $a \in \text{dom } k$, $a \in \text{dom } h$ e $h(a) = k(a)$.

654.2.1 Dimostrazione

Caso 1 Se $b \in \text{dom } k$ allora $h = k$ è la funzione cercata.

Caso 2 Se $b \notin \text{dom } k$, si definiscano i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} A^- &:= \{a \in \text{dom } k \mid a < b\} \\ A^+ &:= \{a \in \text{dom } k \mid b < a\} \end{aligned}$$

Allora A^+, A^- sono insiemi finiti tali che

- $A^+ \cup A^- = \text{dom } k$ (vedi [Sottrazione di classi MK](#));
- per ogni $x \in A^-$ e per ogni $y \in A^+$, $x < y$.

Poiché k è un isomorfismo (parziale), si ha che per ogni $x \in A^-$ e per ogni $y \in A^+$,

$$k(x) < k(y)$$

Poiché A^+, A^- sono [finiti](#) e l'ordine è totale, esistono [massimo e minimo](#):

$$\begin{aligned} n_{A^+} &:= \min \{k(y) \mid y \in A^+\} \\ n_{A^-} &:= \max \{k(x) \mid x \in A^-\} \end{aligned}$$

e inoltre $n_{A^-} < n_{A^+}$. Quindi poiché l'ordine è denso, esiste $c \in N$ tale che

$$n_{A^-} < c < n_{A^+}$$

Allora la [funzione](#) $h = k \cup \{(b, c)\}$ è la funzione cercata.

655 Funzione Parziale

Siano A, B insiemi. Sia $f : C \subseteq A \rightarrow B$ una [funzione](#). Diremo che f è [parziale](#) se $C \neq A$, e la indicheremo con

$$f : A \rightarrow B$$

Una funzione che non è parziale è una [funzione totale](#).

656 Teoria lambda-categorica

Sia λ un [cardinale infinito](#), e sia T una [teoria del prim'ordine](#).

Definizione 1. Diremo che T è λ -categorica se, ogni due [modelli](#) di T di cardinalità λ sono [isomorfi](#), ovvero: se M, N sono [modelli](#) di T e $|M| = |N| = \lambda$, allora $M \cong N$.

Definizione 2. T si dice [totalmente categorica](#) se è λ -categorica per ogni λ .

657 Teoria degli ordini lineari densi senza punto finale è omega-categorica

657.1 Teorema

La [teoria](#) T_{dlo} degli ordini lineari densi senza punto finale è ω -categorica (vedi [Ordinale omega](#)).

657.1.1 Dimostrazione

Sia M, N due [modelli numerabili](#) di T_{dlo} .

Claim: Ogni isomorfismo parziale $k : M \dashrightarrow N$ si estende ad un isomorfismo $g : M \rightarrow N$.

Ponendo $k = \emptyset$ si ottiene la tesi.

Dimostrazione del Claim: si utilizza una [costruzione di back-and-forth](#).

Siano $\langle a_i : i < \omega \rangle$, $\langle b_i : i < \omega \rangle$ [enumerazioni](#) di M e N , rispettivamente, tale che $a_0 \in \text{dom } k$ e $b_0 \in \text{dom}(k)$.

Si definisce per [ricorsione](#) una catena di isomorfismi parziali finiti $g_i : M \dashrightarrow N$ tali che $a_i \in g_{i+1}$ e $b_i \in \text{rng } g_{i+1}$. Appare quindi evidente che [ponendo](#)

$$g := \bigcup_{i \in \omega} g_i$$

si ottiene un [isomorfismo](#).

Sia dunque $g_0 := k$. Sia g_i : il passo induttivo consiste di due steps, il [forth step](#) e il [back step](#).

- Forth step: Sia quindi $g_i : M \dashrightarrow N$; per il [Lemma di estensione](#), esiste un [isomorfismo parziale](#) $g_{i+1/2} : M \dashrightarrow N$ tale che $a_i \in \text{dom}(g_{i+1/2})$.
- Back step: siccome $(g_{i+1/2})^{-1} : N \dashrightarrow M$ è ancora un isomorfismo parziale, allora applicando lo stesso lemma questo si estende a $f : N \dashrightarrow M$ tale che $b_i \in \text{dom } f$. Allora si pone $g_{i+1} := f^{-1}$. ■

658 Teoria dei grafi

Sia $\mathcal{L} = \{r\}$ un [linguaggio del prim'ordine](#) con un [simbolo di relazione binaria](#).

La [teoria dei grafi](#) T_{gph} è la [teoria del prim'ordine](#) dotata dei seguenti [assiomi](#):

- irriflessiva: $\forall x \neg r(x, x)$;
- simmetrica: $\forall x \forall y [r(x, y) \rightarrow r(y, x)]$.

658.1 Grafo

Un grafo è un modello M di T_{gph} .

658.1.1 Vertice di un grafo

Gli elementi di M sono detti vertici o nodi del grafo

658.1.2 Lato di un grafo

Un lato di M è una coppia non ordinata $\{a, b\} \subseteq M$ tale che

$$M \models r(a, b)$$

(vedi [Soddisfazione di una formula](#))

658.2 Teoria dei grafi aleatori

La teoria dei grafi aleatori è la \mathcal{L} -teoria: $T_{\text{rg}} := T_{\text{gph}} \cup \{\text{nt}\} \cup \{\text{r}_n \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$, dove

$$\begin{aligned} \text{nt : } & \exists x \exists y (x \neq y) \\ \text{r}_n : & \left(\bigwedge_{i,j=1}^n x_i \neq y_j \right) \rightarrow \exists z \left[\bigwedge_{i=1}^n [r(x_i, z) \wedge \neg r(z, y_i) \wedge z \neq y_i] \right] \end{aligned}$$

L'assioma r_n garantisce che per ogni coppia di insiemi di vertici A, B , disgiunti e di cardinalità minore di n , esista un elemento z collegato a tutti i vertici di A e a nessun vertice di B ; inoltre, si richiede che z non sia in B (il fatto che z non sia in A segue dal fatto che z sia collegato a tutti i suoi elementi).

658.2.1 Grafo aleatorio

Un grafo aleatorio è un modello di T_{rg} .

659 Esiste un grafo aleatorio

659.1 Proposizione

Esiste un grafo aleatorio (ovvero la teoria dei grafi aleatori è soddisfacibile).

659.1.1 Dimostrazione

Sia $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione che enumera i numeri primi.

Si consideri $\langle \mathbb{N}, r \rangle$ con r relazione binaria tale che, per ogni $n, m \in \mathbb{N}$,

$$r(n, m) \iff [p(n) \mid m \vee p(m) \mid n].$$

(vedi [Divisore](#)).

$\langle N, r \rangle \models T_{\text{rg}}$ (vedi [Soddisfazione di una formula](#)).

660 Teoria dei grafi aleatori è omega-categorica

660.1 Teorema

La [teoria dei grafi aleatori](#) T_{rg} è ω -categorica (vedi [Ordinale omega](#))

660.1.1 Dimostrazione

La dimostrazione è uguale a quella di “[Teoria degli ordini lineari densi senza punto finale è omega-categorica](#)”.

661 Categorie di modelli e morfismi parziali

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine

Una [categoria](#) di modelli e morfismi parziali è l'[unione disgiunta](#) di due [classi](#):

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$$

661.1 Oggetti di una categoria di modelli

\mathcal{M}_{ob} è la classe degli oggetti, e contiene delle \mathcal{L} -strutture, chiamate [modelli](#);

661.2 Morfismi di una categoria di modelli

\mathcal{M}_{hom} è la “classe dei morfismi”, e contiene [funzioni parziali](#) qualsiasi tra le \mathcal{L} -strutture di \mathcal{M}_{ob} .

In particolare:

- per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$: $\text{Id}_M \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
- per ogni $f, g \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, la [composizione](#) (quando ha senso): $f \circ g \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Per $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ fissati, scriviamo $\mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N) \subseteq \mathcal{M}_{\text{hom}}$ per indicare le funzioni $f : M \dashrightarrow N$, $f \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), e siano M, N due \mathcal{L} -strutture.

662 Definizione

Una funzione (anche **parziale**) $f : M \dashrightarrow N$ preserva la verità di $\varphi(x)$ una \mathcal{L} -formula $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ se per ogni $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(f)$ nel dominio di f

$$M \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \rightarrow N \models \varphi[f(a_1), \dots, f(a_n)]$$

(vedi [Soddisfazione di una formula](#))

663 Funzione biettiva che preserva la verità delle formule atomiche è isomorfismo

Se $f : M \rightarrow N$ è una **funzione totale biettiva** tale che sia f che f^{-1} preservino la verità delle [BROKEN LINK: 2e27614e-3f6e-4f10-922e-1688f86d323c], allora f è un [isomorfismo tra \$\mathcal{L}\$ -strutture](#).

La dimostrazione è molto standard.

664 Modello lambda ricco

Sia λ un [cardinale](#).

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una [categoria di modelli e morfismi parziali](#) di [linguaggio \$\mathcal{L}\$](#) tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k : M \dashrightarrow N$ [funzione parziale](#), se per ogni $k' \subseteq k$ [finito](#) si ha $k' \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, allora $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, k è [invertibile](#) e la sua [inversa](#) $k^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

664.1 Definizione

Un modello $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ si dice λ -ricco se: per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, per ogni $b \in M$ e per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ di [cardinalità](#) $|\kappa| < \lambda$ esiste $c \in N$ tale che

$$k \cup \{(b, c)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$$

664.1.1 Modello ricco

Diciamo che N è un [modello ricco](#) se è $|N|$ -ricco.

665 Modello lambda universale

Sia λ un [cardinale](#).

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una [categoria di modelli e morfismi parziali](#) di [linguaggio \$\mathcal{L}\$](#) tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;

2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{ob}$, e $k : M \dashrightarrow N$ funzione parziale, se per ogni $k' \subseteq k$ finito si ha $k' \in \mathcal{M}_{hom}$, allora $k \in \mathcal{M}_{hom}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{hom}$, k è invertibile e la sua inversa $k^{-1} \in \mathcal{M}_{hom}$.

Definizione 1. Un modello $N \in \mathcal{M}_{ob}$ è λ -universale se per ogni $M \in \mathcal{M}_{ob}$ di cardinalità $|M| \leq \lambda$ nella componente connessa di N , esiste una immersione $k : M \hookrightarrow N$ tale che $k \in \mathcal{M}_{hom}$.

Definizione 2. Un modello $N \in \mathcal{M}_{ob}$ è universale se è $|N|$ -universale (vedi [Cardinalità](#)).

665.1 Definizione alternativa

Quando non è specificata la categoria \mathcal{M} si intende la categoria di tutti i modelli e le mappe elementari tra di loro. La definizione, pertanto, diventa:

Definizione 3. Una struttura N è (elementarmente) λ -universale se ogni struttura M elementarmente equivalente ad N , $M \equiv N$, se di cardinalità $|M| < \lambda$ allora esiste una immersione elementare (totale) $h : M \rightarrow N$.

Quando $\lambda = |N|$, allora N si dice (elementarmente) univereale.

:ID: 47112750-3aa0-48a1-a11c-4860dc95be50

Sia λ un **cardinale**.

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{ob} \cup \mathcal{M}_{hom}$ una categoria di modelli e morfismi parziali di linguaggio \mathcal{L} tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{ob}$ e per ogni $A \subseteq M$, la funzione parziale identità $\text{id}_A : M \rightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{hom}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{ob}$, e $k : M \rightarrow N$ funzione parziale, se per ogni $k' \subseteq k$ finito si ha $k' \in \mathcal{M}_{hom}$, allora $k \in \mathcal{M}_{hom}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{hom}$, k è invertibile e la sua inversa $k^{-1} \in \mathcal{M}_{hom}$;

Definizione 4. Un modello $N \in \mathcal{M}_{ob}$ è λ -omogeneo se ogni $k \in \mathcal{M}_{hom}(N, N)$ di cardinalità $< \lambda$ esiste

$$\tilde{k} : N \rightarrow N$$

totale e biettivo, $\tilde{k} \in \mathcal{M}_{hom}(N, N)$, tale che $k \subseteq \tilde{k}$.

666 Modello omogeneo

Definizione 1. Un modello $N \in \mathcal{M}_{ob}$ è omogeneo se è $|N|$ -omogeneo.

Quando non è specificata la categoria \mathcal{M} si intende la categoria di tutti i modelli e le mappe elementari tra di loro. La definizione, pertanto, diventa:

Definizione 2. Una struttura N è (elementarmente) λ -omogenea se ogni mappa elementare $k : N \rightarrow N$ di cardinalità $|k| < \lambda$ si estende ad un automorfismo.

Quando $\lambda = |N|$, allora N si dice (elementarmente) omogenea.

667 Modello è ricco sse omogeneo e universale

Si utilizza la [Notazione TEORIA DEI MODELLI](#).

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una [categoria di modelli e morfismi parziali](#) di [linguaggio](#) \mathcal{L} tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k : M \dashrightarrow N$ [funzione parziale](#), se per ogni $k' \subseteq k$ [finito](#) si ha $k' \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, allora $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, k è [invertibile](#) e la sua [inversa](#) $k^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
4. gli elementi di \mathcal{M}_{hom} [preservano la verità](#) delle [formule atomiche](#);
5. se $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e N è una [struttura elementarmente equivalente](#) a M , $M \equiv N$, allora $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$.
6. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, se $h : M \dashrightarrow N$ è una [mappa elementare](#), allora $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

667.1 Teorema

Teorema 1. Sia $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ tale che la sua cardinalità $|N| \geq |\mathcal{L}|$

Sono fatti equivalenti;

1. N è [ricco](#);
2. N è [omogeneo](#) e [universale](#).

667.1.1 Dimostrazione

2. $\rightarrow 1.$ Sia $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e sia $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ tali che $|M| \leq |N|$ e tale che $|k| < |N|$. Dimostriamo che esiste una immersione $\tilde{k} : M \hookrightarrow N$, $\tilde{k} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ tale che $k \subseteq \tilde{k}$. Questo per la [caratterizzazione](#) dei modelli λ -[ricchi](#).

Siccome N è [universale](#), allora esiste una [immersione](#) $f : M \hookrightarrow N$ tale che $k \subseteq f$, $f \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$

Per la 3. esiste $f^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(N, M)$ e per categoricità, $k \circ f^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

La seguente [funzione parziale](#), quindi

$$k \circ f^{-1} : N \rightarrow N$$

ha cardinalità $|k| < |N|$.

Per [omogeneicità](#), esiste una funzione $h : N \rightarrow N$ totale e [biiettiva](#) tale che $k \circ f^{-1} \subseteq h$, e tale che $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Per la proprietà 4., questa è un [isomorfismo tra strutture del prim'ordine](#).

Sia dunque $\tilde{k} := h \circ f$. Questa è una [immersione](#) e $\tilde{k} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ poiché composizione di morfismi.

Inoltre, $k \subseteq \tilde{k}$, infatti, per ogni $a \in \text{dom } k$ (vedi [Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione](#)),

$$\tilde{k}(a) = h \circ f(a) = k \circ f^{-1} \circ f(a) = k(a)$$

poiché $f(a) \in \text{dom } f^{-1}$.

1. \rightarrow 2. La Caratterizzazione di modello lambda-ricco garantisce che N sia universale, grazie alla definizione di Componente connessa di una categoria di modelli e morfismi parziali.

Il Lemma di estensione di morfismi tra modelli ricchi garantisce che N sia omogeneo. ■

667.2 Versione alternativa

Sia λ un cardinale, e sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine tale che $|\mathcal{L}| < \lambda$.

Sia \mathcal{M} la categoria che consiste delle \mathcal{L} -strutture e delle mappe elementari tra di loro.

Sia N una \mathcal{L} -struttura.

Teorema 2. Sono fatti equivalenti:

1. N è saturo;
2. N è omogeneo e universale.

Questo è in virtù de “Modello lambda saturo sse lambda ricco”

668 Morfismi tra modelli lambda-ricchi sono elementari

Si utilizza la Notazione TEORIA DEI MODELLI.

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una categoria di modelli e morfismi parziali di linguaggio \mathcal{L} tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k : M \dashrightarrow N$ funzione parziale, se per ogni $k' \subseteq k$ finito si ha $k' \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, allora $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, k è invertibile e la sua inversa $k^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
4. gli elementi di \mathcal{M}_{hom} preservano la verità delle formule atomiche;
5. se $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e N è una struttura elementarmente equivalente a M , $M \equiv N$, allora $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$.
6. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, se $h : M \dashrightarrow N$ è una mappa elementare, allora $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Sia λ un cardinale tale che $|\mathcal{L}| \leq \lambda$

668.1 Teorema

Siano $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ dei modelli λ -ricchi. Allora, per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$, k è un morfismo elementare.

668.1.1 Dimostrazione

Sia $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$.

- Se tutte le restrizioni finite di k sono elementari, allora k è elementare: si supponga ad esempio che $M \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$; poiché $k \upharpoonright \{a_1, \dots, a_n\}$ è elementare, allora

$$N \models \varphi[k \upharpoonright \{a_1, \dots, a_n\}(a_1), \dots, k \upharpoonright \{a_1, \dots, a_n\}(a_n)]$$

ovvero $N \models \varphi[k(a_1), \dots, k(a_n)]$.

Pertanto, WLOG, si dimostra l'enunciato per k finita.

- Si costruiscono due **sottostrutture elementari** (che per 5. sono in \mathcal{M}_{ob}): $\text{dom } k \subseteq M' \preceq M$, $N' \preceq N$ ed una mappa $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ tale che $k \subseteq h$ e $h : M' \rightarrow N'$ sia biiettiva.

Per le ipotesi 3. e 4. h è un **isomorfismo** (e quindi in particolare è una **mappa elementare**) e quindi, per l'ipotesi 6. $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

- Siano ora φ una \mathcal{L} -formula, e siano $a_1, \dots, a_n \in \text{dom}(k)$ tali che $M \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Allora $a_1, \dots, a_n \in M'$ e pertanto (siccome $M' \preceq M$)

$$M' \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$$

e poiché h è un isomorfismo:

$$N' \models \varphi[ha_1, \dots, ha_n]$$

ma $N' \preceq N$ e $h \upharpoonright \text{dom } k = k$ e pertanto

$$N \models \varphi[ha_1, \dots, ha_n] \rightsquigarrow N \models \varphi[ka_1, \dots, ka_n].$$

Per ricorsione si costruisce una famiglia $\langle h_i : i < \lambda \rangle$ tale che $|h_i| < \lambda$; **si fissi** $\pi : \lambda^2 \rightarrow \lambda$ una **biiezione** tale che $j, k \leq \pi(j, k)$:

- si pone $h_0 := k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
- ai passi **limite** si considera l'unione; anche questa ha cardinalità $< \lambda$, e inoltre è in \mathcal{M}_{hom} per la proprietà 2.;
- per i passi **successori** $i + 1$, si supponga sia costruita h_j per ogni $j < i + 1$.
 - Siccome $\text{dom}(h_j)$ ha cardinalità $< \lambda$ allora anche $|\mathcal{L}(\text{dom } h_j)| < \lambda$: sia dunque

$$\langle \varphi_{j,k}(x) \mid k < \lambda \rangle$$

una **enumerazione** delle **formule consistenti** di $\mathcal{L}(\text{dom } h_j)$ in M .

Siano dunque $j, k < i$ tali che $\pi(j, k) = i$, e sia $b \in M$ testimone di $\varphi_{j,k}$ in M (ovvero $M \models \varphi_{j,k}[b]$). Poiché $|h_i| < \lambda$, siccome N è λ -ricco, esiste $c \in N$ tale che

$$h_i \cup \{(b, c)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}.$$

Si pone dunque $h_{i+1/2} := h_i \cup \{(b, c)\}$. Dunque $|h_{i+1/2}| < \lambda$.

- Siccome $\text{rng}(h_j)$ ha cardinalità $< \lambda$ allora anche $|\mathcal{L}(\text{rng } h_j)| < \lambda$: sia dunque

$$\langle \psi_{j,k}(x) \mid k < \lambda \rangle$$

una **enumerazione** delle **formule consistenti** di $\mathcal{L}(\text{rng } h_j)$ in N .

Siano dunque $j, k < i$ tali che $\pi(j, k) = i$, e sia $b \in N$ testimone di $\psi_{j,k}$ in N (ovvero $N \models \psi_{j,k}[b]$). Poiché $((h_{i+1/2})^{-1}) < \lambda$ e $(h_{i+1/2})^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$ per l'ipotesi 3., allora siccome M è λ -ricco, esiste $c \in N$ tale che

$$(h_{i+1/2})^{-1} \cup \{(b, c)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}.$$

$$\text{Si pone quindi } h_{i+1} := ((h_{i+1/2})^{-1} \cup \{(b, c)\})^{-1}.$$

Dunque sia $h := \bigcup_{i < \lambda} h_i$ e siano

$$M' = \text{dom } h, \quad N' : \text{rng } h.$$

- $k \subseteq h$, $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$ poiché ogni sua restrizione finita lo è (ad ogni passo $i < \omega \leq \lambda$ si ha che $h_i \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$), e inoltre h è iniettiva, pertanto $h \upharpoonright M' = h \upharpoonright \text{dom } h$ è una biiezione.
- $M' \preceq M$: si utilizza il [Criterio di Tarski-Vaught](#); sia $\varphi(x)$ una $\mathcal{L}(M')$ -formula consistente in M . Allora $\varphi(x)$ è una $\mathcal{L}(\text{dom } h_i)$ per qualche $i < \lambda$ (poiché ogni formula è una stringa finita), e pertanto $\varphi = \varphi_{i,k}$ per qualche $k < \lambda$. Quindi, per costruzione, esiste $b \in \text{dom } h_{\pi(i,k)+1} \subseteq M'$ tale che $M \models \varphi[b]$.
- $N' \preceq N$: si utilizza il [Criterio di Tarski-Vaught](#); sia $\psi(x)$ una $\mathcal{L}(N')$ -formula consistente in N . Allora $\psi(x)$ è una $\mathcal{L}(\text{rng } h_i)$ per qualche $i < \lambda$ (poiché ogni formula è una stringa finita), e pertanto $\psi = \psi_{i,k}$ per qualche $k < \lambda$. Quindi, per costruzione, esiste $b \in \text{rng } h_{\pi(i,k)+1} \subseteq N'$ tale che $N \models \psi[b]$. ■

669 Componente connessa di una categoria di modelli e morfismi parziali

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una [categoria di modelli e morfismi parziali](#) di [linguaggio](#) \mathcal{L} , tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k : M \dashrightarrow N$ [funzione parziale](#), se per ogni $k' \subseteq k$ [finito](#) si ha $k' \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, allora $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, k è [invertibile](#) e la sua [inversa](#) $k^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

669.1 Definizione

La [componente connessa](#) di $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ è la [sottoclasse](#) degli $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ tale che

$$\mathcal{M}_{\text{hom}}(N, M) = \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N) \neq \emptyset$$

Si osservi che M e N sono nella stessa componente connessa se e solo se $\emptyset \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ (per l'assioma 1.).

670 Caratterizzazione di modello lambda-ricco

Si utilizza la [Notazione TEORIA DEI MODELLI](#).

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una [categoria di modelli e morfismi parziali](#) di [linguaggio](#) \mathcal{L} tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k : M \dashrightarrow N$ [funzione parziale](#), se per ogni $k' \subseteq k$ [finito](#) si ha $k' \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, allora $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, k è [invertibile](#) e la sua [inversa](#) $k^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
4. gli elementi di \mathcal{M}_{hom} [preservano la verità](#) delle [formule atomiche](#);
5. se $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e N è una [struttura elementarmente equivalente](#) a M , $M \equiv N$, allora $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$.
6. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, se $h : M \dashrightarrow N$ è una [mappa elementare](#), allora $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Sia λ un [cardinale](#) tale che $|\mathcal{L}| \leq \lambda$

670.1 Proposizione

$N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ è λ -ricco se e solo se per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ di [cardinalità](#) $|M| \leq \lambda$ e per ogni $(k : M \dashrightarrow N) \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$ di [cardinalità](#) $|k| < \lambda$, esiste una [immersione](#) $h : M \hookrightarrow N$ tale che $k \subseteq h$ e $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$.

670.1.1 Dimostrazione

(\rightarrow): Segue banalmente dal fatto che N sia λ -ricco e che $|M| \leq \lambda$; è possibile aggiungere tutti i punti di M al dominio di k ; per l'ipotesi 2. si ottiene che l'unione di tutte queste mappe sia ancora in \mathcal{M}_{hom} ; poiché inoltre preserva la verità, allora è una immersione.

(\leftarrow): Sia $M' \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ qualsiasi. Se $|M'| \leq \lambda$ allora per ipotesi si ha la tesi.

Se invece $|M'| > \lambda$, sia $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M', N)$ con $|k| < \lambda$ e sia $b \in M'$ fissato. Allora esiste una [sottostruttura elementare](#) $M \preceq M'$ tale che

$$\text{dom } k \cup \{b\} \subseteq M$$

per il [Teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù](#): $|M| \leq \lambda$.

In particolare, per l'ipotesi 5., $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$. Dunque per ipotesi esiste $h : M \hookrightarrow N$ immersione che estende k a b , ed inoltre $h : M' \dashrightarrow N$. ■

671 Lemma di estensione di morfismi tra modelli ricchi

Si utilizza la [Notazione TEORIA DEI MODELLI](#).

Sia $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\text{ob}} \cup \mathcal{M}_{\text{hom}}$ una [categoria di modelli e morfismi parziali](#) di [linguaggio](#) \mathcal{L} tale che

1. per ogni $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e per ogni $A \subseteq M$, $\text{id}_A : M \dashrightarrow M$ è $\text{id}_A \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
2. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, e $k : M \dashrightarrow N$ [funzione parziale](#), se per ogni $k' \subseteq k$ [finito](#) si ha $k' \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, allora $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;

3. per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$, k è invertibile e la sua inversa $k^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$;
4. gli elementi di \mathcal{M}_{hom} preservano la verità delle formule atomiche;
5. se $M \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ e N è una struttura elementarmente equivalente a M , $M \equiv N$, allora $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$.
6. per ogni $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$, se $h : M \rightarrow N$ è una mappa elementare, allora $h \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Sia λ un cardinale tale che $|\mathcal{L}| \leq \lambda$

671.1 Teorema

Siano $M, N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ di cardinalità $|M| = |N| = \lambda$, entrambi ricchi. Allora, per ogni $k \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$ di cardinalità $|k| < \lambda$, esiste un isomorfismo:

$$\tilde{k} : M \rightarrow N$$

biettiva tale che $k \subseteq \tilde{k}$, $\tilde{k} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}(M, N)$.

671.1.1 Dimostrazione

Siano $\langle m_i \mid i < \lambda \rangle$, $\langle n_i \mid i < \lambda \rangle$ le enumerazioni di M ed N .

Si ponga $k_0 := k$. Per $\alpha < \lambda$ si effettua la seguente costruzione ricorsiva:

Ordinale successore Se $\alpha = S(\beta)$ è un ordinale successore, poiché N è ricco allora esiste $n \in N$ tale che

$$k_\beta \cup \{(m_\beta, n)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}.$$

Si pone dunque

$$k_{\beta+1/2} := k_\beta \cup \{(m_\beta, n)\}$$

Per la proprietà 3., $k_{\beta+1/2}$ è invertibile, e $(k_{\beta+1/2})^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$. Poiché M è ricco, allora esiste $m \in N$ tale che

$$(k_{\beta+1/2})^{-1} \cup \{(n_\beta, m)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}.$$

Si pone quindi $k_\alpha := ((k_{\beta+1/2})^{-1} \cup \{(n_\beta, m)\})^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$

Si ha che $m_\beta \in \text{dom } k_\alpha$ e $n_\beta \in \text{rng } k_\alpha$. Inoltre $k_\beta \subseteq k_\alpha$, poiché $k_\alpha = k_\beta \cup \{(m_\beta, n), (m, n_\beta)\}$.

Ordinale limite Se α è un ordinale limite (allora $\alpha \geq \omega$), si pone

$$k'_\alpha := \bigcup_{\beta < \alpha} k_\beta.$$

Questa è una funzione parziale; inoltre, per le assuzioni 1. e 2. questo è $\in \mathcal{M}_{\text{hom}}$. (Infatti ogni $k' \subseteq k'_\alpha$ finito è $k_{\alpha^*} \circ \text{Id}_P$ per qualche $k_{\alpha^*} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$ e $P \subseteq M$).

Poiché N è ricco, allora esiste $n \in N$ tale che

$$k'_\alpha \cup \{(m_\alpha, n)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}.$$

Questo dunque è invertibile e $(k'_\alpha \cup \{(m_\alpha, n)\})^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$; siccome M è ricco, allora esiste $m \in M$ tale che

$$(k'_\alpha \cup \{(m_\alpha, n)\})^{-1} \cup \{(n_\alpha, m)\} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}.$$

Si pone $k_\alpha := \left((k'_\alpha \cup \{(m_\alpha, n)\})^{-1} \cup \{(n_\alpha, m)\} \right)^{-1} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Si noti che $k'_\alpha \subseteq k_\alpha$, e che $m_\alpha \in \text{dom } k_\alpha$, $n_\alpha \in \text{rng } k_\alpha$.

Isomorfismo Si pone $\tilde{k} := \bigcup_{\beta < \lambda} k_\beta$. Questa è una biiezione (per costruzione), tale che $k \subseteq \tilde{k}$, ed inoltre $\tilde{k} \in \mathcal{M}_{\text{hom}}$.

Per l'assunzione 4., siccome \tilde{k} preserva la verità delle \mathcal{L} -formule atomiche, allora è un isomorfismo.

671.2 Modelli ricchi della stessa cardinalità se nella stessa componente connessa sono isomorfi

Tutti i modelli ricchi di cardinalità λ nella stessa componente connessa sono isomorfi.

672 [Riepilogo] Mappe tra strutture del prim'ordine

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e siano \mathcal{M}, \mathcal{N} due \mathcal{L} -strutture di domini, rispettivamente, M ed N .

672.1 Proprietà delle mappe tra strutture del prim'ordine

Definizione 1. Sia $\Delta \subseteq \mathcal{L}$ un insieme di formule. Una funzione (che sia totale o parziale) $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle strutture è detta Δ -morfismo se per ogni $\varphi(x) \in \Delta$ e per ogni $a \in (\text{dom } F)^x$

$$M \models \varphi(a) \implies N \models \varphi(Fa).$$

In questo caso diciamo che F preserva la verità di tutte le formule di Δ .

Osservazione. Se $F : M \rightarrow N$ è un Δ -morfismo, allora è anche un $\{\wedge\}\Delta$ -morfismo e un $\{\vee\}\Delta$ -morfismo^[197].

- Sia $\eta(x) \in \{\wedge\}\Delta$. WLOG esistono $\eta_1(x), \eta_2(x) \in \Delta$ tali che $\eta(x) = \eta_1(x) \wedge \eta_2(x)$.
Sia $a \in (\text{dom } F)^x$ tale che $M \models \eta(a)$. Allora $M \models \eta_1(a)$ e $M \models \eta_2(a)$. Quindi $N \models \eta_1(Fa)$ e $N \models \eta_2(Fa)$. Quindi $N \models \eta_1(Fa) \wedge \eta_2(Fa) = \eta(Fa)$.
- Sia $\eta(x) \in \{\vee\}\Delta$. WLOG esistono $\eta_1(x), \eta_2(x) \in \Delta$ tali che $\eta(x) = \eta_1(x) \vee \eta_2(x)$.
Sia $a \in (\text{dom } F)^x$ tale che $M \models \eta(a)$. Allora $M \models \eta_1(a)$ oppure $M \models \eta_2(a)$. Quindi $N \models \eta_1(Fa)$ oppure $N \models \eta_2(Fa)$. Quindi $N \models \eta_1(Fa) \vee \eta_2(Fa) = \eta(Fa)$.

Definizione 2. Una *funzione* (che sia *totale* o *parziale*) $F : M \rightarrow N$ tra i *domini* delle strutture è detta *mappa elementare* se per ogni *formula* $\varphi(x)$ e per ogni $a \in (\text{dom } F)^x$ nel *dominio* di F , si ha

$$M \models \varphi(a) \rightarrow N \models \varphi(Fa)$$

ovvero se F è un *Δ -morfismo* per $\Delta = \mathcal{L}$ l'*insieme di tutte le formule*.

672.2 Mappe TOTALI tra strutture del prim'ordine

672.2.1 Morfismo tra strutture del prim'ordine

Definizione 3. Una *funzione totale* $F : M \rightarrow N$ tra i *domini delle due strutture* è detta *morfismo* se

- per ogni *simbolo di relazione* R di *arietà* n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^M \rightarrow (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^N$$

- per ogni *simbolo di funzione* g di *arietà* n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$F[g^M(a_1, \dots, a_n)] = g^N[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

Proposizione 4. Sia $F : M \rightarrow N$ funzione totale. Sono fatti equivalenti:

1. F è un morfismo
2. F è *Δ -morfismo* per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{at}}$ l'*insieme delle formule atomiche*, ovvero per ogni *formula atomica* $\varphi(x)$ e per ogni $a \in M^x$ si ha

$$M \models \varphi(a) \rightarrow N \models \varphi(Fa)$$

672.2.2 Morfismo pieno tra strutture del prim'ordine

Definizione 5. Una *funzione totale* $F : M \rightarrow N$ tra i *domini delle due strutture* è detta *morfismo pieno* se

- per ogni *simbolo di relazione* R di *arietà* n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^M \longleftrightarrow (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^N$$

- per ogni *simbolo di funzione* g di *arietà* n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$F[g^M(a_1, \dots, a_n)] = g^N[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

Proposizione 6. Caratterizzazione come *Δ -morfismo*: **DA FINIRE**

672.2.3 Immersione tra strutture del prim'ordine

Definizione 7. Una funzione totale iniettiva $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta immersione se

- per ogni simbolo di relazione R di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^M \longleftrightarrow (F(a_1), \dots, F(a_n)) \in R^N$$

- per ogni simbolo di funzione g di arietà n e per ogni $a_1, \dots, a_n \in M$,

$$F[g^M(a_1, \dots, a_n)] = g^N[F(a_1), \dots, F(a_n)]$$

Una immersione è un morfismo pieno iniettivo.

Proposizione 8. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione totale. Sono fatti equivalenti:

1. $F : M \rightarrow N$ è una immersione;
2. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\text{qf}}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula senza quantificatori) e per ogni $a \in M^x$

$$M \vDash \varphi(a) \longleftrightarrow N \vDash \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} (eventualmente parziale) sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{qf}}$.

3. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\text{at}}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula atomica) e per ogni $a \in M^x$

$$M \vDash \varphi(a) \longleftrightarrow N \vDash \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} (eventualmente parziale) sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{at}}$.

Immersione elementare

Definizione 9. Una funzione totale $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta immersione elementare se

- F è una immersione;
- il range $\text{ran } F = F[M]$, visto come sottostruttura di \mathcal{N} , è sottostruttura elementare

Proposizione 10. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione totale. Sono fatti equivalenti:

1. F è una immersione elementare;
2. F è una mappa elementare, ovvero per ogni formula $\varphi(x)$ e per ogni $a \in M^{|x|}$

$$M \vDash \varphi(a) \rightarrow N \vDash \varphi(Fa)$$

3. il range $\text{ran } F = F[M]$, visto come sottostruttura di \mathcal{N} , è sottostruttura elementare, e $F : M \rightarrow F[M]$ è un isomorfismo.

Inoltre, ogni immersione elementare si estende ad un isomorfismo.

672.2.4 Isomorfismo tra strutture del prim'ordine

Definizione 11. Una funzione totale biettiva $F : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è detta isomorfismo se sia F che la sua inversa F^{-1} sono morfismi tra le due strutture.

Proposizione 12. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione totale biettiva. Sono fatti equivalenti:

1. $F : M \rightarrow N$ è un isomorfismo;
2. per ogni formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ e per ogni $a \in M^x$

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}$ (ovvero delle mappe elementari).

3. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\text{qf}}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula senza quantificatori) e per ogni $a \in M^x$

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{qf}}$.

4. per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}_{\text{at}}$ (ovvero per $\varphi(x)$ formula atomica) e per ogni $a \in M^x$

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(Fa)$$

ovvero sia F che F^{-1} sono dei Δ -morfismi per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{at}}$.

Indebolendo un po' l'ipotesi 2. si ottiene la seguente proposizione:

Proposizione 13. Sia $F : M \rightarrow N$ una funzione totale. Sono fatti equivalenti:

1. F è un isomorfismo.
2. F è una mappa elementare biettiva.

672.3 Mappe PARZIALI tra strutture del prim'ordine

672.3.1 Morfismo parziale tra strutture del prim'ordine

Definizione 14. Una funzione parziale $f : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è un morfismo parziale se è un Δ -morfismo per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{at}}$ l'insieme delle formule atomiche, ovvero

per ogni formula atomica $\varphi(x)$ e per ogni $a \in (\text{dom } f)^x$ si ha

$$M \models \varphi(a) \rightarrow N \models \varphi(fa)$$

672.3.2 Isomorfismo parziale tra strutture del prim'ordine

Definizione 15. Una funzione parziale iniettiva $f : M \rightarrow N$ tra i domini delle due strutture è un isomorfismo parziale o immersione parziale se è un Δ -morfismo per $\Delta = \mathcal{L}_{\text{qf}}$ l'insieme delle formule senza quantificatori, ovvero

per ogni formula senza quantificatori $\varphi(x)$ e per ogni $a \in (\text{dom } f)^x$ si ha

$$M \models \varphi(a) \rightarrow N \models \varphi(fa)$$

Proposizione 16. Sia $f : M \rightarrow N$ una funzione parziale tra i domini delle due strutture. Sono fatti equivalenti:

1. $f : M \rightarrow N$ è un isomorfismo parziale;
2. esiste un unico isomorfismo totale $g : \langle \text{dom } f \rangle_{\mathcal{M}} \rightarrow \langle \text{rng } f \rangle_{\mathcal{N}}$ tale che $f \subseteq g$ (dove $\langle A \rangle_{\mathcal{M}}$ indica la sottostruutura di \mathcal{M} generata dall'insieme $A \subseteq M$).

673 Teoria con eliminazione dei quantificatori

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e sia T una \mathcal{L} -teoria soddisfacibile.

673.1 Eliminazione dei quantificatori sintattica

Diciamo che T ammette l'eliminazione dei quantificatori se per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x)$ esiste una formula senza quantificatori $\psi(x)$ tale che

$$T \vdash \varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x)$$

(vedi Conseguenza logica)

673.2 Eliminazione dei quantificatori semantica

Diciamo che T ammette l'eliminazione dei quantificatori semantica se ogni isomorfismo parziale tra modelli di T è una mappa elementare.

673.3 Eliminazione dei quantificatori

Teorema 1. Sono fatti equivalenti:

1. T ammette l'eliminazione dei quantificatori;
2. ogni isomorfismo parziale tra modelli di T è una morfismo elementare.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Ovvio.

(2. \Rightarrow 1.): Segue banalmente dal Lyndon-Robinson Lemma. ■

674 Chiarimenti sui Passaggi Algebrici

I passaggi segnati con “WHY” nella dimostrazione dell'isomorfismo tra omologia singolare e cellulare si basano su due fatti generali di algebra omologica riguardanti i moduli e le mappe iniettive.

674.1 1. Isomorfismo di quozienti tramite iniezione (Primo WHY)

Il passaggio:

$$\frac{H_q(X_q)}{\text{Im } \partial_{q+1}^{(q+1,q)}} \cong \frac{\text{Im } \pi_q^{(q,q-1)}}{\text{Im } \left(\pi_q^{(q,q-1)} \circ \partial_{q+1}^{q+1,q} \right)}$$

è giustificato dal seguente lemma generale:

Lemma 1. Siano M, N due R -moduli e $\varphi : M \rightarrow N$ un omomorfismo **iniettivo**. Sia $K \subseteq M$ un sottomodulo. Allora φ induce un isomorfismo tra i quoienti:

$$\frac{M}{K} \cong \frac{\varphi(M)}{\varphi(K)}$$

Dimostrazione. Consideriamo la restrizione di φ alla sua immagine, $\tilde{\varphi} : M \rightarrow \text{Im}(\varphi)$. Poiché φ è iniettiva, $\tilde{\varphi}$ è un isomorfismo di moduli. Un isomorfismo mappa sottomoduli in sottomoduli e preserva i quoienti. Specificamente:

1. L'immagine di M tramite $\tilde{\varphi}$ è $\varphi(M)$ (ovvio).
2. L'immagine del sottomodulo K tramite $\tilde{\varphi}$ è $\varphi(K)$.

Pertanto, l'isomorfismo $\tilde{\varphi}$ scende al quoiente:

$$\frac{M}{K} \xrightarrow{\cong} \frac{\varphi(M)}{\varphi(K)}, \quad [m] \mapsto [\varphi(m)].$$

Nel nostro caso specifico:

- $M = H_q(X_q)$
- $N = H_q(X_q, X_{q-1})$
- $\varphi = \pi_q^{(q,q-1)}$ (che sappiamo essere iniettiva)
- $K = \text{Im } \partial_{q+1}^{(q+1,q)}$

Quindi il quoiente viene preservato mappando tutto tramite π_q . ■

674.2 2. Nucleo di una composizione con iniezione (Secondo WHY)

Il passaggio:

$$\ker \partial_q^{(q,q-1)} \cong \ker \left(\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)} \circ \partial_q^{(q,q-1)} \right)$$

è giustificato dal fatto che comporre con una funzione iniettiva non cambia il nucleo della funzione precedente.

Lemma 2. Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due omomorfismi di moduli. Se g è **iniettiva**, allora:

$$\ker(f) = \ker(g \circ f)$$

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare la doppia inclusione (o l'uguaglianza diretta). Ricordiamo che $x \in \ker(g \circ f) \iff g(f(x)) = 0$.

Poiché g è iniettiva, il suo nucleo è banale, ovvero:

$$g(y) = 0 \iff y = 0.$$

Sostituendo y con $f(x)$, otteniamo:

$$g(f(x)) = 0 \longleftrightarrow f(x) = 0 \longleftrightarrow x \in \ker(f).$$

Quindi i due insiemi coincidono esattamente.

Nel nostro caso specifico:

- $f = \partial_q^{(q,q-1)}$
- $g = \pi_{q-1}^{(q-1,q-2)}$ (che sappiamo essere iniettiva)
- $g \circ f = d_q$

Pertanto $\ker \partial_q^{(q,q-1)} = \ker d_q$. ■

Vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)

675 Funzioni primitive ricorsive

Questa definizione può essere [ampliata](#)

L'[insieme](#) \mathcal{P} delle **funzioni primitive ricorsive** è la più piccola [classe](#) contenente:

- la funzione costante nulla,

$$c_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$$

- la [funzione successore](#):

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$$

- le funzioni proiezione U_i^k , per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $0 < i \leq k$:

$$\begin{aligned} U_i^k : \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

In particolare, la funzione $U_1^1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è la funzione identità;

e chiusa per le seguenti:

675.1 Schema di Composizione di funzioni primitive ricorsive

Siano $k, \ell \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ e per ogni $1 \leq i \leq k$: $g_i : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ sono funzioni primitive ricorsive, allora la funzione $f : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f(x_1, \dots, x_\ell) := h(g_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, g_k(x_1, \dots, x_\ell))$$

è ricorsiva primitiva.

675.2 Schema di Ricorsione primitiva

Sia $k \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ sono funzioni ricorsive primitive allora la funzione $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definita dalle condizioni

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k) \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

è ricorsiva primitiva. Notiamo che questa funzione esiste per il [Teorema di Ricorsione](#).

Vedi la [generalizzazione](#).

675.3 Osservazione

Tutte le funzioni primitive ricorsive sono [funzioni totali](#).

676 Altezza di una funzione ricorsiva primitiva

Ogni funzione in \mathcal{P} è ottenuta a partire dalle funzioni di base applicando composizione o ricorsione un numero finito di volte.

Pertanto si è creata una [sequenza](#) di famiglie di funzioni $\langle \mathcal{P}_n \mid n \in \omega \rangle$ (vedi [Ordinale omega](#)), dove

$$\mathcal{P}_0 = \{c_0, S\} \cup \{U_i^k \mid 1 \leq i \leq k\}$$

e \mathcal{P}_{n+1} è l'[unione](#) di \mathcal{P}_n con tutte le funzioni che possono essere ottenute applicando una sola volta composizione o ricorsione a partire dalle funzioni \mathcal{P}_n .

Quindi $\mathcal{P}_n \subseteq \mathcal{P}_{n+1}$ e $\bigcup_{n \in \omega} \mathcal{P}_n = \mathcal{P}$.

Si ha una nozione di altezza

$$\text{ht} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$$

e a ciascuna funzione ricorsiva f associa il [più piccolo](#) $n \in \mathbb{N}$ tale che $f \in \mathcal{P}_n$.

677 Esempi di funzioni primitive ricorsive

Sono funzioni ricorsive primitive le seguenti:

- le funzioni costanti $c_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto n$;
- la somma;
- il prodotto;
- l'esponenziale $(x, y) \mapsto x^y$;
- il fattoriale $x \mapsto x!$;
- la funzione predecessore

$$\text{pr}(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x - 1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- la funzione differenza troncata

$$x \dot{-} y := \begin{cases} 0 & \text{se } x < y \\ x - y & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- la funzione distanza: $(x, y) \mapsto |x - y|$;
- le funzioni massimo e minimo $\max(x, y), \min(x, y)$ nonché le loro versioni per insiemi **finiti** di cardinalità $k > 2$: \max_k, \min_k ;
- la **funzione caratteristica** χ_A per $A \in \{\leq, =, \geq, <, >\}$.

677.1 Funzione segno e segno segnato per i naturali

Sono funzioni ricorsive primitive le

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad \overline{\operatorname{sgn}}(x) := \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

678 Biiezione canonica tra N e prodotti cartesiani di N

Vedi: [Insieme dei numeri naturali MK](#)

678.1 Caso base per n=2

La biiezione

$$\begin{aligned} \mathbf{J} : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{1}{2}(x + y)(x + y + 1) + x \end{aligned}$$

è **ricorsiva primitiva**, poiché lo sono somma e prodotto.

Siano inoltre $(\cdot)_0, (\cdot)_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ le **inverse**, ovvero tali che:

$$\begin{aligned} (\mathbf{J}(x, y))_0 &= x \\ (\mathbf{J}(x, y))_1 &= y \end{aligned} \quad \mathbf{J}((\xi)_0, (\xi)_1) = \xi$$

Queste sono **funzioni ricorsive primitive** [198].

Osservazione. Si noti che $\mathbf{J}(x, y) \geq x, y$, ma in particolare, se $(x, y) \neq (0, 0)$ e $(x, y) \neq (0, 1)$ si ha

$$\mathbf{J}(x, y) > x, y$$

678.2 Generalizzazione

Si definiscono le seguenti biiezioni, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\mathbf{J}^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$$

come:

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^1(x_1) &= x_1 \\ \mathbf{J}^{k+1}(x_1, \dots, x_{k+1}) &:= \mathbf{J} \left(x_1, \mathbf{J}^k(x_2, \dots, x_{k+1}) \right)\end{aligned}$$

Si hanno le conseguenti inverse $(\cdot)_i^k$ per $1 \leq i \leq k$, definite da, per ogni $x \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{J}^k \left((x)_1^k, (x)_2^k, \dots, (x)_k^k \right) = x$$

È possibile dimostrare che queste siano [funzioni ricorsive primitive](#).

Si noti, inoltre, che [espanendo la definizione di funzione ricorsiva primitiva](#),

$$(\mathbf{J}^k)^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^k$$

è una funzione ricorsiva primitiva.

679 Operatore di minimizzazione non limitato

Vedi: [Insieme dei numeri naturali MK](#)

Definizione 1. L'operatore μ di minimizzazione non limitato porta una [funzione](#), anche [parziale](#), $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ nella [funzione parziale](#) $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \mu_z (h(x_1, \dots, x_k, z) = 0)$$

che ha per [dominio](#) tutti quei punti $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ per cui esiste $z \in \mathbb{N}$ tale che

1. per ogni $u \leq z$, $(x_1, \dots, x_k, u) \in \text{dom } h$;
2. $h(x_1, \dots, x_k, z) = 0$.

Per ogni punto del dominio $(x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = \min \{ z \mid h(x_1, \dots, x_k, z) = 0 \}$$

(vedi [Elemento Minimo](#)).

680 Funzioni ricorsive

Vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#).

Tutte le funzioni sono da considerarsi potenzialmente [parziali](#).

680.1 Definizione

Questa definizione può essere [ampliata](#) a funzioni in più dimensioni.

L'[insieme](#) \mathcal{R} delle **funzioni ricorsive** è la più piccola [classe](#) contenente:

- la funzione costante nulla,

$$c_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto 0$$

- la [funzione successore](#):

$$S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : x \mapsto x + 1$$

- le funzioni proiezione U_i^k , per ogni $k \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $0 < i \leq k$:

$$\begin{aligned} U_i^k : \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

In particolare, la funzione $U_1^1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è la funzione identità;

e chiusa per:

680.1.1 Schema di Composizione di funzioni ricorsive

Siano $k, \ell \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ e per ogni $1 \leq i \leq k$: $g_i : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ sono funzioni ricorsive, allora la funzione $f : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f(x_1, \dots, x_\ell) := h(g_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, g_k(x_1, \dots, x_\ell))$$

è ricorsiva. In particolare, il [dominio](#) di f è composto di tutti e soli gli $(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ tali che:

1. $\forall i, (x_1, \dots, x_\ell) \in \text{dom } g_i$;
2. $(g_1(x_1, \dots, x_\ell), \dots, g_k(x_1, \dots, x_\ell)) \in \text{dom } h$.

680.1.2 Schema di Ricorsione di funzioni ricorsive

Sia $k \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$ e $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ sono funzioni ricorsive allora la funzione $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definita dalle condizioni

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k) \\ f(x_1, \dots, x_n, y+1) = h(x_1, \dots, x_k, y, f(x_1, \dots, x_n, y)) \end{cases}$$

è ricorsiva.

Notiamo che questa funzione esiste per il [Teorema di Ricorsione](#).

In particolare, il [dominio](#) di f è composto di tutti e soli gli $(x_1, \dots, x_k, y) \in \mathbb{N}^{k+1}$ tali che

1. $(x_1, \dots, x_k, 0) \in \text{dom } g$;
2. $\forall z < y$ si ha che $(x_1, \dots, x_k, z, f(x_1, \dots, x_k, z)) \in \text{dom } h$

Vedi la [generalizzazione](#).

680.1.3 Schema di minimizzazione

Se $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione ricorsiva allora applicando l'operatore μ si ottiene una funzione ricorsiva $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$:

$$f(x_1, \dots, x_k) = \mu_z (h(x_1, \dots, x_k, z) = 0)$$

che ha per dominio tutti quei punti $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{N}^k$ per cui esiste $z \in \mathbb{N}$ tale che

1. per ogni $u \leq z$, $(x_1, \dots, x_k, u) \in \text{dom } h$;
2. $h(x_1, \dots, x_k, z) = 0$.

Osservazione. Notiamo che se esiste un unico \tilde{z} tale che $h(x_1, \dots, x_k, \tilde{z}) = 0$, allora

$$\mu_z (h(x_1, \dots, x_k, z) = 0) = \tilde{z}$$

Osservazione. Ogni funzione ricorsiva primitiva è ricorsiva: $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{R}$.

680.2 Definizione equivalente di funzioni ricorsive

Sia \mathcal{F} la più piccola famiglia di funzioni $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ contenente le funzioni $U_i^k, +, \cdot, \chi_{\leq}$ e chiusa per composizione e applicazioni dell'operatore di minimizzazione a funzioni totali. Allora

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}.$$

La dimostrazione si articola tramite una serie di lemmi.

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi Insieme dei numeri naturali MK) con i prediciati k -ari (ovvero con k variabili libere), per mezzo degli insiemi di verità.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

680.2.1 Lemma 1

Le funzioni sgn e $\overline{\text{sgn}}$ appartengono ad \mathcal{F} . (Vedi “Esempi di funzioni primitive ricorsive” per la definizione di queste funzioni).

680.2.2 Lemma 2

La collezione dei prediciati le cui funzioni caratteristiche sono in \mathcal{F} (ovvero gli \mathcal{F} -predicati) è chiusa per intersezioni, unioni e complementi. In particolare $\leq, \geq, =, \neq, <, >$ sono \mathcal{F} -predicati.

680.2.3 Lemma 3

Le funzioni costanti c_n e la funzione successore S appartengono ad \mathcal{F} .

680.2.4 Lemma 4

Gli \mathcal{F} -predicati sono chiusi per quantificazioni limitate. Se $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ è un \mathcal{F} -predicato allora lo sono anche $Q_1, Q_2 \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ definiti da:

$$\begin{aligned} Q_1(\mathbf{x}, y) &\longleftrightarrow \exists z \leq y P(\mathbf{x}, y) \\ Q_2(\mathbf{x}, y) &\longleftrightarrow \forall z \leq y P(\mathbf{x}, y). \end{aligned}$$

680.2.5 Lemma 5

Le seguenti funzioni appartengono ad \mathcal{F} :

- $J, (\cdot)_0, (\cdot)_1$ (vedi “[Biiezione canonica tra N e prodotti cartesiani di N](#)”);
- Res (vedi “[Quoziente, resto, MCD e mcm sono funzioni ricorsive primitive](#)” per una definizione);
- $\beta, \ell, ((\cdot), \cdot)$ (vedi “[Codifica delle sequenze finite tramite beta di Godel](#)”)

680.2.6 Lemma 6

Le [funzioni primitive ricorsive](#) sono in \mathcal{F} : $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{F}$. In particolare, i [predicati primitivi ricorsivi](#) sono \mathcal{F} -predicati.

681 Inversa di una funzione totale iniettiva e ricorsiva è ricorsiva

Vedi: [Insieme dei numeri naturali MK](#)

Proposizione 1. Sia $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una [funzione totale iniettiva](#). Se f è una [funzione ricorsiva](#), allora la [funzione parziale](#) $f^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è [ricorsiva](#).

Dimostrazione. Sia

$$\begin{aligned} h : \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\longmapsto |f(y) - x| \end{aligned}$$

che è una funzione ricorsiva poiché la [distanza](#) è una [funzione ricorsiva primitiva](#), a cui è applicato lo [schema di composizione](#).

Allora^[199]

$$f^{-1}(x) = \mu_y (h(x, y) = 0)$$

■

682 Tesi di Church

Vedi: [Insieme dei numeri naturali MK](#)

682.1 Tesi di Church

Una funzione è calcolabile da un computer se e solo se è [ricorsiva](#).

683 Funzione caratteristica

684 Quoziente, resto, MCD e mcm sono funzioni ricorsive primitive

Vedi: [Insieme dei numeri naturali MK](#)

684.1 Quoziente e resto

Sono [funzioni ricorsive primitive](#):

- la funzione $\text{Quoz}(m, n)$ che calcola il [quoziante della divisione intera](#) di m per n quando $n > 0$, e 0 altrimenti;
- la funzione $\text{Res}(m, n)$ che calcola il resto della divisione intera di m e n quando $n > 0$, e m altrimenti.

Per ogni $m, n \in \mathbb{N}$ vale

$$m = \text{Quoz}(m, n) \cdot n + \text{Res}(m, n)$$

684.2 MCD mcm

Il [massimo comun divisore](#) e il [minimo comune multiplo](#) sono funzioni ricorsive primitive.

685 MCD

686 mcm

687 Funzioni ricorsive in più dimensioni

Vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#).

Le funzioni [possono essere PARZIALI](#)

Definizione 1. È possibile espandere la definizione di [funzione \(primitiva\) ricorsiva](#) alle funzioni

$$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^\ell : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_\ell(x))$$

con $\ell > 1$: infatti, diremo che tale funzione è (primitiva) ricorsiva sse lo sono tutte le $f_i = f \circ U_i$ per $i = 1, \dots, \ell$.

Osservazione. Si noti che:

1. Considerando la [biiezione canonica](#) $J^\ell : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ poiché le sue [inverse](#) $(\cdot)_i^\ell$ per $i = 1, \dots, \ell$ sono [ricorsive primitive](#), si ha che

$$(J^\ell)^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^\ell : x \mapsto ((x)_1^\ell, \dots, (x)_\ell^\ell)$$

è una funzione ricorsiva primitiva.

2. Equivalentemente, la funzione

$$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^\ell : x \mapsto (f_1(x), \dots, f_\ell(x))$$

è ricorsiva primitiva se e solo se lo è la funzione

$$\mathbf{J}^\ell \circ f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}.$$

688 Funzioni primitive ricorsive in più dimensioni

689 Insieme ricorsivo

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i [predicati k-ari](#) (ovvero con k [variabili libere](#)), per mezzo degli [insiemi di verità](#). Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

Definizione 1. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è [ricorsivo](#) se la sua [funzione caratteristica](#) $\chi_P : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è una [funzione ricorsiva](#).

Osservazione. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è ricorsivo se e solo se $\mathbf{J}^k[P]$ è ricorsivo (vedi [Biiezione canonica tra N e prodotti cartesiani di N e Immagine punto a punto di due classi MK](#))

690 Insieme ricorsivo primitivo

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i [predicati k-ari](#) (ovvero con k [variabili libere](#)), per mezzo degli [insiemi di verità](#). Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

Definizione 1. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è [ricorsivo primitivo](#) se la sua [funzione caratteristica](#) $\chi_P : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è una [funzione ricorsiva primitiva](#).

Osservazione. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è ricorsivo primitivo se e solo se $\mathbf{J}^k[P]$ è ricorsivo primitivo (vedi [Biiezione canonica tra N e prodotti cartesiani di N e Immagine punto a punto di due classi MK](#))

691 Geometria Superiore [CORSO]

691.1 Prima Parte

- Introduzione: definizione di varietà differenziabile, funzioni C^∞ , definizione di diffeomorfismo.
- Forme differenziali: algebra delle forme differenziali con il prodotto esterno, differenziale di una k -forma.
- Campo conservativo nel piano e nello spazio.
- Coomologia di De Rham.
- Coomologia di De Rham di \mathbb{R} (Esempio 5.1.3 di) e \mathbb{R}^n (Corollario 5.3.6 di , non dimostrato).
- Diffeomorfismo induce k -esimi gruppi di omologia isomorfi.

- Pullback e proprietà (Definizione 4.1.4 e Proposizione 4.1.5 di , *non dimostrata*).
- Esempio 5.1.19 di .
- Definizione 5.1.6 di e paragrafo precedente.
- Definizione 5.1.20 e Osservazione 5.1.21 di .
- Definizione di Complesso di Cocatene.
- Definizione di morfismo tra complessi di cocatene.
- Definizione di Successione esatta Corta di complessi di cocatene.
- Teorema 5.1.23 di .
- Sezione 5.2 di : Teorema 5.2.1, Definizione 5.2.2, Osservazione 5.2.3.
- Sezione 26.2 di (Coomologia di \$).
- Problema 26.2 (pagina 295) di .
- Esempio 5.3.7 di , (vedi anche Teorema 5.3.5 di , *non dimostrato*).
- Definizione 4.2.6, Osservazione 4.2.9 e Proposizione 4.2.10 (*non dimostrata*), Esempio 4.2.13 di .
- Definizione 4.3.5 di (Integrazione di forme differenziali a supporto compatto).
- Ruolo della forma volume nel calcolo di $H_{dR}^n(\mathbb{S}^n)$ tramite il Teorema di Stokes (Teorema 4.5.12 e Corollario 4.5.15(1) di).
- $\int_{\mathbb{S}^n} : H^n(\mathbb{S}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è isomorfismo: ultime 7 righe di pagina 259 di .
- Teorema di invarianza omotopica per la coomologia di de Rham: Corollario 5.4.7 di (*non dimostrato*).
- Definizione di spazi omotopicamente equivalenti (Definizioni 5.4.1 e 5.4.4 di).
- Calcolo della coomologia di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: Esempio 5.3.8 di .
- Calcolo della coomologia del Toro: Sezione 28.1 di .
- Esempio 4.2.14 di .
- Ultimi 3 righe di pagina 259 di :
$$\omega \in A^n(\mathbb{S}^n) \text{ esatta sse } \int_{\mathbb{S}^n} \omega = 0.$$
- Per n dispari:
$$\omega \in A^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) \text{ esatta sse } \int_{\mathbb{P}^n} \omega = 0.$$
- Non esistono campi vettoriali mai nulli su \mathbb{S}^n , per n pari.
- Coomologia del nastro di Moebius: è omotopo a \mathbb{S}^1 .
- Formula di Künneth: Teorema 5.7.5 di (*non dimostrato*).
 - calcolo della coomologia di $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$;

- calcolo della coomologia di $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$, per $m < n$;
- calcolo della coomologia di $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$.
- Corollario: $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n \not\cong \mathbb{S}^{2n}$ non sono diffeomeorfi.
- Definizione 5.8.1 di .
- Teorema *non dimostrato*: ogni varietà differenziabile ammette un ricoprimento aciclico. (Teorema 5.8.8 di).
- Proposizione 5.8.3 di .
- Definizione 5.5.1, Osservazione 5.5.2 e Esempio 5.5.3 di .
- *Osservazione/Esercizio*: se $\omega \in A_c^k(M)$ allora $d\omega \in A_c^{k+1}(M)$ poiché $\text{supp } d\omega \subseteq \text{supp } \omega$.
- Esempio di funzione C^∞ a supporto compatto sempre non-negativa:

$$f := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

- Corollario 5.5.12 di (*non dimostrato*).
- Osservazione 5.5.13 di .
- *Osservazione*: la coomologia a supporto compatto non è invariante per omotopia, come testimoniano $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, \{p\}$, tutti omotopi tra loro.
- Lemma 5.1.22 di .
- Definizione 5.5.7, “successione di Mayer-Vietoris a supporto compatto” e Teorema 5.5.8 (*dimostrata solo suriettività di s*) di .
- *Proposizione*: se M, N sono diffeomorfe, allora hanno coomologia a supporto compatto isomorfe (se F è diffeomorfismo allora F è propria: vedi Osservazione 5.5.6 di).
- Corollario 5.6.7 e Osservazione 5.6.8 di .
- Dualità di Poincaré (da):
 - Proposizione 5.6.2 (*non dimostrata*);
 - Lemma 5.6.4 (*non dimostrato*);
 - Dimostrazione per induzione della Dualità di Poincaré (penso diversa dal Teorema 5.6.6).
- Corollario 5.6.9 di .
- *Proposizione*: se M è orientabile, connessa e compatta

$$\omega \in A^n(M) \text{ è esatta} \iff \int_M \omega = 0$$

(con dimostrazione).

- Corollario 4.5.15(ii) di .

- Calcolo delle superfici compatte orientabili S_g : (vedi anche la Sezione 28.2 di).
- Esercizio 5.27 e Esercizio 5.28 di (risolti in classe, vedi).

L'ultima lezione è un richiamo di Analisi Complessa e un'introduzione alla seconda parte del corso.

691.2 Seconda Parte

691.2.1 Lezione 1

- Prefascio di gruppi
- Categoria degli aperti di uno spazio topologico
- Esempi di Prefasci
- Fascio
- Fascio come funtore
- Sottoprefascio
- Funzione localmente costante
- Funzione localmente costante sse costante sulle componenti connesse
- Fascio di gruppo localmente costante
- Fascio grattacielo
- Morfismo di prefasci
- [BROKEN LINK: 4a3a8a78-5cae-4d2f-9f7a-4cbfaa4b97d51]
- Esempi di morfismi di prefasci
- Spiga di un prefascio

691.2.2 Lezione 2

- Esempi di spighe
- Morfismo di fasci induce omomorfismo tra spighe
- Fascio associato ad un prefascio
- Fascio associato ad un sottoprefascio
- Fascio nucleo
- Fascio immagine
- Morfismo di fasci iniettivo
- Morfismo di fasci suriettivo
- Successione di fasci esatta
- Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite sezioni

Alcuni fatti sulle funzioni olomorfe:

- Funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette primitiva
- Logaritmo complesso è olomorfo su un aperto semplicemente connesso
- Funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette radice m-esima

Morfismo exp tra fasci è suriettivo:

- Mappa esponenziale tra fasci di funzioni olomorfe

691.2.3 Lezione 3

- Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite spighe
- Caratterizzazione morfismo di fasci iniettivo tramite spighe
- Esattezza di successione di fasci rispetto alle sezioni globali
- Atlante complesso
- Struttura Complessa
- Varietà Complessa
- Superficie di Riemann
- [BROKEN LINK: 40333d07-ddb5-4df6-bbfe-85e21ab20dc3]
- Teorema di classificazione delle superfici topologiche
- Genere di una Superficie di Riemann
- Sfera di Riemann
- Esempi fondamentali di varietà complesse
- Struttura Complessa per le sfere
- Toro complesso

691.2.4 Lezione 4

- Punto isolato
- Punto di accumulazione
- Ordine di una funzione olomorfa
- Comportamento locale di una funzione analitica
- Principio di identità per funzioni olomorfe
- Funzione olomorfa iniettiva è biolomorfismo locale
- Funzione olomorfa su una superficie di Riemann
- Fascio delle funzioni olomorfe su una superficie di Riemann

- Teorema del massimo modulo
- Funzione olomorfa su una superficie di Riemann compatta a valori complessi
- Principio di identità per funzioni olomorfe su Superfici di Riemann
- Singolarità isolata (Analisi Complessa)
- Funzione meromorfa su una superficie di Riemann
- Fascio delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann

691.2.5 Lezione 5

- Ordine di una funzione meromorfa
- Ordine di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann
- Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann
- Funzione olomorfa tra superfici di Riemann
- Isomorfismo tra superfici di Riemann
- Sfera di Riemann biolomorfa al piano proiettivo complesso
- Principio di identità per funzioni olomorfe su Superfici di Riemann (di nuovo)
- Teorema della mappa aperta (superfici di Riemann)
- Funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatto
- Corrispondenza funzioni meromorfe su una superficie di Riemann e funzioni olomorfe sulla Sfera di Riemann

691.2.6 Lezione 6

- Grafico di funzioni olomorfe è superficie di Riemann
- Teorema della funzione implicita complesso
- Superficie di Riemann definita tramite Teorema della funzione implicita
- Curva Piana affine liscia complessa
- Curva Piana proiettiva liscia complessa
- Sottovarietà complessa dello spazio proiettivo
- Superficie di Riemann proiettiva
- Forma normale locale per superfici di Riemann
- Molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann
- Esempio di calcolo delle molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann
- Punto di ramificazione per una funzione tra superfici di Riemann

691.2.7 Lezione 7

- ☒ Teorema del Grado per olomorfismi tra superfici di Riemannn
- ☒ Cardinalità della fibra di un olomorfismo tra superfici di Riemann
- ☒ Funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatte induce rivestimento topologico
- ☒ Caratterizzazione isomorfismo tra superfici di Riemann tramite grado
- ☒ Somma ordini di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann è nulla
- ☒ Caratterizzazione sfera di Riemann tramite meromorfismo
- ☒ Caratteristica di Eulero-Poincaré:
- ☒ Formula di Hurewicz (Superfici di Riemann)
- ☒ Genere topologico di una Superficie di Riemann non cresce per olomorfismi
- ☒ Funzione olomorfa a valori nella sfera di Riemann ramifica
- ☒ Funzione olomorfa tra superfici di Riemann di genere uno è rivestimento topologico
- ☒ Molteplicità dei punti di una Curva Piana affine liscia complessa

691.2.8 Lezione 8

- ☒ Genere topologico di un curva piana proiettiva liscia complessa

691.2.9 Lezione 9

- ☒ Genere topologico di un curva piana proiettiva liscia complessa
- ☒ Mappe tra tori complessi
- ☒ Isomorfismo tra tori complessi
- ☒ Classificazione dei tori complessi
- ☒ Gruppo delle funzioni in \mathbb{Z}
- ☒ Divisore di una superficie di Riemann

691.2.10 Lezione 10

- ☒ Divisore di una funzione meromorfa
- ☒ Divisori linearmente equivalenti di una superficie di Riemann
- ☒ Gruppo di Picard di una superficie di Riemann
- ☒ Caratterizzazione sfera di Riemann tramite gruppo di Picard
- ☒ Pic0 di una superficie di Riemann
- ☒ Divisore effettivo di una superficie di Riemann

- Pullback di un divisore tra superfici di Riemann
- Divisore di ramificazione di una funzione olomorfa
- Fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann
- Sezioni globali del fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann
- Divisori linearmente equivalenti inducono fasci isomorfi

691.2.11 Lezione 11

- Successione esatta corta di fasci data da un divisore e un punto di una superficie di Riemann
- Dimensione della sezione globale del fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann
- Fibrato vettoriale complesso di una varietà differenziabile
- Fibrato vettoriale olomorfo
- TODO Ciclo di un fibrato vettoriale olomorfo
- Spazio tangente complessificato
- Funzione antilomorfa su una superficie di Riemann
- Spazio tangente olomorfo

691.2.12 Lezione 12

- Spazio tangente olomorfo

TODO

691.3 Varietà differenziabile

Definizione 1. Una varietà differenziabile è uno spazio topologico M di Haussdorff e a base numerabile, dotato di un atlante $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ dove:

- $U_\alpha \subseteq M$ è un *aperto*;
- $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ (ovvero $\{U_\alpha\}_\alpha$ è un *ricoprimento*);
- $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ è un *omeomorfismo*;

e \mathcal{A} è un atlante differenziabile, ovvero per ogni $\alpha, \beta \in A$: se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

è una *mappa \mathcal{C}^∞* . Inoltre \mathcal{A} è massimale rispetto all'inclusione.

691.4 Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili

Definizione 2. Siano M, N due *varietà differenziabili* (di dimensioni m, n rispettivamente) e sia $F : M \rightarrow N$. F si dice essere una funzione C^∞ se per ogni $p \in M$ esistono:

- (U, φ) una *carta* di M con $p \in U$;
- (V, ψ) una *carta* di N con $F(U) \subseteq V$;

tali che

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

è una *funzione C^∞* (come funzione reale).

$$\begin{array}{ccccc} & U \subseteq M & \xrightarrow{F} & N \supseteq V & \\ \varphi \swarrow & & & & \searrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supseteq \varphi(U) & \xrightarrow{\psi \circ F \circ \varphi^{-1}} & & & \psi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Proposizione 3. Le funzioni C^∞ tra varietà sono *continue*.

Osservazione. Se $N = \mathbb{R}^n$, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ è C^∞ se per ogni $p \in M$ esiste una carta di M , (U, φ) , con $p \in U$ tale che è C^∞ la seguente:

$$F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

In particolare, se $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ si scrive $F \in C^\infty(M)$.

691.4.1 Funzioni reali Cinfinito da una varietà differenziabile

Definizione 4. Sia M una *varietà differenziabile*. Si definisce l'insieme

$$C^\infty(M) := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è funzione } C^\infty\}$$

(vedi *Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili*)

Questo è un *anello* con la somma e prodotto tra funzioni definiti puntualmente: per ogni $f, g \in C^\infty(M)$

$$(f + g)(p) := f(p) + g(p); \quad (f \cdot g)(p) := f(p) \cdot g(p).$$

691.5 Diffeomorfismo tra varietà differenziabili

Definizione 5. Siano M, N due *varietà differenziabili*. $F : M \rightarrow N$ si dice *diffeomorfismo* se è

- una funzione C^∞
- una *funzione invertibile*
- la sua inversa è C^∞

M ed N si dicono *diffeomorfe*

691.6 Coordinate locali su una varietà sono Cinfinito

Esempio 6. Sia M una *varietà differenziabile* di dimensione n , e sia $p \in M$. Allora $p \in U$ per qualche (U, φ) nell'*atlante di M* :

$$\varphi(p) = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in \mathbb{R}^n$$

Queste sono dette le coordinate locali di p .

Inoltre $x^i : U \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto x_p^i$ sono funzioni $C^\infty(U)$.

691.7 Forma differenziale in un punto

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

691.8 Forma differenziale

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Anche $\Omega^\bullet(M)$ graduato.

691.9 Prodotto wedge tra forme differenziali

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

$\Omega^\bullet(M), \wedge$ è un'algebra graduata

691.10 Differenziale di una forma

Sia M una varietà differenziabile, e si indichi con $\Omega^k(M)$ l'insieme delle k -forme differenziali su M .

Definizione 7. Il differenziale è una funzione $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ definita come segue:

- se $k = 0$, allora $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$ e quindi, localmente,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

dove si è utilizzata la [notazione di Einstein](#);

- se $k > 0$, allora localmente $\omega = f_I dx^I$, e si definisce

$$d\omega = \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I.$$

dove $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ è un multi-indice di elementi diversi, e

$$dx^I := dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}.$$

691.11 Proprietà del differenziale di forme

Proposizione 8. Valgono le seguenti proprietà:

1. d è lineare;
2. $d(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+1}(M)$;
3. $d \circ d = 0$;
4. per $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\varphi \in \Omega^p(M)$: $d(\omega \wedge \varphi) = (d\omega) \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge (d\varphi)$

Osservazione. Se M è una varietà n -dimensionale e $\omega \in \Omega^n(M)$, allora $d\omega = 0$.

691.12 Modulo graduato

Definizione 9. Sia M un *R-modulo*. M si dice *graduato* se esistono degli *R-moduli* M_i , $i \in \mathbb{N}$, tali che la *somma diretta* sia:

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

Osservazione. Siccome sono moduli i seguenti:

- *gruppi abeliani* (sono \mathbb{Z} -moduli);
- *anelli* (considerati con la somma sono gruppi abeliani, e quindi \mathbb{Z} -moduli)
- *spazi vettoriali* (sono \mathbb{K} -moduli con \mathbb{K} campo)

questa definizione è valida per tutti questi esempi. Si noti che **non è valida** per le Algebre Graduate.

691.13 Gruppo di Coomologia di De Rham

Sia M una *varietà differenziabile* di dimensione n , e sia $\Omega^k(M)$ lo *spazio vettoriale* delle k -forme. Si indichi con $d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$

il differenziale di forme.

Osservazione. Si ha che $\text{rng } d^{k-1} \subseteq \ker d^k$, per le proprietà del differenziale di forme.

Definizione 10. Per ogni $0 \leq k \leq n$ si definisce il k -esimo *gruppo di Coomologia di De Rham* di M lo *spazio vettoriale reale* dato dal *quoziente*:

$$H_{dR}^k(M) := \frac{\ker d^k}{\text{rng } d^{k-1}}$$

con la convenzione che, per $k = 0$, $\text{rng } d^{-1} = O$ è lo spazio vettoriale banale.

Si indica con

$$H_{dR}^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n H_{dR}^k(M).$$

e questo è uno *spazio vettoriale graduato*.

Osservazione. Si ha che $H_{dR}^k(M) = 0$ sse tutte le k -forme chiuse sono esatte.

Proposizione 11. Siano $[\omega], [\omega'] \in H_{dR}^k(M)$. Allora

1. $d\omega = 0$;
2. $\omega \in \Omega^k(M)$;
3. $[\omega] = [\omega']$ sse $\omega' = \omega + d\eta$ per qualche $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

691.14 Forma differenziale chiusa

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\Omega^k(M)$ lo spazio vettoriale delle k -forme. Si indichi con d il differenziale di forme.

Definizione 12. Una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ è chiusa se $d\omega = 0$

691.15 Forma differenziale esatta

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\Omega^k(M)$ lo spazio vettoriale delle k -forme. Si indichi con d il differenziale di forme.

Definizione 13. Una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ è esatta se esiste $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tale che $d\eta = \omega$.

691.16 Campo vettoriale su una varietà differenziabile

Sia M una varietà differenziabile, e sia $U \subseteq M$ aperto.

Definizione 14. Un **campo vettoriale** su U è una funzione C^∞ (infatti Aperti di una varietà differenziabile sono varietà differenziabili)

$$\begin{aligned} X : U &\longrightarrow TM \\ p &\longmapsto X_p \end{aligned}$$

tale che per ogni $p \in U$, $X_p \in T_p M$ (vedi Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile e Fibrato tangente)

Si denota con

$$\Gamma(U) := \{X : U \longrightarrow TM : X \text{ campo vettoriale}\}$$

691.17 Coomologia di De Rham di \mathbb{R} .

\mathbb{R} è una varietà differenziabile di dimensione 1. Pertanto esistono k -forme solo per $k = 0, 1$. Pertanto dobbiamo calcolare solo la Coomologia di De Rham:

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}), \quad H_{dR}^1(\mathbb{R})$$

mentre tutti gli altri saranno lo spazio vettoriale banale O .

- $H_{dR}^0(\mathbb{R})$

Si ha che

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}) = \frac{\ker d^0}{O} \cong \ker d^0$$

Sia quindi $f \in \Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $df = 0$, $df = 0$ sse $f' = 0$ sse f è costante (poiché il dominio è connesso).

Pertanto $\ker d^0 \cong \mathbb{R}$, e $H_{dR}^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

- $H_{dR}^1(\mathbb{R})$

Se $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, allora $\omega = f dx$ per $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- Sicuramente $d\omega = d(f dx) = f(d \circ d)(x) = 0$, e pertanto $\Omega^1(\mathbb{R}) = \ker d^1$.
- Invece, se considero $g = \int_0^x f(\tau) d\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora

$$dg = \omega$$

e pertanto $\text{rng } d^0 = \Omega^1(\mathbb{R})$.

Segue che

$$H_{dR}^1(\mathbb{R}) = \frac{\ker d^1}{\text{rng } d^0} = \frac{\Omega^1(\mathbb{R})}{\Omega^1(\mathbb{R})} = O.$$

Pertanto, in definitiva, si ha che

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ O & k \geq 1. \end{cases}$$

691.18 Coomologia di De Rham di \mathbb{R}^n .

Teorema 15. (Lemma di Poincaré) Sia $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$ la coomologia di De Rham di \mathbb{R}^n , per $n > 1$.

Allora

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ O & k \neq 0 \end{cases}$$

dove O è lo spazio vettoriale banale.

691.19 Pullback di una funzione tra varietà differenziabili

Siano M, N due varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ , e $\omega \in \Omega^n(N)$ una n -forma su N .

Definizione 16. Il pullback di ω lungo F è $F^*\omega \in \Omega^n(M)$ che, per ogni $v_1, \dots, v_n \in T_p N$:

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_n) = \omega_{F(p)}(F_*|_p(v_1), \dots, F_*|_p(v_n))$$

La funzione $F^* : \Omega^n(N) \rightarrow \Omega^n(M)$ si dice pullback di F .

691.20 Proprietà del pullback di una funzione tra varietà differenziabili

Proposizione 17. Siano M, N due varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

1. $F^* : \Omega^n(N) \rightarrow \Omega^n(M)$ è una funzione lineare per ogni $n \geq 0$, e induce per linearità una funzione

$$F^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M).$$

2. Per ogni $\omega, \psi \in \Omega^\bullet(N)$:

$$F^*(\omega \wedge \psi) = F^*\omega \wedge F^*\psi.$$

3. Per ogni $\omega \in \Omega^\bullet(N)$:

$$F^*(d\omega) = d \circ F^*\omega$$

dove d è il differenziale di forme.

4. Se P è una varietà differenziabile, $G : N \rightarrow P$ è una funzione C^∞ , allora

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

5. Se F è un diffeomorfismo allora $F^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ è un isomorfismo di algebre graduate, e $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$

691.21 0-gruppo di coomologia di de Rham di una varietà connessa

Sia M una varietà differenziabile, e sia $H^0(M)$ lo 0-gruppo di coomologia di De Rham di M .

- Se M è connesso, allora $H^0(M) = \mathbb{R}$.
- Se $M = \coprod_{\alpha \in A} M_\alpha$, con M_α componenti connesse, allora $H^0(M) = \mathbb{R}^A$, dove con \mathbb{R}^A si intende la somma diretta di A copie di \mathbb{R} .

Questo segue dal fatto che le funzioni a valori in \mathbb{R} con le derivate nulle sono necessariamente costanti sulle componenti connesse (vedi “Funzione localmente costante sse costante sulle componenti connesse” e “Teorema della derivata nulla”).

691.22 Algebra Graduata

Definizione 18. Sia R un anello e sia V una *R-algebra* (dotata di un prodotto $g : V \times V \rightarrow V$). V si dice algebra graduata se esistono V_i per $i \in \mathbb{N}$ delle *R-algebre* tali che la somma diretta (come *R-moduli*):

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$$

e tali che, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ le *immagini*:

$$g[V_i \times V_j] \subseteq V_{i+j}.$$

691.23 Morfismo tra algebre graduate

Definizione 19. Siano $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$, $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j$ due *algebre graduate*.

- Un morfismo di algebre graduate è $F : V \rightarrow W$ *morfismo tra algebre* tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'*immagine*:

$$F[V_i] \subseteq W_i.$$

- Un isomorfismo tra algebre graduate è un morfismo *biettivo* tale che la sua *inversa* sia ancora un morfismo.

- Un morfismo graduato di grado d è $F : V \rightarrow W$ *morfismo tra algebre* tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'*immagine*:

$$F[V_i] \subseteq W_{i+d}.$$

691.24 Prodotto wedge in Coomologia di De Rham

Sia M una **varietà differenziabile** e sia $H_{dR}^\bullet(M)$ la **somma diretta** dei gruppi di coomologia di De Rham.

Definizione 20. Si definisce il prodotto cup (o prodotto wedge)

$$\wedge : H_{dR}^\bullet(M) \times H_{dR}^\bullet(M) \longrightarrow H_{dR}^\bullet(M)$$

$$([\omega], [\eta]) \longmapsto [\omega \wedge \eta]$$

dove $\omega \wedge \eta$ è il prodotto wedge tra forme differenziali.

Osservazione. Questo prodotto rende $H_{dR}^\bullet(M)$ un'**algebra (reale)** graduata **associativa** e **anticommutativa**.

691.25 Pullback di una funzione tra varietà differenziabili in coomologia

Siano M, N due **varietà differenziabili**, $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

Definizione 21. Poiché il pullback commuta con il differenziale, F induce un morfismo tra algebre graduate:

$$F^* : H_{dR}^\bullet(N) \longrightarrow H_{dR}^\bullet(M)$$

$$[\omega] \longmapsto F^*[\omega] := [F^*\omega].$$

691.26 Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa Coomologia di de Rham

Siano M, N due **varietà differenziabili** di dimensione, rispettivamente, m ed n . Si indichi con H_{dR} la coomologia di De Rham.

Teorema 22. Se $F : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra **varietà differenziabili**, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha l'**isomorfismo tra spazi vettoriali**:

$$H_{dR}^k(M) \cong H_{dR}^k(N)$$

Dimostrazione. Fissato $k \in \mathbb{N}$, si consideri il pullback sulle forme:

$$F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$$

che soddisfa $dF^*\omega = F^* d\omega$ (dove d è la derivata esterna).

- Se $\omega \in \Omega^k(N)$ è chiusa, allora $d\omega = 0$

$$dF^*\omega = F^* d\omega = 0$$

e pertanto $F^*\omega$ è chiusa.

- Se $\omega \in \Omega^k(N)$ è esatta, allora esiste η tale che $\omega = d\eta$:

$$F^*\omega = F^* d\eta = dF^*\eta$$

e quindi $F^*\omega$ è esatta.

Ragionando allo stesso modo con F^{-1} e $(F^{-1})^*$ si ottiene la tesi. ■

Teorema 23. Se $F : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra **varietà differenziabili**, allora si ha l'isomorfismo tra algebre graduate:

$$H_{dR}^\bullet(M) \cong H_{dR}^\bullet(N)$$

691.27 Successione di spazi vettoriali esatta

Definizione 24. Siano V, W, U degli spazi vettoriali, e siano $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow U$ due funzioni lineari. La successione

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$

si dice esatta in W se

$$\text{Im } f = \ker g$$

Osservazione. Se

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \longrightarrow 0$$

è una successione esatta in ogni suo termine, si chiama successione esatta corta e si ha che

- f è iniettiva;
- g è suriettiva;
- $\text{Im } f = \ker g$.

Osservazione. Data una successione di spazi vettoriali (di dimensione finita) esatta $\langle (V^k, d^k) \rangle$, si ha che (dal teorema di nullità più rango), le **dimensioni** rispettano:

$$\sum (-1)^i \dim V^i = 0.$$

691.28 Complesso di cocatene

Definizione 25. Un complesso di cocatene è una successione

$$A^\bullet := \langle (A^k, d^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

- A^k è uno **spazio vettoriale**;
- $d^k : A^k \rightarrow A^{k+1}$ è una **applicazione lineare**

e tali che $d^{k+1} \circ d^k = 0$ (ovvero **immagine** e **kernel** sono $\text{Im } d^k \subseteq \ker d^{k+1}$).

691.29 Coomologia di un complesso di cocatene

Definizione 26. Sia $A^\bullet := \langle (A^k, d^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ un complesso di cocatene.

Si definisce il k -esimo gruppo di coomologia del complesso il **quoziente**:

$$H^k(A^\bullet) := \frac{\ker d^k}{\text{Im } d^{k-1}}.$$

Spesso si indica con:

- $Z^k := \ker d^k$ l'insieme dei k -coclicli;
- $B^k := \text{Im } d^{k-1}$ l'insieme dei k -cobordi.

Osservazione. Il quoziente di cui sopra è ben definito in quanto le seguenti inclusioni sono tutti sottospazi vettoriali:

$$\text{Im } d^{k-1} \subseteq \ker d^k \subseteq A^k$$

Osservazione. Per ciascun $k \in \mathbb{N}$, $H^k(A^\bullet)$ è uno spazio vettoriale.

691.30 Morfismo tra complessi di cocatene

Definizione 27. Siano $C^\bullet := \langle (C^k, d_C^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ e $D^\bullet := \langle (D^k, d_D^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ due complessi di cocatene. Un morfismo tra complessi di cocatene $F^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ è una successione $F^\bullet := \langle F^k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

- $F^k : C^k \rightarrow D^k$ è applicazione lineare;
- $F^k \circ d_C^{k-1} = d_D^{k-1} \circ F^{k-1}$, ovvero il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C^{k-1} & \xrightarrow{F^{k-1}} & D^{k-1} \\ d_C^{k-1} \downarrow & & \downarrow d_D^{k-1} \\ C^k & \xrightarrow{F^k} & D^k \end{array}$$

691.31 Morfismo tra complessi di cocatene induce morfismo in coomologia

Siano

$$C^\bullet := \langle (C^k, d_C^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}, \quad D^\bullet := \langle (D^k, d_D^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

due complessi di cocatene e sia $F^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ un morfismo, $F^\bullet = \langle F^k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$.

Allora, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, F^\bullet induce un morfismo tra i gruppi di coomologia:

$$\begin{aligned} F^* : H^k(C^\bullet) &\longrightarrow H^k(D^\bullet) \\ [c] &\longmapsto [F^k c] \end{aligned}$$

691.32 Successione Esatta di Complessi di Cocatene

Siano C'^\bullet , C^\bullet e C''^\bullet dei complessi di cocatene, e siano $F^\bullet : C'^\bullet \rightarrow C^\bullet$ e $G^\bullet : C^\bullet \rightarrow C''^\bullet$ dei morfismi. La successione

$$C'^\bullet \xrightarrow{F^\bullet} C^\bullet \xrightarrow{G^\bullet} C''^\bullet$$

si dice successione esatta se:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow (d^{k-2})' & & \downarrow d^{k-2} & & \downarrow (d^{k-2})'' & \\
 0 & \longrightarrow & (C^{k-1})' & \xrightarrow{F^{k-1}} & C^{k-1} & \xrightarrow{G^{k-1}} & (C^{k-1})'' \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (d^{k-1})' & & \downarrow d^{k-1} & & \downarrow (d^{k-1})'' & \\
 0 & \longrightarrow & (C^k)' & \xrightarrow{F^k} & C^k & \xrightarrow{G^k} & (C^k)'' \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (d^k)' & & \downarrow d^k & & \downarrow (d^k)'' & \\
 0 & \longrightarrow & (C^{k+1})' & \xrightarrow{F^{k+1}} & C^{k+1} & \xrightarrow{G^{k+1}} & (C^{k+1})'' \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (d^{k+1})' & & \downarrow d^{k+1} & & \downarrow (d^{k+1})'' & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots &
 \end{array}$$

- il diagramma commuta;
- tutte le righe sono successioni esatte corte di spazi vettoriali.

691.33 Zig-Zag Lemma (per complessi di cocatene)

Proposizione 28. Sia

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{F^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{G^\bullet} C^\bullet \longrightarrow 0 \quad (*)$$

una SEC di complessi di cocatene. Allora esiste δ , detto "morfismo di connessione", tale che

$$\begin{array}{ccccc}
 H^k(A^\bullet) & \xrightarrow{F^*} & H^k(B^\bullet) & \xrightarrow{G^*} & H^k(C^\bullet) \\
 \swarrow \delta & & & & \searrow \\
 H^{k+1}(A^\bullet) & \xrightarrow{F^*} & H^{k+1}(B^\bullet) & \xrightarrow{G^*} & H^{k+1}(C^\bullet)
 \end{array}$$

è una successione esatta lunga.

Dimostrazione. La dimostrazione si svolge in due fasi:

1. Devo trovare δ (buona def + applicazione lineare).
2. Esattezza della successione (solo $\ker F^* = \text{Im } \delta$).

FASE 1.

Se $*$ è SEC, allora il seguente è diagramma commutativo a righe esatte.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 0 & \longrightarrow & A^{k+1} & \xrightarrow{F_{k+1}} & B^{k+1} & \xrightarrow{G_{k+1}} & C^{k+1} \longrightarrow 0 \\
 & \uparrow d_A^k & & \uparrow d_B^k & (1) & \uparrow d_C^k & \\
 0 & \longrightarrow & A^k & \xrightarrow{F_k} & B^k & \xrightarrow{G_k} & C^k \xrightarrow{G_k} 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
 \end{array}$$

Sia quindi $[c] \in H^k(C^\bullet)$ (i.e. $c \in C^k$ t.c. $dc = 0$).

Poiché la seconda riga è esatta allora G^k è **suriettiva**, e pertanto esiste $b \in B^k$ t.c.

$$Gb = c.$$

Considero ora $d_B^k(b)$ (abbreviato db).

$$G db = dGb = dc = 0$$

(per commutatività di (1))

Segue quindi che

$$db \in \ker G^{k+1} = \text{Im } F^{k+1}$$

dove l'ultima uguaglianza sussiste per esattezza della prima riga. Pertanto esiste $a \in A^{k+1}$ t.c.

$$Fa = b' := db$$

Questo a è unico poiché F iniettiva (per esattezza della 1ª riga). Inoltre

$$F da = dFa = ddB = 0 \implies da = 0.$$

Definisco quindi

$$\boxed{\delta([c]) := [a]}$$

Abbiamo fatto:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \downarrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

Resta da dimostrare:

1. Che l'unica scelta fatta (ovvero b) non influisce sulla definizione.
2. Che δ è ben definita (rispetto al quoziente).
3. Che δ è lineare.

- 1.** Siano $b, b' \in B^k$ tali che

$$G^k(b) = G^k(b') = c.$$

e sia $a, a' \in A^{k+1}$ t.c. $Fa = db$, $Fa' = db'$. Allora

$$0 = G(b) - G(b') = G(b - b')$$

e pertanto (per esattezza della seconda riga) esiste $\tilde{a} \in A^k$ t.c.

$$\begin{aligned} b - b' &= F\tilde{a} \\ d(b - b') &= dF\tilde{a} \\ db - db' &= Fd\tilde{a} \end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che $Fa = db$:

$$\begin{aligned} Fa &= db = db' + Fd\tilde{a} \\ &= Fa' + Fd\tilde{a} \\ &= F(a' + d\tilde{a}) \end{aligned}$$

e, poiché F è iniettiva, segue che:

$$a = a' + d\tilde{a} \implies [a] = [a'].$$

2. Sia $c \in \text{Im } d^{k-1}$. Dimostriamo $a \in \text{Im } d^k$, dove la nomenclatura è la solita:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \downarrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

Sia quindi $c = d\gamma$. Per esattezza G suriettiva, e quindi $\gamma = G\beta$.

$$c = dG\beta = G(d\beta).$$

Per il punto precedente, la scelta di b è ininfluente, pertanto pongo

$$b := d\beta, \quad \text{e } G(dd\beta) = c$$

La situazione quindi è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \downarrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \\ & \downarrow d & \uparrow d \\ \beta & \xrightarrow{G} & \gamma \end{array}$$

Segue che $F(a) = db = dd\beta = 0$ e dunque, per iniettività, $a = 0$. Siccome $0 \in \text{Im } d^k$, la tesi.

3. δ è lineare poiché ?

FASE 2.

Resta da dimostrare l'esattezza. Noi dimostriamo soltanto

$$\ker F^* = \text{Im } \delta.$$

(\supseteq): Sia $[a] = \delta^*[c] \in \text{Im } \delta^*$:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \downarrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

Quindi si ha che

$$Fa = db \implies [Fa] = 0$$

Ma $0 = [Fa] =: F^*[a]$ e quindi $[a] \in \ker F^*$.

(\subseteq): Sia $[a]$ t.c. $F^*[a] = 0$, $[a] \in \ker F^*$. i.e. $Fa = db$.

Detto quindi $c = Gb$

$$dc = dGb = Gdb = GFa = 0$$

(righe esatte: $GF = 0$)

Pertanto, è possibile utilizzare la costruzione di prima:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \downarrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

ottenendo $\delta[c] = [a]$. Segue che $[a] \in \text{Im } \delta$. ■

691.34 Teorema di Mayer-Vietoris (in coomologia)

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\{U_0, U_1\}$ un suo ricoprimento aperto. Si considerino le seguenti inclusioni:

$$\begin{array}{ccccc} & & U_0 & & \\ & \nearrow \iota_0 & & \searrow j_0 & \\ U_0 \cap U_1 & & & & U_0 \cup U_1 = M \\ & \searrow \iota_1 & & \nearrow j_1 & \\ & & U_1 & & \end{array}$$

È possibile farne il pullback alle forme differenziali per ogni $k \in \mathbb{N}$, ottenendo:

$$\begin{array}{ccccc} & & A^k(U_0) & & \\ & \swarrow \iota_0^* & & \nwarrow j_0^* & \\ A^k(U_0 \cap U_1) & & & & A^k(M) \\ & \uparrow \iota_1^* & & \downarrow j_1^* & \\ & & A^k(U_1) & & \end{array}$$

Si ricorda che il pullback di una inclusione è la restrizione della forma all'aperto considerato, ovvero:

$$\begin{aligned} \iota_0^* \omega &= \omega|_{U_0 \cap U_1} \\ \iota_1^* \omega &= \omega|_{U_0 \cap U_1} \\ j_0^* \omega &= \omega|_{U_0} \\ j_1^* \omega &= \omega|_{U_1} \end{aligned}$$

Si consideri ora la somma diretta tra spazi vettoriali $A^k(U_0) \oplus A^k(U_1)$: si definiscono le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} j^* : A^k(M) &\longrightarrow A^k(U_0) \oplus A^k(U_1) \\ \omega &\longmapsto (j_1^* \omega, j_2^* \omega) = (\omega|_{U_0}, \omega|_{U_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_1^* - \iota_0^* : A^k(U_0) \oplus A^k(U_1) &\longrightarrow A^k(U_0 \cap U_1) \\ (\eta, \tau) &\longmapsto \iota_1^* \eta - \iota_0^* \tau = \eta|_{U_0 \cap U_1} - \tau|_{U_0 \cap U_1}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi, considerando queste funzioni per ogni $k \in \mathbb{N}$ (e ricordando che la somma diretta è commutativa e associativa):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A^\bullet(M) \xrightarrow{j^*} A^\bullet(U_0) \oplus A^\bullet(U_1) \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_0^*} A^\bullet(U_0 \cap U_1) \longrightarrow 0 \\ \omega &\longmapsto (\omega|_{U_0}, \omega|_{U_1}) \\ (\eta, \tau) &\longmapsto \eta|_{U_0 \cap U_1} - \tau|_{U_0 \cap U_1} \end{aligned}$$

Teorema 29. Questa successione è esatta.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in tre fasi:

1. j^* è iniettiva.

Sia $\eta \in A^\bullet(M)$ tale che $j^*\eta = 0$. Allora

$$\eta|_{U_0} = 0, \quad \eta|_{U_1} = 0$$

e **pertanto** $j = 0$ in $M = U_0 \cup U_1$.

2. $\text{Im } j^* = \ker(\iota_1^* - \iota_0^*)$

(\subseteq): è ovvio.

(\supseteq): sia $(\eta, \tau) \in \ker(\iota_1^* - \iota_0^*)$. Allora in $U_0 \cap U_1$ si ha che $\eta \equiv \tau$. Definendo quindi

$$\omega = \begin{cases} \eta & \text{su } U_0 \\ \tau & \text{su } U_1 \end{cases}$$

questa è ben definita e $j^*\omega = (\eta, \tau)$.

3. $(\iota_1^* - \iota_0^*)$ è suriettiva.

Si utilizza una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$: esistono due funzioni $\rho_0, \rho_1 \in C^\infty(M) = A^0(M)$ tali che i loro **supporti**

$$\begin{aligned} \text{supp } \rho_0 &= \overline{\{x \in M \mid \rho_0(x) \neq 0\}} \subseteq U_0 \\ \text{supp } \rho_1 &= \overline{\{x \in M \mid \rho_1(x) \neq 0\}} \subseteq U_1 \end{aligned}$$

e per ogni $x \in M$: $\rho_0(x) + \rho_1(x) = 1$.

Sia quindi $\eta \in A^\bullet(U_0 \cap U_1)$. Si definiscono:

$$\begin{aligned} \omega &= -\rho_1 \eta && \text{su } U_0 \\ \tau &= \rho_0 \eta && \text{su } U_1 \end{aligned}$$

(estese a 0 dove non sono definite), e si ottiene che

$$\begin{aligned} (\iota_1^* - \iota_0^*)(\omega, \tau) &= \rho_0 \eta + \rho_1 \eta \\ &= (\rho_0 + \rho_1) \eta = \eta. \end{aligned}$$
■

Osservazione. È possibile vedere questa come una successione di complessi di cocompattezza.

Osservazione. Tramite lo Zig-Zag Lemma, otteniamo una successione esatta in coomologia ([somma diretta commuta con quoziente](#)):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \cdots & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 H^k(M) & \xrightarrow{j^*} & H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) & \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_0^*} & H^k(U_0 \cap U_1) & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \nearrow \partial^* & & \\
 H^{k+1}(M) & \xleftarrow{j^*} & H^{k+1}(U_0) \oplus H^{k+1}(U_1) & \longrightarrow & \dots & &
 \end{array}$$

ed è possibile calcolare esplicitamente il morfismo di connessione ∂^* (oltre che gli altri morfismi), seguendo la costruzione: dato $[\eta] \in H^k(U_0 \cap U_1)$,

$$\eta = (\iota_1^* - \iota_0^*)(-\rho_1 \eta, \rho_0 \eta)$$

Facendo il differenziale di $(-\rho_1 \eta, \rho_0 \eta)$ su ambo le componenti, si ottiene

$$(-d\rho_1 \wedge \eta, d\rho_0 \wedge \eta)$$

in quanto $d\eta = 0$. Ponendo ora

$$\omega = \begin{cases} -d\rho_1 \wedge \eta & \text{su } U_0 \\ d\rho_0 \wedge \eta & \text{su } U_1 \end{cases}$$

che è ben definita in quanto in $p \in U_0 \cap U_1$, se le coordinate in un intorno sono (x^1, \dots, x^n) si ha

$$-d\rho_1 \wedge \eta = -\frac{\partial \rho_1}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge \eta = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} (1 - \rho_0) dx^\mu \wedge \eta = \frac{\partial \rho_0}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge \eta = d\rho_0 \wedge \eta$$

e si ottiene per definizione che $j^*\omega = (-d\rho_1 \wedge \eta, d\rho_0 \wedge \eta)$.

Quindi $\partial^*[\eta] = [\omega]$, con

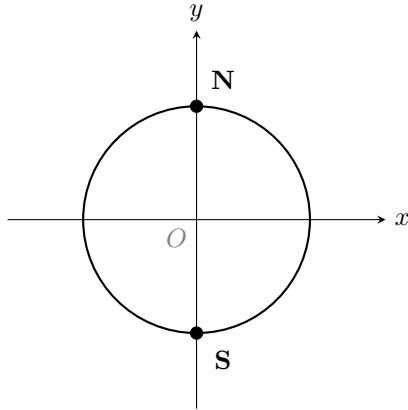
$$\omega = \begin{cases} -d\rho_1 \wedge \eta & \text{su } U_0 \\ d\rho_0 \wedge \eta & \text{su } U_1 \end{cases}$$

691.35 Coomologia della circonferenza

Teorema 30. La coomologia di \mathbb{S}^1 è :

$$H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

Dimostrazione. Si consideri la circonferenza \mathbb{S}^1 rappresentata in figura:



È una [varietà differenziabile](#) di dimensione 1, quindi si vogliono calcolare la coomologia $H^0(\mathbb{S}^1)$ e $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Si definiscono due aperti:

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{N}\} \cong \mathbb{R} \\ U_1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{S}\} \cong \mathbb{R} \\ U_0 \cap U_1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\} \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \end{aligned}$$

dove gli ultimi sono diffeomorfismi. Utilizzando Mayer-Vietoris si ottiene la seguente successione esatta:

$$H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \longrightarrow H^0(U_0 \cap U_1) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^1(U_0) \oplus H^1(U_1)$$

- Siccome la coomologia è invariante per diffeomorfismi, si ottiene

$$H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}) \oplus H^0(\mathbb{R}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R})$$

- Ricordando la [coomologia di \$\mathbb{R}\$](#) :

$$H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

la successione diventa:

$$H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0 \oplus 0$$

- Ricordando come funziona lo 0 gruppo di coomologia:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

- Poiché la successione è esatta in $H^1(\mathbb{S}^1)$, allora ∂^* il morfismo di connessione è suriettivo, e pertanto $\dim H^1(\mathbb{S}^1) < \infty$. Posso applicare la somma alterna=0 ottenendo che

$$\dim H^1(\mathbb{S}^1) = 1$$

e pertanto $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$. ■

Troviamo ora un generatore di $H^1(\mathbb{S}^1)$. Poiché è uno spazio vettoriale 1-dimensionale, è sufficiente trovare $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^1) \setminus \{0\}$.

Si sfrutta la definizione dei morfismi della successione di Mayer-Vietoris: sia $[f] \in H^0(U_0 \cap U_1)$, e siano ρ_0, ρ_1 una partizione dell'unità:

$$\partial^*[f] = [\omega], \quad \omega = \begin{cases} -d\rho_1 \cdot f & \text{su } U_0 \\ d\rho_0 \cdot f & \text{su } U_1. \end{cases}$$

Si consideri anche il morfismo $(\iota_1^* - \iota_0^*)$, ricordando che $H^0(U_0 \cap U_1) = H^0(A \sqcup B) \cong H^0(A) \oplus H^0(B)$, dove A e B sono le semicirconferenze destre e sinistre:

$$\begin{aligned} H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) &\xrightarrow{(\iota_1^* - \iota_0^*)} H^0(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{\cong} H^0(A) \oplus H^0(B) \\ ([u], [v]) &\longmapsto \left([(u-v)|_{U_0 \cap U_1}] \right) \longmapsto \left([(u-v)|_A], [(u-v)|_B] \right) \\ [g] &\longmapsto \left([g|_A], [g|_B] \right) \end{aligned}$$

con u, v funzioni costanti C^∞ rispettivamente su U_0 e U_1 : $u-v|_A \equiv k_1$ e $u-v|_B \equiv k_2$, con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e tali che $k_1 = k_2$.

Si deve scegliere $[f]$ in maniera tale che $\partial^*[f] \neq 0$, ovvero

$$[f] \notin \ker \partial^* = \text{Im}(\iota_1^* - \iota_0^*)$$

Sia ad esempio $f \in C^\infty(U_0 \cap U_1)$ tale che $f|_A = 1$ e $f|_B = 0$, $[f] \in H^0(U_0 \cap U_1)$. Allora necessariamente $[f] \notin \text{Im}(\iota_1^* - \iota_0^*)$, e quindi $\partial^*[f] \neq 0$.

Pertanto, $[\omega]$ è un generatore di $H^1(\mathbb{S}^1)$, con

$$\omega = \begin{cases} -d\rho_1 & \text{su } U_0 \cap A \\ d\rho_1 & \text{su } U_1 \cap A \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

ben definita.

691.36 Riduzione della coomologia di un prodotto con la retta reale

Teorema 31. Sia M una varietà differenziabile, e sia

$$\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

la proiezione. Allora π induce un pullback:

$$\pi^* : H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(M)$$

che è un isomorfismo tra le coomologie.

691.37 Coomologia delle sfere

Teorema 32. Sia \mathbb{S}^n la **sfera n -dimensionale**. Allora la sua coomologia di De Rham è:

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases}$$

Dimostrazione. Vedi Esempio 5.3.7 di .

Si considerino i poli $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n+1}$ di \mathbb{S}^n , e siano

$$U_0 := \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{N}\}, \quad U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{S}\}.$$

- Siccome $U_0 \cong U_1 \cong \mathbb{R}^n$ diffeomorfi, allora

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad H^k(U_0) \cong H^k(U_1) \cong H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{altimenti.} \end{cases}$$

- $U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, e pertanto

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad H^k(U_0 \cap U_1) \cong H^k(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Si dimostra il teorema per induzione su $n \geq 1$.

- Passo base $n = 1$.

Si è già dimostrato che

$$H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

- Passo induttivo. Sia $n > 1$ e si suppona il teorema vero per \mathbb{S}^{n-1} . Si dimostra per \mathbb{S}^n

- Se $k = 0$: Siccome \mathbb{S}^n è **connesso**, allora $H^0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$.
- Se $k = 1$: Si consideri Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \rightarrow H^0(U_0 \cap U_1) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^1(U_0) \oplus H^1(U_1)$$

per le considerazioni di cui sopra si ha:

- * $H^0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$
- * $H^0(U_0 \cap U_1) \cong \mathbb{R}$ in quanto connesso

- * $H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$
- * $H^1(U_0) \oplus H^1(U_1) \cong 0$

e pertanto si ottiene:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Siccome ∂^* è **suriettiva**, allora $\dim H^1(\mathbb{S}^n) < \infty$ e quindi, usando la **somma alterna delle dimensioni**, si ottiene

$$H^1(\mathbb{S}^n) = 0$$

- Se $1 < k \leq n$: Si consideri Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccc} H^{k-1}(U_0) \oplus H^{k-1}(U_1) & \longrightarrow & H^{k-1}(U_0 \cap U_1) \\ & \swarrow \partial^* & \\ H^k(\mathbb{S}^n) & \longrightarrow & H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) \end{array}$$

Per le considerazioni di cui sopra:

- * $k-1 > 0$, e pertanto $H^{k-1}(U_0) \oplus H^{k-1}(U_1) \cong 0$;
- * $k > 0$, e pertanto $H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) \cong 0$;
- * $H^{k-1}(U_0 \cap U_1) \cong H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

La successione diventa:

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

e **pertanto**:

$$H^k(\mathbb{S}^n) = H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Dunque, per ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned} H^n(\mathbb{S}^n) &= H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R} \\ 1 < k < n \quad H^k(\mathbb{S}^n) &= H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong 0. \end{aligned}$$

- Se $k > n$: per motivi di dimensione, $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$. ■

Proposizione 33. Un **generatore** di $H^n(\mathbb{S}^n)$ è $[\nu]$, dove ν è una forma volume su \mathbb{S}^n .

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in alcune fasi

1. Esistenza di una forma volume

Questo segue dal fatto che \mathbb{S}^n è **orientabile**.

2. La forma volume non è esatta

Se per assurdo ν fosse esatta, allora $\nu = d\omega$. Poiché S^n è compatta, allora per il Teorema di Stokes:

$$\int_M \nu = \int_M d\omega = 0$$

ma questo è assurdo.

Siccome la forma volume è una n -forma, allora è chiusa, e pertanto $[\nu] \in H^n(S^n)$, e siccome non è esatta allora $[\nu] \neq 0$. Quindi $[\nu]$ genera $H^n(S^n) \cong \mathbb{R}$. ■

Proposizione 34. Si definisca la mappa data dall'integrale:

$$\begin{aligned} \int : H^n(S^n) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_{S^n} \omega \end{aligned}$$

Questo è un **isomorfismo**.

Dimostrazione. La dimostrazione si sviluppa in diversi passi.

1. La mappa è ben definita in coomologia

Questo vale per il teorema di Stokes.

2. La mappa è lineare

3. La mappa è non nulla

Infatti $\int_{S^n} \nu > 0$ per ν forma volume. (Questo lo si può fare in quanto S^n è compatta e orientabile.)

Da questo segue che sia un isomorfismo:

- è **iniettiva** in quanto il suo **kernel** (siccome $H^n(S^n)$ ha dimensione 1) può avere solo dimensione 0 (non ha dimensione 1 per il punto 3.)
- è **suriettiva** per il punto 3 (siccome raggiunge un elemento non nullo, siccome \mathbb{R} ha dimensione 1, per linearità raggiunge tutti gli elementi). ■

691.38 Forma volume su una varietà differenziabile

Definizione 35. Sia M una **varietà differenziabile** n -dimensionale. Una forma volume è una n -forma mai nulla ν .

Esempio 36. Su (U, x^1, \dots, x^n) **carta locale**,

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

è una n -forma mai nulla su V .

Osservazione. Se ν è una forma volume su M , allora esiste una $f \in C^\infty(U)$ tale che

$$f \cdot \nu|_U = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad f > 0.$$

Proposizione 37. Se ν è una forma volume su M , allora l'integrale è positivo:

$$\int_M \nu > 0.$$

Dimostrazione. Vedi Osservazione 4.3.6 ■

691.39 Varietà Differenziabile Orientabile

Definizione 38. Una *varietà differenziabile* M si dice orientabile se ammette un *atlante orientato* (i.e. tale che $\det J_{\phi\psi} > 0$).

691.40 Caratterizzazione varietà differenziabile orientabile tramite forma volume

Teorema 39. Sia M una *varietà differenziabile*. Esiste una forma volume su M sse M è orientabile.

691.41 Supporto di una forma differenziale

Definizione 40. Sia M una *varietà differenziabile*, e sia ω una forma differenziale. Il supporto di ω è la *chiusura topologica*:

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}.$$

691.42 Integrazione di forme su varietà differenziabile orientata

Sia M una *varietà differenziabile* orientata n -dimensionale, sia ω una forma differenziale, $\omega \in \Omega^n(M)$ a supporto *compatto*. Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un *atlante orientato* di M .

- Se $\text{supp } \omega \subseteq U$, con (U, φ) una carta, si definisce:

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

tramite il pullback $(\varphi^{-1})^* : \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^n(\mathbb{R}^n)$.

È possibile mostrare che questa definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta di $U \supseteq \text{supp } \omega$.

- Altrimenti, sia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la *partizione dell'unità* associata all'atlante scelto; si definisce

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int \rho_\alpha \omega.$$

Ciascun $\rho_\alpha \omega$ ricade nel caso precedente, in quanto

$$\text{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq U_\alpha.$$

Definizione 41. Sia $\omega \in \Omega^n(M)$ una forma differenziale a supporto compatto. Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sono come sopra, allora si pone:

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \omega).$$

691.43 Teorema di Stokes

Teorema 42. Sia M una varietà differenziabile orientabile, e sia ω una $n - 1$ -forma a supporto compatto. Allora l'integrale:

$$\int_M d\omega = 0.$$

691.44 Teorema di invarianza omotopica per la coomologia di De Rham

Teorema 43. Siano M, N varietà differenziabili. Se sono omotopicamente equivalenti, allora hanno coomologia di De Rham isomorfa (come algebra graduata):

$$H_{dR}^\bullet(M) \cong H_{dR}^\bullet(N).$$

691.45 Spazi topologici omotopicamente equivalenti

Due spazi topologici X, Y si dicono omotopicamente equivalenti se esistono due funzioni continue

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \xleftarrow{g} & \end{array}$$

tali che le loro composizioni siano omotope all'identità:

$$g \circ f \sim \text{Id}_X, \quad f \circ g \sim \text{Id}_Y$$

ovvero esistono continue

$$\begin{array}{ll} G : X \times (0, 1) \longrightarrow X & H : Y \times (0, 1) \longrightarrow Y \\ (x, 0) \longmapsto g \circ f(x) & (y, 0) \longmapsto f \circ g(y) \\ (x, 1) \longmapsto x & (y, 1) \longmapsto y. \end{array}$$

Le due funzioni f, g si dicono equivalenze omotopiche

691.46 Coomologia dello spazio proiettivo reale

Teorema 44. Sia $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n . La sua coomologia di De Rham è

$$H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ \mathbb{R} & k = n \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti mappe:

- Si consideri $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, e si consideri la mappa antipodale:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto -\mathbf{x} \end{aligned}$$

Questa induce i seguenti pullback:

$$\begin{aligned} a^* : \Omega^k(\mathbb{S}^n) &\longrightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^n) \\ \mathbf{a}^* : H^k(\mathbb{S}^n) &\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

- Si consideri la proiezione al [quoziente](#):

$$\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n \mathbb{R} = \mathbb{S}^n / \sim_a$$

Che induce i seguenti pullback:

$$\begin{aligned} \pi^* : \Omega^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) &\longrightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^n) \\ \boldsymbol{\pi}^* : H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) &\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

Se $k = 0$ allora, siccome $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$ è connesso, si ha che $H^0(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Sia quindi ora $k > 0$.

1. **Claim:** $\Omega^k(\mathbb{S}^n) = \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+ \oplus \Omega^k(\mathbb{S}^n)_-$, e inoltre $\pi^*[\Omega^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})] \subseteq \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$.

dim.: Si definiscono:

$$\begin{aligned} \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+ &:= \left\{ \omega \in \Omega^k(\mathbb{S}^n) \mid a^* \omega = \omega \right\}; \\ \Omega^k(\mathbb{S}^n)_- &:= \left\{ \omega \in \Omega^k(\mathbb{S}^n) \mid a^* \omega = -\omega \right\} \end{aligned}$$

gli insiemi delle forme invarianti e antiinvarianti.

Siccome $a^* \circ a^* = \text{Id}_{\Omega^k(\mathbb{S}^n)}$, segue la decomposizione. In particolare:

$$\omega = \left(\frac{\omega + a^* \omega}{2} \right) + \left(\frac{\omega - a^* \omega}{2} \right) \tag{*}$$

Inoltre, siccome per definizione di $\mathbb{P}^n \mathbb{R}$: $\pi \circ a = \pi$: allora

$$(\pi \circ a)^* = \pi^* \implies a^* \circ \pi^* = \pi^*$$

e pertanto, per ogni $\omega \in \Omega^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$:

$$a^*(\pi^* \omega) = \pi^* \omega.$$

Segue che $\pi^*[\Omega^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})] \subseteq \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$

2. **Claim:** In realtà $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$ è isomorfismo.

Non dimostrato.

3. **Claim:** Segue che $H^k(\mathbb{S}^n) = H^k(\mathbb{S}^n)_+ \oplus H^k(\mathbb{S}^n)_-$, e inoltre $H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+$.

dim.: Si definiscano:

$$\begin{aligned} H^k(\mathbb{S}^n)_+ &:= \{[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n) \mid \mathbf{a}^*[\omega] = [\omega]\} \\ H^k(\mathbb{S}^n)_- &:= \{[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n) \mid \mathbf{a}^*[\omega] = -[\omega]\} \end{aligned}$$

Per dimostrare la somma diretta è sufficiente:

- Mostrare che $H^k(\mathbb{S}^n)_+ \cap H^k(\mathbb{S}^n)_- = \{0\}$

Sia quindi $[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+ \cap H^k(\mathbb{S}^n)_-$: allora

$$-[\omega] = \mathbf{a}^*[\omega] = [\omega]$$

e pertanto $[\omega] = 0$.

- Mostrare che se $[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n)$ allora esistono $[\omega_1] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+$ e $[\omega_2] \in H^k(\mathbb{S}^n)_-$ tali che:

$$[\omega] = [\omega_1] + [\omega_2].$$

Ma in particolare, per (\star) :

$$\omega = \underbrace{\left(\frac{\omega + a^*\omega}{2} \right)}_{\in \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+} + \underbrace{\left(\frac{\omega - a^*\omega}{2} \right)}_{\in \Omega^k(\mathbb{S}^n)_-}$$

e dunque, ponendo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \frac{\omega + a^*\omega}{2} \\ \omega_2 &:= \frac{\omega - a^*\omega}{2} \end{aligned}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^*[\omega_1] &= [a^*\omega_1] = [\omega_1] \\ \mathbf{a}^*[\omega_2] &= [a^*\omega_2] = [-\omega_2] = -[\omega_2] \\ [\omega_1] + [\omega_2] &= [\omega]. \end{aligned}$$

Rispetto all'isomorfismo $H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+$, questo è indotto da π^* :

$$\begin{aligned} \pi^* : H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) &\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n)_+ \\ [\omega] &\longmapsto [\pi^*\omega] \end{aligned}$$

- La mappa è ben definita in quanto corestrizione di un pullback, e se $[\omega] \in H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$ allora

$$a^* \circ \pi^* \omega = \pi^* \omega$$

e dunque $\pi^*[\omega] = [\pi^* \omega] \in H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})_+$.

- La mappa è iniettiva: siano $[\omega], [\tau] \in H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$ tali che $\pi^*[\omega] = \pi^*[\tau]$. Allora

$$\pi^*(\omega - \tau) = d\eta.$$

Siccome π^* è un isomorfismo, esiste ν tale che

$$\eta = \pi^* \nu$$

e in particolare:

$$\pi^*(\omega - \tau) = d\pi^* \nu = \pi^* d\nu$$

e dunque $\omega - \tau = d\nu$ per l'iniettività di π^* :

$$[\omega] = [\tau].$$

- La mappa è suriettiva: se $[\eta] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+$, allora WLOG si ha

$$a^* \eta = \eta$$

e pertanto $\eta \in \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$. Per il Claim 2., esiste $\omega \in \Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$ tale che $\pi^* \omega = \eta$, e inoltre

$$0 = d\eta = d\pi^* \omega = \pi^* d\omega$$

e siccome π^* è un isomorfismo per ogni k , $d\omega = 0$ e quindi $[\omega] \in H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$ e $\pi^*[\omega] = [\eta]$.

Dunque, se $k \neq n$, allora $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$ (per la coomologia delle sfere), ma

$$H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+ \subseteq H^k(\mathbb{S}^n) = 0$$

e quindi $H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = 0$.

Sia ora quindi $k = n$. La situazione è la seguente:

$$H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong H^n(\mathbb{S}^n)_+ \subseteq H^n(\mathbb{S}^n) = \langle [\nu] \rangle$$

dove ν è la forma volume su \mathbb{S}^n . È possibile calcolare che

$$a^* \nu = (-1)^{n+1} \nu$$

e pertanto: $a^*[\nu] = (-1)^{n+1}[\nu]$.

- Se n è pari, allora $n+1$ è dispari, e quindi $a^*[\nu] = -[\nu]$, e quindi $[\nu] \notin H^n(\mathbb{S}^n)_+$:

$$H^n(\mathbb{S}^n)_+ = 0 \implies H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = 0.$$

- Se n è dispari, allora $n+1$ è pari, e quindi $a^*[\nu] = [\nu]$, e quindi $[\nu] \in H^n(\mathbb{S}^n)_+$:

$$H^n(\mathbb{S}^n)_+ = \langle [\nu] \rangle \cong \mathbb{R} \implies H^n(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

- 691.47 Coomologia del toro
- 691.48 Forma volume sulla sfera
- 691.49 Caratterizzazione forma esatta sulla sfera
- 691.50 Caratterizzazione forma esatta nello spazio proiettivo reale di dimensione dispari

Proposizione 45. Se n è pari, allora non esistono campi vettoriali mai nulli su \mathbb{S}^n .

- 691.51 Coomologia del nastro di Moebius
- 691.52 TODO Formula di Kunneth
- 691.53 Ricoprimento aciclico di una varietà differenziabile
- 691.54 Varietà differenziabile di tipo finito

Esempio 46.

- 691.55 Varietà differenziabile di tipo finito ha coomologia di dimensione finita
- 691.55.1 Varietà differenziabile compatta ha coomologia di dimensione finita
- 691.56 Coomologia a supporto compatto

Osservazione. Si considerino \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , con $n \neq 1$. Allora

$$\mathbb{R} \approx \{p\} \approx \mathbb{R}^n$$

dove “ \approx ” indica che sono omotopi.

Considerando invece la coomologia a supporto compatto di \mathbb{R} e di \mathbb{R}^n :

$$\forall k : H_c^k(\mathbb{R}) \neq H_c^k(\mathbb{R}^n)$$

e pertanto, possiamo affermare che $H_c^k(M)$ non è invariante per omotopia.

Osservazione. La coomologia a supporto compatto è uguale alla coomologia di complesso di cocatene di A_c^\bullet .

691.57 Coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}

Teorema 47. Se H_c^k indica la coomologia a supporto compatto, allora

$$H_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Per motivi di dimensione $H_c^k(\mathbb{R}) = 0$ per $k > 0$. Per $k = 0$ segue dalla coomologia di \mathbb{R} .

Per quanto riguarda $H_c^1(\mathbb{R})$, dimostro che l'integrale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} : H_c^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} \omega\end{aligned}$$

è un **isomorfismo**.

- $\int_{\mathbb{R}}$ è ben definita.

Se $\omega = df$ per qualche $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a **supporto compatto**, allora per il **teorema fondamentale del calcolo integrale**:

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} f' dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t) - f(-t)] = 0$$

dove l'uguaglianza a zero segue dal supporto compatto di f .

- $\int_{\mathbb{R}}$ è suriettiva.

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a **supporto compatto**, $f \geq 0$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} f dt \neq 0$$

e pertanto $\dim \text{Im } \int_{\mathbb{R}} > 0$. Necessariamente quindi

$$\dim \text{Im } \int_{\mathbb{R}} = 1.$$

- $\int_{\mathbb{R}}$ è iniettiva.

Sia $\omega = g dt \in A_c^1(\mathbb{R})$ una 1-forma a supporto **compatto** tale che $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$. Si definisce

$$f(t) := - \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau.$$

Allora f è a **supporto compatto**, e $df = \omega$. Allora $[\omega] = 0$.

Pertanto $\ker \int_{\mathbb{R}} = 0$.

Dunque $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. ■

Corollario 48. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ è a **supporto compatto** e:

- $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0$;
- la **misura di Lebesgue**: $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}) > 0$

allora $\{[f dt]\}$ è una **base** di $H_c^1(\mathbb{R})$

Esempio 49. La funzione

$$f = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

soddisfa i requisiti del corollario.

691.58 Coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}^n

Teorema 50. (Lemma di Poincaré a supporto compatto). Se H_c^k indica la coomologia a supporto compatto, allora

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osservazione. Consideriamo $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funzione C^∞ a supporto compatto, tale che

$$\int_{\mathbb{R}} e dt = 1.$$

Sia $\varepsilon \in A_c^n(\mathbb{R}^n)$ una n -forma differenziale a supporto compatto:

$$\varepsilon := e(x^1) \cdot \dots \cdot e(x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad [\varepsilon] \in H_c^n(\mathbb{R}^n).$$

Allora l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon = 1$ e pertanto $[\varepsilon] \in H_c^n(\mathbb{R}^n)$ lo genera.

691.59 Successione di spazi vettoriali esatta induce successione esatta dei duali

Siano A, B, C spazi vettoriali, $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ funzioni lineari. Siano A^*, B^*, C^* gli spazi vettoriali duali, e f^*, g^* le funzioni duali.

Proposizione 51. Se la seguente è una successione di spazi vettoriali esatta in B :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

allora la seguente

$$C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^*$$

è esatta in B^* .

691.60 Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa coomologia a supporto compatto

Proposizione 52. Se M, N sono varietà differenziabili diffeomorfe, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$H_c^k(M) \cong H_c^k(N)$$

sono isomorfe, dove H_c^k indica la coomologia a supporto compatto.

691.61 Estensione a zero di una forma differenziale a supporto compatto

Sia M una varietà differenziabile, e si considerino le forme differenziali a supporto compatto A_c^k .

Definizione 53. Se $U \subseteq M$ aperto e $\omega \in A_c^k(M)$, si definisce $j_*\omega \in A_c^k(M)$:

$$(j_*\omega)_p = \begin{cases} \omega_p & p \in U \\ 0 & p \notin U \end{cases}$$

691.62 Successione di Mayer-Vietoris per coomologia a supporto compatto

Sia M una varietà differenziabile. Si indichi con A_c^\bullet l'insieme delle forme differenziali a supporto compatto e con j_* l'estensione a zero di tali forme.

Sia $\{U_0, U_1\}$ un ricoprimento aperto di M . Si definiscono

$$\begin{aligned} s : A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) &\longrightarrow A_c^\bullet(M) \\ (\omega_0, \omega_1) &\longmapsto j_*\omega_0 + j_*\omega_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta : A_c^\bullet(U_0 \cap U_1) &\longrightarrow A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) \\ \eta &\longmapsto (-j_*\eta, j_*\eta). \end{aligned}$$

Queste sono funzioni lineari e morfismi tra complessi di cocatene.

Proposizione 54. (Proposizione 5.5.8 di).

La successione

$$0 \longrightarrow A_c^\bullet(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{\delta} A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) \xrightarrow{s} A_c^\bullet(M) \longrightarrow 0$$

è una SEC di spazi vettoriali (e di complessi di cocatene), e pertanto induce una successione esatta in coomologia:

$$\cdots \longrightarrow H_c^{k-1}(M) \xrightarrow{\partial_*} H_c^k(U_0 \cap U_1) \longrightarrow H_c^k(U_0) \oplus H_c^k(U_1) \longrightarrow \cdots$$

Inoltre, anche la successione duale lo è:

Osservazione. La scrittura di cui sopra si ha in virtù del fatto che la coomologia a supporto compatto è uguale alla coomologia di complesso di cocatene di A_c^\bullet .

Dimostrazione. Si dimostra unicamente la suriettività di s (ovvero l'esattezza della catena $A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) \xrightarrow{s} A_c^\bullet(M) \rightarrow 0$).

Sia $\omega \in A_c^\bullet(M)$. Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_0, U_1\}$.

Si ha che $\rho_0\omega \in A_c^\bullet(U_0)$ e $\rho_1\omega \in A_c^\bullet(U_1)$:

$$s(\rho_0\omega, \rho_1\omega) = j_*\rho_0\omega + j_*\rho_1\omega = \rho_0\omega + \rho_1\omega = (\rho_0 + \rho_1)\omega = \omega.$$

■

691.63 Lemma del cinque

Sia R un **anello** commutativo con unità, e siano $H, H', L, L', M, M', N, N', P, P'$ degli **R -moduli**.

Lemma 55. Si consideri il **seguente** diagramma commutativo a righe **esatte**.

$$\begin{array}{ccccccc} H & \xrightarrow{\alpha} & L & \xrightarrow{\beta} & M & \xrightarrow{\gamma} & N & \xrightarrow{\delta} & P \\ \downarrow \eta & \cong \downarrow \varphi & & & \downarrow \psi & & \theta \downarrow \cong & & \rho \downarrow \\ H' & \xrightarrow{\alpha'} & L' & \xrightarrow{\beta'} & M' & \xrightarrow{\gamma'} & N' & \xrightarrow{\delta'} & P' \end{array}$$

Se η è **suriettiva**, ρ è **iniettiva** e φ, θ sono **isomorfismi**, allora ψ è un **isomorfismo**.

Osservazione. Sempre nel caso in cui M è una **varietà differenziabile** orientabile e **compatta**, allora la **dimensione** $\dim H^k(M) < +\infty$ e quindi, applicando nuovamente DP

$$H^{n-k}(M) \cong H^k(M)^* \cong H^k(M)$$

691.64 Coomologia in dimensione massima

Si indica con H^k la Coomologia di De Rham, con H_c^k coomologia a supporto compatto, e con \cong gli **isomorfismi**

Teorema 56. Sia M una **varietà differenziabile connessa** di dimensione n .

1. Se M è orientabile e compatta, allora

$$H^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

2. Se M è orientabile e non compatta, allora

$$H^n(M) = 0.$$

3. Se M è non orientabile, allora

$$H^n(M) = 0.$$

4. Se M è orientabile, allora

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

5. Se M è non orientabile, allora

$$H_c^n(M) = 0.$$

Dimostrazione. 1. Per DP e DP per varietà compatte

$$H^n(M) \cong H^0(M)$$

e siccome M connessa

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

2. Siccome M è connessa, allora $H_c^0(M) = 0$ (come per H^0). Quindi per **DP**

$$H^n(M) \cong H_c^0(M) = 0.$$

3. Come nel calcolo della coomologia di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, per M non orientabile esiste \widetilde{M} orientabile n -dimensionale e

$$\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$$

continua e **suriettiva** tale che il pullback

$$\pi^* : H^n(M) \rightarrow H^n(\widetilde{M})$$

è **iniettivo**

- Se M è non compatta, allora \widetilde{M} è non compatta (poiché l'**immagine continua di spazio compatto è compatto**).

Per 2. allora $H^n(\widetilde{M}) = 0$ e siccome π^* è iniettiva allora $H^n(M) = 0$.

- Se M è compatta, allora \widetilde{M} è compatta. Per dimostrare che $H^n(M) = 0$ è sufficiente mostrare che per ogni ω , $[\omega] = 0$. Per iniettività di π^* , è sufficiente mostrare che $\pi^*[\omega] = 0$ per ogni ω .

Si considerino quindi:

- il pullback:

$$\pi^* : A^n(M) \rightarrow A^n(\widetilde{M})$$

- la mappa $A : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ tale che $A^2 = \text{Id}$ e che scambia l'orientazione di M .

Quindi, per ogni ω , siccome A inverte l'orientazione:

$$\int_{\widetilde{M}} \pi^* \omega = - \int_{\widetilde{M}} A^* \pi^* \omega.$$

Ma $A^* \pi^* \omega = (\pi \circ A)^* \omega = \pi^* \omega$, e quindi

$$- \int_{\widetilde{M}} A^* \pi^* \omega = - \int_{\widetilde{M}} \pi^* \omega.$$

Segue che $\int_{\widetilde{M}} \pi^* \omega = 0$ e, per la **DP**, $\pi^* \omega = 0$.

Pertanto, $\pi^*[\omega] = [\pi^* \omega] = 0$.

4. Per **DP** $H_c^n(M)^* \cong H^0(M) \cong \mathbb{R}$, quindi $\dim H_c^n(M)^* < \infty$ e dunque $H_c^n(M)^* \cong H_c^n(M)$

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

5. Lasciato per esercizio, simile a 3. ■

Osservazione. Mettendo insieme l'isomorfismo dato da DP e quello tra spazio vettoriale e il suo duale, si ottiene che, se M è una **varietà differenziabile connessa**, orientabile e **compatta**, e $\dim M = n$, allora

$$\begin{aligned}\int_M : H^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega\end{aligned}$$

è un **isomorfismo**.

Questo segue anche dal fatto che:

1. \int_M è una mappa lineare;
2. è suriettiva, poiché $\int_M \nu \neq 0$, per ν forma volume (che esiste per la caratterizzazione delle v.d. orientabili)
3. è iniettiva, in quanto $\ker \int_M \neq H^n(M)$ (poiché $\int_M \nu \neq 0$, per il **Teorema Nullità + Rango**)

Osservazione. Se M è una **varietà differenziabile** qualsiasi, allora la **dimensione** di $H_c^n(M)$ è uguale al numero di **componenti connesse** orientabili di M .

691.65 Esistenza forma differenziabile a supporto compatto che integra a uno

Osservazione. Quindi, se M è una **varietà differenziabile connessa** e orientabile di dimensione n , esiste $\omega_M \in A_c^n(M)$ tale che

1. La coomologia a supporto compatto $H_c^n(M) = \langle [\omega_M] \rangle$;
2. $\int_M \omega_M = 1$.

Infatti, per la **Dualità di Poincaré** si ha il seguente **isomorfismo** con lo **spazio duale**:

$$H^0(M) \xrightarrow{\cong} H_c^n(M)^*$$

$$[\omega] \longmapsto \left([\tau] \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \right)$$

- Siccome M è connessa, allora $\dim H^0(M) = 1 < +\infty$.
- Pertanto $\dim H_c^n(M)^* = 1$ (per la dualità di Poincaré).
- Quindi esiste

$$F : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

non nulla. **Quindi** F **isomorfismo**, ed esiste $[\tau_M] \in H_c^n(M)$ non nullo tale che $F[\tau_M] = 1$.

- Per l'isomorfismo dalla dualità di Poincaré, esiste $[\omega_0] \in H^0(M)$ tale che

$$\begin{aligned} F : H_c^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\tau] &\longmapsto \int_M \omega_0 \wedge \tau \end{aligned}$$

- In particolare, quindi

$$1 = F[\tau_M] = \int_M \omega_0 \wedge \tau_M.$$

Si pone $\omega_M := \omega_0 \wedge \tau_M$.

- Sicuramente $[\omega_M] \in H_c^n(M)$, per definizione del prodotto wedge.
- $[\omega_M] \neq 0$ (e quindi genera tutto lo spazio): infatti, se per assurdo $[\omega_M] = 0$ allora ω_M è esatta, e quindi, per il Teorema di Stokes,

$$\int_M \omega_M = 0.$$

Assurdo.

691.66 Caratterizzazione forme esatte di grado massimo su varietà orientabile, connessa e compatta

Proposizione 57. Sia M una varietà differenziabile orientabile, connessa e compatta. Allora una n -forma differenziale $\omega \in A^n(M)$ è esatta sse l'integrale

$$\int_M \omega = 0.$$

Dimostrazione. (\Rightarrow): per il Teorema di Stokes.

(\Leftarrow): Per la Dualità di Poincaré (e Coomologia in dimensione massima), si ha che $H^n(M)$ ha dimensione 1. Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_M : H^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Infatti

1. \int_M è lineare;
2. sia dominio che codominio hanno dimensione 1;
3. $\int_M \nu \neq 0$, per ν forma volume (che esiste per la caratterizzazione delle v.d. orientabili)

Quindi, se $\int_M \omega = 0$ allora $[\omega] = 0$ in $H^n(M)$, ovvero ω è esatta. ■

Osservazione. Nelle condizioni di cui sopra, quindi, se $[\eta], [\omega] \in H^n(M)$

$$[\eta] = [\omega] \iff \int_M (\eta - \omega) = 0.$$

691.67 Integrale di forma su sottovarietà non nullo implica forma non esatta

Corollario 58. Sia M è una varietà differenziabile orientabile, e $S \subseteq M$ una sottovarietà di M , compatta e di dimensione $k < n$; sia $\omega \in A^k(M)$.

Allora, se $\int_S \omega \neq 0$ allora ω non è esatta.

Dimostrazione. Sia $i : S \hookrightarrow M$ l'inclusione:

$$\int_S \omega := \int_M i^* \omega$$

dove i^* è il pullback.

Se ω è esatta, allora $\omega = d\eta$:

$$i^* \omega = d(i^* \omega)$$

e quindi

$$\int_S \omega = \int_S i^*(d\eta) = \int_S d(i^* \omega) = 0$$

per il Teorema di Stokes. ■

691.68 Coomologia delle superfici topologiche compatte orientabili

Teorema 59. Se Σ_g è la superficie topologica compatta orientabile di genere g , allora la coomologia di De Rham è

$$H_{dR}^k(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^g \oplus \mathbb{R}^g & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove “ \cong ” è un isomorfismo.

Lemma 60. La coomologia del toro bucato, $\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \setminus \{\text{punto}\}$ è

$$H_{dR}^k(\tilde{\mathbb{T}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ \mathbb{R}^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Dato il Toro \mathbb{T} , di cui si conosce la coomologia, si considera:

$$\mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}} \cup D$$

dove $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \setminus \{p\}$ e D è un intorno aperto attorno a p , omotopo a \mathbb{R}^2 , di cui si conosca le coomologia. Si noti che $\tilde{\mathbb{T}} \cap D$ è omotopo a \mathbb{S}^1 , di cui si conosce la coomologia. Si scrive quindi Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_{dR}^0(\mathbb{T}) & \longrightarrow & H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus H_{dR}^0(D) & \longrightarrow & H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) \\
 & & & & \searrow & & \\
 & & H_{dR}^1(\mathbb{T}) & \xhookrightarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus H_{dR}^1(D) & \longrightarrow & H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & H_{dR}^2(\mathbb{T}) & \xhookrightarrow{\quad} & H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus H_{dR}^2(D) & \longrightarrow & H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Si possono semplificare alcuni termini:

- siccome tutti gli spazi sono connessi, ogni H_{dR}^0 è isomorfo a \mathbb{R} (in particolare, $H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}}) \cong \mathbb{R}$);
- siccome $\tilde{\mathbb{T}}$ è orientabile ma **non compatta**, allora $H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}}) = 0$;
- si sostituiscono gli $H_{dR}^k(D) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^2)$ e $H_{dR}^k(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^1)$, nonché gli elementi della coomologia di \mathbb{T} .

La successione esatta è necessaria solo più per calcolare $H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & \searrow & & \\
 & & \mathbb{R}^2 & \xhookrightarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & \mathbb{R} & \xrightarrow{\beta} & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(Non dimostrato: $H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}})$ ha dimensione finita). Utilizzando la **somma alterna delle dimensioni**, si ottiene che

$$-1 + 2 - 1 + 2 - \dim H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) + 1 - 1 = 0$$

ovvero $\dim H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) = 2$, $H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) \cong \mathbb{R}^2$. ■

Dimostrazione. (Del Teorema 475) Caso $k = 0$: siccome Σ_g è **connessa**, allora $H_{dR}^0(\Sigma_g) = \mathbb{R}$.

Caso $k = 2$ e $k \geq 2$: Σ_g è una **varietà differenziabile** di dimensione 2.

- per ogni $k > 2$: $H_{dR}^k(\Sigma_g) = 0$, per questione di dimensione;
- per $k = 2$: siccome Σ_g è compatta e orientabile, allora (Coomologia in dimensione massima)

$$H_{dR}^2(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}$$

Caso $k = 1$: Consideriamo Σ_g rappresentato in Figura 41: possiamo dividerlo nei due insiemi U, V , rappresentati in Figura 42:

- U è omotopo alla superficie $\tilde{\Sigma}_{g-1} := \Sigma_{g-1} \setminus \{\text{punto}\}$;
- V è omotopo a $\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \setminus \{\text{punto}\}$, dove \mathbb{T} è il **Toro**.
- $U \cap V$ è omotopo a \mathbb{S}^1 , come si vede in Figura 43.

Siccome si vuole utilizzare la sequenza di Mayer-Vietoris, (sfruttando l'invarianza della coomologia per omotopia) è necessario calcolare la coomologia di $\tilde{\Sigma}_{g-1}$. Si procede per induzione

- Caso base: $\Sigma_1 = \mathbb{T}$, è verificato.
- Ipotesi induttiva: si supponga vera l'ipotesi per Σ_{g-1} :

$$H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) \cong \mathbb{R}^{g-1} \oplus \mathbb{R}^{g-1}$$

Si vuole dimostrare la tesi per Σ_g . Si procede scrivendo la successione di Mayer-Vietoris, utilizzando U e V come sopra.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{dR}^0(\Sigma_g) & \rightarrow & H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) & \rightarrow & H_{dR}^0(U \cap V) \\ & & & & \swarrow & & \\ H_{dR}^1(\Sigma_g) & \xhookleftarrow{\quad} & H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) & \rightarrow & H_{dR}^1(U \cap V) & & \\ & & & & \swarrow & & \\ H_{dR}^2(\Sigma_g) & \xhookleftarrow{\quad} & H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V) & \rightarrow & H_{dR}^2(U \cap V) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Sostituendo utilizzando le considerazioni sull'omotopia:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{dR}^0(\Sigma_g) & \rightarrow & H_{dR}^0(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}}) & \rightarrow & H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \\ & & & & \swarrow & & \\ H_{dR}^1(\Sigma_g) & \xhookleftarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) & \rightarrow & H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) & & \\ & & & & \swarrow & & \\ H_{dR}^2(\Sigma_g) & \xhookleftarrow{\quad} & H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}}) & \rightarrow & H_{dR}^2(\mathbb{S}^1) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

- Tutte le superfici in gioco sono connesse, quindi $H_{dR}^0 \cong \mathbb{R}$;
- Si conoscono la coomologia di \mathbb{S}^1 e $\tilde{\mathbb{T}}$, nonché le coomologie di dimensione 0 e 2 si Σ_g ;
- $\tilde{\Sigma}_{g-1}$ è una superficie orientabile non compatta, e quindi $H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \cong 0$.

Resta quindi:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & H_{dR}^1(\Sigma_g) & \hookrightarrow & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & \mathbb{R} & \longleftarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Utilizzando la [somma alterna delle dimensioni](#) si ottiene:

$$\begin{aligned}
 0 &= 1 - 2 + 1 - \dim H_{dR}^1(\Sigma_g) + \dim H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) + 2 - 1 + 1 \\
 \dim H_{dR}^1(\Sigma_g) &= 1 - 2 + 1 + \dim H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) + 2 - 1 + 1 = \dim H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) + 2. \quad (\star\star)
 \end{aligned}$$

È qui che entra in gioco l'ipotesi induttiva. Se si considera $\Sigma_{g-1} = A \cup B$, con $A = \Sigma_{g-1} \setminus \{q\}$ e B intorno aperto di q omotopo a \mathbb{R}^2 , si ottiene che:

- $H_{dR}^k(A) \cong H_{dR}^k(\tilde{\Sigma}_{g-1})$, in quanto sono omotopi, di cui si conoscono tutte le coomologie tranne H_{dR}^1 :

$$H_{dR}^0(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \cong \mathbb{R}, \quad H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) = 0;$$

- $H_{dR}^k(B) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^2)$, [coomologia nota](#);
- $H_{dR}^k(A \cap B) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^1)$, coomologia nota.

Scrivendo Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_{dR}^0(\Sigma_{g-1}) & \longrightarrow & H_{dR}^0(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) & \hookrightarrow & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & H_{dR}^2(\Sigma_{g-1}) & \hookrightarrow & H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & H_{dR}^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Per ipotesi induttiva si conoscono tutte le $H_{dR}^k(\Sigma_{g-1})$, e pertanto, sostituendo tutte le coomologie note:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & \mathbb{R}^{g-1} \oplus \mathbb{R}^{g-1} & \xrightarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus 0 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & \mathbb{R} & \longleftarrow & 0 \oplus 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

e facendo la [somma alterna delle dimensioni](#):

$$\dim H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) = -1 + 2 - 1 + 2(g-1) + 1 - 1 = 2(g-1)$$

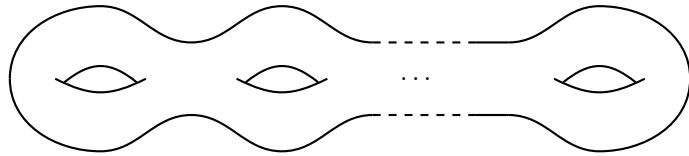


Figura 6: La superficie Σ_g

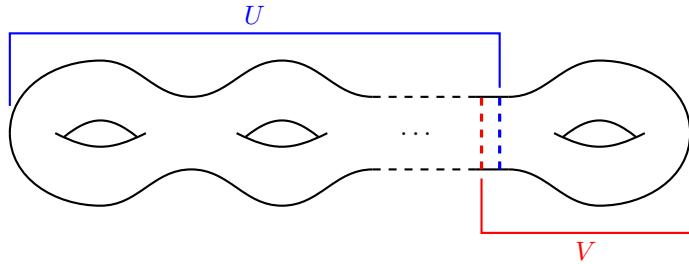


Figura 7: Gli insiemi U e V

che, applicata in $(\star\star)$:

$$H_{dR}^1(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}^g \oplus \mathbb{R}^g.$$

■

691.69 Caratterizzazione forme esatte di grado massimo a supporto compatto su varietà orientabile connessa

Proposizione 61. Sia M una varietà differenziabile orientabile, connessa. Allora una n -forma differenziale $\omega \in A_c^n(M)$ a supporto compatto è esatta sse l'integrale

$$\int_M \omega = 0.$$

Dimostrazione. (\Rightarrow): per il Teorema di Stokes.

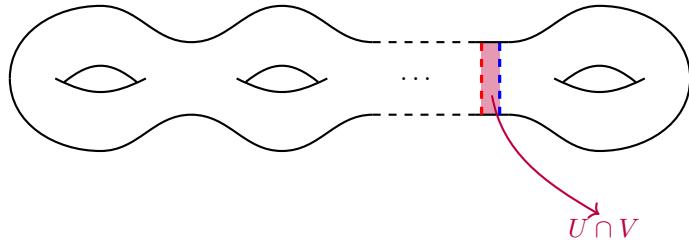


Figura 8: L'insieme $U \cap V$

(\Leftarrow): Per la **Dualità di Poincaré** (e Cohomologia in dimensione massima), si ha che $H_c^n(M)$ ha dimensione 1. Pertanto:

$$\begin{aligned}\int_M : H_c^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega\end{aligned}$$

è un isomorfismo. Infatti

1. \int_M è lineare;
2. sia dominio che codominio hanno dimensione 1;
3. siccome $H_c^n \cong \mathbb{R}$, allora $H_c^n = \langle [\omega_M] \rangle$; posso sempre scegliere ω_M tale che $\int_M \omega_M = 1$, e pertanto $\int_M \omega_M \neq 0$.

Quindi, se $\int_M \omega = 0$ allora $[\omega] = 0$ in $H^n(M)$, ovvero ω è esatta. ■

691.70 Funzione Propria

Siano X, Y spazi topologici, $F : X \longrightarrow Y$ funzione continua.

Definizione 62. F si dice **propria** se per ogni $K \subseteq Y$ compatto, la retroimmagine $F^{-1}(K) \subseteq X$ è **compatto**.

691.71 Grado di una funzione propria tra varietà differenziabili

691.72 Teorema di Sard

691.73 Teorema del Grado

692 Teoria descrittiva degli insiemi [CORSO]

692.1 Materiale

- Spazio topologico separabile
- Spazio topologico primo numerabile
- Spazio topologico secondo numerabile
- Spazio topologico metrizzabile
- Spazio Polacco
- Teorema di completamento di spazi metrici
- Proprietà di chiusura degli Spazi Polacchi
- Esempi di spazi polacchi *
- Sottoinsiemi aperti di spazi polacchi sono polacchi
- Insiemi Gdelta e Fsigma

- Intersezione di Gdelta densi è densa in un polacco
- Chiuso in uno spazio metrizzabile è Gdelta
- Caratterizzazione dei sottoinsiemi polacchi di uno spazio polacco
- Oscillazione di una funzione in uno spazio metrico
- Estensione di una funzione ad un dominio Gdelta

692.2 DONE Esercizi

692.2.1 Foglio di esercizi 1

- Sottospazi di spazi polacchi Fsigma densi e codensi non sono Gdelta
- Esempi di spazi polacchi - Esercizi TDI
- Proprietà di base di un ultrametrica

OUTPUT: [BROKEN LINK: 41478265-ff20-444c-8a9c-e37fd954d64a]

692.2.2 Foglio di esercizi 2

- Immersione topologica dello spazio di Baire nello spazio di Cantor (Esercizio 1)
- Insieme limitato dello spazio di Baire (Esercizio 2)
- Caratterizzazione dei compatti dello spazio di Baire (Esercizio 2)
- Insiemi Ksigma (Esercizio 3)
- Insieme definitivamente limitato dello spazio di Baire (Esercizio 3)
- Caratterizzazione dei sigma-compatti nello spazio di Baire (Esercizio 3)
- Spazio di Baire si surietta in ogni spazio polacco non vuoto tramite una mappa aperta e continua (Esercizio 4)
- Esempi di spazi polacchi con rango di Cantor-Bendixson arbitrario (Esercizio 5)

OUTPUT: [BROKEN LINK: c7293a8f-9247-4c87-a182-c67988d8ae7d]

692.2.3 Foglio di esercizi 3

- Caratterizzazione insieme mai denso (Esercizio 1)
- Proprietà insiemi magri, comagri, non magri (Esercizio 2)
- Proprietà della gerarchia di Borel (Esercizio 3)
- Classi ambigue di un sottospazio polacco nella gerarchia di Borel (Esercizio 4)
- Classe di Borel dell'insieme dei punti di derivabilità di una funzione reale (Esercizio 5)

692.2.4 Foglio di esercizi 4

- Caratterizzazione dei punti non isolati di uno spazio polacco (Esercizio 1)
- Caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi ma non aperti di un polacco (Esercizio 2)
- Esempi di sottoinsiemi pi03 completi (Esercizio 3)
- Esempi di sottoinsiemi sigma02 completi (Esercizio 4)
- Esempi di sottoinsiemi analitici (Esercizio 5)

692.2.5 Foglio di esercizi 5

- Separazione tramite boreiani di insiemi invarianti per una relazione di equivalenza (Esercizio 1)
- Insieme parzialmente trasversale per una relazione di equivalenza
- Insieme trasversale per una relazione di equivalenza
- Selettore per una relazione di equivalenza
- Proprietà insieme parzialmente trasversale per una relazione di equivalenza in uno spazio polacco (Esercizio 2)
- Proprietà insieme trasversale e selettore per una relazione di equivalenza in uno spazio polacco (Esercizio 3)
- Coanalitici sono unione di omega1 boreiani (Esercizio 4)

693 Teoria delle categorie [CORSO]

693.1 Materiale

- CATEGORIA

Esame: file:///Users/davidepeccioli/Documents/2.Areas/Matematica_LM/Insegnamenti/TeoriadelleCategorie/Esame/PECCIOLI_exercises.org

693.2 Org

- file:///Users/davidepeccioli/Documents/2.Areas/Matematica_LM/Insegnamenti/TeoriadelleCategorie/org_llm/capitolo1.md
- file:///Users/davidepeccioli/Documents/2.Areas/Matematica_LM/Insegnamenti/TeoriadelleCategorie/org_llm/capitolo2.md
- file:///Users/davidepeccioli/Documents/2.Areas/Matematica_LM/Insegnamenti/TeoriadelleCategorie/org_llm/capitolo3.md
- file:///Users/davidepeccioli/Documents/2.Areas/Matematica_LM/Insegnamenti/TeoriadelleCategorie/org_llm/capitolo4.md

694 Spazio topologico separabile

694.1 Definizione

Uno spazio topologico X è detto **separabile** se ammette un sottoinsieme numerabile e **denso**.

694.2 Sottoinsiemi aperti di un separabile sono separabili

695 Sottoinsieme denso

695.1 Sottoinsieme codenso

Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ si dice **codenso** se $X \setminus A$ è denso.

695.2 Proprietà di base

695.2.1 Proprietà 1

Se $A \subseteq B \subseteq C$ spazi topologici e A è denso in C allora A è denso in B .

695.2.2 Proprietà 2

Se $A \subseteq B \subseteq C$ spazi topologici e A è denso in C allora B è denso in C .

695.3 Caratterizzazione di un insieme denso per intorni

696 Spazio topologico primo numerabile

696.1 Definizione

Uno spazio topologico X si dice **primo numerabile** se ogni suo punto ammette un **sistema fondamentale di intorni numerabile**.

697 Sistema fondamentale di intorni

698 Spazio topologico metrizzabile

698.1 Definizione

Uno spazio topologico X si dice **metrizzabile** se esiste una **metrica** che induce la **topologia**.

698.1.1 Osservazione

Se d è una **distanza**, allora

$$d' = \frac{d}{1+d}$$

è una **distanza equivalente**, con $d' \leq 1$, e pertanto induce la stessa topologica.

698.1.2 Osservazione

Se X è uno spazio metrizzabile allora X è **omeomorfo** ad uno **spazio metrico**. Pertanto ne eredita le caratteristiche topologiche:

- X è **T2** (vedi Spazi metrici sono T2);

698.1.3 Spazio topologico completamente metrizzabile

Uno **spazio topologico** X si dice **completamente metrizzabile** se esiste una **metrica completa** che induce la **topologia**.

699 Spazio metrico

699.1 Definizione

Uno **spazio metrico** (X, d) è un **insieme** X dotato di una **funzione** $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

699.2 Palla aperta in uno spazio metrico

699.3 Palla chiusa in uno spazio metrico

700 Topologia indotta da una distanza

Wikiversity

700.1 Definizione

Sia (X, d) uno **spazio metrico** in questione.

Si denoti con $B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$. La **topologia** indotta dalla metrica τ di X è quella che per **base**:

$$\mathcal{B} = \{B_d(x, y) \mid x \in X \wedge r > 0\}$$

700.1.1 Proposizione

Per ogni $\varepsilon > 0$, la seguente è una base di τ :

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \{B_d(x, r) \mid x \in X \wedge r \in \mathbb{Q}^+ \cap (0, \varepsilon)\}$$

701 Distanze equivalenti

702 Distanze equivalenti inducono la stessa topologia

703 Spazio Polacco

703.1 Definizione

Uno Spazio Polacco è uno spazio topologico X secondo numerabile e completamente metrizzabile.

703.1.1 Spazio metrico Polacco

Uno Spazio metrico Polacco è uno spazio metrico (X, d) dove X è uno spazio topologico secondo numerabile e d è una metrica completa.

704 Spazio metrico completo

705 Completamento di uno spazio metrico

705.1 Teoriame

Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora esiste un unico (a meno di isomorfismi) (\hat{X}, \hat{d}) spazio metrico completo ed esiste una isometria

$$\phi : X \rightarrow \hat{X}$$

tale che ran j è denso in \hat{X} (vedi Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione).

706 Isomorfismo tra spazi metrici

707 Isometria

708 Proprietà di chiusura degli Spazi Polacchi

708.1 Chiusura per omeomorfismi

Se X uno spazio polacco e $r : X \rightarrow Y$ è un omeomorfismo, allora Y è uno spazio polacco.

708.2 Chiusura per sottoinsiemi chiusi

Se X uno spazio polacco e $C \subseteq X$ è un sottoinsieme chiuso, allora C è uno spazio polacco con la topologia di sottospazio.

708.2.1 Dimostrazione

Segue dalla caratterizzazione dei chiusi in termini di successioni.

708.3 Chiusura per prodotto cartesiano numerabile

Se $\langle X_n \rangle_{n \in \omega}$ è una sequenza di spazi polacchi (vedi Ordinale omega), allora il prodotto

$$\prod_{n \in \omega} X_n$$

è uno spazio polacco con la topologia prodotto.

708.3.1 TODO Dimostrazione

708.4 Chiusura per unione disgiunta numerabile

Se $\langle X_n \rangle_{n \in \omega}$ è una sequenza di spazi polacchi (vedi Ordinale omega), allora l'unione disgiunta

$$\coprod_{n \in \omega} X_n$$

è uno spazio polacco

708.4.1 TODO Dimostrazione

708.5 Chiusura per intersezione numerabile

Sia X uno spazio polacco e sia $\langle Y_n \rangle_{n \in \omega}$ una sequenza di spazi polacchi, $Y_n \subseteq X$ (vedi Ordinale omega e Sottospazio topologico).

Allora $Y := \bigcap_{n \in \omega} Y_i$ è uno spazio polacco dotato della topologia di sottospazio (vedi Intersezione di classi MK).

708.5.1 TODO Dimostrazione

708.6 Sottoinsiemi aperti di spazi polacchi sono polacchi

Sia X uno spazio polacco e sia $Y \subseteq X$ un sottoinsieme aperto. Allora Y è polacco con la topologia di sottospazio.

708.6.1 Dimostrazione

Sicuramente Y è secondo numerabile, e pertanto è necessario mostrare solamente che sia completamente metrizzabile.

Sia $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una distanza su X tale che (X, d) sia uno spazio metrico completo, e tale che induca la topologia di X . Si supponga d limitata^[200]

Sia $F := X \setminus Y$ (vedi Sottrazione di classi MK) e per ogni $x \in X$ si ponga (vedi Estremo superiore ed inferiore)

$$d(x, F) := \inf \{d(x, y) \mid y \in F\}$$

e si definisca su Y :

$$d'(x, y) := d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right|$$

Osserviamo^[201] che $d(\cdot, F) : X \rightarrow [0, 1]$ è una funzione continua.

d e d' inducono la stessa topologia su Y Per definizione di d' , si ha che, $\forall x, y \in Y$:

$$d'(x, y) \leq d(x, y)$$

e pertanto, posti

$$\begin{aligned} B_d(x, \varepsilon) &:= \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\} \\ B_{d'}(x, \varepsilon') &:= \{y \in Y \mid d'(x, y) < \varepsilon'\} \end{aligned}$$

Si ha che, per ogni $x \in Y$ e per ogni $\varepsilon > 0$:

$$B_{d'}(x, \varepsilon) \subseteq B_d(x, \varepsilon) \cap Y.$$

È sufficiente dimostrare che per ogni $x \in Y$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\varepsilon' > 0$ tale che

$$B_d(x, \varepsilon') \cap Y \subseteq B_{d'}(x, \varepsilon)$$

Siano $x \in Y$ e $\varepsilon > 0$ fissati. Esiste^[202] $\varepsilon' > 0$ tale che: $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$ e per ogni $y \in Y \cap B_d(x, \varepsilon')$:

$$\left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Allora, per ogni $y \in Y \cap B_d(x, \varepsilon')$ si ha

$$d'(x, y) = d(x, y) + \left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right| < \varepsilon' + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e quindi $y \in B_{d'}(x, \varepsilon)$.

(Y, d') è uno spazio metrico completo. Siccome d e d' inducono la stessa topologia, allora ogni successione di d' -Cauchy è d -Cauchy.

Sia dunque $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ una successione di d' -Cauchy. Allora^[203] $y_i \rightarrow y$ converge a qualche $y \in X$.

Consideriamo ora la successione $\left(\frac{1}{d(y_i, F)} \right)_{i \in \mathbb{N}}$: questa è di Cauchy in \mathbb{R} , infatti per ogni i, j

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{d(y_i, F)} - \frac{1}{d(y_j, F)} \right| &= |d'(y_i, y_j) - d(y_i, y_j)| \\ &= \leq |d'(y_i, y_j)| + |d(y_i, y_j)| \end{aligned}$$

e $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è sia d -Cauchy che d' -Cauchy, per cui si ha la tesi.

Siccome $\left(\frac{1}{d(y_i, F)} \right)_{i \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in \mathbb{R} , allora converge a $\ell \in \mathbb{R}$.

- Poiché $y_i \in Y$, allora $d(y_i, F) \neq 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, dunque la successione esiste per ogni i ; dunque per ogni $i \in \mathbb{N}$:

$$d(y_i, F) > 0$$

Necessariamente $\ell \geq 0$, per il Teorema di permanenza del segno.

- Poiché d è limitata, allora $\ell \neq 0$.

Quindi $\ell > 0$.

Poiché

$$\begin{aligned} f : (0, +\infty) &\longrightarrow (0, +\infty) \\ t &\longmapsto \frac{1}{t} \end{aligned}$$

è continua, allora è continua per successioni, e pertanto

$$d(y_i, F) \rightarrow \frac{1}{\ell} \neq 0$$

Per continuità⁵⁸⁹ di $d(\cdot, F)$ (vedi Funzione continua è continua per successioni)

$$d(y_i, F) \rightarrow d(y, F)$$

Per l'unicità del limite, $d(y, F) = 1/\ell \neq 0$, e quindi $y \notin F$ e quindi $y \in Y$.

709 Caratterizzazione dei chiusi in termini di successioni

709.1 Proposizione

Sia X uno spazio topologico primo numerabile, e sia $C \subseteq X$. Sono fatti equivalenti:

1. C è chiuso.
2. Per ogni successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq C$, se questa converge a $p \in X$, allora $p \in C$.

709.1.1 Dimostrazione

Questo segue da

- Caratterizzazione dei chiusi in termini di chiusura
- Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni

710 Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni

710.1 Teorema

Sia X uno spazio topologico primo numerabile. Siano $Y \subseteq X$ e $p \in X$. Sono fatti equivalenti:

1. esiste una successione in Y convergente a p ;
2. p è un punto di accumulazione per una successione in Y ;
3. $p \in \text{Cl}_X(Y)$ (vedi Chiusura Topologica)

710.2 Teorema

Sia X uno spazio topologico. Siano $Y \subseteq X$ e $p \in X$.

- Se esiste una successione in Y convergente a p allora p è un punto di accumulazione per una successione in Y .
- Se p è un punto di accumulazione per una successione in Y allora $p \in \text{Cl}_X(Y)$ (vedi Chiusura Topologica)

711 Punto di accumulazione di una successione

712 Successione di Cauchy

713 Proprietà vere definitivamente

714 Funzione continua è continua per successioni

714.1 Teorema

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua. Allora f è continua per successioni

714.2 Funzione continua per successioni è continua

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$ continua per successioni. Se X è uno Spazio topologico sequenziale, allora f è continua.

715 Gruppo polacco

716 Insiemi Gdelta e Fsigma

Sia X uno spazio topologico.

716.1 Gdelta

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice G_δ se può essere scritto come intersezione numerabile di sottoinsiemi aperti di X .

716.1.1 Proprietà di chiusura degli insiemi Gdelta

La collezione dei sottoinsiemi G_δ di X è chiusa per intersezione numerabile e unione finita.

716.2 Fsigma

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice F_σ se può essere scritto come unione numerabile di sottoinsiemi chiusi di X (o, equivalentemente, se $X \setminus A$ è G_δ).

716.2.1 Proprietà di chiusura degli insiemi F_σ

La collezione dei sottoinsiemi F_σ di X è chiusa per [unione numerabile](#) e [intersezione finita](#).

716.3 Insiemi K_σ

A subset is σ -compact (or K_σ) if it can be written as a [countable union](#) of [compact spaces](#).

716.3.1 Esempi

For example, fitedimensional Euclidean spaces \mathbb{R}^n are σ -compact.

717 Teorema di permanenza del segno

718 Unicità del limite

718.1 Teorema

Se X è uno [spazio topologico](#) di Hausdorff, allora una [successione convergente](#) ha un unico limite.

719 Disuguaglianza triangolare

720 Caratterizzazione dei sottoinsiemi polacchi di uno spazio polacco

720.1 Teorema

Sia X uno [spazio polacco](#), e sia $Y \subseteq X$ un [sottoinsieme](#). Sono fatti equivalenti:

1. Y è uno spazio polacco (quando dotato della [topologia di sottospazio](#));
2. Y è un [sottoinsieme \$G_\delta\$](#) di X .

720.1.1 Dimostrazione

2. -> 1. Questa implicazione è banale. Infatti, per definizione, se Y è sottoinsieme G_δ allora è [intersezione numerabile](#) di sottoinsiemi [aperti](#) di X . Ma gli aperti di X sono spazi polacchi e [intersezione numerabile](#) di spazi polacchi è polacco.

1. -> 2. Consideriamo id_Y la funzione identità su Y . $\exists [X \supseteq Y \xrightarrow{\text{Id}_Y} Y] \forall$ Allora, per la proprietà di [Estensione di una funzione continua ad un dominio \$G_\delta\$](#) , Id_Y può essere estesa a

$$g : G \rightarrow Y$$

con G un insieme G_δ di X tale che (vedi [Chiusura Topologica](#) e [Funzione identità](#))

$$Y \subseteq G \subseteq \text{Cl}_X(Y); \quad g \upharpoonright Y = \text{Id}_Y$$

Inoltre, Y è denso in $\text{Cl}_X(Y)$, e quindi Y è denso in $G \subseteq \text{Cl}_X(Y)$. Considerando la [Estensione della funzione identità di un sottoinsieme denso](#), si ha che $g = \text{id}_G$ e $Y = G$.

Pertanto Y è un sottinsieme \mathbf{G}_δ .

721 Intersezione di \mathbf{G}_{δ} densi è densa in un polacco

721.1 Proposizione

Sia X uno [spazio polacco](#), e siano $A, B \subseteq X$ due [insiemi \$\mathbf{G}_\delta\$ densi](#) in X . Allora $A \cap B$ è [denso](#) in X .

722 Oscillazione di una funzione in uno spazio metrico

Sia Z_1 uno [spazio topologico](#), e sia $Z_2 = (Z_2, d')$ uno [spazio metrico](#). Sia $A \subseteq Z_1$ e sia $f : A \rightarrow Z_2$ una [funzione continua](#).

722.1 Definizione

Per ogni $z \in Z_1$ si definisce l'[oscillazione](#) di f in z come

$$\text{osc}_f(z) := \inf \left\{ \text{diam} (f(U \cap A)) \mid U \subseteq Z_1 \text{ aperto}, z \in U \right\}$$

dove, se $B \neq \emptyset$:

$$\text{diam}(B) := \sup d'(x, y) \mid x, y \in B \in \mathbb{R}$$

mentre $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

722.2 Insieme dei punti in cui l'oscillazione di una funzione si annulla

722.2.1 Continuità

Se $z \in Z_1 \setminus \text{Cl}(A)$ (vedi [Chiusura Topologica](#)), allora $\text{osc}_f(z) = 0$.

Se $z \in A$ allora

$$\text{osc}_f(z) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad f \text{ è continua in } z$$

(vedi [Funzione Continua](#) e [Funzione Continua in un punto](#))

722.2.2 Insieme G_δ

È possibile dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$, gli insiemi

$$A_\varepsilon := \{z \in Z_1 \mid \text{osc}_f(z) < \varepsilon\}$$

sono aperti, e pertanto

$$\{z \in Z_1 \mid \text{osc}_f(z) = 0\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{2^{-n}}$$

è un [insieme \$\mathbf{G}_\delta\$](#) .

722.2.3 L'insieme dei punti di continuità di una funzione continua in uno spazio metrizzabile è G_{δ}

Siano X, Y spazi topologici, Y metrizzabile, e sia $f : X \rightarrow Y$ una funzione. L'insieme dei punti in X su cui f è continua è un insieme G_{δ} .

723 Funzione Continua in un punto

724 Estensione di una funzione continua ad un dominio G_{δ}

724.1 Teorema

Siano X, Y due spazi topologici, X metrizzabile e Y completamente metrizzabile. Sia $A \subseteq X$ e sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione continua. $\downarrow [X \supseteq A \xrightarrow{f} Y] \downarrow$

Allora esiste $G \subseteq X$ un insieme G_{δ} ed esiste $g : G \rightarrow Y$ tali che

1. $A \subseteq G \subseteq \text{Cl}(A)$ (vedi Chiusura Topologica);
2. g continua;
3. $g \upharpoonright A = f$ (vedi Restrizione di una classe MK)

724.1.1 Dimostrazione

Sia d' una metrica completa compatibile su Y .

Definizione insieme G Si ponga

$$G := \text{Cl}(A) \cap \{z \in X \mid \text{osc}_f(z) = 0\}$$

(vedi Chiusura Topologica e Oscillazione di una funzione in uno spazio metrico e Insieme dei punti in cui l'oscillazione di una funzione si annulla)

Questo è un insieme G_{δ} , in quanto intersezione di due G_{δ} :

- $\text{Cl}(A)$ è un chiuso in uno spazio metrizzabile;
- per $\{z \in X \mid \text{osc}_f(z) = 0\}$ si veda “Insieme dei punti in cui l'oscillazione di una funzione si annulla”

Inoltre, ovviamente $G \subseteq \text{Cl}(A)$, mentre, siccome f è continua su A , $A \subseteq \{z \in X \mid \text{osc}_f(z) = 0\}$ (vedi Insieme dei punti in cui l'oscillazione di una funzione si annulla), e quindi

$$A \subseteq G \subseteq \text{Cl}(A)$$

Definizione funzione g Sia $z \in G \subseteq \text{Cl}(A)$. Sia $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ una successione convergente a z (vedi [Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni](#))

Si consideri la successione $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Z_2$. Si dimostra ora che questa sia una successione di d' -Cauchy.

Si fissi $\varepsilon > 0$. Siccome $z \in G$ allora $\text{osc}_f(z) = 0$, e dunque esiste U intorno aperto di z tale che^[204]

$$\text{diam}(f(U \cap A)) < \varepsilon$$

In particolare, siccome $z_n \rightarrow z$, allora **definitivamente** $z_n \in U$ (ovvero esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n > N$ si ha $z_n \in U$ e in particolare $z_n \in U \cap A$).

Allora $\forall n > N$ si ha che $f(z_n) \in f(U \cap A)$ e, per definizione di diametro, si ha che $\forall n, m > N$

$$d'(f(z_n), f(z_m)) < \varepsilon$$

Quindi $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy e quindi, siccome d' è una metrica completa, allora converge.

Si pone quindi

$$g(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$$

1. Buona definizione

Sia $z \in G$ e siano $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ e $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ due successioni convergenti a z . Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n)$$

Dimostriamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} d'(f(z_n), f(w_n)) = 0$. Questo dimostra la tesi^[205].

Sia $\varepsilon > 0$. Siccome $f(z_n)$ e $f(w_n)$ sono successioni convergenti, allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n > N$

$$d'(g(z), f(z_n)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad d'(g(z), f(w_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e dunque, per la [diseguaglianza triangolare](#)

$$\begin{aligned} d'(f(z_n), f(w_n)) &\leq d'(f(z_n), g(z)) + d'(f(w_n), g(z)) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. Estende f

Sia $z \in A$, e si consideri la successione $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = z$. Questa ovviamente converge a z , e pertanto, per definizione,

$$g(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(z) = f(z)$$

Quindi $g|_A = f$.

3. Continuità Per dimostrare che g sia continua in G , [dimostriamo](#) che $\forall z \in G$ si ha $\text{osc}_g(z) = 0$. Per ogni aperto $U \subseteq X$, per definizione di g si ha che

$$g(G \cap U) \subseteq \text{Cl}(f(A \cap U))$$

e [pertanto](#) $\text{diam}(g(G \cap U)) \leq \text{diam}(f(A \cap U))$

In particolare, per [definizione](#),

$$\begin{aligned} \text{osc}_g(z) &= \inf \left\{ \text{diam}(g(U \cap G)) \mid U \subseteq X \text{ aperto}, z \in U \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \text{diam}(f(A \cap U)) \mid U \subseteq X \text{ aperto}, z \in U \right\} \\ &= \text{osc}_f(z) \end{aligned}$$

Ma $\text{osc}_f(z) = 0$ poiché $z \in G$, dunque $\text{osc}_g(z) = 0$ e quindi g continua in z .

725 Chiuso in uno spazio metrizzabile è Gdelta

725.1 Proposizione

Sia X uno [spazio topologico metrizzabile](#), e sia $F \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso. Allora F è un [insieme \$G_\delta\$](#) .

725.1.1 Dimostrazione

Sia d una [metrica compatibile](#) su X .

Si denoti con

$$B_d(x, \varepsilon) := \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce

$$U_n := \bigcup_{x \in F} B_d(x, 2^{-n})$$

(vedi [Classe Unione Generalizzata](#))

Allora $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ (vedi [Classe Intersezione Generalizzata](#)).

726 Disugaglianze per il diametro di un insieme

Sia (X, d) uno spazio metrico, e si definisca il diametro per ogni $B \subseteq X$

$$\text{diam}(B) := \begin{cases} \sup \{d(x, y) \mid x, y \in B\} & B \neq \emptyset \\ 0 & B = \emptyset \end{cases}$$

726.1 Proposizione

Siano $A, B \subseteq X$.

- Se $A \subseteq B$ allora $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- Se $A \subseteq \text{Cl}(B)$ allora $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$. (vedi [Chiusura Topologica](#))

726.1.1 Dimostrazione

727 Estensione della funzione identità di un sottoinsieme denso

727.1 Teorema

Sia G uno spazio topologico di Hausdorff e sia $Y \subseteq G$ un sottoinsieme denso. Se $g : G \rightarrow Y$ è una funzione continua tale che la restrizione $g \upharpoonright Y = \text{id}_Y$ è la funzione identità, allora $g = \text{id}_G$.

Segue che $Y = G$.

727.1.1 Dimostrazione

Se $Y \subseteq G$ è denso, allora la sua chiusura è $\overline{Y} = G$.

Sia ora $x \in G$. Allora esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$ tale che $x_n \rightarrow x$.

Poiché g è continua, allora è continua per successioni, e quindi

$$g(x_n) \rightarrow g(x)$$

Poiché $x_n \in Y$ e $g \upharpoonright Y = \text{id}_Y$ si ha che $g(x_n) = x_n$.

Per unicità del limite, $g(x) = x$, e quindi $g = \text{id}_G$.

Inoltre, siccome $G = \text{rng}(g) \subseteq Y$ si ha che $G = Y$. (vedi Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione)

728 Funzione identità

729 Funzione continua per successioni

729.1 Definizione

Siano X, Y spazi topologici, $f : X \rightarrow Y$. f si dice continua per successioni se, per ogni successione convergente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ che converge ad \bar{x} si ha che la successione

$$\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq Y$$

converge ad $f(\bar{x})$.

730 Spazio topologico sequenziale

730.1 Esempi

730.1.1 Spazi topologici primo numerabili sono sequenziali

Gli spazi topologici primo numerabili sono sequenziali. Segue che lo siano anche gli spazi metrici.

731 Esempi di spazi polacchi

731.1 Il cubo di Hilbert è uno spazio polacco

Il cubo di Hilbert: $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ (vedi Classe delle Classi-Funzioni e anche Prodotto cartesiano generalizzato) è uno spazio polacco quando dotato della topologia prodotto.

731.2 Esercizi TDI - Foglio 1

731.2.1 Esercizio 1

Prove that the following are Polish subspaces of the Baire space ω^ω :

$$A = \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ has infinite range}\}$$
$$B = \{x \in \omega^\omega \mid x^{-1}(n) \text{ is infinite, for every } n \in \omega\}.$$

In contrast, show that

$$C = \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ is not surjective}\}$$
$$D = \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ has finite range}\}$$

are not Polish. (Use the fact that in a Polish space X , if $A \subseteq X$ is F_σ and both dense and codense, then A is not G_δ .)

Soluzione Si fissa una metrica completa d su ω^ω : per ogni $x, y \in \omega^\omega$

$$d(x, y) := \sum_{i \in \omega} 2^{-i} \frac{|x(i) - y(i)|}{|x(i) - y(i)| + 1}$$

1. Insieme A

Si vuole dimostrare che A sia un insieme G_δ , visto il Teorema di caratterizzazione.

Consideriamo, per ogni $n \in \omega$:

$$A_n := \{x \in \omega^\omega \mid |x(\omega)| > n\} \subseteq \omega^\omega$$

dove con $|\cdot|$ si intende la cardinalità.

Allora $A = \bigcap_{n \in \omega} A_n$. È sufficiente dimostrare che gli A_n siano aperti nella topologia prodotto.

Sia $x \in A_n$ fissato, e sia $N \in \omega$ tale che $|\text{ran}(x \upharpoonright N)| > n$. Allora

$$x \in \{x(0)\} \times \{x(1)\} \times \cdots \times \{x(N)\} \times \omega \times \cdots =: A_x$$

e A_x aperto della topologia prodotto. Inoltre, $A_x \subseteq A_n$, quindi A_n è intorno di ogni suo punto, e pertanto aperto.

2. Insieme B

Si vuole dimostrare che B sia un insieme G_δ , visto il [Teorema di caratterizzazione](#).

Sia, per ogni $n, m \in \omega$:

$$B_{n,m} := \left\{ x \in \omega^\omega \mid |x^{-1}(n)| > m \right\} \subseteq \omega^\omega$$

dove con $|\cdot|$ si intende la [cardinalità](#).

Allora

$$B = \bigcap_{(n,m) \in \omega^2} B_{n,m}$$

dove ω e ω^2 sono equipotenti: $\omega \asymp \omega^2$. È quindi sufficiente dimostrare che i $B_{n,m}$ sono aperti.

Sia $x \in B_{n,m}$ e sia $N \in \omega$ tale che

$$\left| \{i \leq N \mid x(i) = n\} \right| > m$$

Allora

$$x \in \{x(0)\} \times \{x(1)\} \times \cdots \times \{x(N)\} \times \omega \times \cdots =: B_x$$

e B_x aperto della [topologia prodotto](#). Inoltre, $B_x \subseteq B_{n,m}$, quindi $B_{n,m}$ è [intorno](#) di ogni suo punto, e [pertanto](#) aperto.

3. Insiemi C e D

Sfruttando il suggerimento, bisogna dimostrare che:

- C e D sono insiemi F_σ ;
- C e D sono [densi](#) in ω^ω ;
- C e D sono [codensi](#) in ω^ω .

Siccome $D \subseteq C \subseteq \omega^\omega$, si ha che $\omega^\omega \setminus C \subseteq \omega^\omega \setminus D \subseteq \omega^\omega$. Pertanto, basta dimostrare che:

- C e D sono insiemi F_σ ;
- D è denso in ω^ω ;
- C è codenso in ω^ω .

(a) Insiemi F_σ

Posto $C_n := \{x \in \omega^\omega \mid n \notin x(\omega)\}$, è possibile scrivere

$$C = \bigcup_{n \in \omega} \{x \in \omega^\omega \mid n \notin x(\omega)\}$$

I C_n sono chiusi. Infatti, sfruttando la [caratterizzazione dei chiusi per successioni](#), sia $(x_k)_{k \in \omega}$ una [successione convergente](#) di elementi di C_n , $x_k \rightarrow x$. Se per assurdo $x \notin C_n$, allora esiste $i_0 \in \omega$ tale che $x(i_0) = n$. Allora, per ogni $k \in \omega$,

$$|x_k(i_0) - x(i_0)| = \varepsilon_0 \geq 1$$

e quindi, per ogni $k \in \omega$

$$d(x_k, x) = \sum_{j \in \omega} 2^{-j} \frac{|x_k(i_0) - x(i_0)|}{1 + |x_k(i_0) - x(i_0)|} \geq 2^{-i_0} \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 1}$$

Questo è assurdo poiché la successione converge e la distanza induce la topologia.

L'insieme D , invece, è il **complementare** di A e A è un insieme G_δ . Pertanto D è un insieme F_σ .

(b) D è denso

Si dimostra che per ogni $x \in \omega^\omega$ esiste una **successione convergente**

$$(x_n)_{n \in \omega} \subseteq D$$

tale che $x_n \rightarrow x$.

Sia $x \in \omega^\omega$ fissato e sia, per ogni $n \in \omega$:

$$x_n := (x \upharpoonright n) \cup \{(m, 0) \mid n < m < \omega\}$$

Allora $x_n \in \omega^\omega$ e in particolare $x_n \in D$, poiché ha **range** di **cardinalità** minore di $n + 2$.

Inoltre, $x_n \rightarrow x$. Infatti la successione delle distanze tende a 0:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j \in \omega} 2^{-j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &= \sum_{j \geq n} 2^{-j} \frac{x(j)}{1 + x(j)} \leq \sum_{j \geq n} 2^{-j} = 2^{1-n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(c) C è codenso

Si dimostra che per ogni $x \in \omega^\omega$ esiste una **successione convergente**

$$(x_n)_{n \in \omega} \subseteq \omega^\omega \setminus C$$

tale che $x_n \rightarrow x$.

Sia $x \in \omega^\omega$ fissato, e sia, per ogni $n \in \omega$:

$$x_n := (x \upharpoonright n) \cup \{(m, m - n) \mid n \leq m < \omega\}$$

Ciascuna $x_n \notin \omega^\omega \setminus C$, in quanto x_n è suriettiva. Inoltre, $x_n \rightarrow x$. Infatti la successione delle distanze tende a 0:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &= \sum_{j \in \omega} 2^{-j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &= \sum_{j \geq n} 2^{-j} \frac{|x_n(j) - x(j)|}{1 + |x_n(j) - x(j)|} \\ &\leq \sum_{j \geq n} 2^{-j} = 2^{1-n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

731.2.2 Esercizio 2

Let $2^{(\omega^{<\omega})}$ be endowed with the [product](#) over the [countable](#) index set $\omega^{<\omega}$ of the [discrete topology](#) on $2 = \{0, 1\}$. Let $\text{Tr} \subseteq 2^{(\omega^{<\omega})}$ be the set consisting of all [characteristic functions](#) of trees on ω . Show that Tr is closed in $2^{(\omega^{<\omega})}$ and thus it is a [Polish space](#). Show also that the set $\text{PTr} \subseteq \text{Tr}$ of (the characteristic functions of) pruned trees is G_δ and thus Polish as well. Finally, prove that $\text{Tr} \setminus \text{PTr}$ is not a Polish space.

Soluzione La topologia prodotto di $2^{(\omega^{<\omega})}$ è generata dai seguenti aperti:

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\eta \in \omega^{<\omega}} U_\eta \mid \begin{array}{l} U_\eta \subseteq 2 \\ U_\eta \neq 2 \text{ per un numero finito di indici} \end{array} \right\}.$$

Data la topologia discreta di 2 , infatti, $U_\eta \subseteq 2$ è sempre aperto. In particolare, \mathcal{B} è esattamente la topologia di $2^{(\omega^{<\omega})}$, in quanto:

- \mathcal{B} è chiuso per intersezioni finite;
- \mathcal{B} è chiuso per unioni arbitrarie.

1. Tr è chiuso in $2^{(\omega^{<\omega})}$ Per la definizione di albero, per ogni $f \in 2^{(\omega^{<\omega})}$, $f \notin \text{Tr}$ se e solo se esiste $s \in \omega^{<\omega}$ tale che

$$f(s) = 1; \quad f(s \upharpoonright (\text{lh}(s) - 1)) = 0$$

Si denoti per questa prima parte dell'esercizio: $s \upharpoonright (\text{lh}(s) - 1) =: s^*$.

In previsione di sfruttare la [caratterizzazione dei chiusi per successioni](#), sia $(\chi_n)_{n \in \omega} \subseteq \text{Tr}$ una [successione convergente](#):

$$\chi_n \rightarrow \chi$$

Si supponga per assurdo che $\chi \notin \text{Tr}$. Allora esiste $s \in \omega^{<\omega}$ tale che

$$\chi(s) = 1; \quad \chi(s^*) = 0$$

Allora χ appartiene all'aperto $V := \prod_{\eta \in \omega^\omega} V_\eta$, con

$$V_\eta := \begin{cases} 2 & \eta \neq s, s^* \\ \{1\} & \eta = s \\ \{0\} & \eta = s^* \end{cases}$$

e pertanto esiste $N \in \omega$ tale che $\chi_N \in V$. Assurdo, poiché questo implica che $\chi_N \notin \text{Tr}$.

Pertanto $\chi \in \text{Tr}$ e dunque Tr chiuso.

2. PTr è uno spazio polacco

Per definizione di albero potato, si ha che $\chi \in \text{PTr}$ se e solo se $\chi \in \text{Tr}$ e per ogni $s \in \omega^{<\omega}$:

$$\chi(s) = 1 \rightarrow \exists m \in \omega \mid \chi(s \cap m) = 1$$

Si definisce, per ogni $(\eta, j) \in \omega^{<\omega} \times \omega$

$$\Lambda'_{\eta,j} := \{\chi \in \omega^{<\omega} \mid \chi(\eta) = 1 \wedge \chi(\eta \setminus j) = 1\}$$

Questi sono aperti in $\omega^{<\omega}$ e pertanto i $\Lambda_{\eta,j} := \Lambda'_{\eta,j} \cap \text{Tr}$ sono aperti in Tr con la topologia di sottospazio. Si può considerare ulteriormente

$$\Theta_\eta := \{\chi \in \omega^{<\omega} \mid \chi(\eta) = 0\} \cap \text{Tr}$$

anche questo aperto in Tr .

Si considerino ora gli aperti:

$$\Gamma_\eta := \Theta_\eta \cup \bigcup_{j \in \omega} \Lambda_{\eta,j}$$

Si ha che $\text{PTr} = \bigcap_{\eta \in \omega^{<\omega}} \Gamma_\eta$. Infatti:

- se $\chi \in \text{PTr}$ allora per ogni $\eta \in \omega^{<\omega}$:
 - se $\chi(\eta) = 1$ allora esiste $j \in \omega$ tale che $\chi(\eta \setminus j) = 1$, e allora $\chi \in \Lambda_{\eta,j}$ e dunque $\chi \in \Gamma_\eta$
 - se $\chi(\eta) = 0$ allora $\chi \in \Theta_\eta$ e dunque $\chi \in \Gamma_\eta$;
 pertanto $\chi \in \bigcap_{\eta \in \omega^{<\omega}} \Gamma_\eta$;
- se, viceversa, $\chi \in \bigcap_{\eta \in \omega^{<\omega}} \Gamma_\eta$, allora
 - $\chi \in \text{Tr}$;
 - per ogni $\eta \in \omega^{<\omega}$, $\chi \in \Gamma_\eta$ e pertanto, se $\chi(\eta) = 1$ allora esiste $j \in \omega$ tale che $\chi(\eta \setminus j) = 1$
 pertanto $\chi \in \text{PTr}$.

Siccome $\omega^{<\omega}$ è numerabile, si è dimostrata la tesi.

3. $\text{Tr} \setminus \text{PTr}$ non è uno spazio polacco

L'insieme $\text{Tr} \setminus \text{PTr}$ è \mathbf{F}_σ , poiché PTr è polacco. Sfruttando il fatto che sottoinsiemi \mathbf{F}_σ di un polacco, densi e codensi, non possono essere \mathbf{G}_δ , si dimostra che $\text{Tr} \setminus \text{PTr}$ sia denso e codenso.

- $\text{Tr} \setminus \text{PTr}$ è denso. Infatti, sia $\chi \in \text{Tr}$. Se $\chi \notin \text{PTr}$, allora la successione costante $(\chi)_{n \in \omega}$ converge a χ .

Se invece $\chi \in \text{PTr}$, sia $A \in \omega^\omega$ tale che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\chi(A \upharpoonright n) = 1$. Si definisce allora $\chi_n \in \text{Tr} \setminus \text{PTr}$, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$

$$\chi_n(s) := \begin{cases} 0 & \text{lh}(s) \geq n \wedge s = A \upharpoonright \text{lh}(s) \\ \chi(s) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente $\chi_n \in \text{Tr} \setminus \text{PTr}$, ed inoltre $\chi_n \rightarrow \chi$. Infatti, sia $\emptyset \neq U \subseteq 2^{(\omega^{<\omega})}$ aperto, tale che $\chi \in U$ con $U \neq \emptyset$:

$$U = \text{Tr} \cap \prod_{\eta \in \omega^{<\omega}} U_\eta$$

con $\emptyset \neq U_\eta \subseteq 2$ tali che un numero finito di $U_\eta \neq 2$.

Sia quindi:

$$N := \max \{ \text{lh}(\eta) \mid U_\eta \neq 2 \}$$

Allora, per ogni $n > N$, $\chi_n \in U$. Infatti, se per assurdo $\chi_n \notin U$, allora esiste $s \in \omega^{<\omega}$ tale che $\chi_n(s) \notin U_s$:

- se $\text{lh}(s) < n$, allora $\chi_n(s) = \chi(s)$, ma $\chi \in U$ e pertanto $\chi(s) \in U_s$; assurdo;
- se $\text{lh}(s) \geq n$, allora $\text{lh}(s) > N$, e per massimalità quindi $U_s = 2$; pertanto $\chi_n(s) \in U_s$. Assurdo.

- PTr è denso. Infatti, se per assurdo non lo fosse, allora esisterebbe $U \subseteq \text{Tr}$ non vuoto, aperto, e tale che $U \cap \text{PTr} = \emptyset$.

Allora

$$U = \text{Tr} \cap \prod_{\eta \in \omega^{<\omega}} U_\eta$$

con $\emptyset \neq U_\eta \subseteq 2$ tali che un numero finito di $U_\eta \neq 2$. Siano $\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subseteq \omega^{<\omega}$ tali che $U_{\eta_i} = \{1\}$, per $i = 1, \dots, k$, e siano $\{\theta_1, \dots, \theta_h\} \subseteq \omega^{<\omega}$ tali che $U_{\theta_j} = \{0\}$, per $j = 1, \dots, h$. Necessariamente, per ogni $j = 1, \dots, h$, e per ogni $i = 1, \dots, k$:

$$\forall \ell \leq \text{lh}(\eta_i), \quad \eta_i \upharpoonright \ell \neq \theta_j$$

altrimenti $U \subseteq \text{Tr}$ sarebbe l'insieme vuoto.

Allora si definisce $\chi \in \text{Tr}$ tale che, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$:

- se $s = \eta_i \upharpoonright \ell$ per qualche $i = 1, \dots, k$ e per qualche $\ell \leq \text{lh}(\eta_i)$, allora $\chi(s) = 1$
- se $s \in \{\theta_1, \dots, \theta_h\}$, allora $\chi(s) = 0$.
- Si costruisce ricorsivamente un insieme $\Lambda \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $\{\eta_1, \dots, \eta_k\} \subseteq \Lambda$, e tale che, se $\eta \in \Lambda$, allora anche $\eta \upharpoonright \ell \in \Lambda$, dove $\ell \in \omega$ è il più piccolo naturale tale che $\eta \upharpoonright \ell \notin \{\theta_1, \dots, \theta_h\}$; tale ℓ esiste sempre, poiché $\{\theta_1, \dots, \theta_h\}$ è un insieme finito. Per ogni $s \in \Lambda$, $\chi(s) = 1$.
- Per tutti gli altri $s \in \omega^{<\omega}$, $\chi(s) = 0$.

Si mostra che χ genera un assurdo.

- χ è ben definita, poiché i quattro casi considerati sono disgiunti.
- $\chi \in \text{Tr}$, in quanto, se $\chi(s) = 1$, allora per ogni $\ell \leq \text{lh}(s)$, $\chi(s \upharpoonright \ell) = 1$.
- $\chi \in \text{PTr}$, in quanto, se $\chi(s) = 1$, allora esiste sempre η che estende s tale che $\chi(\eta) = 1$.

Quindi $\chi \in U \cap \text{PTr} = \emptyset$. Assurdo.

731.2.3 Esercizio 3

Let

$$\mathcal{L} = \{R_i \mid i < I\} \cup \{f_j \mid j < J\} \cup \{a_k \mid k < K\}$$

with $I, J, K \leq \omega$ be an at most [countable first-order language](#), and let M be a [countable \$\mathcal{L}\$ -structure](#). Without loss of generality, we may assume that the [domain](#) of M is ω itself. Prove that the [group](#) of [automorphisms](#) $\text{Aut}(M)$ of M is a [Polish subgroup](#) of S_∞ .

Soluzione Si fissi su $\omega^\omega \supseteq S_\infty$ la [metrica completa](#) d :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 2^{-(n+1)} & x \neq y \text{ e } n \text{ il più piccolo naturale tale che } x(n) \neq y(n) \end{cases}$$

e si denoti con

$$B_d(x, \varepsilon) := \{y \in \omega^\omega \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

la palla aperta.

1. $\text{Aut}(M)$ è uno spazio polacco

È possibile scrivere $\text{Aut}(M)$ come intersezione (numerabile) dei seguenti insiemi:

- per ogni $i < I$: $\left\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_{\text{ar}(R_i)}) \in R_i \text{ sse } (f(a_1), \dots, f(a_{\text{ar}(R_i)})) \in R \right\}$;
- per ogni $j < J$: $\left\{ f \in S_\infty \mid f(f_j(a_1, \dots, a_{\text{ar}(f_j)})) = f_j(f(a_1), \dots, f(a_{\text{ar}(f_j)})) \right\}$;
- per ogni $k < K$: $\{f \in S_\infty \mid f(a_k) = a_k\}$.

Volendo dimostrare che $\text{Aut}(M)$ sia polacco, si sfrutta la caratterizzazione, dimostrando che sia \mathbf{G}_δ , ovvero che tutti gli insiemi elencati sopra siano aperti, o, al più, \mathbf{G}_δ .

- Sia $R \in \{R_i \mid i < I\}$ di arietà n . L'insieme

$$\mathcal{R}_R := \left\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_n) \in R \text{ sse } (f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R, \forall a_i \in \omega \right\}$$

è un \mathbf{G}_δ .

Infatti, posto

$$\mathcal{R}_{R,m} := \left\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_n) \in R \text{ sse } (f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R, \forall a_i < m \right\}$$

questo è un aperto.

- Presa $f \in \mathcal{R}_{R,m}$, sia $L_f := \max_{a_i < m} \{a_1, \dots, a_n\}$, e sia $\varepsilon_f := 2^{-(L_f+2)}$.

Allora $f \in B_d(f, \varepsilon_f) \cap S_\infty =: V$, e $V \subseteq \mathcal{R}_{R,m}$. Se $g \in V$ e $g \neq f$, allora il più piccolo L tale che $f(L) \neq g(L)$ è tale che

$$2^{-(L+1)} < 2^{-(L_f+2)} \rightarrow L > L_f + 1$$

e dunque, per ogni $n < L$, compresi tutti gli a_1, \dots, a_n , si ha $g(n) = f(n)$, e pertanto

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \in R &\text{ sse } (f(a_1), \dots, f(a_n)) \in R \\ &\text{sse } (g(a_1), \dots, g(a_n)) \in R \end{aligned}$$

Allora $\mathcal{R}_R = \bigcap_{m \in \omega} \mathcal{R}_{R,m}$ e pertanto è un insieme \mathbf{G}_δ .

- Sia $G \in \{F_j \mid j < J\}$ di arietà n . L'insieme

$$\mathcal{F}_G := \left\{ f \in S_\infty \mid f(G(a_1, \dots, a_n)) = G(f(a_1), \dots, f(a_n)), \forall a_i \in \omega \right\}$$

è un \mathbf{G}_δ .

Infatti, posto

$$\mathcal{F}_{G,m} := \left\{ f \in S_\infty \mid f(G(a_1, \dots, a_n)) = G(f(a_1), \dots, f(a_n)), \forall a_i < m \right\}$$

questo è un aperto.

- Preso $f \in \mathcal{F}_{G,m}$, sia $L_f := \max_{a_i < m} \{G(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n\}$, e sia $\varepsilon_f := 2^{-(L_f+2)}$.

Allora $f \in B_d(f, \varepsilon_f) \cap S_\infty =: V$, e $V \subseteq \mathcal{F}_{G,m}$. Se $g \in V$ e $g \neq f$, allora il più piccolo L tale che $f(L) \neq g(L)$ è tale che

$$2^{-(L+1)} < 2^{-(L_f+2)} \rightarrow L > L_f + 1$$

e dunque, per ogni $n < L$, compresi tutti gli $G(a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n$, vale $g(n) = f(n)$, e pertanto

$$\begin{aligned} g(G(a_1, \dots, a_n)) &= f(G(a_1, \dots, a_n)) \\ &= G(f(a_1), \dots, f(a_n)) = G(g(a_1), \dots, g(a_n)) \end{aligned}$$

e quindi $g \in \mathcal{F}_{G,m}$.

Siccome

$$\mathcal{F}_G = \bigcap_{m \in \omega} \mathcal{F}_{G,m}$$

allora \mathcal{F}_G è \mathbf{G}_δ .

- Sia $a \in \{a_k \mid k < K\}$. L'insieme

$$\mathcal{C}_a := \left\{ f \in S_\infty \mid a = f(a) \right\}$$

è aperto.

Infatti, per ogni $f \in \mathcal{C}_a$, si ha che

$$f \in S_\infty \cap B_d(f, 2^{-(a+2)}) =: V$$

ed inoltre $V \subseteq \mathcal{C}_a$. Infatti, sia $g \in V$. Allora $d(f, g) < 2^{-(a+2)}$ e quindi, se $f \neq g$, allora

$$2^{-(n+1)} < 2^{-(a+2)} \rightarrow n > a + 1$$

dove n è il più piccolo naturale t.c. $f(n) \neq g(n)$. Pertanto $a = f(a) = g(a)$ e quindi $g \in \mathcal{C}_a$.

2. $\text{Aut}(M)$ è sottogruppo di S_∞

Visto che $\text{Aut}(M)$ è intersezione dei seguenti insiemi

- per ogni $i < I$: $\left\{ f \in S_\infty \mid (a_1, \dots, a_{\text{ar}(R_i)}) \in R_i \text{ sse } (f(a_1), \dots, f(a_{\text{ar}(R_i)})) \in R \right\}$;
- per ogni $j < J$: $\left\{ f \in S_\infty \mid f(f_j(a_1, \dots, a_{\text{ar}(f_j)})) = f_j(f(a_1), \dots, f(a_{\text{ar}(f_j)})) \right\}$;
- per ogni $k < K$: $\{f \in S_\infty \mid f(a_k) = a_k\}$;

è sufficiente mostrare che ciascuno di questi sia chiuso per composizione di funzioni e per inversa.

Consideriamo gli insiemi $\mathcal{F}_G, \mathcal{R}_R, \mathcal{C}_a$ come sopra.

- Siano $f, g \in \mathcal{F}_G$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$

$$\begin{aligned} f \circ g(G(a_1, \dots, a_n)) &= f[g(G(a_1, \dots, a_n))] \\ &= f[G(g(a_1), \dots, g(a_n))] \\ &= G(f \circ g(a_1), \dots, f \circ g(a_n)) \end{aligned}$$

e pertanto $f \circ g \in \mathcal{F}_G$.

- Sia $f \in \mathcal{F}_G$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$

$$\begin{aligned} G(a_1, \dots, a_n) &= G[f \circ f^{-1}(a_1), \dots, f \circ f^{-1}(a_n)] \\ &= f[G(f^{-1}(a_1), \dots, f^{-1}(a_n))] \end{aligned}$$

e quindi

$$f^{-1}[G(a_1, \dots, a_n)] = G(f^{-1}(a_1), \dots, f^{-1}(a_n)).$$

Pertanto $f^{-1} \in \mathcal{F}_G$.

- Siano $f, g \in \mathcal{R}_R$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \in R &\text{ sse } (g(a_1), \dots, g(a_n)) \in R \\ &\text{ sse } (f \circ g(a_1), \dots, f \circ g(a_n)) \in R \end{aligned}$$

e pertanto $f \circ g \in \mathcal{R}_R$.

- Sia $f \in \mathcal{R}_R$. Per ogni $a_1, \dots, a_n \in \omega$,

$$\begin{aligned} (a_1, \dots, a_n) \in R &\text{ sse } (f \circ f^{-1}(a_1), \dots, f \circ f^{-1}(a_n)) \in R \\ &\text{ sse } (f^{-1}(a_1), \dots, f^{-1}(a_n)) \in R, \end{aligned}$$

e quindi $f^{-1} \in \mathcal{R}_R$.

- Siano $f, g \in \mathcal{C}_a$. Allora $f \circ g(a) = f(g(a)) = f(a) = a$, e quindi $f \circ g \in \mathcal{C}_a$.
- Sia $f \in \mathcal{C}_a$. Allora $f(a) = a$ e pertanto $f^{-1}(a) = a$, quindi $f^{-1} \in \mathcal{C}_a$. ■

731.2.4 Esercizio 4

Consider the Polish space $X = \omega^{\omega \times \omega} \times \omega$. Let G_p be the space of those $(f, a) \in X$ such that $\langle \omega, f, a \rangle$ is a group with operation f and neutral element a .

1. Prove that G_p is a Polish subspace of X .
2. Prove that the subspace of G_p consisting of Abelian groups is Polish, and similarly for the subspace of non-Abelian groups.
3. Prove that the subspace of G_p consisting of Archimedean groups is Polish.

Soluzione

1. Parte a. Posti:

$$\begin{aligned} A_{x,y,z} &= \{(f, a) \in X \mid f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))\} \\ N_x &= \{(f, a) \in X \mid f(x, a) = f(a, x) = a\} \\ I_{x,y} &= \{(f, a) \in X \mid f(x, y) = f(y, x) = a\} \\ I_x &= \bigcup_{y \in \omega} I_{x,y} \end{aligned}$$

allora, per definizione di gruppo, si ha che:

$$G_p = \bigcap_{x, y, z \in \omega} A_{x,y,z} \cap \bigcap_{x \in \omega} N_x \cap \bigcap_{x \in \omega} I_x.$$

È dunque necessario dimostrare che ciascuno degli insiemi $A_{x,y,z}, N_x, I_x$ siano degli aperti, o almeno dei G_δ . Questo implica che G_p sia un insieme G_δ di $\omega^{\omega \times \omega} \times \omega$ (che è un polacco) e quindi uno spazio polacco.

- $A_{x,y,z}$ è aperto.

Siano, per ogni $x, y, z, \mu, \lambda, \gamma \in \omega$:

$$A_{x,y,z}^{\mu, \lambda, \gamma} := \{(f, a) \in X \mid f(x, y) = \mu, f(y, z) = \lambda, f(\mu, z) = \gamma, f(x, \lambda) = \gamma\}$$

Allora $A_{x,y,z} = \bigcup_{\mu, \lambda, \gamma} A_{x,y,z}^{\mu, \lambda, \gamma}$.

Inoltre, sia $(f, a) \in A_{x,y,z}^{\mu, \lambda, \gamma}$, e si consideri l'aperto $U_{(f,a)} \subseteq \omega^{\omega \times \omega} \times \omega$

$$U_{(f,a)} := \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} U_{ij} \times V$$

con $U_{xy} = \{\mu\}$, $U_{yz} = \{\lambda\}$, $U_{\mu z} = \{\gamma\} = U_{x\lambda}$ e $V = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

Allora $(f, a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq A_{x,y,z}^{\mu, \lambda, \gamma}$. Dunque $A_{x,y,z}^{\mu, \lambda, \gamma}$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

Segue che $A_{x,y,z}$ è unione di aperti, e pertanto aperto.

- N_x è aperto. Sia $(f, a) \in N_x$, e si consideri l'aperto $U_{(f,a)} \subseteq \omega^{\omega \times \omega} \times \omega$:

$$U_{(f,a)} := \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} U_{ij} \times V$$

con $U_{ax} = U_{xa} = \{x\}$ e $V = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

Allora $(f, a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq N_x$. Dunque N_x è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

- I_x è aperto. Infatti $I_{x,y}$ sono aperti, e unione numerabile di aperti è aperta. Sia $(f, a) \in I_{x,y}$ e si consideri l'aperto $U_{(f,a)} \subseteq \omega^{\omega \times \omega} \times \omega$:

$$U_{(f,a)} := \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} U_{ij} \times V$$

con $V = U_{xy} = U_{yx} = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

Allora $(f, a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq I_{x,y}$. Dunque $I_{x,y}$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

2. Parte b.

$(f, a) \in X$ descrive un gruppo abeliano se e solo se:

- $(f, a) \in \text{Gp};$
- per ogni $x, y \in \omega$, $f(x, y) = f(y, x)$.

Si denoti con $\text{Ab}, \text{NAb} \subseteq \text{Gp}$ gli insiemi, rispettivamente, dei gruppi abeliani e dei gruppi non abeliani. Vale

$$\text{Ab} = \text{Gp} \setminus \text{NAb}$$

Sia quindi, per ogni $x, y, \lambda, \mu \in \omega$:

$$C_{x,y}^{\lambda,\mu} = \{(f, a) \in X \mid f(x, y) = \lambda, f(y, x) = \mu\}.$$

Questo è un aperto. Infatti, sia $(f, a) \in C_{x,y}^{\lambda,\mu}$ e si consideri l'aperto $U_{(f,a)}$:

$$U_{(f,a)} := \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} U_{ij} \times V$$

con $U_{xy} = \{\lambda\}$, $U_{yx} = \{\mu\}$ e con $V = \{a\}$, e tutti gli altri $U_{ij} = \omega$.

Allora $(f, a) \in U_{(f,a)}$ e $U_{(f,a)} \subseteq C_{x,y}^{\lambda,\mu}$, quindi $C_{x,y}^{\lambda,\mu}$ è intorno di ogni suo punto, e quindi aperto.

Si consideri ora l'aperto (in quanto unione di aperti):

$$\text{NAb}_{x,y} := \bigcup_{\lambda \neq \mu} C_{x,y}^{\lambda,\mu} = \{(f, a) \in X \mid f(x, y) \neq f(y, x)\}.$$

L'insieme $\text{NAb} \subseteq \text{Gp}$ è dato da

$$\text{NAb} = \text{Gp} \cap \bigcup_{x,y \in \omega} \text{NAb}_{x,y}$$

e quindi è un aperto in Gp . Pertanto, NAb è uno spazio polacco. Inoltre $\text{Ab} = \text{Gp} \setminus \text{NAb}$ è un chiuso di Gp e pertanto è uno spazio polacco.

3. Parte c. Si consideri ora lo spazio topologico $Y := X \times 2^{\omega \times \omega}$, e le due proiezioni continue per definizione di topologia prodotto:

$$\begin{aligned}\pi_X : Y &\rightarrow X \\ \pi_{2^{\omega \times \omega}} : Y &\rightarrow 2^{\omega \times \omega}\end{aligned}$$

Si consideri l'insieme OGp delle triple (f, a, \leq) tali che $\langle \omega, f, a, \leq \rangle$ sia un [gruppo ordinato](#), e quindi \leq un [ordine totale](#). Si dimostra che l'insieme seguente è uno spazio polacco:

$$\text{Ar} := \{(f, a, \leq) \in \text{OGp} \mid \forall x \in \omega \exists n \in \omega : x \leq f^{(n)}(a)\}$$

dove con $f^{(n)}(a)$ si intende, per ricorsione:

$$\begin{aligned}f^{(2)}(a) &:= f(a, a) \\ f^{(n+1)}(a) &:= f(f^{(n)}(a), a).\end{aligned}$$

- OGp è uno spazio polacco.

Infatti, si considerino gli insiemi, per $x, y, z, \mu, \lambda, \delta, \gamma \in \omega$

$$\begin{aligned}G_{x,y,z}^{\mu,\lambda,\delta,\gamma} &:= \{(f, a, \leq) \in Y \mid f(x, z) = \mu \wedge f(y, z) = \lambda \wedge f(z, x) = \delta \wedge f(z, y) = \gamma \wedge \mu \leq \lambda \wedge \delta \leq \gamma\} \\ G_{x,y,z}^2 &:= \{(f, a, \leq) \in Y \mid x \leq y\}\end{aligned}$$

Questi sono entrambi aperti.

- Se $(f, a, \leq) \in G_{x,y,z}^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}$, sia $U_{(f,a,\leq)}$ un aperto,

$$U_{(f,a,\leq)} := \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} U_{ij} \times \widetilde{U} \times \prod_{(s,t) \in \omega \times \omega} W_{st}$$

con $U_{xz} = \{\mu\}$, $U_{yz} = \{\lambda\}$, $U_{zx} = \{\delta\}$, $U_{zy} = \{\gamma\}$, $W_{\mu\lambda} = \{1\}$ e infine $W_{\delta\gamma} = \{1\}$. Tutti gli altri $U_{ij} = \omega$, $\widetilde{U} = \omega$ e i restanti $W_{st} = 2$.

Allora $(f, a, \leq) \in U_{(f,a,\leq)}$, ed inoltre $U_{(f,a,\leq)} \subseteq G_{x,y,z}^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}$. Quindi $G_{x,y,z}^{\mu,\lambda,\delta,\gamma}$ è [intorno](#) di ogni suo punto, [e pertanto aperto](#).

- Se $(f, a, \leq) \in G_{x,y,z}^2$, sia $V_{(f,a,\leq)}$ un aperto,

$$V_{(f,a,\leq)} := \prod_{(i,j) \in \omega \times \omega} V_{ij} \times \widetilde{V} \times \prod_{(s,t) \in \omega \times \omega} W_{st}$$

con $\widetilde{V} = V_{ij} = \omega$ per ogni i, j , e con $W_{xy} = \{1\}$. Per tutti gli altri $W_{st} = 2$.

Allora $(f, a, \leq) \in V_{(f,a,\leq)}$, ed inoltre $V_{(f,a,\leq)} \subseteq G_{x,y,z}^2$. Quindi $G_{x,y,z}^2$ è [intorno](#) di ogni suo punto, [e pertanto aperto](#).

È inoltre aperto l'insieme $G_{x,y,z}^1 := \{(f, a, \leq) \in Y \mid f(x, z) \leq f(y, z) \wedge f(z, x) \leq f(z, y)\}$, in quanto

$$G_{x,y,z}^1 = \bigcup_{\mu, \lambda, \delta, \gamma \in \omega} G_{x,y,z}^{\mu, \lambda, \delta, \gamma}.$$

Segue che l'insieme $G_{x,y,z} := G_{x,y,z}^1 \cup [Y \setminus G_{x,y,z}^2]$ sia un \mathbf{G}_δ , in quanto unione di un aperto e di un chiuso (i chiusi negli spazi polacchi sono \mathbf{G}_δ).

Inoltre, si è dimostrato che $\text{Gp} \subseteq X$ è un insieme \mathbf{G}_δ (nel punto precedente) e che l'insieme degli ordini $\text{LO} \subseteq 2^{\omega \times \omega}$ è un insieme \mathbf{G}_δ (a lezione). Pertanto, siccome la preimmagine continua di \mathbf{G}_δ è ancora \mathbf{G}_δ , si ha che sono \mathbf{G}_δ di Y i seguenti insiemi:

$$\pi_X^{-1}(\text{Gp}), \quad \pi_{2^{\omega \times \omega}}^{-1}(\text{LO}).$$

Siccome vale questa uguaglianza

$$\text{OGp} = \pi_X^{-1}(\text{Gp}) \cap \pi_{2^{\omega \times \omega}}^{-1}(\text{LO}) \cap \bigcap_{x, y, z \in \omega} G_{x, y, z}$$

si è scritto OGp come intersezione numerabile di \mathbf{G}_δ . Quindi OGp è uno spazio polacco, in quanto sottoinsieme \mathbf{G}_δ dello spazio polacco Y .

- L'insieme:

$$\widetilde{\text{Ar}}_x^n := \{(f, a, \leq) \in Y \mid x \leq f^{(n)}(a)\}$$

è aperto. Infatti, si consideri

$$\Gamma_{x,n}^{\lambda_2, \dots, \lambda_n} := \{(f, a, \leq) \in Y \mid f(a, a) = \lambda_2 \wedge f(\lambda_2, a) = \lambda_3 \wedge \dots \wedge f(\lambda_{n-1}, a) = \lambda_n \wedge x \leq \lambda_n\}$$

Ciascun $\Gamma_{x,n}^{\lambda_2, \dots, \lambda_n}$ è aperto, poiché, presa $(f, a, \leq) \in \Gamma_{x,n}^{\lambda_2, \dots, \lambda_n}$, è possibile prendere l'aperto $U_{(f, a, \leq)}$:

$$U_{(f, a, \leq)} := \prod_{(i, j) \in \omega \times \omega} U_{ij} \times \widetilde{U} \times \prod_{(s, t) \in \omega \times \omega} W_{st}$$

con $\widetilde{U} = \{a\}$, $U_{aa} = \lambda_2$, per ogni $i = 2, \dots, n-1$: $U_{\lambda_i a} = \{\lambda_{i+1}\}$, e $W_{x \lambda_n} = \{1\}$. Si pongono tutti gli altri $U_{ij} = \omega$ e $W_{st} = 2$. Si ha quindi che $(f, a, \leq) \in U_{(f, a, \leq)} \subseteq \Gamma_{x,n}^{\lambda_2, \dots, \lambda_n}$, e pertanto $\Gamma_{x,n}^{\lambda_2, \dots, \lambda_n}$ è intorno di ogni suo punto e quindi aperto.

Dunque $\widetilde{\text{Ar}}_x^n = \bigcup_{\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \omega} \Gamma_{x,n}^{\lambda_2, \dots, \lambda_n}$ è a sua volta aperto.

Allora $\text{Ar}_x^n = \widetilde{\text{Ar}}_x^n \cap \text{OGp}$ è aperto in OGp . Quindi

$$\text{Ar} = \bigcap_{x \in \omega} \bigcup_{n \in \omega} \text{Ar}_x^n$$

è un insieme \mathbf{G}_δ di OGp , e quindi uno spazio polacco. ■

732 Cubo di Hilbert

733 Proprietà di base di un ultrametrica

733.1 Proprietà

Suppose that d is an [ultrametric](#) on a space X . Prove the following statements:

1. If $d(x, z) \neq d(y, z)$, then $d(x, y) = \max\{d(x, z), d(y, z)\}$ (“all triangles are isosceles with legs longer than or equal to the basis”).
2. The “[open](#)” balls $B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ and the “[closed](#)” balls $B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ are both [clopen](#).
3. If $y \in B_d(x, \varepsilon)$, then $B_d(y, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon)$ (“all elements of an open ball are centers of it”).
4. If two open (closed) balls intersect, then one is contained in the other one.

733.1.1 Dimostrazione

Parte a. Si supponga per assurdo che esistano $x, y, z \in X$ tali che $d(x, z) \neq d(y, z)$ e

$$d(x, y) < \max\{d(x, z), d(y, z)\} \quad (1)$$

Quindi $d(x, y) \neq d(x, z)$ e $d(x, y) \neq d(y, z)$, e pertanto vale anche

$$d(x, z) < \max\{d(x, y), d(y, z)\} \quad (2)$$

$$d(y, z) < \max\{d(x, y), d(x, z)\} \quad (3)$$

Si considerino ora l’insieme di numeri reali distinti:

$$\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\}$$

e se ne consideri il massimo M , che esiste poiché l’insieme è finito. La prima condizione asserisce che

$$d(x, y) < \max\{d(x, z), d(y, z)\} \leq \max\{d(x, y), d(y, z), d(x, z)\} = M$$

e pertanto $M \neq d(x, y)$. Similmente, la seconda condizione asserisce che $M \neq d(x, z)$ e la terza che $M \neq d(y, z)$. Assurdo.

Parte d. Siano $x, y \in X$ e siano $\varepsilon, \delta > 0$, con $\varepsilon \geq \delta$.

- Se $B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta) \neq \emptyset$, allora $B_d(y, \delta) \subseteq B_d(x, \varepsilon)$.

Infatti, sia $z_0 \in B_d(x, \varepsilon) \cap B_d(y, \delta)$. Si ha che

$$d(x, z_0) < \varepsilon; \quad d(y, z_0) < \delta.$$

Sia ora $z \in B_d(y, \delta)$, i.e. $d(z, y) < \delta$. Allora

$$d(z, z_0) \leq \max\{d(y, z_0), d(z, y)\} < \delta$$

$$d(z, x) \leq \max\{d(x, z_0), d(z_0, z)\} < \varepsilon.$$

e quindi $z \in B_d(x, \varepsilon)$.

- Se $B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon) \cap B_d^{\text{cl}}(y, \delta) \neq \emptyset$, allora $B_d^{\text{cl}}(y, \delta) \subseteq B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$.

Infatti, sia $z_0 \in B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon) \cap B_d^{\text{cl}}(y, \delta)$. Si ha che

$$d(x, z_0) \leq \varepsilon; \quad d(y, z_0) \leq \delta.$$

Sia ora $z \in B_d^{\text{cl}}(y, \delta)$, i.e. $d(z, y) \leq \delta$. Allora

$$\begin{aligned} d(z, z_0) &\leq \max \{d(y, z_0), d(z, y)\} \leq \delta \leq \varepsilon \\ d(z, x) &\leq \max \{d(x, z_0), d(z_0, z)\} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

e quindi $z \in B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$.

Parte b.

- La palla $B_d(x, \varepsilon)$ è aperta per definizione di [topologia indotta da una metrica](#)
- Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_d(x, \varepsilon)$ una [successione convergente](#) a ℓ . Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_N, \ell) < \varepsilon$. Inoltre $d(x_N, x) < \varepsilon$.

Supponiamo per assurdo che $\ell \notin B_d(x, \varepsilon)$. Allora $d(\ell, x) \geq \varepsilon$. Ma, per definizione di ultrametrica

$$d(\ell, x) \leq \max \{d(x_N, \ell), d(x_N, x)\} < \varepsilon.$$

Assurdo. Pertanto $B_d(x, \varepsilon)$ è [chiusa](#), per la [caratterizzazione dei chiusi per successioni](#).

- Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$ una [successione convergente](#) a ℓ . Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_N, \ell) \leq \varepsilon$. Inoltre $d(x_N, x) \leq \varepsilon$.

Supponiamo per assurdo che $\ell \notin B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$. Allora $d(\ell, x) > \varepsilon$. Ma, per definizione di ultrametrica

$$d(\ell, x) \leq \max \{d(x_N, \ell), d(x_N, x)\} \leq \varepsilon.$$

Assurdo. Pertanto $B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$ è [chiusa](#), per la [caratterizzazione dei chiusi per successioni](#).

- Sia $y \in B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$. Allora $y \in B_d\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_d^{\text{cl}}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, con $B_d\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ aperto.

Inoltre $y \in B_d^{\text{cl}}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$ e pertanto, per il punto d.

$$y \in B_d\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_d^{\text{cl}}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon).$$

Quindi $B_d^{\text{cl}}(x, \varepsilon)$ è intorno di ogni suo punto, e [quindi aperto](#).

Parte c.

Sia $y \in B_d(x, \varepsilon)$. Allora $d(x, y) < \varepsilon$.

Si vuole dimostrare che

$$B_d(y, \varepsilon) = B_d(x, \varepsilon).$$

- Sia $z \in B_d(y, \varepsilon)$. Allora $d(y, z) < \varepsilon$, e pertanto

$$d(x, z) \leq \max \{d(x, y), d(y, z)\} < \varepsilon$$

e quindi $z \in B_d(x, \varepsilon)$.

- Sia $z \in B_d(x, \varepsilon)$. Allora $d(x, z) < \varepsilon$, e pertanto

$$d(y, z) \leq \max \{d(y, x), d(x, z)\} < \varepsilon$$

e quindi $z \in B_d(y, \varepsilon)$.

734 Sottospazi di spazi polacchi Fsigma densi e codensi non sono Gdelta

734.1 Proposizione

Sia X uno spazio polacco. Se $A \subseteq X$ è un insieme F_σ , denso e codenso, allora A non è un insieme G_δ .

735 Spazio di Baire

Forza Elastica

Legge di Hook

La legge di Hook asserisce che, data una molla sottoposta ad un allungamento Δx , questa agisca con una forza di richiamo direttamente proporzionale all'allungamento:

$$F_{\text{el}} = k \cdot \Delta x$$

La costante k è caratteristica della molla, e viene chiamata **costante elastica**.

Molle in Serie

Si considerino N molle, di costanti elastiche k_1, \dots, k_N , collegate come segue, alla cui estremità è applicata una forza \vec{F} .

La forza causerà un allungamento del sistema, pari a x . Siano x_1, \dots, x_N gli allungamenti di ciascuna singola molla, ovvero tali che

$$x_1 + \dots + x_N = x.$$

424

Si vuole determinare la costante elastica k_{serie} di una molla che si comporti nello stesso modo del sistema raffigurato sopra, ovvero tale che

$$F = k_{\text{serie}} x = k_{\text{serie}} (x_1 + \cdots + x_N) \quad (2)$$

Siccome il sistema è in equilibrio ciascun nodo è fermo, ed in particolare la somma delle forze in ciascun nodo è uguale a 0.

Consideriamo il nodo 1. Su questo agirà una forza rivolta verso sinistra di intensità pari a $k_1 x_1$ (data dalla molla di costante elastica k_1), ed una forza rivolta verso destra di intensità pari a $k_2 x_2$ (data dalla molla di costante elastica k_2). Siccome il sistema è in equilibrio

$$k_1 x_1 = k_2 x_2$$

In un generico nodo i agirà una forza rivolta verso sinistra di intensità pari a $k_i x_i$ (data dalla molla di costante elastica k_i), ed una forza rivolta verso destra di intensità pari a $k_{i+1} x_{i+1}$ (data dalla molla di costante elastica k_{i+1}). Siccome il sistema è in equilibrio

$$k_i x_i = k_{i+1} x_{i+1}$$

Nel nodo N , infinite, agirà una forza rivolta verso sinistra di intensità pari a $k_N x_N$ (data dall'ultima molla), e la forza \vec{F} rivolta verso destra.

Si è quindi stabilito che

$$F = k_1 x_1 = k_2 x_2 = \cdots = k_N x_N.$$

In particolare

$$x_1 = \frac{F}{k_1}, \quad x_2 = \frac{F}{k_2}, \quad \dots, \quad x_N = \frac{F}{k_N}$$

e quindi, sostituendo nella equazione (2) si ha che

$$\begin{aligned} F &= k_{\text{serie}} \left(\frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} + \cdots + \frac{F}{k_N} \right) \\ &= k_{\text{serie}} F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \right). \end{aligned}$$

In definitiva:

$$\begin{aligned} F &= k_{\text{serie}} F \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \right) \\ \cancel{F} &= k_{\text{serie}} \cancel{F} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \right) \\ 1 &= k_{\text{serie}} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \right) \\ \frac{1}{k_{\text{serie}}} &= \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \right) \end{aligned}$$

Questa è la formula cercata:

$$\frac{1}{k_{\text{serie}}} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \cdots + \frac{1}{k_N} \right)$$

- 736 Forza**
- 737 Proporzionalità Diretta**
- 738 Equilibrio Cinematico**
- 739 Insieme aperto sse intorno di ogni suo punto**
- 740 Complementare di un insieme**
- 741 Successione delle distanze tende a zero implica successioni hanno lo stesso limite**

741.1 Teorema

Sia (X, d) uno spazio metrico, e siano $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ due successioni. Se

- $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, w_n) = 0$

allora $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

741.1.1 Dimostrazione

Sia $k := \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$.

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste

- $N \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n > N$: $d(z_n, w_n) < \frac{\varepsilon}{2}$;
- $M \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n > M$: $d(w_n, k) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Quindi, per ogni $n > \max\{N, M\}$,

$$d(z_n, k) \leq d(z_n, w_n) + d(w_n, k) < \varepsilon$$

grazie alla diseguaglianza triangolare.

Siccome X è T2 (vedi Spazi metrici sono T2), allora per unicità del limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = k$$

Limiti uguali %% Dimostrazione alternativa Siano quindi

$$\ell := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n, \quad k := \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$$

se per assurdo $\ell \neq k$ allora, poiché X è Hausdorff (vedi Spazi metrici sono T2), esiste ε tale che, posto

$$B_d(y, \varepsilon) := \{x \in Y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

si ha che

$$B_d(\ell, \varepsilon) \cap B_d(k, \varepsilon) = \emptyset$$

Inoltre, per definizione di convergenza, esiste $M \in \mathbb{N}$ tale per cui, se $n > M$, allora

$$z_n \in B_d\left(\ell, \frac{\varepsilon}{4}\right) \subseteq B_d(\ell, \varepsilon), \quad w_n \in B_d\left(k, \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

Allora $d(z_n, w_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Questo contraddice l'ipotesi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(z_n, w_n) = 0.$$

Infatti, se per assurdo

$$d(z_n, w_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

allora per la disuguaglianza triangolare

$$d(z_n, k) \leq d(z_n, w_n) + d(w_n, k) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

e quindi $z_n \in B_d(k, \varepsilon)$. Assurdo.

742 Spazi metrici sono T2

743 Topologia discreta

744 Ultrametrica

744.1 Definizione

Uno spazio ultrametrico (X, d) è un insieme X dotato di una funzione $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x, y, z \in X$

1. $d(x, y) \geq 0$;
2. $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
3. $d(x, y) = d(y, x)$;
4. $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$

Segue la disuguaglianza triangolare:

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

745 Insieme clopen

Sia X uno spazio topologico. $A \subseteq X$ si dice clopen se è sia aperto che chiuso.

746 Gruppo archimedeo

747 Gruppo ordinato

748 Prefascio

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Sia \mathcal{C} una categoria. Un prefascio \mathcal{F} su X a valori in \mathcal{C} è il dato di:

1. per ogni $U \subseteq X$ aperto, un oggetto $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{C}$ (a volte si indica anche con $\Gamma(\mathcal{F}, U)$);
2. per ogni $V \subseteq U \subseteq X$ aperti, un morfismo $\rho_V^U \in \mathcal{C}$

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

tale che:

- (a) $\mathcal{F}(\emptyset)$ è l'oggetto terminale di \mathcal{C} ;
- (b) per ogni $U \subseteq X$ aperto: $\rho_U^U = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$;
- (c) per ogni $W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ aperti:

$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$$

Nomenclatura:

- Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ si dicono sezioni di \mathcal{F} su U .
- Gli elementi di $\mathcal{F}(X)$ si dicono sezioni globali di \mathcal{F} .
- I morfismi ρ_V^U si dicono morfismi di restrizione e per ogni $s \in \mathcal{F}(U)$ si denota:

$$\rho_V^U(s) =: s|_V$$

748.1 Prefascio di gruppi

Definizione 2. Un prefascio \mathcal{F} di gruppi su X è il dato di:

1. per ogni $U \subseteq X$ aperto, un gruppo denotato con $\mathcal{F}(U)$;
2. per ogni $V \subseteq U \subseteq X$ aperti, un morfismo di gruppi:

$$\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$$

tale che:

- (a) $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ è il *gruppo banale*;
- (b) per ogni $U \subseteq X$ aperto: $\rho_U^U = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ ^[206];
- (c) per ogni $W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ aperti:^[207]

$$\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U.$$

749 Gruppo banale

750 Categoria degli aperti di uno spazio topologico

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 1. Si definisce la *categoria* \mathbf{A}_X tale che:

- gli oggetti di \mathbf{A}_X siano tutti gli $U \subseteq X$ aperti;
- per ogni $U, V \subseteq X$ aperti,

$$\text{Hom}_{\mathbf{A}_X}(U, V) = \begin{cases} \emptyset & U \not\subseteq V \\ i : U \hookrightarrow V & U \subseteq V \end{cases}$$

Osservazione. Quanto descritto sopra definisce una categoria.

- La composizione è quella usuale, poiché composizione di inclusioni è ancora un'inclusione (altrimenti non esiste)
- Se $U, V, U', V' \subseteq X$ tali che $(U, V) \neq (U', V')$, allora

$$\text{Hom}(U, V) \cap \text{Hom}(U', V') = \emptyset$$

in quanto le funzioni sono caratterizzate da dominio e codominio.

- La composizione è associativa quando ha senso
- Esiste la mappa identità

751 Oggetto terminale di una categoria

752 Fascio

Sia X uno spazio topologico, e sia \mathcal{F} un prefascio su X . Diciamo che \mathcal{F} è un fascio se (quando ha senso) soddisfa i seguenti assiomi:

- Assioma di fascio (Esistenza)
- Assioma di fascio (Unicità)

o, equivalentemente, se soddisfa l'Assioma di fascio.

752.1 Assioma di fascio (Esistenza)

Per ogni $U \subseteq X$ aperto e per ogni $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U , data una collezione di sezioni $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \quad \forall i, j$$

esiste $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che per ogni i , $s_i = s|_{U_i}$.

752.2 Assioma di fascio (Unicità)

Per ogni $U \subseteq X$ aperto e per ogni $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U , se $s \in \mathcal{F}(U)$ è tale che $s|_{U_i} = 0$ per ogni i , allora $s = 0$.

752.3 Assioma di fascio

Per ogni $U \subseteq X$ aperto e per ogni $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U , data una collezione di sezioni $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}, \quad \forall i, j$$

esiste un'unica $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che per ogni i , $s_i = s|_{U_i}$.

753 Esempi di Fasci e Prefaschi

Esempio 1. Si consideri X spazio topologico qualsiasi. Allora i seguenti, con la restrizione ovvia, sono dei prefasci di [R-algebre](#): per ogni $U \subseteq X$ aperto

- $\mathcal{F}_X(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}\};$
- $\mathcal{C}_X(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\},$ fascio delle funzioni continue.

Entrambi sono anche dei [fasci](#): per il secondo esempio è necessario ricorrere al [Lemma di Incollamento](#).

753.1 Forme differenziali come fascio

Esempio 2. Sia X varietà differenziabile. Il seguente è un prefascio di spazi vettoriali reali:

- per ogni $U \subseteq X$ aperto: $\Omega^p(U)$, lo spazio delle [p-forme differenziali](#) \mathcal{C}^∞ su U ;
- come restrizione quella ovvia.

Questo è anche un [fascio](#). Si indica con $\mathcal{A}_X^p = \Omega_X^p$.

753.2 Funzioni Cinfinito da una varietà ai reali come fascio

Esempio 3. Sia X varietà differenziabile. Il seguente è un prefascio di [R-algebre](#):

- per ogni $U \subseteq X$ aperto: $\mathcal{C}^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzioni } \mathcal{C}^\infty\}^{[208]}$;
- come restrizione quella ovvia.

Questo è anche un [fascio](#). Si indica con \mathcal{C}_X^∞ .

753.3 Prefascio delle funzioni costanti a valori in un gruppo

Sia X uno spazio topologico, e sia G un gruppo. Il prefascio delle funzioni costanti a valori in G è, rispetto alle restrizioni di funzioni, per ogni $U \subseteq X$ aperto

$$\mathcal{F}(U) := \{f : U \rightarrow G \text{ costante}\}$$

Questo non è, in generale, un fascio. Infatti, siano $A, B \subseteq X$ aperti, non vuoti e disgiunti, e sia $U := A \cup B$. Allora $\{A, B\}$ è un ricoprimento aperto di U , e

$$f_A : A \rightarrow G : a \mapsto g_A, \quad f_B : B \rightarrow G : b \mapsto g_B$$

con $g_A \neq g_B$ sono tali che $f_A \in \mathcal{F}(A)$ e $f_B \in \mathcal{F}(B)$, ma non esiste una funzione costante $f : X \rightarrow G$ tale che

$$f|_A = f_A, \quad f|_B = f_B.$$

753.4 Sezioni Cinfinito di un fibrato vettoriale come fascio

Esempio 4. Sia X una varietà differenziabile, $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrato vettoriale C^∞ . Si definisce un fascio di spazi vettoriali reali come segue:

- Si pone:^[209]

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &:= \{\text{sezioni } C^\infty \text{ di } E \text{ ristrette a } U\} \\ &= \{s : U \rightarrow \pi^{-1}[U] \text{ di classe } C^\infty \mid \pi \circ s = \text{Id}_U\} \end{aligned}$$

- come restruzione quella ovvia.

753.5 Fascio delle funzioni olomorfe

Definizione 5. Sia X un aperto di \mathbb{C} o di \mathbb{C}^n . Si definisce il fascio delle funzioni olomorfe \mathcal{O}_X come segue:

- si pone

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa}\}.$$

- come restruzione quella ovvia.

Questo è un fascio di \mathbb{C} -algebre.

753.6 Fascio delle funzioni olomorfe mai nulle

Definizione 6. Sia X un aperto di \mathbb{C} o di \mathbb{C}^n . Si definisce il fascio delle funzioni olomorfe \mathcal{O}_X^* come segue:

- si pone

$$\mathcal{O}_X^*(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa} \wedge 0 \notin f[U]\}.$$

- come restruzione quella ovvia.

Questo è un fascio di gruppi abeliani.

753.7 Fascio delle funzioni regolari su una varietà algebrica qp

Definizione 7. Sia X una varietà algebrica q.p. su \mathbb{K} campo algebricamente chiuso.^[210] Si definisce il **fascio delle funzioni regolari** \mathcal{O}_X come segue:

- si pone

$$\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ regolare}\}.$$

- come *restruzione quella ovvia*.

Questo è un fascio di **K-algebre**.

754 Sottoprefascio

Definizione 1. Sia \mathcal{F} un **fascio** su X . Un sottoprefascio \mathcal{G} di \mathcal{F} è un **prefascio** \mathcal{G} tale che, per ogni **aperto** $U \subseteq X$, $\mathcal{G}(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ (con condizione di compatibilità).

Osservazione. In generale non è detto che \mathcal{G} sia un **fascio**. Infatti, dato $U \subseteq X$ aperto, $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U e $s_i \in \mathcal{G}(U_i)$ tali che, in $\mathcal{G}(U_i \cap U_j)$

$$\forall i, j \quad s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$$

si ha che, siccome \mathcal{F} è un **fascio**, allora esiste un unico $s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_j} = s_j$. Quindi \mathcal{G} soddisfa l'**assioma di unicità**, ma non è chiaro se $s \in \mathcal{G}(U)$.

755 Sottofascio

Definizione 1. Sia \mathcal{F} un **fascio** su X . Un sottofascio \mathcal{G} di \mathcal{F} è un sottoprefascio \mathcal{G} di \mathcal{F} che soddisfa l'**assioma di fascio**.

756 Funzione localmente costante

Definizione 1. Sia X uno **spazio topologico**, e sia Y un **insieme**. Una **funzione** $f : X \rightarrow Y$ si dice localmente costante se per ogni $x_0 \in X$ esistono un **intorno** V di x_0 e $y_0 \in Y$ tali che

$$\forall x \in V : \quad f(x) = f(x_0) = y_0.$$

757 Funzione localmente costante sse costante sulle componenti connesse

Proposizione 1. Sia X uno **spazio topologico** primo numerabile, Y un **insieme** e $f : X \rightarrow Y$ una **funzione**.

f è **localmente costante** su X se e solo se f è **costante** sulle **componenti connesse** di X .

Dimostrazione. (\Leftarrow): Segue dalla definizione di localmente costante, in quanto ogni componente连通的 è aperta, quindi intorno di ogni suo punto.

(\Rightarrow): Sia $C \subseteq X$ una componente连通的, e supponiamo per assurdo che esistano $x, y \in C$ tali che $f(x) \neq f(y)$. Sia $A := \{z \in C \mid f(z) = f(x)\} \subseteq C$ e sia $B := \{z \in C \mid f(z) = f(y)\} \subseteq C$. Chiaramente $A \cap B = \emptyset$, e $A \ni x, B \ni y$,

Siccome f è localmente costante, allora per ogni $z \in C$ esiste $U_z \subseteq C$ intorno aperto di z tale che $f|_{U_z}$ è costante. Pertanto:

- per ogni $z \in A$, $U_z \subseteq A$;
- per ogni $z \in B$, $U_z \subseteq B$.

Sono entrambi intorno di ogni loro punti, e pertanto sono aperti.

Sia $(z_n) \subseteq A$ una successione convergente. Sia p tale che (z_n) converge a p . Siccome f è localmente costante, esiste un intorno V di p in cui f è costante. Siccome z_n converge a p , allora esiste $z_n \in V$, e pertanto $f(p) = f(z_n) = f(x)$. Allora $p \in A$. Per la caratterizzazione dei chiusi per successioni, A è chiuso.

Sia $(w_n) \subseteq B$ una successione convergente. Sia w tale che (w_n) converge a w . Siccome f è localmente costante, esiste un intorno W di w in cui f è costante. Siccome w_n converge a w , allora esiste $w_n \in W$, e pertanto $f(w) = f(w_n) = f(y)$. Allora $w \in B$. Per la caratterizzazione dei chiusi per successioni, B è chiuso.

Quindi C non è connesso. Assurdo. ■

758 Funzione costante

759 Componente连通的 di uno spazio topologico

760 Componente连通的 per archi di uno spazio topologico

761 Fascio di gruppo localmente costante

Sia G un gruppo, e sia X uno spazio topologico fissato.

Definizione 1. Si denota con \underline{G} il fascio:

- per ogni $U \subseteq X$ aperto, $\underline{G}(U) := \{f : U \rightarrow G \mid f \text{ localmente costante}\}^{[211]}$;
- come restrizioni, la restrizione di funzioni.

Questo è il fascio localmente costante.

762 Fascio grattacieli

Sia X uno spazio topologico, G un gruppo e $p \in X$ fissato.

Definizione 1. Si definisce il *fascio* grattacieli G_p come:

- per ogni $U \subseteq X$ aperto

$$G_p(U) := \begin{cases} \emptyset & p \notin U \\ G & p \in U \end{cases}$$

- i morfismi di restrizione sono o la mappa nulla o l'*identità* di G .

763 Morfismo di prefasci

Definizione 1. Sia X spazio topologico e siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due prefasci su X . Un **morfismo** di prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è, per ogni $U \subseteq X$ aperto, un **morfismo**

$$f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

tali che, per ogni $V \subseteq U \subseteq X$ aperti, il seguente diagramma commutti:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{f_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \rho_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{f_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

In particolare, considerata la [definizione di prefascio come funtore](#)^[212], un morfismo tra prefasci è una [trasformazione naturale](#) tra i due funtori.

763.1 Morfismo identità tra prefasci

Definizione 2. Sia X uno spazio topologico e \mathcal{F} un prefascio. Il morfismo identità $\text{Id}_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ è, per ogni $U \subseteq X$ aperto, $(\text{Id}_{\mathcal{F}})_U := \text{Id}_U$ ^[213].

763.2 Composizione di morfismi di prefasci

Definizione 3. Sia X uno spazio topologico e siano $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ prefasci su X . Siano

$$\begin{aligned} f : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{G} \\ g : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{H} \end{aligned}$$

due morfismi di prefasci. Per ogni $U \subseteq X$ aperto si hanno i morfismi

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{H}(U)$$

la cui composizione $g_U \circ f_U =: (g \circ f)_U$.

Questo definisce un morfismo $g \circ f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$.

763.3 Isomorfismo di prefasci

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico e siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due prefasci. Un morfismo $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è detto isomorfismo se esiste un morfismo $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ tale che^[214]

$$f \circ g = \text{Id}_{\mathcal{G}}, \quad g \circ f = \text{Id}_{\mathcal{F}}$$

Proposizione 5. Un morfismo di (pre)fasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un isomorfismo se e solo se per ogni $U \subseteq X$ aperto, $f_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è un isomorfismo.

764 Morfismo di fasci

Definizione 1. Se \mathcal{F} e \mathcal{G} sono due fasci, un morfismo di fasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è il morfismo tra prefasci $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$.

765 Esempi di morfismi di prefasci

765.1 Inclusioni di sottoprefasci sono morfismi di fasci

Proposizione 1. Se \mathcal{F}, \mathcal{G} sono prefasci e $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ è sottoprefascio, allora l'inclusione $i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo.

765.2 Differenziale di una forma è morfismo di fasci

Proposizione 2. Se X è varietà differenziabile e $\mathcal{A}_X^p, \mathcal{A}_X^{p+1}$ sono i fasci delle p -forme differenziali su X ^[215], allora il differenziale d è un morfismo di fasci: per ogni $U \subseteq X$:

$$\begin{aligned} d_U : \mathcal{A}_X^p(U) &\longrightarrow \mathcal{A}_X^{p+1}(U) \\ \omega &\longmapsto d\omega. \end{aligned}$$

Osservazione. Se $p = 0$, allora il fascio nucleo $\ker d = \mathbb{R}$ fascio localmente costante.

Se $p \geq 1$, allora il fascio nucleo è composto dalle p -forme chiuse su X .

765.3 Valutazione in un punto

Sia X spazio topologico, e si considerino:

- \mathcal{C}_X il fascio delle funzioni continue a valori in \mathbb{R} ^[216].
- \mathbb{R}_p il fascio grattacieli concentrato in $p \in X$.

Proposizione 3. La mappa $e_p : \mathcal{C}_X \rightarrow \mathbb{R}_p$, definita come, per ogni $U \subseteq X$ aperto:

- se $p \notin U$ allora $(e_p)_U : \mathcal{C}_X(U) \rightarrow \{0\}$ mappa nulla;
- se $p \in U$ allora

$$\begin{aligned} (e_p)_U : \mathcal{C}_X(U) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

è detta valutazione in p ed è un morfismo di fasci.

Osservazione. Il nucleo di questo morfismo è

$$\ker e_p = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f(p) = 0, f \text{ continua}\}.$$

765.4 Mappa esponenziale tra fasci di funzioni olomorfe

Vedi Mappa esponenziale tra fasci di funzioni olomorfe

766 Spiga di un fascio di gruppi

Sia X uno spazio topologico, e sia \mathcal{F} un prefascio di gruppi. Sia $p \in X$ fissato e sia

$$I(p) := \{U \subseteq X \mid U \text{ intorno aperto di } p\}$$

l'insieme degli intorni aperti di p .

Posta l'unione disgiunta insiemistica:

$$S := \coprod_{U \in I(p)} \mathcal{F}(U)$$

si pone su S una relazione di equivalenza: siano $f, g \in S$; allora $f \in \mathcal{F}(U), g \in \mathcal{F}(V)$ e $p \in U \cap V$.

- $f \sim g$ se e solo se esiste $W \in I(p)$, $W \subseteq U \cap V$ tale che $f|_W = g|_W$ in $\mathcal{F}(W)$.

Definizione 1. La spiga di \mathcal{F} in p è l'insieme quoziante:

$$\mathcal{F}_p := S / \sim$$

Per indicare la classe di equivalenza di $f \in S$ dentro a \mathcal{F}_p si scriverà $[f]_p$: questo è il germe di f in p .

Osservazione. La spiga eredita una naturale struttura di gruppo: se $s_1, s_2 \in \mathcal{F}_p$, allora esiste $U \in I(p)$ ed esistono $f_1, f_2 \in \mathcal{F}(U)$ tali che

$$s_1 = [f_1]_p, \quad s_2 = [f_2]_p$$

Si definisce: $s_1 + s_2 := [f_1 + f_2]_p$.

Proposizione 2. Per ogni $U \in I(p)$, la seguente mappa è un omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \mathcal{F}_p \\ f &\longmapsto [f]_p \end{aligned}$$

Proposizione 3. Si ha che $[f]_p = 0$ se e solo se per qualche $W \in I(p)$ si ha $f|_W = 0$.

Proposizione 4. Se \mathcal{F} è un fascio, $U \subseteq X$ aperto, $f \in \mathcal{F}(U)$.

$f = 0$ se e solo se, per ogni $p \in U$, $[f]_p = 0$.

Dimostrazione. (\Rightarrow): siccome $f \mapsto [f]_p$ è omomorfismo di gruppi, segue la tesi.

(\Leftarrow): Sia $f \in \mathcal{F}(U)$ tale che, per ogni $p \in U$, $[f]_p = 0$. Allora, per ogni $p \in U$, esiste $V'_p \in I(p)$ tale che $f|_{V'_p} = 0$.

Allora, posto $V_p := V'_p \cap U$, $\{V_p\}_{p \in U}$ è un ricoprimento aperto di U , e $f|_{V_p} = 0$. Per l'assioma di unicità di fascio, $f = 0$ in $\mathcal{F}(U)$. \blacksquare

767 Fascio come funtore

767.1 Prefascio come funtore

767.1.1 Prefascio di gruppi come funtore

Proposizione 1. Dare un prefascio di gruppi \mathcal{F} sullo spazio topologico X è equivalente a dare un funtore controvariante \mathcal{G} tra la categoria \mathbf{A}_X degli aperti di X è la categoria \mathbf{Grp} dei gruppi tale che $\mathcal{G}(\emptyset) = \{0\}$.

Dimostrazione. Si deve dimostrare che ogni prefascio sia un funtore controvariante, ed il viceversa.

- Ogni prefascio definisce un funtore.

Sia $\mathcal{G} : \mathbf{A}_X \rightarrow \mathbf{Grp}$ un funtore definito come segue:

- per ogni $U \in \mathbf{A}_X$, $\mathcal{G}(U) := \mathcal{F}(U) \in \mathbf{Grp}$.
- per ogni $U, V \in \mathbf{A}_X$ tali che $U \subseteq V$ con $i : U \hookrightarrow V$ l'inclusione, si ponga

$$\mathcal{G}(i) := \rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

Allora

1. $\mathcal{G}(\emptyset) = \mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$;
2. se $U \subseteq V \subseteq W$ aperti, $i : U \hookrightarrow V$, $j : V \hookrightarrow W$ allora

$$\mathcal{G}(j \circ i) = \rho_U^W = \rho_U^V \circ \rho_V^W = \mathcal{G}(i) \circ \mathcal{G}(j)$$

3. per ogni U , si consideri l'identità $\text{Id}_U : U \rightarrow U$; allora

$$\mathcal{G}(\text{Id}_U) = \rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)} = \text{id}_{\mathcal{G}(U)}.$$

- Ogni funtore definisce un prefascio.

Sia $\mathcal{G} : \mathbf{A}_X \rightarrow \mathbf{Grp}$ un funtore controvariante tale che $\mathcal{G}(\emptyset) = \{0\}$. Si definisce un prefascio \mathcal{F} di gruppi su X come segue:

1. per ogni $U \subseteq X$ aperto, si pone $\mathcal{F}(U) := \mathcal{G}(U)$;

2. per ogni $U \subseteq V \subseteq X$ aperti, detta $i : U \hookrightarrow V$ l'inclusione, si pone

$$\rho_U^V : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$$

come $\rho_U^V := \mathcal{G}(i)$.

Allora

- $\mathcal{F}(\emptyset) = \mathcal{G}(\emptyset) = \{0\}$;
- per ogni $U \subseteq X$ aperto: $\rho_U^U = \mathcal{G}(\text{id}_U) = \text{id}_{\mathcal{G}(U)} = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$;
- per ogni $W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ aperti:

$$W \xhookrightarrow{i} V \xhookrightarrow{j} U$$

si ha:

$$\rho_W^U = \mathcal{G}(j \circ i) = \mathcal{G}(i) \circ \mathcal{G}(j) = \rho_W^V \circ \rho_V^U.$$

■

768 Immersione topologica dello spazio di Baire nello spazio di Cantor

768.1 Proposizione

Prove that the map

$$\omega^\omega \rightarrow 2^\omega, \quad x \mapsto \underbrace{0 \dots 0}_{x(0)} \underbrace{1}_{x(1)} \underbrace{0 \dots 0}_{x(2)} \underbrace{1 \dots 0}_{x(3)} \dots$$

is a (topological) embedding, and argue that this provides an alternative proof of the fact that

$$\{x \in 2^\omega \mid x(n) = 1 \text{ for infinitely many } n \in \omega\}$$

is a dense Polish subspace of 2^ω . In contrast, show that 2^ω cannot be embedded as a dense subset in ω^ω .

[Hint. Use compactness.]

768.1.1 Dimostrazione

Prima parte Sia $f : \omega^\omega \rightarrow 2^\omega$ la funzione descritta. Sia, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$:

$$N_s := \{x \in \omega^\omega \mid x \upharpoonright s = s\}$$

Si costruisce quindi l' ω -schema associato ad f :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &:= \{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\} \\ B_s &:= f(N_s) \end{aligned}$$

Si applica il lemma 1.3.9.

- Si ha che B_s è aperto in 2^ω , per definizione di **topologia prodotto** (sono insiemi con un numero finito di componenti fissate).
- Sia $s \in \omega^{<\omega}$ e siano $x, y \in \omega$, $x \neq y$. Supponiamo per assurdo che $B_{s-x} \cap B_{s-y} \neq \emptyset$, ovvero

$$f(N_{s-x}) \cap f(N_{s-y}) \neq \emptyset.$$

Dunque esistono $a \in N_{s-x}$, $b \in N_{s-y}$ tali che $f(a) = f(b)$. Siccome f è **iniettiva**, $a = b$, ma $N_{s-x} \cap N_{s-y} = \emptyset$. Assurdo.

Per il punto (c) si ha che f è una immersione topologica.

Seconda parte Sia

$$A := \{x \in 2^\omega \mid x(n) = 1 \text{ per un numero infinito di } n \in \omega\}$$

Si ha che $A = f(\omega^\omega)$. Infatti, l'inclusione " \supseteq " è ovvia. Per il viceversa, si definisce per ogni $y \in A$, l'insieme

$$Z_y := \{n \in \omega \mid y(n) = 1\} \subseteq \omega$$

Si ordina Z_y in maniera crescente, $Z_y := (y_i)_{i \in \omega}$.

Si definisce $x \in \omega^\omega$ come:

$$x(i) := \begin{cases} y_0 & i = 0 \\ y_i - y_{i-1} - 1 & i > 0 \end{cases}$$

e si ottiene che $y = f(x)$.

Questo dimostra che A è un sottospazio polacco di 2^ω , **poiché omeomorfo** a ω^ω spazio polacco.

Inoltre, sia $y \in 2^\omega$, e sia, per ogni $n \in \omega$:

$$x_n(i) := \begin{cases} y(i) & i \leq n \\ 1 & i > n \end{cases}$$

Allora $x_n \in A$ e $x_n \rightarrow y$, in quanto, considerata la distanza su 2^ω :

$$d(\eta, \tau) := \begin{cases} 0 & \eta = \tau \\ 2^{-(n+1)} & \eta \neq \tau \text{ e } n \text{ è il più piccolo t.c. } \eta(n) \neq \tau(n) \end{cases}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \omega$, $N := \lceil -\ln_2(\varepsilon) - 1 \rceil$ tale che per ogni $n > N$: $d(x_n, y) < \varepsilon$. Quindi A è denso in 2^ω , per la **caratterizzazione della chiusura per successioni**.

Terza parte Lo spazio ω^ω è **metrizzabile**, e pertanto **T2**.

Supponiamo che per assurdo esista $\iota : 2^\omega \rightarrow \omega^\omega$ immersione topologica tale che $\iota(2^\omega) =: X$ sia denso in ω^ω .

Siccome 2^ω è compatto, allora X è compatto, ed inoltre $\text{Cl}(X) = \omega^\omega$. Ma in uno spazio di Hausdorff **i compatti sono chiusi**, e pertanto

$$X = \text{Cl}(X) = \omega^\omega$$

Questo è un assurdo, poiché ω^ω non è compatto.

769 Caratterizzazione dei compatti dello spazio di Baire

769.1 Proposizione

A set $A \subseteq \omega^\omega$ is **bounded** if there is $z \in \omega^\omega$ such that for all $x \in A$ we have $x(n) \leq z(n)$ for all $n \in \omega$. Prove that the following conditions are equivalent for an arbitrary $F \subseteq \omega^\omega$:

1. F is **compact**;
2. F is **closed** and **bounded**;
3. $F = [T]$ with T a finitely branching tree (i.e. every node in T has only finitely many successors).

Conclude that $A \subseteq \omega^\omega$ is contained in a compact set (equivalently, has compact closure) if and only A is bounded, and therefore ω^ω is not locally compact.

769.1.1 Dimostrazione

Sia, per ogni $s \in \omega^{<\omega}$: $N_s := \{x \in \omega^\omega \mid x \upharpoonright s = s\}$.

a. implica b. Siccome ω^ω è **metrizzabile** è uno **spazio T2**. Se F è **compatto** allora è **chiuso**. Resta da dimostrare che F sia **limitato**.

Per ogni $x \in F$ e per ogni $n \in \omega$ si consideri l'aperto

$$U_{x,n} := \{y \in F \mid y \upharpoonright n = x \upharpoonright n\}$$

Si ottiene quindi $U_x := F \cap \bigcup_{n \in \omega} U_{x,n}$ aperto in F , e pertanto $\{U_x\}_{x \in F}$ è un **ricoprimento** aperto di F .

Dal momento che F è compatto, esiste $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq F$ tali che

$$\bigcup_{i=1, \dots, m} U_{x_i} = F$$

e pertanto è sufficiente porre $z \in \omega^\omega$:

$$z(\eta) := \max \{x_i(\eta)\}$$

per ottenere la tesi.

b. implica a. Siccome F è limitato, esiste $z \in \omega^\omega$ tale che per ogni $x \in F$ e per ogni $n \in \omega$ si ha

$$x(n) \leq z(n)$$

Si consideri quindi, per ogni $n \in \omega$: $A_n \subseteq \omega$, $A_n := z(n) + 1 = \{0, 1, 2, \dots, z(n)\}$. Questo è compatto in quanto finito con la **topologia discreta**.

Per il **Teorema di Tichonoff** $A := \prod_{n \in \omega} A_n$ è compatto. Inoltre

$$F \subseteq A$$

in quanto, se $x \in F$ allora per ogni $n \in \omega$: $x(n) < z(n) + 1$ i.e. $x(n) \in (z(n) + 1) = A_n$ e pertanto $x \in A$.

Quindi F è chiuso dentro A compatto, quindi F è compatto.

b. implica c. Per la proposizione 1.3.3 esiste un albero potato T_F tale che $F = [T_F]$, con

$$T_F := \{x \upharpoonright n \mid x \in F \wedge n \in \omega\}$$

Resta da dimostrare che T_F sia a ramificazione finita. Se per assurdo esistesse $s \in T_F$ tale che, per ogni $i \in \omega$:

$$s^\frown i \in T_F$$

Pertanto, per ogni $i \in \omega$, esiste $x_i \in F$ tale che $x_i \upharpoonright \text{lh}(s) + 1 = s^\frown i$ ed in particolar modo, per ogni $i \in \omega$ vale che $x_i(\text{lh}(s) + 2) = i$. Per ogni $z \in \omega^\omega$, quindi, esiste $n := \text{lh}(s) + 2$ ed esiste $x \in F$, $x := x_{i_0}$ con $i_0 = z(n) + 1$ tale per cui

$$z(n) \leq x(n) = x_{i_0}(n) = i_0 = z(n) + 1.$$

Assurdo poiché F è limitato.

c. implica b. Sia T un albero a ramificazione finita, ovvero tale che per ogni $s \in T$:

$$R_s := \{n \in \omega \mid s^\frown n \in T\} \subseteq \omega$$

è un insieme finito, con

$$F = [T] = \{x \in \omega^\omega \mid \forall n \in \omega (x \upharpoonright n \in T)\}$$

Per la proposizione 1.3.3 F è chiuso, e pertanto resta da dimostrare che F sia limitato.

- Per ogni $n \in \omega$, $T_n := \{t \in T \mid \text{lh}(t) = n\}$ è finito.

Per induzione, $T_0 = \{\emptyset\}$. Se T_n è finito, allora

$$T_{n+1} = \{t \in T \mid \exists s \in T_n \wedge \exists m \in \omega (s^\frown m = t)\}$$

ovvero

$$T_{n+1} = \bigcup_{s \in T_n} \bigcup_{m \in R_s} \{s^\frown m\}$$

unione finita di singoletti, e pertanto finito.

- Si definisce $z \in \omega^\omega$ come segue:

$$\forall n \in \omega : z(n) := 1 + \max_{s \in T_n} \max R_s$$

- Claim: z così definito è tale che, per ogni $x \in F$ e per ogni $n \in \omega$: $z(n) \geq x(n)$.

Infatti, se per assurdo esistesse $\tilde{x} \in F$ e $\tilde{n} \in \omega$ tali che $\tilde{x}(\tilde{n}) > z(\tilde{n})$, allora $\tilde{x} \upharpoonright \tilde{n} + 1 \in T$ poiché $F = [T]$, ed in particolar modo,

$$(\tilde{x} \upharpoonright \tilde{n} + 1) \in T_{\tilde{n}+1}$$

Pertanto $\tilde{x}(\tilde{n}) \in R_{\tilde{x} \upharpoonright \tilde{n}}$ e $\tilde{x} \upharpoonright \tilde{n} \in T_{\tilde{n}}$. Quindi $z(\tilde{n}) \geq 1 + \tilde{x}(\tilde{n})$. Assurdo.

Locale compattezza Sia $A \subseteq \omega^\omega$.

- Se esiste $C \subseteq \omega^\omega$ compatto e tale che $A \subseteq C$, allora C è limitato e quindi A è limitato.
- Se A è limitato e $z \in \omega^\omega$ ne è testimone, allora sia $(a_n)_{n \in \omega} \subseteq A$ una successione convergente ad a .

Allora per ogni $n \in \omega$, $a \in N_{a \upharpoonright n+1}$, e quindi esiste $N \in \omega$ tale che $a_N \in N_{a \upharpoonright n+1}$ e pertanto

$$a(n) = a_N(n) \leq z(n)$$

dove l'ultima diseguaglianza vale perché $a_N \in A$ limitato.

Per la caratterizzazione della chiusura in termini di successioni, si è dimostrato che $\text{Cl}(A)$ è limitato (e ovviamente chiuso), quindi compatto, e

$$A \subseteq \text{Cl}(A)$$

770 Insieme limitato dello spazio di Baire

770.1 Definizione

A set $A \subseteq \omega^\omega$ (vedi [Spazio di Baire](#)) is bounded (limitato) if there is $z \in \omega^\omega$ such that for all $x \in A$ we have $x(n) \leq z(n)$ for all $n \in \omega$ (vedi [Ordinale omega](#)).

770.2 Insieme definitivamente limitato dello spazio di Baire

A set $A \subseteq \omega^\omega$ (vedi [Spazio di Baire](#)) is eventually bounded if there is $z \in \omega^\omega$ such that for all $x \in A$ there is $n \in \omega$ for which $x(m) \leq z(m)$ for all $m \geq n$.

Vedi

771 Caratterizzazione dei sigma-compatti nello spazio di Baire

771.1 Proposizione

A subset of a topological space is [\\$\sigma\\$-compact](#) (or K_σ) if it can be written as a countable union of compact spaces. (For example, finitedimensional Euclidean spaces \mathbb{R}^n are [\\$\sigma\\$-compact](#).) A set $A \subseteq \omega^\omega$ is [eventually bounded](#) if there is $z \in \omega^\omega$ such that for all $x \in A$ there is $n \in \omega$ for which $x(m) \leq z(m)$ for all $m \geq n$. Prove that the following conditions are equivalent for an arbitrary $A \subseteq \omega^\omega$:

1. A is contained in a [\\$\sigma\\$-compact](#) set;
2. A is eventually bounded.

Conclude that $F \subseteq \omega^\omega$ is a [\\$\sigma\\$-compact](#) set if and only if it is F_σ and eventually bounded, and that ω^ω is not [\\$\sigma\\$-compact](#). Provide an explicit example of a subset of the Baire space which is [\\$\sigma\\$-compact](#) but not compact. Argue that ω^ω cannot be embedded as an F_σ (so neither closed) set into a [\\$\sigma\\$-compact](#) Polish space like \mathbb{R}^n .

771.1.1 Dimostrazione

b. implica a. Sia A definitivamente limitato, e sia $z \in \omega^\omega$ testimone. Si ponga, per ogni $n \in \omega$

$$A_n := \left\{ x \in A \mid \forall i \in \omega \ (x(i) \leq \max \{n, z(i)\}) \right\} \subseteq A$$

Si noti che A_n è limitato, poiché posto $y_n(i) := \max \{n, z(i)\}$, $y_n \in \omega^\omega$.

Sia ora $x_0 \in A$. Allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che, per ogni $m \geq n_0$: $x(m) \leq z(m)$. Sia quindi $N := \max_{m < n_0} x(m)$. Allora

$$\forall i \in \omega \quad x(i) \leq \max \{N, z(i)\}$$

e pertanto $x(i) \leq y_N(i)$ e $x \in A_N$.

Segue che $A = \bigcup_{n \in \omega} A_n$. Siccome ciascun A_n è limitato, allora esiste $K_n \supseteq A_n$ compatto (per l'esercizio precedente), e quindi

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \omega} K_n$$

a. implica b. Senza perdita di generalità si dimostra che se A è σ -compatto, allora A è definitivamente limitato (in quanto se C è definitivamente limitato allora anche $B \subseteq C$ lo è).

Sia quindi

$$A = \bigcup_{n \in \omega} K_n$$

e K_n compatto per ogni $n \in \omega$. Allora, per l'esercizio precedente, K_n è chiuso e limitato. Sia quindi y_n un testimone della limitatezza di K_n .

Si definisce quindi $z \in \omega^\omega$: per ogni $i \in \omega$:

$$z(i) := \max \{y_0(i), \dots, y_i(i)\}$$

Allora, per ogni $x \in A$ esiste $N \in \omega$ tale che $x \in K_N$: pertanto, per ogni $m > N$:

$$\begin{aligned} x(m) &\leq y_N(m) \leq \max \{y_0(m), \dots, y_N(m)\} \\ &\leq \max \{y_0(m), \dots, y_N(m), \dots, y_m(m)\} = z(m). \end{aligned}$$

Caratterizzazione dei σ -compatti Se $F \subseteq \omega^\omega$ è σ -compatto allora:

- è F_σ in quanto unione numerabile di compatti, che per la caratterizzazione dell'esercizio precedente sono chiusi;
- è definitivamente limitato per la dimostrazione “771.1.1” svolta sopra.

Se $F \subseteq \omega^\omega$ è un insieme F_σ e definitivamente limitato, allora è contenuto in un insieme σ -compatto K . Si scrivano:

$$F := \bigcup_{n \in \omega} C_n, \quad K := \bigcup_{m \in \omega} K_m$$

con C_n chiusi e K_m compatti. Allora

$$F = F \cap K = \bigcup_{n,m \in \omega} (C_n \cap K_m)$$

dove $(C_n \cap K_m) \subseteq K_m$ è un chiuso in un compatto, e quindi compatto e pertanto F è σ -compatto.

Inoltre, se ω^ω fosse σ -compatto, allora dovrebbe essere definitivamente limitato. Ma per ogni $z \in \omega^\omega$ esiste $z' \in \omega^\omega$ tale che per ogni $n \in \omega$ esiste $m \geq n$ per cui $z'(m) > z(m)$. È sufficiente porre, per ogni $i \in \omega$: $z'(i) = z(i) + 1$.

Insieme σ -compatto ma non compatto Per il [Teorema di Tychonoff](#), per ogni $n \in \omega$ gli insiemi

$$C_n := \prod_{m \in \omega} \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

sono [compatti](#), e pertanto $C := \bigcup_{n \in \omega} C_n$ è σ -compatto.

Per ogni $z \in \omega^\omega$, si ponga $N := z(0)$. Allora esiste $x \in C_{N+1}$ tale che $x(0) = N+1$, e quindi $x(0) > z(0)$. Pertanto C non è [limitato](#), e quindi non è compatto.

Immersione di ω^ω Siano per assurdo X uno spazio polacco σ -compatto (ovvero $X = \bigcup_{m \in \omega} K_m$ con K_m compatti) ed ι una [immersione](#):

$$\iota : \omega^\omega \rightarrow X$$

tale per cui $\iota(\omega^\omega)$ sia un insieme F_σ di X .

Allora esistono $C_n \subseteq X$ chiusi tali che

$$\iota(\omega^\omega) = \bigcup_{n \in \omega} C_n.$$

Inoltre si ha

$$\iota(\omega^\omega) = \left(\bigcup_{n \in \omega} C_n \right) \cap \left(\bigcup_{m \in \omega} K_m \right) = \bigcup_{n,m \in \omega} C_n \cap K_m$$

e pertanto

$$\omega^\omega = \bigcup_{n,m \in \omega} \iota^{-1}(C_n \cap K_m).$$

Ma $C_n \cap K_m \subseteq K_m$ sono compatti in quanto chiusi di un compatto, e siccome ι è un omeomorfismo con la sua immagine, $\iota^{-1}(C_n \cap K_m)$ sono compatti.

Quindi ω^ω è σ -compatto. Assurdo. ■

772 Spazio di Baire si surietta in ogni spazio polacco non vuoto tramite una mappa aperta e continua

772.1 Proposizione

Show that for every nonempty Polish space X there is a continuous open surjection $f : \omega^\omega \rightarrow X$.

[Hint. First show that if X is a metric space, then for every open U and every $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ there is a countable covering $(U_n)_{n \in \omega}$ of U such that $\text{Cl}(U_n) \subseteq U$ and $\text{diam}(U_n) < \varepsilon$, for all $n \in \omega$. Use this to build an appropriate $\$ \omega \$$ -scheme inducing the function f .]

772.1.1 Soluzione

Sia d una metrica completa fissata su X .

Si costruisce per induzione su $\text{lh}(s)$ un ω -schema \mathcal{S} su (X, d) . Sia $B_{\langle\rangle} = X$.

Sia ora $s \in \omega^{<\omega}$ tale per cui B_s è definito. Sia $(U_n)_{n \in \omega}$ il ricoprimento aperto numerabile di B_s che esiste per il claim. Questo è tale che:

- $\bigcup_{n \in \omega} U_n = B_s$
- gli U_n sono aperti, per ogni $n \in \omega$;
- $U_n \subseteq \text{Cl}(U_n) \subseteq B_s$;
- $\text{diam}(U_n) \leq 2^{-\text{lh}(s)}$;
- senza perdita di generalità, è possibile supporre che ciascun $U_n \neq \emptyset$ (si sostituisce nel ricoprimento a ciascun $U_n = \emptyset$ il primo $U_m \neq \emptyset$);

Si pone quindi, per ogni $a \in \omega$: $B_{s-a} := U_a$.

Si è in questo modo definito un ω -schema su X che induce una funzione

$$f : D_{\mathcal{S}} \rightarrow X.$$

Per il lemma 1.3.6, f è tale che

1. f è continua per il punto (a);
2. f è suriettiva per il punto (d);
3. $D_{\mathcal{S}} = \omega^\omega$ per il punto (e);
4. f è aperta per il punto (d).

773 Esempi di spighe

773.1 Spighe del fascio delle funzioni Cinfinito

Proposizione 1. Se X è una varietà differenziabile e \mathcal{C}_X^∞ è il fascio delle funzioni C^∞ , allora per ogni $p \in Z$ la spiga $(\mathcal{C}_X^\infty)_p$ è^[217]

$$(\mathcal{C}_X^\infty)_p = \{\text{germi delle funzioni } C^\infty \text{ in } p\}.$$

Questo ci dice che il concetto di [germe di funzione](#) è un caso particolare del germe di una spiga.

773.2 Spighe del fascio localmente costante

Sia X una [varietà topologica](#), e sia $\underline{\mathbb{R}}$ il [fascio delle funzioni localmente costanti](#).

Proposizione 2. Per ogni $p \in X$, si ha l'[isomorfismo](#) (di gruppi)

$$\underline{\mathbb{R}}_p \cong \mathbb{R}$$

dove $\underline{\mathbb{R}}_p$ è la [spiga di \$\underline{\mathbb{R}}\$ in \$p\$](#) .

773.3 Spighe del fascio grattacieli

Sia X una [varietà topologica](#), e \mathcal{F} il [fascio grattacieli](#) centrato in $p \in X$ con gruppo \mathbb{R} .

Proposizione 3. Per ogni $q \in X$, la [spiga](#) \mathcal{F}_q è

$$\mathcal{F}_q = \begin{cases} 0 & q \neq p \\ \mathbb{R} & q = p. \end{cases}$$

773.4 Spiege del fascio delle funzioni olomorfe

Proposizione 4. Se $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}$ è il [fascio delle funzioni olomorfe in \$\mathbb{C}\$](#) , e $z_0 \in \mathbb{C}$, allora la spiga $\mathcal{O}_{\mathbb{C}, z_0}$ è isomorfa all'anello delle serie di potenze convergenti in $(z - z_0)$.

774 Morfismo di fasci induce omomorfismo tra spighe

Sia X uno [spazio topologico](#), \mathcal{F}, \mathcal{G} due ([pre](#))[fasci](#) di [gruppi](#) su X e $f : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di ([pre](#))[fasci](#).

Allora, per ogni $p \in X$, f induce un [morfismo di gruppi](#) tra le [spighe](#) corrispondenti^[218]

$$\begin{aligned} f_p : \mathcal{F}_p &\longrightarrow \mathcal{G}_p \\ s &\longmapsto [f_U(\psi)]_p \end{aligned}$$

dove U e ψ sono come segue: per $s \in \mathcal{F}_p$, esiste $U \ni p$ [intorno aperto](#) ed esiste $\psi \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$s = [\psi]_p, \quad f_U(\psi) \in \mathcal{G}(U).$$

Esercizio: mostrare che sia ben definito e omomorfismo di gruppi.

775 Fascio associato ad un prefascio

Sia X uno [spazio topologico](#)

Teorema 1. Sia \mathcal{F} un [prefascio](#) su X . Allora esiste un [fascio](#) \mathcal{F}^+ su X ed un [morfismo](#) $j : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+$ tali che

1. per ogni **fascio** \mathcal{G} su X e per ogni **morfismo**

$$\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$$

esiste un unico **morfismo** $\psi : \mathcal{F}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ tale che $\varphi = \psi \circ j$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{j} & \mathcal{F}^+ \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

2. per ogni $p \in X$, il morfismo tra **spighe indotto**: $f_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p^+$ è un **isomorfismo**.

Dimostrazione. Si costruiscono \mathcal{F}^+ e j .

- Costruzione di \mathcal{F}^+ : sia $U \subseteq X$ aperto, e si considerino le funzioni^[219]

$$s : U \rightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p$$

tali che

1. $s(p) \in \mathcal{F}_p$ per ogni $p \in U$;
2. per ogni $p \in U$:
 - esiste $V \subseteq U$ intorno aperto di p
 - esiste $f \in \mathcal{F}(V)$

tali che^[220]

$$\forall q \in V : \quad s(q) = [f]_q$$

Si pone $\mathcal{F}^+(U)$ come l'insieme delle s che soddisfino 1. e 2.^[221]

La struttura di gruppo di $\mathcal{F}^+(U)$ è data da: per ogni $s, t \in \mathcal{F}^+(U)$:

$$\begin{aligned} s + t : U &\longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p \\ p &\longmapsto s(p) + t(p) \end{aligned}$$

dove la somma ha senso, in quanto $s(p), t(p) \in \mathcal{F}_p$ che ha struttura di gruppo. Lo zero, quindi, è

$$\begin{aligned} 0 : U &\longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p \\ p &\longmapsto 0 \in \mathcal{F}_p \end{aligned}$$

- Costruzione di j : sia $U \subseteq X$ aperto. Si definisce

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{j} & \mathcal{F}^+(U) \\ f & \longmapsto & \left(\begin{array}{l} s_f: U \longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{F}_p \\ q \longmapsto [f]_q \end{array} \right) \end{array}$$

■

Osservazione. La condizione 1. garantisce che (\mathcal{F}^+, j) è unico a meno di [isomorfismi](#).

Proposizione 2. Si ha che:

1. il prefascio \mathcal{F} soddisfa l'[assioma dell'unicità](#) se e solo se per ogni $U \subseteq X$ aperto, j_U è iniettivo;
2. j è un isomorfismo se e solo se \mathcal{F} è un fascio.

Dimostrazione. Si dimostra solo 1.

Sia $U \subseteq X$ aperto fissato. $f \in \ker j_U$ ^[222] se e solo se, per definizione, per ogni $q \in U$: $[f]_q = 0$.

Questo succede se e solo se per ogni $q \in U$ esiste $W_q \ni q$ tale che $f|_{W_q} = 0 \in \mathcal{F}(W_q)$.

Siccome $\{W_q \cap U\}_{q \in U}$ è ricoprimento aperto di U , vale l'assioma di unicità sse $f = 0$. ■

Definizione 3. Il fascio \mathcal{F}^+ è detto fascio associato al prefascio \mathcal{F} , o anche fascificato di \mathcal{F} .

776 Fascio associato ad un sottoprefascio

Osservazione. Sia \mathcal{F} un [fascio](#), e sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ un [sotto-prefascio](#).

Allora \mathcal{G} soddisfa l'[assioma dell'unicità](#), e il [fascificato](#) $\mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{F}$ è un [sottofascio](#) di \mathcal{F} :

$$\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^+ \subseteq \mathcal{F}$$

con

$$\mathcal{G}^+(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \forall p \in U \exists W \subseteq U \text{ intorno aperto di } p : s|_W \in \mathcal{G}(W)\}.$$

Dimostrazione. È necessario dimostrare che $\mathcal{G}^+(U)$ sia effettivamente (isomorfo a) l'insieme definito sopra. Si ricorda che per definizione

$$\mathcal{G}^+(U) = \left\{ s : U \rightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{G}_p \mid s(p) \in \mathcal{G}_p, \forall p \in U \exists V \subseteq U \exists f \in \mathcal{G}(V) : \forall q \in V s(q) = [f]_q \right\}$$

dove \mathcal{G}_p è la [spiga di \$\mathcal{G}\$ in \$p\$](#) .

(\supseteq): Sia $s \in \mathcal{F}(U)$ che soddisfi le condizioni di cui sopra. Si definisce

$$\begin{aligned}\tilde{s} : U &\longrightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{G}_p \\ p &\longmapsto [s|_W]_p\end{aligned}$$

per $p \in W \subseteq U$ tale che $s|_W \in \mathcal{G}(W)$.

È possibile scegliere i W in maniera tale che per ogni $q \in W$, $\tilde{s}(q) = [s|_W]_q$.

Pertanto:

- $\tilde{s}(p) = [s|_W]_p \in \mathcal{G}_p$ in quanto $s|_W \in \mathcal{G}(W)$;
- per ogni $p \in U$ esiste $W \subseteq U$ ed esiste $f = s|_W \in \mathcal{G}(W)$ tale che

$$\forall q \in W : \quad \tilde{s}(q) = [s|_W]_q.$$

Quindi $\tilde{s} \in \mathcal{G}^+(U)$.

(\subseteq): Sia $s : U \rightarrow \coprod_{p \in U} \mathcal{G}_p$ in $\mathcal{G}^+(U)$.

Per definizione, per ogni $p \in U$ esiste $V_p \subseteq U$ ed esiste $f_p \in \mathcal{G}(V_p) \subseteq \mathcal{F}(V_p)$ tali che $s(q) = [f_p]_q$ per ogni $q \in V_p$.

- Siano $p_1, p_2 \in U$ tali che $V_{p_1} \cap V_{p_2} \neq \emptyset$. Per ogni punto $q \in V_{p_1} \cap V_{p_2}$, si ha che

$$[f_{p_1}]_q = s(q) = [f_{p_2}]_q$$

e pertanto si ha l'uguaglianza tra germi: $[f_{p_1}]_q = [f_{p_2}]_q$.

Pertanto esiste $W_q \subseteq V_{p_1} \cap V_{p_2}$ tale che

$$(f_{p_1})|_{W_q} = (f_{p_2})|_{W_q}$$

$$\text{ovvero } (f_{p_1} - f_{p_2})|_{W_q} = \left((f_{p_1} - f_{p_2})|_{V_{p_1} \cap V_{p_2}} \right)|_{W_q} = 0^{[223]}.$$

Siccome $\{W_q\}_{q \in V_{p_1} \cap V_{p_2}}$ è un ricoprimento aperto di $V_{p_1} \cap V_{p_2}$, per l'[assioma di unicità](#)

$$(f_{p_1} - f_{p_2})|_{V_{p_1} \cap V_{p_2}} = 0$$

ovvero

$$(f_{p_1})|_{V_{p_1} \cap V_{p_2}} = (f_{p_2})|_{V_{p_1} \cap V_{p_2}}.$$

- Siccome $\{V_p \cap U\}_{p \in U}$ è un ricoprimento aperto di U , allora per l'[assioma di fascio](#) esiste $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ tale che

$$\forall p \in U : \quad \sigma|_{V_p} = f_p.$$

Questo σ soddisfa effettivamente le condizioni richieste: per ogni $p \in U$, esiste $V_p \subseteq U$ intorno aperto di p tale che

$$\sigma|_{V_p} = f_p \in \mathcal{G}(V_p).$$

■

777 Fascio nucleo

Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due fasci sullo spazio topologico X , e sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci.

Definizione 1. Il **fascio nucleo** di φ , indicato con $\ker \varphi$, è definito ponendo per ogni $U \subseteq X$ aperto:^[224]

$$(\ker \varphi)(U) := \ker \varphi_U \subseteq \mathcal{F}(U).$$

Proposizione 2. $\ker \varphi$ è sottofascio di \mathcal{F} .

Dimostrazione. Bisogna dimostrare le seguenti cose.

1. $(\ker \varphi)(U) \subseteq \mathcal{F}(U)$ è sottogruppo.
2. Dobbiamo dimostrare che $\ker \varphi$ definisce effettivamente un prefascio.

Siano quindi $W \subseteq U \subseteq X$ aperti. Se $f \in (\ker \varphi)(U) = \ker \varphi_U$, devo dimostrare che $f|_W \in (\ker \varphi)(W) = \ker \varphi_W$.

Ma $\varphi_U f = 0$, quindi

$$0 = \varphi_U f|_W = \varphi_W f|_W$$

e pertanto $f|_W \in \ker \varphi_W = (\ker \varphi)(W)$.

3. Si dimostra che $\ker \varphi$ soddisfi l'**assioma di esistenza di fascio**. Non è necessaria l'**unicità**, in quanto i sottoprefasci la soddisfano sempre.

Sia $U \subseteq X$ aperto, $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di U . Se $f \in \mathcal{F}(U)$ è tale che

$$\forall i : f|_{U_i} \in (\ker \varphi)(U_i)$$

vogliamo dimostrare che $f \in (\ker \varphi)(U)$.

Si consideri quindi $\varphi_U(f) \in \mathcal{G}(U)$:

$$\forall i : \varphi_U(f)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(f|_{U_i}) = 0$$

e pertanto, siccome \mathcal{G} è un fascio, allora $\varphi_U(f) = 0$. ■

778 Fascio immagine

Siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due fasci sullo spazio topologico X , e sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morfismo di fasci.

Per ogni $U \subseteq X$ aperto, $\text{Im } \varphi_U \subseteq \mathcal{G}(U)$ ^[225], e inoltre, se $W \subseteq U$

$$\rho_V^U(\text{Im } \varphi_U) \subseteq \text{Im } \varphi_V.$$

Quindi $\{\text{Im } \varphi_U\}$ è un sottoprefascio di \mathcal{G} , ma in generale non è un fascio.

Definizione 1. Si definisce il **fascio immagine** di φ , denotato con $\text{Im } \varphi$, come il **fascificato**:^[226]

$$\{\text{Im } \varphi_U\}^+ \subseteq \mathcal{G}$$

sottofascio.

Osservazione. Per ogni $U \subseteq X$ aperto, si ha che

$$(\text{Im } \varphi)(U) = \{g \in \mathcal{G}(U) \mid \forall p \in U \exists W \subseteq U \text{ intorno aperto di } p, \exists f \in \mathcal{F}(W) : g|_W = \varphi_W(f)\}.$$

779 Morfismo di fasci iniettivo

Definizione 1. Un *morfismo di fasci* si dice *iniettivo* se il suo *fascio nucleo* è il fascio nullo.

780 Morfismo di fasci suriettivo

Definizione 1. Un *morfismo di fasci* $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ si dice *suriettivo* se il suo *fascio immagine* è:

$$\text{Im } \varphi = \mathcal{G}.$$

781 Successione di morfismi

TODO sistemare tutte le proposizioni.

- Successione di R-Moduli ESATTA
- Successione di R-Moduli
- Successione di fasci esatta
- Successione di morfismi esatta
- Successione esatta di complessi di catene
- Caratterizzazione SEC
- SEC di Moduli
- Caratterizzazione funzioni tra complessi di catene tramite successioni esatte
- altri??

782 Diametro di un insieme

783 Ogni chiuso di uno spazio metrico secondo numerabile ammette un ricoprimento numerabile di diametro arbitrariamente piccolo

783.1 Proposizione

Se X è uno spazio metrico secondo numerabile, allora per ogni $U \subseteq X$ aperto e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste un ricoprimento aperto numerabile $(U_n)_{n \in \omega}$ di U tale che $\text{Cl}(U_n) \subseteq U$ e $\text{diam}(U_n) < \varepsilon$, per ogni $n \in \omega$.

783.1.1 Dimostrazione

Sia (X, d) lo spazio metrico in considerazione. Si denotino con

$$B_d(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}.$$

Siccome X è secondo numerabile allora X è separabile, e pertanto $U \subseteq X$ è separabile. Sia quindi C sottoinsieme denso di U , numerabile. Allora, per ogni $c \in C$ esiste $0 < r_c < \varepsilon$ tale che $B_d(c, r_c) \subseteq U$, poiché U aperto e quindi intorno di ogni suo punto. In particolare, si richiede che

$$r_c := \sup \left\{ r \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \mid B_d(c, r) \subseteq U \right\}.$$

Si consideri quindi:

$$\mathcal{B}_U := \left\{ B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right) \mid c \in C \right\}$$

- Sia ora $c \in C$ fissato, e sia $(x_n)_{n \in \omega} \subseteq B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right)$ successione convergente a x . Allora, siccome $d(x, x_n) < \frac{r_c}{2}$ definitivamente:

$$\begin{aligned} d(x, c) &\leq d(x, x_n) + d(x_n, c) \\ &< \frac{r_c}{2} + \frac{r_c}{2} < r_c \end{aligned}$$

e pertanto $x \in U$. Quindi, per la caratterizzazione della chiusura per successioni, $\text{cl}\left(B_d\left(c, \frac{r_c}{2}\right)\right) \subseteq U$.

- Infine, si ha che l'unione $\bigcup \mathcal{B}_U = U$. Infatti, se $y \in U \setminus C$ allora esiste $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ tale che $B_d(y, \delta) \subseteq U$. In particolare, esiste $c \in B_d(y, \delta/2) \cap C$ (poiché C è denso in U). Si ha quindi che $y \in B_d(c, \delta/2) \subseteq U$: infatti, se per assurdo esistesse $x \in B_d(c, \delta/2) \setminus U$ allora

$$\begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, c) + d(c, y) \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} < \delta \end{aligned}$$

e pertanto $x \in B_d(y, \delta) \subseteq U$. Assurdo.

Dunque $\delta/2 < \varepsilon/2$ e $B_d(c, \delta/2) \subseteq U$, e dunque $r_c \geq \delta/2$ per massimalità. Pertanto $B_d(c, r_c) \supseteq B_d(c, \delta/2) \ni y$, e quindi $y \in \bigcup \mathcal{B}_U$.

783.2 NON Proposizione

If X is a metric space, then for every open U and every $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ there is a countable covering $(U_n)_{n \in \omega}$ of U such that $\text{Cl}(U_n) \subseteq U$ (vedi Chiusura Topologica) and $\text{diam}(U_n) < \varepsilon$ (vedi Diametro di un insieme), for all $n \in \omega$

783.2.1 Controesempio

Sia $X := \mathbb{R} \times [0, 1]$, dotato della distanza:

$$d((x, t), (y, s)) := \begin{cases} 2 & x \neq y \\ |t - s| & x = y \end{cases}$$

La funzione d è realmente una distanza: per ogni $(x, t), (y, s), (z, k) \in X$

1. $d((x, t), (y, s)) \geq 0$;
2. $d((x, t), (y, s)) = 0$ se e solo se $x = y$ e $|t - s| = 0$ se e solo se $(x, t) = (y, s)$;
3. $d((x, t), (y, s)) = d((y, s), (x, t))$;
4. la diseguaglianza triangolare:

$$d((x, t), (y, s)) \leq d((x, t), (z, k)) + d((z, k), (y, s))$$

per casi:

- se $x \neq y \neq z$ allora

$$\begin{aligned} d((x, t), (y, s)) &= 2 \\ d((x, t), (z, k)) &= 2 \\ d((z, k), (y, s)) &= 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$2 = d((x, t), (y, s)) \leq d((x, t), (z, k)) + d((z, k), (y, s)) = 4$$

- se $x = y \neq z$ allora

$$\begin{aligned} d((x, t), (y, s)) &\leq 1 \\ d((x, t), (z, k)) &= 2 = d((z, k), (y, s)) \end{aligned}$$

e quindi si ha la tesi;

- se $x = z \neq y$ oppure $y = z \neq x$ (solo il primo per simmetria):

$$\begin{aligned} d((x, t), (y, s)) &= 2 \\ d((x, t), (z, k)) &= \ell \leq 1 \\ d((z, k), (y, s)) &= 2 \end{aligned}$$

e quindi

$$2 = d((x, t), (y, s)) \leq d((x, t), (z, k)) + d((z, k), (y, s)) = \ell + 2$$

- se $x = y = z$ allora

$$|t - s| \leq |t - k| + |k - s|.$$

Dunque $(\mathbb{R} \times [0, 1], d)$ è uno spazio metrico.

L'aperto $\mathbb{R} \times [0, 1]$ non ammette alcun ricoprimento $(U_n)_{n \in \omega}$ tale che, per ogni $n \in \omega$: $\text{diam}(U_n) < 1/2$. Si supponga per assurdo che esista.

Fissato U_n : per ogni $(x, t), (y, s) \in U_n$: $d((x, t), (y, s)) < 1/2$, e quindi $x = y$. Pertanto esiste $x_n \in \mathbb{R}$ tale che $U_n \subseteq \{x_n\} \times [0, 1]$.

Si ha quindi che

$$\bigcup_{n \in \omega} U_n \subseteq \{x_n \mid n \in \omega\} \times [0, 1] \subsetneq \mathbb{R} \times [0, 1]$$

e pertanto $(U_n)_{n \in \omega}$ non è un ricoprimento. Assurdo.

784 Successione di fasci esatta

Definizione 1. Data una successione di morfismi di fasci

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

diciamo che la successione è esatta in \mathcal{G} se^[227]

$$\text{Im } \varphi = \ker \psi.$$

784.1 Caratterizzazione morfismo di fasci iniettivo tramite successione esatta

Proposizione 2. Un morfismo di fasci $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è iniettivo sse la successione

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}$$

è esatta.

784.2 Caratterizzazione morfismo di fasci suriettivo tramite successione esatta

Proposizione 3. Un morfismo di fasci $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ è suriettivo sse la successione

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

è esatta.

785 Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite sezioni

Sia X uno spazio topologico, e sia

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

una successione di morfismi di fasci di gruppi.

Proposizione 1. La successione è esatta in \mathcal{G} se e solo se, per ogni $U \subseteq X$ aperto, data

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

si ha

1. $\text{Im } \varphi_U \subseteq \ker \psi_U$;
2. per ogni $g \in \ker \psi_U \subseteq \mathcal{G}(U)$, per ogni $p \in U$
 - esiste $W \subseteq U$ intorno aperto di p ;
 - esiste $f \in \mathcal{F}(W)$

tali che $g|_W = \varphi_W(f)$.

Osservazione. La condizione 1. ci dice che $\text{Im } \varphi \subseteq \ker \psi$. La condizione 2. è l'altra inclusione.

786 Spazio di Lindelöf

786.1 Definizione

Uno spazio topologico X è uno spazio di Lindelöf se e solo se ogni ricoprimento aperto $\{X_i\}$ di X ammette un sottoricoprimento numerabile.

787 Sottoricoprimento

788 Spazio topologico secondo numerabile implica Lindelöf

789 Ogni base di uno spazio topologico secondo numerabile ammette una sottobase numerabile

Si assuma AC

789.1 Teorema

Sia X uno spazio topologico secondo numerabile e sia \mathcal{B} una sua base.

Allora esiste $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ tale che

- \mathcal{B}' è una base per la topologia di X ;
- \mathcal{B}' è numerabile.

790 In Spazio metrico ogni aperto è Fsigma

790.1 Teorema

Sia X uno spazio metrico e sia $A \subseteq X$ aperto. Allora A è un insieme F_σ di X .

791 Spazio topologico secondo numerabile implica separabile

792 Sistema fondamentale di intorni in uno spazio metrico

In ogni [spazio metrico](#) (X, d) , per ogni punto x l'insieme delle palle aperte centrate in x :

$$B(x, r) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

cioè

$$\{B(x, r) \mid r > 0\},$$

forma un [sistema fondamentale di intorni](#) di x .

793 Immersione topologica

794 Compatto in un Hausdorff è chiuso

794.1 Teorema

Sia X uno [spazio topologico di Hausdorff](#) e sia $C \subseteq X$ un [compatto](#). Allora C è [chiuso](#).

794.1.1 Dimostrazione

Teorema XVIII di Geometria 2

795 Teorema di Tychonoff

796 Chiuso in un compatto è compatto

797 Spazio di Baire non è sigma-compatto

Se ω^ω (lo [Spazio di Baire](#)) fosse [σ-compatto](#), allora dovrebbe essere [definitivamente limitato](#). Ma per ogni $z \in \omega^\omega$ esiste $z' \in \omega^\omega$ tale che per ogni $n \in \omega$ esiste $m \geq n$ per cui $z'(m) > z(m)$. È sufficiente porre, per ogni $i \in \omega$: $z'(i) = z(i) + 1$.

798 Rango di Cantor-Bendixson

798.1 Definizione

798.1.1 Osservazione

$x \notin X'$ se e solo se $\{x\} \cap X$ è un aperto di X .

798.2 Proprietà di derivata e rango di Cantor-Bendixson per spazi polacchi

Sia α un ordinale limite, siano $(X_\beta)_{\beta < \alpha}$ una famiglia di spazi polacchi e sia

$$X := \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta.$$

Allora, per ogni ordinale λ :

$$X^{(\lambda)} = \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta^{(\lambda)}$$

798.2.1 Dimostrazione

Si ricorda la topologia dell'unione disgiunta: $U \subseteq \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta$ è aperto se e solo se, detta

$$\varphi_{\beta_i} : X_{\beta_i} \rightarrow \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta$$

l'iniezione canonica, per ogni $\beta_i < \alpha$ l'insieme $\varphi_{\beta_i}^{-1} \subseteq X_{\beta_i}$ è aperto.

Per induzione su λ .

- Caso base: $\lambda = 0$: banale.
- Caso base: $\lambda = 1$: bisogna dimostrare che

$$\left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta \right)' = \coprod_{\beta < \alpha} X'_\beta$$

Sia $x \in \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta$. Allora esiste un unico β_0 tale che $x \in X_{\beta_0}$.

Dunque, se $x \notin \left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta \right)'$ allora:

- per ogni $\beta \neq \beta_0$, $x \notin X_\beta$ e quindi $x \notin X'_\beta \subseteq X_\beta$;
- per β_0 , $\{x\} \subseteq X_{\beta_0}$ è aperto, e quindi $x \notin X'_{\beta_0}$;

pertanto $x \notin \coprod_{\beta < \alpha} X'_\beta$.

Viceversa, se $x \notin \coprod_{\beta < \alpha} X'_\beta$ significa che $\{x\} \subseteq X_{\beta_0}$ è aperto e pertanto per ogni $\beta < \alpha$ l'insieme $\varphi_\beta^{-1}(\{x\})$ è aperto (poiché uguale a \emptyset se $\beta \neq \beta_0$ e uguale a $\{x\}$ se $\beta = \beta_0$). Pertanto $\{x\} \subseteq \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta$ è aperto, e dunque

$$x \notin \left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta \right)'$$

- Ordinale successore: $\lambda = \gamma + 1$.

$$\begin{aligned}
X^{(\lambda)} &= \left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta \right)^{(\lambda)} = \left(\left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta \right)^{(\gamma)} \right)' \\
&= \left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta^{(\gamma)} \right)' = \coprod_{\beta < \alpha} (X_\beta^{(\gamma)})' \\
&= \coprod_{\beta < \alpha} (X_\beta^{(\gamma+1)}) = \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta^{(\lambda)}.
\end{aligned}$$

- Ordinale limite λ :

$$\begin{aligned}
X^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma < \lambda} X^{(\gamma)} = \bigcap_{\gamma < \lambda} \left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta \right)^{(\gamma)} \\
&= \bigcap_{\gamma < \lambda} \left(\coprod_{\beta < \alpha} X_\beta^{(\gamma)} \right) = \coprod_{\beta < \alpha} \bigcap_{\gamma < \lambda} X_\beta^{(\gamma)} \\
&= \coprod_{\beta < \alpha} X_\beta^{(\lambda)}
\end{aligned}$$

798.3 Esempi di spazi polacchi con rango di Cantor-Bendixson arbitrario

Recall the notion of Cantor-Bendixson rank of a [Polish space](#) from Section 1.4 in the notes for the course. For each [ordinal](#) $\alpha < \omega_1$, provide an example of a Polish space X with Cantor-Bendixson rank α . (Optional: show that such an X can always be taken as a countable space, and that if α is a successor ordinal than X can be taken to be compact.)

[Hint. To geometrically visualize the problem it is easier to work in \mathbb{R}^2 . Use a construction by transfinite recursion over α . The cases $\alpha = 0, 1$ are easy. For $\alpha = 2$ consider $X = \{x\} \cup \{x_n \mid n \in \omega\}$ with $x_n \rightarrow x$ and all x_n isolated. This suggest the strategy when $\alpha = \beta + 1$ is successor: consider a sequence of spaces of Cantor-Bendixson rank β and construe them as a sequence of spaces accumulating towards a point. For limit cases, consider the (disjoint) sum of spaces with Cantor-Bendixson rank cofinal in α .]

798.3.1 Soluzione

Si costruiscono, per ricorsione, spazi polacchi $X_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ con rango di Cantor-Bendixson α e tali che $X_\alpha^\infty = \emptyset$.

Questo garantisce che ciascun X_α sia uno spazio polacco [numerabile](#).

Caso base Per $\alpha = 0$ deve valere che $X_0^{(0)} = X_0 = \emptyset$. Pertanto si pone $X_0 = \emptyset$.

Per $\alpha = 1$ deve valere che $X_1^{(1)} = X'_1 = \emptyset$. Pertanto si pone $X_1 = \omega \subseteq \mathbb{R}$.

Ordinale successore Sia $\alpha = \beta + 1$ un ordinale successore, e sia $X_\beta \subseteq \mathbb{R}$ uno spazio polacco con rango di Cantor-Bendixson β e tale che $X_\beta^\infty = \emptyset$.

Sia $\{y_n \mid n \in \omega\} \subseteq \mathbb{R}$ una successione convergente ad $y \in \mathbb{R}$, composta da punti isolati tali che per ogni $n \in \omega$: $y_n < y$. Per ciascun $n \in \omega$ sia $U_n \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto tale che $y_n \subseteq U_n$ e che $\forall m \neq n$: $\text{Cl}(U_n) \cap \text{Cl}(U_m) = \emptyset$.

Sia ora, per ogni $n \in \omega$, $\Phi_n : \mathbb{R} \rightarrow U_n$ un omeomorfismo (è sufficiente considerare una contrazione dell'arco tangente). Siano X_n le immagini di X_β tramite Φ_n :

$$X_n := \Phi_n(X_\beta) \subseteq U_n.$$

Si definisce $X_\alpha := \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n$. Questo è spazio polacco in quanto unione numerabile di spazi polacchi.

Per induzione su $\lambda < \alpha$:

$$X_\alpha^{(\lambda)} = \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\lambda)}$$

- Caso base: per $\lambda = 0$ è banale.
- Ordinale successore: sia $\lambda < \alpha$, $\lambda = \gamma + 1$. Si dimostra che

$$\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} (X_n^{(\gamma)})' = \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right)'$$

Si consideri $x \notin \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right)', x \neq y$.

Allora $\{x\} \subseteq \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)}$ è aperto: per ogni $n \in \omega$ si ha che $\{x\} \cap X_n^{(\gamma)}$ è aperto in $X_n^{(\gamma)}$ e quindi per ogni $n \in \omega$: $x \notin (X_n^{(\gamma)})'$, ovvero

$$x \notin \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} (X_n^{(\gamma)})'.$$

Se invece per assurdo $y \notin \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right)'$ allora $\{y\} \subseteq \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)}$ è aperto e quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right) = \{y\}$$

Siano ora $y_{n_0}, y_{n_1}, y_{n_2} \in (y - \varepsilon, y + \varepsilon)$ (che esistono poiché $y_n \rightarrow y$), con $y_{n_0} < y_{n_1} < y_{n_2}$. Allora, siccome $U_{n_1} = (a, b)$ per certi $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $y_{n_0} < a$ e $b < y_{n_1} < y$, si ha:

$$U_{n_1} \subseteq (y - \varepsilon, y).$$

Siccome $\lambda < \alpha$ ovvero $\gamma + 1 < \beta + 1$ allora $\gamma < \beta$ e pertanto, per ogni $n \in \omega$: $X_n^{(\gamma)} \neq \emptyset$. Quindi

$$\emptyset \neq \Phi_{n_1}(X_\beta^{(\gamma)}) = X_{n_1}^{(\gamma)} \subseteq U_{n_1} \subseteq (y - \varepsilon, y)$$

e pertanto

$$(y - \varepsilon, y + \varepsilon) \cap \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right) \supseteq \{y\} \cup \Phi_{n_1}(X_\beta^{(\gamma)}) \supsetneq \{y\}$$

Assurdo. Quindi $y \in (\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)})'$

Viceversa, se $x \notin \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} (X_n^{(\gamma)})'$ allora per ogni $n \in \omega$:

$$x \notin (X_n^{(\gamma)})'$$

e pertanto $\{x\} \subseteq X_n^{(\gamma)}$ è aperto. Ma $X_n^{(\gamma)}$ è aperto di $\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)}$ e quindi anche $\{x\}$ lo è:

$$x \notin \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\lambda)} \right)'.$$

Si noti che per ogni $n \in \omega$ si ha che $X_n^{(\gamma)}$ è aperto di $\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)}$ poiché

$$X_n^{(\gamma)} = U_n \cap \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right)$$

dove U_n è un aperto di \mathbb{R} .

Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} X_\alpha^{(\lambda)} &= (X_\alpha^{(\gamma)})' \\ &= \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} (X_n^{(\gamma)})' = \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

- Ordinale limite: sia $\lambda < \alpha$ un ordinale limite. Allora

$$\begin{aligned} X_\alpha^{(\lambda)} &= \bigcap_{\gamma < \lambda} X_\alpha^{(\gamma)} = \bigcap_{\gamma < \lambda} \left(\{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \right) \\ &= \{y\} \cup \bigcap_{\gamma < \lambda} \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\gamma)} \\ &= \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} \bigcap_{\gamma < \lambda} X_n^{(\gamma)} = \{y\} \cup \bigcup_{n \in \omega} X_n^{(\lambda)}. \end{aligned}$$

Pertanto $X_\alpha^{(\beta)} = \{y\}$ e $X_\alpha^{(\alpha)} = \emptyset$.

Ordinale limite Sia $\alpha < \omega_1$ un ordinale limite, e sia per ogni $\beta < \alpha$: X_β uno spazio polacco con rango di Cantor-Bendixson β e tale che $X_\beta^\infty = \emptyset$.

Sia $(\beta_n)_{n \in \omega}$ una successione di ordinali cofinale in α . Senza perdita di generalità è possibile considerare ciascun X_{β_n} contenuto nell'intervallo $I_n := (n - 1/2, n + 1/2)$, per mezzo di un omeomorfismo $\mathbb{R} \rightarrow I_n$.

Allora si pone $X_\alpha := \coprod_{n < \omega} X_{\beta_n}$, $X_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ è uno spazio polacco in quanto unione numerabile di spazi polacchi.

Inoltre $X_\alpha^\infty = \emptyset$ e X ha rango di Cantor-Bendixson α . Infatti, per ogni $\lambda < \alpha$ esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta_{n_0} > \lambda$ per cofinalità di $(\beta_n)_{n \in \omega}$ e pertanto:

$$X_\alpha^{(\lambda)} = \coprod_{n < \omega} X_{\beta_n}^{(\lambda)} \supseteq X_{\beta_{n_0}}^{(\lambda)} \neq \emptyset$$

mentre

$$X_\alpha^{(\alpha)} = \coprod_{n < \omega} X_{\beta_n}^{(\alpha)} = \coprod_{n < \omega} \emptyset = \emptyset. \quad \blacksquare$$

799 Punto isolato

Definizione 1. Sia X uno spazio topologico e sia $S \subseteq X$. $x_0 \in S$ si dice **punto isolato di S** se esiste U intorno aperto di x_0 in X tale che $S \cap U = \{x_0\}$.

Equivalentemente, x_0 è un punto isolato di S se $\{x_0\}$ è aperto nella topologia di sottospazio di S .

Proposizione 2. Sia $x_0 \in S$. Sono fatti equivalenti:

1. x_0 è un punto isolato di S ;
2. x_0 non è un punto di accumulazione per S .

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): Sia U l'intorno aperto di x_0 in X tale che

$$U \cap S = \{x_0\}.$$

Allora $(U \setminus \{x_0\}) \cap S = \emptyset$, e pertanto x_0 non è un punto di accumulazione.

(2. \Rightarrow 1.): Siccome x_0 non è un punto di accumulazione per S , allora esiste U intorno aperto di x_0 tale che

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap S = \emptyset$$

Siccome $x_0 \in U$ e $x_0 \in S$, allora

$$U \cap S = \{x_0\}. \quad \blacksquare$$

Definizione 3. Il punto x_0 si dice **punto isolato di X** se $\{x_0\}$ è un aperto di X .

800 Caratterizzazione insieme mai denso

800.1 Proposizione

Prove that for every topological space X and every $A \subseteq X$, the following are equivalent:

1. The set A is nowhere dense, i.e. there is no open set $U \subseteq X$ such that $A \cap U$ is dense in U .
2. The closure of A has empty interior.
3. There is an open dense set $V \subseteq X$ such that $A \cap V = \emptyset$.

Conclude that $B \subseteq X$ is comeager if and only if it contains a countable intersection of dense open sets.

800.1.1 Dimostrazione

a implica b Sia $B := \text{Cl}_X(A)$, e sia per assurdo $b \in \mathring{B}$. Allora esiste $U \subseteq B$ aperto di X tale che $b \in U$.

Claim: $A \cap U$ è denso in U , ovvero $U \subseteq \text{Cl}_X(A \cap U)$.

Sia $x \in U$ e sia V un intorno aperto di x in X . Si vuole dimostrare che $V \cap (A \cap U) \neq \emptyset$.

- L'insieme $W := U \cap V$ è un intorno aperto di x .
- Siccome $x \in U \subseteq \text{Cl}_X(A)$, allora $A \cap W \neq \emptyset$.
- Allora

$$\emptyset \neq W \cap A = (V \cap U) \cap A = V \cap (A \cap U)$$

Per l'arbitrarietà di V , si è dimostrato che $x \in \text{Cl}_X(A \cap U)$, ovvero che $A \cap U$ è denso in U . Questo contraddice l'ipotesi.

b implica c Sia $V := X \setminus \text{Cl}_X(A)$. Allora V è denso, in quanto il suo complementare $\text{Cl}_X(A)$ ha parte interna vuota (per ipotesi).

L'insieme V è aperto poiché complementare di un chiuso, e inoltre $A \cap V = \emptyset$.

c implica a Sia per assurdo $U \subseteq X$ un aperto non vuoto tale che $\text{Cl}_U(A \cap U) = U$.

Poiché V è denso in X , $U \cap V \neq \emptyset$ aperto di X e quindi aperto di U . Ma

$$(U \cap V) \cap (A \cap U) = U \cap (V \cap A) = \emptyset$$

poiché $V \cap A = \emptyset$.

Assurdo, poiché se $A \cap U$ è denso in U , allora $A \cap U$ incontra ogni aperto di U .

Caratterizzazione degli insiemi comagri

- Se B è comagro, allora si può scrivere:

$$B := X \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} A_n \right)$$

dove A_n è un insieme mai denso:

$$B = \bigcap_{n \in \omega} (X \setminus A_n).$$

Per ogni $n \in \omega$ esiste V_n aperto denso di X tale che $A_n \cap V_n = \emptyset$, ovvero $V_n \subseteq X \setminus A_n$:

$$B = \bigcap_{n \in \omega} (X \setminus A_n) \supseteq \bigcap_{n \in \omega} V_n$$

- Viceversa, siano $V_n \subseteq X$ insiemi aperti e densi tali che

$$B \supseteq \bigcap_{n \in \omega} V_n$$

Si ha quindi $X \setminus B \subseteq X \setminus \left(\bigcap_{n \in \omega} V_n \right) = \bigcup_{n \in \omega} (X \setminus V_n)$.

Allora $A_n := X \setminus V_n$ è mai denso per la caratterizzazione di cui sopra, e pertanto

$$C := \bigcup_{n \in \omega} A_n$$

è un insieme magro. Pertanto $X \setminus B \subseteq C$ è un insieme magro, e quindi B è un insieme comagro. ■

801 Insieme mai denso

Sia X uno spazio topologico, e sia $A \subseteq X$ (vedi Sottospazio topologico). L'insieme A si dice mai denso se non esiste $U \subseteq X$ aperto tale che $A \cap U$ è denso in U .

802 Proprietà della gerarchia di Borel

802.1 Proposizione

Let X be a metrizable topological space. Prove by induction on $1 \leq \alpha < \omega_1$ that:

1. $\Sigma_\alpha^0(X)$ is closed under countable unions and finite intersections;
2. $\Pi_\alpha^0(X)$ is closed under countable intersections and finite unions;
3. $\Delta_\alpha^0(X)$ is a Boolean algebra, i.e., it is closed under complements, finite unions, and finite intersections.

802.1.1 Dimostrazione

Caso base: $\alpha = 1$

1. Unione di aperti è aperta e intersezione finita di aperti è aperta.
2. Intersezione di chiusi è chiusa e unione finita di chiusi è chiusa.
3. Il complementare di un clopen è ancora un clopen, così come unioni e intersezioni finite.

Passo induttivo Sia l'enunciato vero per ogni $\beta < \alpha$.

1. Classi additive

- Siano, per ogni $n \in \omega$, $A_n \in \Sigma_\alpha^0(X)$. Per definizione, per ogni $n \in \omega$, esistono degli $A_n^m \in \Pi_{\beta_n^m}^0(X)$, con $\beta_n^m < \alpha$, tali che

$$A_n = \bigcup_{m \in \omega} A_n^m$$

Allora si ha che

$$\bigcup_{n \in \omega} A_n = \bigcup_{n, m \in \omega} A_n^m$$

che è ancora una unione numerabile, ed è quindi un elemento di $\Sigma_\alpha^0(X)$.

- Siano $U, V \in \Sigma_\alpha^0(X)$. Per definizione esistono degli $U_n \in \Pi_{\beta_n^U}^0(X)$ e degli $V_m \in \Pi_{\beta_m^V}^0(X)$, con $\beta_n^U, \beta_m^V < \alpha$ tali che

$$U = \bigcup_{n \in \omega} U_n, \quad V = \bigcup_{m \in \omega} V_m$$

Detto $\beta_{n,m} := \max \{\beta_n^U, \beta_m^V\} < \alpha$, si ha che

$$U \cap V = \left(\bigcup_{n \in \omega} U_n \right) \cap \left(\bigcup_{m \in \omega} V_m \right) = \bigcup_{n, m \in \omega} (U_n \cap V_m)$$

Per ipotesi induttiva, per ogni n, m si ha $U_n \cap V_m \in \Pi_{\beta_{n,m}}^0(X)$ e pertanto $U \cap V \in \Sigma_\alpha^0(X)$

2. Classi moltiplicative

- Siano, per ogni $n \in \omega$, $A_n \in \Pi_\alpha^0(X)$. Per definizione, per ogni $n \in \omega$, esistono degli $A_n^m \in \Sigma_{\beta_n^m}^0(X)$, con $\beta_n^m < \alpha$, tali che

$$A_n = \bigcap_{m \in \omega} A_n^m$$

Allora si ha che

$$\bigcap_{n \in \omega} A_n = \bigcap_{n, m \in \omega} A_n^m$$

che è ancora una intersezione numerabile, ed è quindi un elemento di $\Pi_\alpha^0(X)$.

- Siano $U, V \in \Pi_\alpha^0(X)$. Allora $(X \setminus U), (X \setminus V) \in \Sigma_\alpha^0(X)$

$$X \setminus (U \cup V) = (X \setminus U) \cap (X \setminus V)$$

e siccome $\Sigma_\alpha^0(X)$ è chiuso per intersezioni finite, allora $X \setminus (U \cup V)$ è un elemento di $\Sigma_\alpha^0(X)$, ovvero

$$U \cup V \in \Pi_\alpha^0(X).$$

3. Classi ambigue

- Sia $U \in \Delta_\alpha^0(X)$. Allora $U \in \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X)$, ovvero esistono

$$A_n \in \Pi_{\beta_n}^0(X), \quad B_m \in \Sigma_{\beta^m}^0(X)$$

con $\beta_n, \beta^m < \alpha$ tali che

$$U = \bigcup_{n \in \omega} A_n, \quad U = \bigcap_{m \in \omega} B_m.$$

Pertanto si ha che

$$\begin{aligned} X \setminus U &= X \setminus \left(\bigcup_{n \in \omega} A_n \right) = \bigcap_{n \in \omega} (X \setminus A_n) \\ X \setminus U &= X \setminus \left(\bigcap_{m \in \omega} B_m \right) = \bigcup_{m \in \omega} (X \setminus B_m) \end{aligned}$$

Se $A_n \in \Pi_{\beta_n}^0(X)$ allora $X \setminus A_n \in \Sigma_{\beta_n}^0(X)$, e pertanto $X \setminus U \in \Sigma_\alpha^0(X)$.

Se $B_m \in \Sigma_{\beta^m}^0(X)$ allora $X \setminus B_m \in \Pi_{\beta^m}^0(X)$, e pertanto $X \setminus U \in \Pi_\alpha^0(X)$.

Dunque $X \setminus U \in \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X) = \Delta_\alpha^0(X)$.

- Siccome sia $\Pi_\alpha^0(X)$ che $\Sigma_\alpha^0(X)$ sono chiusi per unioni e intersezioni finite, allora

$$\Pi_\alpha^0(X) \cap \Sigma_\alpha^0(X) = \Delta_\alpha^0(X)$$

è chiuso per unioni e intersezioni finite. ■

803 Gerarchia di Borel

804 Proprietà insiemi magri, comagri, non magri

804.1 Proposizione

Prove that for every topological space X , the following are equivalent:

1. Every nonempty open subset of X is non-meager.
2. Every comeager set in X is dense.
3. The intersection of countably many dense open subsets of X is dense.

804.1.1 Dimostrazione

a. implica b. Sia $A \subseteq X$ un insieme comagro: pertanto $X \setminus A$ è magro. Se per assurdo A non è denso, allora esiste $U \subseteq X$ aperto tale che $A \cap U = \emptyset$, ovvero $U \subseteq X \setminus A$.

Dunque U è sottoinsieme di un magro, e pertanto è magro. Assurdo.

b. implica c. Sia $\{U_n \mid n \in \omega\}$ una collezione di aperti densi di X , e sia, per ogni $n \in \omega$, $F_n := X \setminus U_n$.

Per la caratterizzazione di cui sopra, gli F_n sono mai densi, e pertanto $\bigcup_{n \in \omega} F_n$ è magro per definizione

Siccome

$$X \setminus \bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcup_{n \in \omega} F_n$$

allora $\bigcap_{n \in \omega} U_n$ è comagro, e quindi è denso.

c. implica a. Sia $U \subseteq X$ aperto, magro. Per definizione, allora, esistono, per ogni $n \in \omega$, $A_n \subseteq X$ mai densi tali che

$$U = \bigcup_{n \in \omega} A_n.$$

Sia quindi $B_n := X \setminus \text{Cl}_X(A_n)$: questo è aperto poiché complementare di un chiuso, ed è denso, in quanto il suo complementare ha interno vuoto (per la caratterizzazione dell'esercizio precedente).

Pertanto $\bigcap_{n \in \omega} B_n$ è denso. Inoltre

$$\bigcap_{n \in \omega} B_n = X \setminus \bigcup_{n \in \omega} \text{Cl}_X(A_n) \subseteq X \setminus A_n = X \setminus U$$

Pertanto $U \cap (\bigcap_{n \in \omega} B_n) = \emptyset$. Siccome $\bigcap_{n \in \omega} B_n$ è denso, allora $U = \emptyset$.

Segue che ogni aperto non vuoto di X è non magro. ■

805 Classi ambigue di un sottospazio polacco nella gerarchia di Borel

805.1 Proposizione

Let $Y \subseteq X$ be Polish spaces. Show that for every $\alpha \geq 3$,

$$\Delta_\alpha^0(Y) = \Delta_\alpha^0(X) \upharpoonright Y,$$

where as usual $\Delta_\alpha^0(X) \upharpoonright Y = \{A \cap Y \mid A \in \Delta_\alpha^0(X)\}$.

805.1.1 Dimostrazione

Si richiama il Lemma 2.1.5(vi):

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha^0(Y) &= \Sigma_\alpha^0(X) \upharpoonright Y; \\ \Pi_\alpha^0(Y) &= \Pi_\alpha^0(X) \upharpoonright Y.\end{aligned}$$

Inclusione “ \subseteq ” Sia $A \in \Delta_\alpha^0(Y) = \Sigma_\alpha^0(Y) \cap \Pi_\alpha^0(Y)$. Allora esistono $B \in \Sigma_\alpha^0(X)$ e $C \in \Pi_\alpha^0(X)$ tali che

$$A = B \cap Y, \quad A = C \cap Y$$

Siccome $Y \subseteq X$ è polacco, allora Y è un sottoinsieme $\textcolor{blue}{G}_\delta$ di X , ovvero $Y \in \Pi_2^0(X)$. Poiché $\alpha \geq 3$, $\Pi_2^0(X) \subseteq \Pi_\alpha^0(X)$, $\Sigma_\alpha^0(X)$: $Y \in \Sigma_\alpha^0(X)$ e $Y \in \Pi_\alpha^0(X)$, e quindi, poiché entrambe le classi $\Sigma_\alpha^0(X)$, $\Pi_\alpha^0(X)$ sono chiuse per intersezioni finite:

$$A = B \cap Y \in \Sigma_\alpha^0(X), \quad A = C \cap Y \in \Pi_\alpha^0(X)$$

ovvero $A \in \Delta_\alpha^0(X)$. Inoltre $A \subseteq Y$, e pertanto

$$A = A \cap Y \in \Delta_\alpha^0(X) \upharpoonright Y = \{V \cap Y \mid V \in \Delta_\alpha^0(X)\}.$$

Inclusione “ \supseteq ” Sia $A \in \Delta_\alpha^0(X)$, ovvero $A \cap Y \in \Delta_\alpha^0(X) \upharpoonright Y$.

Allora

- $A \in \Sigma_\alpha^0(X)$, e quindi $A \cap Y \in \Sigma_\alpha^0(Y)$;
- $A \in \Pi_\alpha^0(X)$, e quindi $A \cap Y \in \Pi_\alpha^0(Y)$.

Pertanto

$$(A \cap Y) \in \Sigma_\alpha^0(Y) \cap \Pi_\alpha^0(Y) = \Delta_\alpha^0(Y).$$

■

806 Classe di Borel dell'insieme dei punti di derivabilità di una funzione reale

806.1 Proprietà

Given a continuous function $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, let

$$D_f = \{x \in [0, 1] \mid f' \text{ exists}\}.$$

(At endpoints we take one-sided derivatives.) Prove that $D_f \in \Pi_3^0([0, 1])$.

806.1.1 Dimostrazione

Si ha che $x \in D_f$ se e solo se $x \in [0, 1]$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che per ogni $p, q \in [0, 1]$:

$$0 < |p - x|, |q - x| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \varepsilon$$

se e solo se $x \in [0, 1]$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ esiste $\delta \in \mathbb{Q}^+$ tale che per ogni $p, q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$:

$$0 < |p - x|, |q - x| < \delta \rightarrow \left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \varepsilon$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} 0 < |p - x| \wedge |p - x| < \delta \\ \wedge \\ 0 < |q - x| \wedge |q - x| < \delta \end{pmatrix} \rightarrow \left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \varepsilon$$

ovvero

$$\neg \begin{pmatrix} 0 < |p - x| \wedge |p - x| < \delta \\ \wedge \\ 0 < |q - x| \wedge |q - x| < \delta \end{pmatrix} \vee \left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \varepsilon$$

ovvero

$$\begin{aligned} 0 &\geq |p - x| \vee |p - x| \geq \delta \vee 0 \geq |q - x| \vee \\ &\vee |q - x| \geq \delta \vee \left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Siano quindi

$$\begin{aligned} A_p &:= \{x \in [0, 1] \text{ t.c. } |p - x| = 0\} = \{p\} \\ B_{p,\delta} &:= \{x \in [0, 1] \text{ t.c. } |p - x| \geq \delta\} \\ C_q &:= \{x \in [0, 1] \text{ t.c. } |q - x| = 0\} = \{q\} \\ D_{q,\delta} &:= \{x \in [0, 1] \text{ t.c. } |q - x| \geq \delta\} \\ E_{p,q}^\varepsilon &:= \left\{ x \in [0, 1] \text{ t.c. } \left| \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x} \right| \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

Vale dunque l'uguaglianza

$$D_f = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}^+} \bigcap_{p, q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} A_p \cup B_{p,\delta} \cup C_q \cup D_{q,\delta} \cup E_{p,q}^\varepsilon,$$

e pertanto:

- l'insieme $V_{p,q}^{\varepsilon,\delta} := A_p \cup B_{p,\delta} \cup C_q \cup D_{q,\delta} \cup E_{p,q}^\varepsilon$ è chiuso:
 - i $B_{p,\delta}$ e $D_{q,\delta}$ sono chiusi;

– si consideri ora la funzione continua:

$$F : [0, 1] \setminus \{p, q\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{f(p) - f(x)}{p - x} - \frac{f(q) - f(x)}{q - x}$$

pertanto $E_{p,q}^\varepsilon = F^{-1}([- \varepsilon, \varepsilon])$ è un chiuso di $[0, 1] \setminus \{p, q\}$; esiste pertanto un **chiuso** W di $[0, 1]$ tale che

$$E_{p,q}^\varepsilon = ([0, 1] \setminus \{p, q\}) \cap W = W \setminus \{p, q\}$$

e pertanto

$$W = E_{p,q}^\varepsilon \cup \{p, q\} = E_{p,q}^\varepsilon \cup A_p \cup C_q;$$

- l'insieme $\bigcap_{p,q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} V_{p,q}^{\varepsilon,\delta}$ è chiuso, poiché intersezione di chiusi;
- l'insieme $\bigcup_{\delta \in \mathbb{Q}^+} \bigcap_{p,q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} V_{p,q}^{\varepsilon,\delta}$ è un $\Sigma_2^0(X)$, poiché unione numerabile di chiusi;
- l'insieme D_f è un $\Pi_3^0(X)$ poiché è intersezione numerabile di $\Sigma_2^0(X)$. ■

807 Insieme magro

Sia X uno [spazio topologico](#)

807.1 Definizione

- Un [sottoinsieme](#) $A \subseteq X$ è magro se può essere scritto come [unione numerabile](#) di insiemi [mai densi](#).
 - Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è comagro se il suo [complementare](#) è magro.
- Equivalentemente, A è comagro se e solo se contiene l'[intersezione](#) di una quantità numerabile di aperti [densi](#).

807.2 Definizione

Sia $U \subseteq X$ un aperto.

- Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice magro in U se $A \cap U$ è magro;
- Un sottoinsieme $A \subseteq X$ è comagro in U se $U \setminus A$ è magro, ovvero se esiste una sequenza di aperti [densi](#) in U la cui intersezione è contenuta in A .

Si noti che queste definizioni sono equivalenti a richiedere che $U \cap A$ sia, rispettivamente, magro e comagro nella topologia di sottospazio di U .

808 Caratterizzazione dei punti non isolati di uno spazio polacco

808.1 Proposizione

Prove that for any Polish space X and $x \in X$, the singleton $\{x\}$ is Π_1^0 -complete if and only if x is not isolated in X . Conclude that the set

$$C_1 = \{x \in 2^\omega \mid \exists n (x(n) = 0)\}$$

from Proposition 2.1.31 of the notes is Σ_1^0 -complete.

808.1.1 Dimostrazione

Siccome X è uno spazio metrizzabile, allora $\{x\} \subseteq X$ è chiuso, e pertanto $\{x\} \in \Pi_1^0(X)$. Bisogna quindi dimostrare che $\{x\}$ è Π_1^0 -hard sse x è **non isolato** in X .

Implicazione “ \rightarrow ” Sia $C \in \Pi_1^0(\omega^\omega)$, e sia $f : \omega^\omega \rightarrow X$ continua tale che

$$f^{-1}(x) = C.$$

Si supponga per assurdo che x sia isolato. Allora $\{x\} \subseteq X$ è aperto, e quindi $C \subseteq \omega^\omega$ è aperto (retroimmagine continua di un aperto).

Per l'arbitrarietà di C , questo implica che ogni chiuso di ω^ω è un clopen. Inoltre, se $A \subseteq \omega^\omega$ è aperto, allora $\omega^\omega \setminus A$ è chiuso e quindi clopen, e pertanto A è un chiuso:

$$\Sigma_1^0(\omega^\omega) = \Delta_1^0(\omega^\omega) = \Pi_1^0(\omega^\omega).$$

Questo contraddice il Theorem 2.1.17 delle note.

Implicazione “ \leftarrow ” **Modificato** Sia $x \in X$ un punto non isolato, ovvero x un punto di accumulazione di X , e sia $B \in \Pi_1^0(\omega^\omega)$.

- Si fissi $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ una metrica completa su X .
- Siccome x è un punto di accumulazione di X , allora esiste una successione $(y_n)_{n \in \omega} \subseteq X \setminus \{x\}$ tale che $y_n \rightarrow x$, ovvero, per ogni intorno U di x esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j \geq N$, $y_j \in U$.
- Si costruisce $\{U_n\}_{n \in \omega}$ una famiglia di aperti di X tali che
 - per ogni $n \in \omega$: $U_n \setminus \{x\} \neq \emptyset$;
 - l'intersezione $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}$;
 - $\text{diam}(U_n) \rightarrow 0$;
 - per ogni $n \in \omega$: $\text{Cl}(U_{n+1}) \subsetneq U_n$

e una successione $v_n \subseteq X \setminus \{x\}$ tale che $v_n \in U_n \setminus \text{Cl}(U_{n+1})$.

Sia $U_0 = X$. Si supponga di aver costruito U_n , e sia $\alpha \in U_n \setminus \{x\}$. Tale α esiste, poiché esistono infiniti elementi della successione $(y_j)_{j \in \omega}$ dentro U_n intorno di x .

Detto $r := \min \{2^{-n-1}, d(x, \alpha)/2\} > 0$, sia $U'_n := B_d(x, r)$. Necessariamente $\alpha \notin U'_n$ e $U'_n \subsetneq U_n$.

È quindi possibile porre $U_{n+1} := B_d(x, r/2)$:

$$\text{Cl}(U_{n+1}) = \text{Cl}(B_d(x, r/2)) \subseteq B_d^{\text{cl}}(x, r/2) \subseteq B_d(x, r) = U'_n \subsetneq U_n.$$

Si ponga inoltre $v_n := \alpha$, $v_n \in U_n \setminus \text{Cl}(U_{n+1})$.

Questa famiglia soddisfa tutte le proprietà elencate.

- Siccome B è un chiuso di ω^ω , allora esiste un albero potato $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $B = [T]$, i.e.

$$B = \{\alpha \in \omega^\omega \mid \forall n \in \omega (\alpha \upharpoonright n \in T)\}$$

- Si costruisce un ω -schema $\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ su X :
 - se $s \in T$, allora $B_s := U_{\text{lh}(s)}$; in particolare, quindi $\emptyset \in T$ e $B_\emptyset = U_0 = X$;
 - se $s \notin T$, sia j_s il più grande indice tale che $s \upharpoonright j_s \in T$; si pone $B_s := \{v_{j_s}\}$.
- Questo definisce effettivamente uno schema tale che $\text{Cl}(B_{s \frown a}) \subseteq B_s$ e ciascun $B_s \neq \emptyset$: pertanto è indotta una funzione continua totale (per il Lemma 1.3.6)

$$F : \omega^\omega \rightarrow X$$

- Resta da mostrare che $F^{-1}(x) = B$. Questo per definizione garantisce che $\{x\}$ sia un Π_1^0 -hard.

Per ogni $\beta \in B$,

$$F(\beta) \in \bigcap_{n \in \omega} B_{\beta \upharpoonright n}$$

dove $\beta \upharpoonright n \in T$. Quindi $B_{\beta \upharpoonright n} = U_n$. Quindi

$$F(\beta) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}.$$

Viceversa, se $\beta \notin B$, allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta \upharpoonright n_0 \notin T$ e pertanto

$$F(\beta) \in \bigcap_{n \in \omega} B_{\beta \upharpoonright n} \subseteq B_{\beta \upharpoonright n_0}$$

e per costruzione $x \notin B_{\beta \upharpoonright n_0}$.

Insieme C_1 Dal momento che $\Sigma_1^0 = \check{\Pi}_1^0$ segue che C_1 è Σ_1^0 -completo se e solo se $2^\omega \setminus C_1$ è Π_1^0 -completo.

Si ha che $x \in 2^\omega \setminus C_1$ se e solo se per ogni $n \in \omega$, $x(n) \neq 0$, ovvero $x(n) = 1$.

Pertanto $2^\omega \setminus C_1 = \{u\}$, dove

$$\begin{aligned} u : \omega &\longrightarrow 2 \\ n &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

Per la caratterizzazione di cui sopra, C_1 è Σ_1^0 -completo se e solo se u non è un punto isolato di 2^ω .

Si consideri ora la successione $(x_n)_{n \in \omega} \subseteq 2^\omega$:

$$x_n(j) = \begin{cases} 1 & j < n \\ 0 & j \geq n \end{cases}$$

Si ha che $x_n \rightarrow u$, e pertanto u non è un punto isolato di 2^ω (per ogni intorno I di u esiste $N \in \omega$ tale che $x_N \in I \setminus \{u\}$). \blacksquare

809 Caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi ma non aperti di un polacco

809.1 Proposizione

Prove that for any Polish space and $A \subseteq X$, if A is not open then it is Π_1^0 -hard. Conclude that a set A is truly closed (i.e. closed but not open) if and only if it is Π_1^0 -complete, and similarly for Σ_1^0 .

809.1.1 Dimostrazione

Non aperti sono Π_1^0 -hard Modificato Sia A un insieme non aperto, e sia $C \subseteq \omega^\omega$ un chiuso fissato.

Sia dunque $a_0 \in A \setminus \text{Int}(A)$. In particolare, quindi $a_0 \in \text{Cl}(X \setminus A) = A \setminus \text{Int}(A)$.

- Si fissi $d : X \rightarrow \mathbb{R}$ una metrica completa su X .
- Siccome $a_0 \in \text{Cl}(X \setminus A)$, allora esiste una successione $(y_n)_{n \in \omega} \subseteq X \setminus A$ tale che $y_n \rightarrow a_0$, ovvero, per ogni intorno U di a_0 esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j \geq N$, $y_j \in U$.
- Si costruisce $\{U_n\}_{n \in \omega}$ una famiglia di aperti di X tali che
 - per ogni $n \in \omega$: $U_n \setminus \{a_0\} \neq \emptyset$;
 - l'intersezione $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \{a_0\}$;
 - $\text{diam}(U_n) \rightarrow 0$;
 - per ogni $n \in \omega$: $\text{Cl}(U_{n+1}) \subsetneq U_n$

e una successione $v_n \subseteq X \setminus A$ tale che $v_n \in U_n \setminus \text{Cl}(U_{n+1})$.

Sia $U_0 = X$. Si supponga di aver costruito U_n , e sia $\alpha \in U_n \setminus A$. Tale α esiste, poiché esistono infiniti elementi della successione $(y_j)_{j \in \omega}$ dentro U_n intorno di a_0 , e tutti questi elementi non appartengono ad A .

Detto $r := \min\{2^{-n-1}, d(a_0, \alpha)/2\} > 0$, sia $U'_n := B_d(a_0, r)$. Necessariamente $\alpha \notin U'_n$ e $U'_n \subsetneq U_n$.

È quindi possibile porre $U_{n+1} := B_d(a_0, r/2)$:

$$\text{Cl}(U_{n+1}) = \text{Cl}(B_d(a_0, r/2)) \subseteq B_d^{\text{cl}}(a_0, r/2) \subseteq B_d(a_0, r) = U'_n \subsetneq U_n.$$

Si ponga inoltre $v_n := \alpha$, $v_n \in U_n \setminus \text{Cl}(U_{n+1})$, $v_n \notin A$.

Questa famiglia soddisfa tutte le proprietà elencate.

- Siccome C è un chiuso di ω^ω , allora esiste un albero potato $T \subseteq \omega^{<\omega}$ tale che $C = [T]$, i.e.

$$C = \{\alpha \in \omega^\omega \mid \forall n \in \omega (\alpha \upharpoonright n \in T)\}$$

- Si costruisce un ω -schema $\{B_s \mid s \in \omega^{<\omega}\}$ su X :

- se $s \in T$, allora $B_s := U_{\text{lh}(s)}$; in particolare, quindi $\emptyset \in T$ e $B_\emptyset = U_0 = X$;
- se $s \notin T$, sia j_s il più grande indice tale che $s \upharpoonright j_s \in T$; si pone $B_s := \{v_{j_s}\}$.

- Questo definisce effettivamente uno schema tale che $\text{Cl}(B_{s \frown a}) \subseteq B_s$ e ciascun $B_s \neq \emptyset$: pertanto è indotta una funzione continua totale (per il Lemma 1.3.6)

$$F : \omega^\omega \rightarrow X$$

- Resta da mostrare che $F^{-1}(A) = C$. Questo per definizione garantisce che A sia un Π_1^0 -hard.

Per ogni $\beta \in C$,

$$F(\beta) \in \bigcap_{n \in \omega} B_{\beta \upharpoonright n}$$

dove $\beta \upharpoonright n \in T$. Quindi $B_{\beta \upharpoonright n} = U_n$. Quindi

$$F(\beta) \in \bigcap_{n \in \omega} U_n = \{a_0\} \subseteq A.$$

Viceversa, se $\beta \notin C$, allora esiste $n_0 \in \omega$ tale che $\beta \upharpoonright n_0 \notin T$ e pertanto

$$F(\beta) \in \bigcap_{n \in \omega} B_{\beta \upharpoonright n} \subseteq B_{\beta \upharpoonright n_0}$$

e per costruzione, siccome $B_{\beta \upharpoonright n_0} = \{v_m\}$ per qualche $m \in \omega$, e $v_m \notin A$ per costruzione, allora

$$A \cap B_{\beta \upharpoonright n_0} = \emptyset$$

e pertanto $F(\beta) \notin A$.

Caratterizzazione dei chiusi ma non aperti

- Se A è chiuso ma non aperto, allora A è Π_1^0 -hard e inoltre $A \in \Pi_1^0$. Per definizione, quindi A è un Π_1^0 -completo.

Viceversa, se A è un chiuso Π_1^0 -hard, si supponga per assurdo che sia aperto. Allora, per ogni $B \in \Pi_1^0(\omega^\omega)$ esiste una funzione continua $F : \omega^\omega \rightarrow X$ tale che $F^{-1}(A) = B$, ovvero $B \in \Sigma_1^0$. Si avrebbe quindi che ogni chiuso di ω^ω sia un clopen. Come argomentato nell'[esercizio precedente](#), questo genera un assurdo.

- L'insieme A è aperto ma non chiuso se e solo se $X \setminus A$ è chiuso ma non aperto, se e solo se $X \setminus A$ è Π_1^0 -completo per il punto precedente.

Per il Lemma 2.1.23, $X \setminus A$ è Π_1^0 -completo se e solo se A è $\check{\Pi}_1^0$ -completo, ma (per l'Example 2.1.10)

$$\check{\Pi}_1^0 = \Sigma_1^0$$

e pertanto A è aperto ma non chiuso se e solo se A è Σ_1^0 -completo. ■

810 Esempi di sottoinsiemi pi03 completi

810.1 Esercizio 3

Prove that the sets

$$C_0 = c_0 \cap [0, 1]^\omega = \{(x_n)_{n \in \omega} \in [0, 1]^\omega \mid x_n \rightarrow 0\}$$

$$C = \{(x_n)_{n \in \omega} \in [0, 1]^\omega \mid (x_n)_{n \in \omega} \text{ converges}\}$$

are both Π_3^0 -complete.

Hint. For the hardness part, compare these sets with the Π_3^0 -complete set C_3 from Exercise 2.1.27 in the notes.

810.1.1 Soluzione

C_0 e C sono degli insiemi Π_0^3 .

1. Insieme C_0 .

Si ha che $(x_j)_{j \in \omega} \in C_0$ se e solo se $(x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega$ e:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n > N \ (|x_n| \leq \varepsilon)$$

ovvero, se $U_{n, \varepsilon} := \{(x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega : |x_n| \leq \varepsilon\}$, allora

$$C_0 = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n > N} U_{n, \varepsilon}.$$

Quindi, dette $\pi_m : [0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]$ le m -esime proiezioni (continue per definizione di topologia prodotto):

$$U_{n, \varepsilon} = \pi_n^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

e pertanto $U_{n,\varepsilon}$ è chiuso. Per il Lemma 2.1.5:

$$\begin{aligned} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} &\in \Pi_1^0 \\ \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} &\in \Sigma_2^0 \\ C_0 = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n>N} U_{n,\varepsilon} &\in \Pi_3^0. \end{aligned}$$

e si ottiene che $C_0 \in \Pi_3^0([0, 1]^\omega)$.

2. Insieme C .

Si ha che $(x_j)_{j \in \omega} \in C$ se e solo se $(x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega$ e

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N (|x_n - x_m| \leq \varepsilon)$$

ovvero, se $V_{m,n}^\varepsilon := \{(x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega : |x_n - x_m| \leq \varepsilon\}$, allora

$$C = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n, m > N} V_{n,m}^\varepsilon.$$

Poiché la funzione $(\pi_n - \pi_m) : [0, 1]^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora

$$V_{n,m}^\varepsilon := (\pi_n - \pi_m)^{-1}([-\varepsilon, \varepsilon])$$

e quindi $V_{n,m}^\varepsilon$ è chiuso. Per il Lemma 2.1.5:

$$\begin{aligned} \bigcap_{n, m > N} V_{n,m}^\varepsilon &\in \Pi_1^0 \\ \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n, m > N} V_{n,m}^\varepsilon &\in \Sigma_2^0 \\ C = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n, m > N} V_{n,m}^\varepsilon &\in \Pi_3^0 \end{aligned}$$

e si ottiene che $C \in \Pi_3^0([0, 1]^\omega)$.

Hardness È noto (Esercizio 2.1.27) che l'insieme $C_3 := \{x \in \omega^\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = \infty\}$ sia Π_3^0 -hard. Pertanto si cercano delle funzioni continue

$$\omega^\omega \xrightarrow{F} [0, 1]^\omega \xrightarrow{G} [0, 1]^\omega$$

tali che

$$F^{-1}(C_3) = C_0, \quad G^{-1}(C) = C_0.$$

Questo, per mezzo del Lemma 2.1.23, garantisce che C_0, C siano insiemi Π_3^0 -hard (e quindi, per il punto precedente, completi).

Le due funzioni si definiscono come segue:

$$\begin{array}{lll} F : \omega^\omega \longrightarrow [0, 1]^\omega & & \phi : \mathbb{N} \longrightarrow [0, 1] \\ (x_j)_{j \in \omega} \longmapsto (\phi(x_j))_{j \in \omega} & \text{dove} & m \longmapsto \begin{cases} 1/m & m \neq 0 \\ 1 & m = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} G : [0, 1]^\omega \longrightarrow [0, 1]^\omega & & y_j := \begin{cases} 0 & j \text{ dispari} \\ x_{j/2} & j \text{ pari.} \end{cases} \\ (x_j)_{j \in \omega} \longmapsto (y_j)_{j \in \omega} & \text{dove} & \end{array}$$

1. F è continua.

La funzione F è continua poiché lo è su ciascuna componente (in quanto \mathbb{N} ha la topologia discreta).

2. G è continua.

La funzione F è continua poiché lo è su ciascuna componente:

- la componente j -esima di G , con j dispari, è data dalla funzione costante nulla, continua;
- la componente j -esima di G , con j pari, è data dalla funzione proiezione $\pi_{j/2} : [0, 1]^\omega \rightarrow [0, 1]$, continua per definizione di topologia prodotto.

3. $F^{-1}(C_0) = C_3$.

Si dimostra che $\alpha \in C_3$ sse $F(\alpha) \in C_0$.

- Se $\alpha = (x_j)_{j \in \omega} \in C_3$ allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $j > N$ si ha $x_j \neq 1$.

Pertanto, per ogni $j > N$, $\phi(x_j) = 1/x_j$ e, siccome $x_j \rightarrow \infty$, $\phi(x_j) \rightarrow 0$. Quindi $F(\alpha) \in C_0$.

- Viceversa, sia $\alpha = (x_j)_{j \in \omega} \notin C_3$. Si supponga per assurdo che $(y_j)_{j \in \omega} = F(\alpha) \in C_0$.

Allora, definitivamente, $y_j = 1/x_j$ (e in particolare $x_j \neq 0 \neq y_j$), poiché altrimenti non si avrebbe convergenza a 0. In particolare, $x_j = 1/y_j$, definitivamente:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{y_j} = \infty$$

poiché $y_j \rightarrow 0$. Quindi $(x_j)_{j \in \omega} \in C_3$. Assurdo.

Si ottiene perciò che $F(\alpha) \notin C_0$.

4. $G^{-1}(C) = C_0$.

Si dimostra che $\alpha \in C_0$ sse $G(\alpha) \in C$.

- Se $\alpha = (x_j)_{j \in \omega} \in C_0$ allora la successione $\beta = (y_j)_{j \in \omega} := G(\alpha)$ converge a 0, e pertanto converge: $G(\alpha) \in C$.
- Viceversa, se $\alpha = (x_j)_{j \in \omega} \notin C_0$, allora la successione $\beta = (y_j)_{j \in \omega} := G(\alpha)$ non converge, in quanto presenta due sottosuccessioni $((y_{2j+1})_{j \in \omega}$ e $(y_{2j})_{j \in \omega})$ con caratteri diversi: $G(\alpha) \notin C$. ■

811 Esempi di sottoinsiemi sigma02 completi

811.1 Esercizio 4

Prove that for any $0 < p < \infty$ the set

$$\ell^p \cap [0, 1]^\omega = \left\{ (x_n)_{n \in \omega} \in [0, 1]^\omega \mid \|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

is Σ_2^0 -complete.

Hint. Recall that a series of positive terms converges if and only if the sequence of partial sums is bounded from above. For the hardness part, compare this set with the Σ_2^0 -complete set Q_2 from the notes.

811.1.1 Soluzione

Insieme Σ_2^0 Sia $x = (x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega$.

Si ha che $(x_j)_{j \in \omega} \in \ell^p \cap [0, 1]^\omega$ se e solo se

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} < \infty$$

se e solo se

$$(\|x\|_p)^p = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < \infty$$

se e solo se, sfruttando l'hint,

$$\exists L \in \mathbb{Q}^+ \forall N \in \mathbb{N} \left(\sum_{n=0}^N |x_n|^p \right) \leq L$$

Sia dunque

$$\begin{aligned} G_N^p : [0, 1]^\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_j)_{j \in \omega} &\longmapsto \sum_{n=0}^N |x_n|^p \end{aligned}$$

Questa è una mappa continua, poiché composizione di mappe continue (proiezioni, continue per la definizione di topologia prodotto, e somma finita ed elevamento a potenza) e pertanto il seguente è un insieme chiuso:

$$V_L^N := \left\{ (x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega \mid \left(\sum_{n=0}^N |x_n|^p \right) \leq L \right\} = (G_N^p)^{-1} ([0, L]).$$

In definitiva

$$\begin{aligned} V_L^N &\in \mathbf{\Pi}_1^0 \\ \bigcap_{N \in \mathbb{N}} V_L^N &\in \mathbf{\Pi}_1^0 \\ \ell^p \cap [0, 1]^\omega &= \bigcup_{L \in \mathbb{Q}} \bigcap_{N \in \mathbb{N}} V_L^N \in \mathbf{\Sigma}_2^0. \end{aligned}$$

Insieme $\mathbf{\Sigma}_2^0$ -hard È noto che l'insieme

$$Q_2 := \left\{ x \in 2^\omega \mid \exists n \in \mathbb{N} \ \forall k \geq n \ (x(k) = 0) \right\}$$

sia $\mathbf{\Sigma}_2^0$ -hard.

Si vuole quindi trovare una funzione continua

$$F : 2^\omega \longrightarrow [0, 1]^\omega$$

tale che $F^{-1}(\ell^p \cap [0, 1]^\omega) = Q_2$. Questo, per il Lemma 2.1.23, garantisce che $\ell^p \cap [0, 1]^\omega$ sia $\mathbf{\Sigma}_2^0$ -hard, e quindi $\mathbf{\Sigma}_2^0$ -completo.

- Considerando che $2 = \{0, 1\} \subseteq [0, 1]$, si può definire F come l'inclusione, ovvero

$$\begin{aligned} F : 2^\omega &\longrightarrow [0, 1]^\omega \\ (x_j)_{j \in \omega} &\longmapsto (x_j)_{j \in \omega} \end{aligned}$$

- Questa è una funzione continua, poiché è continua su ciascuna componente (infatti $\{0, 1\}$ ha la topologia di sottospazio rispetto a $[0, 1]$, e per definizione quindi l'inclusione è continua).
- Inoltre, $F^{-1}(\ell^p \cap [0, 1]^\omega) = Q_2$. In particolare, si dimostra che $\alpha \in Q_2$ sse $F(\alpha) \in \ell^p \cap [0, 1]^\omega$
 - Sia $\alpha = (x_j)_{j \in \omega} \in Q_2$. Allora esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $x_j = 0$ per ogni $j > N$, e pertanto

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{j=0}^N |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty$$

Pertanto $F(\alpha) \in \ell^p \cap [0, 1]^\omega$.

- Sia $\alpha = (x_j)_{j \in \omega} \notin Q_2$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k_n \geq n$ tale che $x_{k_n} = 1$. Pertanto, per ogni $n \in \mathbb{N}$, esiste un numero infinito di indici j tali che $x_j = 1$, e dunque $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j \neq 0$ e dunque la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p$$

diverge. Pertanto $F(\alpha) \notin \ell^p \cap [0, 1]^\omega$. ■

812 Esempi di sottoinsiemi analitici

812.1 Esercizio 5

Show that the collection of all sequences $(x_n)_{n \in \omega} \in [0, 1]^\omega$ having an irrational accumulation point is analytic.

812.1.1 Soluzione

Sia $A_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ l'insieme di tutti gli $(x_j)_{j \in \omega} \in [0, 1]^\omega$ con un punto di accumulazione irrazionale.

Si ricorda che $p \in [0, 1]$ è un punto di accumulazione per $(x_j)_{j \in \omega}$, per definizione, se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ (x_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)).$$

In particolare, $p \in [0, 1]$ è un punto di accumulazione per $(x_j)_{j \in \omega}$ se e solo se:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ (x_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)).$$

Per il Remark 3.1.10, quindi, siccome $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ è uno spazio polacco, $A_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ è un insieme analitico, in quanto definito dalla seguente formula:

$$\exists p \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \ \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \ \forall N \in \mathbb{N} \ \exists n > N \ (x_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon))$$

composta unicamente (tranne che per il primo esistenziale), da quantificazioni numerabili, e da una formula atomica: $x_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$, che definisce un boreliano di $([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0, 1]^\omega$, in quanto, data la funzione continua

$$\begin{aligned} F_n : ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0, 1]^\omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, (x_j)_{j \in \omega}) &\longmapsto x_n - p \end{aligned}$$

si ha che^[228]

$$\{(p, (x_j)_{j \in \omega}) \in ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \times [0, 1]^\omega \mid x_n \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)\} = F_n^{-1} [(-\varepsilon, \varepsilon)]$$

è un aperto. ■

813 Gioco di Banach-Mazur

Sia X uno spazio topologico non vuoto, e sia $A \subseteq X$.

Il gioco di Banach-Mazur di A , denotato con $G^{**}(A)$ oppure con $G^{**}(A, X)$ è un gioco logico di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di X

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & U_0 & & U_1 & & U_2 & \dots \\ & & \text{II} & & V_0 & & V_1 & \dots \end{array}$$

tali che $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V_n \subseteq A.$$

814 Gioco di Banach-Mazur unfolded

Sia X uno spazio polacco non vuoto con una metrica fissata e sia \mathcal{W} una base debole numerabile di X .

Dato $F \subseteq X \times \omega^\omega$, il gioco di Banach-Mazur unfolded $G_u^{**}(F)$ è il gioco logico di Gale-Stewart codificato come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & U_0 & & U_1 & & \dots \\ & & & & & & \\ \text{II} & & y_0, V_0 & & y_1, V_1 & & \dots \end{array}$$

tali che:

- per ogni $i \in \omega$: $U_i, V_i \in \mathcal{W}$, $y_n \in \omega$;
- $\text{diam}(U_n), \text{diam}(V_n) < 2^{-n}$;
- $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

posto

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} \text{Cl}_X(U_n) = \bigcap_{i \in \omega} \text{Cl}_X(V_n)$$

e $y := (y_i)_{i \in \omega} \in \omega^\omega$, il giocatore II vince sse

$$(x, y) \in F \subseteq X \times \omega^\omega.$$

814.1 Applicazione del Teorema di Gale-Stewart

Se F è aperto o chiuso di $X \times \omega^\omega$, allora $G_u^{**}(F)$ è determinato.

814.1.1 Dimostrazione

- Si costruisce un \mathcal{A} -schema su X . Per ogni $\langle (A_0, a_0), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \mathcal{A}^{<\omega}$, si definisce

$$B_{\langle (A_0, a_0), \dots, (A_k, a_k) \rangle} := \begin{cases} \bigcap_{i \leq k} \text{Cl}_X(A_i) & \forall i \leq k : \text{diam}(A_i) < 2^{-i} \\ & A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots \supseteq A_k \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente, per ogni $s \in \mathcal{A}^{<\omega}$ e per ogni $a \in \mathcal{A}$:

$$B_{s \frown a} \subseteq B_s$$

ed inoltre per ogni $x \in \mathcal{A}^\omega$: $\text{diam}(B_{x \upharpoonright n}) \rightarrow 0$.

Inoltre ciascun B_s è chiuso (poiché intersezione finita di chiusi oppure il vuoto) e pertanto, per il Lemma 1.3.6, questo schema induce una funzione continua

$$f : [T] \rightarrow X, \quad T := \{s \in \mathcal{A}^{<\omega} \mid B_s \neq \emptyset\}.$$

- Si osserva che $T = \{\langle (A_i, a_i) \rangle_{i \leq k} : A_0 \supseteq A_1 \supseteq \dots A_k \wedge \forall i \leq k : \text{diam } A_i < 2^{-i}\}$, ovvero è esattamente l'albero delle posizioni ammissibili di $G_u^{**}(F)$, ed inoltre T è un albero potato non vuoto.

- La funzione

$$\begin{aligned} g : \mathcal{A}^\omega &\longrightarrow \omega^\omega \\ ((A_i, a_i))_{i \in \omega} &\longmapsto (a_{2i+1})_{i \in \omega} \end{aligned}$$

è continua.

- Si ottiene quindi una funzione continua

$$\begin{aligned} \psi : [T] &\longrightarrow X \times \omega^\omega \\ s &\longmapsto (f(s), g(s)) \end{aligned}$$

Sia ora dunque $F \subseteq X \times \omega^\omega$ aperto o chiuso, sia $F' := [T] \setminus \psi^{-1}(F)$ aperto o chiuso, e si consideri il [Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili \$G\(T, F'\)\$](#) . Per il [Teorema di Gale-Stewart](#), questo è determinato, poiché F' è aperto o chiuso; ovvero esattamente uno tra i giocatori I e II ha una strategia vincente.

Caso 1. Sia σ' una strategia vincente per il giocatore I nel gioco $G(T, F')$, $\sigma' \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^{<\omega}$ con $[\sigma'] \subseteq F'$, ovvero $[\sigma'] \cap \psi^{-1}(F) = \emptyset$.

Si costruisce una strategia σ per il giocatore I nel gioco $G_u^{**}(F)$:

$$\sigma := \left\{ \begin{array}{l} \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k-1}, a_{2k-1}), A_{2k} \rangle, \mid \langle (A_0, a_0), (A_1, a_1), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \sigma' \\ \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k+1}, a_{2k+1}) \rangle \end{array} \right\}.$$

Sia quindi $(U_i, (V_i, y_i))_{i \in \omega}$ una giocata per I seguendo la strategia σ , e siano

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} V_i, \quad y := (y_i)_{i \in \omega}.$$

Allora esiste $s \in [\sigma']$ tale che $(x, y) = \psi(s)$ per costruzione. Siccome $[\sigma'] \cap \psi^{-1}(F) = \emptyset$ segue che $(x, y) \notin F$.

Caso 2. Sia σ' una strategia vincente per il giocatore II nel gioco $G(T, F')$, $\sigma' \subseteq T \subseteq \mathcal{A}^{<\omega}$ con $[\sigma'] \cap F' = \emptyset$, ovvero $[\sigma'] \subseteq \psi^{-1}(F)$.

Si costruisce una strategia σ per il giocatore II nel gioco $G_u^{**}(F)$:

$$\sigma := \left\{ \begin{array}{l} \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k-1}, a_{2k-1}), A_{2k} \rangle, \mid \langle (A_0, a_0), (A_1, a_1), \dots, (A_k, a_k) \rangle \in \sigma' \\ \langle A_0, (A_1, a_1), \dots, (A_{2k+1}, a_{2k+1}) \rangle \end{array} \right\}.$$

Sia quindi $(U_i, (V_i, y_i))_{i \in \omega}$ una giocata per I seguendo la strategia σ , e siano

$$\{x\} := \bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} V_i, \quad y := (y_i)_{i \in \omega}.$$

Allora esiste $s \in [\sigma'] \subseteq \psi^{-1}(F)$ tale che $(x, y) = \psi(s)$ per costruzione, e pertanto $(x, y) \in F$. ■

815 Logical Game

815.1 Definizione

Un gioco logico è una quadrupla $\mathcal{G} := (\Omega, f, W_I, W_{II})$ dove:

- Ω è un insieme, chiamato il dominio del gioco;
- $f : \Omega^{<\omega} \rightarrow \{I, II\}$ è una funzione, chiamata funzione di turno o funzione del giocatore;
- $W_I, W_{II} \subseteq \Omega^{<\omega} \cup \Omega^\omega$ [229] sono tali che
 1. $W_I \cap W_{II} = \emptyset$;
 2. per ogni $a \in W_I$ e per ogni $b \in \Omega^{<\omega} \cup \Omega^\omega$:
$$a \subseteq b \quad \rightarrow \quad b \in W_I$$

Gli elementi di $\Omega^{<\omega}$ sono chiamati posizioni del gioco \mathcal{G} , mentre un elemento di Ω^ω è detto giocata di \mathcal{G} .

I giocatori I e II giocano scegliendo a turno elementi di Ω . La funzione di turno f associa a ciascuna posizione uno dei due giocatori: se

$$f(a_0, a_1, \dots, a_n) = I$$

allora l'elemento a_{n+1} sarà scelto dal giocatore I.

Si dirà che il giocatore I vince la giocata a se $a \in W_I$; si dirà che il giocatore II vince la giocata b se $b \in W_{II}$.

815.1.1 Gioco Logico totale

Un gioco è detto totale se $\Omega^\omega \subseteq W_I \cup W_{II}$.

815.1.2 Strategia per un gioco logico

Si definiscano i seguenti insiemi:

$$\begin{aligned}\Omega_I^{<\omega} &:= \{s \in \Omega^{<\omega} \mid f(s) = I\} \\ \Omega_{II}^{<\omega} &:= \{s \in \Omega^{<\omega} \mid f(s) = II\}\end{aligned}$$

A strategy for a player is a set of rules that describe exactly how that player should choose, depending on how the two players have chosen at earlier moves.

Formalmente, una strategia per il giocatore j (con $j = I, II$) è una funzione

$$\varphi : \Omega_j^{<\omega} \rightarrow \Omega$$

A strategy for a player is said to be winning if that player wins every play in which he or she uses the strategy, regardless of what the other player does.

Un gioco si dice determinato se esiste una strategia vincente per I o per II.

815.2 Bibliography

- Hodges, Wilfrid and Jouko Väänänen, “Logic and Games”, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Winter 2024 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/win2024/entries/logic-games/>.

Sia A un insieme non vuoto, e sia $C \subseteq A^\omega$. [230]

816 Giochi di Gale-Stewart

Si definisce il gioco di Gale-Stewart associato ad C come il gioco logico seguente:

$$G(A, C) = G(A) := (A, \psi, C, A^\omega \setminus C)$$

dove la funzione $\psi : A^{<\omega} \rightarrow \{\text{I}, \text{II}\}$ è così definita

$$\psi(s) := \begin{cases} \text{I} & \text{lh}(s) \text{ è pari} \\ \text{II} & \text{lh}(s) \text{ è dispari} \end{cases}$$

Pertanto il gioco può essere codificato come segue:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & a_0 & & a_2 & & a_4 & \dots \\ & & \text{II} & & a_1 & & a_3 \\ & & & & & & \dots \end{array}$$

e il giocatore I vince se e solo se $(a_n)_{n \in \omega} \in C$. [231]

817 Strategia per un gioco di Gale-Stewart

Si specializza la definizione di strategia per un gioco logico al caso particolare di un gioco di Gale-Stewart.

È possibile vedere una strategia φ per il giocatore I in tre modi diversi, del tutto equivalenti.

1. Una mappa $\psi : A^{<\omega} \rightarrow A^{<\omega}$ tale che, per ogni $s \in A^{<\omega}$ valga che lunghezza sia

$$\text{lh } \varphi(s) = \text{lh}(s) + 1$$

Intuitivamente, questa funzione associa alla sequenza degli (a_{2i+1}) giocati dal giocatore II una sequenza degli (a_{2i}) per il giocatore I:

$$\varphi(\emptyset) = \langle a_0 \rangle, \quad \varphi(\langle a_1 \rangle) = \langle a_0, a_2 \rangle, \quad \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle) = \langle a_0, a_2, a_4 \rangle.$$

2. Una mappa $\psi : A^{<\omega} \rightarrow A$.

Intuitivamente, questa funzione associa alla sequenza degli (a_{2i+1}) giocati dal giocatore II l'elemento $a_j \in A$ che deve giocare il giocatore I:

$$\varphi(\emptyset) = a_0, \quad \varphi(\langle a_1 \rangle) = a_2, \quad \varphi(\langle a_1, a_3 \rangle) = a_4.$$

3. Una **albero** $\sigma \subseteq A^{<\omega}$ tale che:
- σ sia **potato** e non vuoto;
 - se $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$ allora per ogni $a_{2j+1} \in A$: $\langle a_0, \dots, a_{2j+1} \rangle \in \sigma$;
 - se $\langle a_0, \dots, a_{2j-1} \rangle \in \sigma$ allora esiste un unico $a_{2j} \in A$ tale che $\langle a_0, \dots, a_{2j} \rangle \in \sigma$.

Una strategia è detta vincente se il suo **corpo** $[\sigma] \in A$.

818 Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili

Spesso è comodo considerare giochi in cui I e II non possano giocare ogni elemento di A , ma debbano seguire delle regole. Quindi, è necessario dare un alberto potato non vuoto $T \subseteq A^{<\omega}$, che determina le posizioni ammissibili.

In questa situazione I e II si alternano giocando $\langle a_0, \dots, a_n, \dots \rangle$ in maniera tale che, ad ogni passo $n \in \omega$

$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle \in T$$

Si scriverà, in questo caso, $G(T, C)$.

Si noti che questo non modifica il formalismo, in quanto è sufficiente cambiare gli insiemi di vittoria C e $A^\omega \setminus C$ in maniera da far perdere automaticamente il giocatore che effettua una mossa illegale.

Inoltre, il gioco definito sopra $G(T, C)$ è **equivalente** al gioco $G(A, C')$, dove

$$C' := \{x \in A^\omega \mid [\exists n(x \upharpoonright n \notin T) \wedge \text{il minore } n \text{ tale che } x \upharpoonright n \notin T \text{ è pari}] \vee (x \in [T] \wedge x \in C)\}.$$

819 Albero (Teoria descrittiva degli insiemi)

820 Albero potato

821 Corpo di un albero

822 Posizioni ammissibili in un gioco logico

Strictly this refinement is unnecessary, because the winning strategies are not affected if we decree instead that a player who breaks the law loses immediately; but for many games this way of viewing them seems unnatural. Below we will see some other extra features that can be added to games.

(From [SEP](#))

823 Giochi logici equivalenti

823.1 Definizione

Due giochi logici \mathcal{G} e \mathcal{G}' con giocatori I e II sono detti equivalenti se sono soddisfate entrambe le seguenti ipotesi:

1. esiste una strategia vincente per I in \mathcal{G} sse esiste una strategia vincente per I in \mathcal{G}'
2. esiste una strategia vincente per II in \mathcal{G} sse esiste una strategia vincente per II in \mathcal{G}'

824 Teorema di Gale-Stewart

Sia A uno spazio topologico discreto e sia A^ω dotato della topologia prodotto.

824.1 Teorema

Sia T un albero potato non vuoto su A . Se $C \subseteq [T]$ è aperto o chiuso in $[T]$ ^[232], allora il gioco $G(T, C)$ è determinato.

825 Proprietà di Baire

Sia X uno spazio topologico.

825.1 Insiemi uguali modulo un magro

Dati due sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ si dirà che

$$A =^* B$$

se la differenza simmetrica $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ è un insieme magro. ^[233]

825.2 Definizione

Un sottoinsieme $A \subseteq X$ ha la proprietà di Baire (*Baire Property* o BP) se esiste un aperto $U \subseteq X$ tale che

$$A =^* B.$$

Si definisce BP(X) come la collezione di tutti i sottoinsiemi di X con BP.

826 Spazio topologico di Baire

826.1 Definizione

Uno spazio topologico X si dice Baire se soddisfa le seguenti condizioni equivalenti:

1. ogni sottoinsieme di X aperto non vuoto è non-magro;

2. ogni sottoinsieme comagro di X è denso;
3. l'intersezione di una quantità numerabile di sottoinsiemi densi e aperti di X è denso.

In particolare, se X è non vuoto e Baire, allora l'intersezione di ogni coppia di G_δ densi di X è densa, e pertanto non vuota.

826.1.1 Sottospazi aperti di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire

Se X è uno spazio topologico di Baire e $A \subseteq X$ è aperto, allora A è uno spazio topologico di Baire.

827 Gioco di Choquet

Sia (X, τ) uno spazio topologico non vuoto. Il gioco di Choquet G_X è un gioco logico di Gale-Stewart codificato come segue: i giocatori I e II si alternano scegliendo sottoinsiemi aperti non vuoti di X :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & U_0 & U_1 & U_2 & \dots \\ \text{II} & V_0 & V_1 & \dots \end{array}$$

tali che $U_0 \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$

Il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset.$$

e, poiché il gioco è totale, il giocatore II vince se

$$\bigcap_{n \in \omega} V_n = \bigcap_{n \in \omega} U_n = \emptyset.$$

828 Caratterizzazione degli spazi di Baire tramite il gioco di Choquet

828.1 Teorema

Uno spazio topologico X è uno spazio topologico di Baire se e solo se il giocatore I non ha una strategia vincente nel gioco di Choquet G_X .

828.2 Spazio di Choquet

828.2.1 Definizione

Uno spazio topologico X è detto spazio di Choquet se il giocatore II ha una strategia vincente in G_X .

828.2.2 Osservazione

Se il giocatore I non ha una strategia vincente, **non è detto** che il giocatore II ne abbia una.

Viceversa, però, se II ha una strategia vincente, allora necessariamente I non ne ha una. Quindi ogni spazio di Choquet è uno spazio topologico di Baire.

Inoltre, se X è uno **spazio polacco**, allora X è uno spazio di Choquet.

828.2.3 Aperti non vuoti di spazi di Choquet sono Choquet

I **sottospazi aperti** non vuoti di uno spazio di Choquet sono spazi di Choquet.

828.2.4 Prodotto di spazi di Choquet è Choquet

Il **prodotto** finito di Spazi di Choquet sono spazi di Choquet.

829 Caratterizzazione di magri e comagri tramite il gioco di Banach-Mazur

829.1 Teorema I

Sia X uno **spazio topologico non vuoto**, e sia $A \subseteq X$ un **sottoinsieme** qualsiasi. Allora A è **comagro** se e solo se il giocatore II ha una **strategia vincente** nel **gioco di Banach-Mazur** $G^{**}(A)$.

829.1.1 Dimostrazione

(\Rightarrow): Se A è comagro, allora esistono $(W_n)_{n \in \omega}$ aperti densi di X tali che

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \supseteq A.$$

Il giocatore II gioca $V_n := W_n \cap U_n$; questo è aperto, e inoltre è non vuoto poiché W_n è denso in X .

(\Leftarrow): Sia σ una strategia vincente di II. Si costruisce $\sigma' \subseteq \sigma$ albero potato e non vuoto per induzione sulla lunghezza delle stringhe.

- $\emptyset \in \sigma'$.
- Sia $s = \langle U_0, V_0, \dots, U_n \rangle$. Allora esiste un unico $V_n \subseteq U_n$ tale che $s \frown V_n \in \sigma$. Si pone $s \frown V_n \in \sigma'$.
- Sia $s = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$. Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq V_n$ si definisce U^* l'unico sottoinsieme di U tale che

$$s \frown \langle U, U^* \rangle \in \sigma$$

È possibile, tramite un'applicazione del Lemma di Zorn, garantire l'esistenza di una collezione massimale \mathcal{U}_s di aperti non vuoti $U \subseteq V_n$ tale che la collezione $\mathcal{V}_s := \{U^* \mid U \in \mathcal{U}_s\}$ sia composta da insiemi a due a due disgiunti.

- Infatti, data una catena di collezioni di aperti che soddisfino la proprietà richiesta $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ ordinata dall'inclusione, allora

$$\mathcal{U}^* := \bigcup_{\alpha} \mathcal{U}_\alpha$$

è un maggiorante della catena, in quanto detto

$$\mathcal{V}^* := \{U^* \mid U \in \mathcal{U}^*\}$$

dati $V, V' \in \mathcal{V}^*$ allora esiste \mathcal{U}_{α_0} ed esistono $U_0, U_1 \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ tali che

$$U_0^* = V, \quad U_1^* = V'$$

e pertanto $V \cap V' = \emptyset$.

Dunque, per ogni $U \in \mathcal{U}_s$, $s \cap U \in \sigma'$.

Inoltre $\bigcup \mathcal{V}_s$ è denso in V_n . Infatti, se per assurdo esistesse $B \subseteq V_n$ aperto tale che $B \cap \bigcup \mathcal{V}_s = \emptyset$, allora $\mathcal{U}_s \cup \{B\}$ viola la massimalità di \mathcal{U}_s .

Sia ora, per ogni $n \in \omega$:

$$W_{n+1} := \bigcup_{\substack{s \in \sigma' \\ \text{lh}(s)=2n}} \bigcup \mathcal{V}_s = \bigcup_{\langle U_0, V_0, \dots, U_{n+1}, V_{n+1} \rangle \in \sigma'} V_{n+1}$$

Per ogni $n \in \omega$, $W_{n+1} \subseteq X$ è denso.

- W_1 è denso, poiché \mathcal{U}_\emptyset è una collezione di aperti di X tali che \mathcal{V}_\emptyset sia composta da insiemi a due a due disgiunti, e pertanto, se vi fosse $B \subseteq X$ aperto tale che $B \cap W_1 = \emptyset$, allora $\mathcal{U}_\emptyset \cup \{B\}$ viola la massimalità di \mathcal{U}_\emptyset .
- Se W_{n+1} è denso, allora lo è anche W_{n+2} . Sia $B \subseteq X$ aperto.

Siccome W_{n+1} è denso allora $W_{n+1} \cap B \neq \emptyset$, ed esiste $\tilde{s} = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$ tale che $B \cap \bigcup \mathcal{V}_{\tilde{s}} \neq \emptyset$.

Quindi esistono $V_n \supseteq U \supseteq V$ tali che $\tilde{s} \cap \langle U, V \rangle \in \sigma'$, con $V \cap B \neq \emptyset$. Infatti, se così non fosse, allora $\mathcal{U}_{\tilde{s}} \cup \{V_n \cap B\}$ contraddice la massimalità di $\mathcal{U}_{\tilde{s}}$.

Poiché $\bigcup \mathcal{V}_{s \cap \langle U, V \rangle}$ è denso in V , allora $\bigcup \mathcal{V}_{s \cap \langle U, V \rangle} \cap B \neq \emptyset$, ed inoltre

$$\bigcup \mathcal{V}_{\tilde{s} \cap \langle U, V \rangle} \subseteq W_{n+2}$$

e pertanto $W_{n+2} \cap B \neq \emptyset$.

Per finire, si dimostra che $\bigcap_{n \in \omega} W_{n+1} \subseteq A$. Sia $x \in \bigcap_{n \in \omega} W_{n+1}$.

Allora esiste $(U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma']$ tale che $x \in V_n$ per ogni n . Questa si costruisce per induzione.

- Poiché $x \in W_1$, allora esiste $\langle U_0, V_0, U_1, V_1 \rangle \in \sigma'$ tale che $x \in V_1$.

- Sia ora $p = \langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n \rangle \in \sigma'$ tale che $x \in V_n$.

Siccome $x \in W_{n+1}$ allora esiste $p' \in \sigma'$,

$$p' := \langle U'_0, V'_0, \dots, U'_{n+1}, V'_{n+1} \rangle$$

tale che $x \in V_{n+1}$. Necessariamente p' estende p .

Infatti, si supponga per assurdo che $p \neq \langle U'_0, V'_0, \dots, U'_n, V'_n \rangle$, e sia $j \leq n$ il primo indice tale che

$$\langle U_j, V_j \rangle \neq \langle U'_j, V'_j \rangle.$$

Necessariamente allora $U_j \neq U'_j$, poiché V_j e V'_j sono univocamente determinati dall'insieme precedente. In particolare, però:

$$U_j, U'_j \in \mathcal{U}_{\langle U_0, V_0, \dots, U_{j-1}, V_{j-1} \rangle} = \mathcal{U}_{\langle U'_0, V'_0, \dots, U'_{j-1}, V'_{j-1} \rangle}$$

e pertanto, per definizione, $V_j \cap V'_{j'} = \emptyset$. Assurdo, poiché $x \in V_j \cap V'_{j'}$.

Dunque $\langle U_0, V_0, \dots, U_n, V_n, U'_{n+1}, V'_{n+1} \rangle$ estende la sequenza iniziale.

In particolare, quindi $x \in \bigcap_{n \in \omega} V_n$.

Poiché σ è una strategia vincente per il giocatore II, allora per ogni $(U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma'] \subseteq [\sigma]$,

$$\bigcap_{i \in \omega} U_i = \bigcap_{i \in \omega} V_i \subseteq A$$

e dunque $x \in A$. ■

829.2 Teorema II

Se X è uno spazio topologico di Choquet non vuoto ed esiste una distanza d su X le cui palle aperte sono aperti di X , allora:

A è magro in un aperto non vuoto se e solo se il giocatore I ha una strategia vincente nel gioco di Banach-Mazur $G^{**}(A)$.

829.2.1 Dimostrazione

(\Rightarrow): Se A è magro in $Y \subseteq X$, sia per ogni $n \in \omega$: $W_n \subseteq Y$ aperti densi di Y , con

$$\bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A.$$

Poiché Y è uno spazio di Choquet, allora nel gioco:

$$\begin{array}{ccccccc} & \text{I} & & B_1 & & B_2 & \dots \\ & & \text{II} & A_0 & & A_1 & \dots \end{array}$$

con gli aperti non vuoti $Y \supseteq V_0 \supseteq U_1 \supseteq V_1 \supseteq \dots$ in cui I vince sse $\bigcap_{n \in \omega} B_n \neq \emptyset$, I ha una strategia vincente. Questo infatti è un gioco di Choquet a giocatori invertiti.

Sia quindi σ la strategia vincente di I in questo gioco di Choquet.

Nel gioco $G^{**}(A)$, il giocatore I pone $U_0 := Y$. Si costruisce per induzione la strategia vincente per I.

Al passo $n + 1$ -esimo, sia $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ la sequenza di insiemi giocati. Si pone, per ogni $i \leq n$: $V'_i := V_i \cap W_i$, e si sceglie U_{n+1} come l'unico sottoinsieme aperto non vuoto di V_n tale che

$$(V'_0, U_1, V'_1, U_2, \dots, V'_n, U_{n+1}) \in \sigma.$$

Allora $\bigcap_{n \in \omega} U_n \neq \emptyset$ e inoltre

$$\bigcap_{n \in \omega} U_n = \bigcap_{n \in \omega} V'_n \subseteq \bigcap_{n \in \omega} W_n \subseteq Y \setminus A$$

e dunque $\bigcap_{n \in \omega} U_n \not\subseteq A$.

(\Leftarrow): Sia σ una strategia vincente per I in $G^{**}(A)$, e sia U_0 l'elemento di partenza per σ .

Si costruisce una strategia σ' per I, vincente, e tale che l'insieme giocato al passo n -esimo U_n abbia diametro (rispetto alla metrica d):

$$\text{diam}(U_n) < 2^{-n}.$$

Al passo $n + 1$, sia $(U_0, V_0, \dots, U_n, V_n)$ la sequenza di insiemi giocati, e sia $v_n \in V_n$. Si definisce

$$V'_n := V_n \cap B_d(v_n, 2^{-n-1}), \quad \text{diam}(V_n) \leq 2^{-n}$$

che è un aperto non vuoto. Si pone infine U_{n+1} come l'unico sottoinsieme aperto di V'_n tale che

$$(U_0, V_0, \dots, U_n, V'_n, U_{n+1}) \in \sigma.$$

Questo U_{n+1} è la risposta secondo la strategia σ' , in quanto $\text{diam}(U_n) \leq \text{diam}(V'_n) \leq 2^{-n}$.

Siccome σ' è una strategia vincente per I, allora

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \omega} U_n$$

e inoltre

$$\text{diam} \left(\bigcap_{n \in \omega} U_n \right) = 0$$

Segue che $\bigcap_{n \in \omega} U_n = \{x\}$, con $x \in U_0 \setminus A$.

Sia quindi

$$W := \left\{ x \in U_0 \mid \exists (U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma'] \ x \in \bigcap_{n \in \omega} U_i \right\}$$

- W è denso in U_0 , poiché per ogni $B \subseteq U_0$ esiste $p = (U_i, V_i)_{i \in \omega} \in [\sigma']$ tale che $V_0 = B$, e, siccome $p \in [\sigma']$ allora

$$\bigcap_{n \in \omega} U_i = \{x\} \subseteq U_1 \subseteq V_0 = B$$

e dunque $W \cap B \neq \emptyset$.

- Inoltre $W \subseteq U_0 \setminus A$, per costruzione di σ' .

Pertanto A è magro in U_0 . ■

830 Insiemi analitici di un polacco hanno BP

830.1 Teorema (Lusin-Sierpiński)

Sia X uno spazio polacco. Allora ogni insieme analitico di X ha la Baire Property.

830.1.1 Dimostrazione

Siccome $\text{BP}(X)$ è una σ -algebra^[234] allora è chiusa per complementi, e pertanto se ogni insieme coanalitico ha BP allora si è dimostrata la tesi.

Sia dunque C un insieme coanalitico e sia $U \subseteq X$ un aperto. Posto $A := (X \setminus C) \cup U$, questo è un insieme analitico, e pertanto esiste un chiuso $F \subseteq X \times \omega^\omega$ tale che $A = \pi_X(F)$.

Per il Teorema di Gale-Stewart, allora, il $**$ -gioco $G_u^{**}(F)$ è determinato, ed in particolare vale una tra le condizioni a. e b. del teorema precedente.

Per i teoremi I e II, allora, il gioco $G^{**}(A) = G^{**}((X \setminus C) \cup U)$ è determinato: per il lemma precedente, quindi C ha la BP. ■

831 Magrezza dentro ad un polacco tramite gioco di Banach-Mazur

831.1 Teorema

Sia X uno spazio polacco con una metrica fissata e sia \mathcal{W} una base debole di X .

Dato $F \subseteq X \times \omega^\omega$ si consideri il $**$ -gioco: $G_u^{**}(F)$. Indicato con $A := \pi_X(F)$:

1. se I ha una strategia vincente in $G_u^{**}(F)$, allora A è magro in un aperto non vuoto di X ;
2. se II ha una strategia vincente in $G_u^{**}(F)$ allora A è comagro.

831.1.1 Dimostrazione

1. Sia σ una strategia vincente per I, e sia U_0 la prima mossa. Si mostra che A è magro in U_0 .

Per ogni $a \in \omega$ e per ogni $p \in \sigma$ della forma:

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

si definisce $F_{p,a} \subseteq U_0$:

$$\begin{aligned} F_{p,a} = & \{z \in U_0 \mid \text{per ogni mossa legale } (a, V_n) \\ & \text{se } U_{n+1} \text{ è l'unico elemento di } \mathcal{W} \text{ tale che} \\ & p \cap \langle (a, V_n), U_{n+1} \rangle \in \sigma \text{ allora } z \notin U_{n+1}\} \end{aligned}$$

- L'insieme $F_{p,a}$ è mai denso, poiché chiuso e con interno vuoto [235]. Infatti, se per assurdo $\text{Int}(F_{p,a}) \neq \emptyset$, allora esiste $W \in \mathcal{W}$ tale che

$$W \subseteq \text{Int}(F_{p,a}), \quad \text{diam}(W) < 2^{-n}$$

pertanto se II gioca $V_n := W$ allora I dovrà giocare $U_{n+1} \subseteq V_n \subseteq F_{p,a}$. Ma per definizione $U_{n+1} \cap F_{p,a} = \emptyset$. Assurdo.

Inoltre, se $\eta \in U_n \setminus F_{p,a}$, allora esiste una sequenza

$$p^\frown \langle (a, V_n), U_{n+1} \rangle \in \sigma$$

con $\eta \in U_{n+1}$; siccome $U_{n+1} \cap F_{p,a} = \emptyset$ segue

$$\eta \in U_{n+1} \subseteq U_n \setminus F_{p,a} \subseteq X \setminus F_{p,a}$$

ovvero $F_{p,a}$ chiuso.

- Siccome σ e ω sono insiemi numerabili allora

$$\bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$$

è un insieme magro, dove $\sigma' \subseteq \sigma$ è l'insieme delle sequenze di lunghezze dispari.

Sia ora $x \in A \cap U_0$. Allora esiste $y \in \omega^\omega$, $y = (y_i)_{i \in \omega}$ tale che $(x, y) \in F$.

Una posizione $p \in \sigma'$:

$$p = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_{n-1}, (y_{n-1}, V_{n-1}), U_n \rangle$$

è buona per (x, y) se $x \in U_n$. Siccome σ è una strategia vincente per il giocatore I, allora esiste una posizione $p_{(x,y)} \in \sigma$ buona per (x, y) e massimale, ovvero ogni estensione di $p_{(x,y)}$ non è buona. Ma allora, se

$$p_{(x,y)} = \langle U_0, (y_0, V_0), \dots, U_n \rangle$$

si ha che $x \in F_{p_{(x,y)}, y_n}$.

Pertanto $A \cap U_0 \subseteq \bigcup_{p \in \sigma', a \in \omega} F_{p,a}$ è magro.

2. Se II ha una strategia vincente per $G_u^{**}(F)$, allora ha una strategia vincente in $G^{**}(A)$. Per il [teorema precedente](#), A è comagro. ■

832 INPUT

Questa è una lista delle entry del database ancora da processare:

- Teoria della ricorsività [[CORSO SEL2025](#)]
- Teoria dei modelli [[CORSO SEL2025](#)]
- Topological Games [[LECTIO](#)]
- Boolean valued semantics for infinitary logics [[CORSO](#)]

- Teoria dei modelli [CORSO]
- Istituzioni di Algebra [CORSO]
- INBOX - Fleeting Notes

833 DA FINIRE

Questa è una lista delle entry del database ancora da ultimare

- Ogni insieme analitico non numerabile ammette un sottoinsieme boreiano non numerabile
- Teoria della ricorsività [CORSO SEL2025]
- Teoria dei modelli [CORSO SEL2025]
- Anello-dei-polinomi
- Caratterizzazione delle formule preservate da delta-morfismi
- Caratterizzazione della delta-eliminazione positiva dei quantificatori tramite delta-morfismi
- Caratterizzazione phi-tipi invarianti su un insieme
- phi-tipo su un insieme
- Relazione erede-coerede stazionaria
- Relazione erede-coerede stazionaria
- Estensione semigruppo a Modello Mostro
- Semigruppo di Ellis
- Gruppo di Ellis
- Tipo invariante su un insieme
- Semigruppo
- Lemma del diagramma elementare
- Teorema di Milliken-Taylor
- (bib) Neuman - Physiology and Medicine of Hyperbaric Oxygen Therapy, 2008
- Pianificazione dell'immersione
- Cardinalità
- Stile - Scala di Formalità
- Teorema della derivata nulla
- Coomologia di De Rham come funtore
- Pullback di una inclusione tra varietà differenziabili
- Restrizione di una forma ad una sottovarietà

- Varietà Differenziabile Orientabile
- Atlante orientato
- Orientabilità delle sfere
- Integrale di forme su sottovarietà differenziabile
- Intersezione di sottomoduli
- Condizione sufficiente modello omega-saturo
- Morfismo pieno tra strutture del prim'ordine
- Principio di identità per funzioni olomorfe
- Singolarità isolata (Analisi Complessa)
- Somma connessa di superfici topologiche
- Caratteristica di Eulero per una superficie topologica
- Sfera con g manici

834 BIB

Questo è un elenco di tutte le note bibliografiche

- (bib) FIPSAS - “P1 - Lezione T5 - Apparato respiratorio e circolatorio”
- (bib) Zambella - A Crèche Course in Model Theory

835 Proprietà di chiusura delle funzioni primitive ricorsive

Vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)

Proposizione 1. Sia $k \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è [primitiva ricorsiva](#) lo è anche

$$f_1 : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

definita da

$$f_1(x_1, \dots, x_k, y) = \sum_{z \leq y} h(x_1, \dots, x_k, z)$$

Dimostrazione. La funzione f_1 è ottenuta da h tramite lo [schema di ricorsione](#):

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_k, 0) = h(x_1, \dots, x_k, z) \\ f_1(x_1, \dots, x_k, y + 1) = f_1(x_1, \dots, x_k, y) + h(x_1, \dots, x_k, y + 1) \end{cases}$$

siccome la [somma](#) è [primitiva ricorsiva](#)

■

Con la stessa dimostrazione si ha che per $k \in \mathbb{N}^+$, se $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione ricorsiva lo è anche

$$f_1 : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

definita da

$$f_1(x_1, \dots, x_k, y) = \sum_{z \leq y} h(x_1, \dots, x_k, z)$$

Proposizione 2. Sia $k \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è primitiva ricorsiva lo è anche

$$f_2 : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

definita da

$$f_2(x_1, \dots, x_k, y) = \prod_{z \leq y} h(x_1, \dots, x_k, z)$$

Dimostrazione. La funzione f_2 è ottenuta da h per mezzo dello schema di ricorsione

$$\begin{cases} f_2(x_1, \dots, x_k, 0) = h(x_1, \dots, x_k, 0) \\ f_2(x_1, \dots, x_k, y + 1) = f_2(x_1, \dots, x_k, y) \cdot h(x_1, \dots, x_k, y + 1) \end{cases}$$

perché il prodotto è ricorsivo primitivo. ■

Con la stessa dimostrazione si ha che per $k \in \mathbb{N}^+$, se $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è ricorsiva lo è anche

$$f_2 : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

definita da

$$f_2(x_1, \dots, x_k, y) = \prod_{z \leq y} h(x_1, \dots, x_k, z)$$

Proposizione 3. Sia $k \in \mathbb{N}^+$. Se $h : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ è primitiva ricorsiva lo è anche

$$f_3 : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$$

definita da

$$f_3(x_1, \dots, x_k, y) = \mu_{z \leq y} (h(x_1, \dots, x_k, z) = 0)$$

dove

$$\mu_{z \leq y} (h(x_1, \dots, x_k, z)) := \begin{cases} \min \{z \leq y \mid h(x_1, \dots, x_k, z) = 0\} \\ y + 1 \end{cases}$$

Dimostrazione. Infatti f_3 si ottiene da h componendo funzioni ricorsive primitive (ovvero somma limitata, prodotto limitato e funzione segno):

$$f_3(x_1, \dots, x_k, y) = \sum_{z \leq y} \prod_{i \leq z} \operatorname{sgn}(h(x_1, \dots, x_k, i))$$

■

Osservazione. Siccome le funzioni primitive ricorsive sono chiuse per [composizione](#), se h è come prima e $g : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ è ricorsiva primitiva per qualche $\ell \in \mathbb{N}^+$, allora

$$f(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_\ell) := \mu_{z \leq g(y_1, \dots, y_\ell)} (h(x_1, \dots, x_k, z) = 0)$$

è ricorsiva primitiva.

836 Proprietà di chiusura degli insiemi ricorsivi

In questa sezione si identificano i [sottinsiemi](#) di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i [predicati](#) k -ari (ovvero con k [variabili libere](#)), per mezzo degli [insiemi di verità](#).

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

Proposizione 1. La collezione degli [insiemi ricorsivi](#) ([primitivi](#)) è chiusa per

- Sostituzioni ricorsive totali. Se $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è ricorsivo (primitivo) e per $1 \leq i \leq k$ le

$$g_i : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$$

sono [ricorsive](#) ([primitive](#)) totali, allora anche $R \subseteq \mathbb{N}^\ell$ definito come

$$R(\vec{x}) \iff P(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x}))$$

è un sottoinsieme ricorsivo (primitivo). [236]

- Intersezione, unione, complemento. Se $P, Q \subseteq \mathbb{N}^k$ sono ricorsivi (primitivi), allora lo sono anche

$$P \cap Q, \quad P \cup Q, \quad \mathbb{N}^k \setminus P.$$

- Quantificazioni limitate. Se $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ è un insieme ricorsivo (primitivo), allora lo sono anche gli insiemi $R_\exists, R_\forall \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$:

$$\begin{aligned} R_\exists(\vec{x}, y) &\iff \exists z \leq y P(\vec{x}, z) \\ R_\forall(\vec{x}, y) &\iff \forall z \leq y P(\vec{x}, z). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si ha che le [funzioni caratteristiche](#) sono: [237]

$$\begin{aligned} \chi_R(\vec{x}) &= \chi_P(g_1(\vec{x}), \dots, g_k(\vec{x})) \\ \chi_{P \cap Q}(\vec{x}) &= \chi_P(\vec{x}) \cdot \chi_Q(\vec{x}) \\ \chi_{P \cup Q}(\vec{x}) &= \text{sgn}(\chi_P(\vec{x}) + \chi_Q(\vec{x})) \\ \chi_{\mathbb{N}^k \setminus P}(\vec{x}) &= \overline{\text{sgn}}(\chi_P(\vec{x})) \\ \chi_\exists(\vec{x}, y) &= \text{sgn}\left(\sum_{z=0}^y \chi_P(\vec{x}, z)\right) \\ \chi_\forall(\vec{x}, y) &= \prod_{z=0}^y \chi_P(\vec{x}, z). \end{aligned}$$

■

Osservazione. Utilizzando l'[algoritmo di Tarski-Kuratowski](#), si ha che congiunzione, disgiunzione e negazione di predicati ricorsivi è ancora ricorsivo, così come quantificazioni limitate.

837 Funzioni ricorsive definite per casi

In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

837.1 Proposizione

Se $P_1, \dots, P_k \subseteq \mathbb{N}^\ell$ sono **insiemi ricorsivi (primitivi)** a due a due **disgiunti**, e per ogni $1 \leq i \leq k$ le

$$f_i : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$$

sono **funzioni ricorsive (primitive) totali**, allora la funzione $f : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ definita come

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} f_1(\vec{x}) & P_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) & P_2(\vec{x}) \\ \vdots & \\ f_k(\vec{x}) & P_k(\vec{x}) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ricorsiva (primitiva).

837.1.1 Dimostrazione

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^k f_i(\vec{x}) \cdot \chi_{P_i}(\vec{x}).$$

(Proprietà di chiusura delle funzioni primitive ricorsive e [Funzioni ricorsive](#))

838 Funzioni ricorsive per minimizzazione su un predicato

In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

838.1 Proposizione

Se $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ è un **predicato ricorsivo**, la **funzione** $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ definita tramite l'operatore di **minimizzazione**:

$$f(\vec{x}) := \mu_y (P(\vec{x}, y))$$

è ricorsiva. Questa non è necessariamente una funzione **totale**. [238]

838.1.1 Dimostrazione

$$f(\vec{x}) = \mu_y (\overline{\text{sgn}} (\chi_P(\vec{x}, y)) = 0)$$

Vedi: [Esempi di funzioni primitive ricorsive](#) e [Funzioni ricorsive](#)

839 Algoritmo di Tarski-Kuratowski

840 Insiemi disgiunti

Due insiemi A, B si dicono disgiunti se la loro intersezione è vuota:

$$A \cap B = \emptyset$$

841 Insieme semiricorsivo

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi Insieme dei numeri naturali MK) con i predicati k -ari (ovvero con k variabili libere), per mezzo degli insiemi di verità.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

841.1 Definizione

Un insieme/predicato $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è semiricorsivo se è la proiezione di un sottoinsieme ricorsivo di \mathbb{N}^{k+1} , ovvero se esiste $R \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ ricorsivo tale che

$$P(\vec{x}) \iff \exists y R(\vec{x}, y).$$

841.2 Insiemi ricorsivi sono semiricorsivi

Ogni insieme ricorsivo è semiricorsivo, ma non vale il viceversa.

842 Proprietà di chiusura degli insiemi semiricorsivi

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi Insieme dei numeri naturali MK) con i predicati k -ari (ovvero con k variabili libere), per mezzo degli insiemi di verità.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

842.1 Proposizione

La collezione degli insiemi semiricorsivi è chiusa per:

1. sostituzioni ricorsive (mediante funzioni totali);
2. proiezioni (ovvero quantificatori esistenziali);
3. intersezioni (ovvero congiunzioni);
4. unioni (ovvero disgiunzioni);
5. quantificazioni limitate.

842.1.1 Dimostrazione

1. Sia $P \subseteq \mathbb{N}^k$ un insieme semiricorsivo, e siano, per $1 \leq i \leq k$: $f_i : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ funzioni ricorsive totali. L'insieme $R \subseteq \mathbb{N}^\ell$ definito da

$$R(\vec{x}^\ell) \iff P(f_1(\vec{x}^\ell), \dots, f_k(\vec{x}^\ell))$$

è semiricorsivo. Infatti, siccome P è semiricorsivo, allora esiste $S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ ricorsivo tale che

$$P(\vec{x}^k) \iff \exists y S(\vec{x}^k, y).$$

Dunque, ponendo $\vec{x}^k := (f_1(\vec{x}^\ell), \dots, f_k(\vec{x}^\ell))$ si ha:

$$\begin{aligned} R(\vec{x}^\ell) &\iff P(f_1(\vec{x}^\ell), \dots, f_k(\vec{x}^\ell)) \\ &\iff P(\vec{x}^k) \\ &\iff \exists y S(\vec{x}^k, y) \\ &\iff \exists y S(f_1(\vec{x}^\ell), \dots, f_k(\vec{x}^\ell), y) \end{aligned}$$

ma $S(f_1(\vec{x}^\ell), \dots, f_k(\vec{x}^\ell), y)$ definisce un insieme ricorsivo, quindi la tesi.

2. Sia $P \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ semiricorsivo, e sia $R \subseteq \mathbb{N}^k$ definito da

$$R(\vec{x}) \iff \exists y P(\vec{x}, y).$$

R è semiricorsivo. Infatti, siccome P è semiricorsivo, allora esiste $S \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ ricorsivo tale che

$$P(\vec{x}, y) \iff \exists z S(\vec{x}, y, z).$$

Ma allora

$$\begin{aligned} R(\vec{x}) &\iff \exists y P(\vec{x}, y) \\ &\iff \exists y \exists z S(\vec{x}, y, z) \\ &\iff \exists t (\exists y \leq t \exists z \leq t S(\vec{x}, y, z)) \end{aligned}$$

e l'insieme definito da $(\exists y \leq t \exists z \leq t S(\vec{x}, y, z))$ è ricorsivo.

- 3. Come sopra
- 4. Come sopra
- 5. Come sopra

843 Teorema di Post

In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi **Insieme dei numeri naturali MK**) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scrivremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

Teorema 1. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è **ricorsivo** se e solo se P e $\mathbb{N}^k \setminus P$ sono **semiricorsivi**.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Siccome gli insiemi ricorsivi sono **chiusi per complemento**, se P è ricorsivo allora $\mathbb{N}^k \setminus P$ è ricorsivo; inoltre **gli insiemi ricorsivi sono semiricorsivi**, dunque la tesi.

(\Leftarrow): Siano $R, S \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ ricorsivi tali che

$$\begin{aligned} P(\vec{x}) &\iff \exists y R(\vec{x}, y) \\ (\mathbb{N}^k \setminus P)(\vec{x}) &\iff \exists y S(\vec{x}, y) \end{aligned}$$

Si consideri ora la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \vec{x} &\longmapsto \mu_y (R(\vec{x}, y) \vee S(\vec{x}, y)) \end{aligned}$$

Questa è una **funzione ricorsiva**, poiché ottenuta per **minimizzazione di un enunciato ricorsivo (congiunzione di prediciati ricorsivi)**. Inoltre, è una **funzione totale**, poiché:

- se $\vec{x} \in P$ allora esiste y tale che $R(\vec{x}, y)$, e pertanto esiste y tale che $R(\vec{x}, y) \vee S(\vec{x}, y)$;
- se $\vec{x} \notin P$ allora $\vec{x} \in \mathbb{N}^k \setminus P$ e dunque esiste y tale che $S(\vec{x}, y)$, e pertanto esiste y tale che $R(\vec{x}, y) \vee S(\vec{x}, y)$.

Infine, si ha che $P(\vec{x}) \iff R(\vec{x}, f(\vec{x}))$. L'implicazione (\Leftarrow) è ovvia. Viceversa, se $P(\vec{x})$ allora esiste y tale che $R(\vec{x}, y)$. Inoltre, se esistesse y tale che $S(\vec{x}, y)$, si avrebbe che $(\mathbb{N}^k \setminus P)(\vec{x})$, assurdo. Pertanto

$$f(\vec{x}) = \mu_y (R(\vec{x}, y) \vee S(\vec{x}, y)) = \mu_y (R(\vec{x}, y))$$

da cui la tesi. ■

844 Insieme semiricorsivo come range di funzioni ricorsive

In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi **Insieme dei numeri naturali MK**) con i **predicati k -ari** (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriviamo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

844.1 Proposizione

Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}$ è **semiricorsivo** se e solo se **vuoto** $P = \emptyset$ oppure se $P = \text{rng}(f)$ [239] per qualche funzione

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

ricorsiva totale.

844.1.1 Dimostrazione

Senza perdita di generalità, si può assumere $P \neq \emptyset$, poiché questo è ricorsivo e dunque semiricorsivo.

(\Rightarrow): Se P è semiricorsivo allora esiste $R \subseteq \mathbb{N}^2$ tale che

$$P(x) \iff \exists y R(x, y)$$

Sia dunque $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definita come segue: sia $a \in P$ fissato, allora

$$f(z) = \begin{cases} (z)_1 & R((z)_1, (z)_2) \\ a & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Questa è **totale**, tale che $f(\mathbb{N}) = P$, e inoltre è ricorsiva, poiché **definita per casi** su un insieme ricorsivo [240]

(\Leftarrow): Si ha che

$$P(y) \iff \exists x (\text{graph}(f)(x, y))$$

dove il **grafico** di f è **ricorsivo** poiché f è **totale** e **ricorsiva**.

845 Insieme ricorsivo infinito come range di funzione ricorsiva totale crescente

In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi **Insieme dei numeri naturali MK**) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

845.1 Proposizione

Un insieme infinito $P \subseteq \mathbb{N}$ è **ricorsivo** se e solo se $P = \text{rng}(f)$ [241] per qualche **funzione**

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

ricorsiva totale e **strettamente crescente**.

845.1.1 Dimostrazione

(\Rightarrow): Si costruisce la funzione f per ricorsione:

$$\begin{cases} f(0) = \mu_x (P(x)) \\ f(y+1) = \mu_x (P(x) \wedge f(y) < x) \end{cases}$$

(vedi “**Funzioni ricorsive per minimizzazione su un predicato**” e “**Schema di Ricorsione di funzioni ricorsive**”).

Questa è ricorsiva, totale e tale che $P = \text{rng}(f)$.

(\Leftarrow): Si ha che

$$P(y) \iff \exists x \leq y (\text{graph}(f)(x, y))$$

dove il **grafico** di f è **ricorsivo** poiché f è **totale** e **ricorsiva**. Quindi P è ricorsivo.

845.2 Corollario

Se $P \subseteq \mathbb{N}$ è ricorsivo e infinito, allora esiste una **biiezione** ricorsiva $g : P \rightarrow \mathbb{N}$.

Sia infatti $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione strettamente crescente totale e ricorsiva tale che $P = f(\mathbb{N})$.

Poiché questa è strettamente crescente allora è **iniettiva**, e restringendo il codominio si ottiene

$$f : \mathbb{N} \rightarrow P = f(\mathbb{N})$$

biettiva.

Pertanto l'inversa $g : P \rightarrow \mathbb{N}$ è una biiezione tra P e \mathbb{N} .

Inoltre, questa è ricorsiva, **poiché** il suo **grafico** è **ricorsivo**

$$\text{graph}(g)(x, y) \longleftrightarrow \text{graph}(f)(F(x, y))$$

dove $F : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}^2 : (m, n) \mapsto (n, m)$.

Il grafico è ricorsivo perché:

- $\text{graph}(f)$ è ricorsivo **poiché f è ricorsiva totale** ed F è una funzione ricorsiva;
- **gli insiemi ricorsivi sono chiusi per sostituzioni totali ricorsive.**

846 Separazione tramite boreiani di insiemi invarianti per una relazione di equivalenza su un Polacco

846.1 Esercizio 1

Let E be an equivalence relation on a Polish space X . A set $A \subseteq X$ is called **E -invariant** if $x \in A$ and $y E x$ implies $y \in A$, for all $x, y \in X$. Suppose that E is analytic, that is, $E \in \Sigma_1^1(X^2)$. Show that if $A, B \subseteq X$ are disjoint analytic E -invariant sets, then there is a Borel E -invariant set $C \subseteq X$ separating A from B , that is, $A \subseteq C$ and $C \cap B = \emptyset$.

Hint: Recursively define sets $A_n, C_n \subseteq X$ so that $A_0 = A$, C_n is a Borel set separating A_n from B , and $A_{n+1} \supseteq C_n$ is E -invariant, analytic, and disjoint from B .

846.1.1 Soluzione

Claim: Esistono due famiglie $(A_n)_{n \in \omega}, (C_n)_{n \in \omega}$ di sottoinsiemi di X , tali che

- $A_0 = A$;
- $\forall n \in \omega : A_n \subseteq C_n \subseteq A_{n+1}$;
- $\forall n \in \omega : C_n \in \mathbf{Bor}(X)$ e $C_n \cap B = \emptyset$
- $\forall n \in \omega : A_n$ è E -invariante, analitico.

Se tali famiglie esistono, sia $C := \bigcup_{n \in \omega} C_n$.

- C è E -invariante. Infatti, siano $x, y \in X$, con $x E y$. Se $x \in C$, allora esiste $n \in \omega$ tale che $x \in C_n \subseteq A_{n+1}$; poiché A_{n+1} è E -invariante, allora $y \in A_{n+1} \subseteq C_{n+1} \subseteq C$, e pertanto $y \in C$.
- $C \in \mathbf{Bor}(X)$, poiché unione numerabile di Boreliani.
- $A \subseteq C$; infatti $A = A_0 \subseteq C_0 \subseteq C$.
- $C \cap B = \emptyset$, poiché ciascun C_n è disgiunto da B .

Dimostrazione del claim: si procede per induzione.

1. Sia $A_0 := A$, E -invariante e analitico. Allora $A_0, B \subseteq X$ sono due insiemi analitici disgiunti, e pertanto esiste, per il Teorema 3.2.1, un Borelano $C_0 \subseteq X$ tale che

$$A_0 \subseteq C_0; \quad C_0 \cap B = \emptyset.$$

2. Per il passo induttivo, si supponga di aver costruito $(A_i)_{i \leq n}$ e $(C_i)_{i \leq n}$. Si costruiscono A_{n+1}, C_{n+1} .

L'insieme A_{n+1} è definito chiudendo C_n rispetto alla relazione di equivalenza E , ovvero

$$C_n \subseteq A_{n+1} := \{x \in X \mid \exists y \in C_n (x E y)\}.$$

- Ovviamente $A_n \subseteq C_n \subseteq A_{n+1}$, poiché E è riflessiva.
- A_{n+1} è E -invariante per definizione, poiché E è transitiva e simmetrica.
- A_{n+1} è analitico, poiché $(X \times C_n) \cap E$ è analitico, e A_{n+1} è

$$\pi_1((X \times C_n) \cap E)$$

dove $\pi_1 : X \times X \rightarrow X$ è la proiezione sul primo fattore (per la proposizione 3.1.5).

L'insieme $(X \times C_n) \cap E$ è analitico poiché Σ_1^1 è chiusa per intersezioni finite e:

- E è analitico per ipotesi;
- C_n è Borelano per ipotesi, dunque analitico, e, detta $\pi_2 : X \times X \rightarrow X$ la proiezione sul secondo fattore,

$$X \times C_n = \pi_2^{-1}(C_n)$$

e siccome Σ_1^1 è chiusa per retroimmagini continue, anche $X \times C_n$ è analitico.

- Si nota che $A_{n+1} \cap B = \emptyset$ poiché, se per assurdo esistesse $x \in A_{n+1} \cap B$ allora ci sarebbe $y \in C_n$ tale che

$$x E y$$

e siccome B è E -invariante, allora $y \in B$. Dunque $y \in B \cap C_n \neq \emptyset$. Assurdo.

Dunque gli insiemi $A_{n+1}, B \subseteq X$ sono analitici e disgiunti, e pertanto esiste, per il Teorema 3.2.1, un Borelano $C_{n+1} \subseteq X$ tale che

$$A_{n+1} \subseteq C_{n+1}; \quad C_{n+1} \cap B = \emptyset$$

■

- 847 Insieme parzialmente trasversale per una relazione di equivalenza**
- 848 Insieme trasversale per una relazione di equivalenza**
- 849 Selettore per una relazione di equivalenza**
- 850 Proprietà insieme parzialmente trasversale per una relazione di equivalenza in uno spazio polacco**

850.1 Esercizio 2

Let E be an equivalence relation on a Polish space X . A **partial transversal** for E is a set $T \subseteq X$ meeting each E -equivalence class in at most one point. Show that the following are equivalent:

1. E admits an uncountable analytic partial transversal;
2. E admits an uncountable Borel partial transversal;
3. there is a Borel function $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ such that $f(r_0) \not\equiv f(r_1)$ for all distinct $r_0, r_1 \in \mathbb{R}$.

850.1.1 Soluzione

a. **implica b.** Osservazione: se $T \subseteq X$ è un insieme trasversale parziale, allora ogni $T' \subseteq T$ è ancora un insieme trasversale parziale.

Inoltre, ogni insieme analitico A non numerabile ammette un sottoinsieme borealiano B non numerabile, in quanto:

- siccome A è analitico, allora A ha la PSP (per il Teorema 3.4.1);
- siccome A è non numerabile, allora esiste

$$\iota : 2^\omega \rightarrow A$$

una immersione topologica, ovvero ι continua e iniettiva;

- pertanto, per il Corollario 3.2.7, $B := \iota(2^\omega) \subseteq T$ è borealiano (poiché $2^\omega \in \mathbf{Bor}(2^\omega)$) ed è ovviamente non numerabile, poiché ha cardinalità $2^\omega > \omega$.

Pertanto l'insieme analitico trasversale parziale T ammette un sottoinsieme borealiano non numerabile $T' \subseteq T$, e per l'Osservazione iniziale, T' è un insieme trasversale parziale.

b. **implica a.** Questo è ovvio, poiché $\mathbf{Bor}(X) \subseteq \Sigma_1^1(X)$ per il Corollario 3.1.4.

b. **implica c.** Sia $T' \subseteq X$ un insieme borealiano trasversale parziale. Allora, per il Corollario 3.2.7 esiste un chiuso $F \subseteq \omega^\omega$ e una funzione continua e iniettiva

$$g : F \subseteq \omega^\omega \rightarrow X$$

tale che $g(F) = T'$.

Inoltre, per il Teorema 1.3.17, esiste una biiezione continua

$$h : F \subseteq \omega^\omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

In particolare, per il Corollario 3.2.6, h è un Borel-isomorfismo, e pertanto $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow F$ è una funzione boreiana.

Si pone quindi $f := g \circ h^{-1}$. Questa è una funzione boreiana iniettiva (poiché composizione di funzioni iniettive)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow X.$$

Siano dunque $r_0 \neq r_1 \in \mathbb{R}$. Allora $f(r_0) \neq f(r_1)$, e $f(r_0), f(r_1) \in T'$. Se per assurdo

$$f(r_0) E f(r_1)$$

si avrebbe che T' contiene due elementi distinti della stessa classe di E -equivalenza. Assurdo.

Pertanto, se $r_0 \neq r_1 \in \mathbb{R}$, allora $f(r_0) \not\equiv f(r_1)$.

c. implica b. La funzione f è necessariamente iniettiva, poiché se per assurdo esistessero $r_0 \neq r_1 \in \mathbb{R}$ tali che $f(r_0) = f(r_1)$, allora per la riflessività di E :

$$f(r_0) E f(r_1)$$

e questo contraddice l'ipotesi.

Si consideri dunque $A \subseteq \mathbb{R}$ non numerabile, $A \in \mathbf{Bor}(\mathbb{R})$: allora $f(A) \subseteq X$ è boreiano per il Corollario 3.2.7, ed è inoltre un insieme trasversale parziale per E : infatti se per assurdo vi fossero $x \neq y \in f(A)$ tali che $x E y$ allora, siccome f è iniettiva, esistono $x_0 \neq y_0 \in A$ tali che $x = f(x_0)$, $y = f(y_0)$, ovvero

$$f(x_0) E f(y_0).$$

Questo contraddice l'ipotesi. ■

851 Proprietà insieme trasversale e selettore per una relazione di equivalenza in uno spazio polacco

851.1 Esercizio 3

Let E be an equivalence relation on a Polish space X . A **transversal** for E is a set $T \subseteq X$ meeting every E -equivalence class in exactly one point. A **selector** for E is a map $s : X \rightarrow X$ selecting one element from each E -equivalence class, that is, $s(x) \in [x]_E$ and $s(x) = s(y)$ if $x E y$. Show that if E is analytic, then the following are equivalent:

1. E admits an analytic transversal;
2. E admits a Borel transversal;
3. E admits a Borel selector.

851.1.1 Soluzione

c. **implica b.** Sia $s : X \rightarrow X$ un selettore borealiano per E e sia $T := s(X)$.

Allora T è trasversale. Infatti incontra ogni classe di E -equivalenza esattamente una volta.

- Almeno una volta: Per ogni $x \in X$ esiste $t \in T$ tale che $x R t$: $t = s(x)$.
- Al più una volta: Siano $x \neq y \in T$ e siano $x_0, y_0 \in X$ tali che

$$s(x_0) = x, \quad s(y_0) = y.$$

Per definizione $x E x_0$ e $y E y_0$. Se per assurdo $x E y$ allora $x_0 E y_0$ per transitività di E .
Per definizione, allora

$$s(x_0) = s(y_0)$$

ovvero $x = y$. Assurdo.

Inoltre, sia

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow X \times X \\ x &\longmapsto (x, s(x)) \end{aligned}$$

Questa è una funzione boreiana, poiché s è boreiana: $f = \text{Id}_X \times s$ e per le proprietà di pag. 54, f è boreiana.

Allora, detta $D \subseteq X \times X$ la diagonale,

$$D := \{(x, x) \mid x \in X\}$$

si ha che D è chiuso, poiché X è metrizzabile e quindi Haussdorff. Inoltre $T = f^{-1}(D)$

- (\subseteq): Se $t \in T$, allora $s(t) = t$, poiché altrimenti $s(t) \in T$ sarebbe un elemento distinto da t della classe $[t]_E$. Pertanto $f(t) = (t, s(t)) = (t, t) \in D$.
- (\supseteq): Se $t \in f^{-1}(D)$ allora $s(t) = t$ e quindi $t \in s(X) = T$.

Dunque, siccome f è boreiana e D è chiuso, T è un boreiano.

b. **implica a.** Questo è ovvio, poiché $\mathbf{Bor}(X) \subseteq \Sigma_1^1(X)$ per il Corollario 3.1.4.

a. **implica c.** Sia $T \subseteq X$ un insieme analitico trasversale per E .

Siccome T è trasversale per E , allora è ben definita la funzione

$$\begin{aligned} \varphi : X/E &\longrightarrow T \\ [x]_E &\longmapsto t \in [x]_E. \end{aligned}$$

poiché per ogni classe di E -equivalenza esiste un unico elemento $t \in T$ tale che $t \in [x]_E$.

Si definisce dunque la funzione $s : X \rightarrow T : x \mapsto \varphi([x]_E)$. Questa è un selettore, poiché:

- per ogni $x \in X$: $s(x) = \varphi([x]_E) = t \in [x]_E$;

- se $x E y$ allora $[x]_E = [y]_E$ e pertanto

$$s(x) = \varphi([x]_E) = \varphi([y]_E) = s(y).$$

Resta da dimostrare che s sia Boreiana. Sfruttando il Teorema 3.2.4 è sufficiente dimostrare che $\text{graph}(s) \subseteq X \times X$ sia analitico. Si ha che

$$\text{graph}(s) = E \cap (X \times T)$$

infatti:

- se $(x, y) \in \text{graph}(s)$ allora $y = s(x)$, e poiché s è un selettore: $x E s(x)$ e quindi $(x, y) \in E$; inoltre $x \in X$ e $y = s(x) \in T$;
- viceversa, se $(x, y) \in E \cap (X \times T)$ allora $y \in T$ e $x E y$; inoltre y è l'unico elemento di T tale che $x E y$, e pertanto, per definizione $y = s(x)$.

Sia T che E sono analitici per ipotesi. Inoltre $X \times T = \pi_2^{-1}(T)$ è analitico, in quanto retroimmagine continua di un analitico (per la Proposizione 3.1.5), e dunque $\text{graph}(s)$ è analitico.

852 Coanalitici sono unione di omega1 boreiani

852.1 Esercizio 4

Prove the following theorem:

Let X be a Polish space. Then every $A \in \Pi_1^1(X)$ can be written as $A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$, where A_ξ is Borel for every $\xi < \omega_1$.

by completing the details of the following steps:

1. First prove the theorem for $X = \text{LO}$ and $A = \text{WO}$ as follows:
 - Given $\omega \leq \xi < \omega_1$, let WO_ξ be the set of codes for well-orders of ω with order type $\leq \xi$. Show that each WO_ξ is analytic.
 - Argue that there is a Borel set A_ξ such that $\text{WO}_\xi \subseteq A_\xi \subseteq \text{WO}$.
Optional: Show that WO_ξ itself is Borel by showing that its complement is analytic as well.
 - Conclude that $\text{WO} = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$.
2. Use the fact that WO is Π_1^1 -complete to prove the theorem for $X = \omega^\omega$ and an arbitrary $A \in \Pi_1^1(\omega^\omega)$.
3. Use the Borel isomorphism theorem for Polish spaces to transfer the result to an arbitrary uncountable Polish space X .
4. What happens if X is a countable Polish space?

852.1.1 Soluzione

Parte a. Si consideri lo spazio polacco $X := \text{LO} \subseteq 2^{\omega \times \omega}$ e si adotti la notazione dell'Esempio 3.1.8: l'insieme NWO è analitico, mentre l'insieme WO è coanalitico. È dunque possibile porre

$$A := \text{WO} \in \mathbf{\Pi}_1^1(\text{LO}).$$

- Sia $\omega \leq \xi < \omega_1$ fissato. Sia WO_ξ l'insieme di tutti gli elementi di WO con order type $\leq \xi$: un buon ordine $\langle A, \preceq \rangle$ ha order type ξ' se e solo se esiste una biiezione $f : A \rightarrow \xi'$ tale che, per ogni $a, b \in A$

$$a \preceq b \iff f(a) < f(b)$$

Dunque $x \in \text{WO}$ ha order type ξ' se e solo se esiste una funzione biiettiva $f : \omega \rightarrow \xi'$ tale che per ogni $m, n \in \omega$:

$$x(m, n) = 1 \iff f(m) < f(n)$$

Si consideri quindi $\text{WO}^{=\xi'}$ l'insieme di tutti gli elementi di WO con order type esattamente ξ' : per ogni $x \in \text{WO}$:

$$x \in \text{WO}^{=\xi'} \iff \exists f \in (\xi')^\omega \text{ biiettiva } \forall m, n \in \omega \ (x(m, n) = 1 \iff f(m) < f(n)).$$

Inoltre, se $x \in \text{LO}$, la condizione di destra garantisce che $x \in \text{WO}$, poiché la biiezione f è un isomorfismo di ordini e ξ' è ben ordinato (in quanto ordinale). Pertanto, per ogni $x \in \text{LO}$:

$$x \in \text{WO}^{=\xi'} \iff \exists f \in (\xi')^\omega \text{ biiettiva } \forall m, n \in \omega \ (x(m, n) = 1 \iff f(m) < f(n)).$$

Osservazione 1: per ogni $\xi' < \omega_1 = \omega^+$, si ha che $|\xi| = \aleph_0$, e pertanto ξ' è numerabile.

Osservazione 2: per ogni $\xi' < \omega_1$, ξ' è uno spazio polacco; infatti ogni ordinale numerabile è homeomorfo ad un sottoinsieme chiuso e numerabile di \mathbb{R} e pertanto è polacco. Quindi $(\xi')^\omega$ è ancora uno spazio polacco.

Si definisce quindi:

$$A_{m,n} := \{(x, f) \in \text{LO} \times (\xi')^\omega \mid (x(m, n) = 1 \iff f(m) < f(n)) \wedge f \text{ biiettiva}\}$$

Questo è un insieme **Bor** ($\text{LO} \times (\xi')^\omega$), poiché tutte le condizioni sono Boreiane:

$$\begin{aligned} (x, f) \in A_{m,n} \iff & [x(m, n) = 1 \iff f(m) < f(n)] \wedge \\ & \wedge [\forall \lambda, \mu \in \omega \ (f(\lambda) = f(\mu)) \rightarrow (\lambda = \mu)] \wedge \\ & \wedge [\forall \lambda < \xi' \ \exists k \in \omega \ (f(k) = \lambda)] \end{aligned}$$

Le quantificazioni sono tutte numerabili in virtù dell'Osservazione 1.

Pertanto

$$A_{m,n} \in \mathbf{Bor}(\text{LO} \times (\xi')^\omega) \subseteq \mathbf{\Sigma}_1^1(\text{LO} \times (\xi')^\omega),$$

e dunque anche $\bigcap_{m,n \in \omega} A_{m,n}$ è $\mathbf{\Sigma}_1^1(\text{LO} \times (\xi')^\omega)$.

Definita

$$\pi_{\text{LO}} : \text{LO} \times (\xi')^\omega \rightarrow \text{LO}$$

la proiezione sul primo fattore, allora

$$\text{WO}^{=\xi'} = \pi_{\text{LO}} \left(\bigcap_{m,n \in \omega} A_{m,n} \right).$$

Dunque applicando la Proposizione 3.1.5 (per l'osservazione precedente $(\xi')^\omega$ è Polacco) si ottiene che $\text{WO}^{=\xi'}$ è $\Sigma_1^1(\text{LO})$.

Inoltre,

$$\text{WO}_\xi = \bigcup_{\xi' \leq \xi} \text{WO}^{=\xi'}$$

e pertanto questo dimostra che $\text{WO}_\xi \in \Sigma_1^1(\text{LO})$, poiché Σ_1^1 è chiuso per unioni numerabili (per la Proposizione 3.1.5).

- Sia $\omega \leq \xi < \omega_1$ fissato. È possibile applicare il Teorema 3.2.1 a WO_ξ e NWO (infatti sono entrambi analitici e $\text{WO}_\xi \cap \text{NWO} \subseteq \text{WO} \cap \text{NWO} = \emptyset$): esiste A_ξ Boreliano tale che:

$$\text{WO}_\xi \subseteq A_\xi, \quad A_\xi \cap \text{NWO} = \emptyset$$

Siccome $\text{NWO} = X \setminus \text{WO}$ si ha che $A_\xi \subseteq \text{WO}$:

$$\text{WO}_\xi \subseteq A_\xi \subseteq \text{WO}.$$

Per ogni $\xi < \omega$ si pone $A_\xi = \emptyset \in \text{Bor}(\text{LO})$.

- Vale la seguente uguaglianza: $\text{WO} = \bigcup_{\omega \leq \xi < \omega_1} \text{WO}_\xi$. (\supseteq): è ovvio, poiché per ogni $\omega \leq \xi < \omega_1$ si ha $\text{WO}_\xi \subseteq \text{WO}$. (\subseteq): ciascun buon ordine lineare ha order type minore di ω_1 , e pertanto se $x \in \text{WO}$ allora esiste $\xi < \omega_1$ tale che $x \in \text{WO}_\xi$.

Pertanto si ha che

$$\text{WO} = \bigcup_{\omega \leq \xi < \omega_1} \text{WO}_\xi \subseteq \bigcup_{\omega \leq \xi < \omega_1} A_\xi = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$$

ed inoltre, per ogni $\xi < \omega_1$, $A_\xi \subseteq \text{WO}$ e dunque

$$\bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi \subseteq \text{WO}$$

Per doppia inclusione si ha proprio $\text{WO} = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$.

Parte b. Sia $X := \omega^\omega$ e $A \in \Pi_1^1(X)$.

Siccome WO è Π_1^1 -completo, allora esiste una funzione continua

$$f : \omega^\omega \rightarrow \text{LO}$$

tale che $f^{-1}(\text{WO}) = A$.

Per il punto precedente è possibile scrivere $\text{WO} = \bigcup_{\xi < \omega_1} B_\xi$ con $B_\xi \in \mathbf{Bor}(\text{LO})$, e quindi

$$A = f^{-1}(\text{WO}) = f^{-1}\left(\bigcup_{\xi < \omega_1} B_\xi\right) = \bigcup_{\xi < \omega_1} f^{-1}(B_\xi).$$

Posto $A_\xi := f^{-1}(B_\xi)$, si ha che $A_\xi \in \mathbf{Bor}(X)$ poiché $B_\xi \in \mathbf{Bor}(\text{LO})$ e f continua. Pertanto

$$A = \bigcup_{\xi < \omega_1} A_\xi$$

con A_ξ boreiani.

Parte c. Sia X uno spazio polacco non numerabile, e sia $A \in \mathbf{\Pi}_1^1(X)$. Per il Teorema 3.2.9 esiste un isomorfismo Boreliano:

$$F : \omega^\omega \rightarrow X$$

In particolare $B := F^{-1}(A) \in \mathbf{\Pi}_1^1(\omega^\omega)$ per il Corollario 3.1.16, poiché F è Boreliana. Per il punto precedente,

$$B = \bigcup_{\xi < \omega_1} B_\xi$$

con $B_\xi \in \mathbf{Bor}(\omega^\omega)$

Siccome F è una biiezione, allora $A = F(B)$:

$$A = F(B) = F\left(\bigcup_{\xi < \omega_1} B_\xi\right) = \bigcup_{\xi < \omega_1} F(B_\xi).$$

Posto ora $A_\xi := F(B_\xi)$, questi sono Boreiani per il Corollario 3.2.7, poiché F Boreliana iniettiva e B_ξ Boreliano.

Parte d. Se X è numerabile allora il teorema è banale: ogni sottoinsieme di X è unione numerabile di singoletti, che sono chiusi, e pertanto ogni sottoinsieme di X è un Boreliano. ■

853 Ogni insieme analitico non numerabile ammette un sottoinsieme boreiano non numerabile

Inoltre, ogni insieme analitico A non numerabile ammette un sottoinsieme boreiano B non numerabile, in quanto:

- siccome A è analitico, allora A ha la PSP (per il Teorema 3.4.1);

- siccome A è non numerabile, allora esiste

$$\iota : 2^\omega \rightarrow A$$

una immersione topologica, ovvero ι continua e iniettiva;

- pertanto, per il Corollario 3.2.7, $B := \iota(2^\omega) \subseteq T$ è boreiano (poiché $2^\omega \in \mathbf{Bor}(2^\omega)$) ed è ovviamente non numerabile, poiché ha cardinalità $2^\omega > \omega$.

[DA FINIRE](#)

854 Base debole di uno spazio topologico

Una base debole per uno spazio topologico (X, τ) è una collezione di aperti $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Omega} \subseteq \tau$ tali che, per ogni aperto non vuoto di X , $\emptyset \neq U \subseteq X$ esista $\alpha_0 \in \Omega$ tale che

$$A_{\alpha_0} \subseteq U.$$

855 Insieme analitico

855.1 Definizione

Sia X uno spazio topologico metrizzabile e separabile.

- $A \subseteq X$ è detto analitico se esiste uno spazio Polacco Y e una funzione continua

$$f : Y \rightarrow X$$

tale che $f(Y) = A$.

- $C \subseteq X$ è detto coanalitico se $X \setminus C$ è analitico.
- $B \subseteq X$ è detto bianalitico se B e $X \setminus B$ sono analitici.

La collezione dei sottoinsiemi di X analitici, coanalitici e bianalitici è indicata, rispettivamente, da

$$\Sigma_1^1(X), \quad \Pi_1^1(X), \quad \Delta_1^1(X)$$

855.2 Proposizione

Sia X uno spazio Polacco, e sia $\emptyset \neq A \subseteq X$. Sono fatti equivalenti:

1. A è analitico;
2. A è immagine continua di ω^ω ;
3. $A = \pi_X(C)$ per qualche $C \in \Pi_1^0(X \times \omega^\omega)$, $C \neq \emptyset$, dove π_X è la proiezione su X
4. $A = \pi_X(C)$ per qualche spazio Polacco Y e per qualche $C \in \mathbf{Bor}(X \times Y)$, $C \neq \emptyset$;
5. $A = f(C)$ per qualche spazio Polacco Y , per qualche $C \in \mathbf{Bor}(X \times Y)$ e per qualche funzione Boreiana $f : Y \rightarrow X$.

856 sigma-algebra

Definizione 1. Sia Ω un insieme. Una σ -algebra \mathcal{F} su Ω è una collezione di sottoinsiemi di Ω che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$
2. Se $A \in \mathcal{F}$, allora anche $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$
3. Se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, allora anche

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Dunque, una σ -algebra è una famiglia di insiemi chiusa per complementazione e per unioni numerabili, e che contiene l'insieme base Ω .

Proposizione 2. Sia \mathcal{F} una σ -algebra su uno spazio Ω . Allora valgono le seguenti proprietà fondamentali:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$

Dimostrazione: segue da $\Omega \in \mathcal{F}$ e dalla chiusura per complementi, poiché

$$\emptyset = \Omega \setminus \Omega \in \mathcal{F}$$

2. \mathcal{F} è chiusa per intersezioni numerabili: se $A_n \in \mathcal{F}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$$

Dimostrazione: segue dalla chiusura per complementi e per unioni numerabili, usando De Morgan.

3. \mathcal{F} è chiusa per differenza: se $A, B \in \mathcal{F}$, allora

$$A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B) \in \mathcal{F}$$

4. \mathcal{F} è chiusa per unioni finite e intersezioni finite: se $A, B \in \mathcal{F}$, allora $A \cup B \in \mathcal{F}$ e $A \cap B \in \mathcal{F}$

857 Caratterizzazione BP tramite gioco di Banach-Mazur

857.1 Lemma

Sia X uno spazio topologico di Choquet non vuoto tale che esista una distanza d su X le cui palle aperte sono aperti di X . Sia $A \subseteq X$.

Se per ogni aperto $U \subseteq X$ il gioco $G^{**}((X \setminus A) \cup U)$ è determinato allora $A \subseteq X$ ha BP.

857.1.1 Dimostrazione

Sia $A \subseteq X$. Si definisce l'aperto

$$U(A) := \bigcup \{U \subseteq X \text{ aperto} \mid U \setminus A \text{ è magro}\}.$$

Allora $U(A) \setminus A$ è magro e inoltre, se A ha la BP, allora $A =^* U(A)$. Questo segue direttamente dal Teorema 8.29 del Kechris.

In particolare quindi il gioco è determinato per

$$G^{**} ((X \setminus A) \cup U(A)).$$

Necessariamente è il giocatore II a vincere questo gioco. Infatti, si supponga per assurdo che I abbia una strategia vincente. Allora, per il Teorema II $(X \setminus A) \cup U(A)$ è magro in un aperto non vuoto B . In particolare, quindi $U(A)$ è magro in B , ovvero $U(A) \cap B$ è magro in B .

- Se $U(A) \cap B \neq \emptyset$, siccome $B \subseteq X$ è un aperto di uno spazio di Baire, allora è uno spazio di Baire; inoltre $U(A) \cap B$ è un aperto non vuoto di B , quindi è non magro. Assurdo.
- Se invece $U(A) \cap B = \emptyset$, si consideri il seguente insieme, magro per definizione:

$$((X \setminus A) \cup U(A)) \cap B = ((X \setminus A) \cap B) \cup (U(A) \cap B) = (X \setminus A) \cap B = B \setminus A$$

Allora, per definizione di $U(A)$, $B \subseteq U(A)$. Assurdo.

Pertanto, per il Teorema I, $(X \setminus A) \cup U(A)$ è comagro. Ma

$$(X \setminus A) \cup U(A) = X \setminus (A \setminus U(A))$$

e pertanto $A \setminus U(A)$ è magro. Per il risultato precedente $U(A) \setminus A$ è magro, e dunque

$$A \triangle U(A)$$

è magro, ovvero A ha la BP. ■

858 Codifica di un insieme numerabile

Definizione 1. Sia D un insieme numerabile. Una codifica di D è una funzione iniettiva

$$\varphi : D \rightarrow \mathbb{N}.$$

Una codifica si dice ricorsiva se il suo range $\text{rng}(\varphi)$ è un sottoinsieme ricorsivo di \mathbb{N} .

Inoltre, se D non è finito, allora esiste una biezione ricorsiva $f : \text{rng}(\varphi) \rightarrow \mathbb{N}$. Pertanto si può supporre che $\text{rng}(\varphi) = \mathbb{N}$.

859 Insiemi ricorsivi tramite codifica

859.1 Definizione

Siano $\varphi : D \rightarrow \mathbb{N}$ e $\psi : E \rightarrow \mathbb{N}$ due codifiche ricorsive per gli insiemi numerabili E, D .

- $A \subseteq D$ si dice (semi) ricorsivo rispetto alla codifica φ , se $\varphi(A) \subseteq \mathbb{N}$ è (semi) ricorsivo.
- Una funzione $f : D^k \rightarrow E$ si dice ricorsiva (parziale) rispetto alle codifiche φ, ψ se è ricorsiva la funzione (parziale)

$$\begin{aligned} f_{\varphi, \psi} : \mathbb{N}^k &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_k) &\longmapsto \psi \left[f \left(\varphi^{-1}(x_1), \dots, \varphi^{-1}(x_k) \right) \right] \end{aligned}$$

859.2 Esempi

1. Le funzioni J^k forniscono una codifica ricorsiva dell'insieme \mathbb{N}^k , che coincide con la nozione di ricorsività.

860 Teorema Cinese dei resti

Teorema 1. Siano c_0, \dots, c_k numeri naturali maggiori di 1, a due a due coprimi. Allora per ogni $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ esiste un unico

$$0 \leq x < \prod_{i=0}^k c_i$$

tale che, per ogni $i = 0, \dots, k$ si abbia la seguente equivalenza di classi di resto:

$$x \equiv a_i \pmod{c_i}$$

861 Funzione beta di Gödel

Definizione 1. Si definisce la funzione $\beta : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ come segue:

$$\beta(m, i) := \text{Res}((m)_0, (i+1) \cdot (m)_1 + 1)$$

dove $(\cdot)_0, (\cdot)_1$ sono le inverse della biezione $J : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$, e il resto:

$$\text{Res}(a, b) := \begin{cases} a & b = 0 \\ a \bmod b & b > 0 \end{cases}$$

Questa è una funzione ricorsiva primitiva, poiché composizione di funzioni ricorsive primitive.

Si osservi inoltre che per ogni $m, i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\beta(m, i) \leq (m)_0 \leq m$$

ed inoltre, se $m \neq 0$

$$\beta(m, i) < m.$$

862 Codifica delle sequenze finite tramite beta di Godel

La funzione β di Godel ha molte proprietà che garantiscono che si possa codificare “bene” l’insieme delle sequenze finite di numeri naturali, che è numerabile.

862.1 Lemma della Funzione di Godel

Sia quindi $\beta : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione beta di Godel. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $(a_0, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^{k+1}$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall i \leq k : \quad \beta(m, i) = a_i.$$

Questo verte fortemente sul seguente Lemma:

Siano $y, k \in \mathbb{N}$. Se per ogni $1 \leq k' \leq k$ si ha che k' divide y allora, posti

$$\forall i \leq k : \quad c_i := (i+1)y + 1$$

si ha che i c_i sono a due a due coprimi.

Questo permette di definire la codifica $\varphi : \mathbb{N}^{<\omega} \rightarrow \mathbb{N}$.

862.2 Definizione

Data la sequenza $s = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, si pone

$$\varphi(s) = \langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle$$

come il più piccolo $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\beta(m, 0) = k \wedge \forall 1 \leq i \leq k \ (\beta(m, i) = a_i).$$

Questo esiste per il lemma precedente.

862.3 Proprietà

- Il range della codifica $\text{Seq} = \text{rng}(\varphi)$ è ricorsivo primitivo, in quanto

$$\text{Seq} = \{m \in \mathbb{N} \mid \neg \exists m' < m \ (\beta(m', 0) = \beta(m, 0) \wedge \forall 1 \leq i \leq \beta(m, 0) \ \beta(m, i) = \beta(m', i))\}$$

- Si osservi che $\langle\langle \rangle\rangle = 0$, e inoltre, se $k \leq 1$:

$$\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle \geq a_j.$$

862.4 Funzioni Ausiliari alla codifica di Godel

- La funzione $\ell(x) := \beta(x, 0)$ che indica la lunghezza di una stringa è ricorsiva primitiva, in quanto lo è β .
- La decodifica $((i, x)) = \beta(x, i+1)$ è ricorsiva primitiva. Si pone $((x))_i := ((i, x))$.

- Esiste una funzione ricorsiva primitiva $\text{Conc} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tale che, per ogni $m, n \in \text{Seq}$

$$\text{Conc}(m, n) = \langle\langle \varphi^{-1}(m) \cdot \varphi^{-1}(n) \rangle\rangle$$

dove \cdot è la **concatenazione tra stringhe**. Questa funzione prende le codifiche di due stringhe e restituisce la codifica della stringa concatenata.

È ininfluente il valore che questa funzione assuma al di fuori di Seq.

- Esiste una funzione ricorsiva primitiva $\text{IS} : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per, per ogni $m \in \text{Seq}$ e ogni $\ell \in \mathbb{N}$:

$$\text{IS}(m, \ell) = \langle\langle \varphi^{-1}(m) \upharpoonright \ell \rangle\rangle$$

dove $s \upharpoonright \ell$ indica il **segmento iniziale** di s . Quindi $\text{IS}(m, \ell)$ è il codice del segmento iniziale della stringa che codifica in m .

862.5 Proposizione

1. Esiste una funzione ricorsiva primitiva tale che, per ogni $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$

$$\langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle \leq B(k, \max \{a_1, \dots, a_k\})$$

2. Per ogni $k \geq 1$ la **restrizione** di φ a stringhe di lunghezza k è ricorsiva primitiva:

$$\varphi \upharpoonright \mathbb{N}^k : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N} : (a_1, \dots, a_k) \rightarrow \langle\langle a_1, \dots, a_k \rangle\rangle.$$

863 Numeri naturali coprimi

864 Classe di resto

865 Funzione memoria

Sia $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ una **funzione** (anche **parziale**), e sia $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ la **codifica** delle **sequenze finite**.

865.1 Definizione

Si definisce $f^m : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ la **funzione memoria** associata ad f , definita come segue:

$$f^m(\mathbf{x}, y) = \langle\langle f(\mathbf{x}, 0), \dots, f(\mathbf{x}, y) \rangle\rangle.$$

Questa non è una funzione totale, e per il suo **dominio** vale: $(\mathbf{x}, y) \in \text{dom}(f^m)$ se e solo se, per ogni $z \leq y$, $(\mathbf{x}, z) \in \text{dom}(f)$.

In particolare, $\text{dom}(f^m) = \text{dom}(f)$ se e solo se $\text{dom}(f)$ è chiuso verso il basso rispetto all'ultima coordinata: questo accade, ad esempio, per le **funzioni definite per ricorsione**.

865.2 Lemma

Sia $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che se $(\mathbf{x}, y) \in \text{dom}(f)$ allora per ogni $z \leq y$: $(\mathbf{x}, z) \in \text{dom}(f)$ (cosicché $\text{dom}(f) = \text{dom}(f^m)$).

Allora f è **ricorsiva (primitiva)** sse f^m è **ricorsiva (primitiva)**.

866 Generalizzazione schema di Ricorsione tramite la funzione memoria

866.1 Proposizione

Siano $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ e $h : \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$ funzioni ricorsive (primitive). Allora la funzione $f : \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}) \\ f(\mathbf{x}, y + 1) = h(\mathbf{x}, y, f^m(\mathbf{x}, y)) \end{cases}$$

è ricorsiva (primitiva), dove f^m è la funzione memoria.

867 Teorema di Forma Normale di Kleene

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi Insieme dei numeri naturali MK) con i predici k-ari (ovvero con k variabili libere), per mezzo degli insiemi di verità.

Scrivremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

867.1 Teorema

Per ogni $k \geq 1$ esiste un predicato ricorsivo primitivo $T_k \subseteq \mathbb{N}^{k+2}$ ed una funzione ricorsiva primitiva $U : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni funzione (parziale) ricorsiva $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ esiste $e \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(\mathbf{x}) = U\left(\mu_y\left(T_k(e, \mathbf{x}, y)\right)\right).$$

dove $\mu_y(\cdot)$ è l'operatore di minimizzazione applicato ad un predicato ricorsivo.

868 Funzioni ricorsive e loro grafico

In questa sezione si identificano i sottinsiemi di \mathbb{N}^k (vedi Insieme dei numeri naturali MK) con i predici k-ari (ovvero con k variabili libere), per mezzo degli insiemi di verità.

Scrivremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

868.1 Grafico di una funzione ricorsiva totale è ricorsivo

1. Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione ricorsiva (primitiva) totale. Allora il suo grafico $\text{graph}(f) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ è ricorsivo (primitivo). [243]
2. Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione parziale. Se $\text{graph}(f)$ è ricorsivo, allora f è ricorsiva.
3. Una funzione totale $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è ricorsiva sse lo è il suo grafico.

868.2 Funzioni parziali con grafico semiricorsivo sono ricorsive

Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione parziale. Se il suo grafico $\text{graph}(f)$ è semiricorsivo, allora:

1. f è una [funzione ricorsiva](#);
2. il suo dominio $\text{dom}(f)$ è [semiricorsivo](#).

868.3 Grafico di una funzione ricorsiva parziale è semiricorsivo

Se $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione [parziale ricorsiva](#), allora il suo [grafico](#)

$$\text{graph}(f) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$$

è [semiricorsivo](#). Inoltre anche il [dominio](#) $\text{dom}(f)$ è [semiricorsivo](#).

Questa dimostrazione necessita del [Teorema di Forma Normale di Kleene](#).

868.4 Funzione ricorsiva sse il suo grafico è semiricorsivo

Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione [parziale](#). f è [ricorsiva](#) sse $\text{graph}(f)$ è [semiricorsivo](#).

868.5 Caratterizzazione funzioni ricorsive tramite grafico

Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ tale che il suo [dominio](#) $\text{dom}(f)$ è [ricorsivo](#). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. f è [ricorsiva](#);
2. $\text{graph}(f)$ è [ricorsivo](#);
3. $\text{graph}(f)$ è [semiricorsivo](#).

869 Funzioni ricorsive e loro dominio

869.1 Dominio di funzione parziale ricorsiva è semiricorsivo

Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è una funzione [parziale ricorsiva](#). Il [dominio](#) $\text{dom}(f)$ è [semiricorsivo](#).

Questo segue dal [lemma sul grafico](#).

870 Insieme semiricorsivo come dominio di funzione ricorsiva parziale

In questa sezione si identificano i [sottinsiemi](#) di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i [predicati](#) k -ari (ovvero con k [variabili libere](#)), per mezzo degli [insiemi di verità](#).

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

870.1 Proposizione

Un [insieme](#) $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è [semiricorsivo](#) se e solo se è [dominio](#) di qualche [funzione ricorsiva parziale](#) $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$:

$$P = \text{dom}(f).$$

871 Funzione ricorsiva parziale con dominio ricorsivo è restrizione di funzione ricorsiva totale

In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

871.1 Proposizione

Sia $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ una **funzione ricorsiva parziale** tale che il suo **dominio** $\text{dom}(f)$ sia **ricorsivo**. Allora esiste $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ **ricorsiva totale** tale che **ristretta** sia f :

$$f = g \upharpoonright \text{dom}(f).$$

- :PROPERTIES:

:ID: a6dd5cae-c225-49d4-8945-602100951278 :ROAM_ALIASES: “Insieme semiricorsivo nella gerarchia aritmetica” “Insieme ricorsivo nella gerarchia aritmetica” “Insieme aritmetico” :END: In questa sezione si identificano i **sottinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi [Insieme dei numeri naturali MK](#)) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

Definizione 1. • Sia $n \geq 1$. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice Σ_n^0 se esiste $R \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ **ricorsivo** tale che

$$P(\mathbf{x}) \iff \exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q_n y_n R(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n)$$

con $Q_n = \forall$ se n è pari e $Q_n = \exists$ se n è dispari.

- Sia $n \geq 1$. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice Π_n^0 se esiste $R \subseteq \mathbb{N}^{k+n}$ **ricorsivo** tale che

$$P(\mathbf{x}) \iff \forall y_1 \exists y_2 \forall y_3 \dots Q_n y_n R(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n)$$

con $Q_n = \exists$ se n è pari e $Q_n = \forall$ se n è dispari.

- Sia $n \geq 1$. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice Δ_n^0 se è Σ_n^0 e Π_n^0
- Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice aritmetico se esiste $n \geq 1$ tale che P sia Σ_n^0 oppure Π_n^0 .

Proposizione 2. • Un insieme è **semiricorsivo** se e solo se è Σ_1^0 .

- Gli insiemi Π_n^0 sono esattamente i **complementari** degli insiemi Σ_n^0 .
- Gli insiemi Σ_{n+1}^0 sono le proiezioni rispetto ad una qualsiasi variabile degli insiemi Π_n^0 .
- Per il [Teorema di Post](#), quindi, gli insiemi ricorsivi sono esattamente gli insiemi Σ_1^0 .
- Gli insiemi aritmetici sono la più piccola classe di insiemi contenente gli insiemi ricorsivi e chiusa per complementi e proiezioni.

Proposizione 3. Tutte le classi precedenti sono chiuse per:

- sostituzioni ricorsive mediante funzioni totali (quando viste come [predicati](#))
- [intersezioni](#) (ovvero congiunzioni)
- [unioni](#) (ovvero disgiunzioni)
- quantificazioni limitate.

Inoltre, le classi Σ_n^0 sono chiuse per quantificazioni esistenziali (ovvero per proiezioni).

Le classi Π_n^0 sono chiuse per quantificazioni universali.

Le classi Π_n^0 sono chiuse per complementi (e quindi sono [Algebre di Boole](#)).

Valgono le seguenti inclusioni:

$$\Sigma_n^0, \Pi_n^0 \subseteq \Delta_{n+1}^0 \subseteq \Sigma_{n+1}^0, \Pi_{n+1}^0.$$

Corollario 4. Gli insiemi aritmetici sono la più piccola classe contenente gli insiemi ricorsivi e chiusa per operatori logici.

872 Complessità di una formula nel linguaggio dell'aritmetica

872.1 Notazione

Si consideri il [linguaggio del prim'ordine](#) $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$. Si definiscono le seguenti pseudoformule (ovvero abbreviazioni):

- relazione d'ordine: “ $x \leq y$ ” sse $\varphi_{\leq}(x, y)$ dove

$$\varphi_{\leq}(x, y) = \exists z (z + x = y);$$
- numero zero: “ $x = 0$ ” sse $x + x = x$;
- numero uno: “ $x = 1$ ” sse $x \cdot x = x$;
- la [funzione successore](#): “ $y = S(x)$ ” sse $\exists w$ (“ $w = 1$ ” \wedge $x + w = 1$).

872.1.1 Quantificatore limitato nel linguaggio dell'aritmetica

Inoltre, per ogni linguaggio $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ e per ogni \mathcal{L}' -formula ψ si useranno le seguenti quantificazioni limitate: si scriverà

$$\begin{aligned}\exists w \leq t \psi \\ \forall w \leq t \psi\end{aligned}$$

in luogo di

$$\begin{aligned}\exists w (\varphi_{\leq}(w, t) \wedge \psi) \\ \forall w (\varphi_{\leq}(w, t) \rightarrow \psi).\end{aligned}$$

Queste verranno dette quantificazioni limitate.

872.2 Definizione

Sia $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ un linguaggio del prim'ordine. Si definiscono le classi di \mathcal{L}' -formule $\Delta_0, \Sigma_1, \Pi_1$:

- Δ_0 è la più piccola collezione di \mathcal{L}' -formule contenente le formule atomiche e chiusa per
 - connettivi ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow$),
 - quantificatori limitati;
- Σ_1 è la più piccola collezione di \mathcal{L}' -formule contenente Δ_0 e chiusa per
 - congiunzioni,
 - disgiunzioni,
 - quantificazioni limitate,
 - quantificazioni esistenziali;
- Π_1 è la più piccola collezione di \mathcal{L}' -formule contenente Δ_0 e chiusa per
 - congiunzioni,
 - disgiunzioni,
 - quantificazioni limitate,
 - quantificazioni universali.

Per induzione simultanea è possibile definire, per ogni **naturale** $n \geq 1$:

- Σ_{n+1} : la più piccola collezione di \mathcal{L}' -formule contenente Π_n e chiusa per
 - congiunzioni,
 - disgiunzioni,
 - quantificazioni limitate,
 - quantificazioni esistenziali;
- Π_{n+1} : la più piccola collezione di \mathcal{L}' -formule contenente Σ_n e chiusa per
 - congiunzioni,
 - disgiunzioni,
 - quantificazioni limitate,
 - quantificazioni universali.

872.3 Osservazioni

1. Le classi $\Delta_0, \Pi_n, \Sigma_n$ si intendono chiuse per **equivalenza logica**.
2. La negazione di una Σ_n -formula è (logicamente equivalente a) un Π_n -formula.
3. La negazione di una Π_n -formula è (logicamente equivalente a) un Σ_n -formula.

872.4 Descrizione esplicita

Se $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ è una Σ_1 formula, allora esiste una Δ_0 formula $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ tale che φ sia equivalente a

$$\exists y \psi(x_1, \dots, x_k, y).$$

nel modello standard.

Dunque, a meno di equivalenza su $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ le formule Σ_n sono della forma

$$\exists y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q y_n \psi(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n)$$

dove ψ è Δ_0 e $Q = \forall$ se n è pari e $Q = \exists$ se n è dispari.

Dunque, a meno di equivalenza su $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ le formule Π_n sono della forma

$$\forall y_1 \forall y_2 \exists y_3 \dots Q y_n \psi(\mathbf{x}, y_1, \dots, y_n)$$

dove ψ è Δ_0 e $Q = \exists$ se n è pari e $Q = \forall$ se n è dispari.

873 Complessità di un insieme definibile nel modello standard

873.1 Notazione

Si consideri il linguaggio del prim'ordine $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$. Si definiscono le seguenti pseudoformule (ovvero abbreviazioni):

- relazione d'ordine: “ $x \leq y$ ” sse $\varphi_{\leq}(x, y)$ dove

$$\varphi_{\leq}(x, y) = \exists z (z + x = y);$$

- numero zero: “ $x = 0$ ” sse $x + x = x$;
- numero uno: “ $x = 1$ ” sse $x \cdot x = x$;
- la funzione successore: “ $y = S(x)$ ” sse $\exists w$ (“ $w = 1$ ” \wedge $x + w = 1$).

Inoltre, per ogni linguaggio $\mathcal{L}' \supseteq \mathcal{L}$ e per ogni \mathcal{L}' -formula ψ si useranno le seguenti quantificazioni limitate: si scriverà

$$\begin{aligned} \exists w \leq t \psi \\ \forall w \leq t \psi \end{aligned}$$

in luogo di

$$\begin{aligned} \exists w (\varphi_{\leq}(w, t) \wedge \psi) \\ \forall w (\varphi_{\leq}(w, t) \rightarrow \psi) \end{aligned}$$

873.2 Definizione

- Un **sottoinsieme** $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice Γ -definibile (dove Γ è uno tra le **classi di complessità** $\Delta_0, \Sigma_n, \Pi_n$) se esiste una Γ -**formula** $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ tale che

$$P = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^k \mid \langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\}.$$

dove $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ è il **modello standard dell'aritmetica**.

- Un **sottoinsieme** $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice Δ_n -definibile se è sia Π_n -definibile che Σ_n -definibile.
- Un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ si dice definibile se è Γ -definibile per qualche Γ scelto tra $\Delta_0, \Sigma_n, \Pi_n$.
- Una funzione $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ si dice Γ -definibile (dove Γ è uno tra le **classi di complessità** $\Delta_0, \Sigma_n, \Pi_n$) se il suo **grafico** $\text{graph}(f) \subseteq \mathbb{N}^{k+1}$ è un sottoinsieme Γ -definibile.

873.3 Esempi di predici Delta0 definibili

In questa sezione si identificano i **sottoinsiemi** di \mathbb{N}^k (vedi **Insieme dei numeri naturali MK**) con i **predicati** k -ari (ovvero con k **variabili libere**), per mezzo degli **insiemi di verità**.

Scriviamo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$.

- L'insieme vuoto $A = \emptyset$ è Δ_0 -definibile, dalla formula $\neg(x = x)$.
- I predici “ $x = 0$ ” e “ $x = 1$ ” sono chiaramente Δ_0 definibili. Inoltre, per ogni $0 \neq n \in \mathbb{N}$, il predicato “ $x = n$ ” (ovvero l'insieme $\{n\} \subseteq \mathbb{N}$) è Δ_0 -definibile, poiché

$$\text{“}x = n\text{”} \iff \exists y \leq x (\text{“}y = 1\text{”} \wedge x = \underbrace{y + y + \cdots + y}_{n \text{ volte}}).$$

Di conseguenza, ogni insieme finito $\{n_1, \dots, n_k\} \subseteq \mathbb{N}$ è Δ_0 -definibile dalla formula

$$\text{“}x = n_1\text{”} \vee \text{“}x = n_2\text{”} \vee \dots \vee \text{“}x = n_k\text{”}.$$

- La relazione d'ordine $\leq \subseteq \mathbb{N}^2$ è Δ_0 -definibile, in quanto

$$\text{“}x \leq y\text{”} \iff \exists w \leq y (x = w).$$

Nota: questa definizione non è circolare, perché semplicemente si è richiesto che le classi Δ_0 siano chiuse per quantificazione limitata, che è definita essere **così**.

- La **funzione successore** è Δ_0 -definibile, poiché

$$\text{“}S(x) = y\text{”} \iff \exists z \leq y (\text{“}z = 1\text{”} \wedge y = x + z).$$

- Il predicato “ x è un numero primo” è Δ_0 -definibile.

873.4 Proprietà di chiusura delle classi degli insiemi definibili

Sia Γ una tra $\Sigma_n, \Pi_n, \Delta_n$. La collezione degli insiemi Γ -definibili è chiusa per

- intersezioni
- unioni
- quantificazioni limitate.

Inoltre la collezione dei Σ_n -definibili è chiusa per proiezioni, mentre la collezione dei Δ_n -definibili è chiusa per complementi.

874 Definibilità e ricorsività

Sia \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, e sia $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ il modello standard dell'aritmetica.

Teorema 1. Ogni funzione (parziale) $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ ricorsiva è Σ_1 -definibile nel modello standard $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$.

Dimostrazione. Partendo dalla definizione equivalente di funzioni ricorsive si osserva che le funzioni $\{U_i^k, +, \cdot\}$ sono Δ_0 -definibili poiché

$$\begin{aligned} "U_i^k(x_1, \dots, x_k) = y" &\iff \varphi(x_1, \dots, x_k, y) : x_i = y \\ "x + y = z" &\iff x + y = z \\ "x \cdot y = z" &\iff x \cdot y = z \end{aligned}$$

e quindi sono anche Σ_1 -definibili.

Inoltre anche χ_{\leq} è Σ_1 -definibile, poiché, se φ_{\leq} è la Δ_0 -formula che definisce \leq :

$$\chi_{\leq}(x, y) = z \iff ("z = 1" \wedge \varphi_{\leq}(x, y)) \vee ("z = 0" \wedge \varphi_{\leq}(y, z))$$

Resta da dimostrare che la classe delle funzioni Σ_1 -definibili è chiusa per composizione e applicazioni di μ a funzioni totali.

- Siano $f(y_1, \dots, y_\ell), g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_\ell(x_1, \dots, x_k)$ funzioni Σ_1 -definibili. Allora

$$\begin{aligned} "z = f(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_\ell(x_1, \dots, x_k))" &\iff \\ \iff \exists z_1 \dots \exists z_\ell \left("z = f(z_1, \dots, z_\ell)" \wedge \bigwedge_{i=1}^{\ell} "g_i(x_1, \dots, x_k) = z_i" \right). \end{aligned}$$

- Sia $h(x_1, \dots, x_k, z)$ una funzione Σ_1 -definibile, e sia

$$f(x_1, \dots, x_k) = \mu_z (h(x_1, \dots, x_k, z) = 0).$$

Allora

$$\begin{aligned} "f(x_1, \dots, x_k) = y" &\iff \\ \iff "h(x_1, \dots, x_k, y) = 0" \wedge \forall z \leq y \left(\exists w (\neg "w = 0" \wedge "h(x_1, \dots, x_k, y) = w") \right) \blacksquare \end{aligned}$$

■

Corollario 2. Un insieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è **semiricorsivo** se e solo se è Σ_1 -definibile nel **modello standard** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

In particolare, una funzione (parziale) è Σ_1 -definibile se e solo se il suo **grafo** è semiricorsivo.

Corollario 3. Un insieme è **ricorsivo** se e solo se è Δ_1 -definibile nel **modello standard** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Corollario 4. Sia $n \geq 1$. Un insieme è rispettivamente [BROKEN LINK: a6dd5cae-c225-49d4-8945-602100951278] se e solo se è rispettivamente Σ_n , Π_n , Δ_n -definibile nel **modello standard** $(\mathbb{N}, +, \cdot)$.

Corollario 5. Per ogni **funzione (parziale)** $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ sono fatti equivalenti:

1. f è ricorsiva;
2. f è Σ_1 -definibile;
3. f è Π_1 -definibile;

Questo segue banalmente da “Caratterizzazione funzioni ricorsive tramite grafico”.

875 Algebra di Boole

From the book

Definizione 1. A boolean algebra is a structure $\langle B, \wedge, \vee, \neg, 0_B, 1_B \rangle$ such that, for all $a, b, c \in B$:

1. associative:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c \\ a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c; \end{aligned}$$

2. distributivity:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee b); \end{aligned}$$

3. commutative:

$$\begin{aligned} a \wedge b &= b \wedge a \\ a \vee b &= b \vee a; \end{aligned}$$

4. identity:

$$\begin{aligned} a \vee 0 &= a \\ a \wedge 1 &= a; \end{aligned}$$

5. complements:

$$\begin{aligned} a \wedge \neg a &= 0 \\ a \vee \neg a &= 1. \end{aligned}$$

876 Relazione tra MCD e mcm

Siano $m, n \in \mathbb{N}$ numeri naturali positivi, e si considerino MCD e mcm. Allora

$$\text{MCD}(m, n) \cdot \text{mcm}(m, n) = m \cdot n.$$

877 Modello standard dell'aritmetica

Definizione 1. Sia $\mathcal{L} = \{+, \cdot\}$ un linguaggio del prim'ordine. La \mathcal{L} -struttura $\langle \mathbb{N}, +, \cdot \rangle$ è detta modello standard dell'aritmetica. Spesso questo viene esteso a $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle$ nel linguaggio $L_Q = \{+, \cdot, S, 0\}$.

878 Aritmetica di Peano del second'ordine

Definizione 1. L'aritmetica di Peano del second'ordine PA_2 è la teoria del second'ordine nel linguaggio $L_2 := \{S, 0\}$, assiomatizzata come segue:

- (P1) $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y)$
- (P2) $\forall x \neg(S(x) = 0)$
- (P3) $\forall P \left[\left(P(0) \wedge \forall u (P(u) \rightarrow P(S(u))) \right) \rightarrow (\forall x P(x)) \right]$

Teorema 2. (Teorema di Dedekind) Tutti i modelli di PA_2 sono isomorfi tra di loro.

Questo Teorema, posto che esiste un modello di PA_2 , garantisce che questo sia “unico”, e possa essere identificato con il modello standard.

Osservazione. Questo approccio non è soddisfacente, poiché per la logica del secondo ordine non esiste un calcolo logico corretto e completo: non è possibile garantire che si possano dimostrare tutte le conseguenze logiche di PA_2 .

Si consideri il linguaggio del prim'ordine $L_Q := \{+, \cdot, S, 0\}$.

879 Aritmetica di Robinson

L'aritmetica di Robinson Q è la L_Q -teoria assiomatizzata da:

- (Q1) $\forall x \forall y (S(x) = S(y) \rightarrow x = y);$
- (Q2) $\forall x \neg(0 = S(x));$

- (Q3) $\forall x (\neg(x = 0) \rightarrow \exists z (x = S(z)))$;
- (Q4) $\forall x (x + 0 = x)$;
- (Q5) $\forall x \forall y (x + S(y) = S(x + y))$
- (Q6) $\forall x (x \cdot 0)$;
- (Q7) $\forall x \forall y (x \cdot S(y) = x \cdot y + x)$.

880 Aritmetica di Peano del prim'ordine

L'aritmetica di Peano del prim'ordine PA_1 , (spesso denotata con PA), è la L_Q -teoria assiomatizzata da (Q1)-(Q7) e da una famiglia di assiomi di induzione $\{\text{Ind}_{\varphi,x}\}$. Data una L_Q -formula del prim'ordine φ e una variabile x che occorra libera in φ , l'assioma $\text{Ind}_{\varphi,x}$ è la chiusura universale di

$$[\varphi(0) \wedge \forall u (\varphi(u) \rightarrow \varphi(S(u)))] \rightarrow \forall x \varphi(x)$$

dove per chiusura universale si intende: in φ ci potrebbero essere altre variabili libere oltre a x ; queste si intendono quantificate universalmente all'esterno della formula in display.

881 Numerali

Chiamiamo numerali gli L_Q -termini chiusi costruiti a partire da 0 e S . In particolare, si indica, per ogni $n \in \mathbb{N}$:

$$\bar{n} := \underbrace{S(S(\dots(S(0))))}_{n \text{ volte}}.$$

882 Numeri standard e numeri non standard per l'aritmetica di Robinson

Sia \mathcal{M} un modello di Q . Gli elementi di $M = |\mathcal{M}|$ vengono chiamati numeri. Quelli della forma $\bar{n}^{\mathcal{M}}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$ sono detti numeri standard di \mathcal{M} .

Gli altri eventuali elementi di M sono detti numeri non standard.

La parte standard di \mathcal{M} è la sua restrizione di dominio $\{\bar{n}^{\mathcal{M}} \mid n \in \mathbb{N}\}$ ed è isomorfa al modello standard $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle$ mediante la mappa $\bar{n}^{\mathcal{M}} \mapsto n$.

Il modello \mathcal{M} si dice non standard se non è isomorfo al modello standard.

Osservazione. L'artimetica di Robinson è sufficientemente forte da dimostrare le usuali proprietà di somma e prodotto per la parte standard di ogni suo modello. Queste però non valgono necessariamente per la parte non standard.

Gli assiomi di induzione di PA “servono” proprio a garantire che la parte “buona” del modello sia tutta, ovvero che se una proprietà vale su tutta la parte standard, allora vale su tutto il modello.

Sia $L \supset L_Q$ un [linguaggio](#) che estende quello dell'[aritmetica di Robinson](#). Con \vdash si intende la relazione di dimostrabilità in un qualunque calcolo logico per la logica del prim'ordine, corretto e completo. Se $n \in \mathbb{N}$, con \bar{n} si intende il [numerale](#) corrispondente.

883 Insieme rappresentato da una formula

Sia T una [L-teoria](#). La L -formula $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ [rappresenta](#) $P \subseteq \mathbb{N}^k$ in T se per ogni $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$:

- se $(a_1, \dots, a_k) \in P$ allora $T \vdash \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$;
- se $(a_1, \dots, a_k) \notin P$ allora $T \vdash \neg\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k)$.

884 Funzione totale rappresentata da una formula

Sia T una L -teoria. La L -formula $\varphi(x_1, \dots, x_k, y)$ [rappresenta](#) la [funzione totale](#) $F : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ se per ogni $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$

$$T \vdash \forall y \left[\varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, y) \longleftrightarrow y = \overline{F(a_1, \dots, a_k)} \right].$$

Questa condizione richiede che φ definisca una funzione solo quando ristretta ai [numeri standard](#). È però più forte di richiedere che il [grafico](#) di F sia rappresentabile, in quanto questa seconda richiesta non impedisce che esiste y non standard tale che

$$T \vdash \varphi(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k, y).$$

885 Insieme rappresentabile

Un sottoinsieme o una funzione si dicono [rappresentabili](#) in una L -teoria T se esiste una formula che li rappresenta in T . Si noti che questa formula non deve essere unica.

886 Nota

La nozione di “rappresentabilità” è molto simile a quello di “[definibilità](#)”, solo che il focus qui è sulla [teoria](#) (ovvero è puramente sintattico), mentre per quanto riguarda la definibilità si è fissato un modello specifico, il modello standard.

887 Aritmetica di Robinson rappresenta funzioni ricorsive totali e predici

Sia $L_Q = \{+, \cdot, S, 0\}$ il [linguaggio](#) dell'aritmetica di Robinson, e sia Q l'[aritmetica di Robinson](#).

Lemma 1. Se $P, R \subseteq \mathbb{N}^k$ sono [rappresentabili](#) in Q dalle [formule](#) φ e ψ rispettivamente, allora anche

$$P \cap R, \quad P \cup R, \quad P$$

sono rappresentati dalle formule $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$ e $\neg\psi$, rispettivamente.

In particolare gli insiemi rappresentabili in Q formano un'algebra di Boole.

Lemma 2. Un sottoinsieme $P \subseteq \mathbb{N}^k$ è rappresentabile in Q (da una formula Δ_0) se e solo se la sua funzione caratteristica $\chi_P : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è rappresentabile in Q (da una formula Δ_0).

Dimostrazione. (\Rightarrow): Se $\varphi(x_1, \dots, x_k)$ rappresenta $P \subseteq \mathbb{N}^k$ allora ψ rappresenta χ_P :

$$\psi(x_1, \dots, x_k, y) : [\varphi(x_1, \dots, x_k) \wedge y = \bar{1}] \vee [\neg\varphi(x_1, \dots, x_k) \wedge y = \bar{0}].$$

(\Leftarrow): Se $\psi(x_1, \dots, x_k, y)$ rappresenta χ_P , allora φ rappresenta P :

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) : \psi(x_1, \dots, x_k, \bar{1}).$$

dove si è effettuata una sostituzione di y con il termine $\bar{1}$. ■

Lemma 3. Per dimostrare che una funzione $F : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ è rappresentata in una $L_Q \subseteq L$ -teoria T da una formula del tipo

$$f(x_1, \dots, x_k) = y$$

con $f \in L$, allora è sufficiente mostrare che per ogni $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$

$$T \vdash f(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_k) = \overline{F(a_1, \dots, a_k)}.$$

In particolare, quindi, la funzione successore su \mathbb{N} : $n \mapsto n + 1$ è rappresentata in Q dalla formula

$$S(x) = y.$$

Lemma 4. La formula $x + y = z$ rappresenta in Q la funzione $+ : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.

La formula $x \cdot y = z$ rappresenta in Q la funzione $\cdot : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$.

Corollario 5. Per ogni L_Q -termine chiuso t esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $Q \vdash t = \bar{n}$. (*dimostrazione per induzione sull'altezza del termine*)

Lemma 6. La formula $x_1 = x_2$ rappresenta la relazione di uguaglianza

$$P = \{(n, m) \in \mathbb{N}^2 \mid n = m\}.$$

Corollario 7. Se t_1, t_2 sono L_Q -termini chiusi, allora

$$Q \vdash t_1 = t_2 \quad \text{oppure} \quad Q \vdash \neg(t_1 = t_2).$$

Lemma 8. Per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Q \vdash \forall x \ [\varphi_{\leq}(x, \bar{n}) \longleftrightarrow x = \bar{0} \vee \dots \vee x = \bar{n}]$$

dove $\varphi_{\leq}(x, y)$ è la formula $\exists z (z + x = y)$.

Corollario 9. Questo lemma implica che in qualunque modello M di Q , se un elemento $q \in M$ è minore o uguale (nel senso della relazione binaria definita in M da φ_{\leq}) ad un numero standard \bar{n}^M , allora $q = \bar{m}^M$ per qualche $m \leq n$. Dunque l'[isomorfismo canonico tra \$\mathbb{N}\$ e i numeri standard di \$M\$](#) preserva anche l'ordine \leq .

Corollario 10. Se $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi(x)$ è una L_Q -formula, allora sono equivalenti

1. $Q \vdash \varphi(a)$ per ogni $a \leq n$;
2. $Q \vdash \forall x \leq \bar{n} \varphi(x)$.

Lemma 11. La formula $\varphi_{\leq}(x, y) : \exists z (z + x = y)$ rappresenta la relazione $\leq \subseteq \mathbb{N}^2$ in Q .

Lemma 12. Per ogni $b \in \mathbb{N}$:

$$Q \vdash \forall x (\varphi_{\leq}(x, \bar{b}) \vee \varphi_{\leq}(\bar{b}, x)).$$

Teorema 13. Ogni [funzione ricorsiva totale](#) è rappresentata in Q da una [formula](#) di complessità Σ_1 .

#+BEGIN_{cor} Sia $L \supseteq L_Q$ un linguaggio del prim'ordine e T una L -teoria tale che $T \supseteq Q$. Allora:

- Ogni [funzione ricorsiva totale](#) è rappresentata in T da una [formula](#) di complessità Σ_1 .
- Ogni insieme ricorsivo è rappresentato in T sia da una [formula](#) di complessità Σ_1 che da una formula di complessità Π_1 .

#+END_{lem}

888 Logica del second'ordine

889 Descrizione modelli dell'aritmetica di Robinson

Sia L_Q il [linguaggio dell'aritmetica di Robinson](#), e sia Q l'aritmetica di Robinson.

Sia M una L_Q -struttura tale che $M \models Q$.

- Se un elemento $q \in M$ è minore o uguale (nel senso della relazione binaria definita in M da $\varphi_{\leq}(x, y) : \exists z (z + x = y)$) ad un numero standard \bar{n}^M , allora $q = \bar{m}^M$ per qualche $m \leq n$. Dunque l'[isomorfismo canonico tra \$\mathbb{N}\$ e i numeri standard di \$M\$](#) preserva anche l'ordine \leq .
- Per ogni $q \in M$, se q è nonstandard allora q è strettamente maggiore (nel senso della relazione binaria definita in M da $\varphi_{\leq}(x, y) : \exists z (z + x = y)$) di qualunque numero standard.
- Sia $A \subseteq M$ un sottoinsieme di M contenente un numero standard \bar{n}^M . Allora esiste un numero standard \bar{m}^M che è un [minimo](#) di A ovvero tale che per ogni $q \in A$ si ha

$$M \models \varphi_{\leq}[\bar{m}, q].$$

(vedi “[Sostituzione di termini in una formula](#)”)

890 Aritmetizzazione della sintassi

Sia $L = \text{Rel} \cup \text{Fun} \cup \text{Cost}$ un [linguaggio del prim'ordine numerabile](#), dove $\text{Rel}, \text{Fun}, \text{Cost}$ sono gli insiemi di simboli di, rispettivamente, relazione, funzione e costanti, con $\text{ar}(\cdot)$ la funzione di [arietà](#), e sia $\text{Vbl} = \{v_i \mid i \in \omega\}$ l'insieme delle [variabili](#).

890.1 Buona codifica di un linguaggio

Una buona codifica per L è una [codifica ricorsiva](#) dell'insieme $D = L \cup \text{Vbl} \cup \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow\rightarrow, \exists, \forall, =\}$

$$\# : D \rightarrow \mathbb{N}$$

tale che

- $\#(v_i) = 2i$ per ogni $v_i \in \text{Vbl}$;
- $\#(\neg) = 1, \#(\wedge) = 3, \#(\vee) = 5, \#(\rightarrow) = 7, \#(\leftarrow\rightarrow) = 9, \#(\exists) = 11, \#(\forall) = 13, \#(=) = 15$;
- le [immagini](#) $\text{Rel}^\# := \#[\text{Rel}], \text{Fun}^\# := \#[\text{Fun}]$ e $\text{Cost}^\# := \#[\text{Cost}]$ sono ricorsivi primitivi;
- la funzione $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che

$$a(n) = \begin{cases} \text{ar}(s) & \text{se } n = \#(s) \text{ per qualche } s \in \text{Rel} \cup \text{Fun} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è ricorsiva primitiva.

890.2 Buona codifica dei termini di un linguaggio

A partire da $\#$, si definiscono delle codifiche $\lceil t \rceil$ per gli L -termini t per ricorsione sull'[altezza](#) di t :

- se t è della forma s per qualche simbolo $s \in \text{Cost} \cup \text{Vbl}$, si pone

$$\lceil t \rceil := \langle\langle \#(s) \rangle\rangle$$

dove $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ è la [codifica di Godel per le sequenze finite](#);

- se t è della forma $f(t_1, \dots, t_k)$ per qualche $f \in \text{Fun}$ e con $\text{ar}(f) = k$, si pone

$$\lceil t \rceil := \langle\langle \#(f), \lceil t_1 \rceil, \dots, \lceil t_k \rceil \rangle\rangle.$$

Si indica con Term l'insieme degli L -termini e con $\text{Term}^\#$ l'insieme delle loro codifiche, ovvero

$$\text{Term}^\# := \{\lceil t \rceil \mid t \in \text{Term}\}.$$

Proposizione 1. Valgono le seguenti proprietà:

- $0 \notin \text{Term}^\#$, poiché $0 = \langle\langle \rangle\rangle$ mentre ogni elemento di $\text{Term}^\#$ è codifica di una sequenza non vuota;
- per ogni $t, t' \in \text{Term}$ si ha

- $\text{ht}(t) \leq \lceil t \rceil$;
- se t' è un **sottotermine** di t , allora $\lceil t' \rceil \leq \lceil t \rceil$;
- $\lceil t \rceil = \lceil t' \rceil$ se e solo se $t = t'$;
- se il simbolo s occorre in t , allora $\#(s) \leq \lceil t \rceil$;
- l'insieme $\text{Term}^\#$ è ricorsivo primitivo.

890.3 Buona codifica delle formule di un linguaggio

A partire da $\#$, si definiscono delle codifiche $\lceil \varphi \rceil$ per le *L-formule* φ per ricorsione sull'**altezza** di φ :

- se φ è della forma $t_1 = t_2$ con $t_1, t_2 \in \text{Term}$, allora

$$\lceil \varphi \rceil = \langle\langle \#(=), \lceil t_1 \rceil, \lceil t_2 \rceil \rangle\rangle;$$

- se φ è della forma $R(t_1, \dots, t_k)$ con $R \in \text{Rel}$, $\text{ar}(R) = k$ e $t_1, \dots, t_k \in \text{Term}$, allora si pone

$$\lceil \varphi \rceil = \langle\langle \#(R), \lceil t_1 \rceil, \dots, \lceil t_k \rceil \rangle\rangle;$$

- se φ è della forma $\neg\psi$ poniamo $\lceil \varphi \rceil = \langle\langle \#(\neg), \lceil \psi \rceil \rangle\rangle$;
- se φ è della forma $\psi_1 \square \psi_2$ con $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \longleftrightarrow\}$, si pone

$$\lceil \varphi \rceil = \langle\langle \#(\square), \lceil \psi_1 \rceil, \lceil \psi_2 \rceil \rangle\rangle;$$

- se φ è della forma $Q v_i \psi$ per qualche $Q \in \{\exists, \forall\}$ e $v_i \in \text{Vbl}$, si pone

$$\lceil \varphi \rceil = \langle\langle \#(Q), \#(v_i), \lceil \psi \rceil \rangle\rangle.$$

Si indica con Fml l'insieme delle *L-formule* e con $\text{Fml}^\#$ l'insieme delle loro codifiche, ovvero

$$\text{Fml}^\# := \{ \lceil \varphi \rceil \mid \varphi \in \text{Fml} \}.$$

890.3.1 Proprietà

- $0 \notin \text{Fml}^\#$, poiché $0 = \langle\langle \rangle\rangle$ mentre ogni elemento di $\text{Form}^\#$ è codifica di una sequenza non vuota;
- per ogni $\varphi, \psi \in \text{Fml}$ si ha
 - $\text{ht}(\varphi) \leq \lceil \varphi \rceil$;
 - se ψ è una **sottoformula** di φ , allora $\lceil \psi \rceil \leq \lceil \varphi \rceil$;
 - $\lceil \varphi \rceil = \lceil \psi \rceil$ se e solo se $\varphi = \psi$;
 - se il simbolo s occorre in φ , allora $\#(s) \leq \lceil \varphi \rceil$;
- l'insieme $\text{Fml}^\#$ è ricorsivo primitivo.

890.4 Codifica della sostituzione di termini a variabili

Dati due termini $s, t \in \text{Term}$ ed una variabile v_i , il termine $s(t/v_i)$ ottenuto sostituendo t a v_i è definito per ricorsione sull'altezza di s come segue:

- se $s = v_i$, allora $s(t/v_i) = t$;
- se $s \in \text{Cost} \cup \text{Vbl}$ ma $s \neq v_i$, allora $s(t/v_i) = s$;
- se $s = f(t_1, \dots, t_k)$ con $f \in \text{Fun}$ di arietà k e $t_1, \dots, t_k \in \text{Term}$, allora

$$s(t/v_i) = f(t_1(t/v_i), \dots, t_k(t/v_i)).$$

Allo stesso modo, data una formula $\varphi \in \text{Fml}$ e un termine $t \in \text{Term}$ ed una variabile $v_i \in \text{Vbl}$, la formula $\varphi(t/v_i)$ ottenuta sostituendo t ad ogni occorrenza libera di v_i in φ , è definita per ricorsione sull'altezza della formula:

- se φ è della forma $t_1 = t_2$ allora $\varphi(t/v_i)$ è $t_1(t/v_i) = t_2(t/v_i)$;
- se φ è della forma $R(t_1, \dots, t_k)$ con $R \in \text{Rel}$ di arietà k e $t_1, \dots, t_k \in \text{Term}$ allora $\varphi(t/v_i)$ è $R(t_1(t/v_i), \dots, t_k(t/v_i))$;
- se φ è della forma $\neg\psi$ allora $\varphi(t/v_i)$ è $\neg\psi(t/v_i)$;
- se φ è della forma $\psi_1 \square \psi_2$ con $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ allora $\varphi(t/v_i)$ è $\psi_1(t/v_i) \square \psi_2(t/v_i)$;
- se φ è della forma $Q v_i \psi$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$, allora $\varphi(t/v_i)$ è φ stessa;
- se φ è della forma $Q v_j \psi$ con $Q \in \{\forall, \exists\}$ e $j \neq i$, allora $\varphi(t/v_i)$ è $Q v_j \psi(t/v_i)$.

890.4.1 Proposizione

Le funzioni $\text{sub}_{\text{Term}}, \text{sub}_{\text{Fml}} : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$, definite come segue, sono ricorsive primitive:

$$\begin{aligned} \text{sub}_{\text{Term}}(n, i, m) &:= \begin{cases} {}^\lceil s(t/v_i) \rceil & \text{se } n = {}^\lceil s \rceil, m = {}^\lceil t \rceil \in \text{Term}^\# \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \\ \text{sub}_{\text{Fml}}(n, i, m) &:= \begin{cases} {}^\lceil \varphi(t/v_i) \rceil & \text{se } n = {}^\lceil \varphi \rceil \in \text{Fml}^\#, m = {}^\lceil t \rceil \in \text{Term}^\# \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \end{aligned}$$

Inoltre sono ricorsivi primitivi gli insiemi

$$\begin{aligned} \text{Free}_{\text{Term}}^\# &:= \{(i, {}^\lceil t \rceil) \in \mathbb{N}^2 \mid v_i \text{ occorre libera nel termine } t\} \\ \text{Free}_{\text{Fml}}^\# &:= \{(i, {}^\lceil \varphi \rceil) \in \mathbb{N}^2 \mid v_i \text{ occorre libera nella formula } \varphi\} \\ \text{Enum}^\# &:= \{{}^\lceil \sigma \rceil \mid \sigma \text{ è un enunciato}\} \subseteq \mathbb{N} \end{aligned}$$

890.5 Notazioni

Data una L -teoria del prim'ordine T , indichiamo con

$$\begin{aligned} \text{Teor}_T &:= \{\varphi \mid T \models \varphi\} \\ \text{Teor}_T^\# &:= \{{}^\lceil \varphi \rceil \mid \varphi \in \text{Teor}_T\} \end{aligned}$$

gli insiemi delle [conseguenze logiche](#) di T e dei loro codici.

Inoltre, se $\text{Ax}(T)$ è un [sistema di assiomi](#) per T , allora poniamo

$$\text{Ax}^\#(T) := \{\vdash \varphi \vdash \mid \varphi \in \text{Ax}(T)\}.$$

891 Sottotermine del prim'ordine

892 Sottoformula del prim'ordine

893 Sostituzione di termini in un termine

894 Teoria ricorsivamente assiomatizzabile

Si considerino le notazione della “[Aritmetizzazione della sintassi](#)”.

Definizione 1. Una L -teoria T si dice ricorsivamente assiomatizzabile se esiste una [buona codifica](#) $\#$ per L ed esiste un [sistema di assiomi](#) $\text{Ax}(T)$ tali che

$$\text{Ax}^\#(T) \subseteq \mathbb{N}$$

sia [ricorsivo](#).

895 Codifica delle dimostrazioni a partire dagli assiomi

Si considerino le notazione della “[Aritmetizzazione della sintassi](#)”.

Sia T una L -teoria, e sia $\text{Ax}(T)$ un insieme di L -formule che siano [assiomi](#) per T . Si fissi una [codifica](#) $\#$ per il [linguaggio](#) L , con la corrispondente [codifica di formule](#) e [termini](#) $\vdash \cdot \vdash$.

Si vuole codificare le dimostrazioni degli elementi di Teor_T a partire da $\text{Ax}(T)$ come degli opportuni numeri naturali.

Si fissi un calcolo logico corretto e completo, con un numero finito di regole di deduzione, tale che

- l'insieme LogAx dei suoi assiomi logici deve essere tale che

$$\text{LogAx}^\# := \{\vdash \varphi \vdash \mid \varphi \in \text{LogAx}\}$$

sia ricorsivo;

- per ogni regola di deduzione γ con n premesse, il predicato

$$R_\gamma^\# := \left\{ (\vdash \varphi_1 \vdash, \dots, \vdash \varphi_n \vdash, \vdash \psi \vdash) \in (\text{Fml}^\#)^{n+1} \mid \begin{array}{l} \psi \text{ si deduce da} \\ \varphi_1, \dots, \varphi_n \text{ mediante la regola } \varphi \end{array} \right\}$$

In particolare si sceglie il sistema alla Hilbert-Ackermann, che prevede come unica regola di deduzione il *Modus Ponens*:

$$\frac{\varphi \quad \varphi \rightarrow \psi}{\psi} \quad (\text{MP})$$

e in questo caso si ha

$$R_{(\text{MP})}^{\#} := \{(n, m, k) \in \mathbb{N}^3 \mid n, m, k \in \text{Fml}^{\#} \wedge m = \langle \#(\rightarrow), n, k \rangle\}$$

dove $\langle \rangle$ è la [codifica di Gödel](#).

È possibile dunque considerare una dimostrazione di φ a partire da $\text{Ax}(T)$ come una [sequenza finita](#) di formule $\sigma \in (\text{Fml})^{<\omega}$, l'ultima delle quali è proprio φ e in cui ciascuna delle formule è un assioma logico, un assioma di T oppure è ottenuta da formule precedenti mediante la regola (MP).

895.1 Definizione

Si definisce il predicato $\text{Prov}_{\text{Ax}(T)} \subseteq (\text{Fml})^{<\omega} \times \text{Fml}$ tale che se $(\sigma, \varphi) \in \text{Prov}_{\text{Ax}(T)}$ allora $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{k-1})$ è una dimostrazione di φ a partire da $\text{Ax}(T)$, ovvero

- $\text{lh}(\sigma) = k \geq 1$ e $\sigma_{k-1} = \varphi$;
- per ogni $i < k$, $\sigma_i \in \text{LogAx} \cup \text{Ax}(T)$ oppure esistono $j_1, j_2 < i$ tali che σ_i si ottenga da $\sigma_{j_1}, \sigma_{j_2}$ mediante (MP).

In particolare, si ottiene il predicato $\text{Prov}_{\text{Ax}(T)}^{\#} \subseteq \mathbb{N}^2$ definito da (utilizzando la [codifica di Gödel](#)) $\text{Prov}_{\text{Ax}(T)}^{\#}(n, m)$ sse

$$\begin{aligned} m \in \text{Fml}^{\#} \wedge n \in \text{Seq} \wedge ((n))_{\ell(n)-1} = m \wedge \\ \wedge \forall i \leq \ell(n) \left(((n))_i \in \text{LogAx}^{\#} \cup \text{Ax}^{\#}(T) \vee \exists j_1, j_2 < i \left(R_{\text{MP}}^{\#} ((n))_{j_1}, ((n))_{j_2}, ((n))_i \right) \right) \end{aligned}$$

895.2 Proposizione

- Se $\text{Ax}^{\#}(T)$ è [\(semi\)ricorsivo](#), allora anche $\text{Prov}_{\text{Ax}(T)}^{\#}$ lo è.
- Se T è [ricorsivamente assiomatizzabile](#), allora $\text{Teor}_T^{\#}$ è [semiricorsivo](#), in quanto

$$\text{Teor}_T^{\#}(m) \iff \exists n \ \text{Prov}_{\text{Ax}(T)}^{\#}(n, m).$$

896 Primo Teorema di Incompletezza di Gödel

Si considerino le notazioni della “[Aritmetizzazione della sintassi](#)”, e si fissi una [buona codifica](#) $\#$ per il [linguaggio](#) $L_Q = \{+, \cdot, S, 0\}$ dell’aritmetica di Robinson Q .

896.1 Premesse

896.1.1 Lemma 1

La seguente funzione è [ricorsiva primitiva](#)

$$\text{num} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \ulcorner \bar{n} \urcorner$$

dove \bar{n} indica il **numerale** associato a n .

896.1.2 Lemma 2

Esiste una funzione **ricorsiva primitiva** $D : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che per ogni L_Q -formula $\rho(v_0)$

$$D(\bar{\rho}) = \bar{\rho}(\bar{\rho}/v_0).$$

896.1.3 Lemma di diagonalizzazione per le formule dell'aritmetica di Robinson

Per ogni L_Q -formula $\varphi(v_i)$ con v_i libera in φ , esiste un L_Q -enunciato σ tale che l'aritmetica di Robinson dimostri:

$$Q \vdash \sigma \longleftrightarrow \varphi(\bar{\sigma}/v_i)$$

Dimostrazione Sia D la funzione del Lemma 2; siccome è **ricorsiva primitiva**, allora esiste $\psi(x, y)$ una L_Q -formula che rappresenta D in Q .

WLOG:

- si supponga che $i \neq 0$ (sempre possibile a meno di rinominare la variabili);
- ψ non contenga le variabili v_0, v_i .

Sia dunque

$$\rho(v_0) : \quad \forall v_i (\psi(v_0, v_i) \rightarrow \varphi(v_i))$$

e sia

$$\sigma : \quad \rho(\bar{\rho}/v_0)$$

Si vuole dimostrare che

$$Q \vdash \sigma \longleftrightarrow \varphi(\bar{\sigma}/v_i)$$

- Si supponga quindi che $Q \vdash \sigma$, ovvero, per definizione di ρ :

$$Q \vdash \forall v_i (\psi(\bar{\rho}, v_i) \rightarrow \varphi(v_i)) \tag{*}$$

Inoltre, siccome $\psi(x, y)$ rappresenta D , allora

$$Q \vdash \psi(\bar{\rho}, \bar{D}(\bar{\rho}))$$

ovvero proprio

$$Q \vdash \psi(\bar{\rho}, \bar{\rho}(\bar{\rho}/v_0)) \tag{**}$$

Per (*), istanziando v_i con $\bar{\rho}(\bar{\rho}/v_0)$:

$$Q \vdash \psi(\bar{\rho}, \bar{\rho}(\bar{\rho}/v_0)) \rightarrow \varphi(\bar{\rho}(\bar{\rho}/v_0))$$

e per Modus Ponens con (**), si ottiene

$$Q \vdash \varphi(\bar{\rho}(\bar{\rho}/v_0)/v_i)$$

ovvero per la definizione di σ

$$Q \vdash \varphi(\overline{\sigma}^\neg/v_i)$$

Questo dimostra che

$$Q \vdash \sigma \rightarrow \varphi(\overline{\sigma}^\neg/v_i)$$

- Viceversa, si supponga che $Q \vdash \varphi(\overline{\sigma}^\neg/v_i)$. Sia M una L_Q -struttura arbitraria tale che $M \models Q$.

Allora

$$M \models \varphi(\overline{\sigma}^\neg/v_i) \quad (\star\star\star)$$

Mostriamo che $M \models \sigma$, ovvero

$$M \models \forall v_i (\psi(\overline{\rho}^\neg, v_i) \rightarrow \varphi(v_i))$$

Sia dunque $q \in M$ tale che $M \models \psi(\overline{\rho}^\neg, q)$. Siccome ψ rappresenta D in Q e $M \models Q$, allora

$$q = \overline{D(\overline{\rho}^\neg)}^M = \overline{\rho(\overline{\rho}^\neg/v_0)}^\neg = \overline{\sigma}^\neg$$

e pertanto $M \models \varphi(q)$ poiché, per $(\star\star\star)$, $M \models \varphi(\overline{\sigma}^\neg/v_i)$.

Per l'arbitrarietà di $q \in M$, si ottiene

$$M \models \forall v_i (\psi(\overline{\rho}^\neg, v_i) \rightarrow \varphi(v_i)) \quad M \models \sigma$$

e per arbitrarietà di $M \models Q$: $Q \vdash \sigma$.

Questo dimostra che $Q \vdash \varphi(\overline{\sigma}^\neg/v_i) \rightarrow \sigma$.

I due punti sopra dimostrano la tesi

$$Q \vdash \sigma \longleftrightarrow \overline{\sigma}^\neg/v_i). \quad \blacksquare$$

896.2 Primo Teorema di Incompletezza di Gödel

Sia $L \supseteq L_Q$ e sia $T \supseteq Q$ una L -teoria ω -coerente e ricorsivamente assiomatizzabile. Allora T è incompleta.

896.2.1 Dimostrazione

Sia $\text{Ax}(T)$ un sistema di assiomi per T tale che $\text{Ax}^\#(T) \subseteq \mathbb{N}$ sia ricorsivo.

Allora $\text{Prov}_{\text{Ax}(T)}^\# \subseteq \mathbb{N}^2$ è ricorsivo, e quindi esiste una L -formula $\psi(x, y)$ che lo rappresenta in T .

Sia quindi $\varphi(y)$ la L -formula $\neg \exists x \psi(x, y)$. [244]

Per il Lemma di Diagonalizzazione, esiste σ_G tale che [245]

$$T \supseteq Q \vdash \sigma_G \longleftrightarrow \varphi(\overline{\sigma_G}^\neg/y). \quad (\diamond)$$

Si dimostra che $T \not\vdash \sigma_G$ e $T \not\vdash \neg \sigma_G$.

- Se per assurdo $T \vdash \sigma_G$ allora $\sigma_G \in \text{Teor}_T$, ovvero $\ulcorner \sigma_G \urcorner \in \text{Teor}_T^\#$.

Si ricorda che

$$\text{Teor}_T^\#(m) \longleftrightarrow \exists n \text{ Prov}_{\text{Ax}(T)}^\#(n, m)$$

con $\text{Prov}_{\text{Ax}(T)}^\#$ rappresentato da $\psi(x, y)$.

Poiché T è ω -coerente, allora

$$T \vdash \exists x \psi(x, \overline{\ulcorner \sigma_G \urcorner}).$$

ovvero

$$T \vdash \neg \varphi(\overline{\ulcorner \sigma_G \urcorner})$$

Questo, per (\diamond) , implica che $T \vdash \neg \sigma_G$. Assurdo, poiché T è ω -coerente, e quindi coerente.

Dunque $\ulcorner \sigma_G \urcorner \notin \text{Teor}_T^\#$.

- Siccome T è ω -coerente, allora

$$T \not\vdash \exists \psi(x, \overline{\ulcorner \sigma_G \urcorner})$$

poiché altrimenti $\ulcorner \sigma_G \urcorner \in \text{Teor}_T^\#$.

Dunque $T \not\vdash \neg \varphi(\overline{\ulcorner \sigma_G \urcorner}/y)$ e per (\diamond) , quindi $T \not\vdash \neg \sigma_G$. ■

896.3 Conseguenze

896.3.1 Corollario 1

Sia T una teoria ricorsivamente assiomatizzabile i cui assiomi siano veri in \mathbb{N} . Se T dimostra gli assiomi (Q1)-(Q7) di Q , allora T è incompleta. In particolare, l'aritmetica di Peano è incompleta.

896.3.2 Complessità e dimostrabilità nell'aritmetica di Robinson

Sia $T \supseteq Q$ una L_Q -teoria di cui il **modello standard** sia un **modello**. Esiste un Π_1 -enunciato σ_G nel linguaggio L_Q vero in \mathbb{N} tale che T non è in grado di dimostrare.

Tutti gli **enunciati** si considerino ora nel linguaggio L_Q .

- Gli enunciati Σ_1 veri nel **modello standard** sono dimostrabili da Q .
- Gli enunciati Σ_1 falsi nel **modello standard** non sono dimostrabili in Q , ma non è detto che Q li possa refutare-
- Gli enunciati Δ_0 veri nel **modello standard** sono dimostrabili in Q .
- Gli enunciati Δ_0 falsi nel **modello standard** sono refutabili in Q .

896.3.3 Teorema

Ogni teoria $T \supseteq Q$ coerente e ricorsivamente assiomatizzabile è incompleta.

897 Teoria Coerente

Definizione 1. Sia L un *linguaggio del prim'ordine*, e T una L -teoria.

- T si dice coerente se non esiste una L -formula φ tale che $T \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$; spesso si dice che T è consistente.
- Viceversa T si dice incoerente.

898 Teoria omega-coerente

Sia $L_Q := \{+, \cdot, S, 0\}$ il *linguaggio dell'aritmetica di Robinson*, e sia $L \supseteq L_Q$.

Definizione 1. Una L -teoria T si dice ω -coerente se non esiste una L -formula $\varphi(x)$ tale che T dimostri

$$T \vdash \exists x \varphi(x) \quad \text{e allo stesso tempo} \quad T \vdash \neg\varphi(\bar{n}) \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}$$

dove \bar{n} è il *numerale* associato a n .

Una teoria ω -coerente è *coerente*.

898.1 Teoria omega-coerente determina l'appartenenza a sottoinsiemi semiricorsivi

Sia $L \supseteq L_Q$.

In questa sezione si identificano i *sottoinsiemi* di \mathbb{N}^k (vedi *Insieme dei numeri naturali MK*) con i *predicati* k -ari (ovvero con k *variabili libere*), per mezzo degli *insiemi di verità* nel *modello standard*.

Scriveremo indifferentemente $(x_1, \dots, x_k) \in P$ oppure $P(x_1, \dots, x_k)$ per dire che $\mathbb{N} \models P(x_1, \dots, x_k)$.

Proposizione 2. 1. Siano $P \subseteq \mathbb{N}$ *semiricorsivo* e $R \subseteq \mathbb{N}^2$ tali che

$$P(x) \iff \exists y R(x, y)$$

con R *ricorsivo*. Sia $\psi(x, y)$ una *formula* che *rappresenta* R in una L -teoria T . Detto \bar{n} il *numerale* associato ad $n \in \mathbb{N}$, si ha:

- Se $n \in P$ allora $T \vdash \exists y \psi(\bar{n}, y)$.
- Se T è ω -coerente, allora se per qualche $n \in \mathbb{N}$ vale

$$T \vdash \exists y \psi(\bar{n}, y)$$

allora $n \in P$.

2. Se $\varphi(x)$ *rappresenta* un predicato $P \subseteq \mathbb{N}$ in una L -teoria ω -coerente T e σ è l'enunciato $\exists x \varphi(x)$, allora $T \vdash \sigma$ se e solo se σ è vero in \mathbb{N} , ovvero se e solo se $P \neq \emptyset$.

Si utilizza la notazione di “*Aritmetizzazione della sintassi*”

899 Teoria decidibile

Sia L un [linguaggio numerabile](#); una L -teoria T si dice decidibile se $\text{Teor}_T^\# \subseteq \mathbb{N}$ è [ricorsivo](#).

In caso contrario, T si dice indecidibile

900 Teoria decidibile è ricorsivamente assiomatizzabile

Si noti che se T è decidibile, allora è anche [ricorsivamente assiomatizzabile](#): infatti Teor_T è un insieme di assiomi per T .

901 Teoria essenzialmente indecidibile

Una teoria T è essenzialmente indecidibile se ogni [estensione coerente](#) di T è indecidibile.

Si noti che se T è [completa](#), allora T è essenzialmente indecidibile se e solo se è indecidibile.

Infatti, essendo completa, ogni estensione “propria” di T è incoerente.

902 Teoria completa e ricorsivamente assiomatizzabile è decidibile

Sia L un linguaggio del prim'ordine numerabile.

902.1 Teorema

Sia T una L -teoria completa e ricorsivamente assiomatizzabile. Allora T è [decidibile](#).

902.1.1 Idea dimostrazione

Le ipotesi [bastano per affermare](#) che $\text{Teor}_T^\#$ sia semiricorsivo.

Per il [Teorema di Post](#), dimostra che $\sim \text{Teor}_T^\#$ sia semiricorsivo, usando la funzione ricorsiva $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \langle\langle \#(\neg), n \rangle\rangle$ dove $\langle\langle \rangle\rangle$ è la [codifica di Gödel](#).

903 Estensione finita di una teoria decidibile è decidibile

Si utilizza la notazione di “[Aritmetizzazione della sintassi](#)”.

Sia L un linguaggio del prim'ordine numerabile. Sia $\#$ una [buona codifica per \$L\$](#) .

903.1 Teorema

Se T è una L -teoria decidibile, allora per ogni L -enunciato σ , $T \cup \{\sigma\}$ è [decidibile](#).

903.1.1 Idea di dimostrazione

Utilizza la funzione

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \langle\langle \#(\rightarrow), \ulcorner \sigma \urcorner, n \rangle\rangle$$

tale che $f(\ulcorner \varphi \urcorner) = \ulcorner \sigma \rightarrow \varphi \urcorner$, dove $\langle\langle \rangle\rangle$ è la [codifica di Gödel](#).

Nota

$$T \cup \{\sigma\} \vdash \varphi \iff T \vdash \sigma \rightarrow \varphi$$

903.2 Corollario

Se una [estensione finita](#) di una [teoria](#) T è [indecidibile](#), allora anche T è [indecidibile](#).

904 Aritmetica di Robinson è essenzialmente indecidibile

Sia Q la [teoria](#) dell'[aritmetica di Robinson](#).

904.1 Teorema

La teoria Q è [essenzialmente indecidibile](#).

905 Teoria decidibile e coerente ha estensione decidibile coerente e completa

Si adotta la notazione di “[Aritmetizzazione della sintassi](#)”

Sia L un [linguaggio numerabile](#). Sia $\#$ una [buona codifica per \$L\$](#) .

905.1 Teorema

Ogni L -teoria [decidibile](#) e [coerente](#) T ha un'[estensione decidibile](#), [coerente](#) e [completa](#).

905.1.1 Idea di dimostrazione

Si costruisce per induzione T_n :

- $T_0 = T$;
- $T_{n+1} = T_n \cup \{\sigma\}$ se $\ulcorner \sigma \urcorner = n + 1$ e $T_n \not\vdash \neg\sigma$.

Posto $T_\infty := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$, questa è coerente, ed è inoltre completa.

NON dimostriamo che T sia decidibile.

906 Teorema dell'indefinibilità della verità

Sia L_Q il [linguaggio](#) dell'[aritmetica di Robinson](#) e sia $\#$ una [buona codifica](#) per L_Q . Si utilizza la notazione de “[Aritmetizzazione della sintassi](#)”

906.1 Teorema di Tarski

Sia $\text{Th}(\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle)$ la teoria del modello standard per l'aritmetica, ovvero l'insieme degli L_Q -enunciati veri in N .

Allora

$$\text{Th}^\#(\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle) := \{\vdash \sigma \mid \langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle \models \sigma\}$$

non è definibile in $\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle$, ovvero non esiste alcuna L_Q -formula $\varphi(x)$ tale che per ogni L_Q -enunciato σ si abbia

$$\sigma \in \text{Th}(\langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle) \iff \langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0 \rangle \models \varphi(\vdash \sigma).$$

907 Teorema di Church

Sia L_Q il linguaggio dell'aritmetica di Robinson e sia $\#$ una buona codifica per L_Q . Si utilizza la notazione de “Aritmetizzazione della sintassi”

907.1 Teorema

Sia $L \supset L_Q$. Allora l'insieme

$$\text{Val}^\#(L) := \{\vdash \varphi \mid \varphi \text{ è un } L\text{-enunciato valido}\}$$

non è ricorsivo. Vedi “Formula valida”.

908 Analisi non-standard

Sia \mathcal{L} il linguaggio del prim'ordine che contiene:

- per ogni $n \in \omega$ e per ogni $X \subseteq \mathbb{R}^n$, un simbolo di relazione X di arietà n ;
- per ogni $n \in \omega$ e per ogni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, un simbolo di funzione f di arietà n .

Il modello standard dell'analisi \mathbb{R} è la \mathcal{L} -struttura di dominio \mathbb{R} , e in cui ciascun simbolo di \mathcal{L} è intepretato nel modo naturale.

908.1 Teorema

Esiste una estensione elementare di \mathbb{R} , detta ${}^*\mathbb{R}$, tale che $\mathbb{R} \neq {}^*\mathbb{R}$.

Inoltre ${}^*\mathbb{R}$ è un campo ordinato, e viene quindi detto campo degli iperreali

908.2 Notazione

Se X è un simbolo di relazione di \mathcal{L} , si denoterà con *X la sua interpretazione in ${}^*\mathbb{R}$; se f è un simbolo di funzione di \mathcal{L} , si denoterà con *f la sua interpretazione in ${}^*\mathbb{R}$.

Quando sarà chiaro dal contesto, si ometterà l'asterisco.

908.3 Numeri iperreali

Gli elementi di ${}^*\mathbb{R}$ sono detti numeri iperreali; gli elementi di $R \subseteq {}^*\mathbb{R}$ sono detti iperreali standard, mentre gli elementi di ${}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$ sono detti iperreali nonstandard.

Sia $c \in {}^*\mathbb{R}$:

- c è detto infinitesimo se per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$: ${}^*\mathbb{R} \models |c| < \varepsilon$;
- c è detto infinito se per ogni $k \in \mathbb{R}$: ${}^*\mathbb{R} \vdash k < |c|$, ed è detto finito altrimenti.

Se $c \in {}^*\mathbb{R}$ è infinito, allora c^{-1} è infinitesimale.

Tutti i reali standard sono finiti, e 0 è l'unico infinitesimo standard.

908.4 Proprietà

908.4.1 Lemma 1

Gli infinitesimi sono chiusi rispetto a somma, prodotto e moltiplicazione per un numero reale.

908.4.2 Lemma 2

1. Esistono iperreali infiniti e infinitesimi diversi da 0.
2. Inoltre, per ogni iperreale finito c esiste un unico iperreale standard b tale che $b - c$ è infinitesimo.

Dimostrazione 2 implica 1; infatti preso $c \in {}^*\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}$, allora ci sono due possibilità

- c è infinito, allora c^{-1} è infinitesimo; inoltre $c^{-1} \neq 0$, poiché

$$\mathbb{R} \models \forall x (x \neq 0);$$

- c è finito, e allora per 2. esiste un unico $b \in \mathbb{R}$ tale che $b - c$ sia infinitesimo; inoltre $b - c \neq 0$, poiché

$$\mathbb{R} \models \forall x \forall y (x = y \longleftrightarrow x - y = 0)$$

Inoltre, $(b - c)^{-1}$, che esiste poiché $\mathbb{R} \models \forall x (x \neq 0 \rightarrow \exists y (xy = 1))$, è infinito.

Per 2., si ponga per $c \in {}^*\mathbb{R}$ finito:

$$b := \inf \{a \in \mathbb{R} \mid c < a\}.$$

908.4.3 Campo degli iperreali non è archimedeo

L'esistenza di iperreali infiniti mostra che ${}^*\mathbb{R}$ non è un campo archimedeo.

908.4.4 Caratterizzazione dei limiti per gli iperreali

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e siano $a, \ell \in \mathbb{R}$. Allora:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se ${}^*f(c)$ è positivo e infinito per ogni $c > 0$ infinito.
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ se e solo se ${}^*f(c) \approx \ell$ per ogni $c > 0$ infinito.

3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ se e solo se per ogni $a \neq c \approx a$ si ha che ${}^*f(c) > 0$ è infinito.
4. $\lim_{x \rightarrow a} (fx) = \ell$ se e solo se per ogni $a \neq c \approx a$, $f(c) \approx \ell$.

908.4.5 Caratterizzazione funzioni continue tramite gli iperreali.

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. f è continua;
2. per ogni $a, c \in {}^*\mathbb{R}$ finiti, se $a \approx c$ allora ${}^*f(a) \approx {}^*f(c)$.

908.4.6 Caratterizzazione funzioni uniformemente continue tramite gli iperreali

Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

1. f è uniformemente continua;
2. per ogni $a, c \in {}^*\mathbb{R}$, se $a \approx c$ allora ${}^*f(a) \approx {}^*f(c)$.

908.5 Altre definizioni

908.5.1 Monade di un iperreale

In virtù del 908.4.1, è possibile definire una relazione di equivalenza su ${}^*\mathbb{R}$: scriveremo $a \approx b$ se $|a - b|$ è infinitesimo. La classe di equivalenza di c è chiamata monade di c .

Per il 908.4.2, se c è un iperreale finito, allora vi è un unico numero reale nella monade di c ; questo è detto parte standard di c , ed è denotato con $\text{st}(c)$.

909 Campo Ordinato

910 Funzione Uniformemente Continua

911 Chiusura logica di una teoria

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine e sia T una \mathcal{L} -teoria (ovvero un insieme di enunciati di \mathcal{L}).

911.1 Definizione

La chiusura logica di T è la \mathcal{L} -teoria $\text{ccl}(T)$ definita come segue:

$$\text{ccl}(T) := \{\sigma \text{ } \mathcal{L}\text{-enunciati} \mid T \vDash \sigma\}$$

912 Notazione della TEORIA DEI MODELLI

912.1 Variabili

Le variabili saranno indicate spesso con un'unica lettera, anche se sono una [stringa](#): $x = \langle x_i : i < \alpha \rangle$ dove α è un [ordinale](#) qualsiasi.

Se M è una struttura qualsiasi, si indicherà con M^x il [prodotto cartesiano](#) di tante copie di M quanto la [cardinalità](#) di α

$$M^x := M^{|\alpha|}$$

912.2 Funzioni

Se non diversamente specificato, le funzioni sono [parziali](#).

Se f è una funzione in una variabile e $\alpha = \langle \alpha_i : i < \lambda \rangle$ è una tupla, con $f(\alpha)$ si intende la tupla:

$$f(\alpha) := \langle f(\alpha_i) : i < \lambda \rangle$$

Allo stesso modo se $b = \langle b_i | i < |x| \rangle$, $c = \langle c_i | i < |x| \rangle$

$$\{\langle b, c \rangle\} := \{\langle b_i, c_i \rangle | i < |x|\}.$$

912.3 Insiemi definiti da una formula o da un tipo

Se $\varphi(x)$ è una [formula](#) e $p(x)$ è un [tipo](#), allora, per ogni modello M , si indicano nel seguente modo gli [insiemi di verità](#):

$$\varphi(M^x) := \{a \in M^x | M \models \varphi[a]\}; p(M^x) := \{a \in M^x | M \models p[a]\}.$$

(vedi [Soddisfazione di una formula](#) e [Soddisfazione di un tipo](#))

912.4 Insieme delle formule

Se \mathcal{L} è un [linguaggio del prim'ordine](#), allora si denota con \mathcal{L} anche l'insieme delle \mathcal{L} [formule](#).

In particolare, se A è un insieme di parametri, si indica con $\mathcal{L}(A)$ l'insieme di tutte le \mathcal{L} -formule a [parametri in \$A\$](#) .

912.5 Cardinalità di un linguaggio del prim'ordine

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#). Si denota con $|\mathcal{L}|$ la [cardinalità](#) di

$$\mathcal{L}_{\text{fun}} \cup \mathcal{L}_{\text{rel} \cup \mathcal{L}_{\text{const}}} \cup \omega$$

(vedi [Ordinale omega](#) e [Unione di classi MK](#))

Quindi, utilizzando questa notazione, non c'è alcuna ambiguità nello scrivere: $|L|$; in virtù del [lemma](#), questa è la cardinalità dell'insieme delle formule e anche di

$$\mathcal{L}_{\text{fun}} \cup \mathcal{L}_{\text{rel}} \cup \omega$$

QUESTA ROBA NON LA VOGLIAMO

913 Aritmetica dei cardinali

Contesto: Morse Kelly Set Theory

913.1 Somma e prodotto

Si definiscono le [operazioni](#) binarie $\text{Card} \times \text{Card} \rightarrow \text{Card}$ di somma e prodotto di cardinali:^[246]

$$\kappa + \lambda := |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|, \quad \kappa \cdot \lambda := |\kappa \times \lambda|.$$

Queste definizioni sono ben poste poiché

- in $\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}$ si applica l'ordine “lessicografico”;
- in $\kappa \times \lambda \subseteq \text{Ord} \times \text{Ord}$ si applica il [buon ordine di Gödel](#).

Proposizione 1. Se $\kappa, \lambda \geq 2$ oppure se $\kappa = 1$ e $\lambda \geq \omega$, vale

$$\kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda$$

e, in generale, se una delle due condizioni sussiste:^[247]

$$\min(\kappa, \lambda) = 2; \quad \min(\kappa, \lambda) = 1 \wedge \max(\kappa, \lambda) \geq \omega$$

allora si ha la seguente diseguaglianza

$$\max(\kappa, \lambda) \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \max(\kappa, \lambda) \cdot \max(\kappa, \lambda)$$

Più in generale, citando il [Teorema sull'order type del prodotto di cardinali](#): se κ, λ sono [cardinali](#) diversi da 0 e almeno uno dei due è [infinito](#), allora

$$\max(\kappa, \lambda) = \kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda$$

e pertanto, se κ è infinito: $\kappa + \kappa = \kappa \cdot \kappa = \kappa$.

913.2 Cardinal exponentiation

Se si assume [AC](#) allora, per ogni $\kappa, \lambda \in \text{Card}$, ${}^\kappa\lambda$ è [ben ordinato](#), e pertanto è possibile definire^[248]

$$\lambda^\kappa := |{}^\kappa\lambda|,$$

che ha le seguenti proprietà di base:

$$\begin{aligned} \kappa^\lambda &\leq \nu^\mu && \text{se } \kappa \leq \nu \text{ e } \lambda \leq \mu \\ ({}^\kappa\lambda)^\mu &= \kappa^{\lambda \cdot \mu} \\ \kappa^{\lambda+\mu} &= \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu \\ (\kappa \cdot \lambda)^\mu &= \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu. \end{aligned}$$

Si definisce inoltre

$$\lambda^{<\kappa} := \sup \{ \lambda^\nu \mid \nu \in \text{Card} \wedge \nu < \kappa \}$$

914 Formule risolutive equazioni polinomiali

914.1 Quadratic Equation

Le soluzioni, rispetto ad x , di $ax^2 + bx + c = 0$ sono

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

915 Teoria dei gruppi abeliani

916 Lemma di estensione di un isomorfismo parziale tra gruppi abeliani

917 Teoria dei gruppi abeliani privi di torsione

918 Teoria dei gruppi abeliani divisibili

919 Lemma di estensione di un isomorfismo parziale tra gruppi abeliani divisibili

920 Teoria dei gruppi abeliani privi di torsione è categorica

921 Modelli lambda ricchi nella categoria dei modelli della teoria TFAG

922 Teoria dei domini di integrità

923 Teoria dei campi

924 Soddisfazione di un tipo e mappa elementare

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), siano M, N due \mathcal{L} -strutture e sia $k : M \dashrightarrow N$ una [mappa elementare](#). Sia \mathbf{a} una enumerazione del [dominio](#) $\text{dom } k$

Fissato un tipo $p(x; z)$ di \mathcal{L} -formule (dove x è una variabile di lunghezza arbitraria e $|z| = |\mathbf{a}|$), se $p(x; \mathbf{a})$ è ([finitamente](#)) [soddisfacibile in \$M\$](#) allora $p(x; k\mathbf{a})$ è finitamente soddisfacibile in N .

Infatti, se $p(x; \mathbf{a})$ è finitamente soddisfacibile, allora, detta $\psi(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_m)$ una congiunzione arbitraria di formule di $p(x; z)$ allora

$$M \models \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_m)$$

per qualche $a_1, \dots, a_m \in \text{dom } k$.

Poiché k è mappa elementare, allora

$$N \models \exists x_1 \dots \exists x_n \psi(x_1, \dots, x_n, ka_1, \dots, ka_m)$$

ovvero $p(x; k\alpha)$ è finitamente soddisfacibile in N .

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), e sia λ un [cardinale](#) tale che $|\mathcal{L}| + \omega < \lambda$.

925 Modello lambda saturo

Definizione 1. Una \mathcal{L} -struttura N infinita si dice λ -saturo se realizza ogni tipo in una variabile $p(x)$ tale che

1. $p(x)$ è composto di $\mathcal{L}(A)$ -formule per qualche $A \subseteq N$ di cardinalità $< \lambda$;
2. $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in N .

Proposizione 2. Sono fatti equivalenti:

1. N è λ -saturo.
2. N realizza tutti i tipi finitamente soddisfacibili $p(z)$ di $\mathcal{L}(A)$ -formule, con $|z| \leq \lambda$ e $|A| < \lambda$

926 Modello saturo

N si dice saturo se è λ -saturo e $|N| = \lambda$.

927 Esistenza di modelli saturi di cardinalità fissata

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

927.1 Teorema

Sia λ un [cardinale](#) tale che $\lambda = \lambda^{<\lambda}$. Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#) tale che $|\mathcal{L}| < \lambda$.

Allora per ogni \mathcal{L} -struttura M di [cardinalità](#) $\leq \lambda$ esiste una \mathcal{L} -struttura N tale che:

- $M \preceq N$ è sottostruttura elementare;
- $|N| = \lambda$;
- N è [satura](#).

928 Modello lambda saturo sse lambda ricco

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

928.1 Teorema

Sia λ un **cardinale**, e sia \mathcal{L} un **linguaggio del prim'ordine** tale che $|\mathcal{L}| < \lambda$.

Sia \mathcal{M} la **categoria** che consiste delle \mathcal{L} -**strutture** e delle **mappe elementari** tra di loro.

Allora per ogni $N \in \mathcal{M}_{\text{ob}}$ sono fatti equivalenti:

1. N è un modello λ -sastro;
2. N è un modello λ -ricco;

929 Modello MOSTRO

Si utilizza la **Notazione della TEORIA DEI MODELLI**

Sia \mathcal{L} un **linguaggio**.

Definizione 1. Un modello mostro è una \mathcal{L} -**struttura satira** U fissata di cardinalità $|\mathcal{U}| = \kappa > \mathcal{L} + \omega$.

929.1 Notazione

Si utilizzerà un'accezione diversa dei termini soliti:

- Una \mathcal{L} -**formula** $\varphi(x)$ sarà valida sse $\mathcal{U} \models \forall x \varphi(x)$.
- Una \mathcal{L} -**formula** $\varphi(x)$ sarà soddisfacibile sse $\mathcal{U} \models \exists x \varphi(x)$.
- M è un modello sse $M \preceq \mathcal{U}$ è **sottostruttura elementare** e $|M| < \kappa$.
- Cardinali (e cardinalità) $< \kappa$ sono detti piccoli.
- Un insieme si dice definibile se è definibile da una formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$.
- Un insieme si dice tipo definibile se è definibile da un tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ con un insieme di parametri piccolo.
- I tipi globali are **complete finitely consistent types** $\subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$. L'insieme dei tipi globali si indica con $S(\mathcal{U})$. (vedi **Tipo completo**)
- Il concetto di soddisfazione di un tipo è sempre nel modello mostro, eventualmente intersecato con un modello.

Completa da Sezione 9.3 di

929.2 Topologia indotta da un insieme sul modello mostro

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo. La **topologia** indotta su \mathcal{U}^x è quella i cui **chiusi** sono insiemi della forma

$$\{a \in \mathcal{U}^x \mid \mathcal{U} \models p(a)\} = p(\mathcal{U}^x)$$

dove $p(x)$ è un **tipo** di $\mathcal{L}(A)$ -formule. (vedi “Realizzazione di un tipo”)

Questa è una topologia **zero-dimensionale**: infatti

$$\{\varphi(\mathcal{U}^x) \mid \varphi(x) \text{ è una } \mathcal{L}(A) \text{ formula}\}$$

è una base di clopen per la topologia.

930 Insieme definibile e automorfismi in un MODELLO MOSTRO

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#). Si lavora dentro un **modello mostro** \mathcal{U} .

Un **insieme definibile con parametri** è della forma $\varphi(\mathcal{U}^x, b)$ per qualche \mathcal{L} -formula φ e per qualche $b \in \mathcal{U}^z$.

Se $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ è un **automorfismo**, allora

$$\begin{aligned} f[\varphi(\mathcal{U}^x, b)] &= \{fa \mid a \in \varphi(\mathcal{U}^x, b)\} \\ &= \{fa \mid a \in \mathcal{U}^x \text{ } \mathcal{U} \models \varphi(a, b)\} \\ &= \{fa \mid a \in \mathcal{U}^x \text{ } \mathcal{U} \models \varphi(fa, fb)\} \quad \text{poiché } f \text{ è un automorfismo} \\ &= \{a \in \mathcal{U}^x \mid \mathcal{U} \models \varphi(a, fb)\} = \varphi(\mathcal{U}^x, fb). \end{aligned}$$

931 Catena elementare di modelli

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#).

931.1 Definizione

Una **catena elementare** $\langle M_i \mid i \in \lambda \rangle$ per qualche **cardinale** λ è una sequenza di \mathcal{L} -strutture tali che per ogni $i < j < \lambda$: $M_i \preceq M_j$ è **sottostruttura elementare**.

931.2 Unione di una catena elementare

L'unione (o il limite) di una catena elementare $\langle M_i \mid i \in \lambda \rangle$ è la \mathcal{L} -struttura fatta come segue:

- il **dominio** è l'unione $\bigcup_{i < \lambda} M_i$;
- le funzioni e le relazioni sono l'unione delle funzioni e delle relazioni degli M_i .

931.2.1 Lemma

Sia N il limite della catena elementare $\langle M_i \mid i \in \lambda \rangle$. Allora, per ogni $i < \lambda$, M_i è **sottostruttura elementare** di N : $M_i \preceq N$.

932 Topologia zero-dimensionale

Una **topologia** è zero-dimensionale se ammette una **base** di **clopen**.

933 Elementi algebrici e definibili in un modello mostro

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#) fissato, T una \mathcal{L} -[teoria completa](#) senza [modelli finiti](#), ed un modello \mathcal{U} di [cardinalità](#) $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ [inaccessibile](#). Si lavora nell'ambito di un [MODELLO MOSTRO](#).

933.1 Definizione

Sia $a \in \mathcal{U}$ e sia $A \subseteq \mathcal{U}$.

- a è [algebrico](#) su A se esiste una [formula](#) $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ ed esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale

$$\mathcal{U} \models \varphi[a] \wedge \exists^{=k} x \varphi(x)$$

dove con “ $\exists^{=k}$ ” si intende l’abbreviazione della formula del prim’ordine “esistono k elementi tali che”.

- Se a è algebrico su A e $k = 1$, si dirà che a è [definibile](#) su A .
- Si scrive $\text{acl}(A)$ per definire la [chiusura algebrica](#) di A , ovvero l’insieme di tutti gli elementi algebrici su A .
- Se $A = \text{acl}(A)$, si dice che A è [algebricamente chiuso](#)
- Si scrive $\text{dcl}(A)$ per definire la [chiusura definibile](#) di A , ovvero l’insieme di tutti gli elementi definibili su A .

Se \mathbf{x} è una tupla finita di variabili, allora [formule](#) $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(A)$ e [tipi](#) $p(\mathbf{x}) \subseteq \mathcal{L}(A)$ con un numero finito di [soluzioni](#) sono chiamati [algebrici](#)

933.1.1 Osservazione

Le chiusure $\text{dcl}(A)$ e $\text{acl}(A)$ sono [sottostrutture](#) di \mathcal{U} ; inoltre vale la seguente catena di sottostrutture

$$\langle A \rangle_{\mathcal{U}} \subseteq \text{dcl}(A) \subseteq \text{acl}(A)$$

dove $\langle A \rangle_{\mathcal{U}}$ è la [sottostruttura generata](#) da A .

933.2 Elemento algebricamente indipendente da un insieme in un modello mostro

Sia $B \subseteq \mathcal{U}$.

- Si dirà che $a \in \mathcal{U}$ è [algebricamente indipendente da \$B\$](#) se $a \notin \text{acl}(B)$.
- Si dirà che B è un [insieme algebricamente indipendente](#) se per ogni $a \in B$, a è algebricamente indipendente da $B \setminus \{a\}$.

934 Caratterizzazione chiusura algebrica in un modello mostro

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#) fissato, T una \mathcal{L} -[teoria completa](#) senza [modelli finiti](#), ed un modello \mathcal{U} di [cardinalità](#) $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ [inaccessibile](#). Si lavora nell'ambito di un [MODELLO MOSTRO](#).

934.1 Teorema

Per ogni $A \subseteq \mathcal{U}$ e per ogni $a \in \mathcal{U}$ sono fatti equivalenti:

1. $a \in \text{acl}(A)$;
2. detto $\text{o}(a/A) := \{fa \mid f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \text{ automorfismo } \text{Id}_A \subseteq f\}$ [249]
 $\text{o}(a/A)$ è finito.
3. a appartiene ad ogni [modello](#) contenente A .

935 Caratterizzazione chiusura definibile in un modello mostro

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#) fissato, T una \mathcal{L} -[teoria completa](#) senza [modelli finiti](#), ed un modello \mathcal{U} di [cardinalità](#) $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ [inaccessibile](#). Si lavora nell'ambito di un [MODELLO MOSTRO](#).

935.1 Teorema

Per ogni $A \subseteq \mathcal{U}$ e per ogni $a \in \mathcal{U}$ sono fatti equivalenti:

1. $a \in \text{dcl}(A)$;
2. detto $\text{o}(a/A) := \{fa \mid f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U} \text{ automorfismo } \text{Id}_A \subseteq f\}$ [250]
 $\text{o}(a/A) = \{a\}$.

936 Orbita del gruppo degli automorfismi che fissano un sottoinsieme e tipo di un elemento

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#) fissato, T una \mathcal{L} -[teoria completa](#) senza [modelli finiti](#), ed un modello \mathcal{U} di [cardinalità](#) $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ [inaccessibile](#). Si lavora nell'ambito di un [MODELLO MOSTRO](#).

936.1 Proposizione

Fissato $a \in \mathcal{U}^x$ e $A \subseteq \mathcal{U}$, si definisce il tipo $p(x) = \text{tp}(a/A)$, ovvero

$$p(x) = \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(A) \mid \mathcal{U} \models \varphi[a]\}.$$

(vedi “[Soddisfazione di una formula](#)”)

Allora, detto $\text{o}(a/A) := \{fa \mid f \in \text{Aut}(\mathcal{U}) \text{ e } \text{Id}_A \subseteq f\}$ l’orbita di a rispetto all’azione di gruppo di $\text{Aut}(\mathcal{U}/A)$, si ha

$$\text{o}(a/A) = p(\mathcal{U}^x).$$

(vedi [Automorfismo di una struttura del prim’ordine](#))

Osservazione. Pertanto, se $a \equiv_A b$, allora

$$\text{tp}(a/A) = \text{tp}(b/A)$$

e quindi

$$a \in \text{o}(a/A) = \text{o}(b/A)$$

e quindi esiste $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $fb = a$.

937 Automorfismo e chiusura algebrica in un modello mostro

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim’ordine](#) fissato, T una \mathcal{L} -teoria completa senza [modelli finiti](#), ed un modello \mathcal{U} di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ [inaccessibile](#). Si lavora nell’ambito di un [MODELLO MOSTRO](#).

937.1 Proposizione

Se $f \in \text{Aut } \mathcal{U}$ è un [automorfismo](#), allora per ogni $A \subseteq \mathcal{U}$ l’[immagine](#) commuta con la [chiusura algebrica](#), ovvero:

$$f[\text{acl}(A)] = \text{acl}(f[A])$$

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim’ordine](#) fissato,

938 Struttura minimale

Una \mathcal{L} -struttura M è detta [struttura minimale](#) se per ogni $\mathcal{L}(M)$ -formula con una sola [variabile libera](#) $\varphi(x)$, l’[insieme definito](#) da φ : $\varphi(M)$ è [finito](#) o [cofinito](#).

939 Struttura fortemente minimale

Una \mathcal{L} -struttura M è detta struttura fortemente minimale se M è una struttura minimale e se tutte le sue estensioni elementari lo sono.

940 Teoria fortemente minimale

Definizione 1. Una \mathcal{L} -teoria T consistente e senza modelli finiti è detta fortemente minimale se per ogni \mathcal{L} -formula $\varphi(x; z)$ (dove x è una singola variabile) esiste $n \in \omega$ tale che

$$T \vdash \forall z \left[\exists^{\leq n} x \varphi(x; z) \vee \exists^{\leq n} x \neg\varphi(x; z) \right]$$

dove con “ $\exists^{\leq n}$ ” si intende “esistono al massimo n x tali che”

(vedi Conseguenza logica)

941 Teorema di Caratterizzazione

Sono fatti equivalenti:

1. La teoria $\text{Th}(M)$ è fortemente minimale;
2. M è una struttura fortemente minimale;
3. M ammette una estensione elementare minimale e ω -satura.

942 Principio dello scambio per chiusura algebrica in un modello mostro

Si utilizza la notazione della Teoria dei Modelli.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine fissato, T una \mathcal{L} -teoria completa senza modelli finiti, fortemente minimale, ed un modello \mathcal{U} di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ inaccessibile. Si lavora nell'ambito di un MODELLO MOSTRO.

942.1 Teorema

Per ogni $B \subseteq \mathcal{U}$, se $a, b \notin \text{acl } B$ allora

$$b \in \text{acl}(B \cup \{a\}) \iff a \in \text{acl}(B \cup \{b\}).$$

943 Base di un insieme dentro un modello mostro

Si utilizza la notazione della Teoria dei Modelli.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine fissato, T una \mathcal{L} -teoria completa senza modelli finiti, ed un modello \mathcal{U} di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ inaccessibile. Si lavora nell'ambito di un MODELLO MOSTRO.

943.1 Definizione

Sia $C \subseteq \mathcal{U}$. Un insieme $B \subseteq C$ si dice base di C se

- B è un insieme algebricamente indipendente;
- $C \subseteq \text{acl}(B)$.

943.2 Caratterizzazione

Se T è forteamente minimale allora per ogni $B \subseteq C \subseteq \mathcal{U}$ sono fatti equivalenti:

1. B è una base di C ;
2. B è un sottoinsieme indipendente massimale (rispetto all'inclusione) di C .

944 Teorema della Base dentro un modello mostro

Si utilizza la notazione della Teoria dei Modelli.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine fissato, T una \mathcal{L} -teoria completa senza modelli finiti, ed un modello \mathcal{U} di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ inaccessibile. Si lavora nell'ambito di un MODELLO MOSTRO.

Sia T forteamente minimale.

944.1 Teorema

Per $C \subseteq \mathcal{U}$:

1. per ogni insieme indipendente $B \subseteq C$ esiste una base B' di C tale che $B \subseteq B'$;
2. tutte le basi di C hanno la stessa cardinalità.

Questo teorema garantisce che la seguente definizione sia ben posta:

944.2 Dimensione di un insieme dentro un modello mostro

La dimensione di $C \subseteq \mathcal{U}$, denotata con $\dim C$, è la cardinalità di una base di C .

945 Teoria forteamente minimale è lambda-categorica

Si utilizza la notazione della Teoria dei Modelli.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine fissato, T una \mathcal{L} -teoria completa senza modelli finiti, ed un modello \mathcal{U} di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}|$, con κ inaccessibile. Si lavora nell'ambito di un MODELLO MOSTRO.

Sia T una teoria fortemente minimale

945.1 Teorema

I modelli di T con la stessa dimensione sono isomorfi.

945.2 Corollario

Sia $\lambda > |\mathcal{L}|$. Allora T è λ -categorica.

946 Classi equipotenti MK

Contesto: Morse Kelly Set Theory

946.1 Definizioni

Due classi A, B si dicono equipotenti se esiste una classe funzione

$$F : A \rightarrow B$$

bijettiva.

NOTA: quando si parla di classi, se ne parla nell'ambito della Morse Kelly Set Theory; quando si parla di insiemi, il discorso ha validità più generale.

Sia X un insieme (o classe) e sia R una relazione binaria.

947 Relazione binaria riflessiva

R si dice riflessiva se $\forall x \in X (x R x)$.

948 Relazione binaria irriflessiva

R si dice irriflessiva se $\forall x \in X (x \not R x)$.

949 Relazione binaria simmetrica

R si dice simmetrica se $\forall x, y \in X (x R y \rightarrow y R x)$.

950 Relazione binaria antisimmetrica

R si dice antisimmetrica se $\forall x, y \in X ((x R y \wedge y R x) \rightarrow x = y)$.

951 Relazione binaria connessa

R si dice connessa se $\forall x, y \in X (x = y \vee x R y \vee y R x)$.

952 Relazione binaria transitiva

R si dice transitiva se $\forall x, y, z \in X ((x R y \wedge y R z) \rightarrow x R z)$.

953 Preordine

Una [relazione binaria](#) è detta preordine se è [riflessiva](#) e [transitiva](#).

954 Order topology

955 Complessità di una formula nel linguaggio della teoria degli insiemi

Vedi:

- Alessandro Andretta, ‘Elements of Mathematical Logic’ (Università degli Studi di Torino, 24 April 2024), p. 413

956 Complessità di una formula

Si rimanda a:

- [Complessità di una formula nel linguaggio della teoria degli insiemi](#)
- [Complessità di una formula nel linguaggio dell'aritmetica](#)

957 Absolutezza delle formule tra un insieme transitivo e un modello di MK

Contesto: si lavora nella [Morse Kelly Set Theory](#), con il linguaggio del prim'ordine $\mathcal{L} = \{\in\}$; V è la [classe totale](#)

Proposizione 1. Sia $M \neq \emptyset$ un [insieme transitivo](#).

1. Tutte le [formule senza quantificatori](#) sono [assolute](#) tra M e V ;
2. Tutte le [formule \$\Delta_0\$](#) sono [assolute](#) tra M e V ;
3. Le [formule \$\Sigma_1\$](#) sono [assolute](#) verso l'alto tra M e V ; le [formule \$\Pi_1\$](#) sono [assolute](#) verso il basso tra M e V .

958 Insieme transitivo e assiomi di ZFC

Vedi:

- Alessandro Andretta, ‘Elements of Mathematical Logic’ (Università degli Studi di Torino, 24 April 2024), pp. 412-413

959 Cardinalità dei reali

Contesto: [Morse Kelly Set Theory](#)

Osservazione. Si ha che^[251]

$$\mathbb{R} \asymp \wp(\mathbb{N})$$

per il [Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder](#).

Assummo AC allora \mathbb{R} è ben ordinabile e ha cardinalità $|\mathbb{R}| = |\wp(\mathbb{N})|$: $\wp(\mathbb{N}) \asymp 2^{\mathbb{N}}$ e quindi^[252]

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

960 Teichmüller-Tukey Lemma

961 Axiom of Multiple Choices

962 Kurepa's maximality principle

963 Classe di equivalenza di Scott

964 Metodi Matematici per il Machine Learning [CORSO]

EXPORT: [main.org](#)

964.1 Introduzione (De Rossi)

- Neurone Artificiale
- Funzioni di attivazione
- Rete Neurale
- Funzioni Costo (Machine Learning)
- Processo di apprendimento
- Approssimazione per Regressione Lineare (Machine Learning)
- Misura di Baire
- Funzione sigmoidale

- Funzione discriminatoria per una misura di Baire sul cubo unitario
- Misura di Baire sul cubo nulla se nulla su tutti i semispazi
- Funzioni sigmoidali sono discriminatorie per le misure di Baire sul cubo unitario
- Teorema di Weierstrass
- Minimizzazione di una funzione reale
- Curva di livello
- Hessiana e punti stazionari di una funzione reale
- Gradiente è perpendicolare alle curve di livello
- Esistenza di una curva perpendicolare a tutte le curve di livello
- Metodo del Gradient Descent
- Metodo dell’Hessiana
- Metodo di Newton

964.2 Analisi Matematica (Cordero)

- Teoremi di Dini per la convergenza uniforme
- Funzioni uniformemente limitate
- Famiglia di funzioni equicontinua
- Teorema di Ascoli-Arzelà
- Rete Neurale può approssimare una funzione continua
- Algebra di funzioni reali
- Algebra di funzioni separa i punti
- Teorema di Stone-Weierstrass
- Polinomi sono densi nelle funzioni continue
- Rete Neurale che approssima funzioni continue periodiche
- (Funzioni approssimate da una rete neurale)
- Wiener’s Tauberian Theorems
- Ogni funzione semplice è combinazione lineare di Heaviside
- Derivata distribuzionale di una funzione costante a tratti
- Approssimazione della misura di Dirac
- Funzione reale continua su un compatto è uniformemente continua
- One Hidden Layer Perceptron Network impara funzioni continue (8.2.1)

- One Hidden Layer Sigmoid Network impara funzioni continue (8.3.1)
- Funzioni continue sono approssimate da funzioni lineari a tratti (8.4.1)
- One Hidden Layer ReLU Network impara funzioni continue (8.4.3)
- Funzione softplus come convoluzione (8.5.1)
- One Hidden Layer softplus Network impara funzioni continue (8.5.7)
- Approssimazione Universale (Rete Neurale) (9.2)
- Spazio delle funzioni misurabili come spazio metrico (9.2.5)
- Teorema di Hahn-Banach (Corollario 9.3.2)
- One Hidden Layer Network impara funzioni continue sul cubo (9.3.3, 9.3.5 & 9.3.6)
- One Hidden Layer SigmaPi-Network impara funzioni continue sui compatti (9.3.8)
- Funzione discriminatoria (Teoria della misura) (9.3.10)
- One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni L2 sul cubo (9.3.11)
- Funzione L2 nulla se integrale nullo su tutti i semispazi (9.3.12)
- Funzione discriminatoria (Teoria della misura) (9.3.15 e 9.3.16)

Lezione 6:

- 9.3.17: One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni L1 sul cubo
- 9.3.20: Caratterizzazione convergenza in misura
- 9.3.21: Uniforme convergenza sui compatti implica convergenza in misura
- 9.3.22: One Hidden Layer Sigmoidal Network impara funzioni misurabili sui compatti di Rn
- 9.4: Numero di neuroni di One Hidden Layer Network e accuratezza dell'approssimazione
- 9.5.1: Funzioni continue a supporto compatto su Rn sono dense in Lq
- 9.5.2: Funzioni continue e lineari a tratti sono dense nelle funzioni continue a supporto compatto su Rn
- 9.5.3: Rete neurale che approssima funzioni Lq

Lezione 7: Exact Learning (Machine Learning)

- 10.1.1: One Hidden Layer Perceptron Network impara esattamente funzioni a supporto finito
- 10.1.2: One Hidden Layer Perceptron Network impara esattamente funzioni a supporto finito
- 10.1.3: One Hidden Layer Perceptron Network impara esattamente funzioni a supporto finito
- 10.2.1: Rete Neurale ReLU-feedforward
- 10.2.1 Representation of maxima: Rete Neurale ReLU-feedforward impara esattamente la funzione massimo tra N input
- 10.2.2: Rete Neurale ReLU-feedforward impara esattamente la funzione massimo tra N input

- 10.2.4: Rete Neurale ReLU-feedforward impara esattamente la funzione massimo tra N input

Lezione 8

- 10.2.5: Più profondità in favore di meno larghezza - Rete Neurale ReLU-feedforward
- 10.2.6: Rete Neurale ReLU-feedforward ha funzione di input-output continua e lineare a tratti
- 10.2.7 e 10.2.8: Rete Neurale ReLU-feedforward rappresenta esattamente funzioni continue lineari a tratti
- 10.3.1 e 10.3.2: Teorema di rappresentazione di Kolmogorov-Arnold

964.3 Cordero

964.3.1 Lezione 1

- Neurone Artificiale
- Perceptron

964.3.2 Lezione 2

- Bias-Variance Tradeoff
- Neurone Sigmoidale

964.3.3 Lezione 3

- Perceptron Learning Algorithm

964.3.4 Lezione 4

- Subderivata
- Subdifferenziale
- Subgradiente
- Metodo del subgradiente
- Algoritmo di Stochastic Gradient Descent
- Attesa condizionata

964.3.5 Lezione 5

- Neurone Sigmoidale
- Teoria dell'informazione (Shannon)
- Neurone Sigmoidale

964.3.6 Lezione 6

- Neurone ad input continuo
- Rete Neurale Feedforward
- Rete Neurale che implementa lo XOR
- Backpropagation per una rete neurale

964.3.7 Lezione 7

- Backpropagation per una rete neurale

964.3.8 Lezione 8

- Pooling
- Sigma-algebra generata dal massimo di variabili aleatorie
- Rete di Convoluzione

965 Neurone Artificiale

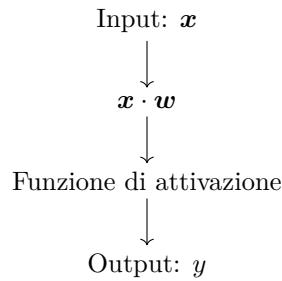
Un neurone è una cellula del corpo umano che può essere schematizzata come segue:

A neuron is a cell which consists of the following parts: dendrites, axon, and body-cell. The synapse is the connection between the axon of one neuron and the dendrite of another. The functions of each part is briefly described below:

- Dendrites are transmission channels that collect information from the axons of other neurons. The signal traveling through an axon reaches its terminal end and produces some chemicals x_i which are liberated in the synaptic gap. These chemicals are acting on the dendrites of the next neuron either in a strong or a weak way. The connection strength is described by the weight system w_i .
- The body-cell collects all signals from dendrites. Here the dendrites activity adds up into a total potential and if a certain threshold is reached, the neuron fires a signal through the axon. The threshold depends on the sensitivity of the neuron and measures how easy is to get the neuron to fire.
- The axon is the channel for signal propagation. The signal consists in the movement of ions from the body-cell towards the end of the axon. The signal is transmitted electrochemically to the dendrites of the next neuron.

Matematicamente, quindi, si considera un Σ -neurone come una unità che riceve degli input (un vettore \mathbf{x}), lo **moltiplica** per un vettore di pesi $\mathbf{w} = (w_0, \dots, w_n)$, somma un certo bias, e produce

un output processando il prodotto scalare tramite una funzione di attivazione:



Altri tipi di neuroni, invece, detti Π -neuroni, moltiplicano gli input.

Definizione 1. Un neurone astratto è una quadrupla $\langle \mathbf{x}, \mathbf{w}, \varphi, y \rangle$ dove $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ è il vettore degli input, $\mathbf{w} = \{w_0, w_1, \dots, w_n\}$ è il vettore dei pesi, con $x_0 = -1$ e $w_0 = b$ il bias, e φ è una funzione di attivazione. y è la funzione di output, che nel caso di un Σ -neurone è

$$y = \varphi(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}).$$

Alcuni esempi di neuroni:

- Perceptron
- Neurone Sigmoidale

965.1 Input type di un neurone

Gli input del neurone possono essere di diversi tipi:

- *binary*: $x_i \in \{0, 1\}$;
- *signed*: $x_i \in \{-1, 1\}$;
- *digital*: $x_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
- *real*: $x_i \in \mathbb{R}$;
- *interval*: $x_i \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

965.2 Input efficiency

Sia n il numero degli input, e sia β il numero di stati possibili (ovvero quanti valori ciascun input può assumere).

Il costo computazionale dell'implementazione di un neurone F è

$$F \propto \beta \cdot n, \quad F = k\beta n.$$

Si consideri F fissato. Si vuole massimizzare la quantità di dati trasmessi, ovvero la quantità di stati diversi che la n -upla (x_1, \dots, x_n) può assumere: β^n .

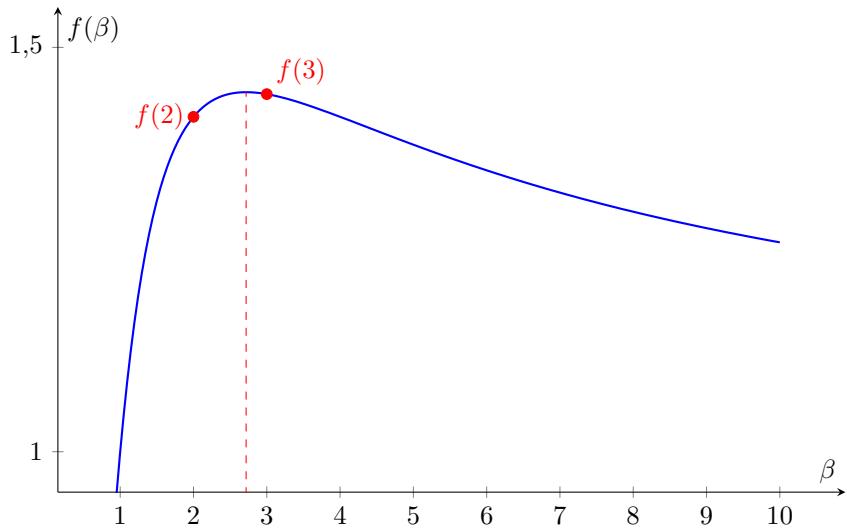


Figura 9: La funzione costo $f(\beta) = \beta^{1/\beta}$

Sia quindi $f(\beta)$ la quantità da massimizzare:

$$f(\beta) = \beta^n = \beta^{F/(k\beta)}$$

Per farlo, si considera

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(\beta) &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{F}{k\beta} \ln \beta \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{F}{k\beta} \right) \cdot \ln \beta + \frac{F}{k\beta} \cdot \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln \beta) \\ &= -\frac{F}{k\beta^2} \ln \beta + \frac{F}{k\beta^2} \\ &= \frac{F}{k\beta^2} (1 - \ln \beta). \end{aligned}$$

Dunque $f(\beta)$ ha un massimo per $\beta = e$. Graficamente (vedi Fig. 9) è possibile vedere che, restringendosi a $\beta \in \mathbb{N}$, il valore più efficiente è $\beta = 3$.

965.3 Approssimazione di una funzione continua

Tramite un neurone è possibile approssimare^[253] una [funzione continua](#)

$$f : K \rightarrow \mathbb{R}$$

con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ [compatto](#), utilizzando una [regressione lineare](#).

L'input del neurone sarà una *n-upla* $X = (x_1, \dots, x_n) \in K$, mentre l'output sarà la funzione lineare

$$L(X) = b + \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

Per semplicità si considera l'approssimazione vicino allo zero, e si suppone che

$$L(0) = f(0) = 0$$

(a meno di traslazione verticale per $f(0)$).

Si vuole quindi minimizzare

$$C(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2} \|f - L\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2} \int_K \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - f(X) \right)^2 dx_1 \cdots dx_n$$

calcolandone il [gradiente](#)

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial a_k} &= \int_K x_k \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i - f(X) \right) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \int_K x_i x_k dx_1 \cdots dx_n - \int_K x_k f(x) dx_1 \cdots dx_n \end{aligned}$$

e dunque, posti

$$\rho_{ij} := \int_K x_i x_j dx_1 \cdots dx_n, \quad m_k := \int_K x_k f(x) dx_1 \cdots dx_n$$

si ha che

$$\frac{\partial C}{\partial a_k} = \sum_{i=1}^n a_i \rho_{ik} - m_k$$

ovvero, in forma matriciale, posta^[254] $\rho = (\rho_{ij})$, $\mathbf{a} = {}^T(a_1, \dots, a_n)$ e $\mathbf{m} = {}^T(m_1, \dots, m_n)$:

$$\nabla C = \rho \mathbf{a} - \mathbf{m}$$

Dunque, posto che ρ sia [invertibile](#), si ottiene che i valori ottimali per L siano

$$\mathbf{a} = \rho^{-1} \mathbf{m}.$$

Nel caso di funzioni a valori in \mathbb{R}^m il problema si scomponete nelle diverse coordinate.

966 Funzioni di attivazione

Nel Machine Learning le funzioni che agiscono nei neuroni vengono dette [funzioni di attivazione](#). Se ne presentano alcuni esempi, con i loro nomi specifici.

Sono tutte funzioni $A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$.

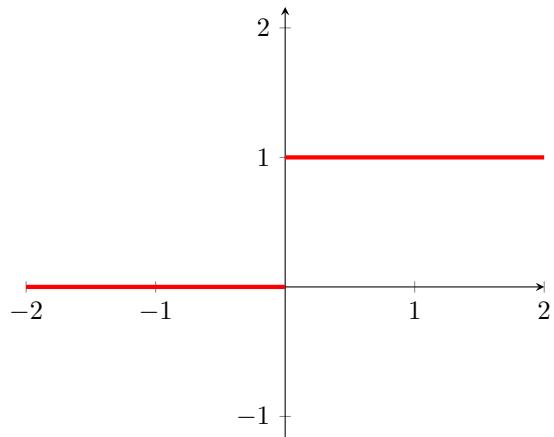


Figura 10: La funzione di Heaviside

966.1 Funzioni Lineari

Tra le funzioni di attivazione utilizzate vi sono le seguenti funzioni lineari:

- $f(x) = kx$, per $k > 0$ costante;
- la funzione identità $x \mapsto x$.

966.2 Step Functions

966.2.1 Threshold step function

La [funzione di Heaviside](#) (vedi Fig. 10)

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

la cui derivata (nel senso delle [distribuzioni](#)) è una [Delta di Dirac](#): $H'(x) = \delta(x)$:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases}$$

966.2.2 Bipolar step function

La funzione segno: (vedi Fig. 11)

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

per cui vale: $S(x) = 2H(x) - 1$. Pertanto la sua derivata è

$$S'(x) = 2H'(x) = 2\delta(x)$$

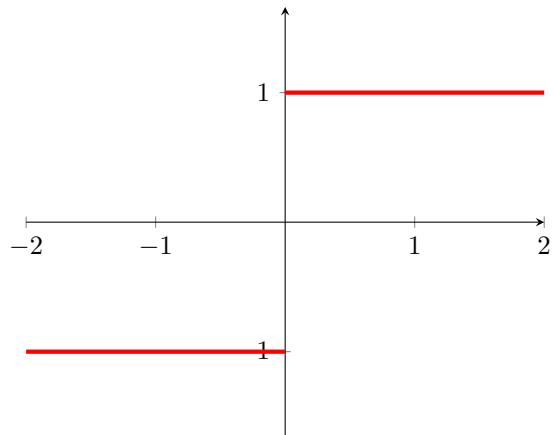


Figura 11: La funzione segno

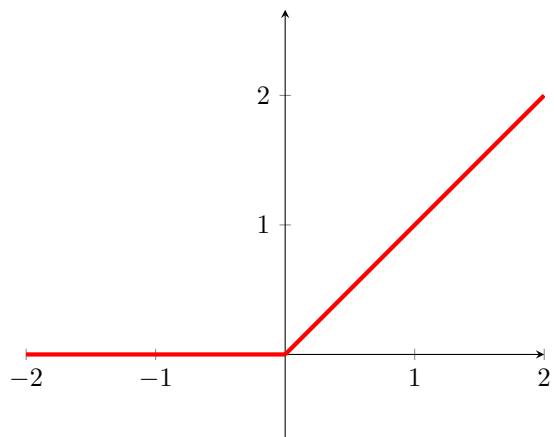


Figura 12: La funzione $\text{ReLU}(x)$

966.3 Hockeystick Functions

966.3.1 Funzione di attivazione ReLU

La *Rectified Linear Unit* (ReLU) è (vedi Fig. 12)

$$\text{ReLU}(x) = xH(x) = \max \{0, x\}$$

e la sua derivata $\text{ReLU}'(x) = H(x)$.

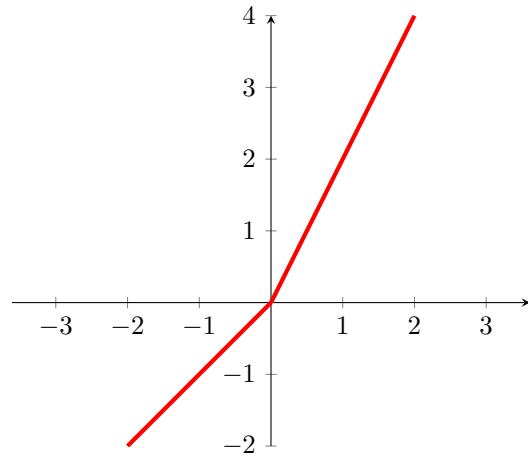


Figura 13: La funzione PReLU₂(x)

966.3.2 PReLU

La *Parametric Rectified Linear Unit* (PReLU) è (vedi Fig 13), per $\alpha > 0$

$$\text{PReLU}(\alpha; x) = \text{PReLU}_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

966.3.3 ELU

La *Exponential Linear Units* (ELU) è (vedi Fig. 14):

$$\text{ELU}(\alpha, x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ \alpha(e^x - 1) & x \leq 0 \end{cases}$$

966.3.4 SELU

La *Scaled Exponential Linear Units* (SELU) è (vedi Fig. 15)

$$\text{SELU}(\alpha, \lambda, x) = \lambda \text{ELU}(\alpha, x) = \begin{cases} \lambda x & x > 0 \\ \alpha \lambda(e^x - 1) & x \leq 0. \end{cases}$$

966.3.5 SLU

La *Sigmoid Linear Units* (SLU) è (vedi Fig. 16)

$$\phi(x) = \frac{x}{1 + e^{-x}}.$$

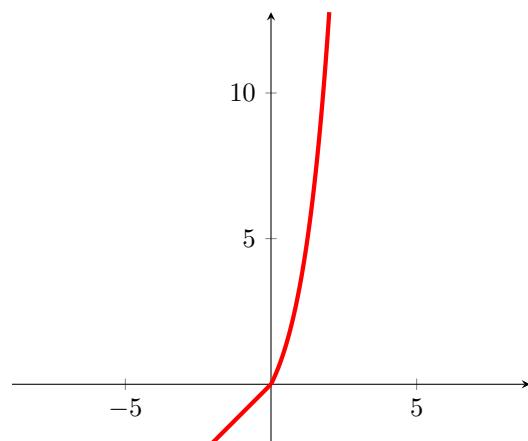


Figura 14: La funzione $\text{ELU}(\alpha, x)$

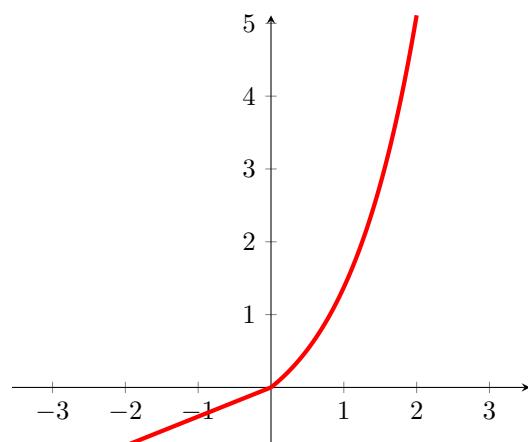


Figura 15: La funzione $\text{SELU}(0.4, 2, x)$

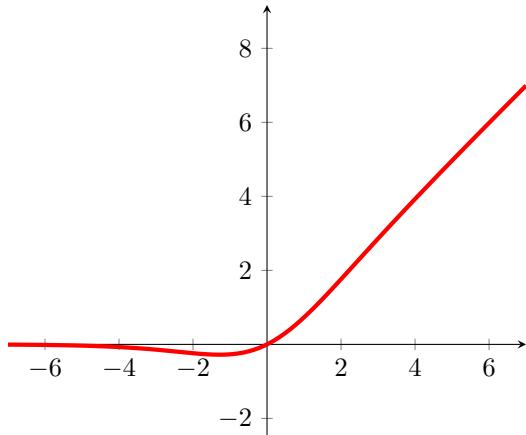


Figura 16: La funzione $\text{SLU}(x)$

Questa non è una **funzione monotona**, ma ha un **minimo** in $x_0 \approx -1,27$.

Spesso si usa anche la versione parametrica:

$$\phi_c(x) = \frac{x}{1 + e^{-cx}}.$$

966.3.6 Funzione Softplus

Questa è una funzione positiva crescente, con **range** $(0, +\infty)$: (vedi Fig. 17)

$$\text{sp}(x) = \ln(1 + e^x).$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \text{sp}(x) - \text{sp}(-x) &= \ln(1 + e^x) - \ln(1 + e^{-x}) \\ &= \ln\left(\frac{1 + e^x}{1 + e^{-x}}\right) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{e^{-x}(1 + e^x)}\right) \\ &= \ln e^x = x. \end{aligned}$$

La sua derivata è

$$\text{sp}'(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} > 0.$$

966.4 Funzioni Sigmoidali

966.4.1 Funzione Logistică

La funzione logistica è (vedi Fig. 18)

$$\sigma_c(x) = \sigma(c; x) = \frac{1}{1 + e^{-cx}}.$$

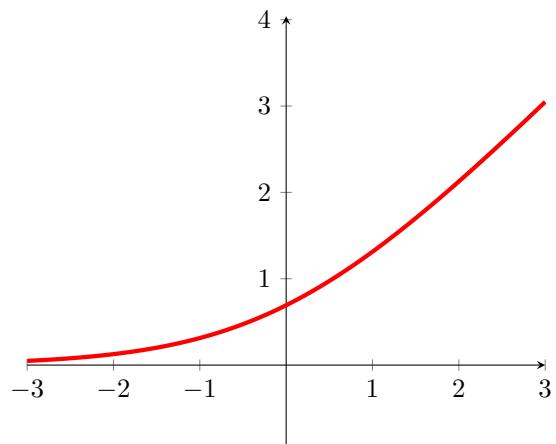


Figura 17: La funzione $\text{sp}(x)$

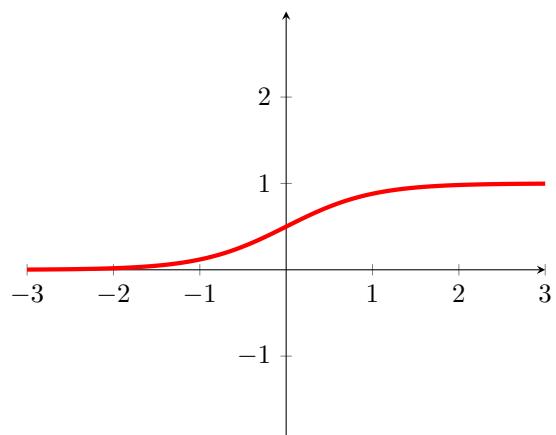


Figura 18: La funzione $\sigma_2(x)$

La famiglia di funzioni $(\sigma_c(x))_{c \in (0, +\infty)}$ approssima la [funzione di Heaviside](#) $H(x)$, in quanto

$$\lim_{c \rightarrow \infty} e^{-cx} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ +\infty & x < 0 \end{cases}$$

e pertanto

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \sigma_c(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

e pertanto, per ogni $x \neq 0$: $H(x) = \lim_{c \rightarrow +\infty} \sigma_c(x)$.

Le funzioni logistiche sono soluzioni della seguente equazione differenziale:

$$\sigma'_c = c\sigma_c(1 - \sigma_c)$$

infatti:

$$\begin{aligned} \sigma'_c(x) &= -\frac{1}{(1 + e^{-cx})^2} \cdot (-c e^{-cx}) \\ &= c \cdot \frac{1}{1 + e^{-cx}} \cdot \frac{e^{-cx}}{1 + e^{-cx}} \\ &= c \cdot \frac{1}{1 + e^{-cx}} \cdot \left(\frac{e^{-cx} + 1 - 1}{1 + e^{-cx}} \right) \\ &= c \cdot \frac{1}{1 + e^{-cx}} \cdot \left(1 + \frac{-1}{1 + e^{-cx}} \right) \\ &= c \cdot \sigma_c(x) \cdot (1 - \sigma_c(x)). \end{aligned}$$

Spesso ci si riferisce a $\sigma := \sigma_1$ come alla [funzione logistica](#) o [funzione sigmoide](#) (in quanto è l'archetipo della [Funzione sigmoidale](#)).

966.4.2 Tangente Iperbolica

La [tangente iperbolica](#) $\tanh(x)$ è (vedi Fig. 19)

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 2\sigma_2(x) - 1$$

Inoltre si ha che $\tanh'(x) = 1 - (\tanh(x))^2$:

$$\begin{aligned} \tanh'(x) &= 2\sigma'_2(x) = 2 \cdot 2\sigma_2(x) \cdot (1 - \sigma_2(x)) \\ &= 2\sigma_2(x) \cdot (2 - 2\sigma_2(x)) \\ &= (\tanh(x) + 1) \cdot (1 - 2\sigma_2(x) + 1) \\ &= (\tanh(x) + 1)(-\tanh(x) + 1) = 1 - (\tanh(x))^2 \end{aligned}$$

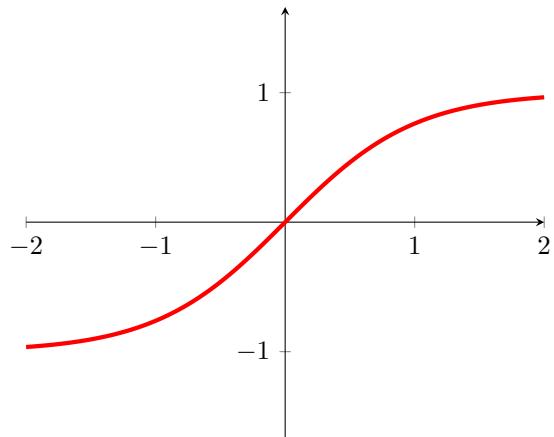


Figura 19: La funzione $\tanh(x)$

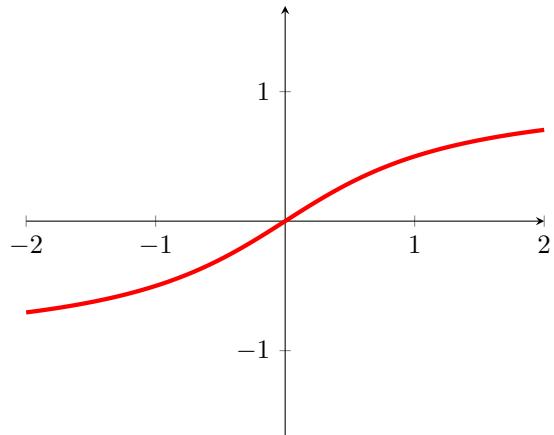


Figura 20: La funzione $h(x)$

966.4.3 Arcotangente

È spesso utilizzata la seguente **arcotangente** (vedi Fig. 20):

$$h(x) = \frac{2}{\pi} \arctan(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

966.4.4 Softsign

La seguente funzione differenziabile è la funzione *softsign*: (vedi Fig. 21)

$$\text{so}(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

che ha range $(-1, 1)$.

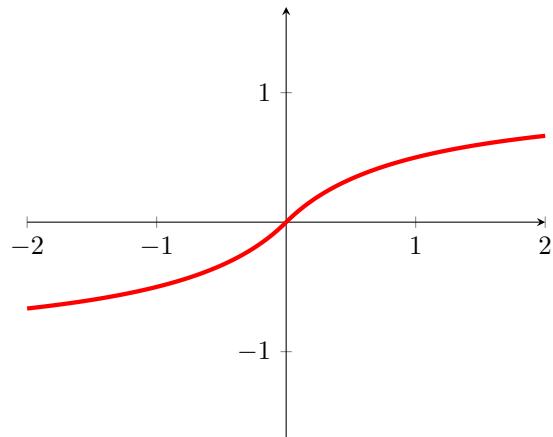


Figura 21: La funzione $\text{so}(x)$

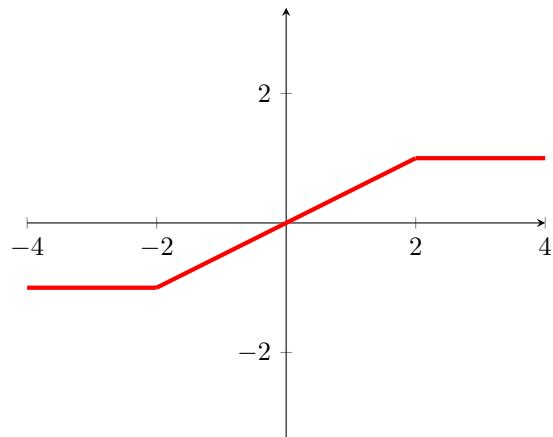


Figura 22: La funzione $f_2(x)$

966.4.5 Piecewise Linear

Dato un parametro $\alpha > 0$ (vedi Fig. 22)

$$f_\alpha(x) = f(\alpha, x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\alpha \\ x/\alpha & -\alpha < x < \alpha \\ 1 & x \geq \alpha. \end{cases}$$

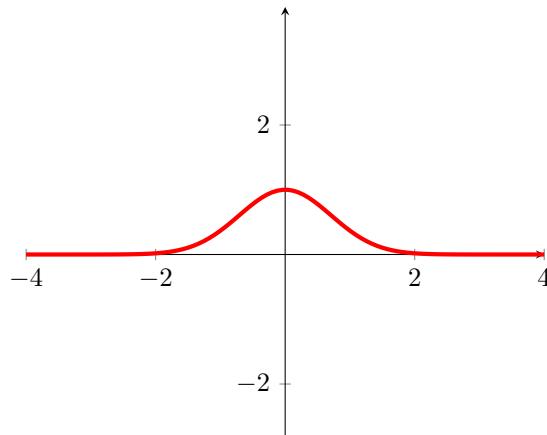


Figura 23: La funzione $g(x)$

966.5 Bumped-type Functions

966.5.1 Gaussiana

La funzione gaussiana mappa \mathbb{R} nell'intervallo $(0, 1]$: (vedi Fig. 23)

$$g(x) = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

966.5.2 Doppio esponenziale

Mappa la retta reale nell'intervallo $(0, 1]$ ed è definita: (vedi Fig. 24)

$$f(x) = e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

967 Rete Neurale

Una rete neurale è un modello computazionale ispirato alla struttura e al funzionamento del cervello biologico, costituito da un insieme di unità (detti neuroni artificiali) organizzate in strati (input, nascosti e output) connesse tra loro da pesi sinaptici che modulano il segnale trasmesso.

Questa riceve degli input e produce un output (dando luogo ad una funzione input-output), in base a certi parametri w , per simulare la FUNZIONE TARGET; quest'ultima è l'obiettivo finale della Rete Neurale (ovvero si vuole far sì che l'output della rete neurale sia il più vicino possibile al risultato della funzione target).

Per misurare la distanza tra l'output di una rete e la funzione target si utilizza una funzione errore (o funzione costo), che deve essere scelta in base all'applicazione specifica.

Il processo di apprendimento è quello che, partendo dai parametri w , li modifica (iterativamente), fino a dei parametri w^* , che sono optimali, nel senso che minimizzano la funzione errore. Dunque il processo di apprendimento comporta la minimizzazione della funzione costo.

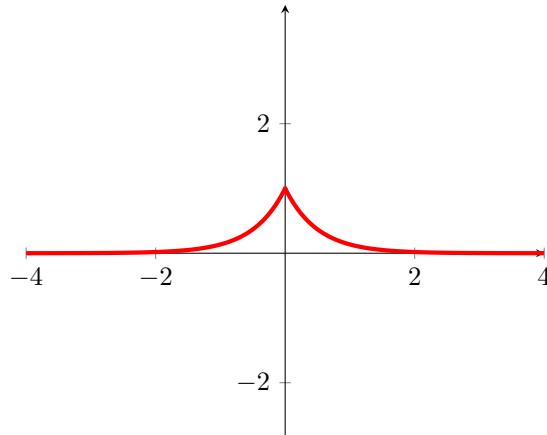


Figura 24: La funzione $f(x)$ con parametro $\lambda = 2$

967.1 Rete Neurale Feedforward

Esempio 1. Si consideri una rete neurale come in Figura 25, divisa in tre layer: quello di input (layer 0), quello centrale (nascosto, layer 1), e quello di output (layer 2).

- Il neurone 1 del layer 1 riceve

$$s_1^{(1)} := \sum_{i=0}^2 x_i^{(0)} w_{i1}^{(1)}$$

e trasmette $x_1^{(1)} := \phi(s_1^{(1)})$.

- Il neurone 2 del layer 1 riceve

$$s_2^{(1)} := \sum_{i=0}^2 x_i^{(0)} w_{i2}^{(1)}$$

e trasmette $x_2^{(1)} := \phi(s_2^{(1)})$.

Compattando la notazione, si ottiene che^[255]

$$S^{(1)} = \begin{pmatrix} s_1^{(1)} \\ s_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{01}^{(1)} & w_{11}^{(1)} & w_{21}^{(1)} \\ w_{02}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & w_{22}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0^{(0)} \\ x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = {}^T W^{(1)} X^{(0)}$$

ed inoltre $X^{(1)} = \phi(S^{(1)}) = (-1, \phi(s_1^{(1)}), \phi(s_2^{(1)}))$.

- Il neurone 1 del layer 2 riceve

$$s_1^{(2)} := \sum_{i=0}^2 x_i^{(1)} w_{i1}^{(2)}$$

e trasmette $x_1^{(2)} := \phi(s_1^{(2)})$.

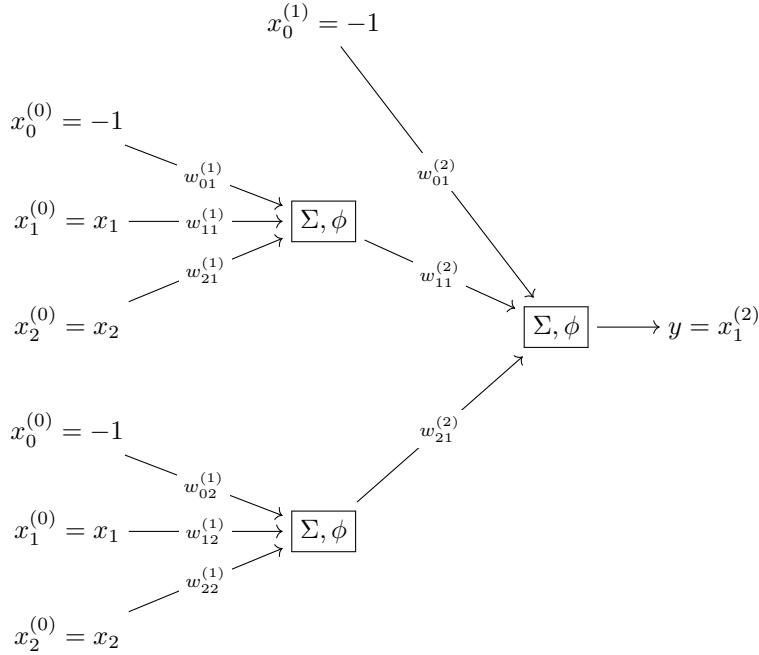


Figura 25: Rete Neurale con tre neuroni

Si dà ora un po' di nomenclatura, in generale, per le reti neurali feedforward, definite sotto:

- Layers: We shall denote in the following the layer number by the upper script ℓ . We have $\ell = 0$ for the input layer, $\ell = 1$ for the first hidden layer, and $\ell = L$ for the output layer. Note that the number of hidden layers is equal to $L - 1$. The number of neurons in the layer ℓ is denoted by $d^{(\ell)}$. In particular, $d^{(0)}$ is the number of inputs and $d^{(L)}$ is the number of outputs.
- Weights: The system of weights is denoted by $w_{ij}^{(\ell)}$, with $1 \leq \ell \leq L, 0 \leq i \leq d^{(\ell-1)}, 1 \leq j \leq d^{(\ell)}$. The weight $w_{ij}^{(\ell)}$ is associated with the edge that joins the i th neuron in the layer $\ell - 1$ to the j th neuron in the layer ℓ . Note that the edges join neurons in consecutive layers only. The weights $w_{0j}^{(\ell)} = b_j^{(\ell)}$ are regarded as biasses. They are the weights corresponding to the fake input $x_0^{(\ell)} = -1$. The number of biasses is equal to the number of neurons. The number of weights, without biasses, between the layers $\ell - 1$ and ℓ is given by $d^{(\ell-1)}d^{(\ell)}$, so the total number of weights in a feedforward network is $\sum_{\ell=1}^L d^{(\ell-1)}d^{(\ell)}$.
- Inputs and outputs: The inputs to the network are denoted by $x_j^{(0)}$, with $1 \leq j \leq d^{(0)}$. We denote by $x_j^{(\ell)}$ the output of the j -th neuron in the layer ℓ . Consequently, $x_j^{(L)}$ is the network output, with $1 \leq \ell \leq d^{(L)}$. The notation $x_0^{(\ell)} = -1$ is reserved for the fake input linked to the bias corresponding to the neurons in the layer $\ell + 1$.

Consider the j -th neuron in the layer ℓ . In its first half, the neuron collects the information from

the previous layer, as a weighted average, into the signal:

$$s_j^{(\ell)} = \sum_{i=0}^{d^{(\ell-1)}} w_{ij}^{(\ell)} x_i^{(\ell-1)} = \sum_{i=1}^{d^{(\ell-1)}} w_{ij}^{(\ell)} x_i^{(\ell-1)} - b_j^{(\ell)}.$$

In its second half, the neuron applies an activation function ϕ to the previous signal and outputs the value

$$x_j^{(\ell)} = \phi \left(\sum_{i=1}^{d^{(\ell-1)}} w_{ij}^{(\ell)} x_i^{(\ell-1)} - b_j^{(\ell)} \right)$$

This can be written in the following equivalent matrix form:

$$X^{(\ell)} = \phi \left({}^T W^{(\ell)} X^{(\ell-1)} - B^{(\ell)} \right)$$

where we used the notations

$$X^{(\ell)} = {}^T \left(x_1^{(\ell)}, \dots, x_{d^\ell}^{(\ell)} \right), \quad W^{(\ell)} = \left(w_{ij}^{(\ell)} \right)_{i,j}, \quad B^{(\ell)} = {}^T \left(b_1^{(\ell)}, \dots, b_{d^\ell}^{(\ell)} \right)$$

with $1 \leq i \leq d^{(\ell-1)}$ and $1 \leq j \leq d^{(\ell)}$, and where we used the convention that the activation function applied on a vector acts on each of the components of the vector. We note that the input to the network is given by the vector $X^{(0)} = {}^T \left(x_1^{(0)}, \dots, x_{d^{(0)}}^{(0)} \right)$, while the network output is $X^{(L)} = {}^T \left(x_1^{(L)}, \dots, x_{d^{(L)}}^{(L)} \right)$.

Definizione 2. Let $U_\ell = \{1, 2, \dots, d^{(\ell)}\}$, $0 \leq \ell \leq L$, and consider the sequence of affine functions $\alpha_1, \dots, \alpha_L$

$$\alpha_\ell : \mathcal{F}(U_{\ell-1}) \rightarrow \mathcal{F}(U_\ell)$$

and the sequence of activation functions $\phi^{(\ell)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Then the corresponding feedforward neural network is the sequence of maps f_0, f_1, \dots, f_L , where

$$f_\ell = \phi^{(\ell)} \circ \alpha_\ell \circ f_{\ell-1}, \quad 1 \leq \ell \leq L$$

with f_0 given.

Hence, a deep feedforward neural network produces a sequence of progressively more abstract reparametrizations, f_ℓ , by mapping the input, f_0 , through a series of parametrized functions, α_ℓ , and nonlinear activation functions, $\phi^{(\ell)}$. The network's output is given by

$$f_L = \phi^{(L)} \circ \alpha_L \circ \phi^{(L-1)} \circ \alpha_{L-1} \circ \dots \circ \phi^{(1)} \circ \alpha_1.$$

The number L is referred as the depth of the network and $\max \{d^{(1)}, \dots, d^{(L-1)}\}$ as the width.

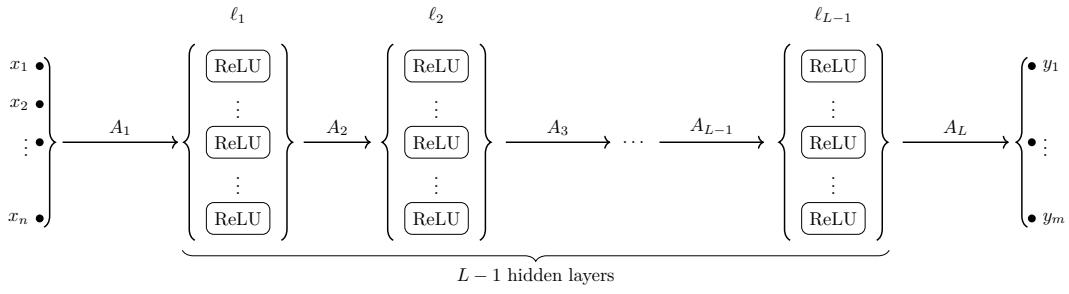


Figura 26: Una rete neurale ReLU-feedforward

967.1.1 Rete Neurale ReLU-feedforward

Definizione 3. Una rete neurale ReLU-feedforward con input $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e output $y \in \mathbb{R}^m$, illustrata in Fig. 26, è data da:

- $L - 1$ numeri naturali $\ell_1, \dots, \ell_{L-1}$;
- L funzioni affini A_1, \dots, A_L tali che

$$\begin{aligned} A_1 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{\ell_1} \\ A_i : \mathbb{R}^{\ell_{i-1}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\ell_i} \\ A_L : \mathbb{R}^{\ell_{L-1}} &\rightarrow \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

L'output della rete è

$$A_L \circ \text{ReLU} \circ A_{L-1} \circ \dots \circ \text{ReLU} \circ A_1,$$

dove ReLU è la versione multidimensionale della funzione di attivazione ReLU, ovvero

$$\text{ReLU}(x_1, \dots, x_r) = (\text{ReLU}(x_1), \dots, \text{ReLU}(x_r)).$$

Si utilizza la seguente nomenclatura:

- L è la profondità della rete neurale;
- la larghezza della rete neurale è

$$w := \max \{\ell_1, \dots, \ell_{L-1}\}$$

mentre la larghezza di un layer è ℓ_i ;

- la dimensione della rete neurale è

$$s = \ell_1 + \dots + \ell_{L-1}$$

ovvero il numero di neuroni nascosti.

968 Funzioni costo (Machine Learning)

Una funzione costo è una funzione che misura, dati certi parametri \mathbf{w} di una rete neurale, quanto la rete neurale si discosta dalla funzione target.

968.1 La Funzione Errore Supremum

Una rete neurale prende input $x \in [0, 1]$ e deve imparare una data funzione continua $\phi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

La funzione della rete neurale, dipendente dai parametri \mathbf{w}, b , è $f_{\mathbf{w}, b}(x)$.

La funzione costo Supremum è

$$C(\mathbf{w}, b) := \sup_{x \in [0, 1]} |f_{\mathbf{w}, b}(x) - \phi(x)|.$$

Se la funzione ϕ è conosciuta solo per N valori x_1, \dots, x_N , allora la funzione costo diventa

$$C(\mathbf{w}, b) := \max_{i=1, \dots, N} |f_{\mathbf{w}, b}(x_i) - \phi(x_i)|.$$

968.2 La Funzione Errore Norma L2

Una rete neurale prende input $x \in [0, 1]$ e deve imparare una data funzione $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\int_0^1 (\phi(x))^2 dx < \infty$$

La funzione della rete neurale, dipendente dai parametri \mathbf{w}, \mathbf{b} , è $f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x)$. La funzione costo associata a questo tipo di problema è quella che misura la distanza nella norma L^2 :

$$C(\mathbf{w}, \mathbf{b}) := \int_{[0, 1]} (f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x) - \phi(x))^2 dx.$$

Se la funzione ϕ è conosciuta soltanto in N punti

$$z_1 = \phi(x_1), \quad z_2 = \phi(x_2), \quad \dots, z_N = \phi(x_N)$$

allora, posti $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$ e $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, la funzione costo diventa la distanza in \mathbb{R}^N tra \mathbf{z} e $f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(\mathbf{x}) := (f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(z_1), \dots, f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(z_N))$:

$$C(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{z} - f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(\mathbf{x})\|^2 = \sum_{i=1}^N |z_i - f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_i)|^2$$

968.2.1 Interpretazione Geometrica

Fissati \mathbf{x} e \mathbf{z} , la mappa $(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \mapsto f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(\mathbf{x})$ rappresenta una ipersuperficie in \mathbb{R}^N :

$$\Phi(\mathbf{w}, \mathbf{b}) = \begin{pmatrix} \Phi_1(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \\ \vdots \\ \Phi_N(\mathbf{w}, \mathbf{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_1) \\ \vdots \\ f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_N) \end{pmatrix}$$

e la funzione costo $C(\mathbf{w}, \mathbf{b})$ è la [distanza](#) euclidea in \mathbb{R}^N di un punto sulla ipersuperficie dal punto \mathbf{z} . Si suppongano appropriate ipotesi di differenziabilità della ipersuperficie.

Il costo è minimizzato in $(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)$ quando la distanza è minima, ovvero quando $\Phi(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)$ è la proiezione ortogonale di \mathbf{z} sulla ipersuperficie: questo significa che il vettore $\Phi(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*) - \mathbf{z}$ è ortogonale al [piano tangente](#) alla ipersuperficie in $\Phi(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)$: quest'ultimo è generato dai vettori^[256]

$$\partial_{w_k} \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)}; \quad \partial_{b_j} \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)}$$

Richiedere l'ortogonalità, quindi, significa richiedere che i prodotti scalari:

$$\begin{aligned} \left(\partial_{w_k} \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)} \right) \cdot (\Phi(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*) - \mathbf{z}) &= 0 \\ \left(\partial_{b_j} \Phi(\mathbf{w}, \mathbf{b})|_{(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)} \right) \cdot (\Phi(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*) - \mathbf{z}) &= 0. \end{aligned}$$

Queste sono le [equazioni normali](#), che operativamente diventano

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N (f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_i) - z_i) \cdot \partial_{w_k} f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_i)|_{(\mathbf{w}, \mathbf{b})=(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)} &= 0 \\ \sum_{i=1}^N (f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_i) - z_i) \cdot \partial_{b_j} f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(x_i)|_{(\mathbf{w}, \mathbf{b})=(\mathbf{w}^*, \mathbf{b}^*)} &= 0 \end{aligned}$$

968.3 Funzione costo MSE (Machine Learning)

Si consideri una rete neurale che:

- prenda in input X [variabile aleatoria](#),
- voglia emulare la funzione target Z , v.a.
- abbia output $Y := f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(X)$.

La funzione costo più adatta per questo tipo di problema è

$$C(w, b) := \mathbb{E}[(Y - Z)^2].$$

Nel caso in cui non si conoscessero le distribuzioni di X e Z , ma soltanto delle osservazioni $(X_1, Z_1), \dots, (X_N, Z_N)$ nel training set, la funzione costo discretizzata diventa

$$\widetilde{C}(w, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{\mathbf{w}, \mathbf{b}}(X_i) - Z_i)^2$$

968.4 Regolarizzazione della Funzione Costo (Machine Learning)

Per evitare il fenomeno dell'[overfitting](#), è bene mantenere i parametri [piccoli](#). Pertanto, data una funzione costo $C(\mathbf{w})$, la si [regolarizza](#), utilizzando una funzione costo $G(\mathbf{w})$, data da $C(\mathbf{w})$ più un termine di regolarizzazione.

Regolarizzazione L^2 . Si aggiunge alla funzione $C(\mathbf{w})$ la **2-norma** in \mathbb{R}^n dei parametri:

$$G(\mathbf{w}) := C(\mathbf{w}) + \lambda \|\mathbf{w}\|_2^2, \quad \text{dove } \|\mathbf{w}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n (w_i)^2.$$

Il valore $\lambda > 0$ è un **moltiplicatore di Lagrange**; questo parametro deve essere scelto in maniera da minimizzare l'*overfitting*.

Regolarizzazione L^1 . Si aggiunge alla funzione $C(\mathbf{w})$ la 1-norma in \mathbb{R}^n dei parametri:

$$G(\mathbf{w}) := C(\mathbf{w}) + \lambda \|\mathbf{w}\|_1, \quad \text{dove } \|\mathbf{w}\|_1 = \sum_{i=1}^n |w_i|.$$

Il valore $\lambda > 0$ è un **moltiplicatore di Lagrange**. Questo metodo, non differenziabile nell'origine, potrebbe dare dei problemi nella ricerca dei minimi tramite il gradiente.

Potential Regulation. Sia $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ tale che:

1. $U(x) = 0$ se e solo se $x = 0$;
2. U ha un minimo assoluto in $x = 0$.

La funzione costo regolarizzata diventa:

$$G(\mathbf{w}) = C(\mathbf{w}) + \lambda U(\mathbf{w}), \quad \lambda > 0$$

Il potenziale deve essere scelto in maniera tale che l'errore, utilizzando G , sia minore che utilizzando C .

969 Funzione di Heaviside

Definizione 1. La funzione di Heaviside è

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

970 Spazi Lp

971 Gradiente di una funzione

972 Prodotto Scalare

973 Distribuzione (Analisi Matematica)

974 Delta di Dirac

Definizione 1. La delta di Dirac è $\delta(x)$ tale che per ogni f ???

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0).$$

La delta di Dirac centrata in a è $\delta_a(x)$ tale che per ogni f ???

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta_a(x) dx = f(a).$$

975 Misura di Baire

976 Funzione discriminatoria (Machine Learning)

Definizione 1. Sia \mathcal{M} la famiglia delle misure di Baire sul cubo $I^n := [0, 1]^n \subseteq \mathbb{R}$, finite, con segno e regolari.

Una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice discriminatoria se per ogni $\mu \in \mathcal{M}$:

$$\left(\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \int_{I^n} f(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 0 \right) \rightarrow \mu = 0$$

Definizione 2. Una funzione $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice discriminatoria in senso L^2 se:

1. $\forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leq \sigma(x) \leq 1$;
2. se $g \in L^2(I_n)$ ^[257] e

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R} : \quad \int_{I_n} \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \theta) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

allora $g = 0$

Esempio 3. La funzione logistica $\sigma(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$ è discriminatoria in senso L^2 .

Definizione 4. Una funzione $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice discriminatoria in senso L^1 se:

1. σ è misurabile e limitata;
2. σ è sigmoidale;
3. se $g \in L^\infty(I_n)$ ^[589] e

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R} : \quad \int_{I_n} \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \theta) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$$

allora $g = 0$

- 977 Misura finita
- 978 Misura con segno
- 979 Misura Regolare
- 980 Funzione sigmoidale

Definizione 1. Una funzione $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ si dice sigmoidale se^[258]

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) = +1.$$

- 981 Limite (Analisi Matematica)
- 982 Funzioni sigmoidali sono discriminatorie per le misure di Baire sul cubo unitario

Proposizione 1. Ogni funzione sigmoidale $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è discriminatoria per \mathcal{M} , dove \mathcal{M} è l'insieme misure di Baire sul cubo $I^n := [0, 1]^n$, finite, con segno e regolari.

Ovvero, se $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ è tale che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sigma(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sigma(x) = 1$$

allora, per ogni $\mu \in \mathcal{M}$,

$$\left(\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \int_{I^n} f(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}) = 0 \right) \rightarrow \mu = 0$$

- 983 Spazio Normato
- 984 Overfitting
- 985 Moltiplicatore di Lagrange
- 986 p-norma in Rn
- 987 Processo di apprendimento di una rete neurale

L'apprendimento di una rete neurale è il processo di ricerca dei parametri ottimali per approssimare la funzione target. Questo è un processo iterativo algoritmico, che genera una sequenza (w_t) di parametri. Poiché si parla di numeri immensi di elementi in questa sequenza, spesso ci si riferisce a t come una sorta di variabile temporale continua.

Si vuole allenare un modello per replicare una funzione target di cui si conoscono N valori: $\{(x_i, z_i)\}$, minimizzando la funzione costo $C(\mathbf{w})$.

Questo insieme è diviso in tre parti:

- training set \mathcal{T} (c.a. 70% dei dati);
- test set \mathcal{T} (c.a. 20% dei dati);
- validation set \mathcal{V} (c.a. 10% dei dati).

Si suppone che siano identicamente distribuiti, e che siano indipendenti. Si ottengono quindi tre errori:

- errore di training $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$: è il valore della funzione costo utilizzando i valori della funzione target presi dal training set;
- errore di test $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$: è il valore della funzione costo utilizzando i valori della funzione target presi dal test set;
- validation error $C_{\mathcal{V}}(\mathbf{w})$: è il valore della funzione costo utilizzando i valori della funzione target presi dal validation set.

987.1 Errori di Training e di Test

Con un qualche algoritmo si trova il valore \mathbf{w}^* che minimizza $C_{\mathcal{T}}$. Successivamente, si calcola $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}^*)$, e generalmente vale:

$$C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}^*) \leq C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$$

Ci sono tre possibili scenari, a questo punto:

- sia $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}^*)$ che $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$ sono piccoli: questo è lo scenario desiderato;
- $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}^*)$ è piccolo, ma $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$ è grande: questo è un fenomeno di overfitting; questo significa che la rete neurale sta “memorizzando” il training set, e non riesce a generalizzare bene; probabilmente bisogna rivedere l’architettura della rete neurale, probabilmente diminuendo i parametri;
- sia $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w}^*)$ che $C_{\mathcal{T}}(\mathbf{w})$ sono grandi: questo è un fenomeno di underfitting; bisogna rivedere l’architettura della rete neurale, probabilmente aumentando i parametri.

Pertanto si utilizza il test set per verificare che i valori dei parametri trovati sul training set siano sufficientemente generalizzabili.

987.2 Iperparametri di un processo di apprendimento

L’algoritmo di apprendimento dipende da un insieme di parametri diversi da quelli della rete neurale. Questi sono detti iperparametri.

Si utilizza la mimimizzazione del validation error proprio per regolare gli iperparametri.

987.3 Alcuni esempi di algoritmi di apprendimento

Altri algoritmi sono:

- Perceptron Learning Algorithm.
- Algoritmo di Gradient Descent.
- Può essere implementato il Metodo del subgradiente
- Gradient Descent con Backpropagation per una RNFF

Proposizione 1. Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile e con gradiente $\nabla f \neq 0$. Sia $S_c := \{x \in D \mid f(x) = c\}$ una curva di livello.

Allora per ogni $x \in S_c$, $\nabla f(x)$ è perpendicolare a S_c in x .

Sia $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, tale che $x^* \in D$ sia un punto di minimo locale, e sia $z^* := f(x^*)$.

Allora esiste $x^* \in \mathcal{V} \subseteq D$ tale che per ogni $x \in \mathcal{V} \setminus \{x^*\}$ ^[259]: $f(x^*) < f(x)$, ed esiste $\varepsilon > 0$ tale che^[260] per ogni $c \in [z^*, z^* + \varepsilon]$ si ha $S_c \subseteq \mathcal{V}$. Inoltre $S_{z^*} = \{x^*\}$.

Teorema 2. Se il gradiente ∇f è lipschitziano, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che, per ogni $x_0 \in B_\varepsilon(x^*)$ ^[261] esiste una curva $\gamma : [0, \delta] \rightarrow D$ tale che

1. $\gamma(0) = x_0$;
2. $\gamma(\delta) = x^*$;
3. per ogni $t \in [0, \delta]$, $\gamma'(t)$ è perpendicolare a $S_{f(\gamma(t))}$.

Definizione 3. Sia $F : A \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ una funzione. $C \subseteq A$ si dice curva di livello se esiste $c \in \mathbb{R}^n$ tale che C sia retroimmagine di c tramite F :

$$C = F^{-1}(c) = \{x \in A \subseteq \mathbb{R}^m \mid F(x) = c\}$$

Teorema 4. Sia X uno spazio topologico, e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Se X è compatto, allora esistono $x_{\max}, x_{\min} \in X$ tali che

$$\forall x \in X : \quad f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

ovvero f ha massimo e minimo.

988 Massimo e minimo di una funzione reale

Definizioni p. 100 e 101 dei miei appunti di Analisi Matematica 1B

989 Minimizzazione di una funzione reale

Si raccolgono alcuni risultati di interesse per la minimizzazione di una funzione reale:

- Valgono il Teorema di Weierstrass e il Teorema di Fermat.
- Hessiana e punti stazionari di una funzione reale
- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange

Vedere gli appunti di Analisi 1B e Analisi 2

990 Teorema di Fermat sui punti stazionari

https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Fermat_sui_punti_stazionari

991 Funzione derivabile

Proposizione 1. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia $f \in C^2(A)$ ^[262]. Sia c un punto critico per f . Sia $H_f(c)$ l'Hessiana di f calcolata nel punto c .

- Se $H_f(c)$ è definita positiva, allora c è un punto di minimo locale forte.
- Se $H_f(c)$ è definita negativa, allora c è un punto di massimo locale forte.
- Se $H_f(c)$ è indefinita, allora c è un punto di sella.

Dimostrazione. Si dimostra che se $H_f(c)$ è definita positiva, allora c è un punto di minimo locale.

Sia $\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow A$ una curva di classe C^2 tale che $\gamma(0) = c$ e $\|\gamma'(0)\| = 1$. Sia $\mathbf{v} := \gamma'(0)$. Sia $g(t) := f \circ \gamma(t)$.

- $g'(0) = 0$. Infatti, applicando la chain rule:^[263]

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\ &= \nabla f(c) \cdot \mathbf{v} = 0 \cdot \mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

- $g''(0) > 0$. Infatti, si noti che^[264]

$$g''(0) = D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{v}}f)(c)$$

Inoltre, siccome f è differenziabile, si ha che $D_{\mathbf{v}}f(x) = \nabla f(x) \cdot \mathbf{v}$.

Anche $D_{\mathbf{v}}f$ è differenziabile, e pertanto <

$$D_{\mathbf{v}}(D_{\mathbf{v}}f)(x) = \nabla(D_{\mathbf{w}}f)(x) \cdot \mathbf{v}$$

Ma

$$\nabla(\nabla f(x) \cdot \mathbf{v}) = H_f(x)\mathbf{v}$$

e pertanto $g''(0) = H_f(c)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} > 0$.

■

992 Matrice Hessiana

993 Funzioni iperboliche

994 Funzioni trigonometriche

995 Teoremi di Dini per la convergenza uniforme

Teorema 1. Sia $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una successione di funzioni continue.

1. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1} \leq f_n$ e

$$\forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \rightarrow 0$$

allora f_n converge uniformemente a 0 su $[a, b]$.

2. Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Se per ogni $n \in \mathbb{N}$: $f_{n+1} \leq f_n$ e

$$\forall x \in [a, b] \quad f_n(x) \rightarrow g(x)$$

allora f_n converge uniformemente a g su $[a, b]$.

996 Convergenza uniforme

997 Successione di funzioni

Definizione 1. Una famiglia di funzioni \mathcal{F} da un insieme A a valori reali si dice uniformemente limitata (uniformly bounded) se esiste $M > 0$ tale che

$$\forall x \in A, \quad \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x)| \leq M.$$

Esempio 2. Sia $\mathcal{F} := \{\cos(ax + b); a, b \in \mathbb{R}\}$. Allora la famiglia \mathcal{F} è uniformemente limitata su \mathbb{R} , per $M = 1$.

Esempio 3. Si consideri

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(w_j x + b_j); \alpha_j, w_j, b_j \in \mathbb{R} \mid \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \leq 1 \right\}$$

dove $\sigma(x)$ è una funzione sigmoidale fissata.

Questa famiglia è uniformemente limitata su \mathbb{R} , per $M = \sqrt{N}$, poiché, per C-S

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(w_j x + b_j) \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N \sigma(w_j x + b_j) \right) \leq 1 \cdot N = N.$$

998 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Definizione 1. Una famiglia di funzioni \mathcal{F} da un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ a valori reali si dice equicontinua se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \forall x, y \in A \quad (|x - y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Equivalentemente, le funzioni di \mathcal{F} sono uniformemente continue per gli stessi ε e δ .

Esempio 2. Si consideri $\mathcal{F} \subseteq C^1([a, b])^{[265]}$ tale che esista $L > 0$:

$$\forall f \in \mathcal{F} \quad \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| < L.$$

Allora \mathcal{F} è equicontinua.

Infatti, per il [Teorema di Lagrange](#):

$$|f(x) - f(y)| \leq \left(\sup_{c \in [a, b]} |f'(c)| \right) |x - y| \leq L |x - y|$$

e dunque, scegliendo $\delta = \varepsilon/L$ si ha la tesi.

Esempio 3. Sia σ una funzione sigmoidale tale che esista $\lambda > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : |\sigma'(x)| < \lambda < 1$$

e sia \mathcal{F} la famiglia definita su $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ come segue:

$$\mathcal{F} := \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(w_j x + b_j); \alpha_j, w_j, b_j \in \mathbb{R} \mid \sum_{j=1}^N (\alpha_j^2 + w_j^2) \leq 1 \right\}.$$

Allora \mathcal{F} è equicontinua. Infatti:

- $\mathcal{F} \subseteq C^1([a, b])$;
- Sia $f \in \mathcal{F}$: per [C-S](#):

$$\begin{aligned} |f'(x)| &= \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j w_j \sigma'(w_j x + b_j) \right| \leq \sum_{j=1}^N |\alpha_j| |w_j| \lambda \\ &\leq \lambda \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{j=1}^N w_j^2 \right)^{1/2} \leq \lambda. \end{aligned}$$

Per l'esempio precedente, si ottiene la tesi.

Si noti, inoltre, che se σ è la [sigmoide](#) logistica, allora la derivata massima è ottenuta in $x = 0$ e vale

$$\sigma'(0) = \sigma(0)(1 - \sigma(0)) = \frac{1}{4} < 1.$$

Teorema 4. Sia \mathcal{F} una famiglia di funzioni continue su $[a, b]$ a valori reali. Sono fatti equivalenti:

1. Ogni **successione** $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ contiene una **sottosuccessione** $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ che **converge uniformemente**.
2. La famiglia \mathcal{F} è **equicontinua** e **uniformemente limitata**.

999 Teorema di Lagrange

Definizione 1. Sia \mathcal{A} una \mathbb{R} -**algebra** di funzioni di dominio $K \subseteq \mathbb{R}^n$ a valori in \mathbb{R} .

Si dice che \mathcal{A} separa i punti se per ogni $x, y \in K$ esistono $f, g \in \mathcal{A}$ tali che

$$f(x) \neq f(y).$$

Esempio 2. Sia \mathcal{A} l'insieme dei polinomi definiti su $[a, b]$:

$$\mathcal{A} := \left\{ f|_{[a,b]} \mid f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k \mid c_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ovviamente \mathcal{A} è una \mathbb{R} -**algebra di funzioni**, e inoltre separa i punti, poiché $f(x) = \text{Id}_{[a,b]} \in \mathcal{A}$ ^[266].

Inoltre $1 \in \mathcal{A}$, e pertanto \mathcal{A} contiene tutte le funzioni costanti.

Teorema 3. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto, e sia $\mathcal{A} \subseteq C(K)$ ^[267] una \mathbb{R} -**algebra**. Se

1. \mathcal{A} separa i punti di K ;
2. \mathcal{A} contiene le funzioni costanti;

allora \mathcal{A} è un **sottoinsieme denso** di $C(K)$ munito della **topologia indotta dalla metrica**^[268]:

$$\forall f, g \in C(K) : d(f, g) := \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|.$$

1000 Corollari del teorema

Proposizione 1. Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, e si consideri $C([a, b])$ ⁵⁸⁹ munito della **topologia indotta dalla metrica**⁵⁸⁹:

$$\forall f, g \in C(K) : d(f, g) := \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Sia:

$$\mathcal{A} := \left\{ f|_{[a,b]} \mid f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k; a_k \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Allora \mathcal{A} è **denso** in $C([a, b])$, ovvero: per ogni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continua** e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in \mathcal{A}$ tale che

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione. \mathcal{A} è una **R-algebra** che **separa i punti** e contiene le funzioni costanti. ■

Proposizione 2. Sia $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \geq 1$ ed esistono, per ogni $i = 1, \dots, N$, delle $g_i \in C([a, b])^{589}$ e $h_i \in C([c, d])$ tali che

$$\max_{\substack{x \in [a, b] \\ y \in [c, d]}} \left| f(x, y) - \sum_{i=1}^N g_i(x) h_i(y) \right| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Si consideri

$$\mathcal{A} := \left\{ G(x, y) = \sum_{i=1}^N g_i(x) h_i(y) \mid g_i \in C([a, b]), h_i \in C([c, d]), N = 1, 2, \dots \right\}$$

Si osserva facilmente che \mathcal{A} è chiuso per somme, prodotti e prodotti per scalari, ovvero è una **R-algebra**. Inoltre contiene le funzioni costanti.

Se $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$:

- se $x_0 \neq x_1$ allora $G(x, y) = x \cdot 1 \in \mathcal{A}$ **separa i due punti**;
- se $(y_0 \neq y_1)$ allora $G(x, y) = 1 \cdot y \in \mathcal{A}$ **separa i due punti**.

Definizione 3. Sia \mathcal{F} un insieme di **funzioni** con lo stesso **dominio**, a **valori** in \mathbb{R} . \mathcal{F} si dice **un'algebra di funzioni reali** se, per ogni $f, g \in \mathcal{F}$ e $c \in \mathbb{R}$:

1. $f + g \in \mathcal{F}$;
2. $cf \in \mathcal{F}$;
3. $f g \in \mathcal{F}$.

Questa è la definizione di **R-algebra**, specializzata in questo ambito.

Esempio 4. Sia \mathcal{A} l'insieme di tutte le serie di Fourier finite su $[0, 2\pi]$:

$$\mathcal{A} := \left\{ f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \mid c_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ovviamente \mathcal{A} è chiuso per combinazioni lineari. Utilizzando il fatto che

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]$$

segue che \mathcal{A} è anche chiuso per prodotti. Pertanto è una **R-algebra**.

Definizione 5. Sia (\mathcal{S}, d) uno **spazio metrico** di **funzioni**. Una **rete neurale** è un **approssimatore universale** per \mathcal{S} se lo spazio \mathcal{U} delle funzioni output della r.n. è **denso** in \mathcal{S} .

Lo spazio \mathcal{U} si dice **spazio di approssimazione** dello **spazio target** \mathcal{S} .

1001 Universal Approximation Theorems (Machine Learning)

1001.1 Unidimensionali

- Applicazioni dei Teoremi Tauberiani di Wiener al Machine Learning.
- Rete Neurale che approssima funzioni continue periodiche
- Esistenza di una funzione continua approssimabile da una rete neurale
- One Hidden Layer Perceptron Network impara funzioni continue unidimensionali
- One Hidden Layer Sigmoidal Network impara funzioni continue unidimensionali
- Funzioni continue sono approssimate da funzioni lineari a tratti
- One Hidden Layer ReLU Network impara funzioni continue unidimensionali
- One Hidden Layer softplus Network impara funzioni continue unidimensionali

1001.2 Multidimensionali

1001.2.1 Funzioni continue

- One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni continue sul cubo
- One Hidden Layer SigmaPi-Network impara funzioni continue sui compatti

1001.2.2 Funzioni L1

- One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni L1 sul cubo

1001.2.3 Funzioni L2

- One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni L2 sul cubo

1001.2.4 Funzioni Misurabili

- One Hidden Layer Sigmoid Network impara funzioni misurabili sui compatti di \mathbb{R}^n

1001.2.5 Funzioni Lq

- Reti neurali che approssima funzioni q-integrabili

1002 Funzione periodica

Si consideri l'operatore funzionale

$$T_\theta : f(x) \mapsto f(x - \theta).$$

Teorema 1. Sia $f \in L^1(\mathbb{R})^{[269]}$. Lo span di $\{T_\theta f \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ è denso in $L^1(\mathbb{R})$ se e solo se la trasformata di Fourier:

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \quad \hat{f}(\xi) \neq 0$$

Teorema 2. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ ⁵⁸⁹. Lo **span** di $\{T_\theta f \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ è **denso** in $L^2(\mathbb{R})$ se e solo se gli zeri della **trasformata di Fourier**^[270]

$$\hat{f}(\xi) \neq 0 \text{ q.o. } \xi \in \mathbb{R}$$

ovvero per la **misura di Lebesgue** μ :

$$\mu\left(\{\xi \in \mathbb{R} \mid \hat{f}(\xi) = 0\}\right) = 0$$

1003 Applicazioni dei Teoremi Tauberiani di Wiener al Machine Learning

1. Sia $g \in L^1(\mathbb{R})$, e sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \quad \hat{f}(\xi) \neq 0$$

(ovvero f soddisfa le ipotesi del Teorema 269)

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per $j = 1, \dots, N$, degli $\alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ tali che

$$G(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j f(x + \theta_j)$$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x) - G(x)| dx < \varepsilon.$$

La funzione $G(x)$ è l'output di una **rete neurale** con un **layer nascosto** di N neuroni (e neurone di output lineare), dove i **neuroni** del layer nascosto hanno funzione di attivazione f .

2. Sia $g \in L^2(\mathbb{R})$, e sia $f \in L^2(\mathbb{R})$ tale che

$$\mu\left(\{\xi \in \mathbb{R} \mid f(\xi) = 0\}\right) = 0$$

(ovvero f soddisfa le ipotesi del Teorema 270)

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per $j = 1, \dots, N$, degli $\alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ tali che

$$G(x) := \sum_{j=1}^N \alpha_j f(x + \theta_j)$$

$$\int_{\mathbb{R}} (g(x) - G(x))^2 dx < \varepsilon.$$

La funzione $G(x)$ è l'output di una **rete neurale** con un **layer nascosto** di N neuroni (e neurone di output lineare), dove i **neuroni** del layer nascosto hanno funzione di attivazione f .

Si noti che le seguenti **funzioni di attivazione** soddisfano le ipotesi dei Teoremi 269 e 270.

Doppio esponenziale. Sia $f(x) = e^{-\lambda|x|}$, con $\lambda > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{2}{\lambda} [e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} = \frac{2}{\lambda} < \infty$$

e dunque $f \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda|x|} dx = \frac{1}{\lambda} < \infty$$

e pertanto $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si calcola la trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda|x|} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi i \xi x} e^{\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{2\pi i \xi x} e^{-\lambda x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-2\pi i \xi x} e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(2\pi i \xi + \lambda)x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-(2\pi i \xi + \lambda)x} dx \\ &= \frac{1}{-2\pi i \xi + \lambda} + \frac{1}{2\pi i \xi + \lambda} = \frac{(2\pi i \xi + \lambda) + (-2\pi i \xi + \lambda)}{(2\pi i \xi + \lambda) \cdot (-2\pi i \xi + \lambda)} = \frac{2\lambda}{4\pi^2 \xi^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

e quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha che $\hat{f}(\xi) \neq \emptyset$.

Dunque f soddisfa le condizioni dei Teoremi 269 e 270.

Potenziale di Laplace. Sia $f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$ con $a > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{1}{a^2 + x^2} \right| dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \left. \frac{\arctan(x/a)}{x} \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a} < \infty$$

e dunque $f \in L^1(\mathbb{R})$. Inoltre $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Si ha la seguente trasformata di Laplace:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-2\pi a |\xi|}$$

e quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha che $\hat{f}(\xi) \neq \emptyset$.

Dunque f soddisfa le condizioni dei Teoremi 269 e 270.

Gaussiana. Sia $f(x) = e^{-ax^2}$, con $a > 0$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |e^{-ax^2}| dx &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{a}x)^2} \sqrt{a} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} < \infty\end{aligned}$$

e pertanto $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $f \in L_2^{\mathbb{R}}$.

Si calcola la trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} e^{-ax^2} dx = \int_{\mathbb{R}} \exp(-(2\pi i \xi)x + -ax^2) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a} + \frac{\pi^2 \xi^2}{a} + -(2\pi i \xi)x + -ax^2\right) dx \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a} + 2\pi i \xi x + ax^2\right)\right] dx \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left[-\left(\frac{i\pi \xi}{\sqrt{a}} + x\sqrt{a}\right)^2\right] dx \\ &= \exp\left(-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

e quindi per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ si ha che $\hat{f}(\xi) \neq \emptyset$.

Dunque f soddisfa le condizioni dei Teoremi 269 e 270.

1004 Trasformata di Fourier

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$$

1005 Span

1006 Proprietà vera quasi ovunque

1007 Misura di Lebesgue

Teorema 1. Per ogni funzione $g \in C[0, 1]$ ^[271] e per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ ed esistono $c_i \in \mathbb{R}$ tali che, posta^[272]

$$c(x) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i H(x - x_i)$$

si ha che

$$\forall x \in [0, 1] : |g(x) - c(x)| < \varepsilon$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Siccome $[0, 1]$ è compatto, allora g è uniformemente continua. Sia $\delta > 0$ che soddisfi la condizione di uniforme continuità.

Sia $0 = x_0 < \dots < x_N = 1$ la equipartizione di $[0, 1]$ tale che $|x_{i+1} - x_i| < \delta$, e siano i c_0, \dots, c_{N-1} tali che

$$\begin{aligned} g(x_0) &= c_0 & c_0 &= g(x_0) \\ g(x_1) &= c_0 + c_1 & c_1 &= g(x_1) - g(x_0) \\ &\vdots & & \\ g(x_i) &= c_0 + c_1 + \dots + c_i & c_i &= g(x_i) - g(x_{i-1}) \\ &\vdots & & \\ g(x_{N-1}) &= c_0 + c_1 + \dots + c_{N-1} & c_{N-1} &= g(x_{N-1}) - g(x_{N-2}). \end{aligned}$$

Questo definisce la funzione $c(x)$.

Sia ora $u \in [0, 1]$. Allora esiste $k < N$ tale che $u \in [x_k, x_{k+1})$ e tale che $|u - x_k| < \delta$. Si osservi quindi che

$$H(u - x_j) = \begin{cases} 1 & j \leq k \\ 0 & j > k \end{cases}$$

e pertanto $c(u)$ vale:

$$c(u) = \sum_{i=0}^{N-1} c_i H(u - x_i) = \sum_{i=0}^k c_i = g(x_k).$$

È possibile ora calcolare la distanza da g :

$$\begin{aligned} |g(u) - c(u)| &= |g(u) - g(x_k) + g(x_k) - c(u)| \\ &\leq |g(u) - g(x_k)| + |g(x_k) - c(u)| = |g(u) - g(x_k)| < \varepsilon \end{aligned}$$

dove l'ultima condizione deriva dall'uniforme continuità di g . Per l'arbitrarietà di u questo dimostra la tesi. ■

Osservazione. La funzione $c(x)$ di cui sopra è la funzione output di una rete neurale con un layer nascosto:

- i pesi dall'input ai neuroni nascosti sono $w_i = 1$;
- ci sono N neuroni nascosti con funzione di attivazione $H(x)$ e bias $\theta_i = -x_i$;
- i pesi dai neuroni nascosti al neurone di output sono i c_i ;
- il neurone di output è lineare.

Proposizione 2. Sia $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$ una partizione di $[0, 1]$, e sia^[273]

$$c(x) = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}$$

Allora $c(x)$ può essere scritto come combinazione lineare di [Funzioni di Heaviside](#):

$$\begin{aligned} \chi_{[x_i, x_{i+1})} &= H(x - x_i) - H(x - x_{i+1}); \\ c(x) &= \sum_{i=0}^{N-1} (\alpha_i H(x - x_i) - \alpha_i H(x - x_{i+1})) \\ &= \sum_{i=0}^N c_i H(x - x_i). \end{aligned}$$

Proposizione 3. Se $c(x)$ è come sopra, segue che la [derivata distribuzionale](#) di c , $c'(x)$, è^[274]

$$c'(x) = \sum_{i=0}^N c_i H'(x - x_i) = \sum_{i=0}^N c_i \delta(x - x_i) = \sum_{i=0}^N c_i \delta_{x_i}(x)$$

Proposizione 4. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. φ sia [crescente](#);
2. $(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)) - (\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)) = 1$;
3. φ sia [derivabile](#), con $|\varphi'(x)|$ limitata.

Sia $\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(x/\varepsilon)$ e sia μ_ε la misura con densità φ'_ε :

$$d\mu_\varepsilon(x) = \varphi'_\varepsilon(x) dx.$$

Allora^[275] $\varphi_\varepsilon \rightarrow \delta$ in senso debole, per $\varepsilon \rightarrow 0$, ovvero, per ogni $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ ^[276] a [supporto compatto](#):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \delta(x) dx.$$

Dimostrazione. Sia $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ a supporto compatto.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi'_\varepsilon(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x) \varphi' \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{1}{\varepsilon} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon y) \varphi'(y) dy \quad \text{ponendo } y = \frac{x}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Dunque, passando al limite:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mu_\varepsilon(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} g(\varepsilon y) \varphi'(y) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} g(0) \varphi'(y) dy && \text{per Teorema di Convergenza Dominata} \\
 &= g(0) \int_{\mathbb{R}} \varphi'(y) dy = g(0) \cdot 1 && \text{per l'ipotesi 2.}
 \end{aligned}$$

Siccome $g(0) = \int_{\mathbb{R}} g(x) \delta(x) dx$, si ha la tesi.

È necessario ancora dimostrare che sia possibile applicare il teorema di convergenza dominata (questo si può fare solo perché g ha supporto compatto, e quindi l'integrale viene svolto su un dominio limitato):

$$|g(\varepsilon y) \varphi'(y)| \leq \|g\|_\infty |\varphi'(y)| < M \in \mathbb{R}$$

poiché g ha supporto compatto ed è C^∞ , mentre $|\varphi'(y)|$ è limitato per ipotesi. ■

Teorema 5. Siano $(M, d), (N, \partial)$ due spazi metrici, e sia $f : M \rightarrow N$ continua.

Se M è compatto allora f è uniformemente continua.

Corollario 6. In particolare, se $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora è uniformemente continua^[277].

1008 Funzione semplice

1009 Derivata (Distribuzioni)

1010 Supporto di una funzione a valori in \mathbb{R}

Teorema 1. Si consideri \mathbb{R}^n dotato della topologia euclidea.

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ ^[278] è compatto se e solo se K è chiuso e limitato.

1011 Insieme limitato

1012 Funzione lineare a tratti

1013 Funzione costante a tratti

1014 Punto Critico di una funzione reale

Definizione 1. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile, con A aperto. $c \in A$ si dice punto critico (o punto stazionario) di f se^[279]

$$\nabla f(x) = 0$$

1015 Funzione reale differenziabile

1016 Punto di sella

1017 Matrice definita positiva

1017.1 Matrice semidefinita positiva

1018 Matrice definita negativa

1018.1 Matrice semidefinita negativa

1019 Matrice indefinita

1020 Chain rule

1021 Derivata direzionale

1022 Prodotto di convoluzione

Definizione 1. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-integrabili. La convoluzione $f * g$ è

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

Proposizione 2. Siano f, g come sopra. Allora

1. $(f * g) = (g * f);$
2. $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$
4. per ogni $a \in \mathbb{R}$: $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$
5. $(f * g)' = (f') * g = f * (g').$

1023 Funzioni integrabili secondo Lebesgue

1024 Densità di probabilità

Sia \mathcal{M}^n lo spazio delle funzioni Borel-misurabili:

$$\mathcal{M}^n := \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Borel misurabile}\}.$$

Se $\mathbf{Bor}(\mathbb{R}^n)$ e $\mathbf{Bor}(\mathbb{R})$ denotano le algebre di Borel di \mathbb{R}^n e di \mathbb{R} , rispettivamente, allora

$$f \in \mathcal{M}^n \iff \forall A \in \mathbf{Bor}(\mathbb{R}) : f^{-1}(A) \in \mathbf{Bor}(\mathbb{R}^n).$$

Per definire una distanza d su \mathcal{M}^n si deve scegliere $\mu : \text{Bor}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, 1]$ misura di probabilità su $(\mathbb{R}^n, \text{Bor}(\mathbb{R}^n))$, con $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$.

Quindi (\mathcal{M}^n, d_μ) è uno spazio metrico, dove si è definita la distanza:

$$d_\mu(f, g) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 \mid \mu \left(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - g(x)| > \varepsilon\} \right) < \varepsilon \right\}.$$

Pertanto \mathcal{M}^n è dotato di una topologia indotta dalla metrica.

1025 Algebra di Borel

1026 Funzione misurabile

1027 Misura di probabilità

Teorema 1. Se $\varphi : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{[280]}$ è un funzionale continuo e limitato allora esiste un'unica misura con segno di Radon μ tale che, per ogni $f \in C[a, b]$:

$$\varphi(f) = \int_{[a, b]} f \, d\mu.$$

1028 Misura di Radon

1029 Funzione limitata

Teorema 1. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Corollario 2. Sia $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ uno spazio vettoriale normato, e sia $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{X}$ un sottospazio vettoriale non denso.

Allora esiste un funzionale lineare limitato

$$L : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

tale che $L \neq 0$ e la restrizione $L|_{\mathcal{U}} = 0$.

Lemma 3. Sia $g \in L^1(I_n)^{[281]}$. Se per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, detto $\mathcal{H}_{\mathbf{w}, \theta} := \{x \in I_n \mid \mathbf{w} \cdot x + \theta > 0\}$ il semispazio, si ha che

$$\int_{\mathcal{H}_{\mathbf{w}, \theta}} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0$$

allora $g = 0$ q.o.

1030 Misura

Teorema 1. Sia $N \geq 1$ un intero fissato, e si consideri una rete neurale con un layer nascosto tale che:

1. l'input della rete sia una variabile reale $x \in [a, b]$;
2. l'output della rete sia un neurone unidimensionale con funzione di attivazione lineare e zero bias;
3. ci sono N neuroni nel layer nascosto con una funzione di attivazione differenziabile tale che $|\sigma'| < \lambda < 1$;
4. i pesi soddisfano la condizione di regolarizzazione:

$$\sum_{j=1}^N (\alpha_j^2 + w_j^2) \leq 1$$

dove i w_j sono i pesi per l'input al layer nascosto, e gli a_j sono i pesi dal layer nascosto all'output.

Allora esiste una funzione continua $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che può essere approssimata dalla rete.

Dimostrazione. È sufficiente mostrare che la famiglia di funzioni output del sistema sia composta da funzioni continue, e che sia equicontinua e uniformemente limitata.

Con una banale applicazione del Teorema di Ascoli-Arzelà, si ottiene che ogni successione di funzioni output ammette una sottosuccessione convergente uniformemente ad una funzione continua; quest'ultima, data la uniforme convergenza, viene approssimata dalla rete con un grado di accuratezza arbitrario. ■

Proposizione 2. Anche per una rete neurale composta da un unico neurone, con output

$$f_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b)$$

dove σ è la funzione logistica, con pesi $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ e input $\mathbf{x} \in I_n := [0, 1]^n$, esiste una funzione continua $g : I^n \rightarrow \mathbb{R}$ che può essere approssimata. Si supponga che $\|\mathbf{w}\| \leq 1$.

Dimostrazione. Infatti, la famiglia di funzioni continue

$$\mathcal{F} := \{f_{\mathbf{w}, b} \mid \|\mathbf{w}\| \leq 1, b \in \mathbb{R}\}$$

è uniformemente limitata poiché $|f_{\mathbf{w}, b}| < 1$, ed inoltre è equicontinua, in quanto, per il Teorema di Lagrange

$$\begin{aligned} |f_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{x}) - f_{\mathbf{w}, b}(\mathbf{y})| &= |\sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b) - \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{y} + b)| \\ &\leq \max |\sigma'| |\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b - \mathbf{w} \cdot \mathbf{y} - b| \\ &= \frac{1}{4} |\mathbf{w} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})| \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{w}\| \cdot \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \\ &\leq \frac{1}{4} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|. \end{aligned}$$

Con una banale applicazione del [Teorema di Ascoli-Arzelà](#), si ottiene che ogni [successione](#) di funzioni output ammette una sottosuccessione [convergente uniformemente](#) ad una funzione continua; quest'ultima, data la uniforme convergenza, viene approssimata dalla rete con un grado di accuratezza arbitrario. ■

Teorema 3. Si consideri la [funzione di attivazione](#) $\text{ReLU}(x) = x H(x)$ ^[282]. Allora per ogni $g \in C[0, 1]$ ^[283] esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per $i = 0, \dots, N - 1$ degli $\alpha_i, \theta_i, \beta \in \mathbb{R}$ tali che, detta

$$G(x) := \beta + \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i \text{ReLU}(x + \theta_i)$$

si ha che

$$\forall x \in [0, 1] \quad |g(x) - G(x)| < \varepsilon.$$

Lemma 4. La [funzione di attivazione](#) [softplus](#) $\text{sp}(x)$ è data dalla [convoluzione](#):^[284]

$$\text{sp}(x) = (\text{ReLU} * K)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{ReLU}(\tau) K(x - \tau) d\tau$$

dove $K(x) = \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})} = \sigma'(x)$ ^[285].

Lemma 5. Sia $K(x) := \frac{1}{(1+e^x)(1+e^{-x})}$. Allora

1. $K(x)$ è una [densità di probabilità](#) simmetrica;
2. Sia $K_\alpha := \frac{1}{\alpha} K(x/\alpha)$ e si consideri la misura μ_α tale che

$$d\mu_\alpha := K_\alpha(x) dx.$$

Allora $\int_{-\infty}^{+\infty} K_\alpha(x) dx = 1$ e $\mu_\alpha \rightarrow \delta$ ^[286] in senso debole.

Lemma 6. Si definisca ora la [funzione softplus](#) scalata:

$$\varphi_\alpha(x) := \alpha \text{sp}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \alpha \ln(1 + e^{x/\alpha})$$

Si ha che

$$\varphi_\alpha''(x) = \frac{1}{\alpha} \text{sp}''(x/\alpha) = \frac{1}{\alpha} K(x/\alpha) = K_\alpha(x)$$

poiché $\text{sp}'(x) = \sigma(x)$ e $\sigma'(x) = K(x)$.

Lemma 7. Si consideri la [convoluzione](#) $G_\alpha := G * K_\alpha$, dove

$$G(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \alpha_j \text{ReLU}(x - x_j) + \beta$$

per qualche $N \in \mathbb{N}$, $\alpha_j, x_j, \beta \in \mathbb{R}$.

Allora esistono $c_j, w, \theta_j \in \mathbb{R}$, che dipendono dagli α_j, x_j tali che

$$G_\alpha(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j \text{sp}(wx - \theta_j) + \beta$$

Lemma 8. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\eta > 0$ tale per cui, se $\alpha < \eta$ allora

$$\forall x \in [0, 1] \quad |G(x) - G_\alpha(x)| < \varepsilon$$

ovvero G_α converge uniformemente a G su $[0, 1]$.

Dimostrazione. Banale applicazione del Teorema del Dini dopo aver notato che

$$\varphi_\alpha(x) \rightarrow \text{ReLU}(x).$$

puntualmente, e $\varphi_\alpha < \varphi_\beta$ se $\alpha > \beta$. ■

Teorema 9. Sia $g \in C[0, 1]$ ^[287]. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per ogni $i = 0, \dots, N-1$, degli $c_j, w, \theta_j, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [0, 1] \quad \left| g(x) - \sum_{j=0}^{N-1} c_j \text{sp}(wx - \theta_j) - \beta \right| < \varepsilon.$$

1031 Rete Neurale che approssima funzioni continue periodiche

Proposizione 1. Per ogni funzione periodica $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ esiste una rete neurale che la approssima.

Dimostrazione. Sia T il periodo di F , ovvero $T \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t + T) = F(t).$$

Si consideri

$$\mathcal{A} := \left\{ f|_{[0, T]} \mid f(x) = a_0 + \sum_{j=1}^n a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T} jx\right) + c_j \sin\left(\frac{2\pi}{T} jx\right); a_i, c_i \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots \right\}$$

Si noti che per ogni $f \in \mathcal{A}$

$$f(0) = f(T).$$

L'insieme $\mathcal{A} \subseteq C([0, T])$ ^[288], ed inoltre è una **R-algebra**^[289]. Contiene tutte le funzioni costanti (basta porre $a_j = c_j = 0$ per ogni $j > 0$), e separa i punti, in quanto

$$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{T} x\right) \in \mathcal{A}$$

è una biiezione tra $[0, T]$ e $[0, 1]$.

Dunque per il **Teorema di Stone-Weierstrass** \mathcal{A} è denso in $C([0, T])$ ed in particolare, siccome $F \in C([0, T])$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{aligned} G(x) &:= a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T} jx\right) + c_j \sin\left(\frac{2\pi}{T} jx\right) \in \mathcal{A} \\ \max_{x \in [0, T]} |G(x) - F(x)| &= \max_{x \in \mathbb{R}} |G(x) - F(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

Si consideri una rete neurale fatta come segue:

- input: $x \in \mathbb{R}$;
- un layer nascosto con N neuroni con funzione di attivazione cos, con peso dall'input w_j e bias b_j ;
- il neurone di output con funzione di attivazione lineare, bias a_0 e pesi dall'hidden layer α_j .

Questa rete è rappresentata in Fig. 27 e produce output

$$y = a_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \cos(w_j x + b_j).$$

Si dimostra che tale rete neurale è in grado di produrre come output $G(x)$, ovvero che, fissato un livello di precisione ε , esiste una rete neurale che produce come output una funzione periodica che approssima F con quel livello di precisione.

Infatti, ponendo

$$w_j := \frac{2\pi}{T}$$

e α_j, b_j tali che

$$\begin{cases} a_j = \alpha_j \cos b_j \\ c_j = -\alpha_j \sin b_j \end{cases}$$

si ottiene che, detto per semplicità di notazione $\nu := 2\pi/T$

$$\begin{aligned} y &= a_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \cos(w_j x + b_j) \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^N \alpha_j \cos(\nu j x) \cos b_j - \alpha_j \sin(\nu j x) \sin b_j \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \cos(\nu j x) + c_j \sin(\nu j x) \\ &= a_0 + \sum_{j=1}^N a_j \cos\left(\frac{2\pi}{T} j x\right) + c_j \sin\left(\frac{2\pi}{T} j x\right) = G(x). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Si ricorda che lo spazio delle funzioni misurabili \mathcal{M}^n è dotato di una distanza d_μ per ogni misura di probabilità μ su $\mathbb{R}^{n[290]}$.

Lemma 2. Per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $f_j \in \mathcal{M}^n$, e sia $g \in \mathcal{M}^n$. Sono fatti equivalenti:

1. $d_\mu(f_j, g) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$;

2. per ogni $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_j(x) - g(x)| > \varepsilon\}\right) \rightarrow 0 \quad j \rightarrow \infty;$$

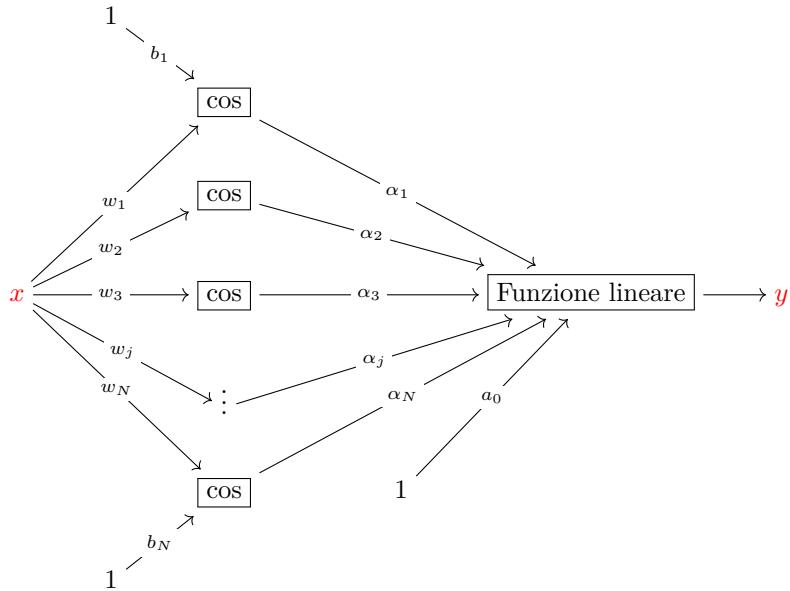


Figura 27: La rete neurale considerata

$$3. \int_{\mathbb{R}^n} \min(|f_j(x) - g(x)|, 1) dx \rightarrow 0 \text{ per } j \rightarrow \infty.$$

Si ricorda che lo spazio delle funzioni misurabili \mathcal{M}^n è dotato di una distanza d_μ per ogni misura μ su \mathbb{R}^n ^[291].

Proposizione 3. Sia $(f_j)_j \subseteq \mathcal{M}^n$ una successione di funzioni in \mathcal{M}^n che converge uniformemente sui compatti a f , ovvero tale che, per ogni $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto

$$\sup_{x \in K} |f_j(x) - f(x)| \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Allora $d_\mu(f_j, f) \rightarrow 0$ per $j \rightarrow \infty$.

Si consideri una rete neurale con un layer nascosto contenente N neuroni, che produce un output $G(x)$, che vuole approssimare f in uno spazio funzionale quale^[292]

$$C(I_n), \quad L_1(I_n), \quad L_2(I_n)$$

In che modo N influenza l'accuratezza dell'approssimazione?

Proposizione 4. Sia $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tale che, detta $\|\mathbf{w}\|_1 := |\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}|^{1/2}$ e detta $\hat{f}(\mathbf{w})$ la trasformata di Fourier di f , si abbia

$$C_f := \int_{\mathbb{R}^n} \|\mathbf{w}\|_1 \hat{f}(\mathbf{w}) d\mathbf{w} < \infty.$$

Allora esiste una combinazione lineare

$$G(\mathbf{x}) = b_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \sigma(\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{x} + \theta_k)$$

tale che, per ogni $r \in \mathbb{R}^{>0}$ e per ogni misura di probabilità μ_r sulla palla chiusa $B_r := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq r\}$:

$$\|G - f\|_{L^2(B_r, \mu_r)}^2 = \int_{B_r} |G(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})|^2 d\mu_r(\mathbf{x}) < \frac{(2r C_f)^2}{N}.$$

Proposizione 5. La famiglia delle [funzioni continue a supporto compatto](#)

$$\{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua a supporto compatto}\}$$

è [densa](#) in $L^q(\mathbb{R}^n)$ per ogni $q \in [1, +\infty)$ ^[293].

Proposizione 6. La famiglia delle funzioni continue e [lineari a tratti](#) $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è densa nella famiglia delle [funzioni continue a supporto compatto](#) con la [topologia indotta](#) dalla [distanza](#)

$$d(f, g) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|$$

1032 Convergenza uniforme sui compatti

Proposizione 1. Sia $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una partizione equidistante di $[a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$$

tale che la [funzione lineare a tratti](#) $g_\varepsilon : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ che passa per i punti $(x_i, g(x_i))$ per $i = 0, \dots, N$, soddisfa

$$\forall x \in [a, b] : |g(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Dimostrazione.

Parte 1. Sia $\varepsilon > 0$ fissato. [Siccome](#) $[a, b]$ è compatto, [allora](#) g è [uniformemente continua](#). Sia $\delta > 0$ che soddisfi la condizione di uniforme continuità per $\varepsilon' = \varepsilon/2$.

Sia N sufficientemente grande affinché $\frac{b-a}{N} < \delta$, e si definisca la partizione equidistante

$$x_j = a + \frac{b-a}{N} j$$

e la funzione lineare a tratti, per $i = 1, \dots$:

$$g_\varepsilon(x) = g(x_{i-1}) + \frac{g(x_i) - g(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} (x - x_{i-1}), \quad \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Parte 2. Sia $x \in [a, b]$ fissato. Allora $x \in [x_{k-1}, x_k]$ per qualche k .

$$\begin{aligned}
|g(x) - g_\varepsilon(x)| &\leq |g(x) - g(x_{k-1})| + |g(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |g(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x)| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + |g_\varepsilon(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + |g_\varepsilon(x_{k-1}) - g_\varepsilon(x_k)| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + |g(x_{k-1}) - g(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$
■

Una rete $\Sigma\Pi$ contiene sia neuroni Σ che neuroni Π .

Teorema 2. Sia $I_n := [0, 1]^n$, e si consideri $C(I_n)$ ^[294] dotato della topologia indotta dalla metrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in I_n} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in I_n} |f(x) - g(x)|.$$

Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una qualsiasi funzione continua non costante. Allora le funzioni nella forma

$$G(x) = \sum_{k=1}^M \beta_k \prod_{j=1}^{N_k} \varphi(\mathbf{w}_{jk} \cdot \mathbf{x} + \theta_{jk}), \quad G : I_n \rightarrow \mathbb{R}$$

con $\mathbf{w}_{jk} \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j, \theta_{jk} \in \mathbb{R}$, $M, N_k \in \mathbb{N}$, sono dense in $C(I_n)$

1033 One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni continue sul cubo

Lemma 1. Sia $I_n := [0, 1]^n$, e si consideri $C(I_n)$ ^[295] dotato della topologia indotta dalla metrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in I_n} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in I_n} |f(x) - g(x)|.$$

Sia \mathcal{M} la famiglia delle misure di Baire per \mathbb{R}^n sul cubo $I^n \mathbb{R}$, finite, con segno e regolari.

Sia $\mathcal{U} \subseteq C(I_n)$ un sottospazio vettoriale non denso. Allora esiste una misura $\mu \in \mathcal{M}$ tale che

$$\forall h \in \mathcal{U} : \quad \int_{I_n} h(x) d\mu = 0$$

Proposizione 2. Sia σ una funzione discriminatoria e continua. Allora l'insieme

$$\left\{ G(x) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sigma(\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{x} + \theta_i) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^n, \alpha_i, \theta_i \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $C(I_n)$ ⁵⁸⁹ dotato della topologia indotta dalla metrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in I_n} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in I_n} |f(x) - g(x)|.$$

Teorema 3. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funzione sigmoidale. Allora l'insieme

$$\left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $C(I_n)$ ⁵⁸⁹ dotato della topologia indotta dalla metrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in I_n} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in I_n} |f(x) - g(x)|.$$

Il teorema continua a valere anche in questa forma:

Teorema 4. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ una funzione sigmoidale. Allora l'insieme

$$\left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $C(K)$ dotato della topologia indotta dalla metrica

$$d(f, g) := \sup_{x \in K} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in K} |f(x) - g(x)|,$$

per ogni K compatto di \mathbb{R}^n .

Proposizione 5. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione discriminatoria in senso L^1 . Allora l'insieme

$$\left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $L^1(I_n)$ ^[296].

Siccome ogni funzione sigmoidale, misurabile e limitata è discriminatoria in senso L^1 , segue il corollario.

Corollario 6. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione sigmoidale, misurabile e limitata. Allora l'insieme

$$\left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $L^1(I_n)$ ⁵⁸⁹.

Proposizione 7. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione discriminatoria in senso L^2 . Allora l'insieme

$$\left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è denso in $L^2(I_n)$ ^[297].

Teorema 8. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sigmoidale. Allora l'insieme

$$\mathcal{G} = \left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è uniformemente denso sui compatti in $C(\mathbb{R}^n)$ ^[298], ovvero per ogni $f \in C(\mathbb{R}^n)$ esiste una successione di funzioni $(G_m)_m \subseteq \mathcal{G}$ tale che $G_m \rightarrow f$ uniformemente su ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^n$, per $m \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. 1. Si applica il Teorema di Cybenko, che vale per ogni K compatto di \mathbb{R}^n , costruendo per ogni $f \in C(K)$ una successione

$$G_j^{(K)} \rightarrow f \text{ uniformemente su } K$$

tale che $\sup_{x \in K} |G_j^{(K)}(x) - f(x)| < 1/j$.

2. Si costruisce una successione crescente di compatti $K_j \rightarrow \mathbb{R}^n$.
3. Per ogni $f \in C(\mathbb{R}^n) \subseteq C(K_i)$ si ottengono applicando 1. ω successioni $G_j^{(i)} \rightarrow f$ uniformemente per $j \rightarrow \infty$ su K_i .

La successione $G_m := G_m^{(m)}$ è quella cercata. ■

Teorema 9. Sia $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sigmoidale. Allora l'insieme

$$\mathcal{G} = \left\{ G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} + \theta_j) \mid N \in \mathbb{N}, \mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^n, \alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}$$

è, per ogni misura di probabilità μ su \mathbb{R}^n , denso nello spazio delle funzioni misurabili \mathcal{M}^n ^[299].

Questo segue banalmente dal fatto che $C(\mathbb{R}^n)$ sia denso in \mathcal{M}^n .

Teorema 10. Sia $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

1. φ sia crescente;
2. $(\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)) - (\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x)) = 1$;
3. φ sia derivabile, con $|\varphi'(x)|$ limitata.

Sia $g \in C[0, 1]$ ^[300]. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{N}$ ed esistono, per ogni $i = 0, \dots, N$ degli $c_i, \theta_i, w \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [0, 1] \quad \left| g(x) - \sum_{i=1}^N c_i \varphi(wx_i + \theta_i) \right| < \varepsilon$$

Osservazione. In particolare, tutte le funzioni di attivazione sigmoidali φ rispettano le ipotesi.

Dimostrazione. Si divide la dimostrazione in fasi:

1. Approssimazione di $g(x)$ con una funzione costante a tratti $c(x)$ (di coefficienti arbitrariamente piccoli);
2. Costruzione di una versione “smoother” $c_\alpha(x)$ di $c(x)$ tramite la convoluzione;
3. Approssimazione di $c(x)$ con $c_\alpha(x)$ (usando l’Approssimazione della misura di Dirac);
4. Approssimazione di $g(x)$ con $c_\alpha(x)$. (banale diseguaglianza triangolare)

Vedi Theorem 8.3.1 di [1] ■

Teorema 11. Ogni funzione in $L^q(\mathbb{R}^n)^{[301]}$ può essere approssimata arbitrariamente bene nella norma $\|\cdot\|_q$ da una rete neurale feedforward ReLU.

Proposizione 12. Sia $g : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi e sia $S = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^r$. Allora esiste

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j H(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} - \theta_i),$$

dove H è la funzione di Heaviside, $\alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^r$, tale che

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad G(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i).$$

Corollario 13. Dati $\{(x_i, y_i) \mid i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}$ esiste

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j H(\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{x} - \theta_i),$$

dove H è la funzione di Heaviside, $\alpha_j, \theta_j \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w}_j \in \mathbb{R}^r$, tale che

$$\forall i = 1, \dots, n : \quad G(\mathbf{x}_i) = y_i.$$

Proposizione 14. La funzione $\max\{x_1, x_2\}$ è rappresentata esattamente da una rete neurale con un layer nascosto con 4 neuroni ReLU, ovvero

$$\max\{x_1, x_2\} = \sum_{j=1}^4 \lambda_j \text{ReLU}(w_{1j}x_1 + w_{2j}x_2)$$

per qualche $\lambda_j, w_{ij} \in \mathbb{R}$.

Proposizione 15. La funzione $f(x_1, \dots, f_{x_n}) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ è rappresentata esattamente da una rete neurale ReLU-feedforward con

$$L = \begin{cases} 2k & \text{se } n = 2^k \\ 2(\lfloor \log_2 n \rfloor + 1) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

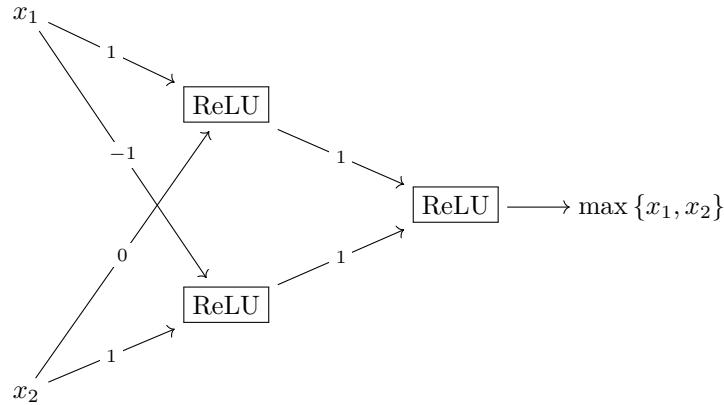


Figura 28: Rete Neurale che impara $\max \{x_1, x_2\}$.

Proposizione 16. Esiste una [rete neurale feedforward](#) con input di dimensione 2, un layer nascosto di larghezza 2, output di dimensione 1 con [funzione di attivazione ReLU](#) in ogni [neurone](#) che [rappresenta esattamente](#) la funzione

$$f(x_1, x_2) = \max \{x_1, x_2\} \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}^{\geq 0}.$$

come in Fig. 28.

In realtà, però, per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$$\max \{x_1, x_2\} = \text{ReLU}(x_1 - x_2) + x_2.$$

1034 Exact Learning (Machine Learning)

By exact learning we mean the expressibility of a [network](#) to reproduce exactly the desired target function, i.e. the output of the network is exactly the target function. For an exact learning the network weights do not need [tuning](#); their values can be found exactly. Si parla quindi di rappresentazione esatta, e non di apprendimento.

Alcuni casi in cui questo può succedere:

- [One Hidden Layer Perceptron Network](#) rappresenta esattamente funzioni a supporto finito
- [Rete Neurale ReLU-feedforward](#) rappresenta esattamente la funzione massimo tra N input

1034.1 Exact Learning non è sempre possibile

Si consideri a titolo esplicativo $C([0, 1])^{[302]}$, e si consideri una [rete neurale](#) con un [layer nascosto](#) con [funzione di attivazione logistica](#) σ . La [funzione di input-output](#) della rn è

$$G(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sigma(w_j x + \theta_j).$$

Siccome σ è analitica, allora $G(x)$ è analitica, mentre esistono funzioni continue ma non analitiche, come

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ x - \frac{1}{2} & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

1035 Archivio TikZ

1035.1 TikZ - Rete Neurale ReLU-feedforward

Rappresentazione di “Rete Neurale ReLU-feedforward”

```
\documentclass[tikz,border=10pt]{standalone}
\usepackage{amsmath}
\usepackage{tikz}
\usetikzlibrary{decorations.pathreplacing, positioning}

\begin{document}

% Define variables for x positions of hidden layers
\newcommand{\Lone}{1.5}
\newcommand{\Ltwo}{3.0}
\newcommand{\Lthree}{6.0}
\newcommand{\Lhidden}{4.5}
\newcommand{\outputorizzontale}{7.5}

\begin{tikzpicture}[x=2.5cm, y=1.2cm,
bullet/.style={circle, fill=black, inner sep=1.5pt},
neuron/.style={rectangle, draw, rounded corners, minimum width=1.2cm, minimum height=6mm, inner
affine/.style={->, thick},
brace/.style={decorate, decoration={brace, amplitude=6pt}, thick},
reverse brace/.style={decorate, decoration={brace, mirror, amplitude=6pt}, thick},
every label/.append style={font=\scriptsize}]

% Inputs (x1 to xn)
\node[bullet, label=left:$x_1$] (x1) at (0,1.2) {};
\node[bullet, label=left:$x_2$] (x2) at (0,0.6) {};
\node[bullet, label=left:$\vdots$] (xdots) at (0,0) {};
\node[bullet, label=left:$x_n$] (xn) at (0,-1.2) {};

% Brace grouping inputs
\draw[brace] ([xshift=4pt, yshift=3pt]x1.north west) -- ([xshift=4pt, yshift=-3pt]xn.south west);

% Hidden layer 1
\node at (\Lone,2.0) {$\dots$};


```

```

\node[neuron] (h11) at (\Lone,1.2) {ReLU};
\node at (\Lone,0.6) {$\vdots$};
\node[neuron] (h13) at (\Lone,0) {ReLU};
\node at (\Lone,-0.6) {$\vdots$};
\node[neuron] (h15) at (\Lone,-1.2) {ReLU};

\draw[brace] ([xshift=6pt,yshift=3pt]h11.north east) -- ([xshift=6pt,yshift=-3pt]h15.south east);
\draw[reverse brace] ([xshift=-6pt,yshift=3pt]h11.north west) -- ([xshift=-6pt,yshift=-3pt]h15.south west);

% A_1 arrow
\draw[affine] ([xshift=10pt]xdots.east) -- ([xshift=-15pt]h13.west) node[midway, above] {$A_1$};

% Hidden layer 2
\node at (\Ltwo,2.0) {$\ell_2$};
\node[neuron] (h21) at (\Ltwo,1.2) {ReLU};
\node at (\Ltwo,0.6) {$\vdots$};
\node[neuron] (h23) at (\Ltwo,0) {ReLU};
\node at (\Ltwo,-0.6) {$\vdots$};
\node[neuron] (h25) at (\Ltwo,-1.2) {ReLU};

\draw[brace] ([xshift=6pt,yshift=3pt]h21.north east) -- ([xshift=6pt,yshift=-3pt]h25.south east);
\draw[reverse brace] ([xshift=-6pt,yshift=3pt]h21.north west) -- ([xshift=-6pt,yshift=-3pt]h25.south west);

% A_2 arrow
\draw[affine] ([xshift=18pt]h13.east) -- ([xshift=-18pt]h23.west) node[midway, above] {$A_2$};

% Hidden layer L-1
\node at (\Lthree,2.0) {$\ell_{L-1}$};
\node[neuron] (hL1) at (\Lthree,1.2) {ReLU};
\node at (\Lthree,0.6) {$\vdots$};
\node[neuron] (hL3) at (\Lthree,0) {ReLU};
\node at (\Lthree,-0.6) {$\vdots$};
\node[neuron] (hL5) at (\Lthree,-1.2) {ReLU};

\draw[brace] ([xshift=6pt,yshift=3pt]hL1.north east) -- ([xshift=6pt,yshift=-3pt]hL5.south east);
\draw[reverse brace] ([xshift=-6pt,yshift=3pt]hL1.north west) -- ([xshift=-6pt,yshift=-3pt]hL5.south west);

% Other Hidden Layers
\node (Layerdots) at (\Lhidden,0) {$\dots$};

% A_{3} arrow
\draw[affine] ([xshift=20pt]h23.east) -- ([xshift=-3pt]Layerdots.west) node[midway, above] {$A_3$};

% A_{L-1} arrow
\draw[affine] ([xshift=3pt]Layerdots.east) -- ([xshift=-20pt]hL3.west) node[midway, above] {$A_{L-1}$};

```

```

% Final output layer
\node[bullet, label=right:$y_1$] (y1) at (\outputorizzontale,1.2) {};
\node[bullet, label=right:$\vdots$] (ydots) at (\outputorizzontale,0) {};
\node[bullet, label=right:$y_m$] (ym) at (\outputorizzontale,-1.2) {};

\draw[reverse brace] ([xshift=-4pt, yshift=3pt]y1.north east) -- ([xshift=-4pt, yshift=-3pt]ym.south west);

% Arrow to output
\draw[affine] ([xshift=20pt]hL3.east) -- ([xshift=-10pt]ydots.west) node[midway, above] {$A_L$};;

% Parentesi sotto
\draw[reverse brace, thin] ([xshift=-30pt]\Lone, -1.7) -- ([xshift=30pt]\Lthree, -1.7) node[midway, below] {$A_{L'}$};

\end{tikzpicture}
\end{document}

```

1036 Laurea Magistrale in Matematica [TOC]

- Istituzioni di Analisi
- Istituzioni di Geometria
- Istituzioni di Logica
- Topologia Algebrica
- Istituzioni di Fisica
- Geometria Superiore
- Metodi Matematici per il Machine Learning
- Teoria delle categorie
- Teoria descrittiva degli insiemi
- Istituzioni di Algebra
- Istituzioni di Fisica
- Teoria dei modelli

Proposizione 1. Sia \mathcal{N} una rete neurale ReLU-feedforward, con

- input d -dimensionale
- 1 layer nascosto di larghezza n
- output 1-dimensionale.

Allora esiste un'altra rete neurale ReLU-feedforward $\tilde{\mathcal{N}}$, con

- input d -dimensionale di input d
- profondità $n + 2$, dove ciascun layer nascosto ha larghezza $d + 2$ (quindi $n + 1$ layer nascosti),
- output 1-dimensionale,

tale che \mathcal{N} e $\tilde{\mathcal{N}}$ producono la stessa funzione per input in $[0, 1]^d$.

Lemma 2. La funzione input-output di una rete neurale ReLU-feedforward è una funzione continua e lineare a tratti.

Proposizione 3. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e lineare a tratti. Allora esiste una rete neurale feedforward, con neuroni ReLU e lineari, che rappresenta esattamente f . Inoltre ha L layers, con

$$L = \begin{cases} 2(k+1) & \text{se } n+1 = 2^k \\ 2(\lfloor \log_2(n+1) \rfloor + 2) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Teorema 4. Ogni funzione continua $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$, per $n \geq 2$, può essere scritta come

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \chi_j \left(\sum_{i=1}^n \psi_{ij}(x_i) \right)$$

dove χ_j e ψ_{ij} sono funzioni continue in una variabile, e ψ_{ij} sono funzioni monotone che non dipendono da f .

Teorema 5. Per ogni $n \geq 2$ esiste una funzione crescente $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\psi([0, 1]) = [0, 1]$, dipendente da n , con la seguente proprietà: per ogni $\delta > 0$ esiste $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, con $0 < \varepsilon < \delta$, tale che ogni $f : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ può essere scritta come

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} \chi \left(\sum_{i=1}^n \lambda^i \psi(x_i + \varepsilon(j-1)) + j - 1 \right)$$

dove $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e $\lambda \in \mathbb{R}$ è indipendente da f .

1037 Applicazione alle reti neurali

This result is important to the field of neural networks because it states that any continuous function on $[0, 1]^n$ can be represented exactly by a neural network with two hidden layers. The activation function for the first hidden layer is ψ and for the second hidden layer is χ .

1038 Funzione Analitica

1039 Concentrazione

1039.1 Metodi per concentrarsi (e mantenere la concentrazione) <2025-07-09 Mer>

- Le sessioni di concentrazione non dovrebbero essere troppo lunghe: concentrarsi per più di 90 minuti richiede un grande allenamento. Dividere tutte le sessioni di studio e concentrazione in slot orari da 60 minuti.
- Affinché si riesca a trovare la forza di volontà per concentrarsi, è necessario avere degli obiettivi:
 - quelli a lungo termine (come ad esempio passare un esame)
 - quelli a breve termine: suddividere il nostro obiettivo in tanti step intermedi aiuta a non essere sopraffatti dal carico di lavoro, e raggiungere un obiettivo ci garantisce della soddisfazione che riesce ad alimentare la nostra volontà di fare.
- Per aiutare la nostra mente a non vagare, tenere di fianco alla postazione di studio un quadernino, in cui svuotare la mente: ogni idea, cosa da fare, pensiero che rischia di distrarci, deve finire dentro al quadernino. In questo modo, non lasceremo vagare la nostra mente, e ci scaricheremo il carico mentale di tenere a mente “cose inutili”. Finita la sessione, potremo occuparci del nostro quaderno.

1040 Misura di Baire sul cubo nulla se nulla su tutti i semi-spazi

Proposizione 1. Sia μ una misura di Baire su I_n , con segno, finita e regolare.

Se per ogni $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$

$$\mu(\mathcal{H}_{\mathbf{w}, \theta}) = 0 = \mu(\mathcal{P}_{\mathbf{w}, \theta})$$

allora $\mu = 0$, dove

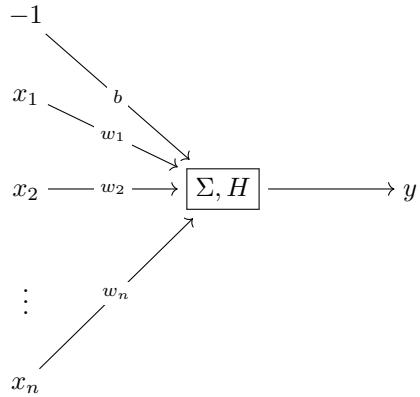
$$\mathcal{H}_{\mathbf{w}, \theta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \theta > 0\} \quad \mathcal{P}_{\mathbf{w}, \theta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + \theta = 0\}$$

1041 Percettrone

Il modello di neurone più semplice è quello che riceve degli input, li somma dopo averli moltiplicati per dei pesi, e:

- restituisce 0 se la somma così ottenuta non supera un threshold b ;
- restituisce 1 se la somma così ottenuta è maggiore o uguale a b .

Questo viene schematizzato in questo modo:



e l'output y è dato da^[303]

$$y = H \left(\sum_{i=0}^n x_i w_i \right)$$

dove per convenzione si è posto $w_0 = b$ e $x_0 = -1$.

La convenzione è per semplicità di notazione, infatti

$$H \left(\sum_{i=0}^n x_i w_i \right) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^n x_i w_i \geq b \\ 0 & \sum_{i=1}^n x_i w_i < b \end{cases}$$

Definizione 1. Il percettrone è il neurone con *funzione di attivazione* H .

1041.1 Interpretazione Geometrica

Consideriamo il neurone con dimensione di input 2, ovvero $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Al variare di w_1, w_2, b , l'output del neurone è quello mostrato in Figura 29

Inoltre:

- il percettrone sa implementare la funzione **AND**

x_1	x_2	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

con parametri $w_1 = w_2 = 1$ e $b = 1.5$, come in figura 30

- il percettrone sa implementare la funzione **OR**

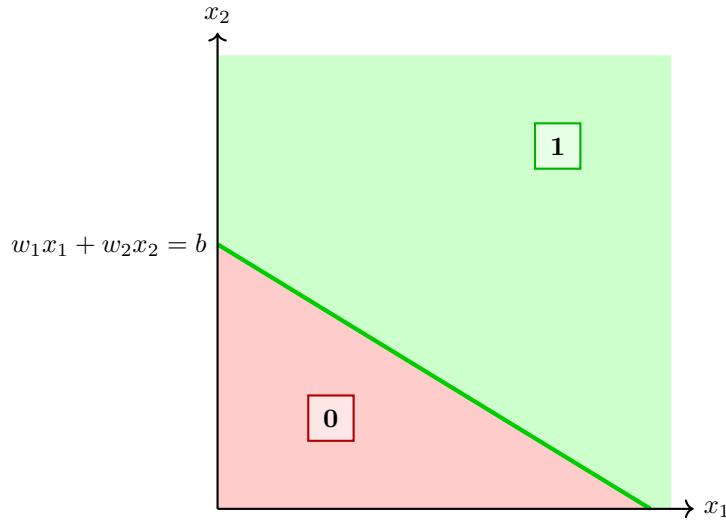


Figura 29: Output di un Percettrone

x_1	x_2	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

con parametri $w_1 = w_2 = 1$ e $b = 0.5$, come in figura 30

- il percettrone non sa implementare la funzione **XOR**, mostrata in figura 32

x_1	x_2	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Infatti, supponiamo che esistano $w_1, w_2, b \in \mathbb{R}$ tale che la retta $w_1x_1 + w_2x_2$ è

$$\begin{aligned} \{(0, 1), (1, 0)\} &\geq b \\ \{(0, 0), (1, 1)\} &< b \end{aligned}$$

allora $w_2 \geq b$ e $w_1 \geq b$ per la prima espressione, ma $w_1 < b$ per la seconda. Assurdo.

1041.2 Generalizzazione: classificazione binaria

Si consideri un percettrone con input bidimensionale, $n = 2$, e $x, y \in [0, 1]$.

Lo spazio dei possibili input è rappresentato da $[0, 1] \times [0, 1]$. Si supponga che sia diviso in due: $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2$, e che vi sia una funzione $z(x, y) \in \{0, 1\}$ che indica l'appartenenza ad uno dei due gruppi.

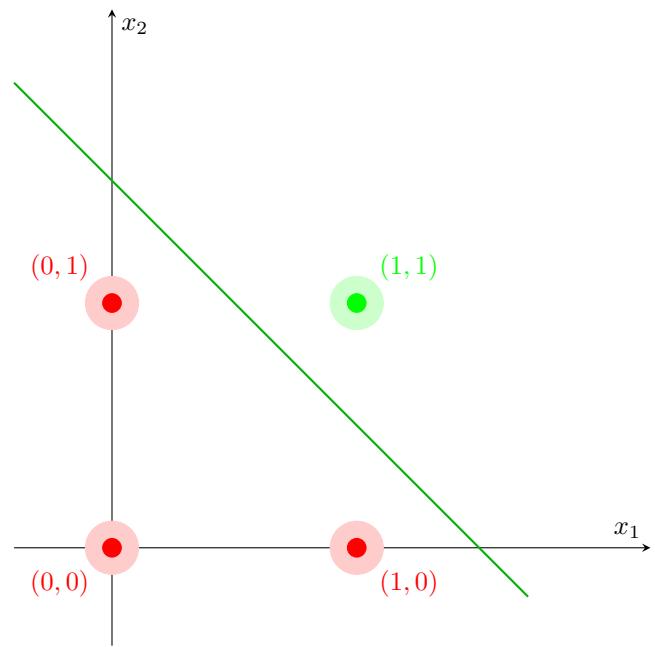


Figura 30: Funzione AND

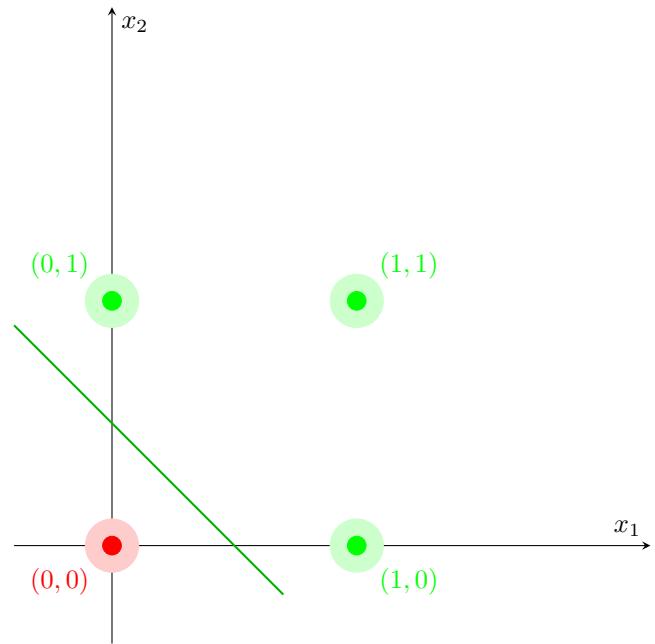


Figura 31: Funzione OR

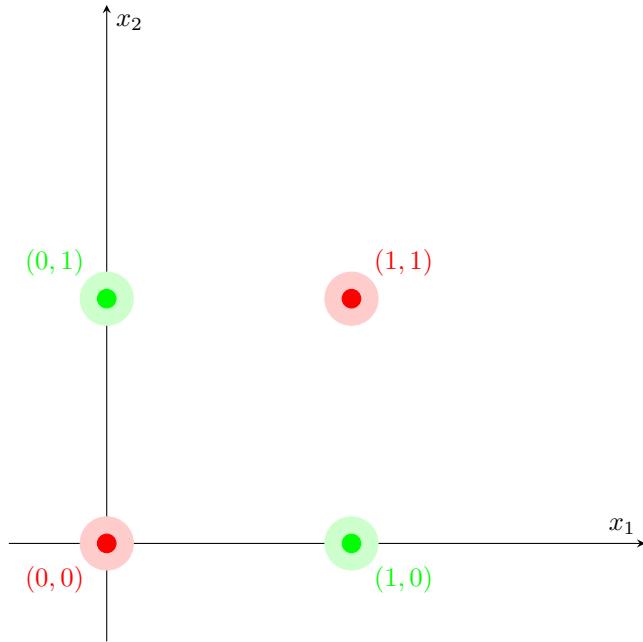


Figura 32: Funzione XOR

Si vuole studiare se il percepitrone è in grado di distinguere gli elementi del gruppo 1 da quelli del gruppo 2. Sia $f_{\mathbf{w}, b}(x, y)$ l'output del percepitrone.

Si conoscesse esattamente $z(x, y)$ sarebbe possibile calcolare i pesi $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$ e b minimizzando la norma L^2 .^[304]

$$C(\mathbf{w}, b) = \int_{[0,1]^2} (f_{\mathbf{w}, b}(x, y) - z(x, y))^2 dx dy = \mathbb{E} [(f_{\mathbf{w}, b}(x, y) - z(x, y))^2]$$

Questo è quindi il metodo del [Mean Square Error](#) (MSE)

Senza conoscere esattamente \mathcal{G}_1 e \mathcal{G}_2 , ma conoscendo soltanto la classificazione di un numero finito di punti

$$\left\{ \langle (x_i, y_i), z_i = z(x_i, y_i) \rangle \mid i = 1, \dots, N \right\}$$

è possibile soltanto calcolare la versione empirica $\tilde{C}(\mathbf{w}, b)$, utilizzando la [legge dei grandi numeri](#):

$$\tilde{C}(\mathbf{w}, b) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f_{\mathbf{w}, b}(x_i, y_i) - z_i)^2 \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} C(\mathbf{w}, b)$$

Questo è il metodo dell'[Empirical MSE](#).

1041.3 Perceptron Learning Algorithm

Sia $D = \{(x_i, y_i) \mid i = 1, \dots, N\}$, con $z_i \in \{0, 1\}$ l'insieme su cui si esegue l'allenamento, e sia $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$ la funzione di output di un neurone perceptron.

Si definiscono

$$\begin{aligned} P &:= \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x}, 1) \in D\} \\ N &:= \{\mathbf{x} \mid (\mathbf{x}, 0) \in D\} \end{aligned}$$

Si vuole trovare \mathbf{w}^* tale per cui

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x} \in P : \quad f_{\mathbf{w}^*}(\mathbf{x}) &= 1 \\ \forall \mathbf{x} \in N : \quad f_{\mathbf{w}^*}(\mathbf{x}) &= 0 \end{aligned}$$

L'[algoritmo di apprendimento](#) per questo task è il seguente: si scelga $\mathbf{w}^{(0)}$ casualmente. Il seguente ciclo iterativo si esegue finché non c'è convergenza: al passo $k + 1$, si scelga casualmente $\mathbf{x} \in P \cup N$;

- se $\mathbf{x} \in P$ e $\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{x} < 0$ allora si pone $\mathbf{w}^{(k+1)} := \mathbf{w}^{(k)} + \mathbf{x}$;
- se $\mathbf{x} \in N$ e $\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ allora si pone $\mathbf{w}^{(k+1)} := \mathbf{w}^{(k)} - \mathbf{x}$;
- altrimenti si pone $\mathbf{w}^{(k+1)} = \mathbf{w}^{(k)}$.

In sostanza l'algoritmo è riassumibile come segue: fissato $\mathbf{w}^{(0)}$ e una [successione](#) di punti $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq P \cup N$ catalogati da y_i ^[305], si ha che

$$\mathbf{w}^{(k+1)} := \mathbf{w}^{(k)} + (y_k - \varphi(\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{x}_k)) \cdot \mathbf{x}_k.$$

Osservazione. Quando tutti gli elementi di $P \cup N$ sono stati processati dall'algoritmo (e dunque si ricomincia a sceglierli), si dice che è passata un'epoca.

Teorema 2. Se il dataset è linearmente separabile allora il perceptron trova un iperpiano di separazione in un numero finito di passi, altrimenti cicla infinite volte.

Dimostrazione. Se il training set \mathcal{T} è separabile linearmente, allora esiste \mathbf{w}^* tale che

$$\forall (\mathbf{x}^i, y_i) \in \mathcal{T} : \quad y_i = \varphi(\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}^i).$$

Si noti che in \mathbf{w}^* è presente sempre il bias.

Si riscalala il tutto in maniera tale che

- $\|\mathbf{w}^*\| = 1$;
- $\forall (\mathbf{x}^i, y_i) \in \mathcal{T} : \|\mathbf{x}^i\| \leq 1$.

Sia quindi

$$\gamma := \min_{(\mathbf{x}, y) \in \mathcal{T}} |\mathbf{w}^* \cdot \mathbf{x}|.$$

Sia $\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{0}$, sia inoltre $(\mathbf{w}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ la successione di pesi costruita con l'algoritmo. Si supponga di aver eliminato tutti i termini uguali, tranne l'eventuale coda dettata dalla convergenza.

Allora valgono le seguenti disuguaglianze (dimostrate in fondo):

$$\text{se } \mathbf{w}^{(k+1)} \neq \mathbf{w}^{(k)}; \quad \mathbf{w}^{(k+1)} \cdot \mathbf{w}^* \geq \mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^* + \gamma; \quad (3)$$

$$\mathbf{w}^{(k+1)} \cdot \mathbf{w}^{(k+1)} \leq \mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^{(k)} + 1. \quad (4)$$

Applicando iterativamente (3), si ottiene che, se per ogni $i < k$ si ha $\mathbf{w}^{(i+1)} \neq \mathbf{w}^{(i)}$, allora

$$\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^* \geq \mathbf{w}^{(k-1)} \cdot \mathbf{w}^* + \gamma \geq (\mathbf{w}^{(k-2)} \cdot \mathbf{w}^* + \gamma) + \gamma \geq \dots \geq \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{w}^* + k\gamma = k\gamma. \quad (5)$$

mentre applicando iterativamente (4), si ottiene

$$\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^{(k)} \leq \mathbf{w}^{(k-1)} \cdot \mathbf{w}^{(k-1)} + 1 \leq \dots \leq \mathbf{w}^{(0)} \cdot \mathbf{w}^{(0)} + k = k$$

Quest'ultima diseguaglianza si utilizza per dimostrare:

$$\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^* = \left\| \mathbf{w}^{(k)} \right\| \cdot \underbrace{\left\| \mathbf{w}^* \right\|}_{=1} \cdot \cos \theta \leq \left\| \mathbf{w}^{(k)} \right\| = \sqrt{\mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^{(k)}} \leq \sqrt{k} \quad (6)$$

Combinando dunque (5) e (6) si ottiene che, se per ogni $i < k$ si ha $\mathbf{w}^{(i+1)} \neq \mathbf{w}^{(i)}$, allora

$$k\gamma \leq \mathbf{w}^{(k)} \cdot \mathbf{w}^* \leq \sqrt{k}.$$

Essendo tutte quantità positive, si ottiene $k^2\gamma^2 \leq k$, ovvero

$$k \leq \frac{1}{\gamma^2}.$$

Si è quindi dimostrato che se $k > 1/\gamma^2$ allora esiste $i < k$ tale che $w^{(i+1)} = w^{(i)}$. Per costruzione, quindi, l'algoritmo converge ad un certo valore \mathbf{w} , che per costruzione separa i punti. ■

1042 Regressione Lineare

1043 Neurone Sigmoidale

Il neurone sigmoidale è $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \sigma, y \rangle$ dove

- σ è una funzione di attivazione sigmoidale, o direttamente la sigmoide

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

- $y = \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b)$.

Il vantaggio dei neuroni sigmoidali rispetto al percettrone è la continuità di σ (infatti la Heaviside non è continua): a piccole variazioni di input e pesi corrispondono piccole variazioni dell'output;

nello specifico:

$$\begin{aligned}
dy &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial y}{\partial w_i} dw_i + \frac{\partial y}{\partial b} db \\
&= \sum_{i=1}^n \sigma'(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b) x_i dw_i + \sigma'(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b)(-1) db \\
&= \sigma'(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} - b) \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i dw_i - db \right)
\end{aligned}$$

Si noti inoltre che la derivata della sigmoide è maggiorata da 1.

1043.1 Regressione Logistica tramite neurone sigmoidale

Sia Z una variabile aleatoria, con immagine $Z \in \{-1, 1\}$, e sia X una variabile aleatoria discreta multidimensionale. Si vogliono approssimare le seguenti probabilità utilizzando un neurone sigmoidale:^[306]

$$\mathbb{P}(Z = 1 | X = \mathbf{x}), \quad \mathbb{P}(Z = -1 | X = \mathbf{x}).$$

Si noti che

$$\mathbb{P}(Z = 1 | X = \mathbf{x}) = 1 - \mathbb{P}(Z = -1 | X = \mathbf{x}).$$

Infatti, gli eventi $Z = 1$ e $Z = -1$ ricoprono lo spazio di probabilità, pertanto

$$(\{Z = 1\} \cap \{X = \mathbf{x}\}) \cup (\{Z = -1\} \cap \{X = \mathbf{x}\}) = \{X = \mathbf{x}\};$$

Essendo $Z = 1$ e $Z = -1$ due eventi disgiunti, per la σ -additività:

$$\mathbb{P}(Z = 1 \wedge X = \mathbf{x}) + \mathbb{P}(Z = -1 \wedge X = \mathbf{x}) = \mathbb{P}(X = \mathbf{x})$$

$$\frac{\mathbb{P}(Z = 1 \wedge X = \mathbf{x}) + \mathbb{P}(Z = -1 \wedge X = \mathbf{x})}{\mathbb{P}(X = \mathbf{x})} = 1$$

$$\frac{\mathbb{P}(Z = 1 \wedge X = \mathbf{x})}{\mathbb{P}(X = \mathbf{x})} + \frac{\mathbb{P}(Z = -1 \wedge X = \mathbf{x})}{\mathbb{P}(X = \mathbf{x})} = 1$$

Ricordando che l'attesa condizionata è, per $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A \wedge B) / \mathbb{P}(B)$, si ottiene

$$\mathbb{P}(Z = 1 | X = \mathbf{x}) + \mathbb{P}(Z = -1 | X = \mathbf{x}) = 1.$$

Si considera quindi $\mathbb{P}(Z = 1 | X = \mathbf{x})$ come una funzione di \mathbf{x} , $\mathbb{P}(Z = 1 | X = \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$. È proprio questa funzione che si vuole approssimare con il neurone sigmoidale.

Dunque, se

$$\sigma(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}}, \quad \sigma(t) = 1 - \sigma(-t)$$

si cercano \mathbf{w} tali che $\sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x})$. Infine, si noti che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z = 1 \mid X = \mathbf{x}) &= \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbb{P}(Z = -1 \mid X = \mathbf{x}) &= 1 - \mathbb{P}(Z = 1 \mid X = \mathbf{x}) \\ &= 1 - \sigma(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) = \sigma(-\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})\end{aligned}$$

e quindi si può scrivere $\mathbb{P}(Z = z \mid X = \mathbf{x}) \approx \sigma(z\mathbf{w} \cdot \mathbf{x})$.

Data la coppia di v.a. (X, Z) con legge $p_{X,Z}$, si sono costruite due v.a. differenti:

1. $\mathbb{P}(Z \mid X)$, di legge $p(\mathbf{x}, z)$: $p(X, Z)$;
2. la v.a. di legge $\sigma(z\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}) =: p_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, z)$: $p_{\mathbf{w}}(X, Z)$

Chiaramente si vuole approssimare la prima utilizzando la seconda, minimizzando la funzione costo data dalla [divergenza di Kullback-Leibler](#):

$$C(\mathbf{w}) := D_{KL}(p(X, Z) \parallel p_{\mathbf{w}}(X, Z)) = S(p(X, Z), p_{\mathbf{w}}(X, Z)) - H(p(X, Z)).$$

Si è scelto $D_{KL}(p(X, Z) \parallel p_{\mathbf{w}}(X, Z))$ invece di $D_{KL}(p_{\mathbf{w}}(X, Z) \parallel p(X, Z))$ poiché $H(p(X, Z))$ non dipende da \mathbf{w} , e pertanto si può ignorare nel processo di [minimizzazione](#) di $C(\mathbf{w})$:

$$C(\mathbf{w}) = S(p_{\mathbf{w}}(X, Z), p(X, Z)) = \mathbb{E}_{p(X, Z)}[-\ln p_{\mathbf{w}}(X, Z)] = \mathbb{E}_{p_{X,Z}}[-\ln p_{\mathbf{w}}(X, Z)].$$

Se quindi si conoscono N osservazioni di (X, Z) : $\{(\mathbf{x}_i, z_i) \mid i = 1, \dots, N\}$, si può calcolare la versione empirica di $C(\mathbf{w})$: $\tilde{C}(\mathbf{w})$:

$$\tilde{C}(\mathbf{w}) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (-\ln p_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}_i, z_i))$$

dove $1/N$ si è semplificato poiché valore fisso:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(\mathbf{w}) &= - \sum_{i=1}^N \ln \sigma(z_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^N \ln(1 + \exp(-z_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i)).\end{aligned}$$

È possibile quindi applicare l'algoritmo di [Gradient Descent](#) a $\tilde{C}(\mathbf{w})$ per ottenere i valori ottimali di \mathbf{w} .

Si noti inoltre che è consigliabile utilizzare questa funzione costo invece della solita [funzione costo](#) della [norma](#) L^2 , in quanto ha pendenza maggiore, e pertanto la convergenza del Gradient Descent è più veloce.

Nota: questo metodo è equivalente alla massimizzazione della log-verosimiglianza, supponendo che la v.a. $\mathbb{P}(Z \mid X)$ abbia distribuzione $p_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}, z)$, di parametri \mathbf{w} . Infatti, considerando delle osservazioni i.i.d. (\mathbf{x}_i, z_i) , la verosimiglianza è

$$\mathcal{L}(\mathbf{w}) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(Z = z_i \mid X = \mathbf{x}_i) = \prod_{i=1}^N \sigma(z_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i).$$

Siccome massimizzare la verosimiglianza è equivalente a massimizzare la log-verosimiglianza, si massimizza

$$\ell(\mathbf{w}) := \ln \left(\prod_{i=1}^N \mathbb{P}(Z = z_i \mid X = x_i) \right) = \sum_{i=1}^N \ln \sigma(z_i \mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_i) = -\widetilde{C}(\mathbf{w}).$$

1044 AND logico

1045 OR logico

1046 XOR logico

x_1	x_2	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

1047 Valore atteso

1048 Legge dei grandi numeri

1049 Mean Square Error

1049.1 Empirical MSE

1050 Bias-Variance tradeoff

1050.1 Bias-Variance tradeoff nel Machine Learning

Si consideri un dataset $D = \{(x_i, z_i) \mid i = 1, \dots, N\}$, si consideri una rete neurale con output $f_{\mathbf{w}, b}(t)$ dipendente dai parametri \mathbf{w}, b , e se ne consideri il processo di addestramento tramite minimizzazione della funzione costo^[307]

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (z_i - f_{\mathbf{w}, b}(x_i))^2.$$

Si divide quindi il dataset D negli insiemi di training \mathcal{T} e di test T. Ciascuna possibile scelta di \mathcal{T} produce, tramite minimizzazione, una funzione $f_{\mathcal{T}} := f_{\mathbf{w}^*, b^*}$.

Fissato dunque $(x_0, z_0) \in D$, si vuole calcolare in che modo varia l'errore commesso in quel punto in relazione alla scelta di \mathcal{T} :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{w}, b} \left[(z_0 - f_{\mathbf{w}, b}(x_0))^2 \right].$$

dove la media è calcolata al variare dei parametri \mathbf{w}, b (il variare dei parametri è equivalente al variare di \mathcal{T}).

Per semplicità si omettono le variabili e i parametri. Si noti che l'unica cosa che dipende dai parametri è $f_{\mathbf{w},b}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[(z_0 - f)^2] &= \mathbb{E}[(z_0 - \mathbb{E}[f] + \mathbb{E}[f] - f)^2] \\
 &= \mathbb{E}[(z_0 - \mathbb{E}[f])^2 + (f - \mathbb{E}[f])^2 + 2(z_0 - \mathbb{E}[f])(\mathbb{E}[f] - f)] \\
 &= \mathbb{E}[(z_0 - \mathbb{E}[f])^2] + \underbrace{\mathbb{E}[(f - \mathbb{E}[f])^2]}_{\text{Var}(f)} + \mathbb{E}[2(z_0 - \mathbb{E}[f])(\mathbb{E}[f] - f)] \\
 &= (z_0 - \mathbb{E}[f])^2 + \text{Var}(f) + 2(z_0 - \mathbb{E}[f])\mathbb{E}[\mathbb{E}[f] - f] \\
 &= (z_0 - \mathbb{E}[f])^2 + \text{Var}(f) + 2(z_0 - \mathbb{E}[f])(\mathbb{E}[f] - \mathbb{E}[f]) \\
 &= (z_0 - \mathbb{E}[f])^2 + \text{Var}(f) \\
 &= \text{Var}(f_{\mathbf{w},b}) + (z_0 - \mathbb{E}[f_{\mathbf{w},b}])^2
 \end{aligned}$$

dove $(z_0 - \mathbb{E}[f_{\mathbf{w},b}])$ è il bias.

Se il modello è molto flessibile (ovvero si può adattare molto bene ai dati), allora

$$z_0 \approx \mathbb{E}[f_{\mathbf{w},b}].$$

Allo stesso tempo la varianza è molto alta, in quanto basta modificare di poco il training set affinché la funzione di output (adattandosi molto ai dati) cambi tanto.

Viceversa, se il modello è poco flessibile, allora difficilmente $(z_0 - \mathbb{E}[f_{\mathbf{w},b}])$ è piccolo; allo stesso tempo, cambiando di poco il training set, la funzione di output non cambia molto, e dunque la varianza è bassa.

Pertanto le due parti si comportano come mostrato in figura 33

1051 Bias

1052 Varianza

1053 Subderivata

Definizione 1. Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I convesso. Per ogni $x_0 \in I$ si definisce subderivata di f in x_0 un numero reale $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in I \quad f(x) - f(x_0) \geq c(x - x_0).$$

1054 Subdifferenziale

Definizione 1. Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I convesso. Il subdifferenziale di f in x_0 è l'insieme delle subderivate di f in x_0 .

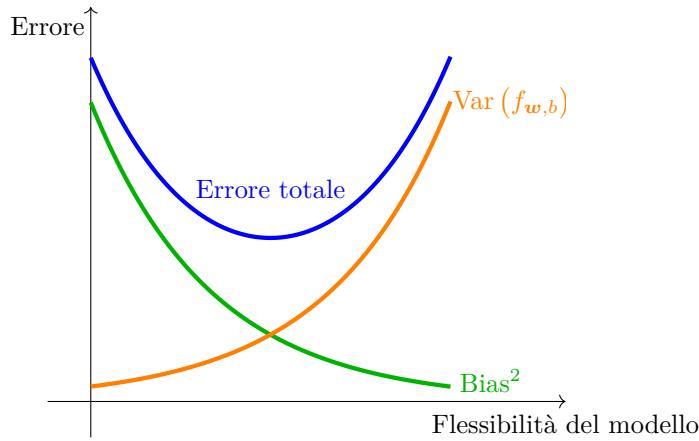


Figura 33: Errore nell'approssimazione di un dataset

Alcune proprietà.

- Se è non vuoto, il subdifferenziale di f in x_0 è un intervallo chiuso $[a, b]$, con

$$a := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$b := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Se f è convessa, allora il subdifferenziale di f in x_0 è non vuoto.
- f è differenziabile in x_0 se e solo se il subdifferenziale di f in x_0 contiene un solo punto.

1055 Subgradiente

Definizione 1. Sia $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, U convesso. Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si dice subgradiente di f in $x_0 \in U$ se

$$\forall \mathbf{x} \in U : \quad f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

1056 Algoritmo di Gradient Descent

L'algoritmo di Gradient Descent è un algoritmo per trovare iterativamente il minimo x^* di una funzione reale $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Per il teorema^[308], per ogni punto di partenza $x^{(0)}$ sufficientemente vicino ad x^* esiste una curva γ che collega $x^{(0)}$ a x^* , perpendicolare in ogni punto alle curve di livello (ovvero parallela al gradiente della funzione).

Si vuole approssimare γ con una poligonale $[x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(m)}]$ tale che:

1. detti $c_k := f(x^{(k)})$, si ha che $c_{k+1} < c_k$
2. il segmento $[x^{(j)}, x^{(j+1)}]$ sia perpendicolare a \mathcal{S}_{c_j} ^[309].

1056.1 Gradient Descent con passo fissato

Il primo metodo per farlo è utilizzando il metodo della discesa più ripida. Partendo da $x^{(0)}$, si cerca il minimo della funzione muovendosi di un passo η nella direzione v in cui la funzione decresce più rapidamente.

Dunque, fissato η , si cerca $v \in \mathbb{R}^n$ tale che $\|v\| = 1$ e tale per cui

$$f(x^{(i)} + \eta v) - f(x^{(i)})$$

ha il valore negativo più grande.

Utilizzando le [approssimazioni di Taylor](#), ipotizzando che i termini quadrati siano trascurabili (stiamo effettivamente ignorando la curvatura della superficie, data dall'hessiana), si ottiene che

$$f(x^{(i)} + \eta v) - f(x^{(i)}) \approx \eta \langle \nabla f(x^{(i)}), v \rangle$$

Per la [diseguaglianza di Cauchy-Schwartz](#) si ottiene che

$$|\langle \nabla f(x^{(i)}), v \rangle|^2 \leq \|\nabla f(x^{(i)})\| \|v\| = \|\nabla f(x^{(i)})\|$$

ovvero

$$-\|\nabla f(x^{(i)})\| \leq \langle \nabla f(x^{(i)}), v \rangle \leq \|\nabla f(x^{(i)})\|.$$

Inoltre per $v = -\frac{\nabla f(x^{(i)})}{\|\nabla f(x^{(i)})\|}$ si ottiene

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x^{(i)}), v \rangle &= -\frac{1}{\|\nabla f(x^{(i)})\|} \langle \nabla f(x^{(i)}), \nabla f(x^{(i)}) \rangle = \\ &= -\frac{1}{\|\nabla f(x^{(i)})\|} \|\nabla f(x^{(i)})\|^2 = \\ &= -\|\nabla f(x^{(i)})\| \end{aligned}$$

e pertanto $-\frac{\nabla f(x^{(i)})}{\|\nabla f(x^{(i)})\|}$ è la direzione di massima decrescita, e la sopracitata decrescita è

$$f(x^{(i)} + \eta v) - f(x^{(i)}) \approx \eta \langle \nabla f(x^{(i)}), v \rangle = -\eta \|\nabla f(x^{(i)})\|$$

Questo dà luogo ad una [successione](#) $\langle x^{(n)} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$:

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} - \eta \frac{\nabla f(x^{(n)})}{\|\nabla f(x^{(n)})\|}. \quad (7)$$

Si noti che:

1. $f(x^{(n+1)}) - f(x^{(n)}) = -\eta \|\nabla f(x^{(n)})\| < 0$ e quindi $f(x^{(n+1)}) < f(x^{(n)})$
2. $[x^{(n)}, x^{(n+1)}]$ è parallelo a $\nabla f(x^{(n)})$, e pertanto perpendicolare alla curva di livello di f passante per $x^{(n)}$

e dunque la successione così costruita dà luogo ad una approssimazione di γ con una poligonale, come richiesto all'inizio.

Al passo m -esimo:

$$\|x^* - x^{(0)}\| - m\eta \leq \|x^* - x^{(m)}\| \leq \text{diam}(\mathcal{S}_{f(x^m)})$$

dove diam è il **diametro** dell'insieme.

Questo metodo ha un problema: siccome $\|x^{(n+1)} - x^{(n)}\| = \eta$ fissato, la successione $\langle x^{(n)} \rangle$ non è di **Cauchy**, e dunque non converge.

1056.2 Gradient Descent a passo variabile

Per ovviare al problema di cui sopra, si sostituisce la (7) con

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} - \eta \nabla f(x^{(n)}). \quad (8)$$

Questo algoritmo è quello che si intende comunemente con gradient descent method.

Proposizione 1. La successione $\langle x^{(n)} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ definita in (8) converge se e solo se $\nabla f(x^{(n)}) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

1056.3 Line Search Method

Una variante del metodo di cui sopra è dato dallo scegliere una successione $\langle x^{(n)} \rangle_{n \in \mathbb{N}}$:

$$x^{(n+1)} := x^{(n)} - \eta_n \nabla f(x^{(n)}) \quad (9)$$

dove η_n è scelto come

$$\eta_n = \arg \min_{\eta \in \mathbb{R}} f\left(x^{(n)} - \eta \nabla f(x^{(n)})\right).$$

L'idea è la seguente: partendo dal punto $x^{(n)}$, si procede lungo la linea retta con direzione e verso $-\nabla f(x^{(n)})$, e si sceglie il punto $x^{(n+1)}$ lungo questa retta che rende minima la quantità $f(x^{(n+1)})$. Geometricamente, questo significa scegliere il punto in cui la retta $x^{(n)} - t \nabla f(x^{(n)})$ interseca tangenzialmente una curva di livello.

Questo algoritmo converge molto più velocemente del gradient descent, e la poligonale $[x^{(0)}, x^{(1)}, \dots]$ contiene solamente angoli retti.

1056.4 Algoritmo di Stochastic Gradient Descent

Una generalizzazione del GD applicato a **funzioni costo** è l'algoritmo di Stochastic Gradient Descent. Questo prevede di suddividere il **training set** \mathcal{T} in k parti disgiunte:

$$\text{Tr}_1, \dots, \text{Tr}_k$$

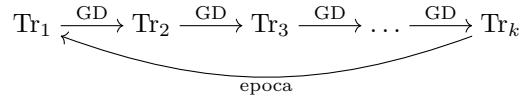


Figura 34: L'algoritmo di Stochastic Gradient Descent

e di eseguire sulla funzione costo per i punti di Tr_i l'algoritmo di GD. I parametri ottenuti saranno i parametri iniziali per svolgere il GR sulla funzione costo per i punti di Tr_{i+1} , con la convenzione che $\text{Tr}_{k+1} := \text{Tr}_1$. L'algoritmo è illustrato in figura 34

Ogni ciclo di GD su tutti i k training set è detto un'epocha di apprendimento.

1057 Metodo del subgradiente

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione **convessa**, con **minimo globale** in \boldsymbol{x}^* , con valore di minimo $f^* := f(\boldsymbol{x}^*)$

Questo algoritmo serve per trovare il minimo di f .

- Sia $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di **iperparametri**;
- Sia $\boldsymbol{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$; si definisce iterativamente una **successione** $(\boldsymbol{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ come segue:

$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = \boldsymbol{x}^{(k)} - \alpha_k \boldsymbol{g}^{(k)}$$

dove $\boldsymbol{g}^{(k)}$ è un **subgradiente** qualsiasi di f in $\boldsymbol{x}^{(k)}$.

- Si tiene traccia dei valori minimi trovati nelle prime k iterazioni:

$$f_{\text{best}}^{(k)} := \min \left\{ f(\boldsymbol{x}^{(0)}), f(\boldsymbol{x}^{(1)}), \dots, f(\boldsymbol{x}^{(k)}) \right\} = \min \left\{ f_{\text{best}}^{(k-1)}, f(\boldsymbol{x}^{(k)}) \right\}$$

Teorema 1. Si ponga per ogni $k \in \mathbb{N}$ $\alpha_k := \alpha$.

Se esiste $G \in \mathbb{R}$ tale per cui

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad \|\boldsymbol{g}^{(k)}\| \leq G$$

allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\text{best}}^{(k)} - f^* \leq \frac{\alpha G^2}{2}.$$

Dimostrazione. Si consideri la seguente catena di disuguaglianze.

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\|^2 = \|\mathbf{x}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{g}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^2 \\
&= \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \alpha_k^2 \|\mathbf{g}^{(k)}\|^2 - 2\alpha_k \mathbf{g}^{(k)} \cdot (\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*) \\
&= \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \alpha_k^2 \|\mathbf{g}^{(k)}\|^2 + 2\alpha_k \mathbf{g}^{(k)} \cdot (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}) \\
&\leq \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \alpha_k^2 \|\mathbf{g}^{(k)}\|^2 + 2\alpha_k [f(\mathbf{x}^*) - f(\mathbf{x}^{(k)})] \\
&= \|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \alpha_k^2 \|\mathbf{g}^{(k)}\|^2 - 2\alpha_k [f(\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^*)] \\
&\leq \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{j=1}^k [\alpha_j^2 \|\mathbf{g}^{(j)}\|^2 - 2\alpha_j [f(\mathbf{x}^{(j)}) - f(\mathbf{x}^*)]] \\
&= \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \|\mathbf{g}^{(j)}\|^2 - 2 \sum_{j=1}^k \alpha_j [f(\mathbf{x}^{(j)}) - f(\mathbf{x}^*)]
\end{aligned}$$

Si ottiene quindi

$$2 \sum_{j=1}^k \alpha_j [f(\mathbf{x}^{(j)}) - f(\mathbf{x}^*)] \leq \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \|\mathbf{g}^{(j)}\|^2 \quad (10)$$

Si osservi inoltre che per ogni $j \leq k$,

$$f(\mathbf{x}^{(j)}) \geq \min \{f(\mathbf{x}^{(0)}), \dots, f(\mathbf{x}^{(k)})\} = f_{\text{best}}^{(k)}$$

e pertanto

$$\sum_{j=1}^k \alpha_j [f(\mathbf{x}^{(j)}) - f(\mathbf{x}^*)] \geq (f_{\text{best}}^{(k)} - f(\mathbf{x}^*)) \cdot \sum_{j=1}^k \alpha_j$$

e dunque, applicandolo a (10) si ottiene

$$(f_{\text{best}}^{(k)} - f^*) \cdot 2 \sum_{j=1}^k \alpha_j \leq \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \|\mathbf{g}^{(j)}\|^2.$$

Posto quindi $R := \|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^*\|$, ricordando che $\|\mathbf{g}^{(j)}\| \leq G$ e che $\alpha_j = \alpha$, si ottiene

$$f_{\text{best}}^{(k)} - f^* \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{j=1}^k \alpha_j^2}{2 \sum_{j=1}^k \alpha_j} = \frac{R^2 + G^2 k \alpha^2}{2 k \alpha}.$$

Prendendone il limite, si ottiene proprio

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{\text{best}}^{(k)} - f^* \leq \frac{G^2 \alpha}{2}$$

■

Osservazione. Se f è Lipschitziana i **subgradienti** sono limitati, e pertanto è possibile approssimare ad una precisione arbitraria f^* .

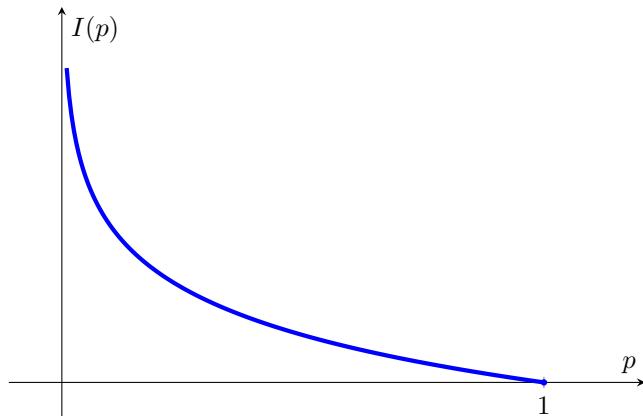


Figura 35: Quantità di informazione secondo Shannon

1058 Teoria dell'informazione (Shannon)

Idea: la quantità di informazione contenuta in un messaggio è legata a quanto il messaggio sia imprevedibile.

Esempio 1. Si considerino i seguenti messaggi:

(M1) “Marco ha vinto alla lotteria.”

(M2) “Marco non ha vinto alla lotteria.”

Il primo, chiaramente, porta molta più informazione, poiché asserisce ad un avvenimento estremamente improbabile.

Dunque, se il messaggio porta la notizia di un avvenimento A , che avviene con probabilità $\mathbb{P}(A) = p_A$, indicata con $I(A) = I(p_A)$ la quantità di informazione di E , si richiede che:

1. $I(p)$ sia **monotona decrescente** in p ;
2. $I(1) = 0$;
3. se A e B sono **indipendenti** allora $p_{A \wedge B} = p_A p_B$, e dunque

$$I(A \wedge B) = I(p_A p_B) = I(p_A) + I(p_B)$$

Definizione 2. Si definisce la quantità di informazione di un evento con probabilità p :

$$I(p) := -\ln(p).$$

La funzione $I(p)$ è mostrata in Figura 35.

1058.1 Entropia (Teoria dell'informazione)

Definizione 3. Sia X una variabile aleatoria con legge p . Si definisce entropia di X la quantità^[310]

$$H(X) := \mathbb{E}[-\ln p(x)] = \int -\ln p(x) \cdot p(x) dx.$$

Definizione 4. Siano X, Y due variabili aleatorie con legge p_X, p_Y . La cross-entropy di X e Y è

$$S(X, Y) = \mathbb{E}_{p_X}[-\ln p_Y] = \int -\ln p_Y(x) \cdot p_X(x) dx.$$

Proposizione 5. Per ogni v.a. X, Y

$$S(X, Y) \geq H(X).$$

1058.2 Divergenza di Kullback-Leibler

Definizione 6. Siano X, Y due variabili aleatorie. La divergenza di Kullback-Leibler di X da Y è

$$D_{KL}(X \parallel Y) = S(X, Y) - H(X) \geq 0$$

1059 Insieme convesso

1060 Funzione convessa

1061 Attesa condizionata

Definizione 1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità, e sia $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ^[311]. Sia $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una sotto- σ -algebra.

Si definisce l'attesa condizionata di X dato \mathcal{G}

$$Z = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$$

1. Z è \mathcal{G} -misurabile;

2. per ogni $\Lambda \in \mathcal{G}$

$$\int_{\Lambda} Z d\mathbb{P} = \int_{\Lambda} X d\mathbb{P}$$

o, equivalentemente, detta $\mathbb{1}_{\Lambda}$ la funzione caratteristica di Λ

$$\int \mathbb{1}_{\Lambda} Z d\mathbb{P} = \int \mathbb{1}_{\Lambda} X d\mathbb{P}.$$

Se Y è una variabile aleatoria, detta $\sigma(Y) := \{Y^{-1}(B) \mid B \in \text{Bor}(\mathbb{R})\}$ ^[312], si denota con

$$\mathbb{E}[X \mid Y] := \mathbb{E}[X \mid \sigma(Y)].$$

1062 Probabilità condizionata

Se $A, B \in \mathcal{F}$, con $\mathbb{P}(B) \neq \emptyset$, la probabilità condizionata è

$$\mathbb{P}(A | B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Si generalizza questo concetto, e si definisce la probabilità condizionata, per $A \in \mathcal{F}$ e Y **variabile aleatoria**

$$\mathbb{P}(A | Y) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_A | Y].$$

Proposizione 1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno **spazio di probabilità**. Se X è una **variabile aleatoria discreta** e $A \in \mathcal{F}$ allora

$$\mathbb{P}(A | X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A | X = x_n) \cdot \mathbf{1}_{(X=x_n)}.$$

Osservazione. Si noti quindi che $\mathbb{P}(A | X) = f(X)$, poiché

$$\mathbb{P}(A | X) = \begin{cases} \mathbb{P}(A | X = x_1) & \text{se } X = x_1 \\ \mathbb{P}(A | X = x_2) & \text{se } X = x_2 \\ \mathbb{P}(A | X = x_3) & \text{se } X = x_3 \\ \vdots \end{cases}$$

ed inoltre $\mathbb{P}(A | X = x) = f(x)$.

1063 Spazio di Probabilità

1064 Variabile aleatoria

1065 Eventi indipendenti

1066 Distribuzione di una variabile aleatoria

1067 Neurone ad input continuo

Si consideri X una v.a. a valori in $[0, 1]$, e sia w una misura su $[0, 1]$.

Definizione 1. Un neurone ad input continuo con **funzione di attivazione** σ restituisce

$$\sigma \left(\int_0^1 x w(dx) \right) = \sigma(\mathbb{E}[X]).$$

Quindi i “pesi” w rappresentano la **densità** della v.a. X di input.

1067.1 Variabile aleatoria assolutamente continua

Si supponga quindi che X sia una v.a. assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Allora

$$\int_0^1 x w(dx) = \int_0^1 x \cdot p(x) dx$$

per qualche $p(x)$ non negativa e misurabile.

Si vuole approssimare con questo neurone una v.a. Z , minimizzando la cost function:

$$\begin{aligned} C(p) &= \mathbb{E} \left[\left(\sigma \left(\int_0^1 x p(x) dx \right) - Z \right)^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[(\underbrace{\sigma(\mathbb{E}[X])}_{c:=} - Z)^2 \right] \\ &= \int_{\Omega} (c - Z)^2 d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Z] + c - Z)^2 d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} ((\mathbb{E}[Z] - Z)^2 + (c - \mathbb{E}[Z])^2 + 2(\mathbb{E}[Z] - Z)(c - \mathbb{E}[Z])) d\mathbb{P} \\ &= \int_{\Omega} (\mathbb{E}[Z] - Z)^2 d\mathbb{P} + \int_{\Omega} (c - \mathbb{E}[Z])^2 d\mathbb{P} + 2 \int_{\Omega} (\mathbb{E}[Z] - Z)(c - \mathbb{E}[Z]) d\mathbb{P} \\ &= \text{Var}(Z) + \mathbb{E}[(c - \mathbb{E}[Z])^2] = \text{Var}(Z) + (c - \mathbb{E}[Z])^2 \end{aligned}$$

Dunque $C(p)$ è minimo quando $c = \mathbb{E}[Z]$, ovvero

$$\sigma(\mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[Z]$$

La densità cercata è $p(x)$ misurabile e non negativa tale che la

$$\int_0^1 x p(x) dx = \sigma^{-1}(\mathbb{E}[Z]).$$

1068 Gradient Descent con Backpropagation per una RNFF

Si utilizza la notazione introdotta in “Rete Neurale Feedforward”, con input x_i e target z_i .

Si supponga di avere una rete neurale feedforward con parametri \mathbf{w} , con tutti i neuroni con funzione di attivazione ϕ . Si vuole minimizzare la funzione costo $C(\mathbf{w})$, sufficientemente liscia da poter applicare il metodo del Gradient Descent. È quindi necessario poter calcolare il gradiente ∇C , ovvero calcolare tutte le derivate

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}^{(\ell)}}.$$

Si può vedere, allo stesso tempo, C come una funzione di tutti i segnali $s_j^{(\ell)}$, per ℓ fissato. Inoltre, ciascun $w_{ij}^{(\ell)}$ influenza, nel layer ℓ , soltanto $s_j^{(\ell)}$. Dunque, applicando la chain rule, si ottiene che

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}^{(\ell)}} = \frac{\partial C}{\partial s_j^{(\ell)}} \cdot \frac{\partial s_j^{(\ell)}}{\partial w_{ij}^{\ell}}$$

- Si denota con $\delta_j^{(\ell)} := \frac{\partial C}{\partial s_j^{(\ell)}}$;

- Calcolando $\frac{\partial s_j^{(\ell)}}{\partial w_{ij}^{\ell}}$, si ottiene

$$\frac{\partial s_j^{(\ell)}}{\partial w_{ij}^{\ell}} = \frac{\partial}{\partial w_{ij}^{\ell}} \sum_k w_{kj}^{(\ell)} x_k^{(\ell-1)} = x_i^{(\ell-1)}.$$

Segue che ciascun termine del gradiente di C calcolato rispetto ai pesi \mathbf{w} si possa scrivere come

$$\frac{\partial C}{\partial w_{ij}^{(\ell)}} = x_i^{(\ell-1)} \cdot \delta_j^{(\ell)}$$

Si vuole trovare i $\delta_j^{(\ell)}$ partendo dal layer più esterno (il Layer L), e poi calcolare i $\delta_j^{(\ell-1)}$ conoscendo i $\delta_j^{(\ell)}$.

- Il calcolo degli $\delta_j^{(L)}$ dipende sostanzialmente dalla scelta della funzione costo. Se ad esempio,

$$C(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{d(L)} (x_h^{(L)} - z_h)^2,$$

allora, dal momento che $x_j^{(L)} = \phi(s_j^L)$, si ottiene che

$$\delta_j^{(L)} = \frac{\partial C}{\partial s_j^L} = (x_j^{(L)} - z_j) \phi'(s_j^L)$$

- Si supponga di conoscere i $\delta^{(\ell)}$.

$$\begin{aligned}
\delta_j^{(\ell-1)} &= \frac{\partial C}{\partial s_j^{(\ell-1)}} = \sum_k \frac{\partial C}{\partial s_k^{(\ell)}} \cdot \frac{\partial s_k^{(\ell)}}{\partial s_j^{(\ell-1)}} \\
&= \sum_k \frac{\partial C}{\partial s_k^{(\ell)}} \cdot \frac{\partial}{\partial s_j^{(\ell-1)}} \left[\sum_h w_{hk}^{(\ell)} \cdot x_h^{(\ell-1)} \right] \\
&= \sum_k \frac{\partial C}{\partial s_k^{(\ell)}} \cdot \frac{\partial}{\partial s_j^{(\ell-1)}} \left[\sum_h w_{hk}^{(\ell)} \cdot \phi(s_h^{(\ell-1)}) \right] \\
&= \sum_k \frac{\partial C}{\partial s_k^{(\ell)}} \cdot w_{jk}^{(\ell)} \cdot \phi'(s_j^{(\ell-1)}) \\
&= \phi'(s_j^{(\ell-1)}) \cdot \sum_k \delta_k^{(\ell)} \cdot w_{jk}^{(\ell)}
\end{aligned}$$

Questa è quindi la formula finale:

$$\delta_j^{(\ell-1)} = \phi'(s_j^{(\ell-1)}) \cdot \sum_k \delta_k^{(\ell)} \cdot w_{jk}^{(\ell)}.$$

Pertanto l'[algoritmo di Gradient Descent](#) con velocità di apprendimento η è

$$w_{ij}^{(\ell)}(n+1) = w_{ij}^{(\ell)}(n) - \eta x_i^{(\ell-1)}(n) \cdot \delta_j^{(\ell)}(n)$$

1068.1 Problemi con la Backpropagation

Questo metodo si basa fondamentalmente sulla derivata ϕ' della funzione di attivazione. Questo può portare un errore di *vanishing gradient*, anche per funzioni di attivazioni semplici.

Si consideri infatti $\phi(t) = \sigma(t) = \frac{1}{1+e^{-t}}$. Se t è molto grande oppure molto piccolo, allora $\sigma'(t) \approx 0$. Questo rende il gradiente nullo, e pertanto l'algoritmo non converge (o converge in maniera estremamente lenta).

Inoltre, siccome $\sigma' = \sigma(1 - \sigma)$, si ha che $\sigma' \in [0, 1/4]$, e pertanto la backpropagation attraverso un layer di neuroni riduce il gradiente di $1/4$. Questo provoca una estrema lentezza di convergenza per l'algoritmo.

1068.2 Inizializzazione dei pesi - Xavier Initialization (Machine Learning)

Inizializzare i pesi iniziali $w_{ij}^{(\ell)}(0) = 0$ causa dei problemi, come mostrato nel seguente esempio.

Esempio 1. Si consideri la [rete neurale](#) mostrata in Figura 36, dove ϕ è la [funzione logistica](#) e la funzione costo da minimizzare è la distanza euclidea, e si supponga di eseguire l'algoritmo di cui

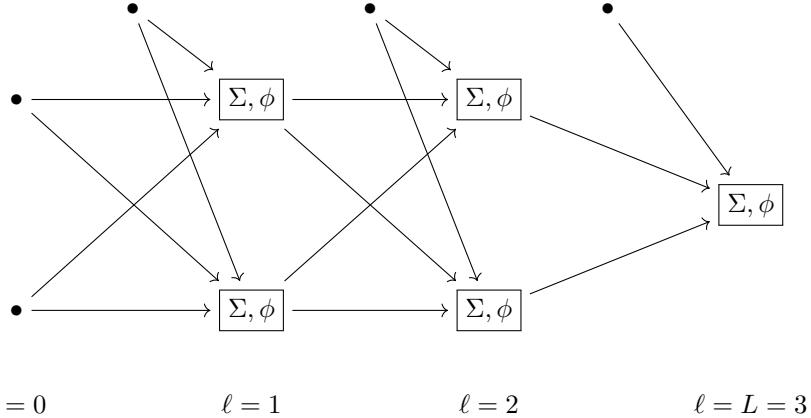


Figura 36: Rete neurale per l'Esempio 1

sopra con i pesi inizializzati a 0.

$$\begin{aligned}\delta_1^{(3)}(0) &= (x_1^{(3)} - z_1) \cdot \phi'(s_1^{(3)}(0)) = (x_1^{(3)} - z_1) \cdot \phi'(0) = \frac{1}{2}(x_1^{(3)} - z_1) \\ x_1^{(2)} &= \phi(s_1^{(2)}) = \phi(0) \\ x_2^{(2)} &= \phi(s_2^{(2)}) = \phi(0)\end{aligned}$$

quindi, seguendo l'algoritmo di gradient descent, i pesi $w_{11}^{(3)}$ e $w_{21}^{(3)}$ si aggiornano allo stesso modo. La stessa cosa succede anche per gli altri layer.

Si vuole quindi inizializzare i pesi come **variabile aleatoria**, in maniera tale che la varianza degli input e dei δ rimanga invariata nella backpropagation attraverso i layer:

$$\text{Var}(x^{(\ell)}) = \text{Var}(x^{(\ell-1)}) \quad (11)$$

$$\text{Var}(\delta^{(\ell)}) = \text{Var}(\delta^{(\ell-1)}) \quad (12)$$

Si consideri quindi

$$\begin{aligned}\text{Var}(x_k^{(\ell)}) &= \text{Var}(\phi(s_k^{(\ell)})) \\ &\stackrel{1}{=} (\phi'(0))^2 \text{Var}(s_k^{(\ell)}) = \text{Var}(s_k^{(\ell)}) = \\ &= \text{Var} \left(\sum_h w_{hk}^{(\ell)} \cdot x_k^{(\ell-1)} \right) = \sum_h \text{Var}(w_{hk}^{(\ell)} \cdot x_k^{(\ell-1)}) = \\ &\stackrel{2}{=} \sum_h \text{Var}(w_{hk}^{(\ell)}) \cdot \text{Var}(x_k^{(\ell-1)}) \stackrel{3}{=} \sum_h \text{Var}(w^{(\ell)}) \cdot \text{Var}(x^{(\ell-1)}) \\ &= d^{(\ell)} \text{Var}(w^{(\ell)}) \cdot \text{Var}(x^{(\ell-1)})\end{aligned}$$

dove si è supposto:

- di essere in regime lineare, ovvero

$$\phi(x) = \phi(0) + \phi'(0)x + o(x^2);$$

si suppone inoltre che $\phi'(0) \approx 1$;

- sotto le opportune ipotesi: $w_{hk}^{(\ell)}$ e $x_k^{(\ell-1)}$ indipendenti e a media nulla;
- $w_{hk}^{(\ell)}$ tutte i.i.d. come $w^{(\ell)}$ e $x_k^{(\ell-1)}$ tutte i.i.d. come $x^{(\ell-1)}$.

Dunque affinché (11) sia soddisfatta, si deve avere una

$$d^{(\ell)} \operatorname{Var}(w^{(\ell)}) = 1 \implies \operatorname{Var}(w^{(\ell)}) = \frac{1}{d^{(\ell)}} \quad (13)$$

Per quanto riguarda invece i δ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(\delta_j^{(\ell-1)}) &= \operatorname{Var}\left(\varphi'(s_j^{(\ell-1)}) \cdot \sum_k \delta_k^{(\ell)} \cdot w_{jk}^{(\ell)}\right) \\ &= \operatorname{Var}\left(\sum_k \delta_k^{(\ell)} \cdot w_{jk}^{(\ell)}\right) = \frac{1}{2} d^{(\ell-1)} \operatorname{Var}(\delta^{(\ell)}) \cdot \operatorname{Var}(w^{(\ell)}) \end{aligned}$$

dove

- continua valere che $\varphi'(0) \approx 1$, e inoltre $s_j^{(\ell-1)} \approx 0$;
- sotto le opportune ipotesi: $\delta_k^{(\ell)}$ e $w_{jk}^{(\ell)}$ indipendenti e a media nulla; $w_{jk}^{(\ell)}$ tutte i.i.d. come $w^{(\ell)}$ e $\delta_j^{(\ell)}$ tutte i.i.d. come $\delta^{(\ell)}$.

Quindi affinché (12) sia soddisfatta, si deve avere

$$d^{(\ell-1)} \operatorname{Var}(w^{(\ell)}) = 1 \implies \operatorname{Var}(w^{(\ell-1)}) = \frac{1}{d^{(\ell)}}. \quad (14)$$

La proposta, quindi, è di scegliere come $\operatorname{Var}(w^{(\ell)})$ la media armonica dei due valori dati dalle Eq. (13) e (14),

$$\operatorname{Var}(w^{(\ell)}) = \frac{1}{d^{(\ell)} + d^{(\ell-1)}}.$$

1069 Pooling

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, e sia

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

la partizione di $[a, b]$ di ampiezza $(b - a)/n$.

Definizione 1. Il max-pooling di f è la funzione semplice

$$S_n(x) = \sum_i M_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)}(x)$$

dove $M_i := \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Definizione 2. Il min-pooling di f è la funzione semplice

$$s_n(x) = \sum_i m_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)}(x)$$

dove $m_i := \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$.

Definizione 3. L'average-pooling di f è la funzione semplice

$$A_n(x) = \sum_i a_i \mathbb{1}_{[x_{i-1}, x_i)}(x)$$

dove $a_i := \frac{n}{b-a} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$.

Teorema 4. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora S_n, s_n, A_n convergono uniformemente ad f su $[a, b]$ per $n \rightarrow \infty$.

Si denoti ora con \mathcal{P}_n l'operatore che a $g(x)$ associa il corrispondente max/min/avg pooling: s_n, S_n, A_n ; sia

$$T_a \circ g(x) := g(x - a).$$

Proposizione 5. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ ed esiste $\varepsilon_n > 0$ tali che

$$\forall |a| < \varepsilon_n \quad \mathcal{P}_n(T_a \circ f) = \mathcal{P}_n(f).$$

The previous property provides stability of the pooling under small input variations.

1069.1 Pooling Layer in una rete neurale

Definizione 6. Si consideri una rete neurale feedforward. Il layer ℓ è detto di pooling se:

1. il layer $\ell - 1$ è diviso in N gruppi;
2. i neuroni del layer $\ell - 1$ che appartengono alla stessa classe sono collegati ad un unico neurone nel layer ℓ ;
3. ci sono N neuroni nel layer ℓ , ciascuno dei quali ha funzione di attivazione max.

Si vuole studiare l'informazione contenuta nel Layer di Pooling. Se i neuroni del layer $\ell - 1$ producono come output delle variabili aleatorie

$$X_{11}, \dots, X_{1p}, \quad X_{21}, \dots, X_{2p}, \quad \dots \quad X_{N1}, \dots, X_{Np}$$

(si è supposto senza perdita di generalità che ogni gruppo contenga lo stesso numero p di neuroni), allora i neuroni del layer di pooling producono

$$Y_i = \max \{X_{i1}, \dots, X_{ip}\}$$

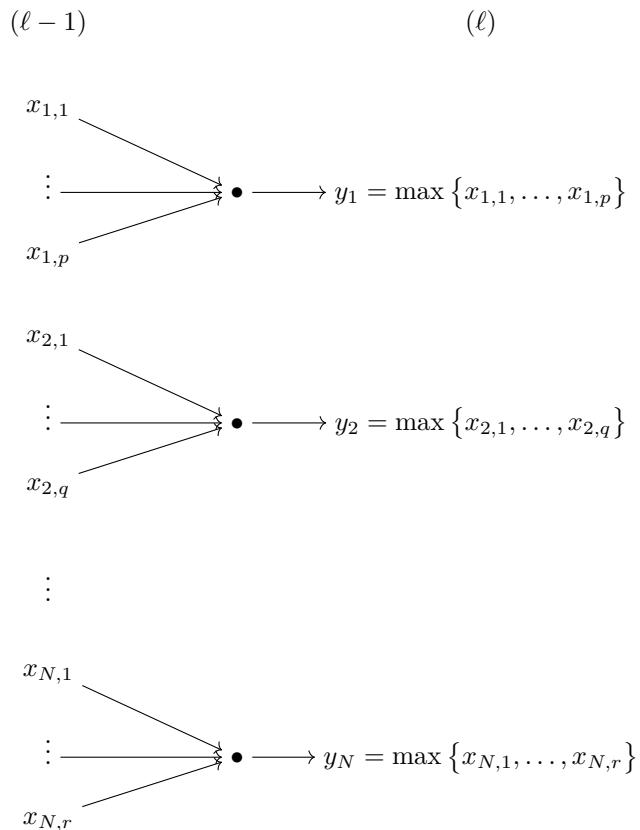


Figura 37: Un layer di pooling

L'informazione contenuta nel layer ℓ è^[313]

$$\sigma(Y) := \sigma(Y_1, \dots, Y_N) = \sigma\left[\bigcup \sigma(Y_i)\right]$$

Siccome si è dimostrato che $\sigma(Y_i) \subseteq \bigcap \sigma(X_{ij})$

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= \sigma\left[\bigcup \sigma(Y_i)\right] \subseteq \sigma\left[\bigcup_{i=1}^N \bigcap_{j=1}^p \sigma(X_{ij})\right] = \\ &= \sigma\left[\bigcap_{j=1}^p \bigcup_{i=1}^N \sigma(X_{ij})\right] \subseteq \bigcap_{j=1}^p \sigma\left[\bigcup_{i=1}^N \sigma(X_{ij})\right] = \bigcap_{j=1}^p \sigma(X_{1j}, \dots, X_{Nj}) \end{aligned}$$

Dunque, se per ciascun gruppo del $(\ell - 1)$ -layer prendo un neurone qualsiasi X_{ij_i} , allora

$$\sigma(Y) \subseteq \sigma(X_{1j_1}, \dots, X_{Nj_N}).$$

La cosa è significativa, poiché consente di eliminare dei neuroni superflui ogni qualvolta che si presenta un layer di pooling.

1070 Rete di Convoluzione

1070.1 Caso unidimensionale

Definizione 1. Un segnale discreto è una sequenza di numeri reali a dominio in \mathbb{Z} :

$$\langle \dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots \rangle.$$

Definizione 2. Un filtro o kernel è un segnale a supporto compatto (ovvero solo un numero finito di posizioni è diverso da 0):

$$\langle \dots, 0, \dots, 0, w_{-k}, \dots, w_{-1}, w_0, w_1, \dots, w_k, 0, \dots, 0 \dots \rangle.$$

Definizione 3. Se $y = \langle y_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$ è un segnale discreto e $w = \langle w_i \rangle_{i \in \mathbb{Z}}$ è un filtro, si chiama segnale filtrato (o convolved) il segnale $z := y * w$, $z = \langle z_j \rangle_{j \in \mathbb{Z}}$:

$$z_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_{j+k} \cdot w_k.$$

Definizione 4. In una rete neurale feedforward, se $x = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ è l'output del layer $\ell - 1$, il layer ℓ si dice layer di convezione se esiste $w = \langle w_j \rangle_{j \in \mathbb{Z}}$ filtro tale per cui ciascun $s_k^{(\ell)}$ è (a meno di traslare l'intervallo $k = 1, \dots, d^{(\ell)}$)

$$s^{(\ell)_k} = w_k + b_k$$

per qualche $b_k \in \mathbb{R}$.

1070.2 Caso due dimensionale

Definizione 5. Un segnale discreto è una sequenza di numeri reali a dominio in \mathbb{Z}^2 : $y = \langle y_{ij} \rangle_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$.

Definizione 6. Un filtro o kernel è un segnale a supporto compatto (ovvero solo un numero finito di posizioni è diverso da 0): $w = \langle w_{ij} \rangle_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$.

Definizione 7. Se $y = \langle y_{ij} \rangle_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ è un segnale discreto e $w = \langle w_{ij} \rangle_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$ è un filtro, si chiama segnale filtrato (o convolved) il segnale $z := y * w$, $z = \langle z_{ij} \rangle_{(i,j) \in \mathbb{Z}^2}$:

$$z_{ij} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y_{i+h,j+k} \cdot w_{h,k}.$$

1071 Rete Neurale che implementa lo XOR

Un rete neurale Feedforward come in Figura 38, con ϕ la funzione di Heaviside, è in grado implementare la funzione XOR:

x_1	x_2	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

È sufficiente porre i pesi come segue:

$${}^T W^{(1)} := \begin{pmatrix} w_{01}^{(1)} & w_{11}^{(1)} & w_{21}^{(1)} \\ w_{02}^{(1)} & w_{12}^{(1)} & w_{22}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & 1 \\ -1.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^T W^{(2)} := \begin{pmatrix} w_{01}^{(2)} & w_{11}^{(2)} & w_{21}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1072 Sigma-algebra come campo di informazione

FONTE: CHATGPT

1072.1 Contesto: σ -algebra come struttura di conoscenza

Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità.

- Ω è lo spazio degli esiti: tutte le possibili realtà del mondo.
- \mathcal{F} è una σ -algebra di sottoinsiemi di Ω : rappresenta gli eventi osservabili o misurabili.
- \mathbb{P} è una misura di probabilità su (Ω, \mathcal{F}) .

Ogni sottoinsieme $A \in \mathcal{F}$ rappresenta un evento che ha significato empirico: possiamo sapere se è accaduto o meno.

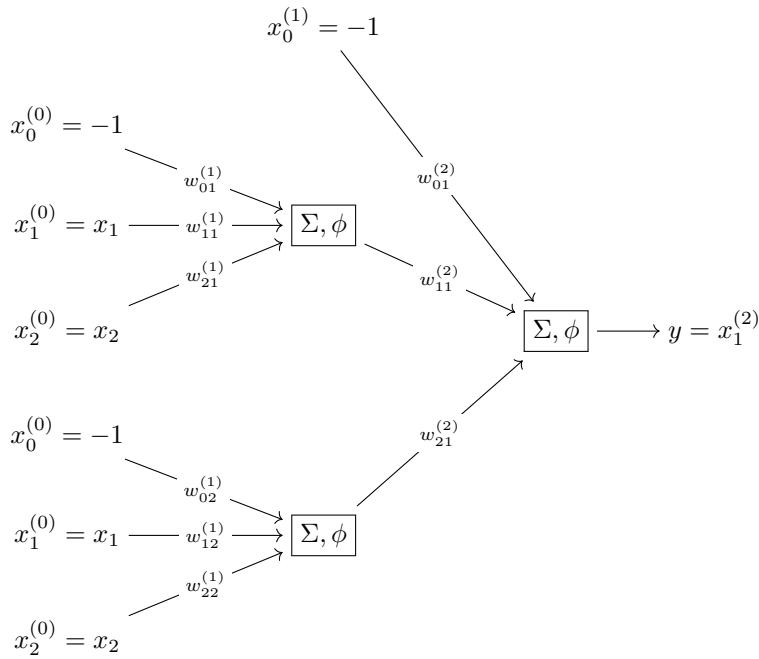


Figura 38: Rete Neurale con tre neuroni che implementa XOR

1072.2 La σ -algebra come insieme delle informazioni disponibili

Una σ -algebra $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ può essere vista come l'insieme delle informazioni che un osservatore possiede.

- Se \mathcal{G} è “piccola”, l’osservatore sa poco.
- Se \mathcal{G} è “grande”, sa molto (fino a \mathcal{F} , conoscenza completa).

Ogni evento $A \in \mathcal{G}$ è un fatto che l’osservatore può distinguere.

Se $A \notin \mathcal{G}$, allora l’osservatore non può sapere se A è accaduto.

1072.3 Esempio: partizionare lo spazio degli eventi

Sia $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, e l’osservatore sa solo se l’esito è nei primi due o negli ultimi due. Allora:

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$$

Questa σ -algebra rappresenta una partizione dell’informazione.

1072.4 σ -algebra generata da una variabile aleatoria

Sia $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una variabile aleatoria. La σ -algebra generata da X è:

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

Questa contiene tutti gli eventi determinabili in base al valore di X , ed è l'informazione completa codificata da X .

1072.4.1 Significato informativo

- $\sigma(X)$ rappresenta tutta l'informazione contenuta in X .
- Se conosciamo $X(\omega)$, allora possiamo sapere esattamente quali eventi in $\sigma(X)$ si sono verificati.
- Ogni evento $A \in \sigma(X)$ è determinabile unicamente tramite X .

Se $A \notin \sigma(X)$, non possiamo sapere se A è accaduto conoscendo solo X .

1072.4.2 Esempio esplicito

Sia:

- $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definita da:
 - $X(\omega_1) = 0$
 - $X(\omega_2) = 0$
 - $X(\omega_3) = 1$
 - $X(\omega_4) = 2$

Allora $X^{-1}(\{0\}) = \{\omega_1, \omega_2\}$, $X^{-1}(\{1\}) = \{\omega_3\}$, $X^{-1}(\{2\}) = \{\omega_4\}$

Quindi: $\sigma(X)$ è la σ -algebra generata dalla partizione $\{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}\}$

In particolare:

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$$

1072.4.3 Interpretazione informativa

- Se $X(\omega) = 0$, so solo che $\omega \in \{\omega_1, \omega_2\}$
- Se $X(\omega) = 1$, allora $\omega = \omega_3$
- Se $X(\omega) = 2$, allora $\omega = \omega_4$

Ogni evento in $\sigma(X)$ è un'unione di blocchi della partizione indotta da X .

Esempi:

- $\{\omega_1, \omega_2, \omega_4\} \in \sigma(X)$, perché corrisponde a $X \in \{0, 2\}$
- $\{\omega_1, \omega_3\} \notin \sigma(X)$, perché non è unione di intere fibre.

1072.4.4 Teorema: caratterizzazione di $\sigma(X)$

- Y è $\sigma(X)$ -misurabile \longleftrightarrow esiste $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $Y = f(X)$
- $A \subseteq \Omega$ è in $\sigma(X)$ $\longleftrightarrow A = X^{-1}(B)$ per qualche Borel $B \subseteq \mathbb{R}$

1072.4.5 Conclusione

$\sigma(X)$ è esattamente tutta e sola l'informazione che può essere dedotta conoscendo il valore di $X(\omega)$.

1072.5 Variabili condizionate e informazione

La probabilità condizionata $\mathbb{E}[Y \mid \mathcal{G}]$ è la miglior stima di Y dato ciò che so in \mathcal{G} . Quindi \mathcal{G} rappresenta l'informazione disponibile, e la condizionata è un modo per fare inferenza su variabili non note usando quella informazione.

Se Y è misurabile rispetto a $\sigma(X)$, allora esiste una funzione f tale che $Y = f(X)$, e in particolare:

$$\mathbb{E}[Y \mid \sigma(X)] = g(X)$$

per qualche funzione g .

1072.6 Estensione al caso multidimensionale

Se $X = (X_1, \dots, X_n)$, allora:

$$\sigma(X) = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

cioè la σ -algebra contiene l'informazione congiunta di tutte le componenti.

1072.7 Informazione nel tempo: filtrazioni

Una filtrazione $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ è una famiglia crescente di σ -algebre:

$$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \quad \text{per ogni } s \leq t$$

- \mathcal{F}_t rappresenta tutta l'informazione disponibile fino al tempo t .
- Un processo X_t è adattato se X_t è \mathcal{F}_t -misurabile.

1072.8 Partizioni e conoscibilità

Ogni σ -algebra \mathcal{G} induce una partizione di Ω nei suoi eventi “atomici”, cioè quelli minimali e distinguibili.

- Ogni osservatore con informazione \mathcal{G} sa solo a quale blocco della partizione appartiene ω .
- Non può distinguere elementi dello stesso blocco.

1072.9 Riepilogo

Concetto	Interpretazione
σ -algebra \mathcal{G}	Informazione disponibile
Evento $A \in \mathcal{G}$	Evento conoscibile
$\mathbb{E}[X \mathcal{G}]$	Stima di X con l'informazione
$\sigma(X)$	Tutta l'informazione contenuta in X
Filtrazione (\mathcal{F}_t)	Informazione che evolve nel tempo
Partizione	Eventi distinguibili

1073 sigma-algebra generata da una variabile aleatoria

1074 Leggi di De Morgan

1075 Approssimazione per Regressione Lineare (Machine Learning)

Vedi Lezione 4.2 di [2]

Proposizione 1. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ uno spazio di probabilità. Siano X_1, \dots, X_n delle variabili aleatorie, e sia

$$Y := \max \{X_1, \dots, X_n\}.$$

Dette $\sigma(X_i), \sigma(Y)$ le σ -algebre generate dalle v.a., si ha che

$$\sigma(Y) \subseteq \bigcap \sigma(X_i).$$

Dimostrazione. Sia $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} Y^{-1}(-\infty, b] &= \{\omega \in \Omega \mid Y(\omega) \leq b\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid \max \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} \leq b\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq b \wedge \dots \wedge X_n(\omega) \leq b\} \\ &= \{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \leq b\} \cap \dots \cap \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \leq b\} \\ &= \bigcap X_i^{-1}(-\infty, b] \end{aligned}$$

ma per ogni i si ha che $X_i^{-1}(-\infty, b] \in \sigma(X_i)$, dunque

$$Y^{-1}(-\infty, b] \in \bigcap \sigma(X_i).$$

■

1076 Curva

1077 Vettori perpendicolari

1078 Metodo dell'Hessiana

Vedi Sezione 4.12 di [1]

1079 Metodo di Newton

Vedi Sezione 4.12 di [1]

1080 Serie di Taylor

1081 STUDIARE

1081.1 Metodo di studio proposto

1081.1.1 Struttura giornaliera in blocchi Pomodoro (50/10)

- **Prima mattina:** ripasso (refresh dei concetti già studiati)
- **Metà mattina – metà pomeriggio:** studio attivo (definizioni, teoremi, dimostrazioni)
- Tardo pomeriggio*: recall giornaliero in Org-Roam (ricostruzione a memoria, integrazione)

1081.1.2 Giorni full-focus

- Sessioni dedicate esclusivamente a esercizi e recall

1081.2 Criticità e ottimizzazioni

1081.2.1 Equilibrio e stanchezza

- **Rischio:** calo di attenzione nel blocco tardo pomeriggio di 2 ore continue
- **Soluzione:** spezzare in 2 per 40–50 min con pause attive

1081.2.2 Spaced repetition integrata

- Quick review a 24h
- Medium review a 3–4 giorni
- Review settimanale e super-review nei giorni full-focus

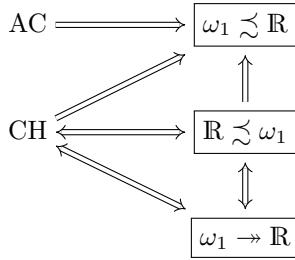


Figura 39: Catena delle diverse implicazioni in ambito di MK.

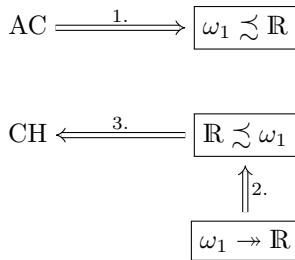


Figura 40: Catena delle diverse implicazioni da dimostrare nell'ambito di MK.

1081.2.3 Varietà di task

- Alternare esercizi “a freddo” e teach-back (registrazione audio/video)
- Macro-planning settimanale con obiettivi e peer-review

1081.2.4 Micro-obiettivi e transizioni

- Micro-obiettivo per ogni sessione Org-Roam (es. completare una dimostrazione specifica)
- Mini-routine di 2 min (respirazione/stretching) per segnalare i cambi di fase

1082 Relazione tra reali e omega1

Nel contesto della Morse Kelly Set Theory, vi sono due insiemi non numerabili molto diversi tra di loro: \mathbb{R} e ω_1 ^[314]. L'unica informazione è che esiste una funzione suriettiva $\mathbb{R} \twoheadrightarrow \omega_1$ ^[315].

Tutte le altre possibilità (ovvero $\omega_1 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \overset{>} \sim \omega_1$ e $\omega_1 \overset{>} \sim \mathbb{R}$ ^[316]) sono indipendenti da MK. Le implicazioni sono riassunte in Figura 39, dove “AC” è l'assioma della scelta e “CH” è l'ipotesi del continuo (ovvero $\mathbb{R} \asymp \omega_1$).

Restano da dimostrare le implicazioni 1., 2. e 3., mostrate in Figura 40

1. Assumendo AC allora ogni insieme è ben ordinabile, e in particolare \mathbb{R} è ben ordinabile; dunque esiste l'ordinale order type $\text{ot}(\mathbb{R}) \in \text{Ord}$.

\mathbb{R} è non numerabile, e quindi $\text{ot}(\mathbb{R})$ è non numerabile; inoltre ω_1 è il più piccolo ordinale non numerabile, e quindi

$$\omega_1 \leq \text{ot}(\mathbb{R}) \asymp \mathbb{R}$$

e quindi $\omega_1 \precsim \mathbb{R}$.

2. Se $\omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ allora, siccome ω_1 è ben ordinabile, esiste la funzione inversa $\mathbb{R} \rightarrow \omega_1$, ovviamente iniettiva, e quindi $\mathbb{R} \precsim \omega_1$
3. Se $\mathbb{R} \precsim \omega_1$ allora \mathbb{R} è ben ordinabile. Come per 1., quindi $\omega_1 \precsim \mathbb{R}$. Per il Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder, allora, $\mathbb{R} \asymp \omega_1$.

1083 Teoria dei modelli [CORSO SEL2025]

1083.1 Lezione 1

1083.1.1 Introduzione

Si lavora con un linguaggio

$$\mathcal{L} = \left\{ \{R_i\}_{i \in I}, \{f_j\}_{j \in J}, \{c_k\}_{k \in K} \right\}$$

Definizioni di base:

1. Una teoria è un insieme di \mathcal{L} -enunciati:
2. Una \mathcal{L} -struttura M è un modello della teoria T se per ogni $\sigma \in T$, $M \models \sigma$. Si scrive $M \models T$.
 T è coerente, o consistente, se ammette un modello.
3. Con $\text{Mod}(T)$ si indica la classe di tutti i modelli della teoria T .
4. Con $\text{Th}(M)$ si indica la teoria della struttura M , ossia

$$\text{Th}(M) := \{\sigma : M \models \sigma, \sigma \text{ enunciato}\}.$$

5. Se T è una teoria e σ è un enunciato,

$$T \models \sigma \text{ per ogni } M \models T$$

6. T è una teoria completa se per ogni enunciato σ si ha

$$T \models \sigma \quad \text{o} \quad T \models \neg \sigma.$$

7. Scriviamo $M \equiv N$, e diremo che M, N sono elementarmente equivalenti se

$$\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$$

Alcune domande naturali:

1. Data T , possiamo descrivere $\text{Mod}(T)$? In generale, la domanda ha senso quando T è completa

2. Data M (struttura), $\text{Th}(M)$ è sempre completa. Come sono fatti i modelli di $\text{Th}(M)$?
3. Come stabilire se una data teoria T è completa?
4. Data una struttura M , è possibile descrivere $\text{Th}(M)$ in modo efficace? (per esempio mediante assiomi)

Esempio 1. Sia T una teoria ω -categorica, ossia avente un unico modello infinito numerabile a meno di isomorfismo. Allora

- T è completa;
- i modelli infinito numerabili di T sono tutti isomorfi;
- una classificazione di $\text{Mod}(T)$ si ha banalmente per T totalmente categorica.

Abusi di notazioni.

- Una struttura verrà denotata dal suo dominio M ; non distinguiamo tra simboli nel linguaggio e le loro interpretazioni in M .
- Se $A \subseteq M$, definiamo un'espansione di \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(A) = L \cup \{a \mid a \in A\}.$$

Una $\mathcal{L}(A)$ -formula ha parametri in A .

- Scriviamo “ $\varphi \in \mathcal{L}$ ” per “ φ è una \mathcal{L} -formula”.
- Tuple di variabili/costanti si denotano con x/a , e, occasionalmente \bar{x}/\bar{a} . $|x|$ denota la lunghezza della tupla x (ex: $a \in M^{|a|}$)
- M, N, U, V denotano struttura e A, B, C sono sottoinsiemi del dominio di una struttura.

1083.1.2 Immersioni e immersioni elementari

Se M, N sono due \mathcal{L} -struttura, allora

1. $f : M \rightarrow N$ è una immersione se e solo se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ atomica (oppure senza quantificatori) e $\forall a \in \overline{M^{|x|}}$

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(f(a))$$

Troviamo una copia isomorfa di M dentro N .

2. $f : M \rightarrow N$ è una immersione elementare se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ e $\forall a \in M^{|x|}$

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(f(a))$$

Inoltre

1. M è sottostruttura di N ($M \subseteq N$) se l'inclusione $i : M \rightarrow N$ è una immersione.
2. M è sottostruttura elementare di N ($M \preceq N$) se l'inclusione $i : M \rightarrow N$ è una immersione elementare.

3. Una immersione biettiva è un isomorfismo ed è, in particolare, un'immersione elementare.

4. Ogni immersione è iniettiva

$$M \vDash a = b \iff N \vDash f(a) = f(b)$$

Esempio 2. Sia $\mathcal{L}_{lo} = \{\langle\}\$, con \langle simbolo di relazione binaria. Allora (\mathbb{R}, \langle) è una \mathcal{L}_{lo} -struttura, dove \langle è (interpretato come) l'ordine usuale sui reali.

Gli intervalli $[0, 1]$ e $[0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ sono \mathcal{L}_{lo} strutture e sono entrambi sottostrutture di \mathbb{R} . Inoltre $[0, 1] \cong [0, 2]$, con $x \mapsto 2x$ **isomorfismo**.

Ma l'inclusione $[0, 1] \subseteq [0, 2]$ non è elementare. Infatti, sia

$$\varphi(x) : \forall y (y < x \vee y = x)$$

allora $[0, 1] \vDash \varphi(1)$ ma $[0, 1] \not\vDash \varphi(1)$.

Altre osservazioni: $[0, 1] \not\preceq \mathbb{R}$ e $[0, 1] \not\equiv \mathbb{R}$. Però $[0, 1] \equiv [0, 2]$ poiché $[0, 1] \cong [0, 2]$.

Teorema 3. ([Criterio di Tarski-Vaught](#)) Per ogni **sottoinsieme** $A \subseteq N$, sono fatti equivalenti:

1. A è il dominio di una sottostruttura elementare $M \preceq N$;
2. per ogni **formula** $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ con $|x| = 1$

$$N \vDash \exists x \varphi(x) \rightarrow N \vDash \varphi(b) \text{ per qualche } b \in A$$

Definizione 4. Sia λ un ordinale. Allora una catena di \mathcal{L} -strutture è una successione $\langle M_i \mid i < \lambda \rangle$ tale che, per ogni $i < j < \lambda$, $M_i \subseteq M_j$.

L'unione della catena è la struttura M dove

- il dominio è $\bigcup_{i < \lambda} M_i$;
- c costante, allora $c^M = c^{M_i}$ per qualche $i < \lambda$;
- f funzione, $\bar{a} \in M^n$, allora $f^M(\bar{a}) = f^{M_i}(\bar{a})$ per i tale che $\bar{a} \in M_i^n$;
- R relazione, allora $R^M = \bigcup_{i < \lambda} R^{M_i}$.

1083.1.3 Teorema di Lowenheim-Skolem all'ingiù

Teorema 5. Sia N una \mathcal{L} -struttura con $|N| \geq |\mathcal{L}| + \omega$, e sia $A \subseteq N$.

Allora per ogni λ tale che $|A| + |\mathcal{L}| \leq \lambda \leq |N|$ esiste $M \preceq N$ tale che

1. $A \subseteq M$
2. $|M| = \lambda$.

1083.1.4 Teoria degli ordini lineari

Sia $\mathcal{L}_{lo} = \{<\}$, con $<$ relazione binaria. Una \mathcal{L}_{lo} struttura è un ordine lineare se soddisfa

1. $\forall x \neg(x < x)$;
2. $\forall x, y, z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z]$;
3. $\forall x, y [x < y \vee y < x \vee x = y]$.

Un ordine lineare è denso se soddisfa

1. $\exists x, y [x < y]$
2. $\forall x, y [(x < y) \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y)]$.

Un ordine lineare è senza estremi se

1. $\forall x$
???
- (vedi [Ordine lineare](#), [Ordine denso](#), [Ordine senza punto finale](#))
 $(T_{lo} \text{ e } T_{dlo})$

1083.1.5 Teoria dei grafi

Sia $\mathcal{L}_{gph} = \{R\}$. Un grafo è una \mathcal{L}_{gph} -struttura che soddisfa

???

(Vedi [Teoria dei grafi](#), [Teoria dei grafi aleatori](#))
 $(T_{gph} \text{ e } T_{rg})$

I modelli di T_{dlo} e T_{rg} sono necessariamente infiniti.

1083.2 Lezione 2

Definizione 6. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture. Un'immersione parziale è una mappa iniettiva

$$p : \text{dom}(p) \subseteq M \rightarrow N$$

tale che

1. per ogni relazione n -aria R , $a \in \text{dom}(p)^n$

$$a \in R^M \iff p(a) \in R^N$$

2. per ogni funzione n -aria f , $a, f^M(a) \in \text{dom}(p)^n$

$$p(f^M(a)) = f^N(p(a))$$

3. per ogni costante c tale che $c^M \in \text{dom}(p)$

$$p(c^M) = c^N$$

Definizione 7. *M, N sono parzialmente isomorfe se esiste una collezione I ≠ ∅ di immersioni parziali tali che*

1. se $p \in I$ e $a \in M$, esiste $\hat{p} \in I$ con $p \subseteq \hat{p}$ e $a \in \text{dom}(\hat{p})$;
2. se $p \in I$ e $b \in M$, esiste $\hat{p} \in I$ con $p \subseteq \hat{p}$ e $b \in \text{rng}(\hat{p})$.

Lemma 8. (Andirivieni, o back-and-forth) Se $|M| = |N| = \omega$ e M, N sono parzialmente isomorfe via I , allora $M \cong N$.

Dimostrazione. Enumeriamo M, N , dicendo

$$\begin{aligned} M &= \langle a_i : i < \omega \rangle \\ N &= \langle b_i : i < \omega \rangle \end{aligned}$$

Definiamo induttivamente una catena $\langle p_i : i < \omega \rangle$ di immersioni parziali con $a_i \in \text{dom}(p_{i+1})$ e $b_i \in \text{rng}(p_{i+1})$.

Sia $p_0 \in I$ arbitrario. Al passo $i + 1$, usiamo le proprietà 1. e 2. della definizione per ottenere p_{i+1} . Allora $p = \bigcup_{i \in \omega} p_i$ è l'isomorfismo cercato. ■

Teorema 9. Siano $M, N \models T_{\text{dlo}}$ con $|M| = |N| = \omega$. Allora $M \cong N$.

Dimostrazione. Se $p : M \rightarrow N$ è un'immersione parziale con $|\text{dom}(p)| < \omega$ e $c \in M$, allora, per gli assiomi di T_{dlo} è possibile trovare $d \in N$ tale che $p \cup \{(c, d)\}$ è ancora un'immersione parziale.

Analogamente, se $d \in N$ e $p : M \rightarrow N$ è un'immersione parziale con $|\text{dom}(p)| < \omega$, troviamo $c \in N$ tale che $p \cup \{(c, d)\}$ è ancora un'immersione parziale.

Dunque $I = \{p : M \rightarrow N \text{ immersione parziale finita}\}$ rende M e N parzialmente isomorfe.

Per il lemma dell'andirivieni, $M \cong N$. ■

Corollario 10. T_{dlo} è ω -categorica.

Osservazione. Ogni teoria ω -categorica T con un modello infinito è completa. Infatti, se $M, N \models T$ e $\varphi \in L$ è enunciato t.c. $M \models \varphi$, siano $M', N' \models T$ con $|M'| = |N'| = \omega$, $M' \models M$, $N' \models N$ (che esistono per LW). Allora $M' \cong N'$ e, per elementarità, $N \models \varphi$.

Corollario 11. T_{dlo} è completa.

Teorema 12. T_{rg} è coerente.

Dimostrazione. Si definisce un grafo su ω come segue: per $i < j$, $R(i, j)$ sse la cifra i -esima nell'espansione binaria di j è 1.

Dimostrare che $\langle \omega, R \rangle \models T_{\text{rg}}$. ■

Teorema 13. Siano $M, N \models T_{\text{rg}}$ con $|M| = |N| = \omega$. Allora $M \cong N$.

Dimostrazione. Siano $m_0 \in M$, $n_0 \in N$. Allora $\langle m_0, n_0 \rangle$ è un'immersione parziale.

Dunque $I = \{p : M \rightarrow N \text{ immersione parziale finita}\} \neq \emptyset$.

Siano ora $p \in I$ e $m \in M$. Considero $U, V \subseteq \text{rng}(p)$

$$\begin{aligned} U &= \{p(a) \in \text{rng}(p) \mid R(m, a)\} \\ V &= \{p(a) \in \text{rng}(p) \mid \neg R(m, a)\} \end{aligned}$$

Dunque esiste $n \in N$ tale che, per ogni $a \in \text{dom}(p)$

$$M \models R(m, a) \iff R(n, p(a))$$

...

■

Corollario 14. T_{rg} è ω -categorica e completa.

Il modello numerabile Γ di T_{rg} si chiama grafo di Rado, o random graph.

Ogni grafo finito e ogni grafo numerabile si immerge in Γ .

Inoltre Γ è ultraomogeneo: ogni isomorfismo tra sottografi finiti di Γ si estende ad un automorfismo di Γ .

Anche $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ è ultraomogeneo. . .

Definizione 15. Una mappa $f : \text{dom}(f) \subseteq M \rightarrow N$ si dice elementare se $\forall \varphi(x) \in \mathcal{L}$, $a \in \text{dom}(f)^{|x|}$

$$M \models \varphi(a) \iff N \models \varphi(f(a)).$$

Proposizione 16. Una mappa è elementare sse ogni sua restrizione finita lo è.

Dimostrazione. (\Rightarrow): ovvio.

(\Leftarrow): siano $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ e $a \in M$ tali che

$$M \models \varphi(a) \wedge N \not\models \varphi(f(a))$$

Allora $f \upharpoonright \{a\}$ è finita e non elementare.

■

Teorema 17. Siano $M, N \models T_{\text{dlo}}$ (o T_{rg}), e sia $p : M \rightarrow N$ un'immersione parziale. Allora p è elementare.

Dimostrazione. In virtù della proposizione precedente, basta il caso $|p| < \omega$.

Siano $M' \preceq M$, $N' \preceq N$ tali che $|M'| = |N'| = \omega$ e

$$\begin{aligned} \text{dom}(p) &\subseteq M' \\ \text{rng}(p) &\subseteq N' \end{aligned}$$

Allora per andirivieni fra M' e N' , p si estende a $\pi : M' \cong N'$.

In particolare, p è elementare.

■

Corollario 18. $\langle \mathbb{Q}, < \rangle \preceq \langle \mathbb{R}, < \rangle$

1083.2.1 Tipi

Tutte le strutture si intendono in un linguaggio \mathcal{L} fissato.

Definizione 19. Un tipo $p(x)$ è un insieme di \mathcal{L} -formule le cui variabili libere sono in $x = \langle x_i : i < \lambda \rangle$, con λ cardinale.

Notazione: $p(x) \subseteq \mathcal{L}$

Definizione 20. Un tipo $p(x)$ è

- soddisfacibile in M se $\exists a \in M^{|x|}$ tale che

$$M \models \varphi(a) \quad \text{per ogni } \varphi(x) \in p(x);$$

scriviamo $M \models p(a)$, oppure $M, a \models p(x)$ e diciamo che a realizza $p(x)$ in M ;

- soddisfacibile se è soddisfacibile in qualche M ;
- finitamente soddisfacibile in M se ogni $q(x) \subseteq p(x)$ finito è soddisfacibile in M ;
- finitamente soddisfacibile se ogni $q(x) \subseteq p(x)$ finito è soddisfacibile.

Spesso si dice “consistente” invece di “soddisfacibile”.

Esempio 21. Sia $M = \langle \mathbb{N}, < \rangle$, sia $\varphi_n(x)$ la formula “ci sono almeno n elementi $< x$ ”, e sia

$$p(x) = \{\varphi_n(x) \mid n \in \omega\}.$$

- $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M .
- $p(x)$ non è soddisfacibile in M .

Teorema 22. (Teorema di Compattezza) Una teoria T è coerente se e solo se è coerente ogni sottoinsieme finito di T .

Un corollario è

Teorema 23. (compattezza per tipi) Se $p(x)$ è un tipo finitamente soddisfacibile, allora $p(x)$ è soddisfacibile.

Lemma 24. (Lemma del diagramma) Sia $a = \langle a_i : i < \lambda \rangle$ una enumerazione della struttura M . Sia $q(x)$ il diagramma di M :

$$q(x) = \{\varphi(x) \in \mathcal{L} \mid M \models \varphi(a)\}, \quad |x| = |a| = \lambda.$$

Allora $q(x)$ è soddisfacibile in una struttura N se e solo se esiste $\beta : M \rightarrow N$ immersione elementare.

Dimostrazione. (\Leftarrow): $N \models q(\beta(a))$. (\Rightarrow): Se $b \in N^{|x|}$ è tale che $N \models q(b)$, allora

$$\beta : a_i \mapsto b_i, \quad i < \lambda$$

è una immersione elementare. Quindi

$$M \models \varphi(a) \iff \varphi(x) \in q(x) \iff N \models \varphi(b) = \varphi(\beta(a)).$$

■

Se $A \subseteq M$, consideriamo i tipi in $\mathcal{L}(A)$, detti con parametri in A , o su A .

In particolare, se $A = M$ e $p(x) \subseteq \mathcal{L}(M)$, esistono:

1. $a = \langle a_i : i < |M| \rangle$ enumerazione
2. $q(x, z) \subseteq \mathcal{L}$

tali che $p(x) = q(x, a)$.

Allora il lemma precedente si può enunciare come segue.

Lemma 25. Sia $\text{Th}(M_M)$ la teoria di M in $\mathcal{L}(M)$. Se $N \models \text{Th}(M_M)$, allora $M \preceq N$.

Teorema 26. Sia M una struttura e $p(x) \subseteq \mathcal{L}(M)$ un tipo finitamente soddisfacibile in M . Allora $p(x)$ è realizzato in qualche $N \succeq M$.

Esempio 27. Sia $M = (0, 1) \subseteq \mathbb{Q}$ una \mathcal{L}_{lo} -struttura. Siano

1. $a_n = 1 - 1/n \in M$ per $n \in \omega \setminus \{0\}$;
2. $p(x) = \{a_n < x : n \in \omega\}$.

Allora $p(x) \in \mathcal{L}(M)$ è finitamente soddisfacibile in M , ma non è realizzato. Viceversa

$$\mathbb{Q}, 1 \models p(x)$$

e sappiamo che $M \preceq \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. (del Teorema~26) Siano:

1. a una enumerazione di M ;
2. $p(x) = p'(x, a)$ con $p'(x, z) \subseteq \mathcal{L}$, $|z| = |a| = |M|$;
3. $q(z) = \{\varphi(z) \mid M \models \varphi(a)\}$.

Allora $p'(x, z) \cup q(z)$ è finitamente soddisfacibile, per ipotesi. Per compattezza, esiste una struttura N e c, d tali che

$$N, c, d \models p'(x, z) \cup q(z)$$

e in particolare $N \models q(d)$ e dunque esiste $\beta : M \rightarrow N$ immersione elementare. Possiamo assumere $M \preceq N$. ■

Un corollario è questo importante teorema.

Teorema 28. (Lowenheim-Skolem all'insù) Sia $|M| \geq \omega$. Allora per ogni $\lambda \geq |M| + |\mathcal{L}|$ esiste $N \succeq M$ con $|N| = \lambda$.

Dimostrazione. Sia $x = \langle x_i : i < \lambda \rangle$ una tupla di variabili distinte, e sia

$$p(x) = \{x_i \neq x_j \mid i < j < \lambda\}.$$

Allora $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M , e dunque realizzato in $N \succeq M$, con $|N| \geq \lambda$.

Per Lowenheim-Skolem all'ingiù, possiamo assumere $|N| = \lambda$. ■

1083.3 Lezione 3

1083.3.1 Saturazione

Definizione 29. Sia λ un cardinale infinito. La struttura M si dice λ -satura se realizza ogni tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ (per $A \subseteq M$) con

1. $|x| = 1$
2. $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M ;
3. $|A| \leq \lambda$.

M si dice satura se è $|M|$ -satura.

Esempio 30. Sia $p(x) = \{x \neq a \mid a \in M\} \subseteq \mathcal{L}(M)$:

- $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M ;
- $p(x)$ non è soddisfacibile in M .

Definizione 31. Se $A \subseteq M$ e $b \in M^{|b|}$ allora il tipo di b su A è

$$\text{tp}_M(b/A) := \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(A) : M \models \varphi(b)\}.$$

Osservazione. Si ha che

1. $\text{tp}(b/A)$ è completo: se $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, si ha $M \models \varphi(b)$ o $M \models \neg\varphi(b)$;
2. se $A \subseteq M \preceq N$ e $b \in M^{|b|}$

$$\text{tp}_M(b/A) = \text{tp}_N(b/A);$$

Importante se $M \equiv N$, allora $\emptyset : M \dashrightarrow N$ è elementare.

Proposizione 32. Sia $f : \text{dom}(f) \subseteq M \rightarrow N$ elementare. Allora:

1. $M \equiv N$;
2. Se a enumera $\text{dom}(f)$

$$\text{tp}(a/\emptyset) = \text{tp}(f(a)/\emptyset)$$

e più in generale, se $b \in \text{dom}(f)^{|b|}$, se $A \subseteq \text{dom}(f) \cap N$ e $f \upharpoonright A = \text{Id}_A$:

$$\text{tp}(b/A) = \text{tp}(f(b)/A).$$

3. Se a enumera $\text{dom}(f)$ e $p(x, a) \subseteq \mathcal{L}(A)$ è finitamente soddisfacibile in M , allora $p(x, f(a))$ è finitamente soddisfacibile in N .

Infatti, se $\{\varphi_1(x, a), \dots, \varphi_n(x, a)\} \subseteq p(x, a)$ allora

$$M \models \exists x \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(x, a)$$

e per elementarità di f

$$N \vDash \exists x \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(x, f(a)).$$

Teorema 33. Sia N tale che $|\mathcal{L}| + \omega \leq \lambda \leq |N|$. Sono fatti equivalenti:

1. N è λ -satura;
2. se $f : M \dashrightarrow N$ è mappa elementare con $|f| \leq \lambda$ e $b \in M$, allora esiste $\hat{f} \supseteq f$ elementare tale che $b \in \text{dom}(\hat{f})$;
3. se $A \subseteq N$ è tale che $|A| < \lambda$ e $p(z) \subseteq \mathcal{L}(A)$ con $|z| \leq \lambda$ è finitamente soddisfacibile in N , allora $p(z)$ è soddisfacibile in N .

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia f come in 2., sia $b \in M$. Sia a un'enumerazione di $\text{dom}(f)$, e sia $p(x, a) = \text{tp}_M(b/a)$.

$p(x, a)$ è soddisfacibile in M , e dunque $p(x, f(a))$ è finitamente soddisfacibile in N e $|f(a)| < \lambda$, N è λ -satura.

Dunque $p(x, f(a))$ è realizzato in N . Sia d tale che $N, d \vDash p(x, f(a))$. Allora $\hat{f} = f \cup \{(b, d)\}$ è la mappa cercata. ■

Corollario 34. Se M, N sono saturi con $|M| = |N|$, allora ogni mappa elementare $f : M \dashrightarrow N$ tale che $|f| < |M|$ si estende ad un isomorfismo $\alpha : M \cong N$.

In particolare, se M, N sono saturi, $\text{Th}(M) = \text{Th}(N)$ e $|M| = |N|$, allora $M \cong N$.

Corollario 35. Se $M \models T_{\text{dlo}}$ o $M \models T_{\text{rg}}$, allora M è ω -sastro.

Ricordiamo che un automorfismo di una struttura M è un isomorfismo $M \rightarrow M$. Gli automorfismi di M formano un gruppo, scritto $\text{Aut}(M)$.

Se $A \subseteq M$, si definisce

$$\text{Aut}(M/A) := \{\alpha \in \text{Aut}(M) \mid \alpha \upharpoonright A = \text{Id}_A\}.$$

l'insieme degli automorfismi di M che fissano A .

Definizione 36. Sia λ un cardinale infinito. Una struttura N è

1. λ -universale se per ogni $M \equiv N$ con $|M| \leq \lambda$, esiste $\beta : M \rightarrow N$ immersione elementare, e λ -universale se è $|\lambda|$ -universale;
2. λ -omogenea se ogni mappa elementare $f : N \dashrightarrow N$, con $|f| < \lambda$, si estende ad $\alpha \in \text{Aut}(N)$, e λ -omogenea se è $|\lambda|$ -omogenea;
3. ultraomogenea se ogni immersione parziale finita si estende ad un automorfismo.

Teorema 37. Sia N tale che $|N| \geq |L|$. Sono equivalenti:

1. N è satura;
2. N è universale e omogenea.

Definizione 38. Sia $a \in N^{|a|}$ e sia $A \subseteq N$. Allora

1. l'orbita di a su A è

$$O_N(a/A) := \{\alpha(a) : \alpha \in \text{Aut}(N/A)\},$$

dove per definizione $\alpha(a_0, \dots, a_i, \dots) := (\alpha(a_0), \dots, \alpha(a_i), \dots)$;

2. se $\varphi \in \mathcal{L}(A)$,

$$\varphi(N) := \{a \in N^{|x|} : N \models \varphi(a)\}$$

è l'insieme definito da $\varphi(x)$.

Un sottoinsieme di N è definibile su A se è definito da qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$.

Un sottoinsieme di N è tipo-definibile su A se è nella forma

$$p(N) := \{a \in N^{|x|} \mid N \models p(a)\}$$

per qualche tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

Osservazione. Se $a, b \in N^{|a|}$ e $A \subseteq N$, allora

$$\text{tp}(a/A) = \text{tp}(b/A)$$

se e solo se la mappa

$$\{\langle a_i, b_i \rangle \mid i < |a|\} \cup \text{Id}_A$$

è una mappa elementare $N \rightarrow N$.

Teorema 39. Siano N λ -omogenea, $A \subseteq N$, $|A| < \lambda$, e sia $a \in N^{|a|}$, con $|a| < \lambda$.

Sia $p(x) = \text{tp}(a/A)$. Allora

$$O_N(a/A) = p(N).$$

Dimostrazione. (\subseteq) Se $b \in O_N(a/A)$ allora $b = \alpha(a)$ per $\alpha \in \text{Aut}(N/A)$ e se $\varphi(x, c) \in \mathcal{L}(A)$ con c parametri,

$$\begin{aligned} N \models \varphi(a, c) &\iff N \models \varphi(\alpha(a), \alpha(c)) \\ &\iff N \models \varphi(b, c). \end{aligned}$$

(\supseteq) Se $N \models p(b)$ allora $\text{tp}(b/A) = \text{tp}(a/A)$ e

$$f = \{\langle a_i, b_i \rangle : i < |a|\} \cup \text{Id}_A$$

è elementare con $|f| < \lambda$.

Per λ -omogeneità, esiste $\alpha \supseteq f$, $\alpha \in \text{Aut}(N)$. In particolare, $\alpha \upharpoonright A = \text{Id}_A$, e dunque

$$b \in O_N(a/A).$$

■

1083.3.2 Modello mostro

Sia T una teoria completa senza modelli finiti. Lavoriamo in $\mathcal{U} \models T$ tale che

1. \mathcal{U} è saturo;
2. $|\mathcal{U}| > |M|$ per ogni $M \models T$ con cui ci interessa lavorare.

Avvertimento: non ci siamo occupati dell'esistenza di un modello saturo di T .

Definizione 40. N è debolmente λ -omogeneo se per ogni $f : N \dashrightarrow N$ elementare e tale che $|f| < \lambda$, e per ogni $b \in N$, esiste $c \in N$ tale che $f \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è elementare.

In particolare, se N è λ -saturo, allora

- N è debolmente λ -omogeneo;
- N è λ -universale.

Terminologia e convenzioni in \mathcal{U} .

- “vale $\varphi(x)$ ”, o “ $\models \varphi(x)$ ”, se $\mathcal{U} \models \forall x \varphi(x)$;
- “ $\varphi(x)$ è consistente” se $\mathcal{U} \models \exists x \varphi(x)$;
- un tipo $p(x)$ è coerente/consistente se esiste $a \in \mathcal{U}^{|x|}$ tale che $\mathcal{U} \models p(a)$;
- un cardinale λ è piccolo se $\lambda < |\mathcal{U}|$;
- $|\mathcal{U}| = \kappa$;
- un modello è $M \preceq \mathcal{U}$, con $|M|$ piccola;
- A, B, C sono sottoinsiemi piccoli (ovvero di cardinalità piccola) di \mathcal{U} ;
- $\text{tp}(a/A) := \text{tp}_{\mathcal{U}}(a/A)$;
- $O(a/A) := O_{\mathcal{U}}(a/A)$.

Altre convenzioni

- se non altrimenti specificato, le tuple hanno lunghezza piccola;
- gli insiemi definibili hanno la forma $\varphi(\mathcal{U})$ per $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$;
- i tipi hanno parametri in insiemi piccoli
- gli insiemi tipo-definibili hanno la formula $p(\mathcal{U})$ per qualche tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, A piccolo.

Se $p(x), q(x)$ sono tipi, scriviamo

$$\begin{aligned} p(x) \rightarrow q(x) &\quad \text{per } p(\mathcal{U}) \subseteq q(\mathcal{U}); \\ p(x) \rightarrow \neg q(x) &\quad \text{per } p(\mathcal{U}) \cap q(\mathcal{U}) = \emptyset; \end{aligned}$$

Proposizione 41. Se $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, $q(x) \subseteq \mathcal{L}(B)$ sono tipi coerenti e tali che $p(x) \rightarrow \neg q(x)$, allora esistono $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ congiunzione di formule (risp. di $p(x)$ e $q(x)$) tali che

$$\models \varphi(x) \rightarrow \neg \psi(x)$$

Infatti, se $p(\mathcal{U}) \cap q(\mathcal{U}) = \emptyset$, allora

$$p(x) \cup q(x)$$

non è soddisfacibile in \mathcal{U} , e dunque (siccome \mathcal{U} è saturo), non è finitamente soddisfacibile.

Proposizione 42. Se $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U})$ e $\varphi(\mathcal{U}, b)$ è un insieme definibile, allora

$$\alpha[\varphi(\mathcal{U}, b)] = \varphi(\mathcal{U}, \alpha(b)).$$

Analogamente, se $p(x, z) \subseteq \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^{|z|}$

$$\alpha[p(\mathcal{U}, b)] = p(\mathcal{U}, \alpha(b)).$$

Definizione 43. Un insieme $D \subseteq \mathcal{U}^\lambda$ (per $\lambda < \kappa$) è invariante su $A \subseteq \mathcal{U}$ se per ogni $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$,

$$\alpha[D] = D.$$

o, equivalentemente,

$$\forall a \in D \quad O(a/A) \subseteq D.$$

Osservazione. Se $b \models \text{tp}(a/A)$, allora, per omogeneità esiste $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $\alpha(a) = b$, dunque $b \in O(a/A)$.

Quindi D è invariante se e solo se

$$\forall a \in D, \quad \forall b \in \mathcal{U}, \quad \text{tp}(a/A) = \text{tp}(b/A) \rightarrow b \in D.$$

Teorema 44. Sia $A \subseteq \mathcal{U}$. Per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, sono equivalenti:

1. esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che

$$\models \forall x \left[\psi(x) \longleftrightarrow \varphi(x) \right];$$

2. $\varphi(\mathcal{U})$ è invariante su A .

Notiamo che la condizione 1. dice che $\varphi(\mathcal{U})$ è definibile su A .

1083.4 Lezione 4

Osservazione. Sottoinsiemi finiti e cofiniti di \mathcal{U} sono sempre definibili.

Dimostrazione. (del Teorema 44) (2. \Rightarrow 1.): Siano $\varphi(x, z) \in \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^{|z|}$ tali che $\varphi(\mathcal{U}, b)$ è invariante su A .

Sia $c \models \text{tp}(b/A)$. Per omogeneità, $c = \alpha(b)$ per qualche $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$. Allora

$$\alpha[\varphi(\mathcal{U}, b)] = \varphi(\mathcal{U}, c)$$

me ma per invarianza $\alpha[\varphi(\mathcal{U}, b)] = \varphi(\mathcal{U}, b)$, e pertanto

$$\varphi(\mathcal{U}, c) = \varphi(\mathcal{U}, b).$$

Allora, se $q(z) := \text{tp}(b/A)$

$$q(z) \rightarrow \forall x \left[\varphi(x, b) \longleftrightarrow \varphi(x, z) \right].$$

Per saturazione/compattezza, esiste $\chi(z) \in q(z)$ tale che

$$\models \chi(z) \rightarrow \forall x \left[\varphi(x, b) \longleftrightarrow \varphi(x, z) \right].$$

Allora $\varphi(\mathcal{U}, b)$ è definito da

$$\exists z [\chi(z) \wedge \psi(x, z)] \in \mathcal{L}(A).$$

■

1083.4.1 Eliminazione dei quantificatori

Proposizione 45. Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Sono fatti equivalenti:

1. esiste $\psi(x)$ senza quantificatori tale che

$$\models \forall x \left[\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x) \right].$$

2. per ogni immersione parziale $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$, $a \in \text{dom}(p)^{|x|}$

$$\models \varphi(a) \longleftrightarrow \varphi(p(a)).$$

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): abbastanza ovvia.

(2. \Rightarrow 1.): Per $a \in \mathcal{U}^{|x|}$, sia

$$\text{qftp}(a) := \{ \chi(x) \in \text{tp}(a/\emptyset) \mid \chi(x) \text{ senza quantificatori} \}$$

e sia

$$\mathcal{F} := \{ q(x) \mid q(x) = \text{qftp}(a) \text{ per } a \in \varphi(\mathcal{U}) \}.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\varphi(\mathcal{U}) = \bigcup_{q \in \mathcal{F}} q(\mathcal{U}).$$

Per \subseteq è ovvio per definizione di \mathcal{F} .

Per \supseteq , sia $q(x) \in \mathcal{F}$, $q(x) = \text{qftp}(a)$ e sia $b \models q(x)$.

Allora $a_i \mapsto b_i$ è immersione parziale, dunque per ipotesi $\models \varphi(b)$.

Dunque $q(\mathcal{U}) \subseteq \varphi(\mathcal{U})$, e dunque $\varphi(\mathcal{U}) \supseteq \bigcup_{q \in \mathcal{F}} q(\mathcal{U})$.

In particolare $q(x) \rightarrow \varphi(x)$ per ogni $q(x) \in \mathcal{F}$. Allora esiste $\psi_q(x) \in q(x)$ tale che

$$\models \psi_q(x) \rightarrow \varphi(x)$$

(per compattezza/saturazione).

FINIRE DIMOSTRAZIONE

■

Definizione 46. Una teoria T ha l'eliminazione dei quantificatori (q.e.) se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ esiste $\psi(x)$ senza quantificatori tale che

$$T \models \forall x \left[\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x) \right].$$

Se T è completa e ha q.e., il tipo di $a \in \mathcal{U}^{|a|}$ è determinato di $\text{qftp}(a)$.

Teorema 47. Sia T completa senza modelli finiti. Sono fatti equivalenti:

1. T ha q.e.
2. ogni immersione parziale $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ è elementare;
3. per ogni $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ con $|p| < |\mathcal{U}|$ e $b \in \mathcal{U}$, esiste $\hat{p} \supseteq p$ immersione parziale con $|\hat{p}| < |\mathcal{U}|$ e $b \in \text{dom}(\hat{p})$;
4. per ogni $p : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ con $|p| < \omega$ e $b \in \mathcal{U}$, esiste $\hat{p} \supseteq p$ immersione parziale con $|\hat{p}| < \omega$ e $b \in \text{dom}(\hat{p})$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ è equivalente a $\psi(x)$ senza quantificatori, e p preserva $\psi(x)$.

(2. \Rightarrow 1.): p è immersione parziale, dunque p elementare, e dunque p preserva ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$.

Dal teorema precedente, $\varphi(x)$ è equivalente a $\psi(x)$ senza quantificatori, e questo vale per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$.

(2. \Rightarrow 3.): Sia p parziale e $|p| < |\mathcal{U}|$. Allora p è elementare e per omogeneità di \mathcal{U} , $p \subseteq \alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U})$. Pertanto è sufficiente porre $\hat{p} := p \cup \{\langle b, \alpha(b) \rangle\}$.

(3. \Rightarrow 2.) (traccia): Se $p_0 \subseteq p$, $|p_0| < \omega$, estendiamo p_0 ad $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U})$ per back-and-forth. Allora p_0 è elementare. ■

1083.4.2 Insiemi definibili e algebrici

Definizione 48. 1. $a \in \mathcal{U}$ è definibile su $A \subseteq \mathcal{U}$ se $\{a\}$ è definibile su A (ovvero $\varphi(\mathcal{U}) = \{a\}$ per qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$).

2. $a \in \mathcal{U}$ è algebrico su $A \subseteq \mathcal{U}$ se esiste $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $a \in \varphi(\mathcal{U})$ e $|\varphi(\mathcal{U})| < \omega$. (Una tale $\varphi(x)$ si dice algebrica).

3. La chiusura definibile di $A \subseteq \mathcal{U}$ è

$$\text{dcl}(A) = \{a \in \mathcal{U} \mid a \text{ è definibile su } A\}.$$

4. La chiusura algebrica di $A \subseteq \mathcal{U}$ è

$$\text{acl}(A) = \{a \in \mathcal{U} \mid a \text{ è algebrico su } A\}.$$

Ovviamente $\text{dcl}(A) \subseteq \text{acl}(A)$

Esempio 49. Sia $T_{\text{do}} = \text{Th}(\mathbb{Z}, <)$. Si dimostra che T_{do} è assiomatizzata da

$$\begin{aligned} & \forall x \neg(x < x) \\ & \forall x, y, z [(x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z] \\ & \forall x, y [] \end{aligned}$$

FINIRE GLI ASSIOMI.

T_{do} è completa, ma non è ω -categorica. (ad esempio $\mathbb{Z} \models T_{\text{do}}$).

Considerando invece $\mathbb{Q} \cdot \mathbb{Z} \models T_{\text{do}}$ (ovvero \mathbb{Q} copie di \mathbb{Z}): questo è un modello saturo (ovvero ω -saturo e numerabile).

Un modello mostro $\mathcal{U} \models T_{\text{do}}$ ha la forma $\mathcal{V} \cdot \mathbb{Z}$, dove $\mathcal{V} \models T_{\text{dlo}}$ è un modello mostro.

Osservazione. Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, con $|x| < \omega$.

$$|p(\mathcal{U})| \geq \omega \iff |p(\mathcal{U})| = |\mathcal{U}|.$$

In particolare, se $\varphi(x)$ non è algebrica, allora $|\varphi(\mathcal{U})| = |\mathcal{U}|$.

Infatti, sia

$$q(x) = p(x) \cup \{x \neq d \mid d \in p(\mathcal{U})\}$$

tipo con parametri in $A \cup p(\mathcal{U})$. Allora $q(x)$ è finitamente soddisfacibile.

Supponiamo $\omega \geq |p(\mathcal{U})| < |\mathcal{U}|$. Allora per saturazione $\mathcal{U} \models q(b)$ per qualche $b \in \mathcal{U}$.

Allora $\mathcal{U} \models p(b)$, ma $b \neq d$ per ogni $d \in p(\mathcal{U})$. Assurdo.

L'unica possibilità è che $|p|(\mathcal{U}) = |\mathcal{U}|$.

Proposizione 50. Per $a \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq \mathcal{U}$ sono fatti equivalenti:

1. $a \in \text{dlc}(A)$;
2. $O(a/A) = \{a\}$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia $\{a\}$ definito da $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, ossia $\varphi(\mathcal{U}) = \{a\}$.

Ma $\varphi(\mathcal{U})$ è invariante su A , e quindi $O(a/A) \subseteq \varphi(U) = \{a\}$.

(2. \Rightarrow 1.): $O(a/A) = \{a\}$ è definibile (da $x = a$) ed è invariante su A (perché è un'orbita).

Ma allora $\{a\}$ è definibile da $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, e quindi

$$a \in \text{dlc}(A)$$

■

Teorema 51. Se $a \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq \mathcal{U}$, sono fatti equivalenti:

1. $a \in \text{acl}(A)$;
2. $|O(a/A)| < \omega$;
3. $a \in M$ per ogni modello M tale che $A \subseteq M$.

Dimostrazione. (1. \Leftrightarrow 2.): è simile al caso definibile su A .

(1. \Rightarrow 3.): Se $a \in \text{acl}(A)$ allora esiste $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che

$$\models \varphi(a) \wedge \exists^{=n} x \varphi(x).$$

Allora se $M \preceq \mathcal{U}$ e $A \subseteq M$, si ha

$$M \models \exists^{=n} x \varphi(x)$$

Poiché ogni testimone di $\varphi(x)$ in M è un testimone in \mathcal{U} , $\varphi(\mathcal{U}) \subseteq M$; in particolare, $a \in M$.

(3. \Rightarrow 1.): se $a \notin \text{acl}(A)$, allora $p(x) = \text{tp}(a/A)$ è tale che $|p(\mathcal{U})| \geq \omega$, e dunque

$$|p(\mathcal{U})| = |\mathcal{U}|$$

e $p(\mathcal{U}) \setminus M \neq \emptyset$ per ogni modello $M \supseteq A$.

Se $b \in p(\mathcal{U}) \setminus M$, spostiamo

- b in a con $\alpha \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$;

- M in $\alpha[M] \preceq \mathcal{U}$

e $a = \alpha(b) \notin \alpha[M]$. ■

Corollario 52. Vale

$$\text{acl}(A) = \bigcap \{M \preceq \mathcal{U} \mid A \subseteq M\}.$$

Proposizione 53. Alcune proprietà di $\text{acl}(A)$:

1. carattere finito: se $a \in \text{acl}(A)$ allora esiste $A_0 \subseteq A$ finito tale che $a \in \text{acl}(A_0)$
2. $A \subseteq \text{acl}(A)$;
3. $A \subseteq B \rightarrow \text{acl}(A) \subseteq \text{acl}(B)$;
4. $\text{acl}(\text{acl}(A)) = \text{acl}(A)$.

Proposizione 54. Se $\beta \in \text{Aut}(\mathcal{U})$ e $A \subseteq \mathcal{U}$, allora

$$\beta[\text{acl}(A)] = \text{acl}(\beta[A]).$$

Dimostrazione. Sia $a \in \text{acl}(A)$ algebrico per la formula $\varphi(x, b)$, $b \in \mathcal{U}^{|b|}$.

Allora $|\varphi(\mathcal{U}, b)| < \omega$, e valgono

1. $\models \varphi(\beta(a), \beta(b))$;

2. $|\varphi(\mathcal{U}, \beta(b))| < \omega$

poiché β è automorfismo.

Segue che $\beta(a)$ è algebrico su $\beta(b)$, e dunque

$$\beta[\text{acl}(A)] \subseteq \text{acl}(\beta[A]).$$
■

1083.4.3 Teorie Fortemente Minimali

Ricordiamo che in ogni struttura M , gli insiemi finiti e cofiniti sono sempre definibili.

Definizione 55. Una struttura M è minimale se tutti i suoi sottoinsiemi definibili sono finiti o cofiniti.

- M è fortemente minimale se è minimale e ogni sua estensione elementare è minimale.
- Una teoria T coerente e senza modelli finiti è fortemente minimale se per ogni $\varphi(x, \bar{z}) \in \mathcal{L}$ esiste $n \in \omega$ tale che

$$T \models \forall \bar{z} \left[\exists^{\leq n} x \varphi(x, \bar{z}) \vee \exists^{\leq n} x \neg\varphi(x, \bar{z}) \right]$$

Sia ora T una teoria completa con modello mostro \mathcal{U} .

Definizione 56. Sia $a \in \mathcal{U}$, $B \subseteq \mathcal{U}$. Allora a è indipendente da B se $a \notin \text{acl}(B)$.

B è un insieme indipendente se per ogni $b \in B$, b è indipendente da $B \setminus \{b\}$.

1083.5 Lezione 5

Proposizione 57. $\text{Th}(M)$ è fortemente minimale sse M è fortemente minimale.

Esempio 58. Sia $L = \{E\}$, con E relazione binaria. Sia M numerabile e E interpretata come relazione di equivalenza, tale che per ogni $n \in \omega \setminus \{0\}$, M contiene esattamente una classe di equivalenza di cardinalità n , e nessuna classe di cardinalità ω .

Allora M è minimale (e inoltre $\text{Th}(M)$ ha q.e.) e ammette $N \succeq M$ dove E ha una classe di equivalenza infinita (e non cofinita).

Lavoriamo in T completa, fortemente minimale, con modello mostro \mathcal{U} .

Esempio 59. Sia \mathbb{K} un campo, e sia $\mathcal{L}_{\mathbb{K}} = \{+, -, 0, \{\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{K}}\}$.

Si assiomatizza un campo vettoriale V su \mathbb{K} , dove tutto è interpretato nel modo usuale (i λ sono funzioni unarie che rappresentano il prodotto per scalari): questo dà luogo a $T_{V\mathbb{K}}$.

È possibile vedere che $T_{V\mathbb{K}}$:

- è completa;
- ha q.e.;

e pertanto:

- i termini sono combinazioni lineari $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$;
- le formule atomiche sono uguaglianze tra combinazioni lineari.

Per q.e., $T_{V\mathbb{K}}$ è fortemente minimale.

Esempio 60. Sia $\mathcal{L}_{\text{rng}} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$. Allora ACF è la \mathcal{L}_{rng} -teoria che include:

- gli assiomi di gruppo abeliano;

- gli assiomi di monoide commutativo;
- gli assiomi di campo
- assiomi per la chiusura algebrica.

Sia $\chi_p \equiv [1 + 1 + \dots + 1 = 0]$, dove 1 è ripetuto p volte.

- per p primo, sia $\text{ACF}_p := \text{ACF} \cup \{\chi_p\}$;
- $\text{ACF}_0 := \text{ACF} \cup \{\neg\chi_n \mid n \in \omega\}$.

È possibile mostrare che ACF_p e ACF_0 sono complete e hanno q.e.

Allora:

- le formule atomiche con parametri sono equazioni polinomiali;
- una formula atomica con una variabile e parametri in A è equivalente a $p(x) = 0$, dove $p(x)$ è un polinomio nel sottocampo generato da A .

Quindi:

- le formule atomiche con parametri e una solo variabile libera definiscono insiemi finiti;
- le formule quantifier-free con una variabile e parametri definiscono insiemi finiti o cofiniti.

Per q.e., ACF_p e ACF_0 sono fortemente minimali.

FINIRE CON LE SLIDES

Lemma 61. (Lemma dello scambio). Siano $B \subseteq \mathcal{U}$, $a, b \in \mathcal{U} \setminus \text{acl}(B)$. Allora

$$b \in \text{acl}(aB) \iff a \in \text{acl}(bB)$$

dove con $aB := B \cup \{a\}$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia $a \in \text{acl}(bB)$ e $b \notin \text{acl}(aB)$.

Sia $\varphi(x, y) \in \mathcal{L}(B)$ tale che

$$\models \varphi(a, b) \wedge \exists^{\leq n} x \varphi(x, b)$$

per qualche $n \in \omega \setminus \{0\}$.

Consideriamo ora

$$\psi(a, y) : \varphi(a, y) \wedge \exists^{\leq n} x \varphi(x, y)$$

con $\psi(a, y) \in \mathcal{L}(aB)$.

Siccome $b \notin \text{acl}(aB)$, allora $|\psi(a, \mathcal{U})| \geq \omega$, e dunque

$$|\psi(a, \mathcal{U})| = |\mathcal{U}|.$$

Inoltre, per forte minimalità, $|\neg\psi(a, \mathcal{U})| < \omega$.

Sia M un modello, $B \subseteq M$: allora $M \cap \psi(a, \mathcal{U}) \neq \emptyset$: sia quindi $c \in M \cap \psi(a, \mathcal{U})$. Allora

$$\models \psi(a, c) \wedge \exists^{\leq n} x \psi(x, c)$$

ossia $a \in \text{acl}(cB)$.

Dunque $M \supseteq B$ implica $a \in M$. Per la caratterizzazione, $a \in \text{acl}(B)$. Assurdo. ■

Definizione 62. Se $B \subseteq C \subseteq \mathcal{U}$, B è una base di C se

1. B è indipendente;
2. $C \subseteq \text{acl}(B)$ (o, equivalentemente, se $\text{acl}(B) = \text{acl}(C)$).

Proposizione 63. Se B è un insieme indipendente e $a \notin \text{acl}(B)$, allora

$$B \cup \{a\}$$

è ancora un insieme indipendente.

Corollario 64. Se $B \subseteq C \subseteq \mathcal{U}$, sono fatti equivalenti:

1. B è una base di C ;
2. B è un sottoinsieme indipendente massimale di C .

Teorema 65. (basi di sottoinsiemi di \mathcal{U}). Sia $C \subseteq \mathcal{U}$. Allora

1. se $B \subseteq C$ è indipendente, allora B si può estendere ad una base di C ;
2. se A e B sono basi di C , allora $|A| = |B|$.

Definizione 66. Sia $C \subseteq \mathcal{U}$ algebricamente chiuso (ossia $C = \text{acl}(C)$) e sia A una base di C .

Allora $\dim(C) := |A|$ è la dimensione di C

Definizione 67. Se $a \notin \text{acl}(A)$, a si dice trascendente su A .

In una struttura fortemente minimale, tutti gli elementi trascendenti hanno lo stesso tipo su A .

Teorema 68. Sia $f : \mathcal{U} \dashrightarrow \mathcal{U}$ una mappa elementare, e siano

$$b \notin \text{acl}(\text{dom}(f)); \quad c \notin \text{acl}(\text{rng}(f)).$$

Allora $f \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è elementare.

Dimostrazione. Sia a una enumerazione di $\text{dom}(f)$ e sia $\varphi(x, a) \in \mathcal{L}(a)$ (con $|x| = 1$).

Mostriamo $\models \varphi(b, a) \longleftrightarrow \varphi(c, f(a))$.

- Caso 1: $|\varphi(\mathcal{U}, a)| < \omega$. Allora $|\varphi(\mathcal{U}, f(a))| < \omega$.

Poiché $b \notin \text{acl}(A)$ e $c \notin \text{acl}(f(a))$,

$$\models \neg \varphi(b, a) \wedge \neg \varphi(c, f(a)).$$

- Caso 2: FINIRE DALLE SLIDE ■

Corollario 69. Ogni biiezione fra sottoinsiemi indipendenti di \mathcal{U} è elementare.

Ricordiamo: in qualsiasi teoria T , se $M \models T$ e $A \subseteq M$, allora $\text{acl}(A) \subseteq M$. In particolare, ciascun modello è algebricamente chiuso.

Se T è fortemente minimale, questo implica che ogni modello ha una dimensione.

Teorema 70. Siano $M, N \preceq \mathcal{U}$ tali che $\dim(M) = \dim(N)$. Allora $M \cong N$.

COMPLETARE CON LA DIMOSTRAZIONE

Se T è fortemente minimale e $\lambda > |\mathcal{L}|$, allora T è λ -categorica.

Infatti: per $A \subseteq \mathcal{U}$, si ha $|\text{acl}(A)| \leq |\mathcal{L}(A)| + \omega$ poiché

- ci sono al più $|\mathcal{L}(A)| + \omega$ formule
- ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ ha al più finite soluzioni.

Se $|M| = \lambda > |\mathcal{L}|$, allora una base deve avere cardinalità λ . Ma ogni due modelli di dimensione λ sono isomorfi.

Morale: i modelli di una teoria fortemente minimale sono determinati a meno di isomorfismi dalla loro dimensione, dunque dalla loro cardinalità se la cardinalità è strettamente maggiore della cardinalità del linguaggio.

Teorema 71. Sia N un modello, $|N| \geq |\mathcal{L}|$. Sono fatti equivalenti:

1. N è saturo;
2. $\dim(N) = |N|$.

Vedi questo sito web: <https://www.forkinganddividing.com/>.

1084 Scuola Estiva di Logica [CORSO]

1084.1 Corsi

- Teoria dei modelli
- Teoria della ricorsività

1084.2 Lectio Magistralis

- Lectio Magistralis
- In lode della quasi verità: Logica di Lukasiewicz e Algebre di Boole Perturbate

1084.3 Talks Informali

- Reverse Mathematics
- Defeasible Logic
- Potenzialismo e Logica Modale

- Effectivity on Polish spaces

1085 Teoria della ricorsività [CORSO SEL2025]

1085.1 Lezione 1

La “Teoria della ricorsività” è stata rinominata “Teoria della computabilità” all’inizio degli anni ’90.

Definizione 1. *La Teoria della Computabilità è lo studio sistematico della complessità dei problemi matematici.*

Struttura del corso

1. Due modelli di computazione e la loro equivalenza.
2. Dalla tesi di Church-Turing alla complessità astratta degli insiemi.
3. Esplorando l’universo di Turing.
4. (Computable Structure Theory.)

1085.1.1 Notazione

- ω denota l’insieme dei numeri naturali.
- Con \vec{x} si denotano le k -uple di numeri naturali (x_1, \dots, x_k)
- Si consentono le funzioni parziali. Si scriverà $f(x) \uparrow$ per scrivere che f non è definita su x . Viceversa, $f(x) \downarrow$ significa che $f(x) = y$.

1085.1.2 Modelli di computazione

Lo scopo di un modello di computazione è quello di catturare la classe delle funzioni computabili “intuitivi”.

1085.1.3 Funzioni parziali ricorsive

Si formalizza la computabilità dal basso verso l’alto:

- si inizia da alcune funzioni molto semplici che indiscutibilmente sono computabili;
- si introducono degli operatori che permettono di costruire funzioni più complesse preservando la computabilità.

Definizione 2. *Le funzioni di base sono:*

- la costante 0 (una funzione 0-aria);
- la funzione zero $\text{Zero}(x) = 0$ per ogni x ;
- la funzione successore $S(x)$ che associa ad x il suo successore in ω ;
- le proiezioni $P_k^i(x_1, \dots, x_k) = x_i$ per ogni $1 \leq i \leq k$;

Definizione 3. Una funzione k -aria $f(\vec{x})$ è ottenuta per composizione da una funzione n -aria $g(\vec{y})$ e n funzioni k -arie $h_1(\vec{x}), \dots, h_n(\vec{x})$ se, per ogni tupla \vec{x} :

$$f(\vec{x}) = g(h_1(\vec{x}), \dots, h_n(\vec{x})).$$

Definizione 4. Una funzione $(k+1)$ -aria $f(\vec{x}, y)$ è ottenuta per ricorsione primitiva da una funzione k -aria $g(\vec{x})$ e una funzione $(k+2)$ -aria $h(\vec{x}, y, z)$ se per ogni tupla (\vec{x}, y) :

$$\begin{cases} f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x}); \\ f(\vec{x}, y + 1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y)). \end{cases}$$

Definizione 5. Una funzione k -aria f è primitiva ricorsiva se [...]

Bisogna capire adesso se la classe delle funzioni primitive ricorsive è adatta a descrivere le funzioni intuitivamente computabili. Per farlo, si deve guardare che le funzioni che siamo certi essere computabili ne fanno parte.

Proposizione 6. Alcuni fatti:

- Tutti i numeri naturali (come funzioni 0-arie) sono primitivi ricorsivi.
- Tutte le funzioni costanti a n , per $n \in \omega$, sono ricorsive primitive.
- L'addizione $f(x, y) = x + y$ è ricorsiva primitiva.
- Moltiplicazione, elevamento a potenza e tetrazione sono primitive ricorsive.
- Le iperoperazioni sono ricorsive primitive.
- La funzione segno (e il suo complemento) è ricorsiva primitiva:

$$\text{sng}(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0. \end{cases}$$

Definizione 7. Funzioni e relazioni primitive ricorsive.

Proposizione 8. Le relazioni “ \leq ” e “ $=$ ” sono ricorsive primitive.

Proposizione 9. La classe delle relazioni primitive ricorsive sono chiuse per unione (congiunzione), intersezione (disgiunzione) e complementazione.

Proposizione 10. Se f è una funzione definita a tratti da funzioni ricorsive primitive su relazioni ricorsive primitive, allora f è primitiva ricorsiva.

Proposizione 11. Tutti gli insiemi finiti e cofiniti sono primitivi ricorsivi.

Proposizione 12. Ogni funzione ricorsiva primitiva è totale.

Quindi alcune funzioni “naturali” non sono ricorsive primitive. Esempio semplice è la sottrazione:

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definizione 13. Una funzione k -aria $f(\vec{x})$ è ottenuta per minimizzazione da una funzione $(k+1)$ -aria $g(\vec{x}, y)$ se

$$f(\vec{x}) = \begin{cases} y, & \text{se } g(\vec{x}, y) = 0 \text{ e } \forall z < y \ (g(\vec{x}, z) \downarrow \neq 0) \\ \uparrow, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e si scrive

$$f(\vec{x}) = \mu_z \ (g(\vec{x}, z) = 0).$$

Definizione 14. Una funzione k -aria $f(\vec{x})$ è ricorsiva parziale se esiste una sequenza finita di funzioni (f_0, \dots, f_m) tali che, per ogni $i \leq m$:

- f_i è una funzione di base, oppure è ottenuta [...]

Ogni funzione primitiva ricorsiva è anche ricorsiva parziale. Il viceversa non vale (come mostra ogni funzione computabile non totale).

Esempio 15. La funzione di sottrazione è ricorsiva parziale:

$$f(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Questo porta ad una tesi (a prima vista incredibile):

$$\text{Ogni funzione intuitivamente computabile è parziale ricorsiva} \quad (\mathbf{T})$$

1085.2 Lezione 2

1085.2.1 Turing's computability

Le macchine di Turing possono essere descritte come: *macchine che assomigliano agli esseri umani quando questi si comportano come macchine*.

Il modello di computazione è dato da due ingredienti:

- un nastro, diviso in celle. Il nastro è discreto e infinito in entrambe le direzioni (order-isomorphic a \mathbb{Z});
- una testina, che ad ogni passo scansiona esattamente una cella e, in base allo stato, può fare due azioni:
 - muoversi a destra o a sinistra di una cella;
 - scrivere un simbolo sulla cella scansionata.

Formalmente sono necessari tre componenti:

- un alfabeto finito Σ di simboli (qui prendiamo $\Sigma = \{0, 1\}$);
- un insieme finito $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$ di stati;
- un insieme di operazioni $O = \{L, R\} \cup \Sigma = \{0, 1, L, R\}$, dove
 - L “la testina si muove a sinistra”

- R “la testina si muove a destra”;
- per ogni $\sigma \in \Sigma$, “la testina scrive σ nella cella”.

Un istruzione è una quadrupla $(q_i, s, 0, q_j) \in Q \times \Sigma \times O \times Q$, interpretato come: se la testina è nello stato q_i e scansiona il simbolo s , allora fa l’operazione o e va allo stato q_j .

Un programma è un insieme finito di istruzioni, con la convenzione che tutte abbiano le prime due coordinate diverse.

Una macchina di Turing M applica il programma ad un nastro, con queste regole:

1. M inizia nello stato q_0 ;
2. ad ogni passo scansiona esattamente una cella;
3. se M è nello stato q_i scansionando s , esegue l’unica istruzione che inizia per (q_i, s) , se esiste;
4. se nessuna istruzione si applica, M halts.

Una configurazione di M è una tripla

(contenuto del nastro, cellula scansionata, stato)

e ogni istruzione può essere visto come una funzione trasformando una configurazione in un’altra.

NOTAZIONE...

Proposizione 16. Esiste una macchina di Turing che diverge (ovvero che non halts mai) su ogni nastro di input.

Proposizione 17. Esiste una macchina di Turing M tale che

$$0^\infty 1^n 0^\infty \rightarrow_M 0^\infty 1^{2n} 0^\infty$$

Definizione 18. Una funzione k -aria $f(\vec{x})$ è *Turing-computabile* se esiste una macchina di Turing M tale che

$$0^\infty 1^{x_1+1} 0 1^{x_2+1} 0 \dots 0 1^{x_k+1} 0^\infty \longrightarrow_M 0^\infty 1^y 0^\infty$$

se e solo se $f(x_1, \dots, x_k) = y$.

Proposizione 19. La funzione $S(x) = x + 1$ è Turing-computabile

Anche la funzione costante 0 è Turing-computabile.

Proposizione 20. L’addizione è Turing-computabile.

Se una funzione è Turing-computabile, ci sono molti modi per computarla.

Proposizione 21. Se una funzione f è Turing-computabile, allora esistono infinite macchine di Turing distinte che computa f .

Scriveremo $M \approx M'$ se M e M' computano la stessa funzione.

Proposizione 22. Le seguenti sono Turing-computabili:

- tutte le proiezioni $P_k^i(x_1, \dots, x_k) = x_i$;

- ogni funzione costante
- la relazione di uguaglianza (tramite funzione caratteristica)

Teorema 23. Una funzione f è Turing-computabile sse f è ricorsiva parziale.

Lemma 24. Ogni funzione parziale ricorsiva è Turing-computabile

Dimostrazione. Tutte le funzioni di base sono Turing-computabili. Resta da dimostrare che gli operatori di composizione, ricorsione e minimizzazione possono essere simulati dalle macchine di Turing.

- Composizione: si supponga $f = g \circ h$, con g e h sono Turing-computable dalle macchine T_g , T_h . L'idea è quella di costruire T_f eseguendo T_h e poi T_g . Ci sono due problemi:
 - c'è una differenza nel modo in cui sono codificati gli input rispetto agli output; *easy fix* con una subroutine $T_{\text{out} \rightarrow \text{inp}}$;
 - collisione degli stati: sia T_h e T_g hanno stati chiamati q_0, q_1, \dots ; *shiftare* gli stati non è sufficiente, in quanto può darsi che la macchina di Turing T_h non termini nel suo stato dal numero più alto; è sufficiente “aggiungere” lo stato di arresto della macchina T_h .
- AGGIUNGERE DALLE NOTE I DETTAGLI.
- Minimizzazione e ricorsione: ci fidiamo. ■

Lemma 25. Ogni funzione Turing-computabile è parziale ricorsiva

Dimostrazione. L'idea base è che si può considerare ciascuna componente di una macchina di Turing come un numero naturale, e poi vedere l'intera computazione come un predicato aritmetico.

Si costruirà una funzione di codifica γ per induzione.

Sia o un'operazione della macchina di Turing:

$$\gamma(o) = \begin{cases} 1, & o = 0, \\ 2, & o = 1, \\ 3, & o = L, \\ 4, & o = R. \end{cases}$$

SLIDE 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67 ■

Osservazione. Questa dimostrazione ci ha fornito la [Forma Normale di Kleene](#).

La classe delle funzioni computabili è ottenibile in molti altri modelli computazionali:

- macchine di Turing modificate
- λ -calcolo
- macchine a registri
- diagrammi di flussi

- Java, Python, C

1085.2.2 Tesi di Church-Turing

La classe delle funzioni intuitivamente computabile coincide con la classe delle funzioni computabili in ciascuno dei modelli (equivalenti) di computazione. (CTT)

1085.3 Lezione 3

1085.3.1 Conseguenze di CTT

Osservazione. Esiste una funzione iniettiva γ che assenga a ciascuna macchina di Turing un codice $e \in \omega$, con codifica e decodifica ricorsive primitive. In più, γ può essere scelta per essere una biiezione.

Teorema 26. Esiste una enumerazione computabile $(\varphi_e)_{e \in \omega}$ di tutte le funzioni computabili.

D'ora in avanti φ_e è la funzione computabile dalla macchina di Turing con codice e .

Teorema 27. Esiste una funzione computabile binaria h tale che, per ogni e e x :

$$h(e, x) = \varphi_e(x).$$

Dimostrazione. Ponendo

$$h(e, x) := U(\mu_y (T(e, x, y)))$$
■

Una funzione come h si dice funzione universale o macchina universale. Il teorema afferma che *i computer esistono*.

Teorema 28. Esistono funzioni $f : \omega \rightarrow \omega$ che non sono computabili

Dimostrazione. Il risultato segue banalmente da ragioni di cardinalità. Si dà, per diagonalizzazione, una funzione esplicitamente non computabile:

$$f(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1, & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$
■

Il teorema fornisce una “risposta” all’halting problem, un problema posto da Hilbert e Ackermann nel 1928:

Dato un programma P e un input x , P halt su x o andrà avanti all’infinito?

che risulta essere indecidibile (altrimenti f come definita prima sarebbe computabile).

Provando ad utilizzare nuovamente la diagonalizzazione, si definisca

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi_x(x) + 1, & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

che è computabile. Qui la diagonalizzazione “fallisce”, poiché $\varphi_x(x) \cong \psi(x)$ ogni qualvolta che $\varphi_x(x) \uparrow$, e peranto la parzialità delle funzioni computabili è una “difesa” contro la diagonalizzazione.

1085.3.2 Teorema di Punto fisso di Kleene

Teorema 29. (Teorema di Punto fisso di Kleene) Per ogni funzione computabile f esiste un indice e tale che e e $f(e)$ computano la stessa funzione:

$$\varphi_e \cong \varphi_{f(e)}.$$

Conseguenze del Teorema

Osservazione. Siccome per ogni funzione computabile ci sono infiniti programmi che lo computano, questo dà luogo ad un problema:

Dati due programmi P_1 e P_2 , decidere se computano la stessa funzione.

Il prossimo risultato ci dirà che questo è un problema impossibile.

Teorema 30. (Rice) Sia \mathcal{I} una famiglia di funzioni computabili t.c. $\mathcal{I} \neq \emptyset$ e \mathcal{I} non è l'intero insieme delle funzioni computabili.

Allora $A = \{e \mid \varphi_e \in \mathcal{I}\}$ non è computabile.

Dimostrazione. Se per assurdo A è computabile, siano a, b tale che

$$\varphi_a \in \mathcal{I}, \quad \varphi_b \notin \mathcal{I}.$$

Si definisca la funzione computabile

$$f(x) = \begin{cases} b, & \text{if } x \in A \\ a, & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

Per il teorema di punto fisso, esiste n tale che $\varphi_n = \varphi_{f(n)}$. Dunque

$$\varphi_n \in \mathcal{I} \longleftrightarrow \varphi_{f(n)} \in \mathcal{I} \longleftrightarrow f(n) = a \longleftrightarrow n \notin A \longleftrightarrow \varphi_n \notin \mathcal{I}.$$

■

Tramite questo teorema è possibile dimostra che i seguenti insiemi sono non computabili:

- $\text{Tot} := \{e \mid \varphi_e \text{ è totale}\};$
- $\text{Fin} := \{e \mid \text{dom}(\varphi_e) \text{ è finito}\}$
- $\{e \mid \varphi_e \cong f\}$

Teorema 31. (Teorema dei Parametri di Kleene) Esiste una funzione iniettiva computabile $s : \omega \times \omega \rightarrow \omega$ tale che

$$\varphi_{s(e,x)}(y) = \varphi_e(x, y) \quad \text{per ogni } e, x, y.$$

Definizione 32. Una quine è un programma che come output ha il suo stesso codice sorgente.

Teorema 33. Le quine esistono, ovvero esiste una funzione computabile totale φ_e tale che, per ogni input, φ_e ha come output e .

Dimostrazione. Sia $f(x, y) = x$. Questa funzione è computabile, e quindi $f = \varphi_m$. Per il teorema dei parametri

$$\varphi_m(x, y) = \varphi_{s(m, x)}(y).$$

Applicando il teorema di punto fisso: esiste e con

$$\varphi_e(y) = \varphi_{s(m, e)}(y) = f(e, y) = e.$$

per ogni y . ■

Dimostrazione del Teorema di Punto Fisso

Dimostrazione. (del Teorema 29) Si definisca

$$g(x, y) = \begin{cases} \varphi_{f(\varphi_x(x))}(y), & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poiché g è computabile, esiste e tale che

$$\varphi_e(x, y) = g(x, y)$$

e, per il Teorema dei Parametri, esiste s computabile tale che

$$\varphi_{s(e, x)}(y) = g(x, y) = \begin{cases} \varphi_{f(\varphi_x(x))}(y), & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Inoltre, fissato e , la funzione $t(x) = s(e, x)$ è computabile e totale, e pertanto vi è m tale che

$$\varphi_{\varphi_m}(y) = g(x, y) = \begin{cases} \varphi_{f(\varphi_x(x))}(y), & \text{se } \varphi_x(x) \downarrow \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dunque φ_m converge ovunque, ed in particolare $\varphi_m(m) \downarrow$ e dunque per ogni y :

$$\varphi_{\varphi_m(m)}(y) = \varphi_{f(\varphi_m(m))}(y). ■$$

1085.3.3 Indecidibilità

L'indecidibilità non è semplicemente legato alla logica. Alcuni famosi esempi:

- il problema della parola per gruppi finitamente generati;
- decidere se una equazione diofantea ha soluzioni;
- generalizzazione della congettura di Collatz;
- determinare se un livello di *Super Mario* è risolvibile.

La maggior parte delle prove di indecidibilità procedono riducendo il problema all'halting problem.

Busy Beaver Dato un numero fissato di stati, qual è il massimo numero di passi che una macchina di Turing può fare prima di fermarsi?

Formalmente, la funzione *busy beaver* $BB(n)$ è definita in maniera tale che: ogni macchina di Turing a n -stati che esegue per più di $BB(n)$ passi non si fermerà mai.

Teorema 34. La funzione BB non è computabile.

Dimostrazione. Se lo fosse, si potrebbe risolvere l'halting problem. ■

Esempio 35. Si consideri la Congettura di Goldbach (GC). Esiste una macchina di Turing \mathbf{T} con 27 stati che elenca, uno alla volta, tutti i numeri pari esprimibili come somma di due primi. Pertanto \mathbf{T} si ferma sse la congettura di Goldbach è falsa.

Questo implica che:

- se GC è falsa, allora $BB(27)$ è estremo superiore del più grande controesempio.

Il problema è che BB cresce più di ogni funzione computabile. Alcuni risultati recenti:

- $BB(5) = 47\,176\,870$.
- Il miglior lower bound di $BB(6)$ è

$$^{9_2}2^2$$

In particolare, BB cresce così velocemente che ZFC non può determinare praticamente nessun suo valore.

1085.3.4 Computable enumeration

L'indecidibilità non è la fine della storia. Si sono sviluppate delle gerarchie dell'impossibilità.

Si considerino i seguenti insiemi

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{x \in \mathbb{N} \mid \pi \text{ ha un blocco di almeno } x \text{ consecutivi } 7 \text{ nella sua espansione decimale}\} \\ S_1 &:= \{x \in \mathbb{N} \mid \pi \text{ ha un blocco di esattamente } x \text{ consecutivi } 7 \text{ nella sua espansione decimale}\} \end{aligned}$$

S_0 è computabile: è finito, oppure è tutto \mathbb{N} (e non importa che non lo sappiamo ancora).

Per S_1 , invece, non esiste (ancora) un algoritmo in grado di trovare patterne nell'espansione decimale di π . Viceversa, però, esiste un modo per capire se un numero è in S_1 .

Definizione 36. Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ è *computabilmente enumerabile* (c.e.) se esiste una funzione computabile f tale che $A = \text{rng}(f)$.

Proposizione 37. L'insieme dei teoremi dell'Aritmetica di Peano è c.e.

Esiste ovviamente un modo per enumerare computabilmente tutti i c.e.:

$$W_e := \text{rng}(\varphi_e).$$

Teorema 38. (Teorema di Post) Un insieme P è computabile se e solo se P e $\mathbb{N} \setminus P$ sono c.e.

Proposizione 39. Un insieme infinito A è computabile sse è il range di una funzione computabile strettamente crescente.

Proposizione 40. Se A, B sono c.e., allora anche $A \cup B, A \cap B$ sono c.e.

Proposizione 41. Gli insiemi c.e. non sono chiusi per complemento.

1085.4 Lezione 4

Proposizione 42. Un insieme A è c.e. se e solose esiste una funzione computabile parziale g tale che $A = \text{dom}(g)$.

Definizione 43. Si definisce l'insieme di arresto K :

$$K := \{e \mid \varphi_e(e) \downarrow\} = \{e \mid e \in W_e\}$$

Teorema 44. K è un insieme c.e. non computabile.

Dimostrazione. K è chiaramente c.e., in quanto ogni volta che $\varphi_i(i)$ converge, si inserisce i in K .

Per assurdo, si supponga K computabile. Allora \overline{K} è c.e., e pertanto $\overline{K} = W_e$. Ma allora

$$e \in \overline{K} \longleftrightarrow e \in W_e \longleftrightarrow e \in K$$

Assurdo. ■

1085.4.1 Riducibilità *many-one*.

Definizione 45. Siano $A, B \subseteq \mathbb{N}$. A è many-one riducibile (o *m-riducibile*) a B (e si scrive $A \leq_m B$) se esiste una funzione computabile totale f tale che

$$x \in A \iff f(x) \in B.$$

Se $A \leq_m B$ e $B \leq_m A$, allora A e B sono *m-equivalenti*, e si scrive $A \equiv_m B$.

Osservazione. È immediato verificare che \leq_m è diflessiva e transitiva, e quindi \equiv_m è una relazione di equivalenza.

Definizione 46. Le classi di equivalenza sotto la *m-equivalenza* sono chiamati m-gradi: per ogni $A \subseteq \omega$, si scrive

$$\mathbf{a}_m := \deg_m(A) := \{X \subseteq \omega \mid X \equiv_m A\}.$$

Si scrive (D_m, \leq_m) per la struttura degli *m-gradi* ordinati dalla *m-riducibilità*.

Intuitivamente, ogni grado è la collezione di tutti gli insiemi che hanno la stessa complessità computazionale (modulo la *m-riduzione*).

Definizione 47. Un *m-grado* d_m è chiamato c.e. se contiene un insieme c.e.; è computabile se contiene un insieme computabile.

Proposizione 48. Esiste un *m-grado* minimo, che consiste esattamente di tutti gli insiemi computabili (tranne \emptyset e ω); questo si denota con $\mathbf{0}_m$.

Si scrive invece $\mathbf{0}'_m$ per il m -grado che contiene K (insieme di arresto).

Tramite argomenti di cardinalità, non può esistere un m -grado massimo.

Definizione 49. Un insieme A è m -completo se è c.e. e ogni insieme c.e. si m -riduce ad A .

Tali insiemi esistono:

Proposizione 50. K è m -completo.

Dimostrazione. Sia A un insieme c.e. arbitrario. La funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \uparrow, & \text{altrimenti;} \end{cases}$$

è ricorsiva.

Per il Teorema dei parametri esiste g computabile tale che

$$\varphi_{g(x)}(y) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ \uparrow, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Se $x \in A$, allora $\varphi_{g(x)}(g(x))$, e pertanto $g(x) \in K$. Se $x \notin A$, allora $\varphi_{g(x)}(g(x)) \uparrow$, e dunque $g(x) \notin K$.

Pertanto $A \leq_m K$, come richiesto. ■

Il problema di Post è il seguente: si è dimostrato che $\mathbf{0}_m < \mathbf{0}'_m$; esiste qualcosa in mezzo?

Definizione 51. Un insieme c.e. A è detto creativo se esiste una funzione computabile (chiamata la funzione creativa di A) tale che

$$W_e \subseteq \overline{A} \quad \rightarrow \quad f(e) \in \overline{A} \setminus W_e.$$

In altre parole, quando un indice e descrive un insieme c.e. completamente contenuto in \overline{A} , la funzione f può effettivamente produrre un testimone in \overline{A} che non è catturato da W_e .

Osservazione. K è un insieme creativo, la sua funzione creativa è l'identità.

Teorema 52. Siano C, A degli insiemi c.e. tali che $C \leq_m A$. Allora C è creativo se e solo se A è creativo.

Corollario 53. Ogni insieme m -completo è creativo.

Definizione 54. Insiemi che non contengono nessun insieme c.e. infinito sono chiamati immuni.

Intuitivamente, gli insiemi immuni nascondono la loro informazione talmente bene che solo una porzione trascurabile del loro complemento può essere catturata da un algoritmo.

Definizione 55. Un insieme $S \subseteq \mathbb{N}$ si dice semplice se

- S incontra ogni insieme c.e. infinito (ovvero se W_e è infinito allora $S \cap W_e \neq \emptyset$);
- S è co-infinito (ovvero $\mathbb{N} \subseteq S$ è infinito).

Proposizione 56. Il complemento di ogni insieme semplice è immune, quindi gli insiemi semplici non possono essere creativi. Inoltre gli insiemi semplici non possono essere computabili.

Teorema 57. Esiste un insieme semplice. Pertanto, esiste un grado \mathbf{d}_m tale che

$$\mathbf{0}_m < \mathbf{d}_m < \mathbf{0}'_m.$$

Dimostrazione. Si vuole costruire un insieme semplice S , che per ogni $e \in \omega$ soddisfi:

\mathcal{P}_e : se W_e è infinito, allora $S \cap W_e \neq \emptyset$;

\mathcal{N}_e : al massimo e elementi di S sono minori di $2e$.

Se tutti questi requisiti sono soddisfatti, allora S è semplice.

Si costruisce S ricorsivamente:

- Passo 0: Sia $S = \emptyset$;
- Passo $s + 1 = \mathbf{J}(e, t)^{[317]}$: se \mathcal{P}_e è ancora insoddisfatto, si cerchi per qualche $z > 2e$, con z enumerato in W_e in meno di t passi.
 - Se tale z esiste, se numeri z in S e dichiara \mathcal{P}_e soddisfatto.
 - Altrimenti, non fare nulla e procedi al passo successivo.

Resta da verificare che:

- ogni W_e infinito contribuisce ad S (quindi \mathcal{P}_e è soddisfatto);
- la condizione \mathcal{N}_e è preservata. ■

1085.4.2 Teorema di Gödel

Il linguaggio dell'aritmetica è sufficientemente ricco per rappresentare la computabilità. In particolare, esiste una formula $\varphi^K(x)$ tale che

$$\mathbb{N} \models \varphi^K(n) \iff n \in K.$$

Teorema 58. L'insieme $\text{Th}(\mathbb{N})$ è produttivo (quando si identificano le formule con i loro codici).

Un corollario di questo è il thm di Gödel. (VEDI SLIDE)

1086 Reverse Mathematics [CORSO SEL2025]

1086.1 Introduzione

Partiamo dal Teorema di Pitagora

Teorema 1. Dato un triangolo rettangolo di lati a, b, c , si ha $a^2 + b^2 = c^2$.

Questo è dimostrato a partire dagli assiomi di Euclide.

L'idea generale della matematica è risolvere questo problema:

$$\text{Assiomi} \rightarrow \text{Teoremi}$$

L'obiettivo della Reverse Mathematics è fare il processo inverso, ovvero rispondere a:

(D1) Dato un teorema φ , trovare gli assiomi minimi/minimali per dimostrarlo.

Una situazione ottimale è che esiste un gruppo di assiomi minimo equivalente al teorema preso in questione. Questo può succedere per teoremi diversi: ad esempio, il Teorema di Pitagora è equivalente ad un gruppo degli assiomi di Euclide, e questo gruppo è equivalente al Teorema di Euclide, quindi Pitagora è equivalente ad Euclide.

Quindi, la seconda domanda è:

(D2) Dato un teorema φ , trovare i teoremi equivalenti.

Formalmente, fissato un teorema A , si fissa una teoria base tale che $T \not\vdash A$. Si cerca un insieme di assiomi S tali che

$$T + S \vdash A, \quad T + A \vdash S$$

e quindi $T \vdash T \longleftrightarrow S$.

1086.2 Aritmetica del second'ordine \mathcal{L}_2 e Z_2 .

Si consideri il linguaggio del prim'ordine

$$\mathcal{L}_2 := \{0, S, +, \cdot, =, \leq, \in\}$$

con due tipi di variabili:

- variabili numeriche: x, y, z, n, m, \dots
- variabili insiemi: X, Y, Z .

Assiomi:

- assiomi di base (ovvero l'Aritmetica di Robinson)

$$0 + x = x, \quad 0 \cdot x = 0, \quad 0 \leq x, \quad x + y = y + x$$

- assioma di induzione

$$\text{Ind } 0 \in X \wedge \forall n[n \in X \rightarrow S(n) \in X] \rightarrow \forall n(n \in X)$$

- schema di induzione: per ogni formula $\varphi \in \mathcal{L}_2$

$$\text{Ind - Schema } \varphi(0) \wedge \forall n[\varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n))] \rightarrow \forall n \varphi(n).$$

- schema di comprensione: per ogni formula $\varphi \in \mathcal{L}_2$

$$\text{CA } \exists X \forall n [n \in X \longleftrightarrow \varphi(n)]$$

Esempio 2. Gli assiomi di base + l'assioma di comprensione dimostrano che l'assioma di induzione è equivalente allora schema di induzione

Quindi Z_2 è dato dagli assiomi di base + CA + Ind. Questa teoria però è troppo forte, quindi si considerano, per un insieme $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_2$, gli assiomi:

$$\Gamma - \text{Ind } \varphi(0) \wedge \forall n[\varphi(n) \rightarrow \varphi(S(n))] \rightarrow \forall n \varphi(n) \text{ per ogni } \varphi \in \Gamma;$$

$$\Gamma - \text{CA } \exists X \forall n [n \in X \longleftrightarrow \varphi(n)] \text{ per ogni } \varphi \in \Gamma.$$

Definizione 3. Quantificatori limitati: *Quantificatore limitato nel linguaggio dell'aritmetica*

Definizione 4. Famiglia Σ_n^0, Π_n^0 : *Complessità di una formula nel linguaggio dell'aritmetica*

Esempio 5. Alcune formule

$$\begin{aligned} x \cdot y = y \cdot x &\in \Sigma_0^0 \\ \text{Pr}(t) : t > 1 \wedge \forall n \leq t \ \forall m \leq t \ (t = n \cdot m \rightarrow n = 1 \vee m = 1) &\in \Sigma_0^0 \\ \forall n \exists p (p > n \wedge \text{Pr}(p)) &\in \Pi_2^0 \\ \forall n [n \in X \rightarrow \exists m \leq n (n = m + m)] &\in \Pi_1^0 \end{aligned}$$

Definizione 6. Si definiscono le famiglie Σ_n^1, Π_n^1 :

- $\Sigma_0^1 = \Pi_0^1 := \bigcup_n \Sigma_n^1 = \bigcup_n \Pi_n^1$.
- $\Sigma_n^1 =$
- $\Pi_n^1 =$ (definite come al solito)

1086.3 “Big Five”

L'idea è che quasi tutti i teoremi sono equivalenti a uno dei seguenti gruppi di assiomi

1086.3.1 RCA₀

Questa lista di assiomi è data da: Assiomi di base + $\Sigma_1^0 - \text{Ind} + \Delta_1^0 - \text{CA}$ dove
 $(\Delta_1^0 - \text{CA}) \ \forall n (\varphi(n) \longleftrightarrow \psi(n)) \rightarrow \exists X \forall n [n \in X \longleftrightarrow \varphi(n)]$ per ogni $\varphi \in \Sigma_1^0$ e $\psi \in \Pi_1^0$.

L'idea è che, a meno di equivalenza logica, $\Delta_n^0 = \Sigma_n^0 \cap \Pi_n^0$.

Proposizione 7. Sono fatti equivalenti

- $\varphi(n) \in \Delta_1^0$
- $\varphi(n)$ è decidibile.

Teorema 8. RCA₀ prova:

- \mathbb{R} non è numerabile
- Teorema di Bolzano
- Ogni campo numerabile ha una chiusura algebrica

e non prova:

- ogni anello ha un ideale primo
- ogni sequenza non limitata di reali ha limite
- non unicità.

1086.3.2 WKL₀

Questa lista di assiomi è data da RCA₀ + WKL dove:

WKL Sia T un albero binario infinito. Allora T ha un cammino.

Teorema 9. In RCA₀ sono fatti equivalenti:

- WKL
- ogni anello numerabile ha un ideale primo;
- ogni funzione continua in $[0, 1]$ è limitata
- Teorema di completezza di Gödel
- Ogni campo numerabile ha un'unica chiusura algebrica

1086.3.3 ACA₀

Questa lista di assiomi è data da RCA₀ + Ind + $\Pi_0^1 - \text{CA}$.

Teorema 10. In RCA₀ sono fatti equivalenti:

- ACA₀
- Lemma di Koning
- Ogni anello numerabile ha un ideale

Idea: ACA₀ è equivalente a PA

1086.3.4 ATR₀

1086.3.5 $\Pi_1^1 - \text{CA}_0$

1086.3.6 Riferimenti:

- Simpson, Subsystems of second order arithmetic
- Stillwell, Reverse Mathematics
- Hitschelot, Slicing the truth
- Dzhafarov and Mumtaz, Reverse Mathematics

1086.4 Esempio

Teorema 11. In RCA_0 sono fatti equivalenti:

1. ACA_0
2. $\Sigma_1^0 - \text{CA}$
3. per ogni $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ iniettiva esiste $\text{rng}(f)$ come insieme, ovvero

$$\exists X \forall n [n \in X \longleftrightarrow \exists m (f(m = n))]$$

1087 Iperoperazioni

<https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperoperation>

1088 Chi ha paura delle incoerenze? [CORSO SEL2025]

Principio di esplosione: una teoria contraddittoria può derivare ogni enunciato.

KRR: knowledge representation and reasoning

Linguaggi di rappresentazione

1089 In lode della Quasi Verità: Algebre di Boole Perturbate, la loro Logica e Applicazioni [CORSO SEL2025]

- MV-Algebra (<https://en.wikipedia.org/wiki/MV-algebra>)
- Funtore di Mundici
- Algebra di Chang
- Logica Proposizionale di Lukasiewicz (<https://plato.stanford.edu/entries/lukasiewicz/>)
- ℓ -gruppo (https://chatgpt.com/s/t_68b98ccb3ae88191930eecd047b71a94)

1090 Istituzioni di Algebra [CORSO]

Indice

1 CATEGORIA	1
2 TOPOLOGIA ALGEBRICA [CORSO]	2
2.1 DONE Lezione 1	2
2.2 DONE Lezione 2	2
2.3 DONE Lezione 3	3
2.4 DONE Lezione 4 [100%]	3

2.5	DONE Lezione 5 [100%]	3
2.6	DONE Lezione 6 [100%]	4
2.7	DONE Lezione 7 [100%]	4
2.8	DONE Lezione 8 [100%]	5
2.9	DONE Lezione 9 [100%]	5
2.10	DONE Lezione 10 [100%]	6
2.11	Lezione 11 [91%]	6
2.12	Lezione 12 [60%]	6
2.13	Lezione 13 [88%]	7
2.14	Lezione 14 [88%]	7
2.15	DONE Lezione 15 [100%]	7
2.16	DONE Lezione 16 [100%]	8
2.17	Lezione 17 [57%]	8
2.18	Lezione 18 [25%]	8
2.19	Lezione 19 [0%]	8
2.20	Lezione 20	9
3	Morfismo inverso (Teoria delle Categorie)	9
4	Isomorfismo	9
4.1	Definizione Categoriale	9
5	Unicità dell'inverso	9
5.1	Teoria delle Categorie	9
6	Istituzioni di Geometria [CORSO]	10
6.1	Istituzioni di Geometria (9 cfu)	10
6.1.1	Geometria Algebrica (3 cfu)	10
6.1.2	Geometria Differenziale	12
7	Istituzioni di Analisi [CORSO]	16
7.1	Istituzioni di Analisi (9 cfu)	16
8	Istituzioni di Logica [CORSO]	16
8.1	Istituzioni di Logica (9 cfu)	16
8.1.1	Fondamenti di Logica	16
8.1.2	Basic Set Theory	17
8.1.3	Model Theory	21
8.1.4	Ricorsione	24
9	Istituzioni di Fisica [CORSO]	27
9.1	Lezione 2 - <2025-09-24 Mer>	28
9.2	Lezione 3 - <2025-09-26 Ven>	28
9.3	Lezione 4 - <2025-09-30 Mar>	29
9.4	Lezione 5 - <2025-10-01 Mer>	29
10	Funtore Covariante	30

11 Funtore Controvariante	30
12 Gruppo-Fondamentale	31
13 Esempi di categorie	31
14 Categoria-Set	32
15 Categoria-Top	32
16 Categoria-Top*	32
17 Categoria-Grp	32
18 Categoria-VectR	32
19 Funtori e isomorfismi	32
20 Funtore	32
21 Trasformazione Naturale	32
22 Categoria-Top2	33
23 R-Moduli	33
24 Anello	33
24.1 Morfismo di Anelli	33
25 Anello commutativo	33
26 Anello unitario	33
27 Anello commutativo con unità	33
27.1 Esempi di anelli commutativi con unità	34
27.2 Sottoanello commutativo con unità	34
27.3 Omomorfismo di anelli commutativi con unità	34
28 Gruppo	35
28.1 Definizione	35
29 Spazio-Vettoriale	35
30 Campo	35
31 Morfismo tra R-Moduli	35
32 Isomorfismo tra R-Moduli	35

33 Morfismo di Gruppi	36
33.1 Isomorfismo di gruppi	36
34 Categoria degli R-Moduli	36
35 Sottomoduli	36
35.1 Sottomoduli dell'anello sono ideali	36
36 Quoziente di moduli	36
36.1 Quoziente di Moduli	36
36.2 Quoziente di moduli è invariante per iniezione	36
37 Somma di sottomoduli	37
38 Intersezione di sottomoduli	38
39 Sottogruppo	38
39.1 Sottogruppo Normale	38
40 Modulo generato da un insieme	38
41 Insieme linearmente indipendente	38
41.1 Moduli	38
41.2 Vettori	39
42 Gruppi Zp	39
43 Modulo Libero	39
44 Estensione morfismo di R-Moduli definito su una base	40
45 Somma Diretta di moduli	40
45.1 Somma diretta dell'anello è modulo libero	41
45.2 Somma diretta di morfismi di moduli	41
46 Modulo Finitamente Generato	41
47 Teorema della Base	42
47.1 Moduli	42
47.2 Spazi vettoriali	42
48 Cardinalità	42
48.1 Definizione senza AC	43
49 Ogni modulo è quoziante di modulo libero	43
50 Kernel	44
50.1 Invarianza del kernel per iniezioni	44

51 Funzione Suriettiva	44
51.1 Generalizzazione in MK	44
51.1.1 Classe-Funzione Suriettiva	44
52 Caratterizzazione moduli finitamente generati	44
53 Scomposizione di un modulo con quoziente libero	45
54 Funzione Iniettiva	46
54.1 Generalizzazione in MK	46
54.1.1 Classe-Funzione iniettiva MK	46
55 PID	47
56 Ideale	47
57 Ideale-Generato	47
57.1 Ideale finitamente generato	47
58 Anello dei polinomi	47
58.1 Notazione	47
58.2 Definizione	47
59 PID Sottomoduli di moduli libero sono liberi	47
60 Torsione di un modulo	48
61 Campo Algebricamente Chiuso	48
62 Polinomio	48
62.1 Coefficiente direttore	48
63 Luogo di zeri di polinomi	48
63.1 Polinomi	48
63.1.1 Osservazione	48
63.2 Polinomi omogenei	49
63.3 Ideali	49
63.4 Ideali omogenei	49
64 Spazio Affine	49
64.1 Notazione	49
65 Varietà Algebrica Affine	49
65.1 Definizione di base	49
65.2 Definizione più complessa	49
65.3 TODO Notazione	MATEMATICA__LM:GEO__ALG
65.4 [?] Osservazione	GEO__ALG:MATEMATICA__LM
66 Spazio Proiettivo	50

67 Polinomi Omogenei	50
67.1 Definizione	50
67.2 Insiemi di polinomi omogeni	50
67.2.1 Dimensione di S_d come spazio vettoriale	50
68 Varietà Algebrica Proiettiva	51
69 Omogenizzazione	52
70 Grado di un polinomio	52
71 Deomogenizzazione	52
72 Infinitezza Campi alg chiusi	52
73 Cubica Gobba	52
73.1 Definizione	52
73.2 Varietà algebrica proiettiva	53
73.3 Curva piana	54
74 Curva Piana	54
75 Anello dei polinomi ad una indeterminata di un PID è PID	54
76 Anello Noetheriano	54
76.1 Definizioni	54
76.2 Dimostrazione	55
76.2.1 1 → 2	55
76.2.2 2 → 1	55
77 Emmy Noether	55
78 Catena Stazionaria	55
79 ACC	56
80 Catena	56
81 Insiemi finiti di punti dello spazio proiettivo	56
81.1 Fatto 1:	56
81.1.1 Dim.	56
81.2 Fatto 2	56
81.2.1 Dim	57
81.3 Fatto 3	57
81.4 Fatto 4	57
82 Posizione Generale	57
83 Insiemi finiti di punti dello spazio affine come zeri di due polinomi	57

84 Iperpiano proeittivo	58
85 Teorema Fondamentale dell'Algebra	58
86 Base di uno spazio vettoriale	59
87 Polinomio di Lagrange	59
88 Ideali Generati di un Anello Noetheriano	59
89 Teorema della Base di Hilbert	59
89.1 Teorema	59
89.1.1 dim.	59
89.2 Corollario	60
90 Campi sono anelli Noetheriani	60
90.1 Corollario	60
91 Ideali di un campo	60
91.1 Teorema	60
91.1.1 WAIT Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_ALG
92 Zeri di un ideale generato in uno spazio affine	61
92.1 Proposizione	61
92.1.1 Dimostrazione	61
92.2 Corollario	61
92.2.1 Dimostrazione	61
93 Ideale di polinomi omogeneo	61
93.1 Definizione	61
93.2 Proposizione	62
94 Luogo di zeri di un ideale omogeneo	62
94.1 Definizione	62
94.1.1 Osservazione	62
95 Varietà Algebriche luogo di zeri di finiti polinomi	62
95.1 Varietà algebriche affini	62
95.1.1 Dimostrazione	62
95.2 Varietà Algebriche proiettive	62
95.2.1 Dimostrazione	62
96 Topologia di Zariski affine	63
96.1 Definizione	63
96.1.1 Dimostrazione che sia una topologia	63
97 Topologia Euclidea	63

98 Dominio di integrità	63
99 Ideale di un sottoinsieme	63
99.1 Varietà affini	64
99.1.1 Proposizione	64
99.1.2 Osservazione:	64
99.2 Varietà proiettive	64
99.2.1 Osservazione	64
100 Chiusura Topologica	64
100.1 Caratterizzazione dei chiusi in termini di chiusura	64
101 Topologia	65
102 Zeri di un ideale di un sottoinsieme affine	65
102.1 Proposizione	65
102.1.1 Osservazione	65
102.1.2 Dimostrazione	65
103 Spazio topologico Noetheriano	66
104 Topologia di Zariski affine è noetheriana	66
104.1 Proposizione	66
104.1.1 Dimostrazione	66
105 Caratterizzazione topologia noetheriana	66
105.1 Lemma	66
105.1.1 Dimostrazione	67
106 Spazio topologico Noetheriano è compatto	67
106.1 Teorema	67
106.1.1 Dimostrazione	67
106.1.2 Corollario	67
107 Spazio topologico compatto	68
108 Sottospazio Topologico	68
108.1 Proprietà Transitive	68
109 Ricoprimento	68
110 Sottospazio irriducibile	68
110.1 Definizione	68
110.1.1 Osservazione	68
110.1.2 Proprietà 1	69
110.1.3 Proprietà 2	69
111 Spazio topologico connesso	69

111.1Proposizione.	69
112Scomposizione di sp top noetheriani in componenti irriducibili	69
112.1Teorema	69
112.1.1 Dimostrazione	69
113Caratterizzazione di sottospazi affini irriducibili tramite ideali	70
113.1Teorema	70
113.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_ALG
113.1.1 MATEMATICA_LM:GEO_ALG	71
114Ideale primo	71
115Topologia di Zariski proiettiva	71
115.1Definizione	71
116Proprietà Operazioni tra insiemi	71
117Spazio affine è irriducibile	71
117.1Proposizione	71
117.1.1 Dimostrazione	71
118Caratterizzazione domini d'integrità tramite ideali primi	72
118.1Proposizione	72
119Morfismo tra varietà algebriche affini	72
119.1Definizione	72
119.1.1 Precisazione	73
119.1.2 Osservazione	73
119.2Isomorfismo tra varietà algebriche affini	73
119.2.1 Definizione	73
119.3Esempi di morfismi	73
119.3.1 Esempio 1	73
119.3.2 Esempio 2	73
119.3.3 Esempio 3	74
120Spazio delle matrici	74
121Funzione Biunivoca	74
121.1Generalizzazione in MK	74
121.1.1 Classe-Funzione Biettiva	74
122Matrice Invertibile	74
123Determinante di una matrice	74
124Grafico di una funzione	74
125Morfismo tra varietà algebriche affini è continuo	74

125.1Proposizione	74	
125.1.1 Dimostrazione	75	
126Morfismo tra varietà algebriche affini non è chiuso	75	
126.1Osservazione	75	
126.1.1 Controesempio	75	
127Funzioni aperte e chiuse	76	
127.1Caratterizzazione biiezioni aperte	76	
128Restrizione di funzione aperta ad un aperto	76	
129Restrizione di una funzione chiusa ad un chiuso	76	
130Spazio affine unidimensionale senza un punto non è chiuso	76	
130.1Proposizione	76	
130.1.1 Dimostrazione	76	
131Morfismo tra varietà algebriche proiettive	76	
131.1Definizione	76	
131.2Isomorfismo tra varietà algebriche proiettive	77	
131.2.1 Definizione	77	
132Curva Razionale Normale	77	
132.1 C è una Varietà Algebrica Proiettiva.	77	
132.1.1 $C \subseteq Y$	77	
132.1.2 $Y \subseteq C$	78	
132.2 ν_d è un isomorfismo	78	
132.2.1 ν_d^{-1} è veramente l'inversa	79	
132.2.2 ν_d^{-1} è ben definito.	79	
133Mappa di Veronese	79	
133.1Varietà di Veronese	80	
133.1.1 Dimostrazione che sia realmente una varietà	80	
133.2 TODO $\nu_{n,d}$ è un Isomorfismo tra varietà algebriche proiettive	MATEMATI-	
CA_LM:GEO_ALG	82	
134Rango di una matrice	82	
135Minori di una matrice	82	
136Mappa di Segre	82	
136.1 TODO Versione Baby	MATEMATICA_LM:GEO_ALG	82
136.2Morfismo di Segre.	82	
136.2.1 Dimostriamo l'uguaglianza	83	
136.2.2 La mappa di Segre è iniettiva	83	
136.3Prodotto di spazi proiettivi come varietà proiettiva	84	

137Multi-indice	84
138Spazio vettoriale duale	84
139Varietà Algebrica Quasi Proiettiva QP	84
139.1Definizione	84
139.1.1 Topologia di Zariski qp	84
139.1.2 Osservazione	84
140Insieme localmente chiuso	84
141Morfismo tra varietà algebriche QP	84
141.1Definizione	84
141.1.1 Osservazione	85
141.2Isomorfismo tra varietà algebriche QP	85
141.2.1 Definizione	85
142Proiezioni da prodotti di varietà proiettive sono morfisi	85
142.1Proposizione	85
142.1.1 Dimostrazione	85
143Copie dello spazio proiettivo dentro la varietà di Segre sono lineari	86
143.1Proposizione	86
143.1.1 Dimostrazione	86
144Luogo di zeri di polinomi dentro prodotti di spazi proiettivi	87
144.1Proposizione	87
144.1.1 Dimostrazione	87
145Polinomi BiOmogenei	88
146Bigrado di un polinomio	88
147Prodotti di varietà QP	88
147.1Caso proiettivo	88
147.1.1 Definizione	88
147.1.2 Proposizione	89
148Proprietà universale del prodotto	89
149Grafico di un morfismo proiettivo è varietà	90
149.1Proposizione	90
149.1.1 Dimostrazione	90
150Intersezione con un ricoprimento aperto è chiusa allora chiuso	91
150.1Proposizione	91
150.1.1 TODO Dimostrazione	91
	MATEMATICA_LM:GEO_ALG

151	Proiezione su un iperpiano dentro allo spazio proiettivo	91	
151.0.1	TODO Proiezione da uno spazio lineare	MATEMATICA_LM:GEO_ALG	92
152	Teorema: Proiezione su un iperpiano di una varietà è varietà	92	
152.1	Teorema	92	
152.1.1	Lemma	92	
152.1.2	Dimostrazione del teorema	93	
153	Fattori non costanti comuni tra polinomi	93	
153.1	Lemma 1	94	
153.1.1	Dimostrazione	94	
153.2	Matrice di Sylvester	94	
153.3	Lemma 2	94	
153.3.1	Dimostrazione	95	
154	UFD	96	
154.1	Anello di polinomi di un UFD è UFD	96	
155	Fattorizzazione	96	
156	Divisione	96	
156.1	Divisione intera	96	
156.1.1	Quoziente di una divisione intera	96	
156.1.2	Resto di una divisione intera	96	
157	Combinazione Lineare	96	
158	Risultante per polinomi in più variabili	96	
158.1	Proposizione	96	
159	Retta proiettiva	96	
160	Zeri di un ideale di un sottoinsieme proiettivo	96	
160.1	Proposizione	97	
160.1.1	Osservazione	97	
161	Cono in uno spazio proiettivo	97	
161.1	TODO Proposizione	MATEMATICA_LM:GEO_ALG	97
162	Morfismo da varietà proiettiva a varietà qp è chiuso	97	
162.1	Teorema 1	97	
162.2	Teorema 2	98	
162.2.1	Relazione tra compattezza e varietà proiettive	98	
162.2.2	Relazione tra Hausdorff e varietà qp.	98	
162.2.3	Dimostrazione che $2 \rightarrow 1$	98	
162.2.4	TODO Dimostrazione di 2	MATEMATICA_LM:GEO_ALG	98
163	Teorema di Kuratowski-Mrówka	99	

163.1 Teorema	99
164 Topologia prodotto	99
165 Diagonale di uno spazio topologico	99
166 Caratterizzazione spazi T2 con la diagonale	99
167 Spazio topologico di Hausdorff	99
168 Morfismo da varietà proiettiva connessa allo spazio affine unidimensionale è costante	99
168.1 Corollario	99
168.1.1 Dimostrazione	100
169 Ipersuperficie dello spazio proiettivo interseca ogni varietà connessa diversa da un solo punto.	100
169.1 Corollario	100
169.1.1 Dimostrazione	100
170 Immagine continua di spazio connesso è connessa	101
171 Varietà Algebrica IPERSUPERFICIE	101
172 Radicale di un ideale	101
173 Radicale di un ideale è ideale	101
173.1 Proposizione	101
173.1.1 Dimostrazione	101
174 Teorema del coefficiente binomiale	102
175 Ideale Radicale	102
176 Nullstellensatz	102
176.1 Nullstellensatz	102
177 Nullstellensatz debole	102
177.1 Nullstellensatz debole	102
178 Ideale primo è radicale	102
179 Nullstellensatz debole implica Nullstellensatz	102
179.1 Lemma di Rabinowitsch	102
179.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_ALG
180 Corrispondenza ideali radicali e chiusi algebrici dello spazio affine	104
180.1 TODO Corrispondenza ideali radicali e chiusi algebrici dello spazio affine MATEMATICA_LM:GEO_ALG	104

181Anello delle coordinate	104
181.1Definizione	104
182K-Algebre fin generate e ridotte come anelli delle coordinate di varietà affini	104
182.1Teorema	104
182.1.1 Dimostrazione	105
183Algebra su un anello	105
184Morfismo tra algebre	106
185Sottoanello	106
186K-Algebra finitamente generata	106
187Anello ridotto	106
188Nilpotenza in un anello	107
189Ideale radicale e anello quoziante	107
189.1Proposizione	107
190Quoziente di anello e ideale	107
191Varietà Topologica	107
192Spazio topologico a base numerabile	107
192.1Topologia Euclidea è a base numerabile	107
193Intorno	108
194Omeomorfismo	108
195Funzione Inversa	108
196Base di una topologia	108
197Insieme numerabile	108
198Esempi fondamentali di varietà topologiche	108
198.1R _n è una varietà topologica	108
198.2Aperti di R _n sono varietà topologica	109
199Immagini tramiti omeomorfismi di varietà topologiche sono varietà topologiche	109
199.1Proposizione	109
199.1.1 TODO Dimostrazione	
MATEMATICA__LM:GEO__DIFF	109
200Atlante topologico	109

201 La sfera n-dimensionale è varietà topologica	109
201.1Esempio	109
201.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
202 Spazio proiettivo è varietà topologica	110
202.1Esempio	110
202.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
203 Spazio delle matrici reali invertibili è varietà topologica	110
203.1Esempio	110
203.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
204 Gruppo lineare	110
205 Gruppo lineare complesso è varietà topologica	110
205.1Esempio	110
206 Spazio topologico semplicemente connesso	111
207 Connessione per archi di varietà topologiche	111
207.1Proposizione	111
208 Spazio topologico localmente connesso per archi	111
209 Spazio topologico connesso per archi	111
210 Atlante topologico differenziabile	111
211 Cambio di carte per un atlante topologico	112
212 Diffeomorfismo reale	112
213 Atlante astratto	112
213.0.1 Topologia indotta da un atlante	112
214 Compatibilità tra atlanti astratti e varietà topologiche	112
214.1Proposizione 1	113
214.2Proposizione 2	113
214.3Proposizione	113
215 Atlanti differenziabili compatibili	113
215.1Definizione	113
215.2Proposizione	113
216 Relazione di equivalenza	113
217 Struttura Differenziabile	114

218 Esistenza e unicità di una struttura differenziabile per ogni atlante	114
218.1Teorema	114
218.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
219 Esempi fondamentali di varietà differenziabili	114
220 Varietà Topologica omeomorfa a varietà differenziabile ne eredità la struttura	114
220.1Proposizione	115
220.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
221 Varietà topologiche in dimensione minore uguale a tre hanno struttura differenziabile unica	115
221.1Teorema	115
222 Strutture differenziabili sulla sfera 7 dimensionale	115
222.1Teorema (Milnor)	115
223 Prodotto di varietà differenziabili è varietà differenziabile	115
223.1Proposizione	115
223.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
224 Toro ha struttura di varietà differenziabile	116
224.1Proposizione	116
224.1.1 Dimostrazione	116
225 Toro	116
226 Teorema dell'inversa locale	116
226.1Teorema dell'inversa locale	116
227 Classe C di una funzione	117
228 Differenziale di una funzione reale	117
229 Isomorfismo tra spazi vettoriali	117
230 Teorema della funzione implicita	117
230.1Teorema della funzione implicita	117
230.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
231 Valore Regolare di una funzione	117
232 Differenziale del determinante nel gruppo lineare reale	117
232.1Proposizione	117
232.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
233 Traccia di una matrice	118

234 Gruppo lineare speciale è varietà differenziabile	118
234.1Proposizione	118
234.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
235 Gruppo lineare speciale	118
236 Gruppo ortogonale è una varietà differenziabile	118
236.1Proposizione	118
236.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
237 Gruppo ortogonale	118
238 Matrice Trasposta	119
239 Gruppo ortogonale reale è sconnesso e compatto	119
240 Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili	119
240.1Funzioni reali Cinfinito da una varietà differenziabile	120
241 Restrizione di funzioni reali Cinfinito su varietà differenziabili definite in forma implicita è ancora Cinfinito	120
242 Lemma di incollamento tra funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili	120
242.1Lemma di incollamento	120
243 Aperti di una varietà differenziabile sono varietà differenziabili	121
244 Funzione sulle carte indotta da funzione Cinfinito tra due varietà è Cinfinito	121
244.1Proposizione	121
244.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
245 Composizione di funzioni Cinfinito è Cinfinito	121
245.1Teorema	121
245.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
246 Diffeomorfismo tra varietà differenziabili	121
247 Diffeomorfismo tra le strutture differenziali sui numeri reali	122
247.1Teorema	122
248 Gruppo dei diffeomorfismi di una varietà differenziabile	122
249 Rivestimento Topologico	122
249.1Definizione	122
250 Unione disgiunta	123
250.1Unione disgiunta di insiemi	123
250.2Unione disgiunta di spazi topologici	123

251Rivestimenti e gruppo fondamentale	124
252Funtore del Gruppo Fondamentale	124
253Teorema del rivestimento universale	124
253.1Teorema	124
254Rivestimento n:1	124
254.1Definizione	124
255Teorema sui rivestimenti di varietà differenziabili	124
255.1Teorema	124
255.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	125
256Germi di funzioni	125
256.1Osservazione	125
257Quoziente rispetto a relazione di equivalenza	125
258Spazio dei germi di funzioni è algebra reale	125
258.1Proposizione	125
258.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	125
259Derivazione su una varietà differenziabile	125
259.1 TODO Esempio: Derivazioni su \mathbb{R} .	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	126
260Derivazioni Canoniche su una varietà differenziabile	126
261Funzione Lineare	127
262Spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile	127
262.1Definizione	127
262.2Osservazione	127
262.3Descrizione alternativa	127
262.3.1 Vettori dello spazio tangente ad una varietà in un punto come derivate di curve	127
263Sottospazio vettoriale	128
264Spazio delle funzioni lineare	128
265Derivata parziale	128
266Base dello spazio tangente di una varietà differenziabile	128
266.1Teorema	128
266.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	128
267Cambio di base sullo spazio tangente ad un punto di una varietà differenziabile	128
267.1Proposizione	129
267.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	129

267.1.2 Notazione	129
268 Matrice del cambiamento di base	129
269 Notazione di Einstein	129
270 Derivata di curve su varietà come derivazioni	129
270.1 Proposizione	130
270.2 Osservazione	130
271 Derivata	130
272 Differenziale di una funzione tra varietà differenziabili	130
272.1 Definizione	130
272.2 Proposizione	130
272.2.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
272.3 TODO Osservazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
273 Differenziale di composizione di funzioni tra varietà	131
273.1 Proposizione	131
273.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
274 Differenziale di diffeomorfismo tra varietà è isomorfismo	131
274.1 Proposizione	131
274.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
275 Differenziale in coordinate locali su una varietà differenziabile	131
275.1 Proposizione	132
275.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
275.2 Notazione	132
276 Matrice Jacobiana	132
277 Cambiamento del differenziale in coordinate locali tramite un cambio di coordinate su varietà differenziabili	132
277.1 TODO Proposizione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
277.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
278 Immersione di varietà differenziabili	133
278.1 Definizione	133
279 Embedding di varietà differenziabili	133
279.1 Definizione	133
279.1.1 Osservazione	133
280 Sottovarietà differenziabile	133
281 Esempio di sottovarietà tramite il teorema della funzione implicita	134

281.1 TODO Esempio	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	134
282 Teorema delle slice delle sottovarietà		134
282.1 Teorema		134
282.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	134
282.1.2 Viceversa		134
283 Teorema del rango per funzioni reali		134
283.1 Teorema		134
283.1.1 TODO Osservazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	135
283.1.2 TODO Dimostazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	135
284 Teorema della funzione implicita tra varietà differenziabili		135
284.1 Teorema		135
284.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	135
284.1.2 TODO Relazione tra spazi tangenti	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	135
284.1.3 Generalizzazione		135
285 Immagine dello spazio tangente ad un punto di una sottovarietà tramite il differenziale dell'inclusione		135
285.1 Proposizione		135
285.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	136
286 Immersione da compatti è embedding		136
286.1 Proposizione		136
287 Restrizione di funzioni a sottovarietà e loro differenziale		136
287.1 Proposizione		136
287.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	136
288 Funzione Propria		136
289 Compattezza e Compattezza per successioni		136
290 Spazio topologico compatto per successioni		137
291 Successione		137
292 Sottosuccessione		137
293 Convergenza per una successione		137
294 Funzioni Cinfinito tra varietà e proprie sono chiuse		137
294.1 Proposizione		137
294.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF	137
294.1.2 Corollario		137
295 Immersione iniettiva chiusa è embedding		137

295.1Proposizione	137
295.1.1 Dimostrazione	137
296Teoremi di Whitney	137
296.1Teorema I	137
296.2Teorema II	138
297Fibrato tangente	138
297.1Definizione	138
297.1.1 Esercizio	138
297.2Struttura di varietà differenziabile	138
297.2.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
139	
298Atlante differenziabile induce una topologia	139
298.1Teorema.	139
299Sommersione di varietà differenziabili	139
299.1Definizione	139
300Campo vettoriale su una varietà differenziabile	139
301Componenti locali di un campo vettoriale	140
301.1 TODO Scrittura come $X = X^r \frac{\partial}{\partial x^r}$	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
140	
302Componenti locali di un campo vettoriale sono Cinfinito	140
302.1Proposizione	140
302.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
140	
303Azione di un campo vettoriale su una funzione	140
303.1Definizione	141
304Azione di un campo vettoriale su una funzione è Cinfinito	141
304.1Proposizione	141
304.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
141	
305Insieme dei derivatori su una varietà	141
305.1Campi vettoriali come derivatori	141
305.1.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
141	
305.2Proposizione	141
305.2.1 TODO Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
142	
306Insieme dei campi vettoriali come spazio vettoriale reale e come modulo	142
306.1Proposizione 1	142
306.2Proposizione 2	142
306.2.1 [?] Dimostrazione	MATEMATICA_LM:GEO_DIFF
142	
307Push-Forward di campi vettoriali	142
307.1Proposizione	142

308 Campi vettoriali F-riferiti	143
308.1Definizione	143
308.2Teorema di caratterizzazione	143
309 Differenziale dell'inclusione del fibrato tangente ad una sottovarietà	143
310 Restrizione di un campo vettoriale ad una sottovarietà	143
310.1Proposizione	143
311 Varietà Differenziabile Pettinabile	144
311.1Definizione	144
312 Pettinabilità delle sfere	144
313 Varietà Differenziabile Parallelizzabile	144
313.1Definizione	144
314 Parallelizzabilità delle sfere	144
314.1Teorema	144
315 Sfera n-dimensionale	144
316 Bracket di campi vettoriali	144
316.1 TODO Il bracket è realmente un campo vettoriale MATEMATICA_LM:GEO_DIFF .	145
316.2Proprietà	145
316.2.1 TODO Dimostrazione MATEMATICA_LM:GEO_DIFF .	145
317 Algebra di Lie	145
318 Scrittura locale del bracket di campi vettoriali	145
318.1Proposizione	146
318.1.1 TODO Dimostrazione MATEMATICA_LM:GEO_DIFF .	146
319 Bracket di campi vettoriali F-riferiti	146
319.1Proposizione	146
319.1.1 TODO Dimostrazione MATEMATICA_LM:GEO_DIFF .	146
320 Bracket di campi vettoriali ristretti a sottovarietà	146
320.1Proposizione	146
320.1.1 TODO Dimostrazione GEO_DIFF:MATEMATICA_LM .	146
321 Torsione di moduli su un dominio di integrità è sottomodulo	146
322 Modulo libero da torsione	146
323 Modulo di torsione	147
324 Modulo libero da torsione finitamente generato è libero	147

325Quoziente di modulo FG è FG	148
326Teorema fondamentale dei moduli finitamente generati su un PID	148
327Divisore	148
328Permutazione	148
329Successione di R-Moduli ESATTA	148
330Successione di R-Moduli	149
331Caratterizzazione di alcune successioni esatte di R-Moduli	149
332SEC di Moduli	149
333Teorema di Spezzamento SEC	150
334Spezzamento SEC con modulo finale libero	152
335Teoremi di isomorfismo	152
335.1Primo Teorema di Isomorfismo	152
335.1.1 Primo Teorema di Isomorfismo (Teoria dei Gruppi)	152
335.1.2 Primo Teorema di Isomorfismo (Moduli)	152
335.1.3 Primo Teorema di Isomorfismo (Anelli)	152
335.2Secondo Teorema di Isomorfismo	153
335.2.1 Secondo Teorema di Isomorfismo (Teoria dei Gruppi)	153
335.2.2 Secondo Teorema di Isomorfismo (Moduli)	153
335.2.3 Secondo Teorema di Isomorfismo (Anelli)	153
335.3Terzo Teorema di Isomorfismo	153
335.3.1 Terzo Teorema di Isomorfismo (Teoria dei Gruppi)	153
335.3.2 Terzo Teorema di Isomorfismo (Moduli)	153
335.3.3 Terzo Teorema di Isomorfismo (Anelli)	153
335.4Teoremi di Isomorfismo per complessi di catene	153
336Lemma del cinque	153
337Complesso di catene	155
337.1Complesso di catene di <i>R</i> -moduli	155
338Categoria dei Complessi di Catene di R-Moduli	155
338.1Oggetti	155
338.2Morfismi tra complessi di catene	155
339Modulo di omologia dei complessi di catene	156
340Morfismo tra complessi di catene induce morfismo tra moduli di omologia	157
341Zig-Zag Lemma (per complessi di catene)	158

342 Funzione da ChR a RMod - di omologia	161
343 SEC di Complessi di Catene	161
344 Omotopia tra funzioni continue	162
345 Omotopia tra morfismi di complessi di catene	162
346 Applicazione del funtore di omologia a funzioni omotope tra complessi di catene	163
347 Categoria omotopica dei complessi di catene	164
347.1Funtore da h-ChR a RMod - di omologia	164
348 Complessi di catene omotopicamente equivalenti	164
349 Complesso di catene aciclico	165
350 Complesso di catene contraibile	165
351 Complesso di catene contraibile è aciclico	165
352 Complesso di catene aciclico libero è contraibile	166
353 Complesso di catene libero	167
354 Indipendenza Affine	167
355 Simplesso	167
356 Simplesso standard	167
357 Simplesso Standard	167
358 Faccia di un simplesso	168
359 Complesso Simpliciale	168
360 Sottocomplesso Simpliciale	168
361 Supporto di un complesso simpliciale	168
362 Topologia debole di un complesso simpliciale	168
363 Scheletro di un complesso simpliciale	169
364 Modulo delle catene simpliciali	169
365 Complesso Simpliciale generato da un simplesso	169
366 Palla n-dimensionale	170

367 Complesso Simpliciale totalmente ordinato	170
368 Mappe di bordo tra moduli di catene simpliciali	170
369 Complesso di catene simpliciali	171
370 Omologia Simpliciale	171
371 Calcolo dell'omologia simpliciale per il complesso di catene generato da un 2-complexo	171
372 Omologia Simpliciale per un complesso simpliciale generato	173
373 Notazione per i simplessi	173
374 Complesso Augmentato di un complesso simpliciale	173
375 Omologia Ridotta di un complesso simpliciale	174
376 Modulo del complesso simpliciale relativo	175
377 Mappa di bordo tra moduli di complessi simpliciali relativi	176
378 Complesso di catene relative	176
379 Omologia Simpliciale Relativa	176
380 Successione esatta di una coppia di complesso e sottocomplesso in omologia	177
381 Quoziente di somma diretta di moduli	177
382 Mappa simpliciale	178
383 Categoria di complessi e mappe simpliciali	178
384 Funtore da P1 a ChR - diesis	178
385 Funtore da P1 a Top - di Supporto	180
385.1Funtore	180
386 Simplesso singolare	180
387 Modulo delle catene singolari su uno spazio topologico.	181
388 Operatori di facciata del simplesso standard	181
389 Mappe di bordo tra moduli di catene singolari	181
389.1Complesso di catene singolare	182
390 Omologia Singolare	183

391 Funtore da Top a ChR - diesis	183
392 Calcolo dell'omologia singolare del punto	184
393 Complesso di catene singolare Augmentato	185
394 Omologia Singolare Ridotta	185
395 Spazio topologico aciclico	186
396 Coprodotto	186
397 Significato geometrico del modulo di omologia singolare 0	186
398 Insieme stellato	187
399 Insieme stellato è spazio topologico aciclico	188
400 Estensione di un complesso singolare in uno spazio stellato	188
401 Coppia topologica	189
402 Omologia Singolare Relativa	190
403 Successione esatta dei complessi di catene di una coppia topologica	190
404 Teorema dell'invarianza per omotopia	191
404.1Spazi topologici omotopicamente equivalenti hanno moduli di omologia singolari isomorfi	193
405 Spazio topologico contraibile	193
406 Spazio topologico contraibile è aciclico	194
407 Retratto di uno spazio topologico	194
408 Retratto di deformazione di uno spazio topologico	194
409 Inclusione di un retratto induce iniezione in omologia singolare	195
410 Categoria-TopP	195
411 Funtore da Pl a R-Mod - di omologia	195
412 Parte interna	196
413 Funtore da Top a RMod - di omologia singolare	196
413.1Omologia singolare di spazi topologici omeomorfi	196
414 Riassunto funtori di omologia	196

415 Immagine continua di spazio cpa è cpa	197
416 Segmento tra due punti	197
417 Spazi topologici omotopicamente equivalenti	197
418 Composizione di funzioni initiettiva o suriettiva o biettiva	198
419 Funtore da TopP a ChR - diesis	198
420 Morfismo tra coppie topologiche induce diagramma commutativo in omologia	198
421 Verbale BMM	199
421.1Gestione dei parimerito	199
421.2Designare le cariche del Direttivo	199
421.3Selezione pezzi del concertp	199
421.4Lezioni presso la scuola media	200
421.5Gestione delle sfilate	200
422 Equivalenza omotopica tra coppie topologiche induce isomorfismo tra omologia singolare relativa	200
423 Funtore da TopP a Rmod - di omologia singolare relativa	201
424 Funtore da Grp a Ab - abelianizzatore	201
425 Funtore da Ab a Grp - dimenticante	202
426 Teorema di Hurewicz	202
427 Trasformazione naturale indotta dal Teorema di Hurewicz	202
428 Teorema di Escissione	203
428.1Dimostrazione del Teorema 2	203
429 Gruppo abeliano	207
429.1Definizione	207
429.1.1 Osservazione	207
430 Ogni funzione da un gruppo ad un gruppo abeliano fattorizza tramite il gruppo abelianizzato	207
431 Gruppo abelianizzato	207
432 Commutatore di un gruppo	207
433 Quoziente di gruppi	208
434 Categoria-Ab	208

435Giustapposizione di cammini	208
436Cammino inverso	208
437Lemma di incollamento	208
438Calcolo dell'omologia singolare della sfera	208
439Disco n-dimensionale	209
440Immagine continua di spazio semplicemente connesso è semplicemente connesso	209
441Complesso di catene singolare somma	209
442Complesso di catene singolare intersezione	209
443Suddivisione baricentrica di un simplex	210
444Mappa di suddivisione tra complessi di catene singolari	210
444.1Legame con le trasformazioni affini	212
445Mappa di suddivisione è omotopa a identità	213
446Mesh di una catena singolare	216
446.1Legame con la mappa di suddivisione	216
447Teorema di Mayer-Vietoris (in omologia)	217
448Prodotto wedge di spazi topologici puntati	219
448.1Omologia singolare del prodotto wedge di spazi topologici puntati	220
449Calcolo dell'omologia singolare del toro	221
450Teorema del punto fisso di Brower	221
451Omologia Locale	222
452Omologia Locale di una varietà topologica	222
453Teorema di invarianza della dimensione	223
454Sottocomplesso di catene	223
454.1Sottocomplesso di catene di R -moduli	224
455Quoziente di complessi di catene	224
456Trasformazione Affine	225
456.1Funzione affine reale	225
457Lemma del numero di Lebesgue	226

458Retratto di deformazione forte di uno spazio topologico	226
459Spazio topologico quoziante	226
459.1Proprietà universale della topologia quoziante	227
460Punto Fisso	227
460.1Definizione	228
461Bordo topologico	228
462Grado di un endomorfismo della sfera	228
462.1Grado dell'endomorfismo di riflessione sulla sfera	229
462.1.1 Grado della mappa antipodale sulla sfera	231
463Grado di una matrice ortogonale come endomorfismo della sfera	231
464Gruppo ortogonale speciale reale è connesso per archi	232
465Gruppo ortogonale speciale	232
466Endomorfismo di una sfera senza punti fissi è omotopa alla mappa antipodale	232
467Coppia topologica buona	233
468Contrazione di un sottospazio topologico ad un punto	234
469Morse Kelly Set Theory	234
469.1Definizioni di base	234
469.2Assiomi di MK	235
469.2.1 Axiom of Extensionality	235
469.2.2 Axiom of Comprehension	235
469.2.3 Axiom of Set-existence	236
469.2.4 Axiom of Power-Set	236
469.2.5 Axiom of Pairing	236
469.2.6 Axiom of Foundation	236
469.2.7 Axiom of Union	236
469.2.8 Axiom of Infinity	236
469.2.9 Axiom of Replacement	236
469.3Risultati di base	237
470Classe - Teoria degli insiemi	237
470.1Classi per MK	237
471Insieme	237
471.1Insieme per MK	237
472Paradosso di Russel	237
472.1Paradosso di Russel	237

472.1.1 Soluzione nell'ambito di MK	237
473 Teoria del Prim'ordine	238
474 Linguaggio del prim'ordine	238
475 Termine del prim'ordine	238
476 Struttura del prim'ordine	238
477 Proprietà delle mappe tra strutture del prim'ordine	238
477.1 Delta-Morfismi tra strutture del prim'ordine	238
477.2 Mappa elementare	238
477.2.1 Immersione elementare	238
478 Mappe TOTALI tra strutture del prim'ordine	239
478.1 Morfismo tra strutture del prim'ordine	239
478.2 Morfismo pieno tra strutture del prim'ordine	239
478.3 Immersione tra strutture del prim'ordine	239
478.3.1 Immersione elementare	240
478.4 Isomorfismo tra strutture del prim'ordine	240
479 Mappe PARZIALI tra strutture del prim'ordine	241
479.1 Morfismo parziale tra strutture del prim'ordine	241
479.2 Isomorfismo parziale tra strutture del prim'ordine	241
480 Sottostruttura del prim'ordine	241
481 Formula del prim'ordine	241
481.1 Formula atomica del prim'ordine	241
481.2 Altezza di una formula	241
481.3 Formula senza quantificatori del prim'ordine	241
481.4 Albero sintattico di una formula	241
482 Variabile libera di una formula	241
483 Enunciato del prim'ordine	241
484 Chiusura universale di una formula	241
485 Soddisfazione di una formula	241
485.1 Insieme definito da una formula	241
485.1.1 Insieme definito da una formula del prim'ordine	241
486 Modello di un insieme di formule	241
487 Conseguenza logica	241
488 Equivalenza logica tra due enunciati	241

489	Equivalenza logica tra due formule	242
489.1	Equivalenza tra due formule in un modello	242
490	Insieme di assiomi per una teoria	242
491	Teoria soddisfacibile	242
492	Teoria finitamente soddisfacibile	242
493	Teoria massimamente soddisfacibile	242
493.1	Teorie massimamente soddisfacibili coincidono con la loro chiusura logica	242
494	Teoria completa	242
495	Strutture elementarmente equivalenti	243
495.1	Definizione	243
495.2	Definizione	243
496	Teoria di una struttura	243
497	Formula valida	243
498	Formula soddisfacibile	243
499	Sostituzione di termini in una formula	243
500	Operazioni insiemistiche	243
500.1	Unione	243
500.1.1	Unione generalizzata	243
500.2	Intersezione	243
500.3	Sottrazione insiemistica	243
500.4	Differenza simmetrica tra due insiemi	243
500.5	Sottoinsieme	243
500.6	Generalizzazione nell'ambito MK	243
500.6.1	Unione di classi MK	244
500.6.2	Intersezione di classi MK	244
500.6.3	Sottrazione di classi MK	244
500.6.4	Differenza simmetrica di classi MK	244
500.6.5	Sottoclasse MK	245
501	Ogni sottoclasse di un insieme è un insieme MK	245
501.1	Corollario	245
501.1.1	Dimostrazione	245
502	Ogni sovraclasse di una classe propria è una classe propria MK	245
502.1	Corollario	245
502.1.1	Dimostrazione	245

503	Insieme vuoto	245
503.1	Insieme vuoto MK	245
504	Coppia ordinata	246
504.1	Formalizzazione in MK	246
504.1.1	Coppia ordinata di insiemi (Kuratowski)	246
504.1.2	Proposizione	246
504.1.3	Coppia ordinata di classi	247
505	Nessuna classe appartiene a se stessa	247
505.1	Osservazione	247
506	Prodotto cartesiano	247
506.1	Generalizzazione in MK	247
506.1.1	MK Prodotto di insiemi è un insieme	247
506.2	Prodotto cartesiano generalizzato	248
506.2.1	Potenza di una classe	248
507	Successore di un insieme	248
507.1	Successore di un numero naturale	249
507.2	Formalizzazione in MK	249
507.2.1	Osservazione	249
508	Esistono infiniti insiemi MK	249
508.1	Proposizione	249
508.1.1	Dimostrazione	249
509	Classe induttiva	249
509.1	Definizione	249
510	Insieme dei numeri naturali	250
510.1	Principio di induzione	250
510.2	Costruzione in MK	250
510.2.1	Definizione IDL:MATEMATICA__LM	250
510.2.2	Proposizione	250
510.2.3	Induzione per i naturali	250
511	Relazione Binaria	251
512	Relazione inversa	251
513	Funzione	251
514	Funzione inversa	251
515	Composizione di funzioni	251
516	Formalizzazione in MK	251

516.1Classe-Relazione Binaria MK	251
516.2Funzione	251
516.2.1 Relazione Funzionale MK	251
516.2.2 Funzione MK	251
516.3Composizione di relazioni binarie MK	251
516.4Relazione inversa MK	251
516.4.1 Classe-Funzione inversa MK	252
517Dominio di una funzione	252
517.1Generalizzazione in MK	252
517.1.1 Dominio di una Classe-Relazione	252
518Unione di funzioni	252
518.1Proposizione	252
518.1.1 Dimostrazione	253
519Insieme diretto superiormente	253
520Immagine e retroimmagine tramite una funzione	253
520.1Generalizzazione in MK	253
520.1.1 Immagine punto a punto di due classi MK	253
520.1.2 Preimmagine di una classe MK	253
521Insieme delle funzioni	254
521.1Generalizzazione in MK	254
521.1.1 Proprietà	254
522Relazione regolare MK	254
523Relazione well-founded MK	254
523.1Inclusione è irriflessiva, well-founded e left-narrow	255
524Ordine	255
525Ordine stretto	255
526Ordine lineare	255
527Ordine denso	256
528Ordine senza punto finale	256
529Teoria degli ordini stretti lineare	256
530Teoria degli ordini lineari densi senza punto finale	256
531Massimo e minimo	256
531.1Elemento Massimo	256
531.2Elemento Massimale	256

531.3Elemento Minimo	256
531.4Elemento Minimale	257
531.5Elemento Maggiorante	257
531.6Elemento Minorante	257
531.7Supremum	257
531.8Infimum	257
532Buon ordine MK	257
532.1Definizione	257
532.2Proprietà	257
533Classe totale MK	258
534Funzione di scelta	258
534.1Funzione di scelta su una classe propria	258
535Isomorfismo tra ordini	258
535.1Definizione	259
536Classe Transitiva	259
536.1Definizione	259
536.2Osservazione	259
536.3Proposizione	259
536.3.1 Dimostrazione	259
537Ordinali	260
537.1Definizione	260
537.2Proprietà	260
537.3Teorema	260
537.3.1 Dimostrazione	260
537.4Corollario	261
537.5Notazione	261
537.6Osservazione	261
537.7Proposizione	261
537.8Proprietà	262
537.9Caratterizzazione degli ordinali limite	262
537.10Nessuna catena discendente di ordinali	262
537.11Intersezione di una classe di ordinali	263
537.12Unione di una classe di ordinali	263
538Funzione Monotona	263
538.1Funzione Crescente	263
538.2Funzione Decrescente	263
539Insiemi ben ordinati sono isomorfi ad un ordinale unico	263
539.1Teorema	263
539.1.1 Dimostrazione	263

539.2 Order type	264
539.2.1 Order type di una classe qualunque	265
539.3 Isomorfismi tra classi ben ordinate	265
540 Intersezione di una sottoclasse degli ordinali	265
541 Ordinale Omega	265
541.1 Teorema	265
541.2 Numeri naturali sono ordinali	265
541.2.1 Dimostrazione	265
541.3 Ordinale omega è il più piccolo ordinale limite	266
541.3.1 Dimostrazione	266
542 Ordinale Successore	266
542.1 Osservazione	266
543 Ordinale Limite	266
544 Proprietà di base dell'ordine sugli ordinali	267
544.1 Proposizione	267
544.1.1 TODO Dimostrazione IDL:MATEMATICA_LM	267
544.2 Teorema	269
545 Topologia sugli ordinali	269
545.1 Ordinale	269
545.2 Classe degli ordinali	269
545.3 Funzioni continue tra classi di ordinali	269
546 Cardinali	270
546.1 Definizione	270
546.2 Numeri naturali sono cardinali	270
546.3 Proprietà dei cardinali	270
546.4 Estremo superiore di un insieme di cardinali è un cardinale	270
546.4.1 Dimostrazione	270
546.5 Corollario	271
546.5.1 Dimostrazione	271
547 Classe ben ordinabile MK	271
547.1 Definizione	271
547.1.1 Osservazione	271
548 Non esistono catene discendenti infinite di naturali	271
548.1 Teorema	271
548.1.1 Dimostrazione	271
549 Classe finita e infinita MK	272
549.1 Definizione	272

550Teorema di Cantor-Bernstein-Schröder	272
550.1Teorema	272
551Numeri di Hartogs	272
551.1Costruzione del numero di Hartogs	272
551.2Teorema	273
552Restrizione di una funzione	273
552.1Generalizzazione in MK	273
552.1.1 Restrizione di una classe MK	274
553Numero di Hartogs di un ordinale	274
553.1Definizione	274
553.1.1 Ordinale omega1	274
553.1.2 Osservazione	274
554Buon ordine di Godel per OrdxOrd	274
555Order Type del prodotto cartesiano di un cardinale è il cardinale stesso	275
555.1Teorema	275
555.1.1 Dimostrazione	275
555.2Equipotenza degli insiemi di funzioni tra cardinali	276
555.2.1 Dimostrazione	276
556Insieme dei sottoinsiemi con order type fissato	277
556.1Definizione	277
556.2Definizione	277
556.3Definizione	277
556.4Cardinalità	277
557Equipotenza dell'insieme delle sequenze finite	278
557.1Teorema	278
557.2Proposizione	278
557.2.1 Dimostrazione	278
557.3Corollario	279
557.3.1 Dimostrazione	279
558Ordine prodotto	279
559Ordine lessicografico	280
560Soluzione Equazione Simone	280
561Segmento iniziale per un ordine	280
561.1Insieme dei predecessori	281
562Sequenza	281
562.1Stringa	281

562.1.1 Insieme delle sequenze finite	281
563Operazione su una classe MK	282
564Axiom of Choice	282
564.1Axiom of Choice	282
565Axiom of global Choice	282
566Funzione definita per ricorsione	282
566.1Theorem 12.3 - Andretta	282
567Teorema di Ricorsione - caso speciale	282
567.1Teorema	283
567.1.1 Dimostrazione	283
568Chiusura transitiva di una classe MK	284
568.1Definizione	284
568.1.1 Osservazione	284
568.2Chiusura transitiva di un insieme	285
568.2.1 Primo metodo	285
568.2.2 Secondo metodo	285
569Chiusura transitiva di una relazione	285
569.1Definizione	285
569.1.1 Osservazione	285
569.2Proprietà	285
569.2.1 Dimostrazione	286
570Teorema di Ricorsione	287
570.1Dimostrazione del Teorema	287
570.1.1 Unicità della classe funzione	287
570.1.2 Esistenza	288
571Rango di una relazione	289
572Relazione binaria estensionale	290
573Lemma del collasso di Mostowski	290
573.1Proposizione	290
573.1.1 Dimostrazione	291
573.2Osservazione	292
574Collasso di Mostowski	292
574.1Definizione	293
575Funzione Aleph	293

576 Punto Fisso di funzioni continue e crescenti sugli ordinali	294
577 Aritmetica degli ordinali	294
578 Rango di un insieme	294
579 Gerarchia di Von Neumann	295
580 Modelli di ZFC nella Gerarchia di Von Neumann	296
581 Absolutezza di una formula	296
581.1Nella teoria degli insiemi	296
582 Zermelo Franklin Set Theory	297
582.1Assiomi di ZF	297
582.2ZFC	297
583 Classe propria e transitiva sottoclasse di Ord è Ord	297
583.1Proposizione	297
583.1.1 Dimostrazione	IDL:MATEMATICA_LM
584 Induzione transfinita per le relazioni ben fondate	298
584.1Teorema	298
584.1.1 Dimostrazione	IDL:MATEMATICA_LM
585 Collezione dei sottoinsiemi ben ordinabili di cardinalità limitata	298
585.1Applicazione ai cardinali	299
586 Classe funzione Beth	299
587 Ipotesi del continuo	299
588 Ipotesi del continuo generalizzata	300
589 CH e GCH sono indipendenti dall'assiomatizzazione della Teoria degli Insiemi	300
590 Forme deboli di AC	300
590.1Axiom of Choice - Indice	300
590.1.1 Axiom of countable Choice	300
590.2Axiom of Choice - Insieme	301
590.3Axiom of Choice - Insieme e Indice	301
590.4Axiom of Dependent Choices	301
590.5Implicazioni tra le forme deboli di AC	301
591 Assiomi equivalenti ad AC	301
591.1Condizioni uniformi per varianti di AC	302
592 Zorn Lemma	303

593 Weak Zorn Lemma	303
594 Principio di Massimalità di Hausdorff	303
595 Catena di implicazioni uniformi MaxHaus, Zorn e wZorn	304
595.1Proposizione	304
595.1.1 Dimostrazione	304
596 AC e comparabilità delle cardinalità	305
597 Unione numerabile di insiemi numerabili è numerabile	305
598 Insieme di formule indipendenti	305
599 Somma di cardinali è minore del prodotto di cardinali	305
599.1Teorema	305
599.1.1 Dimostrazione	305
600 Somma generalizzata di cardinali è minore del supremum dei cardinali	306
601 Cardinalità dell'unione di insiemi è minore del supremum della cardinalità degli insiemi per la cardinalità dell'insieme degli indici	308
601.1Teorema	308
601.1.1 Dimostrazione	308
602 Teorema di Cantor	308
602.1Teorema di Cantor	309
602.2Corollario	309
602.2.1 Dimostrazione	309
603 Funzione cofinale	311
604 Proprietà di funzioni cofinali e cofinalità di un ordinale	311
605 Ordinale regolare	311
606 Cardinali infiniti hanno numero di Hartogs regolare	311
607 Ogni cardinale singolare è estremo superiore di una sequenza crescente di cardinali regolari	311
608 Ordinale elevato alla sua cofinalità è maggiore a se stesso	311
609 Formula di Hausdorff	311
610 Teorema di Bukovsky-Hechler	311
611 Chiusura rispetto ad una collezione di operatori di una sottoclassse	311

612 Maggiorazioni della cardinalità della chiusura rispetto ad una collezione di operatori	311
613 Ordinale è compatto sse zero o successore	311
614 Spazio topologico totalmente disconnesso	311
615 Spazio topologico regolare	311
616 Spazio topologico completamente regolare	311
617 Spazio topologico completamente regolare che non surietta su \mathbb{R} è totalmente disconnesso	311
618 Caratterizzazione funzioni continue e monotone da sottoinsieme degli ordinali agli ordinali	311
619 Caratterizzazione di sottoinsiemi chiusi e illimitati in un cardinale regolare o Ord	311
620 Club set	311
621 Club set di un cardinale è un filtro proprio del cardinale	311
622 Club set di un cardinale è un filtro k-completo	311
623 Filtro kappa-completo	311
624 Ordinale chiuso rispetto ad una operazione	312
625 Insieme degli ordinali chiusi rispetto ad una operazione e sottoinsiemi di un cardinale chiusi e illimitati	312
626 Intersezione diagonale di una sequenza	312
627 Intersezione diagonale di una sequenza di chiusi e illimitati di un cardinale è un chiuso e illimitato	312
628 Sottoinsieme stazionario di un cardinale	312
629 Lemma di Fodor	312
630 Cardinale limite forte	312
631 Universo	312
632 Universo se e solo se nella gerarchia di Von Neumann di un cardinale fortemente inaccessibile	312
633 Proprietà di prodotto e somma generalizzata di cardinali	312

634 A si inietta in B sse B si surietta su A (AC)	313
634.1Teorema	313
634.1.1 TODO Dimostrazione	313
635 Interpretazione di un termine	313
636 Sottostruttura generata da un insieme	313
637 Struttura assiomatizzabile	313
638 Sottostruttura elementare	313
639 Teoria di una struttura con parametri	313
640 Formula con parametri	313
641 Sottostrutture sono elementarmente equivalenti su un insieme sse lo sono su ogni sottoinsieme finito	313
641.1Proposizione	314
642 Estensione di un linguaggio del prim'ordine	314
643 Caratterizzazione di teoria completa	314
643.1Teorema	314
644 Criterio di Tarski-Vaught	314
644.1Teorema (Criterio di Tarski-Vaught)	314
644.1.1 Dimostrazione	314
645 Teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù	316
646 Caratterizzazione sottostruttura elementare su un insieme	317
647 Formula consistente	317
648 Tipo - Teoria dei Modelli	317
648.1Soddisfazione di un tipo	317
648.2Tipo soddisfacibile	317
648.3Tipo finitamente soddisfacibile	317
648.4Tipo di un elemento di una struttura	318
648.4.1 Tuple elementarmente equivalenti su un insieme di parametri	318
648.5Insieme definito da un tipo	318
649 Tipi finitamente soddisfacibili sono soddisfacibili	318
649.1Teorema	318
650 Teorema di Compattezza	319
650.1Teorema di compattezza	319
650.2Corollario	319

651Teorema di Compattezza per tipi	319
651.1Teorema	319
651.1.1 Dimostrazione	319
652Teorema di Löwenheim-Skolem all'insù	320
652.1Teorema	320
652.1.1 Dimostrazione	320
653Immersione elementare si estende ad isomorfismo	320
654Lemma di estensione di un isomorfismo parziale tra ordini	320
654.1Isomorfismo parziale	320
654.2Proposizione	321
654.2.1 Dimostrazione	321
655Funzione Parziale	321
656Teoria lambda-categorica	322
657Teoria degli ordini lineari densi senza punto finale è omega-categorica	322
657.1Teorema	322
657.1.1 Dimostrazione	322
658Teoria dei grafi	322
658.1Grafo	323
658.1.1 Vertice di un grafo	323
658.1.2 Lato di un grafo	323
658.2Teoria dei grafi aleatori	323
658.2.1 Grafo aleatorio	323
659Esiste un grafo aleatorio	323
659.1Proposizione	323
659.1.1 Dimostrazione	324
660Teoria dei grafi aleatori è omega-categorica	324
660.1Teorema	324
660.1.1 Dimostrazione	324
661Categorie di modelli e morfismi parziali	324
661.1Oggetti di una categoria di modelli	324
661.2Morfismi di una categoria di modelli	324
662Definizione	325
663Funzione biiettiva che preserva la verità delle formule atomiche è isomorfismo	325
664Modello lambda ricco	325
664.1Definizione	325

664.1.1 Modello ricco	325
665 Modello lambda universale	325
665.1 Definizione alternativa	326
666 Modello omogeneo	326
667 Modello è ricco sse omogeneo e universale	327
667.1 Teorema	327
667.1.1 Dimostrazione	327
667.2 Versione alternativa	328
668 Morfismi tra modelli lambda-ricchi sono elementari	328
668.1 Teorema	328
668.1.1 Dimostrazione	328
669 Componente connessa di una categoria di modelli e morfismi parziali	330
669.1 Definizione	330
670 Caratterizzazione di modello lambda-ricco	331
670.1 Proposizione	331
670.1.1 Dimostrazione	331
671 Lemma di estensione di morfismi tra modelli ricchi	331
671.1 Teorema	332
671.1.1 Dimostrazione	332
671.2 Modelli ricchi della stessa cardinalità se nella stessa componente connessa sono isomorfi	333
672 Riepilogo] Mappe tra strutture del prim'ordine	333
672.1 Proprietà delle mappe tra strutture del prim'ordine	333
672.2 Mappe TOTALI tra strutture del prim'ordine	334
672.2.1 Morfismo tra strutture del prim'ordine	334
672.2.2 Morfismo pieno tra strutture del prim'ordine	334
672.2.3 Immersione tra strutture del prim'ordine	335
672.2.4 Isomorfismo tra strutture del prim'ordine	336
672.3 Mappe PARZIALI tra strutture del prim'ordine	336
672.3.1 Morfismo parziale tra strutture del prim'ordine	336
672.3.2 Isomorfismo parziale tra strutture del prim'ordine	336
673 Teoria con eliminazione dei quantificatori	337
673.1 Eliminazione dei quantificatori sintattica	337
673.2 Eliminazione dei quantificatori semantica	337
673.3 Eliminazione dei quantificatori	337
674 Chiarimenti sui Passaggi Algebrici	337
674.11. Isomorfismo di quozienti tramite iniezione (Primo WHY)	337
674.22. Nucleo di una composizione con iniezione (Secondo WHY)	338

675Funzioni primitive ricorsive	339
675.1Schema di Composizione di funzioni primitive ricorsive	339
675.2Schema di Ricorsione primitiva	340
675.3Osservazione	340
676Altezza di una funzione ricorsiva primitiva	340
677Esempi di funzioni primitive ricorsive	340
677.1Funzione segno e segno segnato per i naturali	341
678Biiezione canonica tra N e prodotti cartesiani di N	341
678.1Caso base per n=2	341
678.2Generalizzazione	342
679Operatore di minimizzazione non limitato	342
680Funzioni ricorsive	342
680.1Definizione	343
680.1.1 Schema di Composizione di funzioni ricorsive	343
680.1.2 Schema di Ricorsione di funzioni ricorsive	343
680.1.3 Schema di minimizzazione	344
680.2Definizione equivalente di funzioni ricorsive	344
680.2.1 Lemma 1	344
680.2.2 Lemma 2	344
680.2.3 Lemma 3	344
680.2.4 Lemma 4	344
680.2.5 Lemma 5	345
680.2.6 Lemma 6	345
681Inversa di una funzione totale iniettiva e ricorsiva è ricorsiva	345
682Tesi di Church	345
682.1Tesi di Church	345
683Funzione caratteristica	346
684Quoziente, resto, MCD e mcm sono funzioni ricorsive primitive	346
684.1Quoziente e resto	346
684.2MCD mcm	346
685MCD	346
686mcm	346
687Funzioni ricorsive in più dimensioni	346
688Funzioni primitive ricorsive in più dimensioni	347

68	Insieme ricorsivo	347
69	Insieme ricorsivo primitivo	347
691	Geometria Superiore [CORSO]	347
691.1	Prima Parte	347
691.2	Seconda Parte	350
691.2.1	Lezione 1	350
691.2.2	Lezione 2	350
691.2.3	Lezione 3	351
691.2.4	Lezione 4	351
691.2.5	Lezione 5	352
691.2.6	Lezione 6	352
691.2.7	Lezione 7	353
691.2.8	Lezione 8	353
691.2.9	Lezione 9	353
691.2.10	Lezione 10	353
691.2.11	Lezione 11	354
691.2.12	Lezione 12	354
691.3	Varietà differenziabile	354
691.4	Funzioni Cinfinito tra varietà differenziabili	355
691.4.1	Funzioni reali Cinfinito da una varietà differenziabile	355
691.5	Diffeomorfismo tra varietà differenziabili	355
691.6	Coordinate locali su una varietà sono Cinfinito	355
691.7	Forma differenziale in un punto	356
691.8	Forma differenziale	356
691.9	Prodotto wedge tra forme differenziali	356
691.10	Differenziale di una forma	356
691.11	Proprietà del differenziale di forme	357
691.12	Modulo graduato	357
691.13	Gruppo di Coomologia di De Rham	357
691.14	Forma differenziale chiusa	358
691.15	Forma differenziale esatta	358
691.16	Campo vettoriale su una varietà differenziabile	358
691.17	Coomologia di De Rham di \mathbb{R}	358
691.18	Coomologia di De Rham di \mathbb{R}^n	359
691.19	Pullback di una funzione tra varietà differenziabili	359
691.20	Proprietà del pullback di una funzione tra varietà differenziabili	359
691.21	gruppo di coomologia di de Rham di una varietà connessa	360
691.22	Algebra Graduata	360
691.23	Morfismo tra algebre graduate	360
691.24	Prodotto wedge in Coomologia di De Rham	361
691.25	Pullback di una funzione tra varietà differenziabili in coomologia	361
691.26	Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa Coomologia di de Rham	361
691.27	Successione di spazi vettoriali esatta	362
691.28	Complesso di cocatene	362

691.2	Coomologia di un complesso di cocatene	362
691.3	Morfismo tra complessi di cocatene	363
691.3	Morfismo tra complessi di cocatene induce morfismo in coomologia	363
691.3	Successione Esatta di Complessi di Cocatene	363
691.3	Zig-Zag Lemma (per complessi di cocatene)	364
691.3	Teorema di Mayer-Vietoris (in coomologia)	367
691.3	Coomologia della circonferenza	369
691.3	Riduzione della coomologia di un prodotto con la retta reale	371
691.3	Coomologia delle sfere	372
691.3	Forma volume su una varietà differenziabile	374
691.3	Varietà Differenziabile Orientabile	375
691.4	Caratterizzazione varietà differenziabile orientabile tramite forma volume	375
691.4	Supporto di una forma differenziale	375
691.4	Integrazione di forme su varietà differenziabile orientata	375
691.4	Teorema di Stokes	376
691.4	Teorema di invarianza omotopica per la coomologia di De Rham	376
691.4	Spazi topologici omotopicamente equivalenti	376
691.4	Coomologia dello spazio proiettivo reale	376
691.4	Coomologia del toro	380
691.4	Forma volume sulla sfera	380
691.4	Caratterizzazione forma esatta sulla sfera	380
691.5	Caratterizzazione forma esatta nello spazio proiettivo reale di dimensione dispari	380
691.5	Coomologia del nastro di Moebius	380
691.5	TODO Formula di Künneth	380
691.5	Ricoprimento aciclico di una varietà differenziabile	380
691.5	Varietà differenziabile di tipo finito	380
691.5	Varietà differenziabile di tipo finito ha coomologia di dimensione finita	380
691.5.	Varietà differenziabile compatta ha coomologia di dimensione finita	380
691.5	Coomologia a supporto compatto	380
691.5	Coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}	380
691.5	Coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}^n	382
691.5	Successione di spazi vettoriali esatta induce successione esatta dei duali	382
691.6	Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa coomologia a supporto compatto	382
691.6	Estensione a zero di una forma differenziale a supporto compatto	383
691.6	Successione di Mayer-Vietoris per coomologia a supporto compatto	383
691.6	Lemma del cinque	384
691.6	Coomologia in dimensione massima	384
691.6	Esistenza forma differenziabile a supporto compatto che integra a uno	386
691.6	Caratterizzazione forme esatte di grado massimo su varietà orientabile, connessa e compatta	387
691.6	Integrale di forma su sottovarietà non nullo implica forma non esatta	388
691.6	Coomologia delle superfici topologiche compatte orientabili	388
691.6	Caratterizzazione forme esatte di grado massimo a supporto compatto su varietà orientabile connessa	392
691.7	Funzione Propria	393
691.7	Grado di una funzione propria tra varietà differenziabili	393

691.7 Teorema di Sard	393
691.7 Teorema del Grado	393
692 Teoria descrittiva degli insiemi [CORSO]	393
692.1 Materiale	393
692.2 DONE Esercizi	394
692.2.1 Foglio di esercizi 1	394
692.2.2 Foglio di esercizi 2	394
692.2.3 Foglio di esercizi 3	394
692.2.4 Foglio di esercizi 4	395
692.2.5 Foglio di esercizi 5	395
693 Teoria delle categorie [CORSO]	395
693.1 Materiale	395
693.2 Org	395
694 Spazio topologico separabile	396
694.1 Definizione	396
694.2 Sottoinsiemi aperti di un separabile sono separabili	396
695 Sottoinsieme denso	396
695.1 Sottoinsieme codenso	396
695.2 Proprietà di base	396
695.2.1 Proprietà 1	396
695.2.2 Proprietà 2	396
695.3 Caratterizzazione di un insieme denso per intorni	396
696 Spazio topologico primo numerabile	396
696.1 Definizione	396
697 Sistema fondamentale di intorni	396
698 Spazio topologico metrizzabile	396
698.1 Definizione	396
698.1.1 Osservazione	396
698.1.2 Osservazione	397
698.1.3 Spazio topologico completamente metrizzabile	397
699 Spazio metrico	397
699.1 Definizione	397
699.2 Palla aperta in uno spazio metrico	397
699.3 Palla chiusa in uno spazio metrico	397
700 Topologia indotta da una distanza	397
700.1 Definizione	397
700.1.1 Proposizione	397
701 Distanze equivalenti	398

702 Distanze equivalenti inducono la stessa topologia	398
703 Spazio Polacco	398
703.1Definizione	398
703.1.1 Spazio metrico Polacco	398
704 Spazio metrico completo	398
705 Completamento di uno spazio metrico	398
705.1Teoriame	398
706 Isomorfismo tra spazi metrici	398
707 Isometria	398
708 Proprietà di chiusura degli Spazi Polacchi	398
708.1Chiusura per omeomorfismi	398
708.2Chiusura per sottoinsiemi chiusi	398
708.2.1 Dimostrazione	398
708.3Chiusura per prodotto cartesiano numerabile	399
708.3.1 TODO Dimostrazione	399
708.4Chiusura per unione disgiunta numerabile	399
708.4.1 TODO Dimostrazione	399
708.5Chiusura per intersezione numerabile	399
708.5.1 TODO Dimostrazione	399
708.6Sottoinsiemi aperti di spazi polacchi sono polacchi	399
708.6.1 Dimostrazione	399
709 Caratterizzazione dei chiusi in termini di successioni	401
709.1Proposizione	401
709.1.1 Dimostrazione	401
710 Caratterizzazione della chiusura in termini di successioni	401
710.1Teorema	401
710.2Teorema	402
711 Punto di accumulazione di una successione	402
712 Successione di Cauchy	402
713 Proprietà vere definitivamente	402
714 Funzione continua è continua per successioni	402
714.1Teorema	402
714.2Funzione continua per successioni è continua	402
715 Gruppo polacco	402

716Insiemi Gdelta e Fsigma	402
716.1Gdelta	402
716.1.1 Proprietà di chiusura degli insiemi Gdelta	402
716.2Fsigma	402
716.2.1 Proprietà di chiusura degli insiemi Fsigma	403
716.3Insiemi Ksigma	403
716.3.1 Esempi	403
717Teorema di permanenza del segno	403
718Unicità del limite	403
718.1Teorema	403
719Disuguaglianza triangolare	403
720Caratterizzazione dei sottoinsiemi polacchi di uno spazio polacco	403
720.1Teorema	403
720.1.1 Dimostrazione	403
721Intersezione di Gdelta densi è densa in un polacco	404
721.1Proposizione	404
722Oscillazione di una funzione in uno spazio metrico	404
722.1Definizione	404
722.2Insieme dei punti in cui l'oscillazione di una funzione si annulla	404
722.2.1 Continuità	404
722.2.2 Insieme G_δ	404
722.2.3 L'insieme dei punti di continuità di una funzione continua in uno spazio metrizzabile è Gdelta	405
723Funzione Continua in un punto	405
724Estensione di una funzione continua ad un dominio Gdelta	405
724.1Teorema	405
724.1.1 Dimostrazione	405
725Chiuso in uno spazio metrizzabile è Gdelta	407
725.1Proposizione	407
725.1.1 Dimostrazione	407
726Disugaglianze per il diametro di un insieme	407
726.1Proposizione	407
726.1.1 Dimostrazione	408
727Estensione della funzione identità di un sottoinsieme denso	408
727.1Teorema	408
727.1.1 Dimostrazione	408

728	Funzione identità	408
729	Funzione continua per successioni	408
729.1	Definizione	408
730	Spazio topologico sequenziale	408
730.1	Esempi	408
730.1.1	Spazi topologici primo numerabili sono sequenziali	408
731	Esempi di spazi polacchi	409
731.1	Il cubo di Hilbert è uno spazio polacco	409
731.2	Esercizi TDI - Foglio 1	409
731.2.1	Esercizio 1	409
731.2.2	Esercizio 2	412
731.2.3	Esercizio 3	415
731.2.4	Esercizio 4	418
732	Cubo di Hilbert	422
733	Proprietà di base di un ultrametrica	422
733.1	Proprietà	422
733.1.1	Dimostrazione	422
734	Sottospazi di spazi polacchi Fsigma densi e codensi non sono Gdelta	424
734.1	Proposizione	424
735	Spazio di Baire	424
736	Forza	426
737	Proporzionalità Diretta	426
738	Equilibrio Cinematico	426
739	Insieme aperto sse intorno di ogni suo punto	426
740	Complementare di un insieme	426
741	Successione delle distanze tende a zero implica successioni hanno lo stesso limite	426
741.1	Teorema	426
741.1.1	Dimostrazione	426
742	Spazi metrici sono T2	427
743	Topologia discreta	427
744	Ultrametrica	427
744.1	Definizione	427

745 Insieme clopen	428
746 Gruppo archimedeo	428
747 Gruppo ordinato	428
748 Prefascio	428
748.1Prefascio di gruppi	428
749 Gruppo banale	429
750 Categoria degli aperti di uno spazio topologico	429
751 Oggetto terminale di una categoria	429
752 Fascio	429
752.1Assioma di fascio (Esistenza)	430
752.2Assioma di fascio (Unicità)	430
752.3Assioma di fascio	430
753 Esempi di Fasci e Prefasci	430
753.1Forme differenziali come fascio	430
753.2Funzioni Cinfinito da una varietà ai reali come fascio	430
753.3Prefascio delle funzioni costanti a valori in un gruppo	431
753.4Sezioni Cinfinito di un fibrato vettoriale come fascio	431
753.5Fascio delle funzioni olomorfe	431
753.6Fascio delle funzioni olomorfe mai nulle	431
753.7Fascio delle funzioni regolari su una varietà algebrica qp	432
754 Sottoprefascio	432
755 Sottofascio	432
756 Funzione localmente costante	432
757 Funzione localmente costante sse costante sulle componenti connesse	432
758 Funzione costante	433
759 Componente connessa di uno spazio topologico	433
760 Componente connessa per archi di uno spazio topologico	433
761 Fascio di gruppo localmente costante	433
762 Fascio grattacielo	433
763 Morfismo di prefasci	434
763.1Morfismo identità tra prefasci	434

763.2Composizione di morfismi di prefasci	434
763.3Isomorfismo di prefasci	435
764Morfismo di fasci	435
765Esempi di morfismi di prefasci	435
765.1Inclusioni di sottoprefasci sono morfismi di fasci	435
765.2Differenziale di una forma è morfismo di fasci	435
765.3Valutazione in un punto	435
765.4Mappa esponenziale tra fasci di funzioni olomorfe	436
766Spiga di un fascio di gruppi	436
767Fascio come funtore	437
767.1Prefascio come funtore	437
767.1.1 Prefascio di gruppi come funtore	437
768Immersione topologica dello spazio di Baire nello spazio di Cantor	438
768.1Proposizione	438
768.1.1 Dimostrazione	438
769Caratterizzazione dei compatti dello spazio di Baire	440
769.1Proposizione	440
769.1.1 Dimostrazione	440
770Insieme limitato dello spazio di Baire	442
770.1Definizione	442
770.2Insieme definitivamente limitato dello spazio di Baire	442
771Caratterizzazione dei sigma-compatti nello spazio di Baire	442
771.1Proposizione	442
771.1.1 Dimostrazione	443
772Spazio di Baire si surietta in ogni spazio polacco non vuoto tramite una mappa aperta e continua	445
772.1Proposizione	445
772.1.1 Soluzione	445
773Esempi di spighe	445
773.1Spighe del fascio delle funzioni Cinfinito	445
773.2Spighe del fascio localmente costante	446
773.3Spighe del fascio grattacielo	446
773.4Spieghe del fascio delle funzioni olomorfe	446
774Morfismo di fasci induce omomorfismo tra spighe	446
775Fascio associato ad un prefascio	446

776 Fascio associato ad un sottoprefascio	448
777 Fascio nucleo	450
778 Fascio immagine	450
779 Morfismo di fasci iniettivo	451
780 Morfismo di fasci suriettivo	451
781 Successione di morfismi	451
782 Diametro di un insieme	451
783 Ogni chiuso di uno spazio metrico secondo numerabile ammette un ricoprimento numerabile di diametro arbitrariamente piccolo	451
783.1Proposizione	451
783.1.1 Dimostrazione	452
783.2NON Proposizione	452
783.2.1 Controesempio	453
784 Successione di fasci esatta	454
784.1Caratterizzazione morfismo di fasci iniettivo tramite successione esatta	454
784.2Caratterizzazione morfismo di fasci suriettivo tramite successione esatta	454
785 Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite sezioni	454
786 Spazio di Lindelöf	455
786.1Definizione	455
787 Sottoricoprimento	455
788 Spazio topologico secondo numerabile implica Lindelöf	455
789 Ogni base di uno spazio topologico secondo numerabile ammette una sottobase numerabile	455
789.1Teorema	455
790 In Spazio metrico ogni aperto è F _{sigma}	455
790.1Teorema	455
791 Spazio topologico secondo numerabile implica separabile	456
792 Sistema fondamentale di intorni in uno spazio metrico	456
793 Immersione topologica	456
794 Compatto in un Hausdorff è chiuso	456
794.1Teorema	456

794.1.1 Dimostrazione	456
795 Teorema di Tychonoff	456
796 Chiuso in un compatto è compatto	456
797 Spazio di Baire non è sigma-compatto	456
798 Rango di Cantor-Bendixson	456
798.1 Definizione	456
798.1.1 Osservazione	456
798.2 Proprietà di derivata e rango di Cantor-Bendixson per spazi polacchi	457
798.2.1 Dimostrazione	457
798.3 Esempi di spazi polacchi con rango di Cantor-Bendixson arbitrario	458
798.3.1 Soluzione	458
799 Punto isolato	461
800 Caratterizzazione insieme mai denso	462
800.1 Proposizione	462
800.1.1 Dimostrazione	462
801 Insieme mai denso	463
802 Proprietà della gerarchia di Borel	463
802.1 Proposizione	463
802.1.1 Dimostrazione	464
803 Gerarchia di Borel	465
804 Proprietà insiemi magri, comagri, non magri	465
804.1 Proposizione	465
804.1.1 Dimostrazione	466
805 Classi ambigue di un sottospazio polacco nella gerarchia di Borel	466
805.1 Proposizione	466
805.1.1 Dimostrazione	467
806 Classe di Borel dell'insieme dei punti di derivabilità di una funzione reale	467
806.1 Proprietà	467
806.1.1 Dimostrazione	468
807 Insieme magro	469
807.1 Definizione	469
807.2 Definizione	469
808 Caratterizzazione dei punti non isolati di uno spazio polacco	470
808.1 Proposizione	470

808.1.1 Dimostrazione	470
809Caratterizzazione dei sottoinsiemi chiusi ma non aperti di un polacco	472
809.1Proposizione	472
809.1.1 Dimostrazione	472
810Esempi di sottoinsiemi pi03 completi	474
810.1Esercizio 3	474
810.1.1 Soluzione	474
811Esempi di sottoinsiemi sigma02 completi	477
811.1Esercizio 4	477
811.1.1 Soluzione	477
812Esempi di sottoinsiemi analitici	479
812.1Esercizio 5	479
812.1.1 Soluzione	479
813Gioco di Banach-Mazur	479
814Gioco di Banach-Mazur unfolded	480
814.1Applicazione del Teorema di Gale-Stewart	480
814.1.1 Dimostrazione	480
815Logical Game	482
815.1Definizione	482
815.1.1 Gioco Logico totale	482
815.1.2 Strategia per un gioco logico	482
815.2Bibliography	483
816Giochi di Gale-Stewart	483
817Strategia per un gioco di Gale-Stewart	483
818Gioco di Gale-Stewart con posizioni ammissibili	484
819Albero (Teoria descrittiva degli insiemi)	484
820Albero potato	484
821Corpo di un albero	484
822Posizioni ammissibili in un gioco logico	484
823Giochi logici equivalenti	485
823.1Definizione	485
824Teorema di Gale-Stewart	485
824.1Teorema	485

825Proprietà di Baire	485
825.1Insiemi uguali modulo un magro	485
825.2Definizione	485
826Spazio topologico di Baire	485
826.1Definizione	485
826.1.1 Sottospazi aperti di uno spazio di Baire è uno spazio di Baire	486
827Gioco di Choquet	486
828Caratterizzazione degli spazi di Baire tramite il gioco di Choquet	486
828.1Teorema	486
828.2Spazio di Choquet	486
828.2.1 Definizione	486
828.2.2 Osservazione	487
828.2.3 Aperti non vuoti di spazi di Choquet sono Choquet	487
828.2.4 Prodotto di spazi di Choquet è Choquet	487
829Caratterizzazione di magri e comagri tramite il gioco di Banach-Mazur	487
829.1Teorema I	487
829.1.1 Dimostrazione	487
829.2Teorema II	489
829.2.1 Dimostrazione	489
830Insiemi analitici di un polacco hanno BP	491
830.1Teorema (Lusin-Sierpiński)	491
830.1.1 Dimostrazione	491
831Magrezza dentro ad un polacco tramite gioco di Banach-Mazur	491
831.1Teorema	491
831.1.1 Dimostrazione	491
832INPUT	492
833DA FINIRE	493
834BIB	494
835Proprietà di chiusura delle funzioni primitive ricorsive	494
836Proprietà di chiusura degli insiemi ricorsivi	496
837Funzioni ricorsive definite per casi	497
837.1Proposizione	497
837.1.1 Dimostrazione	497
838Funzioni ricorsive per minimizzazione su un predicato	497
838.1Proposizione	497

838.1.1 Dimostrazione	497
839 Algoritmo di Tarski-Kuratowski	498
840 Insiemi disgiunti	498
841 Insieme semiricorsivo	498
841.1 Definizione	498
841.2 Insiemi ricorsivi sono semiricorsivi	498
842 Proprietà di chiusura degli insiemi semiricorsivi	498
842.1 Proposizione	498
842.1.1 Dimostrazione	499
843 Teorema di Post	499
844 Insieme semiricorsivo come range di funzioni ricorsive	500
844.1 Proposizione	500
844.1.1 Dimostrazione	501
845 Insieme ricorsivo infinito come range di funzione ricorsiva totale crescente	501
845.1 Proposizione	501
845.1.1 Dimostrazione	501
845.2 Corollario	502
846 Separazione tramite boreiani di insiemi invarianti per una relazione di equivalenza su un Polacco	502
846.1 Esercizio 1	502
846.1.1 Soluzione	502
847 Insieme parzialmente trasversale per una relazione di equivalenza	504
848 Insieme trasversale per una relazione di equivalenza	504
849 Selettore per una relazione di equivalenza	504
850 Proprietà insieme parzialmente trasversale per una relazione di equivalenza in uno spazio polacco	504
850.1 Esercizio 2	504
850.1.1 Soluzione	504
851 Proprietà insieme trasversale e selettore per una relazione di equivalenza in uno spazio polacco	505
851.1 Esercizio 3	505
851.1.1 Soluzione	506
852 Coanalitici sono unione di omega1 boreiani	507
852.1 Esercizio 4	507

852.1.1 Soluzione	508
853 Ogni insieme analitico non numerabile ammette un sottoinsieme borealiano non numerabile	510
854 Base debole di uno spazio topologico	511
855 Insieme analitico	511
855.1 Definizione	511
855.2 Proposizione	511
856 sigma-algebra	512
857 Caratterizzazione BP tramite gioco di Banach-Mazur	512
857.1 Lemma	512
857.1.1 Dimostrazione	513
858 Codifica di un insieme numerabile	513
859 Insiemi ricorsivi tramite codifica	514
859.1 Definizione	514
859.2 Esempi	514
860 Teorema Cinese dei resti	514
861 Funzione beta di Gödel	514
862 Codifica delle sequenze finite tramite beta di Gödel	515
862.1 Lemma della Funzione di Gödel	515
862.2 Definizione	515
862.3 Proprietà	515
862.4 Funzioni Ausiliari alla codifica di Gödel	515
862.5 Proposizione	516
863 Numeri naturali coprimi	516
864 Classe di resto	516
865 Funzione memoria	516
865.1 Definizione	516
865.2 Lemma	516
866 Generalizzazione schema di Ricorsione tramite la funzione memoria	517
866.1 Proposizione	517
867 Teorema di Forma Normale di Kleene	517
867.1 Teorema	517

868Funzioni ricorsive e loro grafico	517
868.1Grafico di una funzione ricorsiva totale è ricorsivo	517
868.2Funzioni parziali con grafico semiricorsivo sono ricorsive	517
868.3Grafico di una funzione ricorsiva parziale è semiricorsivo	518
868.4Funzione ricorsiva sse il suo grafico è semiricorsivo	518
868.5Caratterizzazione funzioni ricorsive tramite grafico	518
869Funzioni ricorsive e loro dominio	518
869.1Dominio di funzione parziale ricorsiva è semiricorsivo	518
870Insieme semiricorsivo come dominio di funzione ricorsiva parziale	518
870.1Proposizione	518
871Funzione ricorsiva parziale con dominio ricorsivo è restrizione di funzione ricorsiva totale	519
871.1Proposizione	519
872Complessità di una formula nel linguaggio dell'aritmetica	520
872.1Notazione	520
872.1.1 Quantificatore limitato nel linguaggio dell'aritmetica	520
872.2Definizione	521
872.3Osservazioni	521
872.4Descrizione esplicita	522
873Complessità di un insieme definibile nel modello standard	522
873.1Notazione	522
873.2Definizione	523
873.3Esempi di predici Delta0 definibili	523
873.4Proprietà di chiusura delle classi degli insiemi definibili	524
874Definibilità e ricorsività	524
875Algebra di Boole	525
876Relazione tra MCD e mcm	526
877Modello standard dell'aritmetica	526
878Aritmetica di Peano del second'ordine	526
879Aritmetica di Robinson	526
880Aritmetica di Peano del prim'ordine	527
881Numerali	527
882Numeri standard e numeri non standard per l'aritmetica di Robinson	527
883Insieme rappresentato da una formula	528

884Funzione totale rappresentata da una formula	528
885Insieme rappresentabile	528
886Nota	528
887Aritmetica di Robinson rappresenta funzioni ricorsive totali e predici	528
888Logica del second'ordine	530
889Descrizione modelli dell'aritmetica di Robinson	530
890Aritmetizzazione della sintassi	531
890.1Buona codifica di un linguaggio	531
890.2Buona codifica dei termini di un linguaggio	531
890.3Buona codifica delle formule di un linguaggio	532
890.3.1 Proprietà	532
890.4Codifica della sostituzione di termini a variabili	533
890.4.1 Proposizione	533
890.5Notazioni	533
891Sottotermino del prim'ordine	534
892Sottoformula del prim'ordine	534
893Sostituzione di termini in un termine	534
894Teoria ricorsivamente assiomatizzabile	534
895Codifica delle dimostrazioni a partire dagli assiomi	534
895.1Definizione	535
895.2Proposizione	535
896Primo Teorema di Incompletezza di Gödel	535
896.1Premesse	535
896.1.1 Lemma 1	535
896.1.2 Lemma 2	536
896.1.3 Lemma di diagonalizzazione per le formule dell'aritmetica di Robinson	536
896.2Primo Teorema di Incompletezza di Gödel	537
896.2.1 Dimostrazione	537
896.3Conseguenze	538
896.3.1 Corollario 1	538
896.3.2 Complessità e dimostrabilità nell'aritmetica di Robinson	538
896.3.3 Teorema	538
897Teoria Coerente	539
898Teoria omega-coerente	539

898.1 Teoria omega-coerente determina l'appartenenza a sottoinsiemi semiricorsivi	539
899 Teoria decidibile	540
900 Teoria decidibile è ricorsivamente assiomatizzabile	540
901 Teoria essenzialmente indecidibile	540
902 Teoria completa e ricorsivamente assiomatizzabile è decidibile	540
902.1 Teorema	540
902.1.1 Idea di dimostrazione	540
903 Estensione finita di una teoria decidibile è decidibile	540
903.1 Teorema	540
903.1.1 Idea di dimostrazione	541
903.2 Corollario	541
904 Aritmetica di Robinson è essenzialmente indecidibile	541
904.1 Teorema	541
905 Teoria decidibile e coerente ha estensione decidibile coerente e completa	541
905.1 Teorema	541
905.1.1 Idea di dimostrazione	541
906 Teorema dell'indefinibilità della verità	541
906.1 Teorema di Tarski	542
907 Teorema di Church	542
907.1 Teorema	542
908 Analisi non-standard	542
908.1 Teorema	542
908.2 Notazione	542
908.3 Numeri iperreali	543
908.4 Proprietà	543
908.4.1 Lemma 1	543
908.4.2 Lemma 2	543
908.4.3 Campo degli iperreali non è archimedico	543
908.4.4 Caratterizzazione dei limiti per gli iperreali	543
908.4.5 Caratterizzazione funzioni continue tramite gli iperreali	544
908.4.6 Caratterizzazione funzioni uniformemente continue tramite gli iperreali	544
908.5 Altre definizioni	544
908.5.1 Monade di un iperreale	544
909 Campo Ordinato	544
910 Funzione Uniformemente Continua	544

911	Chiusura logica di una teoria	544
911.1	Definizione	544
912	Notazione della TEORIA DEI MODELLI	545
912.1	Variabili	545
912.2	Funzioni	545
912.3	Insiemi definiti da una formula o da un tipo	545
912.4	Insieme delle formule	545
912.5	Cardinalità di un linguaggio del prim'ordine	545
913	Aritmetica dei cardinali	546
913.1	Somma e prodotto	546
913.2	Cardinal exponentiation	546
914	Formule risolutive equazioni polinomiali	547
914.1	Quadratic Equation	547
915	Teoria dei gruppi abeliani	547
916	Lemma di estensione di un isomorfismo parziale tra gruppi abeliani	547
917	Teoria dei gruppi abeliani privi di torsione	547
918	Teoria dei gruppi abeliani divisibili	547
919	Lemma di estensione di un isomorfismo parziale tra gruppi abeliani divisibili	547
920	Teoria dei gruppi abeliani privi di torsione è categorica	547
921	Modelli lambda ricchi nella categoria dei modelli della teoria TFAG	547
922	Teoria dei domini di integrità	547
923	Teoria dei campi	547
924	Soddisfazione di un tipo e mappa elementare	547
925	Modello lambda saturo	548
926	Modello saturo	548
927	Esistenza di modelli saturi di cardinalità fissata	548
927.1	Teorema	548
928	Modello lambda saturo sse lambda ricco	548
928.1	Teorema	549
929	Modello MOSTRO	549
929.1	Notazione	549

929.2Topologia indotta da un insieme sul modello mostro	549
930Insieme definibile e automorfismi in un MODELLO MOSTRO	550
931Catena elementare di modelli	550
931.1Definizione	550
931.2Unione di una catena elementare	550
931.2.1 Lemma	550
932Topologia zero-dimensionale	550
933Elementi algebrici e definibili in un modello mostro	551
933.1Definizione	551
933.1.1 Osservazione	551
933.2Elemento algebricamente indipendente da un insieme in un modello mostro	551
934Caratterizzazione chiusura algebrica in un modello mostro	552
934.1Teorema	552
935Caratterizzazione chiusura definibile in un modello mostro	552
935.1Teorema	552
936Orbita del gruppo degli automorfismi che fissano un sottoinsieme e tipo di un elemento	552
936.1Proposizione	553
937Automorfismo e chiusura algebrica in un modello mostro	553
937.1Proposizione	553
938Struttura minimale	553
939Struttura fortemente minimale	554
940Teoria fortemente minimale	554
941Teorema di Caratterizzazione	554
942Principio dello scambio per chiusura algebrica in un modello mostro	554
942.1Teorema	554
943Base di un insieme dentro un modello mostro	554
943.1Definizione	555
943.2Caratterizzazione	555
944Teorema della Base dentro un modello mostro	555
944.1Teorema	555
944.2Dimensione di un insieme dentro un modello mostro	555

945Teoria fortemente minimale è lambda-categorica	555
945.1Teorema	556
945.2Corollario	556
946Classi equipotenti MK	556
946.1Definizioni	556
947Relazione binaria riflessiva	556
948Relazione binaria irriflessiva	556
949Relazione binaria simmetrica	556
950Relazione binaria antisimmetrica	556
951Relazione binaria connessa	557
952Relazione binaria transitiva	557
953Preordine	557
954Order topology	557
955Complessità di una formula nel linguaggio della teoria degli insiemi	557
956Complessità di una formula	557
957Assolutezza delle formule tra un insieme transitivo e un modello di MK	557
958Insieme transitivo e assiomi di ZFC	558
959Cardinalità dei reali	558
960Teichmüller-Tukey Lemma	558
961Axiom of Multiple Choices	558
962Kurepa's maximality principle	558
963Classe di equivalenza di Scott	558
964Metodi Matematici per il Machine Learning [CORSO]	558
964.1Introduzione (De Rossi)	558
964.2Analisi Matematica (Cordero)	559
964.3Cordero	561
964.3.1 Lezione 1	561
964.3.2 Lezione 2	561
964.3.3 Lezione 3	561
964.3.4 Lezione 4	561

964.3.5 Lezione 5	561
964.3.6 Lezione 6	562
964.3.7 Lezione 7	562
964.3.8 Lezione 8	562
965 Neurone Artificiale	562
965.1 Input type di un neurone	563
965.2 Input efficiency	563
965.3 Approssimazione di una funzione continua	564
966 Funzioni di attivazione	565
966.1 Funzioni Lineari	566
966.2 Step Functions	566
966.2.1 Threshold step function	566
966.2.2 Bipolar step function	566
966.3 Hockeystick Functions	567
966.3.1 Funzione di attivazione ReLU	567
966.3.2 PReLU	568
966.3.3 ELU	568
966.3.4 SELU	568
966.3.5 SLU	568
966.3.6 Funzione Softplus	570
966.4 Funzioni Sigmoidali	570
966.4.1 Funzione Logistica	570
966.4.2 Tangente Iperbolica	572
966.4.3 Arcotangente	573
966.4.4 Softsign	573
966.4.5 Piecewise Linear	574
966.5 Bumped-type Functions	575
966.5.1 Gaussiana	575
966.5.2 Doppio esponenziale	575
967 Rete Neurale	575
967.1 Rete Neurale Feedforward	576
967.1.1 Rete Neurale ReLU-feedforward	579
968 Funzioni costo (Machine Learning)	580
968.1 La Funzione Errore Supremum	580
968.2 La Funzione Errore Norma L ₂	580
968.2.1 Interpretazione Geometrica	580
968.3 Funzione costo MSE (Machine Learning)	581
968.4 Regolarizzazione della Funzione Costo (Machine Learning)	581
969 Funzione di Heaviside	582
970 Spazi L_p	582

971 Gradiente di una funzione	582
972 Prodotto Scalare	582
973 Distribuzione (Analisi Matematica)	582
974 Delta di Dirac	582
975 Misura di Baire	583
976 Funzione discriminatoria (Machine Learning)	583
977 Misura finita	584
978 Misura con segno	584
979 Misura Regolare	584
980 Funzione sigmoidale	584
981 Limite (Analisi Matematica)	584
982 Funzioni sigmoidali sono discriminatorie per le misure di Baire sul cubo unitario	584
983 Spazio Normato	584
984 Overfitting	584
985 Moltiplicatore di Lagrange	584
986 p-norma in R ⁿ	584
987 Processo di apprendimento di una rete neurale	584
987.1Errori di Training e di Test	585
987.2Iperparametri di un processo di apprendimento	585
987.3Alcuni esempi di algoritmi di apprendimento	586
988 Massimo e minimo di una funzione reale	586
989 Minimizzazione di una funzione reale	586
990 Teorema di Fermat sui punti stazionari	587
991 Funzione derivabile	587
992 Matrice Hessiana	588
993 Funzioni iperboliche	588
994 Funzioni trigonometriche	588

995 Teoremi di Dini per la convergenza uniforme	588
996 Convergenza uniforme	588
997 Successione di funzioni	588
998 Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz	589
999 Teorema di Lagrange	590
1000 Corollari del teorema	590
1001 Universal Approximation Theorems (Machine Learning)	592
1001.1.Unidimensionali	592
1001.2.Multidimensionali	592
1001.2.1.Funzioni continue	592
1001.2.2.Funzioni L1	592
1001.2.3.Funzioni L2	592
1001.2.4.Funzioni Misurabili	592
1001.2.5.Funzioni Lq	592
1002 Funzione periodica	592
1003 Applicazioni dei Teoremi Tauberiani di Wiener al Machine Learning	593
1004 Trasformata di Fourier	595
1005 Span	595
1006 Proprietà vera quasi ovunque	595
1007 Misura di Lebesgue	595
1008 Funzione semplice	598
1009 Derivata (Distribuzioni)	598
1010 Supporto di una funzione a valori in R	598
1011 Insieme limitato	598
1012 Funzione lineare a tratti	598
1013 Funzione costante a tratti	598
1014 Punto Critico di una funzione reale	598
1015 Funzione reale differenziabile	599
1016 Punto di sella	599

101	Matrice definita positiva	599
1017.	Matrice semidefinita positiva	599
1018	Matrice definita negativa	599
1018.	Matrice semidefinita negativa	599
1019	Matrice indefinita	599
1020	Chain rule	599
1021	Derivata direzionale	599
1022	Prodotto di convoluzione	599
1023	Funzioni integrabili secondo Lebesgue	599
1024	Densità di probabilità	599
1025	Algebra di Borel	600
1026	Funzione misurabile	600
1027	Misura di probabilità	600
1028	Misura di Radon	600
1029	Funzione limitata	600
1030	Misura	601
1031	Rete Neurale che approssima funzioni continue periodiche	603
1032	Convergenza uniforme sui compatti	606
1033	One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni continue sul cubo	607
1034	Exact Learning (Machine Learning)	611
1034.	Exact Learning non è sempre possibile	611
1035	Archivio TikZ	612
1035.	TikZ - Rete Neurale ReLU-feedforward	612
1036	Baurea Magistrale in Matematica [TOC]	614
1037	Applicazione alle reti neurali	615
1038	Funzione Analitica	616
1039	Concentrazione	616
1039.	Metodi per concentrarsi (e mantenere la concentrazione) <2025-07-09 Mer> . . .	616

104	Misura di Baire sul cubo nulla se nulla su tutti i semispazi	616
104	Percettrone	616
1041.	Interpretazione Geometrica	617
1041.	Generalizzazione: classificazione binaria	618
1041.	Perceptron Learning Algorithm	620
104	Regressione Lineare	622
104	Neurone Sigmoidale	622
1043.	Regressione Logistica tramite neurone sigmoidale	623
104	AND logico	625
104	OR logico	625
104	KOR logico	625
104	Valore atteso	625
104	Begge dei grandi numeri	625
104	Mean Square Error	625
1049.	Empirical MSE	625
105	Bias-Varianza tradeoff	625
1050.	Bias-Varianza tradeoff nel Machine Learning	625
105	Bias	626
105	Varianza	626
105	Subderivata	626
105	Subdifferenziale	626
105	Subgradiente	627
105	Algoritmo di Gradient Descent	627
1056.	Gradient Descent con passo fissato	628
1056.	Gradient Descent a passo variabile	629
1056.	Line Search Method	629
1056.	Algoritmo di Stochastic Gradient Descent	629
105	Metodo del subgradiente	630
105	Teoria dell'informazione (Shannon)	632
1058.	Entropia (Teoria dell'informazione)	633
1058.	Divergenza di Kullback-Leibler	633

105 Insieme convesso	633
106 Unzione convessa	633
106 Attesa condizionata	633
106 Probabilità condizionata	634
106 Spazio di Probabilità	634
106 Mariabile aleatoria	634
106 Eventi indipendenti	634
106 Distrubuzione di una variabile aleatoria	634
106 Neurone ad input continuo	634
1067.Variabile aleatoria assolutamente continua	635
106 Gradient Descent con Backpropagation per una RNFF	635
1068.Problemi con la Backpropagation	637
1068.Inizializzazione dei pesi - Xavier Initialization (Machine Learning)	637
106 Pooling	639
1069.Pooling Layer in una rete neurale	640
107 Rete di Convoluzione	642
1070.Caso unidimensionale	642
1070.Caso due dimensionale	643
107 Rete Neurale che implementa lo XOR	643
107 Sigma-algebra come campo di informazione	643
1072.Contesto: σ -algebra come struttura di conoscenza	643
1072.La σ -algebra come insieme delle informazioni disponibili	644
1072.Esempio: partizionare lo spazio degli eventi	644
1072. σ -algebra generata da una variabile aleatoria	644
1072.4.Significato informativo	645
1072.4.Esempio esplicito	645
1072.4.Interpretazione informativa	645
1072.4.Teorema: caratterizzazione di $\sigma(X)$	645
1072.4.Conclusione	646
1072.Variabili condizionate e informazione	646
1072.Estensione al caso multidimensionale	646
1072.Informazione nel tempo: filtrazioni	646
1072.Partizioni e conoscibilità	646
1072.Riepilogo	647

107 3igma-algebra generata da una variabile aleatoria	647
107 Leggi di De Morgan	647
107 Approssimazione per Regressione Lineare (Machine Learning)	647
107 Curva	648
107 Vettori perpendicolari	648
107 Metodo dell'Hessiana	648
107 Metodo di Newton	648
108 Serie di Taylor	648
108 STUDIARE	648
1081.Metodo di studio proposto	648
1081.1.Struttura giornaliera in blocchi Pomodoro (50/10)	648
1081.1.2Giorni full-focus	648
1081.2.Criticità e ottimizzazioni	648
1081.2.1Equilibrio e stanchezza	648
1081.2.2Spaced repetition integrata	648
1081.2.3Varietà di task	649
1081.2.4Micro-obiettivi e transizioni	649
108 Relazione tra reali e omega1	649
108 Teoria dei modelli [CORSO SEL2025]	650
1083.Lezione 1	650
1083.1.1Introduzione	650
1083.1.2Immersioni e immersioni elementari	651
1083.1.3Teorema di Lowenheim-Skolem all'ingiù	652
1083.1.4Teoria degli ordini lineari	653
1083.1.5Teoria dei grafi	653
1083.Lezione 2	653
1083.2.1Tipi	656
1083.Lezione 3	658
1083.3.1Saturazione	658
1083.3.2Modello mostro	661
1083.Lezione 4	662
1083.4.1Eliminazione dei quantificatori	663
1083.4.2Insiemi definibili e algebrici	664
1083.4.3Teorie Fortemente Minimali	667
1083.Lezione 5	667
108 Scuola Estiva di Logica [CORSO]	670
1084.Corsi	670

1084.2. Lectio Magistralis	670
1084.3. Talks Informali	670
1085. Teoria della ricorsività [CORSO SEL2025]	671
1085.1. Lezione 1	671
1085.1.1. Notazione	671
1085.1.2. Modelli di computazione	671
1085.1.3. Funzioni parziali ricorsive	671
1085.2. Lezione 2	673
1085.2.1. Turing's computability	673
1085.2.2. Tesi di Church-Turing	676
1085.3. Lezione 3	676
1085.3.1. Conseguenze di CTT	676
1085.3.2. Teorema di Punto fisso di Kleene	677
1085.3.3. Indecidibilità	678
1085.3.4. Computable enumeration	679
1085.4. Lezione 4	680
1085.4.1. Riducibilità <i>many-one</i>	680
1085.4.2. Teorema di Gödel	682
1086. Reverse Mathematics [CORSO SEL2025]	682
1086.1. Introduzione	682
1086.2. Aritmetica del second'ordine \mathcal{L}_2 e Z_2	683
1086.3. "Big Five"	684
1086.3.1. RCA_0	684
1086.3.2. WKL_0	685
1086.3.3. ACA_0	685
1086.3.4. ATR_0	685
1086.3.5. $\Pi^1_1 - CA_0$	685
1086.3.6. Riferimenti	685
1086.4. Esempio	686
1087. Operazioni	686
1088. Chi ha paura delle incoerenze? [CORSO SEL2025]	686
1089. In lode della Quasi Verità: Algebre di Boole Perturbate, la loro Logica e Applicazioni [CORSO SEL2025]	686
1090. Istituzioni di Algebra [CORSO]	686
1090.1. Introduzione	782
I Algebra commutativa di base	783
1090.2.1. Lezione 1 - <2025-09-22 Lun>	783
1090.2.1.1. Anelli e ideali	783
1090.2.2. Lezione 2 - <2025-09-23 Mar>	788

1090.4 Lezione 3 - <2025-09-29 Lun>	793
1090.5 Lezione 4 - <2025-09-30 Mar>	799
1090.5.1 Spec di un anello [Parentesi estemporanea fuori programma]	801
1090.5.2 Moduli	803
1090.6 Lezione 5 - <2025-10-06 Lun>	804
1090.7 Lezione 6 - <2025-10-07 Mar>	810
1090.8 Lezione 7 - <2025-10-10 Ven>	815
1090.8.1 Prodotto tensoriale di A -moduli	816
1090.8.2 Estensione e restrizione degli Scalari	818
1090.9 Lezione 8 - <2025-10-13 Lun>	819
1090.9.1 Prodotto tensoriale	819
1090.9.2 Proprietà del prodotto tensoriale	819
1090.9.3 Moduli Piatti	821
1090.9.4 Limite Diretto (Iniettivo)	821
1090.9.5 Limite Inverso (Proiettivo)	823
1090.10 Lezione 9 - <2025-10-14 Mar>	824
1090.10.1 Anelli e Moduli di Frazioni	824
1090.11 Lezione 10 - <2025-10-17 Ven>	829
1090.12 Lezione 11 - <2025-10-20 Lun>	834
1090.12.1 Decomposizione primaria di ideali	835
1090.13 Lezione 12 - <2025-10-21 Mar>	837
 II Algebra commutativa avanzata	840
1090.14 Lezione 13 - <2025-10-24 Ven>	840
1090.14.1 Condizioni Catenarie (Noetherianità - Artinianità)	840
1090.14.2 Moduli e Anelli Noetheriani e Artiniani	841
1090.14.3 Esempi e Controesempi	841
1090.14.4 Spazi Vettoriali	844
1090.14.5 Caratterizzazione dei Moduli Noetheriani	845
1090.15 Lezione 14 - <2025-10-27 Lun>	846
1090.16 Lezione 15 - <2025-10-28 Mar>	852
1090.17 Lezione 16 - <2025-10-31 Ven>	857
1090.17.1 Anelli Noetheriani	859
1090.18 Lezione 17 - <2025-11-03 Lun>	861
1090.18.1 Teorema della base di Hilbert	863
1090.19 Lezione 18 - <2025-11-04 Mar>	866
1090.19.1 Subanelli e Noetherianità	870
1090.19.2 Divisori dello Zero e Decomposizione Primaria	871
1090.20 Lezione 19 - <2025-11-07 Ven>	872
1090.21 Lezione 20 - <2025-11-10 Lun>	878
1090.21.1 Teoremi su Anelli Artiniani e Noetheriani	878
1090.21.2 Teorema di Struttura di Moduli su PID	879
1090.22 Lezione 21 - <2025-11-11 Mar>	882
1090.23 Lezione 22 - <2025-11-14 Ven>	887
1090.23.1 Formula canonica di Jordan	887

1090.24zione 23 - <2025-11-17 Lun>	893
1090.24Dipendenza Integrale	893
1090.24Caratterizzazioni della Dipendenza Integrale	895
1090.24Chiusura Integrale	896
1090.24Comportamento con Quozienti e Localizzazioni	896
1090.25zione 24 - <2025-11-18 Mar>	897
III Tecniche computazionali per ideali di $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$	904
1090.26zione 25 - <2025-11-21 Ven>	904
1090.26Monoide	904
1090.27zione 26 - <2025-11-24 Lun>	908
1090.27Monomoduli	910
1090.27Divisione	910
1090.28zione 27 - <2025-11-25 Mar>	913
1090.28Divisioni in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$	917
1090.29zione 28 - <2025-11-28 Ven>	918
1090.29Divisione con Resto con Term Order	918
1090.29Problema dell'Appartenenza Ideale (Ideal Membership Problem)	920
1090.29Base di Gröbner	921
1090.30zione 29 - <2025-12-01 Lun>	922
1090.30Module Membership Problem	922
1090.30Esistenza della Base di Groebner	923
1090.30Basi di Groebner ridotte	924
1090.30Criterio di Buchberger	924
1090.31zione 30 - <2025-12-02 Mar>	926
1090.31Criterio di Buchberger	926
1090.31Algoritmo di Buchberger	930
1090.32zione 31 - <2025-12-05 Ven>	931
1090.32Teorema di Eliminazione	935
1090.33zione 32 - <2025-12-09 Mar>	937
1090.34zione 33 - <2025-12-15 Lun>	941
1090.34Applicazioni alla Geometria Algebrica	941
1090.34Nullstellensatz di Hilbert	942
1090.TODO Lezione 34 - <2025-12-16 Mar>	946
1090.35zione 35 - <2025-12-17 Mer>	946
1090.36Algoritmo di calcolo intersezioni di ideali	948
1090.36Calcolo del minimo comune multiplo	949
1090.36Colon tra ideali	950
1090.36zione 36 - <2025-12-19 Ven>	951
1090.37Automatic Geometric Theorem Proving	951
1090.37Colorazione dei grafi	954
109Teoria dei modelli [CORSO]	957
1091.Istruzioni Esame	957
1091.2Lezione 1 - <2025-09-23 Mar>	957

1091.2.	Ripasso	957
1091.2.	Preservation Theorem	959
1091.	Lezione 2 - <2025-09-24 Mer>	960
1091.3.	Preservation Theorem	960
1091.3.	Back-and-forth conditions for QE	961
1091.3.	Model-completeness	962
1091.	Lezione 3 - <2025-09-30 Mar>	962
1091.	Lezione 4 - <2025-10-01 Mer>	965
1091.5.	Modelli primi e modelli atomici	965
1091.5.	Categoricità numerabile	967
1091.	Lezione 5 - <2025-10-07 Mar>	969
1091.6.	Teorie sottili (<i>small</i>)	970
1091.	Lezione 6 - <2025-10-08 Mer>	972
1091.7.	Linguaggio a più sorte	972
1091.7.	Linguaggio del secondo ordine	973
1091.7.	Immaginari	973
1091.	Lezione 7 - <2025-10-14 Mar>	974
1091.8.	Sottostrutture elementari	974
1091.	Lezione 8 - <2025-10-15 Mer>	977
1091.9.	Eliminazione degli immaginari	977
1091.TODO	Lezione 9 - <2025-10-21 Mar>	980
1091.10	Fbrmule e tipi invarianti	980
1091.DONE	Lezione 10 - <2025-10-22 Mer>	982
1091.11DONE	Sequenze di Morley	982
1091.11	Sequenze di indiscernibili	982
1091.11	Eredi e coeredi	983
1091.DONE	Lezione 11 - <2025-10-28 Mar>	984
1091.12	Teorema di Ramsey	985
1091.DONE	Lezione 12 - <2025-10-29 Mer>	985
1091.13	Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski	985
1091.13	Teorema di Hindman	986
1091.TODO	Lezione 13 - <2025-11-04 Mar>	988
1091.14	Topological dynamics	988
1091.TODO	Lezione 14 - <2025-11-05 Mer>	991
1091.DONE	Lezione 15 - <2025-11-11 Mar>	994
1091.DONE	Lezione 16 - <2025-11-12 Mer>	996
1091.17	Relazioni stabili	996
1091.TODO	Lezione 17 - <2025-11-18 Mar>	998
1091.TODO	Lezione 18 - <2025-11-25 Mar>	1001
1091.19	Iascar invariance	1001
1091.TODO	Lezione 19 - <2025-11-26 Mer>	1003
1091.TODO	Lezione 20 - <2025-12-02 Mar>	1006
1091.21	Stazionarietà	1007
1091.TODO	Lezione 21 - <2025-12-03 Mer>	1008
1091.22	Lezione 22 - <2025-12-09 Mar>	1010
1091.24	Lezione 23 (Ultima) - <2025-12-16 Mar>	1013

1091.2INFO ESAME	1016
1092Subacquea [META]	1018
1092.Gestione immersione	1018
1092.Fisiologia e fisica	1018
1092.Esercizi	1018
1092.Nuoto in superficie - Descrizione	1019
1092.Nuoto in superficie - Tecniche componenti	1019
1092.Apnea dinamica senza attrezzi - Descrizione	1019
1092.Apnea dinamica senza attrezzi - Tecniche componenti	1019
1092.Salvamento di un apneista incosciente sul fondo - Descrizione	1019
1092.Salvamento di un apneista incosciente sul fondo - Tecniche componenti	1020
1092.Capovolte in raccolta - Descrizione	1020
1092.Capovolte in raccolta - Tecniche componenti	1020
1092.Equipaggiamento sul fondo - Descrizione	1020
1092.Equipaggiamento sul fondo - Tecniche componenti	1021
1092.Capovolte con attrezzatura - Descrizione	1021
1092.Capovolte con attrezzatura - Tecniche componenti	1021
1093bib) Zambella - A Crèche Course in Model Theory	1021
109Modello debolmente lambda saturo	1021
109Modello debolmente lambda saturo sse lambda universale	1022
109Modello saturo sse omogeneo e debolmente saturo	1022
109Modello debolmente lambda omogeneo	1022
109Insieme invariante rispetto ad insieme di parametri in un modello mostro	1022
109Caratterizzazione insiemi invarianti su un insieme in un modello mostro	1023
110Gruppo degli automorfismi di una struttura del prim'ordine	1023
110Orbite rispetto all'azione del gruppo degli automorfismi in una struttura del prim'ordine	1023
110Dyndon-Robinson Lemma	1024
110Caratterizzazione delle conseguenze di un delta-tipo tramite la preservazione per delta-morfismi	1024
110Teoria con delta-eliminazione positiva dei quantificatori	1025
110Caratterizzazione semantica della delta-eliminazione positiva dei quantificatori	1025
110Estendere dominio e codominio di un delta-morfismo	1025

1107 Caratterizzazione delta-morfismi estendibili a delta-morfismi totali	1026
1108 Caratterizzazione delta-morfismi estendibili a delta-morfismi suriettivi	1026
1109 Caratterizzazione della delta-eliminazione positiva dei quantificatori tramite delta-morfismi	1027
1110 Teoria delta-model-completa	1027
1111 Caratterizzazione Teoria delta-model-completa tramite eliminazione positiva dei quantificatori	1028
1112 Caratterizzazione delle formule preservate da delta-morfismi	1028
1113 Chiusura di un insieme di formule rispetto a connettivi logici	1029
1114 Topological Games [LECTIO]	1030
1114.1.Giochi di Schmidt	1030
1114.1.1.Alcuni giochi	1031
1114.1.2.Definizioni di TDI	1031
1115 Cardinalità degli insiemi invarianti	1032
1116 Insieme delle formule del prim'ordine	1032
1117 Cardinalità dell'insieme delle formule di un linguaggio del prim'ordine	1033
1118 Formula invariante su un insieme	1033
1119 Phi-formula su un insieme	1033
1119.1.phi-tipo su un insieme	1033
1120 Tipo invariante su un insieme	1034
1121 Caratterizzazione phi-tipi invarianti su un insieme	1034
1122 Tipo finitamente soddisfacibile in un insieme nel modello mostro	1035
1123 Caratterizzazione tipi finitamente soddisfacibili in un insieme	1035
1124 Tipo finitamente soddisfacibile è invariante	1035
1125 Estensione tipo finitamente soddisfacibile in un insieme a tipo globale	1035
1126 Sequenza di Morley	1035
1127 Sequenza di indiscernibili	1036
1128 Sequenza di Morley è indiscernibile	1036

112 Goerede di un tipo	1036
113 Sequenza di coeredi	1036
113 Caratterizzazione sequenza di coeredi	1036
113 -espansione di un modello mostro	1038
113 Caratterizzazione sequenza di coeredi	1038
113 Tipo completo	1040
113 Relazione eredi-coeredi	1040
113 Restrizione di un tipo ad un insieme di parametri	1042
113 Teorema di Ramsey	1042
113 Bemma del diagramma elementare	1044
113 Relazione erede-coerede stazionaria	1045
114 Ostensione semigruppo a Modello Mostro	1046
1140.Operazione di semigruppo	1046
1140.Semigruppo di Ellis	1049
1140.Insiemi idempotenti e Teorema di Ellis	1049
1140.Gruppo di Ellis	1051
114 Teorema di Hindman	1051
114 Semigruppo	1052
114 Isomorfismo di semigruppi	1052
114 Teoria dei gruppi	1052
114 Insieme tipo-definibile su un insieme è invariante	1052
114 Scambio di unioni/intersezioni e immagini/retroimmagini di funzione	1053
114 Tipo di Ehrenfeucht-Mostowski	1053
114 Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski	1053
114 Ostensione di sequenza di indiscernibili su un insieme ad un Modello	1053
115 TEX - Creare Flashcard	1054
115 Teorema di Hales-Jewett	1055

115	Colorazione	1056
1152.	Colorazione di un insieme	1056
1152.1.	Sottoinsieme monocromatico	1056
1152.	Colorazione di un grafo	1056
115	Teorema di Van der Waerden	1056
115	Progressione Aritmetica	1056
115	Teorema di Szemerédi	1056
115	Densità di Banach	1057
115	Stile - Scala di Formalità	1057
1157.	Catalogazione dei capi formalità – Città	1057
1157.	Scala di formalità – Campagna	1058
1157.	Scaletta CITTÀ	1059
1157.	Scaletta CAMPAGNA	1060
1157.	Scaletta Mista	1061
115	Coordinate locali su una varietà sono Cinfinito	1062
115	Mie tesi laurea magistrale [Bibliografia]	1062
116	Collegare le note - Zettelkasten	1062
116	Zettelkasten	1063
116	Relazione stabile	1063
116	Relazione stabile in un Modello Mostro	1063
116	Combinazione booleana di relazioni stabili è stabile	1064
116	Insieme approssimabile da una relazione	1065
116	Caratterizzazione relazione stabile tramite insiemi approssimabili	1066
116	Caratterizzazione relazione stabile in un modello mostro tramite insiemi approssimabili	1066
116	Insieme approssimabile da una relazione in un Modello Mostro	1067
116	Topologia di 2^X	1068
117	Cardinalità insieme delle parti	1068
117	Insieme esternamente definibile in un modello mostro	1068

117 Forma differenziale in un punto	1068
117 Forma differenziale	1069
117 Prodotto wedge tra forme differenziali	1069
117 Differenziale di una forma	1069
117 Proprietà del differenziale di forme	1069
117 Gruppo di Coomologia di De Rham	1070
117 Forma differenziale chiusa	1070
117 Forma differenziale esatta	1071
118 Campo vettoriale conservativo su R^n	1071
118 Coomologia di De Rham di R.	1071
118 Coomologia di De Rham di R^n.	1072
118 Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa Coomologia di de Rham	1072
118 Pullback di una funzione tra varietà differenziabili	1073
118 Proprietà del pullback di una funzione tra varietà differenziabili	1073
118 gruppo di coomologia di de Rham di una varietà connessa	1073
118 Prodotto wedge in Coomologia di De Rham	1074
118 Coomologia di De Rham come funtore	1074
118 Successione di spazi vettoriali esatta	1074
119 Complesso di cocatene	1074
119 Coomologia di un complesso di cocatene	1075
119 Morfismo tra complessi di cocatene	1075
119 Successione Esatta di Complessi di Ccatene	1075
119 Morfismo tra complessi di cocatene induce morfismo in coomologia	1076
119 Zig-Zag Lemma (per complessi di cocatene)	1076
119 Teorema di Mayer-Vietoris (in coomologia)	1080

119 Coomologia della circonferenza	1082
119 Coomologia delle sfere	1084
119 Forma volume su una varietà differenziabile	1087
120 Caratterizzazione varietà differenziabile orientabile tramite forma volume	1088
120 Integrazione di forme su varietà differenziabile orientata	1088
120 Teorema di Stokes	1088
120 Coomologia dello spazio proiettivo reale	1089
120 Coomologia del toro	1092
120 Ricoprimento aciclico di una varietà differenziabile	1092
120 Varietà differenziabile di tipo finito	1092
120 Varietà differenziabile di tipo finito ha coomologia di dimensione finita	1092
1207.Varietà differenziabile compatta ha coomologia di dimensione finita	1092
120 Coomologia a supporto compatto	1092
120 Coomologia a supporto compatto 0-dimensionale	1092
121 Coomologia a supporto compatto di R	1092
121 Coomologia a supporto compatto di R _n	1094
121 Coomologia in dimensione massima	1094
121 Caratterizzazione forme esatte di grado massimo su varietà orientabile, connessa e compatta	1097
121 Caratterizzazione forme esatte di grado massimo a supporto compatto su varietà orientabile connessa	1098
121 Integrale di forma su sottovarietà non nullo implica forma non esatta	1098
121 Boolean valued semantics for infinitary logics [CORSO]	1099
1216.Lecture 1 - <2025-11-17 Lun>	1099
1216.1.Tarski semantics for L _{κ,λ}	1101
1216.1.Proof system	1102
1216.Lecture 2 - <2025-11-19 Mer>	1102
1216.2.Failure of interpolation for Tarski semantics on L _{∞,ω} and L _{∞,∞}	1103
1216.2.Boolean valid semantics	1104
1216.Lecture 3 - <2025-11-24 Lun>	1105

1216.3. Boolean valued semantics	1108
1216.4. Lecture 4 - <2025-11-26 Mer>	1108
1216.5. Lecture 5 - <2025-12-01 Lun>	1111
121 Teorema di Milliken-Taylor	1112
121 Teorema di Schwarz	1113
121 Kernel di una funzione tra spazi vettoriali è spazio vettoriale	1114
122 Quoziente di spazi vettoriali	1114
1220. Dimensione dello spazio vettoriale quoziante	1114
122 Pullback di una funzione tra varietà differenziabili in coomologia	1114
1223. Insieme approssimabile dal basso da una relazione	1114
1223. Rango binario di Shelah di una relazione	1115
1224(bib) FIPSAS - “P1 - Lezione T5 - Apparato respiratorio e circolatorio”	1115
1224.1. Approfondimento SLIDES	1115
1224.1.1. Slide 1: FIPSAS - 1° GRADO AR: ARGOMENTI DEL CORSO	1115
1224.1.2. Slide 2: CENNI DI ANATOMIA E FISIOLOGIA - Cellule (p. 71)	1115
1224.1.3. Slide 3: CENNI DI ANATOMIA E FISIOLOGIA - Tessuti, Organi, Apparati	1116
1224.1.4. Slide 4: APPARATO RESPIRATORIO - Funzione e Costituzione (p. 71)	1116
1224.1.5. Slide 5: APPARATO RESPIRATORIO - Vie Aeree Inferiori (Dettaglio)	1117
1224.1.6. Slide 6: APPARATO RESPIRATORIO - Respirazione: Inspirazione (Fase attiva)	1117
1224.1.7. Slide 7: APPARATO RESPIRATORIO - Respirazione: Espirazione (Fase passiva)	1117
1224.1.8. Slide 8: APPARATO RESPIRATORIO - Volumi e Capacità Polmonari	1118
1224.1.9. Slide 9: APPARATO RESPIRATORIO - Composizione Aria e Ruolo dell’Azoto	1118
1224.1.10. Slide 10: APPARATO RESPIRATORIO - Respirazione in Immersione	1119
1224.1.11. Slide 11: APPARATO CIRCOLATORIO - Funzione e Costituzione (p. 75)	1119
1224.1.12. Slide 12: APPARATO CIRCOLATORIO - Grande e Piccolo Circolo	1119
1224.1.13. Appendice: Principi Fisici e Fisiologici Correlati al Contenuto delle Slide	1120
1225(bib) Neuman - Physiology and Medicine of Hyperbaric Oxygen Therapy, 2008	120
1225. La pressione atmosferica al livello del mare è pari a 1 ATA (che equivale a 14.7 psi o 101.32 kPa).	1121
1225.2. La pressione assoluta (P_{abs}) è la somma della pressione atmosferica (P_{atm}) e della pressione misurata dal manometro (P_{gauge}): $P_{abs} = P_{atm} + P_{gauge}$. Ad esempio, un trattamento a 2.4 ATA al livello del mare richiede una pressione manometrica di 1.4 ATA (1.0 ATA + 1.4 ATA = 2.4 ATA).	1121
1225.3. È direttamente proporzionale alla percentuale di quel gas nel volume totale della miscela.	1121

1225. Determina direttamente la quantità di gas assorbito nei tessuti . Questo è fondamentale per la comprensione di condizioni come l'embolia gassosa arteriosa (AGE), la malattia da decompressione (DCS) e la tossicità da ossigeno (oxygen toxicity), come trattato nei Capitoli 13, 14 e 23.	1121
1225. Per esempio, a 6.0 ATA (165 fsw), la pressione parziale di ossigeno (P_{O_2}) è 1.26 ATA e quella dell'azoto (P_{N_2}) è 4.74 ATA, assumendo aria (21% O_2 , 79% N_2) [75t].	1121
1225. Ruolo del Medico Iperbarico: I medici iperbarici esaminano spesso subacquei sportivi e commerciali per valutarne l'idoneità e, talvolta, per trattare lesioni legate all'immersione.	1122
1225. Modelli Amministrativi: Esistono differenze regionali significative.	1122
1225. Approccio di I Primi Principi (A Generic Approach): Per valutare l'idoneità in presenza di una condizione medica, si devono porre tre domande fondamentali:	1122
1225. Rispondere "sì" o "non lo so" a una di queste richiede una revisione più approfondita, e un "sì" definitivo richiede una valutazione rischio/beneficio.	1122
1225. Forame Ovale Pervio (Patent Foramen Ovale, PFO): Vi è una comprovata sovra-rappresentazione di shunt destro-sinistro (come il PFO) tra i subacquei che hanno sofferto di DCS neurologica o vestibolococleare. Un shunt maggiore è stato riscontrato nel 71% dei casi vestibolococleari (rispetto al 12% dei controlli).	1122
1225. Asma: L'asma è comune nella popolazione subacquea. Il principale rischio è il barotrauma polmonare (PBT), che può portare ad AGE. È difficile dimostrare con certezza che i subacquei asmatici siano a rischio significativamente maggiore di infortuni da immersione. La valutazione può includere la spirometria o il test di provocazione bronchiale [102, 103f].	1123
1225. Radiografia del Torace (CXR): La necessità di routine è controversa. Tuttavia, una CXR può rilevare anomalie polmonari (ad esempio, bolle enfisematose) che predispongono a PBT e AGE. Tali anomalie sono state associate a casi di PBT e AGE.	1123
1225. Esame Neurologico: È fondamentale documentare quantitativamente eventuali anomalie per avere un punteggio di riferimento (baseline score) nel caso in cui il subacqueo necessiti di trattamento per DCS neurologica.	1123
1225. LAO₂ si lega all'emoglobina (Hb) per essere trasportato, ma in condizioni iperbariche, la quantità di ossigeno disciolto fisicamente nel plasma aumenta drasticamente (secondo la Legge di Henry, discussa nel Capitolo 4).	1123
1225. Durante la respirazione di O_2 al livello del mare, la P_{O_2} nel sangue venoso giugulare raramente superava i 60 mmHg; la respirazione di ossigeno a 3.5 ATA porta a profili di ossigenazione tissutale che riflettono un'alta differenza artero-venosa [177, 603f].	1123
1225. Questo effetto è più marcato nei vasi del cervello , della retina e del muscolo scheletrico.	1124
1225. Nonostante la riduzione del flusso sanguigno (ad esempio, cerebrale, che diminuisce l'apporto di ossigeno), l'enorme aumento di O_2 disciolto garantisce comunque un aumento netto di ossigeno fornito ai tessuti.	1124
1225. 18h 'elevata P_{aCO_2} (anidride carbonica arteriosa) aumenta il flusso sanguigno cerebrale, il che a sua volta aumenta la tossicità dell'ossigeno per il sistema nervoso centrale (CNS) e il rischio di convulsioni.	1124
1225. Gli esseri umani, senza una cabina pressurizzata, possono tollerare un range di pressione che va da circa 0.17 ATA (a 50.000 piedi di altitudine) a 70 ATA (circa 2300 piedi sotto la superficie del mare). Questa variazione di circa 700 volte è tollerabile solo con l'uso di attrezzature specializzate per la respirazione.	1124

1225. Narcosi da Azoto (Rapture of the Deep): Quando si respira aria in profondità, l'aumento della P_{N_2} provoca narcosi (come descritto da Paul Bert nel 1878 e da Cousteau 100 anni dopo). La narcosi da azoto è un problema neurologico che limita le immersioni in aria a circa 4 ATA (99 fsw) [214f, 220].	1124
1225. Tossicità da Ossigeno del SNC (CNS Oxygen Toxicity): È il limite più pressante nell'uso dell'ossigeno iperbarico (in HBOT e immersione con Nitrox). Può verificarsi rapidamente a P_{O_2} di 2 ATA o superiore e può portare a convulsioni violente con poco o nessun preavviso.	1124
1225. HPNS (High-Pressure Nervous Syndrome): A profondità estreme (oltre 10–15 ATA), la compressione idrostatica diretta influenza il SNC, producendo un aumento dell'attività neurale che risulta in tremori.	1125
1225. Effetti Moderati (<5 ATA): Anche i livelli moderati di pressione (quelli utilizzati in HBOT) possono avere effetti misurabili che non sono semplicemente dovuti alla P_{O_2} : alterazioni nella diffusione dei gas polmonari, resistenza delle vie aeree, flusso sanguigno tissutale locale, e segnalazione neuronale.	1125
1225. Causa Principale: Nella subacquea, l'AGE è quasi sempre una conseguenza del barotrauma polmonare (PBT) . Il PBT si verifica quando l'aria rimane intrappolata nei polmoni durante la risalita (anche di soli 1 metro) e l'espansione del gas rompe gli alveoli, permettendo all'aria di entrare nel flusso sanguigno arterioso.	1125
1225. Sintomi: I sintomi sono estremamente variabili, ma sono riferibili all'occlusione del sistema vascolare del SNC. I segni suggestivi di AGE includono perdita di coscienza transitoria, cecità o disorientamento dopo l'emersione.	1125
1225. Diagnosi: L'AGE è una diagnosi clinica . Qualsiasi paziente con una storia suggestiva di AGE richiede un esame neurologico dettagliato e una consulenza iperbarica, poiché le lesioni neurologiche sottili sono difficili da escludere in fase acuta e un ritardo nel trattamento può rendere le lesioni irreversibili.	1125
1225. Priorità: La ricompressione immediata è indicata per l'AGE confermata o sospetta.	1126
1225. Protocolli: Il trattamento mira a ridurre meccanicamente la dimensione delle bolle (Legge di Boyle) e ad aumentare la P_{O_2} tissutale.	1126
1225. Fattori di Rischio: Il rischio è legato al carico di gas inerte (profilo tempo-profoundità), alla velocità di risalita e alla presenza di shunt destro-sinistro (PFO), che permettono alle bolle venose (VGE) di raggiungere la circolazione arteriosa.	1126
1225. Sintomi Comuni: I sintomi sono estremamente variabili, ma i più comuni includono dolore (bends), parestesia, debolezza muscolare e affaticamento [314f]. La DCS cardiorespiratoria (chokes) è caratteristica di alti livelli di VGE.	1126
1225. Diagnosi: La DCS è una diagnosi clinica basata su storia e esame fisico. La differenziazione tra DCS neurologica e AGE si basa su fattori come il tempo di insorgenza e la presenza di alterazione della coscienza.	1126
1225. Ricompressione: Il trattamento primario è la ricompressione, per ridurre la dimensione delle bolle e favorirne la riassorbimento.	1127
1225. Protocolli Standard: Il Tavolo 6 della Marina USA (U.S. Navy Table 6) (2.8 ATA o 60 fsw, respirando O ₂) è il gold standard per la DCS [323, 324t]. La raccomandazione iniziale per la DCS neurologica è la compressione a 18 msw (60 fsw) respirando O ₂ al 100%.	1127

1225. Uso di Gas Inerti Terapeutici: L'uso di un gas inerte diverso (come l'olio in una miscela Heliox o Nitrox) durante la ricompressione profonda (es. Tavolo 6A) può facilitare l'eliminazione delle bolle [322, 327f].	1127
1225. Trattamento in Acqua (In-Water Recompression, IWR): Può essere utilizzato in luoghi remoti quando non è disponibile una camera iperbarica. Richiede la somministrazione di ossigeno al 100% tramite maschera a pieno facciale, protezione termica e un accompagnatore.	1127
1225. Terapia Aggiuntiva (Adjunctive Therapy): La somministrazione di liquidi (cristalloidi) è considerata cruciale (Livello 1C) [341, 342t]. La lidocaina può essere usata come adiuvante per la DCS neurologica [342t, 375].	1127
1225. Ritardo nel Trattamento (Delayed Treatment): Sebbene il beneficio diminuisca col ritardo, la ricompressione può essere comunque utile. Per i sintomi lievi, un ritardo non è associato a un peggioramento a lungo termine dell'esito.	1127
1225. Complicazione più Comune: Il MEBT è la complicanza più frequente dell'HBOT (incidenza 3.8 - 12 per 1000 esposizioni). È causato dall'incapacità di equilibrare la pressione tra l'orecchio medio e l'ambiente esterno, spesso dovuto alla disfunzione della Tuba di Eustachio (ET).	1128
1225. Prevenzione e Trattamento: Si prevengono con l'educazione alle manovre di compensazione (come Valsalva). In caso di disfunzione cronica o incapacità di compensare, si può ricorrere alla miringotomia (incisione del timpano) o all'inserimento di un tubo di ventilazione (tympanostomy tube) [518, 519f, 585].	1128
1225. Rischio Raro ma Serio: IEBT è raro ma può portare a perdita dell'udito e disfunzione vestibolare. Le lesioni includono rotture della membrana della finestra rotonda o della membrana di Reissner.	1128
1225. Chirurgia Otologica: La stapedectomy (intervento chirurgico per l'otosclerosi) è considerata una controindicazione relativa all'immersione e all'HBOT, a causa del potenziale rischio di penetrazione della protesi e danni all'orecchio interno dovuti ai cambiamenti di pressione. Si sconsiglia l'immersione anche dopo la timpanoplastica.	1128
1225. Barodontalgia: Dolore ai denti causato da variazioni di pressione. È stato segnalato in aviatori e subacquei, ma non nei pazienti sottoposti a HBOT.	1128
1225. Impianti Cocleari: Sebbene siano stati riportati casi di subacquei con impianti funzionanti, si raccomanda di consultare il produttore prima di iniziare l'HBOT per garantire la sicurezza del paziente e mantenere la garanzia.	1128
1225. Limite più Critico: È la limitazione più pressante dell'HBOT e dell'immersione con gas arricchiti.	1129
1225. Manifestazione: Si manifesta con convulsioni (crisi epilettiche). Possono essere precedute da sintomi prodromici (tremori, nausea, contrazioni muscolari, alterazioni visive), ma questi segnali non sono affidabili e non sempre si verificano prima dell'esordio convulsivo.	1129
1225. Fattori di Rischio: La ritenzione di CO_2 aumenta il rischio di convulsioni perché induce vasodilatazione cerebrale, che aumenta l'esposizione del cervello all'ossigeno.	1129
1225. Tolleranza: La tolleranza alla tossicità del SNC è stata definita utilizzando un indice obiettivo pre-convulsivo, come i decrementi progressivi nel rapporto T_I/T_T (componente temporale della ventilazione).	1129
1225. Effetti: La tossicità polmonare è causata dal danno chimico all'epitelio alveolare e all'endotelio capillare [604f].	1129

1225. Misurazione: Viene misurata dal declino progressivo e significativo della Capacità Vitale (VC) [613, 614f]. Sono state generate curve iperboliche per prevedere la tolleranza polmonare all'ossigeno in base alla pressione e alla durata dell'esposizione [617f, 621f].	1129
1225. Intermittent Exposure (Air Breaks): La tossicità polmonare e del SNC può essere ritardata in modo significativo alternando periodi di respirazione di ossigeno (O₂) con periodi di respirazione di aria ambiente (air breaks) . Questo metodo è essenziale per la sicurezza nei protocolli HBOT prolungati, come il Tavolo 6 della Marina USA.	1129
1225. Idoneità: La valutazione medica per l'immersione è cruciale, specialmente per condizioni come PFO o anamnesi di asma, che aumentano il rischio di DCS e PBT/AGE.	1130
1225. Incidenti: AGE (causata da PBT, spesso in risalita rapida) e DCS (formazione di bolle) sono le emergenze primarie.	1130
1225. Trattamento: La ricompressione immediata è il trattamento fondamentale, spesso utilizzando il Tavolo 6 della Marina USA (60 fsw/2.8 ATA O ₂).	1130
1225. Barotrauma: La complicanza più comune per i subacquei è il barotrauma dell'orecchio medio (MEBT), ma l'IEBT è più grave; si deve prestare attenzione anche alla presenza di chirurgia otologica pregressa (es. stapedectomia).	1130
1225. La sicurezza in immersione è limitata dalla tossicità da ossigeno del SNC a $P_{O_2} \geq 2$ ATA e dalla narcosi da azoto a $P_{N_2} \geq 3 - 4$ ATA.	1130
1225. L'uso di *interruzioni di aria (*air breaks)* è la tecnica standard per estendere la tolleranza all'ossigeno durante i trattamenti prolungati di ricompressione (come il Tavolo 6).	1130
1226. Esercizio: Nuoto in superficie	1130
1226. Descrizione	1130
1226. Tecniche componenti	1130
1227. Esercizio: Apnea dinamica senza attrezzi	1131
1227. Descrizione	1131
1227. Tecniche componenti	1131
1228. Esercizio: Salvamento di un apneista incosciente sul fondo	1131
1228. Descrizione	1131
1228. Tecniche componenti	1131
1229. Esercizio: Capovolte in raccolta	1132
1229. Descrizione	1132
1229. Tecniche componenti	1132
1230. Esercizio: Equipaggiamento sul fondo	1132
1230. Descrizione	1132
1230. Tecniche componenti	1132
1231. Esercizio: Capovolte con attrezzatura	1133
1231. Descrizione	1133
1231. Tecniche componenti	1133

123 Immersione Subacquea ricreativa	1133
1232.Pianificazione dell'immersione	1133
1232.Briefing	1133
1232.2.Briefing	1133
1232.2.Debriefing	1134
1232.Gestione dell'immersione da istruttore	1135
1232.3.Comfort degli allievi	1135
1232.3.Sicurezza	1135
1232.3.Percorso	1135
1232.3.Altri consigli	1135
123 Attrezzatura subacquea	1135
1233.Gestione in acqua	1136
1233.Gestione fuori dall'acqua	1136
1233.2.CESTA + BORSONE	1136
1233.Gestione a casa	1137
123 Subacquea - Lancio del pallone sparabile	1137
123 Decompressione Gas in Immersione	1137
123 Restrizione di una forma ad una sottovarietà	1137
123 Algebra Graduata	1138
123 Morfismo tra algebre graduate	1138
123 Modulo graduato	1138
124 Morfismo tra moduli graduati	1139
124 INBOX - Fleeting Notes	1139
1241.Note di lettura: "Il Pendolo di Foucault"	1139
1241.Note di lettura: Il Grande Gatsby	1139
1241.How to study well	1140
1241.Metodo di Studio e Organizzazione	1140
1241.4.Come studiare	1140
1241.4.In particolare	1140
1241.4.Dubbi e Riflessioni	1141
1241.Salvataggio tools	1141
1241.META	1141
124 Teorema della derivata nulla	1141
124 Unzione Bilineare	1141
124 Nullback di una inclusione tra varietà differenziabili	1141

124 Coomologia delle unioni disgiunte	1141
124 Riduzione della coomologia di un prodotto con la retta reale	1141
124 Teorema di invarianza omotopica per la coomologia di De Rham	1142
124 Varietà Differenziabile Orientabile	1142
124 Supporto di una forma differenziale	1142
125 Atlante orientato	1142
125 Partizione dell'unità	1142
125 Orientabilità delle sfere	1142
125 Formula di Kunneth	1142
125 Ω^n è contraibile	1142
125 Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa coomologia a supporto compatto	1142
125 Successione di spazi vettoriali esatta induce successione esatta dei duali	1143
125 Teorema fondamentale del calcolo integrale	1143
125 Funzione duale	1143
125 Successione di Mayer-Vietoris per coomologia a supporto compatto	1143
126 Forma differenziale a supporto compatto	1144
126 Estensione a zero di una forma differenziale a supporto compatto	1144
126 Dualità di Poincaré	1145
126 Prodotto Tensoriale	1146
126 Immagine continua di spazio compatto è compatto	1146
126 Forma volume sulla sfera	1146
126 Coomologia del nastro di Moebius	1146
126 Caratterizzazione forma esatta sulla sfera	1146
126 Caratterizzazione forma esatta nello spazio proiettivo reale di dimensione dispari	1146
126 Integrale di forme su sottovarietà differenziabile	1146

127 Oomologia delle superfici topologiche compatte orientabili	1147
127 Grado di una funzione propria tra varietà differenziabili	1151
127 Teorema di Sard	1151
127 Teorema del Grado	1151
127 Teorema Nullità + Rango	1151
1274.Mappa lineare non nulla tra spazi vettoriali di dimensione uno è isomorfismo	1151
127 Superficie Topologica	1151
127 Funtore da RMod a Rmod - Torsione	1151
127 Delta di Kronecher	1152
127 Rango di un modulo	1152
1278.Rango di un modulo libero	1152
1278.Rango di un modulo FG	1152
127 Prodotto cartesiano di moduli	1152
128 Sottomoduli in somma diretta	1152
128 Ogni anello ha struttura di modulo su sé stesso	1153
128 Logical Pluralism	1153
128 Sottogruppo generato	1153
128 Condizione sufficiente modello omega-saturo	1153
128 Funzione olomorfa	1154
128 Funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette primitiva	1154
128 Logaritmo complesso è olomorfo su un aperto semplicemente connesso	1154
128 Funzione olomorfa su aperto semplicemente connesso ammette un logaritmo	1154
128 Funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette radice m-esima	1155
129 Mappa esponenziale tra fasci di funzioni olomorfe	1155
129 Spazio topologico semplicemente connesso è connesso	1155
129 Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite spighe	1155

129Successione di morfismi esatta	1157
129Caratterizzazione morfismo di fasci iniettivo tramite spighe	1157
129Caratterizzazione morfismo di fasci suriettivo tramite spighe	1157
129Esattezza di successione di fasci rispetto alle sezioni globali	1157
129Complesso	1158
129Atlante complesso	1159
129Struttura Complessa	1159
130Marietà Complessa	1159
130Superficie di Riemann	1160
1301.Genere topologico di una Superficie di Riemann	1160
130Sfera di Riemann	1160
130Esempi fondamentali di varietà complesse	1161
1303. Spazio proiettivo complesso è una varietà complessa	1161
1303. Aperti connessi di una varietà complessa sono varietà complessa	1161
130Struttura Complessa per le sfere	1161
130Fibro complesso	1162
1305. Costruzione come quoziente di gruppi	1162
130Funzione biolomorfa	1164
130Equazioni di Cauchy-Riemann	1164
130Proiezione stereografica	1164
130Topologia più fine	1164
131Azione di gruppo su uno spazio topologico	1164
131Punto di accumulazione	1164
131Sottoinsieme discreto	1164
131Ordine di una funzione olomorfa	1165
131Teorema di analicità delle funzioni olomorfe	1165
131Forma normale locale per funzione olomorfa	1165

13.1 Principio di identità per funzioni olomorfe	1166
13.1.1 Teorema di inversione locale	1166
13.1.2 Funzione olomorfa iniettiva è biolomorfismo locale	1166
13.1.3 Funzione olomorfa su una superficie di Riemann a valori complessi	1166
13.2 Funzione olomorfa tra superfici di Riemann	1167
13.2.1 Fascio delle funzioni olomorfe su una superficie di Riemann	1167
13.2.2 Teorema del massimo modulo	1168
13.2.2.1 Versione complessa	1168
13.2.2.2 Per superfici di Riemann	1168
13.2.3 Principio di identità per funzioni olomorfe su Superfici di Riemann	1168
13.2.4 Funzione meromorfa	1169
13.2.5 Funzione meromorfa su una superficie di Riemann a valori complessi	1169
13.2.6 Fascio delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann	1170
13.2.7 Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann	1170
13.2.8 Ordine di una funzione meromorfa	1172
13.2.9 Ordine di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann	1173
13.3 Biomorfismo tra superfici di Riemann	1173
13.3.1 Teorema della mappa aperta (superfici di Riemann)	1174
13.3.2 Modulo di un numero complesso	1174
13.3.3 Funzione olomorfa su una superficie di Riemann compatta a valori complessi	1174
13.3.4 Singolarità isolata (Analisi Complessa)	1174
13.3.4.1 Per superfici di Riemann	1174
13.3.5 Serie di Laurent	1175
13.3.6 Sottoinsieme discreto in un compatto	1175
13.3.7 Torrent	1175
13.3.8 Sfera di Riemann biolomorfa alla retta proiettiva complessa	1175
13.3.9 Teorema della mappa aperta (Analisi Complessa)	1176

1340 Corrispondenza funzioni meromorfe su una superficie di Riemann e funzioni olomorfe sulla Sfera di Riemann	1176
1340.Esistenza funzioni meromorfe a valori complessi per superfici di Riemann compatte .	1178
1341 Proprietà funzione olomorfa non costante tra superfici di Riemann con dominio compatto	1179
1342 Ibra di una funzione	1179
1343 TEX - Testo Multiriga in ambiente matematico	1179
1344 Grafico di funzioni olomorfe è superficie di Riemann	1179
1345 Teorema della funzione implicita complesso	1180
1346 Superficie di Riemann definita tramite Teorema della funzione implicita	1180
1347 Curva Piana affine liscia complessa	1181
1347.Molteplicità dei punti di una Curva Piana affine liscia complessa	1181
1348 Curva Piana proiettiva liscia complessa	1182
1349 Sottovarietà complessa dello spazio proiettivo	1182
1350 Superficie di Riemann proiettiva	1183
1351 Forma normale locale per superfici di Riemann	1183
1351.Molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann	1185
1352 Punto di ramificazione per una funzione tra superfici di Riemann	1186
1353 Bolinomio Irriducibile	1187
1354 Esempio di calcolo delle molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann	1187
1355 Teorema del Grado per olomorfismi tra superfici di Riemann	1187
1356 Caratterizzazione isomorfismo tra superfici di Riemann tramite grado	1189
1357 Somma ordini di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann è nulla	1190
1358 Caratterizzazione sfera di Riemann tramite meromorfismo	1191
1359 Caratteristica di Eulero-Poincaré per una superficie di Riemann	1191
1360 Formula di Hurwitz (Superfici di Riemann)	1192
1361 Mappa di potenza complessa	1193
1362 Composizione della differenza di potenze	1194

136Bolinomi sono continui	1194
1364Convergenza di una successione in uno spazio topologico	1194
1365Cardinalità della fibra di un olomorfismo tra superfici di Riemann	1194
1366Riangolazione di una superficie topologica	1195
1367Caratteristica di Eulero per una superficie topologica	1195
1368Teorema di classificazione delle superfici topologiche	1195
1369Superficie Topologica Orientabile	1195
1370Sfera con g manici	1195
1371Somma connessa di superfici topologiche	1196
1372Piano Proiettivo Reale è superficie topologica	1196
1373Genere topologico di una Superficie di Riemann non cresce per olomorfismo	1196
1374Genere topologico di un curva piana proiettiva liscia complessa	1196
1375Funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatte induce rivestimento topologico	1199
1376OPIC - Geometria Differenziale Complessa	1199
1377Funzione olomorfa tra superfici di Riemann di genere uno è rivestimento topologico	1199
1378Funzione olomorfa a valori nella sfera di Riemann ramifica	1200
1379Mappe tra tori complessi	1200
1380Olomorfismo tra tori complessi	1203
1381Classificazione dei tori complessi	1204
1382Azione di gruppo	1207
1382.1Orbita sotto azione di gruppo	1207
1383Teorema di Liouville	1207
1384Complesso coniugato	1207
1385Gruppo delle funzioni in a valore intero	1207
1385.1Supporto di una funzione a valore intero	1207

138 Divisore di una superficie di Riemann	1207
1386.Grado di un divisore di una superficie di Riemann	1208
138 Divisore di una funzione Meromorfa	1208
138 Divisori linearmente equivalenti di una superficie di Riemann	1208
139 Gruppo di Picard di una superficie di Riemann	1209
1389.Grado di un elemento del gruppo di Picard	1209
139 Caratterizzazione sfera di Riemann tramite gruppo di Picard	1209
139 Divisore effettivo di una superficie di Riemann	1210
139 Pullback di un divisore tra superfici di Riemann	1211
1392.Pullback come omomorfismo	1211
139 Divisore di ramificazione di una funzione olomorfa	1212
139 Fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann	1212
139 Sezioni globali del fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann	1214
1395.Dimensione della sezione globale del fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann compatta	1214
139 Divisori linearmente equivalenti inducono fasci isomorfi	1215
139 Fic0 di una superficie di Riemann	1216
139 \TeX - Enumerate skippabile	1216
139 \TeX - Verificare se argomento condizionale è pieno	1216
140 Successione esatta corta di fasci data da un divisore e un punto di una superficie di Riemann	1216
140 Fibrato vettoriale complesso di una varietà differenziabile	1218
1401.Cociclo di un fibrato vettoriale complesso	1219
140 Fibrato vettoriale olomorfo	1219
140 Cociclo di un fibrato vettoriale olomorfo	1220
140 Spazio tangente complessificato	1220
140 Funzione antiolomorfa su una superficie di Riemann	1220
140 Spazio tangente olomorfo	1220
140 Sezioni globali del fascio associato ad un divisore sulla sfera di Riemann	1220

140 Sezioni globali del fascio associato ad un punto per superfici di Riemann compatte	1221
140 Formula di Grassman	1222
141 Complesso di catene Nucleo e Immagine	1222
141 Somma e intersezione di complessi di catene	1222
141 Caratterizzazione funzioni tra complessi di catene tramite successioni esatte	1223
141 Morfismo indotto da una SEC di complessi di catene	1223
141 LATEX - Dimensione font mathmode	1224
141 Somma diretta di complessi di catene	1224
1415.Somma diretta di morfismi tra complessi di catene	1224
141 LATEX - Mostrare margini di un documento	1225
141 Topologia della somma diretta di complessi di catene	1225
141 Topologia Singolare Relativa di una coppia topologica buona	1226
141 Attaccamento di una k-cellula a uno spazio topologico	1228
1419.Attaccamento di una famiglia di k-celle ad uno spazio topologico	1231
142 Topologia per attaccamento di k-cellula	1231
142 CW-complesso	1234
1421.Topologia	1235
142 Struttura di CW-complesso per spazio proiettivo reale	1235
142 Struttura di CW-complesso per spazio proiettivo complesso	1237
142 Topologia singolare relativa per scheletri di CW-complessi	1237
142 Topologia singolare di CW-complessi	1238
142 Complesso di catene cellulari	1240
1426.Calcolo esplicito della mappa di bordo	1241
142 Topologia Cellulare	1241
142 LATEX - Gestione TODOs	1242
142 Rango in una successione di R-moduli finitamente generati	1242

143 Unione finita di compatti è compatta	1243
1430.Compattezza dell'unione disgiunta	1243
143 T<small>EX</small> - Ambiene commento	1243
143 T<small>EX</small> - Gestione Multi-file	1244
143 Sistema diretto	1244
143 Limite diretto	1244
143 Omologia singolare di CW-complessi come limite diretto	1245
143 Calcolo dell'omologia singolare dello spazio proiettivo reale	1246
143 Teorema di Confronto tra omologia singolare e simpliciale	1246
143 Funtore esatto	1248
143 Prodotto tensoriale di moduli	1248
144 Funtore prodotto tensoriale	1248
144 Complesso di catene come modulo graduato	1248
144 Prodotto tensoriale di complessi di catene	1248
144 Teorema di Künneth	1248
144 Teorema dei coefficienti universali	1248
144 Topologia debole	1248
144 Funtore covariante applicato ad un sistema diretto	1248
144 Homepage	1249
144 Provva	1249

1090.1 Introduzione

- Lea Terracini: prima parte
- Prof.ssa Bertone: seconda parte

Programma:

1. Algebra Commutativa di base (Terracini)
2. Algebra Commutativa avanzata (Bertone)
3. Algebra Commutativa computazionale (Bertone)

Esame: per ognuno dei tre blocchi, i docenti proporranno 5 problemi.

- Chi fa l'esame da 9 CFU porta all'esame tutti e tre i blocchi; dovrà consegnare la soluzione di 9 problemi, di cui almeno 2 per ciascun modulo.
- Chi fa l'esame da 6 CFU porta il blocco 1 e uno a scelta dei blocchi 2,3; dovrà consegnare la soluzione di 6 problemi, di cui almeno 2 per ciascun blocco scelto.

Da questo possono partire altre domande sui contenuti del corso.

L'esame può essere fatto in qualsiasi momento dell'anno, e il voto verrà poi registrato alla sessione successiva. Basta scrivere per email ai docenti.

Venerdì 26 settembre non ci sarà lezione. Terracini inizia alle :40 + 10 minuti di pausa in mezzo.

Libro di Testo: Atiyah - Macdonald, *Introduzione all'algebra commutativa.* [318]

La Terracini seguirà pedissequamente il libro, quindi non metterà note.

Parte I

Algebra commutativa di base

1090.2 Lezione 1 - <2025-09-22 Lun>

1090.2.1 Anelli e ideali

Definizione 1. Un anello commutativo con unità è una struttura algebrica $\langle A, +, \cdot \rangle$ tale che

1. $\langle A, + \rangle$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 0 o 0_A ; l'inverso additivo si chiamerà opposto;
2. \cdot è associativa, commutativa e con elemento neutro 1_A , 1 (1_A sarà detto unità di A);
3. proprietà distributiva di \cdot rispetto a $+$:

$$\forall a, b, c \in A \quad a \cdot (b + c) = ab + ac.$$

Ogni anello presentato in questo corso, a meno diversamente specificato, è un anello commutativo con unità.

Osservazione. Non escludiamo l'anello zero: $A = \{0\}$.

Esempio 2. Sono esempi di anelli:

- $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_n, A[X]$;
- $F(S, A) = \{\text{insieme delle funzioni tra } S \text{ insieme e } A \text{ anello}\}$, dove

$$(f + g)(s) = f(s) + g(s), \quad (f \cdot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$$

e inoltre $1_{F(S, A)}$ è la funzione costante 1_A .

- $C(X, \mathbb{R}) := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua}\}$ per X spazio topologico; sottoanello di $F(X, \mathbb{R})$.

Definizione 3. Se $\langle A, +, \cdot \rangle$ è un anello commutativo con unità, un sottoinsieme $B \subseteq A$ è detto sottoanello se:

- B è chiuso rispetto alle operazioni di $\langle A, +, \cdot \rangle$;
- $1_A \in B$, con $1_B = 1_A$.

Esempio 4. Consideriamo $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$: \mathbb{Z} è un sottoanello di \mathbb{Q} .

Viceversa, $2\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ è sottoinsieme chiuso rispetto alle operazioni, ma non è sottoanello in quanto non contiene l'unità.

Si consideri invece $B \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$B := \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{Z}\}$$

B è un anello commutativo con unità (è chiuso per le operazioni, ha una sua unità $1_B := (1, 0)$), ma non è un sottoanello, in quanto $1_B \neq 1_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = (1, 1) \notin B$.

Definizione 5. Se A, B sono anelli, un omomorfismo di anelli è una funzione

$$f : A \rightarrow B$$

tale che, per ogni $a_1, a_2 \in A$

1. $f(a_1 + a_2) = f(a_1) + f(a_2);$
2. $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \cdot f(a_2);$
3. $f(1_A) = 1_B.$

Osservazione. Se $A \subseteq B$ è sottoanello, e

$$\begin{aligned} \iota : A &\hookrightarrow B \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli.

Definizione 6. Un isomorfismo di anelli è un omomorfismo di anelli biettivo.

Osservazione. La condizione di cui sopra è sufficiente affinché l'inversa di un isomorfismo sia ancora un omomorfismo.

Proposizione 7. Si ha:

- composizione di omomorfismi è un omomorfismo;
- se $f : A \rightarrow B$ è un isomorfismo, allora $f^{-1} : B \rightarrow A$ è un isomorfismo.

Esempio 8. Sia S un insieme, A un anello e $s_0 \in S$ fissato.

$$\begin{aligned} \Phi_{s_0} : F(S, A) &\longrightarrow A \\ f &\longmapsto f(s_0) \end{aligned}$$

valutazione in s_0 è un omomorfismo di anelli.

Proposizione 9. Se $f : A \rightarrow B$ è omomorfismo di anelli, allora $f[A] \subseteq B$ è un sottoanello. Inoltre, se $A_1 \subseteq A$ è sottoanello, allora $f[A_1] \subseteq B$ è sottoanello.

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. ■

Osservazione. L'unico anello in cui $1_A = 0_A$ è l'anello zero: $A = \{0\}$. Inoltre, l'anello zero è sottoanello solo di se stesso.

Ideali

Definizione 10. Sia A un anello. Un ideale di A è un sottosinsieme $I \subseteq A$ tale che

1. $\langle I, + \rangle$ sottogruppo di $\langle A, + \rangle$;
2. vale la proprietà di assorbimento: $\forall i \in I, \forall a \in A$:

$$ai \in I.$$

Osservazione. Per verificare che I sia un ideale, è sufficiente verificare che

1. per ogni $a, b \in I$, $a + b \in I$;
2. la proprietà di assorbimento.

Infatti, per ogni $x \in I$: $-x = -1x \in I$ per assorbimento.

Esempio 11. Se A è un anello, sono ideali:

- gli ideali banali: $\{0_A\}$ e A ; A è ideale improprio;
- se $x \in A$:

$$Ax = (x) := \{ax \mid a \in A\}$$

è l'ideale principale generato da x .

- gli ideali propri sono tutti gli ideali $I \subsetneq A$.

Esempio 12. Sia S un insieme, A un anello e $s_0 \in S$ fissato.

$$I := \{f \in F(S, A) \mid f(s_0) = 0\}$$

è un ideale di $F(S, A)$:

- se $f, g \in I$, allora $(f + g)(s_0) = f(s_0) + g(s_0) = 0 + 0 = 0$, e quindi $(f + g) \in I$;
- se $g \in I$ e $f \in F(S, A)$, allora $(fg)(s_0) = f(s_0) \cdot g(s_0) = f(s_0) \cdot 0 = 0$, e quindi $(fg) \in I$.

Definizione 13. Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli, si definisce il nucleo di f :

$$\begin{aligned} \ker f &= \{a \in A \mid f(a) = 0\} \\ &= f^{-1}(0) \end{aligned}$$

Osservazione. Il $\ker f$ è un ideale di A .

Proposizione 14. Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli e $J \subseteq B$ è un ideale di B , allora

$$f^{-1}[J] \subseteq A$$

è un ideale di A .

Attenzione: non è vero che l'immagine di un ideale sia ancora un ideale.

Esempio 15. Se $B \subsetneq A$ sottoanello, $\iota : B \rightarrow A$ l'inclusione:

- ι è un omomorfismo;
- B è ideale di B ;
- $\iota[B] = B$ contiene 1_A ; se fosse un ideale (per assorbimento), $B = A$.

Quindi $\iota[B]$ non è un ideale.

Osservazione. Un campo non ha ideali non banali.

Anelli quoziante Se A è un anello e $I \subseteq A$ è un ideale, allora $\langle I, + \rangle$ è un sottogruppo normale di $\langle A, + \rangle$. Si definisce il gruppo quoziante

$$\langle A/I, + \rangle = \{I + a \mid a \in A\}$$

con $(I + a) + (I + b) = I + (a + b)$.

Su A/I è possibile definire anche un prodotto

$$(I + a) \cdot (I + b) := I + (a \cdot b).$$

Proposizione 16. Il prodotto tra laterali è ben definito.

Dimostrazione. Se:

- $I + a = I + a'$, allora $x := a - a' \in I$;
- $I + b = I + b'$, allora $y := b - b' \in I$;

allora

$$\begin{aligned} ab &= (a' + x)(b' + y) \\ &= a'b' + \underbrace{a'y + xb' + xy}_{\in I} \end{aligned}$$

per assorbimento, e dunque $I + ab = I + a'b'$. ■

Si verifica che $\langle A/I, +, \cdot \rangle$ è un anello commutativo con unità, e

$$\begin{aligned} 0_{A/I} &= I + 0_A \\ 1_{A/I} &= I + 1_A. \end{aligned}$$

La proiezione

$$\begin{aligned} \pi : A &\longrightarrow A/I \\ a &\longmapsto I + a \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli suriettivo, e $\ker \pi = I$.

Osservazione. Ogni nucleo di omomorfismo è un ideale, e tutti gli ideali sono nuclei di omomorfismi.

Esempio 17. Se $A = \mathbb{Z}$ tutti gli ideali hanno la forma $n\mathbb{Z} = (n)$, e il quoziante $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ l'anello delle classi di resto modulo n .

Notazione: in generale, se A anello, I ideale e $a, b \in A$, diremo che

$$a \equiv b \pmod{I}$$

se $a - b \in I$, ovvero se $I + a = I + b$.

Osservazione. Per ogni anello A , esiste un omomorfismo

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto \underbrace{1_A + \cdots + 1_A}_{n \text{ volte}} =: n \cdot 1_A\end{aligned}$$

Considerando quindi l'ideale di \mathbb{Z} :

$$\ker \varphi = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \cdot 1_A = 0_A\}.$$

Ci sono due possibilità:

- $\ker \varphi = (0)$ sse φ è iniettivo; diremo che A ha caratteristica 0;
- $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$ per $n > 0$; diremo che A ha caratteristica n .

La caratteristica di un anello si indica con $\text{char}(A)$.

Notazione: per ogni $a \in A$ e $n \in \mathbb{Z}$, si indicherà con $na := \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ volte}} = \varphi(n) \cdot a$

Osservazione. Se A ha caratteristica n , si ha che $\forall a \in A: na = 0_A$.

Osservazione. Il quoziente A/A è l'anello zero.

Ideali in un anello quoziante Sia A un anello, $I \subseteq A$ un ideale, e si consideri l'anello quoziante con la proiezione:

$$\pi : A \longrightarrow A/I.$$

Se $J \subseteq A/I$ è un ideale, allora anche $\pi^{-1}(J) \subseteq A$ è un ideale, e in particolare $I \subseteq \pi^{-1}(J)$.

Proposizione 18. Esiste una biiezione naturale che conserva l'ordine:

$$\begin{array}{ccc}\{\text{ideali di } A \text{ che contengono } I\} & \longleftrightarrow & \{\text{ideali di } A/I\} \\ J & \longmapsto & \pi(J) \\ \pi^{-1} & \longleftarrow & K\end{array}$$

ed inoltre le due mappe sono una l'inversa dell'altra.

Dimostrazione. Se J è ideale di A contenente I , allora $\pi(J)$ è un ideale di A/I ; infatti è un sottogruppo additivo di A/I , e inoltre, se $x \in J$ e $y \in A$

$$(I + x)(I + y) = I + \underbrace{xy}_{\in J} \in \pi(J).$$

Si ha che $\pi^{-1}(\pi(J)) = J$.

Inoltre, se K è un ideale di A/I , allora $\pi^{-1}(K)$ è un ideale di A contenente I e $\pi(\pi^{-1}(K)) = K$. ■

Definizione 19. Sia A un anello, $S \subseteq A$ un sottosieme. L'ideale generato da S in A è il più piccolo ideale di A contenente S :

$$(S) = \{a_1s_1 + \cdots + a_ks_k \mid a_1, \dots, a_k \in A, s_1, \dots, s_k \in S, k \in \mathbb{N}\}$$

e si denota con (S) .

Osservazione. Se $S = \{s_1, \dots, s_k\}$, si scriverà

$$(s_1, \dots, s_k) := (S).$$

Definizione 20. Un ideale I si dice finitamente generato se esistono $s_1, \dots, s_k \in I$ tale che

$$I = (s_1, \dots, s_k).$$

Osservazione. Se I è ideale principale allora I è finitamente generato, ma non è vero il viceversa.

Esempio 21. In $\mathbb{R}[X, Y]$, l'ideale (X, Y) non è principale:

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \{f(X, Y)X + g(X, Y)Y \mid f(X, Y), g(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y]\} \\ &= \{h(X, Y) \in \mathbb{R}[X, Y] \mid h(0, 0) = 0\}. \end{aligned}$$

1090.3 Lezione 2 - <2025-09-23 Mar>

Domini di integrità

Definizione 22. Sia A un anello. $x \in A$ si dice divisore dello zero se $\exists y \in A, y \neq 0$ tale che

$$xy = 0.$$

A è dominio di integrità (o dominio) se non ha divisori dello zero $\neq 0$

Esempio 23. • \mathbb{Z} è un dominio;

- \mathbb{K} campo è dominio;
- se A è dominio allora $A[X]$ è dominio^[319];
- se A è dominio allora $A[X_1, \dots, X_n]$ e $A[x_i \mid i \in I]$ sono domini.

Definizione 24. Sia A un anello.

- $x \in A$ si dice nilpotente se $x^n = 0$ per qualche $n \geq 0$;
- $x \in A$ si dice idempotente se $x^2 = x$.
- $x \in A$ si dice invertibile se esiste $y \in A$ tale che $xy = 1$ e

$$A^\times := \{x \in A \mid x \text{ invertibile}\} = \mathbb{G}_m(A).$$

Osservazione. In un dominio, se $x^2 = x$ allora $x = 0$ oppure $x = 1$.

Osservazione. Se $\langle A, +, \cdot \rangle$ è un anello, allora $\langle A^\times, \cdot \rangle$ è un gruppo abeliano moltiplicativo. Inoltre, \mathbb{G}_m è un funtore tra la categoria degli anelli e quella dei gruppi.

Esempio 25. • \mathbb{Z}_n : ogni elemento o è uno zero divisore, o è invertibile:^[320]

$$\mathbb{Z}_n^\times = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$$

- \mathbb{Z}_4 contiene nilpotenti non banali.

Esempio 26. $C(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continua}\}$ è un dominio? No, poste $f(x) = x\chi_{[0, +\inf)}(x)$ e $g(x) = -x\chi_{(-\infty, 0]}(x)$ ^[321] si ha che f, g sono divisori dello zero.

Inoltre non ci sono nilpotenti non nulli, in quanto se $f^n = 0$ allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $[f(x)]^n = 0$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f(x) = 0$, ovvero $f = 0$.

Osservazione. In generale, sia A un anello, non l'anello zero. Se $x \in A$ è uno zero-divisore, allora x non è invertibile. Infatti, se $xy = 0$ con $y \neq 0$ e x è invertibile, allora

$$0 = x^{-1}xy = y = 0.$$

Assurdo.

Definizione 27. Se A è un anello e $A^\times = A \setminus \{0_A\}$, A si dice campo.

Proposizione 28. Sia A un anello, $A \neq 0$. Sono fatti equivalenti:

1. A è un campo;
2. gli unici ideali di A sono (0) e A ;
3. per ogni anello $B \neq 0$, ogni omomorfismo tra anelli $f : A \rightarrow B$ è iniettivo.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia I ideale di A , e sia $I \neq (0)$. Allora esiste $x \in I$ tale che $x \neq 0$. Poiché A è un campo, allora x è invertibile, e $x x^{-1} \in I$ per assorbimento; quindi: $1_A \in I$, e pertanto $I = A$.

(2. \Rightarrow 3.): Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo, e si consideri $\ker f$. Siccome questo è ideale di A , ci sono due possibilità:

- $\ker f = (0)$, e quindi f iniettivo;
- $\ker f = A$, e quindi $1_B = f(1_A) = f(0_A) = 0_B$, quindi B è l'anello zero. Assurdo.

(3. \Rightarrow 1.): Sia $x \in A$, $x \neq 0$. Consideriamo (x) e la proiezione:

$$\pi : A \rightarrow A/(x)$$

Se π è iniettiva, allora $(x) = \ker \pi = (0)$, e quindi $x = 0$. Assurdo.

Dunque π non è iniettiva, e pertanto $A/(x) = 0$, ovvero $(x) = A$ e quindi esiste $y \in A$ tale che $xy = 1$. ■

Osservazione. Se A è un dominio, allora $\text{char}(A) = 0$ oppure $\text{char}(A) = p$ primo.

Infatti, se si avesse $\text{char}(A) = mn$, allora $mn1 = 0$, e quindi

$$0 = mn1 = (m1)(n1)$$

ovvero $(m1) = 0$ oppure $(n1) = 0$ (poiché A è un dominio). Assurdo, per definizione di caratteristica.

Alternativamente, si consideri il morfismo

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{Z} &\longrightarrow A \\ 1 &\longmapsto n \cdot 1.\end{aligned}$$

Allora $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$, dove $n = \text{char}(A)$. Poiché si ha questa iniezione:

$$\mathbb{Z}/\ker \varphi \rightarrow A$$

allora $\mathbb{Z}/\ker \varphi$ è un dominio se A è dominio, e quindi $\ker \varphi = (0)$ o $\ker \varphi = (p)$ con p primo. ??????

Proposizione 29. Ogni dominio finito è un campo.

Dimostrazione. Sia A un dominio finito, $x \in A$ e $x \neq 0$. Definita

$$\begin{aligned}m_x : A &\longrightarrow A \\ y &\longmapsto xy,\end{aligned}$$

m_x è un omomorfismo di anelli e quindi $\ker m_x = (0)$ (A è un dominio) e pertanto m_x iniettiva.

Se A è finito, allora m_x iniettiva implica che m_x sia suriettiva, e pertanto $1 \in \text{Im}(m_x)$, ovvero x invertibile. ■

Ideali primi e massimali

Definizione 30. Sia A un anello.

- Un ideale \mathcal{P} di A si dice primo se $\mathcal{P} \neq A$ e per ogni $a, b \in A$: [322]

$$ab \in \mathcal{P} \rightarrow a \in \mathcal{P} \text{ oppure } b \in \mathcal{P}$$

- Un ideale \mathcal{M} di A si dice massimale se $\mathcal{M} \neq A$ e non esiste $I \subseteq A$ ideale tale che

$$\mathcal{M} \subsetneq I \subsetneq A.$$

Proposizione 31. Sia A un anello.

- \mathcal{P} è primo se e solo se $\mathcal{P} \neq A$ e A/\mathcal{P} è un dominio.
- \mathcal{M} è massimale se e solo se $\mathcal{M} \neq A$ è A/\mathcal{M} è un campo.

Dalla caratterizzazione precedente segue:

Corollario 32. Se \mathcal{M} è massimale, allora \mathcal{M} è primo.

Osservazione. Non vale il viceversa.

Esempio 33. In \mathbb{Z} , l'ideale (0) è primo ma non massimale.

Osservazione. Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo tra anelli, $A \neq 0$. Se \mathcal{P} è un ideale primo di B , allora $f^{-1}(\mathcal{P})$ è un ideale primo di A .

Infatti, se $xy \in f^{-1}(\mathcal{P})$, allora $f(xy) = f(x)f(y) \in \mathcal{P}$; quindi $f(x) \in \mathcal{P}$ o $f(y) \in \mathcal{P}$ (poiché \mathcal{P} primo) e pertanto

$$x \in f^{-1}(\mathcal{P}) \text{ oppure } y \in f^{-1}(\mathcal{P}).$$

Viceversa, non è vero che se \mathcal{M} è massimale di B allora $f^{-1}(\mathcal{M})$ è massimale di A

Esempio 34. È sufficiente considerare l'inclusione $\iota : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$: (0) è massimale in \mathbb{Q} , ma $\iota^{-1}(0) = (0)$ non è massimale in \mathbb{Z} .

Teorema 35. Se $A \neq 0$ è un anello, A ha almeno un ideale massimale

Dimostrazione. (del Teorema 35). Consideriamo la famiglia

$$X = \{I \text{ ideale di } A \mid I \neq A\}.$$

ordinata parzialmente da \subseteq . Sicuramente $X \neq \emptyset$, in quanto $(0) \neq A$.

Sia \mathcal{C} una catena in X : allora $J := \bigcup_{I \in \mathcal{C}} I$ è un ideale di A (poiché \mathcal{C} è una catena), e inoltre $J \neq A$. Quindi J è un maggiorante di \mathcal{C} .

Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale \mathcal{M} in $\langle X, \subseteq \rangle$. \mathcal{M} è un ideale massimale di A . ■

Corollario 36. Ogni ideale I di A , $I \neq A$, è contenuto in un ideale massimale \mathcal{M} :

$$I \subseteq \mathcal{M} \subsetneq A.$$

Dimostrazione. Si applichi il Teorema 35 a A/I . Se \mathcal{M} è ideale massimale di A/I e

$$\pi : A \rightarrow A/I$$

allora $\pi^{-1}(\mathcal{M})$ è massimale di $A^{[323]}$ contenente I . ■

Corollario 37. Se $x \in A$ e x non è invertibile, allora esiste \mathcal{M} ideale massimale di A tale che $x \in \mathcal{M}$.

Dimostrazione. Infatti, se $x \notin A^\times$ allora $(x) \subsetneq A$. ■

Definizione 38. Un anello A si dice locale se ha un unico ideale massimale \mathcal{M} . Si scrive (A, \mathcal{M}) .

Il campo A/\mathcal{M} si dice il campo residuo di A .

Esempio 39. • Se \mathbb{K} è un campo, allora $(\mathbb{K}, (0))$ è anello locale con campo residuo \mathbb{K} .

- L'anello quoziante $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, con p primo, ha come unico ideale massimale (\bar{p}) .

- Sia p primo:

$$A := \left\{ \frac{n}{m} \mid p \nmid m \right\}.$$

A è un sottoanello di \mathbb{Q} , e inoltre

$$\begin{aligned} A^\times &= \left\{ \frac{n}{m} \mid p \nmid m \wedge p \nmid n \right\} \\ &= \left\{ \frac{n}{m} \in A \mid p \nmid \frac{n}{m} \right\} \end{aligned}$$

e quindi (p) è massimale in A .

Esempio 40. Se \mathbb{K} è un campo allora $\mathbb{K}[X]$ è un dominio di integrità, e si scrive

$$\text{Frac}(\mathbb{K}[X]) = \mathbb{K}(X) := \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid f, g \in \mathbb{K}[X], g \neq 0 \right\}.$$

e si ha $\mathbb{K}[X] \subseteq \mathbb{K}(X)$. Consideriamo ora

$$A = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \mid g(0) \neq 0 \right\}.$$

Allora A è un anello locale con ideale massimale

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} \in A \mid f(0) = 0 \right\} = (X)$$

Nilradicale e Radicale di Jacobson

Definizione 41. Sia A un anello. Si definisce il nilradicale di A :

$$\begin{aligned} N = N(A) &= \{x \in A \mid x \text{ è nilpotente}\} \\ &= \{x \in A \mid \exists n \text{ t.c. } x^n = 0\}. \end{aligned}$$

Proposizione 42. N è un ideale di A e A/N non ha nilpotenti non banali.

Dimostrazione. Siano $x, y \in N$; allora esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che

$$x^n = 0, \quad y^m = 0$$

Siccome

$$(x+y)^{n+m-1} = \sum_{j=0}^{n+m-1} \binom{n}{j} x^j y^{n+m-(j+1)}$$

non si può avere contemporaneamente $j < n$ e $n+m-(j+1) < m$, e pertanto $(x+y)^{n+m-1} = 0$ e quindi $x+y \in N$.

Sia ora $a \in A$ e $x \in N$ tale che $x^n = 0$. Allora

$$(ax)^n = a^n x^n = 0$$

e pertanto $ax \in N$. N è ideale.

Sia ora \bar{x} la classe di x in A/N . Se $\bar{x}^k = 0$, allora $x^k \in N$, e dunque esiste $n \in N$ tale che $x^{kn} = 0$, e quindi $x \in N$.

Pertanto $\bar{x} = 0$ in A/N . ■

Proposizione 43. Il nilardicale N di A è l'intersezione di tutti gli ideali primi di A .

Dimostrazione. Se $x^n = 0$, allora $x^n \in \mathcal{P}$ per ogni \mathcal{P} primo, e dunque $x \in \mathcal{P}$ per ogni \mathcal{P} primo, e pertanto $x \in \bigcap_{\mathcal{P} \text{ primo}} \mathcal{P}$.

Quindi $N \subseteq \bigcap_{\mathcal{P} \text{ primo}} \mathcal{P}$.

Viceversa, se $x \notin N$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che $x^n \neq 0$. Sia

$$\mathcal{S} := \{\text{ideali } \mathcal{A} \text{ di } A \mid \forall n \in \mathbb{N} \ x^n \notin \mathcal{A}\}.$$

Allora $\langle \mathcal{S}, \subseteq \rangle$ è un insieme parzialmente ordinato e non vuoto (poiché $(0 \in \mathcal{S})$), e ogni catena in \mathcal{S} ammette un maggiorante.

Allora \mathcal{S} ha un elemento maggiorante \mathcal{B} .

Claim: \mathcal{B} è primo.

Infatti, per assurdo, supponiamo $yz \in \mathcal{B}$, con $y, z \notin \mathcal{B}$. Quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{B} + (y) &= \{b + ay \mid b \in \mathcal{B}, a \in A\} \\ \mathcal{B} + (x) &= \{b + az \mid b \in \mathcal{B}, a \in A\} \end{aligned}$$

sono ideali di A , strettamente contenenti \mathcal{B} . Allora (per definizione) esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che

$$x^n \in \mathcal{B} + (y), \quad x^m \in \mathcal{B} + (z)$$

e quindi $x^{n+m} \in \mathcal{B} + (yz)$, ovvero $x^{n+m} \in \mathcal{B}$. Assurdo.

Quindi \mathcal{B} primo e $x \in \mathcal{B}$. ■

1090.4 Lezione 3 - <2025-09-29 Lun>

Definizione 44. Il Radicale di Jacobson dell'anello A è l'ideale

$$\mathcal{R}(A) := \bigcap_{\substack{\mathcal{M} \text{ ideale} \\ \text{massimale}}} \mathcal{M}.$$

Osservazione. Ovviamente $N(A) \subseteq \mathcal{R}(A)$; se A è un anello locale (A, \mathcal{M}, k) , allora $\mathcal{R}(A) = \mathcal{M}$.

Proposizione 45. $x \in \mathcal{R}$ se e solo se per ogni $y \in A$: $1 - xy \in A^\times$.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Se $x \in \mathcal{R}$, allora $x \in \mathcal{M}$ in ogni \mathcal{M} ideale massimale.

Quindi per ogni \mathcal{M} massimale, $1 - xy \in \mathcal{M}$, e pertanto $1 - xy$ è invertibile (ovvero $1 - xy \in A^\times$).

(\Rightarrow): Per assurdo, supponiamo che $x \notin \mathcal{R}$. Allora esiste \mathcal{M} massimale tale che $x \notin \mathcal{M}$. Quindi $\bar{x} = \bar{0}$ in A/\mathcal{M} , e dunque esiste $y \in A$ tale che $\bar{xy} = \bar{1}$ e quindi $1 - xy \in \mathcal{M}$.

Pertanto $1 - xy \notin A^\times$. ■

Operazioni sugli ideali

- Intersezione di ideali è un ideale.

- Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono ideali allora

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{a + b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$$

è un ideale, detto ideale somma di \mathcal{A} e \mathcal{B} .

- Analogamente, se $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ è una famiglia di ideali di A si definisce la somma:

$$\sum_{i \in I} \mathcal{A}_i = \left\{ a_{i_1} + \cdots + a_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, a_{i_j} \in \mathcal{A}_{i_j} \right\}.$$

che è l'ideale generato da $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.

- Prodotto di ideali: se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono ideali di A allora

$$\mathcal{A}\mathcal{B} := \left\{ \sum_{i=1}^k a_i b_i \mid a_i \in \mathcal{A}, b_i \in \mathcal{B} \right\}$$

è l'ideale prodotto di \mathcal{A} e \mathcal{B} .

- In generale, se $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sono ideali di A , si definisce l'ideale prodotto:

$$\mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n := \left\{ \sum_{i=1}^k a_{i_1} \dots, a_{i_n} \mid a_{ij} \in \mathcal{A}_j \right\}.$$

In particolare, se $\mathcal{A}_j = \mathcal{A}$, allora

$$\mathcal{A}^n := \left\{ \sum_{i=1}^k a_{i_1} \dots, a_{i_n} \mid a_{ij} \in \mathcal{A} \right\}.$$

Esempio 46. In \mathbb{Z} (un PID):

$$(m) + (n) = \{ma + nb \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = (d) \quad \text{dove } d = (m, n);$$

$$(m) \cap (n) = (\text{mcm}(m, n));$$

$$(m)(n) = (mn)$$

Inoltre, se $(m, n) = 1$, allora $(m) \cap (n) = (m)(n)$ e $(m) + (n) = \mathbb{Z}$.

(Tutto questo vale per ogni PID).

Esempio 47. Se $A = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ con \mathbb{K} campo. Si consideri

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (X_1, \dots, X_n) \\ &= (X_1) + (X_2) + \cdots + (X_n) \\ &= \{X_1 f_1 + X_2 f_2 + \cdots + X_n f_n \mid f_1, \dots, f_n \in A\} \\ &= \{g(X_1, \dots, X_n) \in A \mid g(0, \dots, 0) = 0\}.\end{aligned}$$

Inoltre l'ideale \mathcal{A}^m è generato da tutti i prodotti

$$X_{j_1} X_{j_2} \cdots X_{j_m}$$

con $X_{j_k} \in \{X_1, \dots, X_n\}$.

Ad esempio, se $A = \mathbb{K}[X, Y]$ e $\mathcal{A} = (X, Y)$, allora:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^2 &= (X^2, Y^2, XY) \\ \mathcal{A}^3 &= (X^3, X^2Y, XY^2, Y^3).\end{aligned}$$

Si osservi che $\mathcal{A}^3 \subsetneq \mathcal{A}^2 \subsetneq \mathcal{A}$.

Esercizio: Dimostrare che per ogni $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ideali di A vale la proprietà distributiva:

$$\mathcal{A}(\mathcal{B} + \mathcal{C}) = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{A}\mathcal{C}.$$

Definizione 48. Due ideali \mathcal{A}, \mathcal{B} di A si dicono coprimi se

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = A.$$

Osservazione. \mathcal{A} e \mathcal{B} sono coprimi sse esistono $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$ tali che $a + b = 1_A$.

Esempio 49. In ogni anello due ideali massimali distinti sono coprimi. Infatti la somma contiene strettamente ciascuno dei due ideali massimali.

Osservazione. Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono ideali di A , allora

$$\mathcal{A}\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$$

per assorbimento. Il viceversa è falso.

Esempio 50. In \mathbb{Z} :

$$(2)(2) = (4), \quad (2) \cap (2) = (2)$$

e $(4) \subsetneq (2)$.

Proposizione 51. Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono ideali coprimi di A , allora

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}.$$

Dimostrazione. Si deve dimostrare che $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\mathcal{B}$.

Per ipotesi esistono $a \in \mathcal{A}$ e $b \in \mathcal{B}$ tali che $a + b = 1_A$.

Sia $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$. $x = x \cdot 1_A = x(a + b) = xa + xb$:

- siccome $x \in \mathcal{B}$ allora $xa \in \mathcal{A}\mathcal{B}$;

- siccome $x \in \mathcal{A}$ allora $xb \in \mathcal{A}\mathcal{B}$;

e pertanto $xa + xb \in \mathcal{A}\mathcal{B}$. ■

Osservazione. Analogamente se $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ sono coprimi a coppie^[324], allora

$$\mathcal{A}_1 \cap \dots \cap \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \dots \mathcal{A}_n.$$

Prodotto diretto di Anelli

Definizione 52. *Dati due anelli A, B si definisce il loro prodotto diretto: $A \times B$ prodotto cartesiano con operazioni componente per componente.*

Osservazione. Per due morfismi

$$\begin{aligned} f : C &\rightarrow A \\ g : C &\rightarrow B \end{aligned}$$

si ha un unico morfismo

$$\begin{aligned} f \times g : C &\longrightarrow A \times B \\ c &\longmapsto (f(c), g(c)). \end{aligned}$$

Se ora \mathcal{A}, \mathcal{B} sono ideali di A , si hanno

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A &\longrightarrow A/\mathcal{A} \\ \varphi_2 : A &\longrightarrow A/\mathcal{B} \end{aligned}$$

che inducono $\varphi : A \rightarrow (A/\mathcal{A}) \times (A/\mathcal{B})$, con $\ker \varphi = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Per il Teorema Fondamentale di Isomorfismo, φ induce un omomorfismo iniettivo

$$\tilde{\varphi} : A/\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \hookrightarrow (A/\mathcal{A}) \times (A/\mathcal{B})$$

Proposizione 53. φ è suriettiva se e solo se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono coprimi.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Supponiamo che φ sia suriettiva; allora esiste $x \in A$ tale che $\varphi(x) = (\bar{1}, \bar{0})$:

$$\begin{aligned} x &\equiv 1 \pmod{\mathcal{A}} \\ x &\equiv 0 \pmod{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

ovvero $x - 1 \in \mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{B}$. Pertanto

$$1 = x - (x - 1)$$

e quindi \mathcal{A}, \mathcal{B} sono coprimi.

(\Rightarrow): Viceversa se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono coprimi, allora esistono $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$ tali che $a + b = 1$, $b = 1 - a$. Allora

$$\varphi(b) = (\bar{1}, \bar{0}).$$

Analogamente $(\bar{0}, \bar{1}) \in \text{Im } \varphi$. TERMINARE DIMOSTRAZIONE ■

Osservazione. Questa proposizione è il Teorema Cinese dei Resti. Infatti, se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono coprimi e $x_0, y_0 \in A$, allora esiste $z \in A$ tale che

$$\begin{aligned} z &\equiv x_0 \pmod{\mathcal{A}} \\ z &\equiv y_0 \pmod{\mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Analogamente per prodotto e intersezione di più ideali:

Proposizione 54. Se $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ ideali di A e

$$\varphi : A \rightarrow (A/\mathcal{A}_1) + \dots + (A/\mathcal{A}_n)$$

allora φ suriettiva se e solo se $\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j$ coprimi per ogni $i \neq j$.

Osservazione. In questo caso $\ker \varphi = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ e pertanto φ è iniettiva se e solo se $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i = (0)$.

Proprietà di evitamento (avoidance) e assorbimento (absorbance) degli ideali primi

Lemma 55. Sia A un anello commutativo con unità.

1. Avoidance: se un ideale \mathcal{A} è contenuto in una unione di primi, allora è contenuto in uno di essi:

$$\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i \quad \rightarrow \quad \text{esiste } i \text{ t.c. } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_i.$$

2. Absorbance: se $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}$, con \mathcal{P} ideale primo, allora esiste i tale che $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}$.

Se $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \mathcal{P}$, con \mathcal{P} ideale primo, allora esiste i tale che $\mathcal{A}_i = \mathcal{P}$.

Osservazione. Queste proprietà valgono soltanto per famiglie finite di ideali.

Dimostrazione. (del Lemma 55)

1. Per induzione su n .

- Se $n = 1$ il risultato è ovvio.
- Supponiamo vero per $n - 1$ e dimostriamo per n .

Sia $\mathcal{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$. WLOG possiamo supporre che per ogni i : $\mathcal{A} \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathcal{P}_j$.

Allora per ogni i esiste $x_i \in \mathcal{A}$ tale che $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathcal{P}_j$. Pertanto $x_i \in \mathcal{P}_i$ (poiché $x_i \in \mathcal{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^n \mathcal{P}_j$).

Si definisce quindi

$$y := \sum_{i=1}^n x_1 \dots \hat{x}_i \dots x_n \in \mathcal{A}.$$

Si ha che $y \in \mathcal{P}_j$ se e solo se $x_1 \dots \hat{x}_j \dots x_n \in \mathcal{P}_j$ se e solo se esiste $i \neq j$ tale che $x_i \in \mathcal{P}_j$. Assurdo.

Quindi $y \in \mathcal{A}$ e $y \notin \bigcup_{i=1}^n \mathcal{P}_i$. Assurdo.

2. Supponiamo $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}$ e per ogni i : $\mathcal{A}_i \not\subseteq \mathcal{P}$.

Quindi per ogni i esiste $x_i \in \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{P}$.

Per assorbimento: $x_1 \dots x_n \in \bigcap_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ e quindi $x_1 \dots x_n \in \mathcal{P}$; siccome \mathcal{P} è primo, allora $x_i \in \mathcal{P}$ per qualche i . Assurdo.

Se invece $\bigcap \mathcal{A}_i = \mathcal{P}$, allora per quanto detto esiste $\mathcal{A}_i \subseteq \mathcal{P}$.

$$\mathcal{P} = \bigcap \mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{A}_i.$$

■

Quoziente di Ideali

Definizione 56. Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono ideali di A , si definisce l'ideale

$$(\mathcal{A} : \mathcal{B}) := \{x \in A \mid x\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Osservazione. In particolare, se $\mathcal{A} = (0)$, allora

$$(0 : \mathcal{B}) = \{x \in A \mid x\mathcal{B} = 0\}$$

è detto annullatore di \mathcal{B} , ed è denotato con $\text{Ann}_A(\mathcal{B})$.

Esempio 57. Sia $X \neq \emptyset$, e si consideri $A = \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$. Sia $x_0 \in X$.

$$\mathcal{A} := \{f \in A \mid f(x_0) = 0\}$$

Allora

$$\text{Ann}(\mathcal{A}) = \{g \in A \mid \forall f \in \mathcal{A} : gf = 0\} = \{g \in A \mid \forall x \neq x_0 : g(x) = 0\}.$$

Esempio 58. In \mathbb{Z} , siano $\mathcal{A} = (m)$ e $\mathcal{B} = (n)$. Allora

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} : \mathcal{B}) &= \{r \in \mathbb{Z} : rn \in (m)\} \\ &= \{r \in \mathbb{Z} : m \mid rn\} \\ &= \left\{ r \in \mathbb{Z} : \frac{m}{d} \mid r \frac{n}{d} \right\} \quad d = (m, n) \\ &= \left\{ r \in \mathbb{Z} : \frac{m}{d} \mid r \right\} = \left(\frac{m}{d} \right). \end{aligned}$$

Radicale di un ideale

Definizione 59. Sia \mathcal{A} un ideale di A . Il radicale di \mathcal{A} è

$$\sqrt{\mathcal{A}} = r(\mathcal{A}) = \text{rad}(\mathcal{A}) := \{x \in A \mid x^n \in \mathcal{A} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}\}.$$

Osservazione. Ovviamente $\mathcal{A} \subseteq \sqrt{\mathcal{A}}$, ma è possibile $\mathcal{A} \subsetneq \sqrt{\mathcal{A}}$.

Esempio 60. In \mathbb{Z} , per ogni p primo: $p \in \sqrt{(p^2)} \setminus (p^2)$

Osservazione. Posto $\varphi : A \rightarrow A/\mathcal{A}$, allora

$$\sqrt{\mathcal{A}} = \varphi^{-1}(N(A/\mathcal{A})) = \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P} \\ \text{ideale primo di } A}} \mathcal{P}$$

Esercizio: Dimostrare che:

- $rr(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$;
- se \mathcal{P} è primo allora $\sqrt{\mathcal{P}^n} = \mathcal{P}$ per ogni $n \geq 1$;
- $r(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = r(\mathcal{A}) \cap r(\mathcal{B}) = r(\mathcal{AB})$.

1090.5 Lezione 4 - <2025-09-30 Mar>

Contrazione ed estensione di ideali Siano A, B due anelli e $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo.

Definizione 61. • Sia $\mathcal{A} \subseteq A$ un ideale. L'ideale esteso di \mathcal{A} mediante f è

$$\mathcal{A}^e := \langle f(\mathcal{A}) \rangle \subseteq B$$

l'ideale generato da $f(\mathcal{A})$ in B .

- Sia $\mathcal{B} \subseteq B$ un ideale. L'ideale contratto di \mathcal{B} mediante f è

$$\mathcal{B}^c := f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq A.$$

Proposizione 62. Siano $\mathcal{A} \subseteq A$, $\mathcal{B} \subseteq B$ ideali.

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}^{ec}$; $\mathcal{B}^{ce} \subseteq \mathcal{B}$.
2. Se \mathcal{P} è un ideale primo di A , allora \mathcal{P}^e non è necessariamente un primo di B .
3. Se \mathcal{P} è un ideale primo di B , allora \mathcal{P}^c è un ideale primo di A .

Osservazione. Se f è suriettiva, allora $A/\ker f \cong B$ e dunque vi è la corrispondenza, posto $\mathcal{A}_0 := \ker f$:

$$\{\text{ideali di } A \text{ contenenti } \mathcal{A}\} \longleftrightarrow \{\text{ideali di } B\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xlongleftarrow{\hspace{2cm}} & \mathcal{A}^e \\ \mathcal{B}^c & \xlongleftarrow{\hspace{2cm}} & \mathcal{B} \end{array}$$

Pertanto, se \mathcal{P} è un ideale primo di A tale $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}$, allora \mathcal{P}^e è primo di B .

Infatti, siano $\bar{x}, \bar{y} \in B$ e siano $x, y \in A$ tali che

$$\bar{x} = f(x), \quad \bar{y} = f(y).$$

Siccome f è suriettiva allora $\mathcal{P}^e = f(\mathcal{P})$. Se $\bar{x} \bar{y} \in \mathcal{P}^e$, allora esiste $z \in \mathcal{P}$ tale che

$$\bar{x} \bar{y} = f(z) =: \bar{z},$$

e dunque $xy - z \in \ker f = \mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{P}$ e pertanto $xy \in \mathcal{P}$.

Siccome \mathcal{P} è primo allora o $x \in \mathcal{P}$ oppure $y \in \mathcal{P}$, e pertanto o $\bar{x} \in \mathcal{P}^e$ oppure $\bar{y} \in \mathcal{P}^e$, e quindi \mathcal{P}^e è primo.

Osservazione. Viceversa, se $f : A \rightarrow B$ non è suriettiva, allora si può vedere

$$A \xrightarrow{f} f(A) \hookrightarrow B$$

e in questo caso f è suriettiva. Pertanto ci si riduce a studiare le inclusioni $A \subseteq B$, in cui, per $\mathcal{A} \subseteq A$, $\mathcal{B} \subseteq B$ ideali:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^e &= \langle \mathcal{A} \rangle \text{ ideale generato da } \mathcal{A} \text{ in } B \\ \mathcal{B}^c &= \mathcal{B} \cap A.\end{aligned}$$

Esempio 63. Consideriamo

$$\begin{aligned}f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto (a, a)\end{aligned}$$

e sia $p \in \mathbb{Z}$ primo. Consideriamo $(p) \subseteq \mathbb{Z}$ ideale primo.

- $f[(p)] = \{(pa, pa) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ non è un ideale di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- Inoltre, $(p)^e = \langle \{(pa, pa) \mid a \in \mathbb{Z}\} \rangle = p\mathbb{Z} \times p\mathbb{Z}$ non è un ideale primo in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, come testimoniano

$$\begin{aligned}(1, 0), (0, 1) &\notin (p)^e \\ (1, 0) \cdot (0, 1) &= (0, 0) \in (p)^e.\end{aligned}$$

Nota - Simbolo di Legendre: Sia $p \in \mathbb{Z}$ un primo, e sia $a \in \mathbb{Z}$ tale che $(a, p) = 1$. Si definisce il *simbolo di Legendre*:

$$\left(\frac{a}{p} \right) := \begin{cases} 1 & a \text{ è un quadrato} \pmod{p} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Esempio 64. Sia $A := \mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. A è un anello con $\mathbb{Z} \subseteq A$.

Se $p \in \mathbb{Z}$ è primo,

$$(p)^e = \{pa + pb\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

è primo?

- Se p è dispari e $\left(\frac{2}{p} \right) = -1$ allora $(p)^e$ è primo.
- Se p è dispari e $\left(\frac{2}{p} \right) = 1$ allora $(p)^e$ non è primo.
- $(2)^e$ non è primo (infatti $2 = \sqrt{2} \sqrt{2}$).

1090.5.1 Spec di un anello [Parentesi estemporanea fuori programma]

In geometria algebrica “classica” si studia il luogo degli zeri di sistemi di equazioni polinomiali: dato un campo \mathbb{K} e dati $f_i \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ per $i = 1, \dots, k$ l’oggetto di studio è

$$X := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \forall i = 1, \dots, k \ f_i(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

- Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p, \dots$, allora \mathbb{K} ha una sua topologia (e quindi anche \mathbb{K}^n), rispetto alla quale i polinomi corrispondono a funzioni continue

$$\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$$

In questi casi X come sopra è un chiuso di \mathbb{K}^n , in quanto è retroimmagine di $\{0\}$ chiuso tramite funzione continua.

- Per un \mathbb{K} generico sprovvisto di una topologia “naturale” si utilizza la topologia di Zariski: i chiusi di \mathbb{K}^n sono tutti e soli gli insiemi fatti come X , ovvero gli zeri di sistemi di equazioni polinomiali.

Questa è una topologia T1: se $p := (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, allora $\{p\}$ è l’insieme degli zeri di

$$\begin{cases} X_1 - a_1 = 0 \\ X_2 - a_2 = 0 \\ \vdots \\ X_n - a_n = 0. \end{cases}$$

Non è però, in generale, una topologia T2.

Utilizzando la topologia di Zariski, quindi, è possibile scrivere:

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = \mathcal{C}_Z(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$$

dove \mathcal{C}_Z è l’anello delle funzioni continue rispetto alla topologia di Zariski.

L’idea di Grothendieck è stata quella di studiare ogni anello A al pari di $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, ovvero come anello di funzioni continue su un certo spazio topologico, detto $\text{Spec}(A)$.

- C’è una corrispondenza (non proprio biunivoca)

$$\{\text{sistemi di eq. polinomiali in } \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]\} \longleftrightarrow \{\text{ideali di } \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]\}$$

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_k = 0 \end{cases} \xrightarrow{\hspace{10em}} (f_1, \dots, f_k)$$

Quindi, preso un punto $p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, si ottiene un sistema polinomiale

$$\begin{cases} X_1 = a_1 \\ \vdots \\ X_n = a_n \end{cases}$$

che corrisponde all'ideale massimale $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ di $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, in quanto

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n) = \ker \left(\begin{array}{c} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbb{K} \\ f \mapsto f(a_1, \dots, a_n) \end{array} \right)$$

In particolare, se \mathbb{K} è algebricamente chiuso (come il caso di quasi tutti i campi in geometria algebrica), tutti gli ideali massimali di $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ hanno la forma $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ per qualche $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$.

Dunque, in quest'ultimo caso, è presente una biiezione

$$\mathbb{K}^n \longleftrightarrow \{\text{ideali massimali di } \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]\}$$

e inoltre se $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ allora

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0 \iff f \in (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

Quindi ha senso definire

$$\text{Spec}(A) := \{\mathcal{P} \subseteq A \text{ ideali primi di } A\}.$$

Definizione 65. *Dato $\mathcal{A} \subseteq A$ ideale, lo “zero-locus” di \mathcal{A} , denotato con $Z(\mathcal{A})$ è*

$$Z(\mathcal{A}) := \{\mathcal{P} \in \text{Spec}(A) \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\} \subseteq \text{Spec}(A)$$

Esempio 66. Consideriamo $A = \mathbb{Z}$. Allora si ha che $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \{(p) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ primo}\} \cup \{(0)\}$, ed inoltre si ha che, ad esempio

$$\begin{aligned} Z((30)) &= \{(2), (3), (5)\} \\ Z((n)) &= \{(p) \mid p \in \mathbb{Z} \text{ primo}, p \mid n\} \end{aligned}$$

Esempio 67. Sia $A := \mathbb{C}[X, Y]$. Allora $Z((X, Y)) = \{(X, Y)\}$.

Se si vuole invece studiare $Z((X))$:

$$Z((X)) = \{\mathcal{P} \in \text{Spec}(A) \mid (X) \subseteq \mathcal{P}\} = \{\mathcal{P} \in \text{Spec}(A) \mid X \in \mathcal{P}\}$$

e questi sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali di $\mathbb{C}[X, Y]/(X) \cong \mathbb{C}[Y]$, e si ha che

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[Y]) = \{(Y - y_0) \mid y_0 \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$$

e pertanto $Z((X)) = \{(X, Y - y_0) \mid y_0 \in \mathbb{C}\} \cup \{(X)\}$.

Proposizione 68. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{A}_i \subseteq A$ ideali per ogni $i \in I$. Valgono i seguenti fatti:

- se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ allora $Z(\mathcal{B}) \subseteq Z(\mathcal{A})$;
- $Z(\mathcal{A}\mathcal{B}) = Z(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = Z(\mathcal{A}) \cup Z(\mathcal{B})$;

- $Z(\mathcal{A}) = Z(\sqrt{\mathcal{A}})$;
- $Z\left(\sum_{i \in I} \mathcal{A}_i\right) = \bigcap_{i \in I} Z(\mathcal{A}_i)$.

Corollario 69. L'insieme

$$\{Z(\mathcal{A}) \mid \mathcal{A} \subseteq A \text{ ideale}\}$$

definisce i chiusi di una topologia su $\text{Spec}(A)$, detta topologia di Zariski.

Proposizione 70. Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo tra anelli, questo induce una funzione continua

$$\begin{aligned} f^\# : \text{Spec}(B) &\longrightarrow \text{Spec}(A) \\ \mathcal{P} &\longmapsto f^{-1}(\mathcal{P}) \end{aligned}$$

e $(\text{Spec}, \bullet^\#)$ è un funtore controvariante dalla categoria degli anelli commutativi con unità alla categoria degli spazi topologici.

Osservazione. Fissato un anello A , la corrispondenza $\mathcal{A} \mapsto Z(\mathcal{A})$ non è iniettiva (infatti, ad esempio, $Z(\mathcal{A}) = Z(\mathcal{A}^2)$); risulta però iniettiva se ci si restringe agli ideali radicali, ovvero quelli tali per cui $\mathcal{A} = \sqrt{\mathcal{A}}$.

Osservazione. La topologia su $\text{Spec}(A)$ non è T1. Infatti un ideale primo $\{\mathcal{P}_0\} \subseteq \text{Spec}(A)$ è chiuso, per definizione, se $\{\mathcal{P}_0\} = Z(\mathcal{A})$ per qualche ideale $\mathcal{A} \subseteq A$, ovvero sse

$$\{\mathcal{P}_0\} = \{\mathcal{P} \text{ ideale primo} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}\}$$

sse \mathcal{P}_0 è ideale massimale.

In generale, vale che

$$\text{Cl}_{\text{Spec}(A)}(\{\mathcal{P}_0\}) = Z(\mathcal{P}_0).$$

Osservazione. Si ha che $\text{Spec}(A)$ è un fascio di anelli ed è uno schema.

1090.5.2 Moduli

Definizione 71. Sia A un anello. Un A -modulo è un gruppo abeliano $(M, +)$ dotato di una operazione di prodotto per scalari

$$\begin{aligned} A \times M &\longrightarrow M \\ (a, m) &\longmapsto am \end{aligned}$$

tale che

1. $a(m_1 + m_2) = am_1 + am_2, \quad \forall a \in A, \forall m_1, m_2 \in M;$
2. $(a + b)m = am + bm, \quad \forall a, b \in A, \forall m \in M;$
3. $(ab)m = a(bm), \quad \forall a, b \in A, \forall m \in M.$
4. $1_A m = m, \quad \forall m \in M, 1_A \text{ unità di } A.$

Osservazione. Se $A = \mathbb{K}$ è un campo, allora gli A -moduli sono tutti e soli gli spazi vettoriali.

Osservazione. Se $A = \mathbb{Z}$, allora gli \mathbb{Z} -moduli sono tutti i gruppi abeliani.

Proposizione 72. Se A è un anello e $\mathcal{A} \subseteq A$ è un ideale, allora \mathcal{A} è un A -modulo.

Esempio 73. Se $A \subseteq B$ sono due anelli, allora B è un A -modulo con il prodotto per scalari dato da

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow B \\ (a, b) &\longmapsto ab \end{aligned}$$

dove ab denota il prodotto in B .

Esempio 74. Se $f : A \rightarrow B$ è un omomorfismo di anelli, allora B è un A -modulo con il prodotto per scalari dato da

$$\begin{aligned} A \times B &\longrightarrow B \\ (a, b) &\longmapsto f(a)b \end{aligned}$$

Definizione 75. Sia A un anello e M, N due A -moduli. Un omomorfismo di A -moduli è una funzione $f : M \rightarrow N$ tale che

$$\begin{aligned} f(m_1 + m_2) &= f(m_1) + f(m_2) & \forall m_1, m_2 \in M \\ f(am) &= a f(m) & \forall a \in A, \forall m \in M. \end{aligned}$$

1090.6 Lezione 5 - <2025-10-06 Lun>

Proposizione 76. Sia $f : M_1 \rightarrow M_2$ un morfismo di A -moduli.

- Se $N \subseteq M_1$ è sottomodulo, allora $f[N] \subseteq M_2$ è sottomodulo.
- Se $K \subseteq M_2$ è sottomodulo, allora $f^{-1}[K] \subseteq M_1$ è sottomodulo.

In particolare

- $\ker f = f^{-1}[\{0\}]$ è sottomodulo di M_1 ;
- $\text{im } f = f(M)$ è sottomodulo di M_2 .

Proposizione 77. Dati due A -moduli M, N , è possibile dare una struttura di A -modulo all'insieme

$$\text{Hom}_A(M, N) = \{\text{omomorfismi } f : M \rightarrow N\}$$

ponendo

$$\begin{aligned} (f + g)(m) &= f(m) + g(m) \\ (af)(m) &= a(f(m)). \end{aligned}$$

- Se $\Phi : N \rightarrow N'$ è un omomorfismo tra A -moduli, allora la funzione

$$\begin{aligned} F_* : \text{Hom}_A(M, N) &\rightarrow \text{Hom}_A(M, N') \\ f &\mapsto F \circ f \end{aligned}$$

è un omomorfismo di A -moduli.

- Se $\Psi : M' \rightarrow M$ è un omomorfismo tra A -moduli, allora la funzione

$$\begin{aligned}\Psi^* : \text{Hom}_A(M, N) &\longrightarrow \text{Hom}_A(M', N) \\ f &\longmapsto f \circ \Psi\end{aligned}$$

è un omomorfismo di A -moduli.

Definizione 78. Un isomorfismo tra A -moduli è un omomorfismo biettivo. Due A -moduli M_1, M_2 si dicono isomorfi se esiste $f : M_1 \rightarrow M_2$ isomorfismo.

Osservazione. Si ha che il seguente è un isomorfismo:

$$\begin{aligned}\text{Hom}_A(A, M) &\longrightarrow M \\ f &\longmapsto f(1_A)\end{aligned}$$

Sottomoduli

Definizione 79. Sia M un A -modulo. $M' \subseteq M$ è un sottomodulo se

- $(M', +)$ è un sottogruppo di $(M, +)$;
- per ogni $m \in M'$ e per ogni $a \in A$, $am \in M'$.

Osservazione. Poiché $-1 \in A$ e $-m = (-1)m$, per verificare che M' è sottomodulo è sufficiente verificare

1. per ogni $m_1, m_2 \in M'$: $m_1 + m_2 \in M'$;
2. per ogni $m \in M'$, $a \in A$: $am \in M'$.

Osservazione. Se $M' \subseteq M$ è un sottomodulo, allora

$$\begin{aligned}\iota : M' &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto m\end{aligned}$$

è un morfismo di moduli.

Modulo quoziante

Definizione 80. Se $N \subseteq M$ è un sottomodulo, allora si dota $\langle M/N, + \rangle$ gruppo quoziante^[325] di una struttura di A -modulo:

$$\begin{aligned}A \times M/N &\longrightarrow M/N \\ (a, m+N) &\longmapsto am+N.\end{aligned}$$

Questo è il modulo quoziante.

Osservazione. La moltiplicazione è ben definita: se $m - m' \in N$ allora $am - am' = a(m - m') \in N$ (poiché N è sottomodulo). Si verifica facilmente che $\langle M/N, + \rangle$ è un A -modulo

Osservazione. Vi è una naturale proiezione

$$\begin{aligned}\pi : M &\longrightarrow M/N \\ m &\longmapsto m + N\end{aligned}$$

morfismo suriettivo di A -moduli tale che $\ker \pi = N$.

Osservazione. In particolare, se $f : M_1 \rightarrow M_2$ è un morfismo di A -moduli, allora

$$\text{coker } f := M_2 / \text{im } f$$

è un A -modulo.

Proposizione 81. Sia M un modulo, $N \subseteq M$ un sottomodulo, e sia $\pi : M \rightarrow M/N$ la proiezione. Esiste una corrispondenza biettiva:

$$\begin{array}{ccc}\{\text{sottomoduli di } M \text{ contenenti } N\} & \longleftrightarrow & \{\text{sottomoduli di } M/N\} \\ M' \leftarrow & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & \pi(M) \\ \pi^{-1}(K) \leftarrow & \xrightarrow{\hspace{1cm}} & K\end{array}$$

Teorema 82. (Teorema fondamentale di isomorfismo). Un omomorfismo $f : M \rightarrow M'$ tra A -moduli induce un omomorfismo iniettivo

$$\tilde{f} : M/\ker f \rightarrow M$$

tale che il seguente diagramma commutati:

$$\begin{array}{ccc}M & \xrightarrow{f} & M' \\ \pi \searrow & & \swarrow \tilde{f} \\ & M'/\ker f & \end{array}$$

ovvero $\tilde{f} \circ \pi = f$.

In particolare, f induce un isomorfismo

$$M/\ker f \cong \text{im } f.$$

Esempio 83. Sia M un A -modulo, $a \in A$:

$$\begin{aligned}f_a : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto am\end{aligned}$$

è un omomorfismo di A -moduli.

Generatori

Definizione 84. Sia M un A -modulo e $S \subseteq M$ sottoinsieme. L' A -modulo generato da S è

$$(S) = \bigcap_{\substack{N \text{ sottomodulo di } M \\ S \subseteq N}} N$$

o, equivalentemente, il più piccolo sottomodulo di M contenente S .

Osservazione. Siccome l'intersezione di sottomoduli è un sottomodulo, allora la definizione di cui sopra è valida. Si verifica inoltre che

$$(S) = \{a_1 m_1 + \cdots + a_k m_k \mid k \in \mathbb{N}, m_1, \dots, m_k \in S, a_1, \dots, a_k \in A\}$$

Definizione 85. Quando $(S) = M$, S si dice insieme di generatori di M . M si dice finitamente generato se ammette un insieme di generatori finito.

Esempio 86. L'anello A , come A -modulo, è finitamente generato

$$A = (1).$$

Tuttavia si ha anche, ovviamente $A = (A)$.

Operazioni sui sottomoduli

Osservazione. Se $\{M_i \mid i \in I\}$ famiglia di sottomoduli di M , allora

1. $\bigcap_{i \in I} M_i$ è sottomodulo di M ;
2. $\bigcup_{i \in I} M_i$ **non** è un sottomodulo di M

Definizione 87. Se $\{M_i \mid i \in I\}$ famiglia di sottomoduli di M si definisce il modulo somma degli M_i :

$$\sum_{i \in I} M_i := \left(\bigcup_{i \in I} M_i \right) = \{m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k} \mid k \in \mathbb{N}, m_{i_j} \in M_j\}.$$

Definizione 88. Sia M è un A -modulo. Se $\mathcal{A} \subseteq A$ è un ideale e $N \subseteq M$ è un sottomodulo, si definisce il prodotto di un ideale per un sottomodulo

$$\mathcal{A}N := \left(\{am \mid a \in \mathcal{A}, m \in N\} \right) = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i m_i \mid a_i \in \mathcal{A}, m_i \in N \right\}.$$

Osservazione. I sottomoduli di A (visto come A -modulo) sono esattamente gli ideali di A , e in questo caso il prodotto di un ideale per un sottomodulo coincide con il prodotto tra ideali.

Definizione 89. Sia M un A -modulo e N, P sottomoduli di M : l'ideale quoziante di due sottomoduli (o indice)

$$(N : P) := \{a \in A \mid aP \subseteq N\}$$

è un ideale di A .

Osservazione. Se $N = \{0\}$:

$$((0) : P) = \{a \in A \mid am = 0 \forall m \in P\} =: \text{Ann}_A P$$

è detto annullatore di P .

Osservazione. Se $\mathcal{A} \subseteq A$ è un ideale e M è un A -modulo, allora possiamo considerare l' A -modulo

$$M/\mathcal{A}M.$$

Inoltre l'azione di A su $M/\mathcal{A}M$ fattorizza per A/\mathcal{A} . Infatti se $a \in A$ e \bar{m} è la classe di m in $M/\mathcal{A}M$ si ha $a\bar{m} = \bar{am} = \bar{0}$. Dunque $M/\mathcal{A}M$ è un A/\mathcal{A} -modulo poiché il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccccc} A \times M & \xrightarrow{\quad} & M & \xrightarrow{\pi} & M/\mathcal{A}M \\ & \searrow & & & \swarrow \\ & & (A/\mathcal{A}) \times (M/\mathcal{A}M) & & \end{array}$$

In particolare, se $\mathcal{A} \subseteq \text{Ann}_A(M)$, allora M è un A/\mathcal{A} -modulo; infatti $\mathcal{A}M = \{0\}$ e $M/\mathcal{A}M \cong M$.

Definizione 90. Se $\text{Ann}_A(M) = (0)$, allora M si dice A -modulo fedele.

Osservazione. Se M è un A -modulo qualsiasi, allora M è fedele come modulo su $A/\text{Ann}_A M$.

Definizione 91. Sia M un A -modulo. $m \in M$ si dice di torsione se esiste $a \in A \setminus \{0\}$ tale che $am = 0$. L'insieme degli elementi di torsione si indica con M_{tors} :

$$M_{\text{tors}} := \{m \in M \mid m \text{ è di torsione}\}.$$

Se 0 è l'unico elemento di torsione di M , allora M si dice privo di torsione.

Osservazione. Se M è privo di torsione allora M è fedele. Non vale il viceversa.

Esempio 92. Si consideri \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Visto come \mathbb{Z} -modulo è fedele.

$$\text{Ann}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \{a \in \mathbb{Z} \mid \forall q \in \mathbb{Q} \quad aq \in \mathbb{Z}\} = \{0\}$$

ma ogni elemento in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} è di torsione: dato $\frac{\bar{a}}{b}$ per $a, b \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, allora

$$b \cdot \frac{\bar{a}}{b} = \bar{a} = \bar{0} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Osservazione. In generale M_{tors} non è un sottomodulo di M .

Esempio 93. Si consideri $M := \mathbb{Z}_6$ come \mathbb{Z}_6 -modulo. Allora $\bar{3}, \bar{2} \in M$ ma $\bar{3} + \bar{2} = \bar{5} \notin M_{\text{tors}}$.

Proposizione 94. Se A è un dominio e M è un A -modulo, allora M_{tors} è un A -modulo.

Dimostrazione. Se $m_1, m_2 \in M_{\text{tors}}$ allora esistono $a, b \in A \setminus \{0\}$ tali che

$$am_1 = 0 \quad bm_2 = 0$$

e dunque $ab(m_1 + m_2) = 0$ con $ab \neq 0$ e se $m \in M_{\text{tors}}$ allora $am \in M_{\text{tors}}$ per ogni $a \in A$. ■

Somma diretta e prodotto diretto

Definizione 95. Sia $\{M_i \mid i \in I\}$ famiglia di A -moduli.

- Il prodotto diretto degli M_i è dato dall'insieme

$$\prod_{i \in I} M_i = \{(x_i)_{i \in I} \mid x_i \in M_i\} = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i \mid f(i) \in M_i \right\}$$

dotato delle seguenti operazioni:

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$$

$$a(x_i)_{i \in I} = (ax_i)_{i \in I}.$$

- La somma diretta degli M_i è data dall'insieme

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \quad \{ (x_i)_{i \in I} \mid x_i = 0 \text{ salvo per un numero finito di } i \in I \}$$

dotato delle seguenti operazioni:

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}$$

$$a(x_i)_{i \in I} = (ax_i)_{i \in I}.$$

Osservazione. Prodotto diretto e somma diretta di A -moduli sono ancora degli A -moduli. Inoltre, se I è finito, allora

$$\bigoplus_{i \in I} M_i = \prod_{i \in I} M_i$$

mentre se I è infinito allora

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \subsetneq \prod_{i \in I} M_i$$

è sottomodulo proprio.

Esempio 96. Nel caso particolare di $M_i = A$ per ogni $i \in I$, si indica

$$A^I := \prod_{i \in I} A, \quad A^{(I)} := \bigoplus_{i \in I} A$$

Definizione 97. Se $M \cong A^{(I)}$ per qualche insieme I , M si dice A -modulo libero.

Esempio 98. A è libero. $A \times A = A^2$ è libero come A -modulo.

Esempio 99. L'anello $A[X]$:

$$A[X] = \{a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \mid a_0, \dots, a_n \in A\}$$

contiene A , e dunque può essere visto come A -modulo, e in quanto tale

$$A[X] \cong A^{(\mathbb{N})}.$$

Invece $A^{\mathbb{N}} \cong A[[X]]$ come A -modulo, dove

$$A[[X]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mid a_i \in A \right\}.$$

(anello delle serie formali)

Osservazione. Tutti gli spazi vettoriali sono liberi sul loro campo degli scalari.

In generale non tutti gli A -moduli sono liberi, come garantisce la seguente proposizione.

Proposizione 100. Sia A un dominio. Se un A -modulo M è libero allora è privo di torsione.

Caratteristica dei moduli liberi

Definizione 101. Sia M un A -modulo. Una base \mathcal{B} di M è un insieme di generatori tale che ogni elemento di M si scrive in modo unico come combinazione lineare finita (in A) di elementi di \mathcal{B} .

Definizione 102. Un insieme $S = \{m_1, \dots, m_k\} \subseteq M$ si dice linearmente indipendente se per ogni $a_1, \dots, a_k \in A$:

$$\sum_{i=0}^k a_i m_i = 0 \quad \rightarrow \quad a_1 = \dots = a_k = 0.$$

Osservazione. Una base è un insieme di generatori linearmente indipendente.

1090.7 Lezione 6 - <2025-10-07 Mar>

Caratteristica dei moduli liberi

Proposizione 103. Un A -modulo M è libero se e solo se M ha una base.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Sia $M = A^{(I)}$ un modulo libero. Consideriamo, per ogni $i \in I$, l'elemento e_i , tale che $e_i(j) = \delta_{ij}$ ^[326] per ogni $j \in I$. Allora ogni $(x_i)_{i \in I} \in A^{(I)}$ può essere scritto come

$$(x_i)_{i \in I} = \sum_{\substack{i \in I \\ x_i \neq 0}} x_i e_i.$$

L'insieme $\{e_i \mid i \in I\}$ è una base di M , detta base canonica di $A^{(I)}$.

(\Leftarrow): Se M ha una base $\{f_i \mid i \in I\}$, si consideri

$$\begin{aligned} \varphi : M &\longrightarrow A^{(I)} \\ \sum_{i=1}^n a_i f_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i e_i \end{aligned}$$

dove $\{e_i \mid i \in I\}$ è la base canonica di $A^{(I)}$. Questo è un isomorfismo di A -moduli. ■

Definizione 104. Se $M \cong A^{(I)}$ è un modulo libero, il rango di M è $|I|$:

$$\text{rk}(M) := |I|.$$

Proposizione 105. Il rango è ben definito.

Dimostrazione.

- Osserviamo che se \mathbb{K} campo, allora

$$\text{rk}_{\mathbb{K}}(M) = \dim_{\mathbb{K}} M.$$

e dunque il rango è ben definito in questo caso.

- Per un generico A non banale, sia \mathcal{M} ideale massimale di A ; sia $M \cong A^{(I)}$. Allora

$$\mathcal{M}M \cong \mathcal{M}^{(I)}$$

e pertanto, senza dimostrare bene tutti i passaggi:

$$M/\mathcal{M}M \cong A^{(I)}/\mathcal{M}^{(I)} \cong (A/\mathcal{M})^{(I)}$$

Dunque (A/\mathcal{M}) è un campo, e pertanto

$$\text{rk}_A(M) := |I| = \dim_{A/\mathcal{M}} M/\mathcal{M}M$$

non dipende dall'isomorfismo ed è ben definito.

■

Esempio 106. • Se $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ è uno \mathbb{Z} -modulo libero di rango 2, con base $\{1, i\}$.

- $A[X]$ è libero di rango ω , con base $\{1, x, \dots, x^n, \dots\}$.

Proposizione 107. Sia M un A -modulo finitamente generato. Allora M è un quoziente di un A -moduli libero di rango finito.

Dimostrazione. Sia $\{m_1, \dots, m_n\}$ un insieme di generatori di M . Consideriamo

$$\begin{aligned} \varphi : A^n &\longrightarrow M \\ (a_1, \dots, a_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i m_i. \end{aligned}$$

φ è omomorfismo di A -moduli, e φ è suriettiva (poiché si è scelto $\{m_1, \dots, m_n\}$ insieme di generatori).

Per il Teorema Fondamentale di Isomorfismo, φ induce un isomorfismo

$$A^n / \ker \varphi \cong M.$$

■

Osservazione. Non tutti i moduli sono liberi. Per esempio, \mathbb{Q} come \mathbb{Z} -modulo non è libero.

Se lo fosse, il suo rango sarebbe > 1 (\mathbb{Q} non è ciclico), e pertanto conterebbe uno \mathbb{Z} -modulo libero di rango 2, e quindi esisterebbero due razionali q_1, q_2 che sono \mathbb{Z} -linearmente indipendenti. Assurdo, poiché se

$$q_1 = \frac{a_1}{d}, \quad q_2 = \frac{a_2}{d}, \quad a_1, a_2, d \in \mathbb{Z}$$

allora $da_2 q_1 - da_1 q_2 = 0$.

Proprietà degli A -moduli f.g.

Teorema 108. (Cayley-Hamilton). Sia M un A -modulo finitamente generato, $\mathcal{A} \subseteq A$ ideale, e sia $f : M \rightarrow M$ omomorfismo tale che $f(M) \subseteq \mathcal{A}M$.

Allora esistono $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{A}$ tali che

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_0f^0 = 0.$$

Dimostrazione. Sia $M = (m_1, \dots, m_n)$. Allora $f(m_i) \in \mathcal{A}M$ per ogni i , e quindi

$$f(m_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}m_j, \quad a_{ij} \in \mathcal{A}$$

ovvero

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{ij}f - a_{ij})m_j = 0.$$

Sia P la matrice $(\delta_{ij}f - a_{ij})$. Quindi

$$P \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = 0.$$

Moltiplicando per $\text{Adj}(P)$ trovo $\det(P) = 0$, e $\det(P)$ è esattamente nella forma della tesi. \blacksquare

Corollario 109. Sia M finitamente generato, e sia \mathcal{A} ideale di A tale che $\mathcal{A}M = M$. Allora esiste $x \in A$ tale che $x = 1 \pmod{\mathcal{A}}$ e $xM = 0$.

Dimostrazione. Applicando Cayley-Hamilton all'identità, trovo

$$\text{Id}^n + a_{n-1}\text{Id}^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

con $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{A}$. Dunque per ogni $m \in M$

$$m + a_{n-1}m + \cdots + a_0m = \underbrace{(1 + a_{n-1} + \cdots + a_0)}_x m = 0$$

e si ha che $x = 1 \pmod{\mathcal{A}}$. \blacksquare

Lemma 110. (Lemma di Nakayama). Sia M un A -modulo finitamente generato, e sia \mathcal{A} ideale di A tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}(A)^{[327]}$. Se $\mathcal{A}M = M$, allora $M = 0$.

Dimostrazione. Per il Corollario, esiste $x \in A$ tale che $x \cong 1 \pmod{\mathcal{A}}$ e $xM = 0$

Quindi $x - 1 \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}$. Ma allora $x \notin \mathcal{M}$ per ogni ideale massimale \mathcal{M} , ovvero $x \in A^\times$.

$$M = x^{-1}xM = x^{-1}(0) = 0. \quad \blacksquare$$

Osservazione. Se (A, \mathcal{M}, k) è locale, allora Nakayama dice che se M è un A -modulo finitamente generato, \mathcal{A} ideale di A proprio

$$\mathcal{A}M = M \implies M = 0.$$

Corollario 111. Sia M un A -modulo finitamente generato, \mathcal{A} ideale di A , $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Sia $N \subseteq M$ sottomodulo. Se $M = N + \mathcal{A}M$ allora $M = N$.

Dimostrazione. Applichiamo Nakayama al modulo quoziante M/N . Siccome M è f.g. allora M/N è f.g.

Se $M = N + \mathcal{A}M$ allora

$$M/N = \frac{N + \mathcal{A}M}{N} = \mathcal{A}(M/N)$$

e quindi $M/N = 0$ per Nakayama, ovvero $M = N$. ■

Corollario 112. Sia M una A -modulo finitamente generato, $m_1, \dots, m_n \in M$. Sia \mathcal{A} ideale di A tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{R}(A)$.

Allora m_1, \dots, m_n generano M come A -modulo se e solo se $\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}$ generano $M/\mathcal{A}M$ come A/\mathcal{A} modulo.

Osservazione. Se (A, \mathcal{M}, k) locale, il corollario dice in particolare che se $M/\mathcal{M}M$ è generato da $\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n}$ come k -spazio vettoriale, allora m_1, \dots, m_n generano M come A -modulo.

Dimostrazione. (del Corollario 112)

(\Rightarrow) : Ovvio: se $M = (m_1, \dots, m_n)$ allora $M/\mathcal{A}M = (\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n})$ come A -modulo (e quindi come A/\mathcal{A} -modulo).

(\Leftarrow) : Sia $N = (m_1, \dots, m_n)$. Poiché $(\overline{m_1}, \dots, \overline{m_n})$ generano $M/\mathcal{A}M$ si ha $M = \mathcal{A}M + N$ e quindi, per Nakayama, $M = N$. ■

Successioni esatte Una successione di A -moduli e omomorfismi è

$$\dots \rightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \rightarrow \dots$$

dove gli M_i sono degli A -moduli e f_i omomorfismi.

Una tale successione si dice esatta se

$$\forall i \quad \ker f_{i+1} = \text{im } f_i.$$

Esempio 113. • Una successione $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N$ è esatta se e solo se f è iniettiva.

• Una successione $M \xrightarrow{f} N \rightarrow 0$ è esatta se e solo se

$$\text{im } f = \ker 0 = N$$

se e solo se f è suriettiva

- Una successione $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \rightarrow 0$ è esatta se e solo se f iniettiva, g suriettiva e $\ker g = \text{im } f$. Questa si dice successione esatta corta (o SEL).

Esempio 114. Sia M un A -modulo, e sia $N \subseteq M$ un sottomodulo. Allora la seguente è una SEL:

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M/N \longrightarrow 0$$

Problema dell'esattezza di un funtore Sia \mathcal{F} funtore dalla categoria degli A -moduli in sé stessa.

Data

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

SEL, applicando il funtore si ottiene

- se \mathcal{F} è covariante:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(P) \longrightarrow 0$$

- se \mathcal{F} è controvariante:

$$0 \longleftarrow \mathcal{F}(M) \xleftarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xleftarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(P) \longleftarrow 0$$

Se \mathcal{F} trasforma successioni esatte in successioni esatte, allora \mathcal{F} si dice funtore esatto.

Per un funtore covariante:

- se

$$\mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(P) \longrightarrow 0$$

è esatta, allora \mathcal{F} si dice esatto a destra

- se

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(M) \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} \mathcal{F}(N) \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} \mathcal{F}(P)$$

è esatta, allora \mathcal{F} si dice esatto a sinistra

Esempio 115. Fissato un A -modulo P , il funtore

$$\mathcal{F}(M) := M \oplus P$$

è esatto.

Proposizione 116. Per ogni A -modulo N :

1. Il funtore $\text{Hom}(-, N)$ contravariante è esatto a sinistra.
2. Il funtore $\text{Hom}(M, -)$ covariante è esatto a destra.

Dimostrazione. Si dimostra solo 1.

Sia $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow_0$. Applicando il funtore si ottiene

$$0 \longrightarrow \text{Hom}(M'', N) \xrightarrow{g^* = (-) \circ q} \text{Hom}(M, N) \xrightarrow{f^* = (-) \circ f} \text{Hom}(M', N)$$

Proviamo che g^* è iniettiva. Se $h \in \ker g^*$ allora $h \circ g = 0$ e dunque $h = 0$ poiché g è suriettiva.

Per ipotesi $\text{im } f = \ker g$ e in particolare $g \circ f = 0$; quindi $f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = 0$ e quindi $\text{im } g^* \subseteq \ker f^*$.

ULTIMARE DIMOSTRAZIONE ■

1090.8 Lezione 7 - <2025-10-10 Ven>

Lemma 117. (del serpente). Siano M', M, M'', N', N, N'' degli A -moduli per i quali esiste un diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{v} & M'' \longrightarrow 0 \\ & & f' \downarrow & & f \downarrow & & f'' \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{u'} & N & \xrightarrow{v'} & N'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Allora esiste una successione esatta

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker f' & \xrightarrow{u} & \ker f & \xrightarrow{v} & \ker f'' \\ & & & & \swarrow \delta & & \\ & & \text{coker } f' & \xleftarrow{\tilde{u}'} & \text{coker } f & \xrightarrow{\tilde{v}'} & \text{coker } f'' & \longrightarrow 0 \end{array}$$

dove δ prende il nome di omomorfismo di cobordo.

Dimostrazione. Sia $x'' \in \ker f''$. Allora esiste $x \in M$ tale che $v(x) = x''$. Si ha

$$v'(f(x)) = f''(v(x)) = 0$$

e pertanto $f(x) \in \ker v'$. Siccome la successione di sotto è esatta, allora $\ker v' = \text{Im } u'$ e pertanto esiste $y' \in N'$ tale che

$$f(x) = u'(y').$$

Si definisce quindi $\delta(x'') = \overline{y'}$ nel $\text{coker } f'$.

Occorre però provare che la definizione di δ non dipende dalla scelta del sollevamento x , che δ è omomorfismo di A -moduli e che la successione è esatta, ovvero, in particolare, che

$$\ker f = \text{Im } v|_{f''} \quad \text{Im } \delta = \ker \tilde{u}'.$$
■

1090.8.1 Prodotto tensoriale di A -moduli

Definizione 118. Siano M, N, P degli A -moduli. Una funzione $f : M \times N \rightarrow P$ si dice A -bilineare se è lineare in ciascuno degli argomenti, ovvero

$$\begin{aligned} \forall m \in M; a, b \in A, n_1, n_2 \in N \quad & f(m, an_1 + bn_2) = a f(m, n_1) + b f(m, n_2) \\ \forall n \in N; a, b \in A, m_1, m_2 \in M \quad & f(am_1 + bm_2, n) = a f(m_1, n) + b f(m_2, n). \end{aligned}$$

Siano M, N degli A -moduli.

Proprietà universale del prodotto tensoriale: una coppia (T, g) , con T un A -modulo e $g : M \times N \rightarrow T$ omomorfismo, soddisfa la proprietà universale del prodotto tensoriale se

per ogni A -modulo P e per ogni funzione bilineare $h : M \times N \rightarrow P$ esiste un unico omomorfismo di A -moduli $u : T \rightarrow P$ tale che $u \circ g = h$.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & T \\ & \searrow h & \swarrow \exists! u \\ & P & \end{array}$$

Teorema 119. Per ogni M, N A -moduli esiste una coppia (T, g) che soddisfa la proprietà universale del prodotto tensoriale. Inoltre (T, g) è unica a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. • Unicità. Se esistessero due coppie (T, g) e (T', g') che soddisfano la proprietà universale, esisterebbero unici omomorfismi $\varphi : T \rightarrow T'$ e $\psi : T' \rightarrow T$ tali che commutano con le mappe bilineari. La composizione $\psi \circ \varphi$ deve essere l'identità su T (per l'unicità dell'omomorfismo verso se stesso), e analogamente $\varphi \circ \psi = \text{id}_{T'}$. Quindi $T \cong T'$.

• Esistenza. Sia C l' A -modulo libero generato dall'insieme $M \times N$. Un generico elemento di C è una combinazione lineare finita formale $\sum a_i(m_i, n_i)$, con $a_i \in A$ e $(m_i, n_i) \in M \times N$.

Sia D il sottomodulo di C generato da tutte le relazioni che impongono la bilinearità:

- $(m_1 + m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n)$
- $(m, n_1 + n_2) - (m, n_1) - (m, n_2)$
- $(am, n) - a(m, n)$
- $(m, an) - a(m, n)$

Definiamo il prodotto tensoriale come il quoziente:

$$M \otimes_A N := C/D$$

La classe dell'elemento (m, n) in C/D viene denotata con $m \otimes_A n$. Allora si ha:

- $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$
- $am \otimes n = m \otimes an = a(m \otimes n)$

Quindi la funzione

$$\begin{aligned} g : M \times N &\longrightarrow T \\ (m, n) &\longmapsto m \otimes n \end{aligned}$$

è bilineare. Sia ora $\tilde{f} : M \times N \rightarrow P$ una funzione A -bilineare. È possibile estenderla^[328] ad un omomorfismo $f : C \rightarrow P$.

Siccome f è A -bilineare, allora \tilde{f} è nulla su tutto D , quindi $D \subseteq \ker \tilde{f}$. Segue che \tilde{f} induce un omomorfismo

$$f' : C/D = T \rightarrow P$$

tale che

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{g} & M \otimes_A N = T \\ & \searrow f & \swarrow f' \\ & P & \end{array}$$

commuti. Poiché T è generato su A dalle coppia (m, n) (in quanto lo è C), allora f' è univocamente determinato dalla condizione $f' \circ g = f$. Quindi (T, g) soddisfa la proprietà universale.

■

Definizione 120. *Dati M, N , tale T si dice prodotto tensoriale su A di M e N , $T := M \otimes_A N$.*

$$\begin{aligned} g : M \times N &\longrightarrow M \otimes_A N \\ (m, n) &\longmapsto m \otimes n. \end{aligned}$$

Osservazione. $M \otimes_A N$ è generato su A da

$$\{m \otimes n \mid m \in M, n \in N\}.$$

Un generico elemento è quindi $\sum_{i=1}^k (m_i \otimes n_i)$.

Inoltre, se $M = (S)$ e $N = (T)$, allora

$$M \otimes_A N = \left(\{s \otimes t \mid s \in S, t \in T\} \right)$$

e pertanto, se M, N sono entrambi finitamente generati, allora $M \otimes_A N$ è ancora finitamente generato.

Osservazione. L'elemento $m \otimes n$ è realtvo ai moduli M, N con cui $M \otimes_A N$ è costruito. Infatti, siano per esempio:

$$A := \mathbb{Z}; \quad M := \mathbb{Z}; \quad N := \mathbb{Z}_2.$$

Si ha che $2 \otimes \bar{1} = \bar{0}$ in $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ in quanto

$$2 \otimes \bar{1} = 1 \otimes 2\bar{1} = 1 \otimes \bar{2} = \bar{0}$$

ma considerando $M' := 2\mathbb{Z} \subseteq M$, $2 \otimes \bar{1} \neq 0$ in $M' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$.

Proposizione 121. Valgono le regole di calcolo:

- $(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$
- $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$
- $am \otimes n = m \otimes an = a(m \otimes n)$
- $m \otimes 0 = 0 \otimes n = 0$

Proposizione 122. Valgono le seguenti proprietà:

- **Commutatività:** $M \otimes_A N \cong N \otimes_A M$. L'isomorfismo è dato da $m \otimes n \mapsto n \otimes m$.
- **Associatività:**

$$(M \otimes_A N) \otimes_A P \cong M \otimes_A (N \otimes_A P) \cong M \otimes_A N \otimes_A P.$$

- **Elemento neutro:** $A \otimes_A M \cong M$.

Dimostrazione. Si dimostra solo $A \otimes_A M \cong M$.

Definiamo la mappa $f : A \times M \rightarrow M$ come $f(a, m) = am$. Questa mappa è bilineare.

Per la proprietà universale, esiste un unico omomorfismo $\phi : A \otimes_A M \rightarrow M$ tale che $\phi(a \otimes m) = am$. ■

1090.8.2 Estensione e restrizione degli Scalari

Spazi Vettoriali

- Se V, W sono spazi vettoriali su un campo K , e abbiamo basi $\{v_i\}$ e $\{w_j\}$, allora $\{v_i \otimes w_j\}$ è una base di $V \otimes_K W$. In particolare:

$$\dim_K(V \otimes_K W) = \dim_K V \cdot \dim_K W$$

In generale si ha che

$$A^{(I)} \otimes_A A^{(J)} = A^{(I \times J)}$$

- Sia V un K -spazio vettoriale generato da v_1, \dots, v_n , sia $K \subseteq L$ un'estensione di campo di \mathbb{K} :

$$V \otimes_K L = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes v_i \mid \lambda_i \in L \right\}$$

e questo diventa un L -spazio vettoriale ponendo

$$\lambda \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes v_i := \sum_{i=1}^n \lambda \lambda_i \otimes v_i$$

con

$$\begin{aligned} \dim_L(V \otimes_K L) &= \dim_K V \\ \dim_K(V \otimes_K L) &= \dim_K(V) \cdot \dim_K(L) \end{aligned}$$

Caso Generale: Moduli e Algebre Sia $f : A \rightarrow B$ un omomorfismo di anelli. B è un A -modulo.

- **Estensione degli Scalari:** Se M è un A -modulo, possiamo costruire il B -modulo $M_B = B \otimes_A M$. L'azione di B è definita componente per componente sul primo fattore:

$$b' \cdot \sum(b_i \otimes m_i) = \sum((b'b_i) \otimes m_i)$$

Il B -modulo M_B si dice ottenuto dall' A -modulo M per estensione degli scalari (tramite f).

- Se B_1, B_2 sono A -algebre, allora $B_1 \otimes_A B_2$ è una A -algebra dove il prodotto si ha estendendo per linearità il prodotto componente per componente.
- **Restrizione degli Scalari:** Se N è un B -modulo, esso può essere visto come un A -modulo tramite l'omomorfismo f . L'azione è definita da:

$$a \cdot n := f(a)n$$

Questo processo è detto restrizione degli scalari.

1090.9 Lezione 8 - <2025-10-13 Lun>

1090.9.1 Prodotto tensoriale

Siano M, N degli A -moduli, si può costruire $M \otimes N$ e una mappa bilineare $g : M \times N \rightarrow M \otimes N$ A -bilineare definita da $g(m, n) = m \otimes n$.

Proposizione 123. (Proprietà universale) Per ogni funzione bilineare $\phi : M \times N \rightarrow P$, con P un A -modulo, esiste un unico omomorfismo $\psi : M \otimes N \rightarrow P$ tale che il diagramma commuta.

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\phi} & P \\ g \downarrow & \nearrow \psi & \\ M \otimes_A N & & \end{array}$$

1090.9.2 Proprietà del prodotto tensoriale

Proposizione 124. C'è un isomorfismo canonico:

$$\text{Hom}(M \otimes N, P) \cong \text{Hom}(M, \text{Hom}(N, P))$$

Dato da:

$$(f : M \otimes N \rightarrow P) \mapsto (m \mapsto (n \mapsto f(m \otimes n))).$$

Proposizione 125. (Functorialità). Siano $f : M_1 \rightarrow M_2$ e $g : N_1 \rightarrow N_2$ omomorfismi di A -moduli. Essi inducono:

$$f \otimes g : M_1 \otimes N_1 \rightarrow M_2 \otimes N_2$$

definito da:

$$m_1 \otimes n_1 \mapsto f(m_1) \otimes g(n_1)$$

In particolare, se $g = \text{Id}$, $f : M_1 \rightarrow M_2$ induce un omomorfismo $\tilde{f} : M_1 \otimes N \rightarrow M_2 \otimes N$. In particolare $\cdot \otimes N$ è un funtore nella categoria degli A -moduli.

Proposizione 126. (Esattezza). Il funtore $\cdot \otimes N$ è **esatto a destra**, in generale non a sinistra.

Dimostrazione. Consideriamo una successione esatta:

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \rightarrow 0$$

Tensorizziamo con N :

$$M' \otimes N \xrightarrow{f \otimes \text{Id}} M \otimes N \xrightarrow{g \otimes \text{Id}} M'' \otimes N \rightarrow 0 \quad (*)$$

Mostriamo l'esattezza:

$$\text{Im}(f \otimes \text{Id}) = \text{Im } f \otimes N = \text{Ker } g \otimes N = \text{Ker}(g \otimes \text{Id})$$

Inoltre mostriamo che $g \otimes \text{Id}$ è suriettiva. Lo è perché:

$$M'' \otimes N = \langle m'' \otimes n \mid m'' \in M'', n \in N \rangle$$

Quindi se $x \in M'' \otimes N$, allora $x = \sum_{j=1}^k m''_j \otimes n_j$, ma per l'esattezza della successione di partenza $m''_j = g(m_j)$.

$$x = \sum_{j=1}^k g(m_j) \otimes n_j = (g \otimes \text{Id}) \left(\sum_{j=1}^k m_j \otimes n_j \right)$$

Quindi $g \otimes \text{Id}$ è suriettiva. ■

Osservazione. Non vale l'esattezza a sinistra. Esempio: $A = \mathbb{Z}$ e consideriamo la successione:

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\ n &\longmapsto 2n \\ k &\longmapsto [k] \end{aligned}$$

Questa è esatta. Tensorizziamo con \mathbb{Z}_2 , e ricordiamo che $M \otimes_A A \cong M$, tramite la mappa $m \otimes_A a \mapsto am$.

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{\text{Id} \otimes 2} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \\ &\quad \parallel \qquad \parallel \\ \mathbb{Z}_2 &\xrightarrow[2]{} \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Ma la moltiplicazione per 2 è la mappa nulla, che non è iniettiva (mentre l'inezione originale lo era).

1090.9.3 Moduli Piatti

Definizione 127. Il modulo N si dice **piatto** se il funtore $\cdot \otimes N$ è esatto (i.e. sufficiente che sia esatto a sinistra, a destra lo è sempre).

Proposizione 128. Sono equivalenti:

1. N è piatto.
2. Se $f : M \rightarrow M'$ è un omomorfismo iniettivo, allora $f \otimes \text{Id} : M \otimes N \rightarrow M' \otimes N$ è iniettivo.

Esempio 129. Alcuni esempi sono:

- A come A -modulo è piatto.
- $A^{(I)}$ (tutti i moduli liberi) sono piatti. In particolare, essendo gli spazi vettoriali moduli liberi, sono piatti

Questo vale perché

$$M \otimes_A A^{(I)} \cong A^{(I)}$$

(siccome $M \otimes_A A \cong A$).

1090.9.4 Limite Diretto (Iniettivo)

Definizione 130. Sia (I, \leq) un insieme parzialmente ordinato. Diciamo che I è un **insieme diretto** se:

$$\forall i, j \in I, \exists k \in I \text{ t.c. } i \leq k, j \leq k$$

Esempio 131. Si ha che

- Ogni insieme totalmente ordinato è diretto, come (\mathbb{R}, \leq) , (N, \leq)
- (\mathbb{Z}, \leq) , dove $m \leq n$ sse $m | n$ è diretto: infatti, dati $n, n' \in \mathbb{Z}$ si ha

$$n, n' \leq \text{lcm}(n, n').$$

- Anche $(\wp(X), \subseteq)$ è diretto (dati $A, B \subseteq A \cup B$).

Definizione 132. Sia (I, \leq) un insieme diretto. Un sistema di A -moduli e omomorfismi $(M_i, \varphi_{ij})_{\substack{i,j \in I \\ i \leq j}}$ si dice **sistema diretto** se:

1. $\varphi_{ij} : M_i \rightarrow M_j$ per ogni $i \leq j$.
2. $\varphi_{ii} = \text{Id}_{M_i}$.
3. Il sistema è compatibile con la composizione: se $i \leq j \leq k$, allora $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$.

Sia $(M_i, \varphi_{ij})_{\substack{i,j \in I \\ i \leq j}}$ un sistema diretto. Vogliamo costruire un ambiente “grande” che contenga gli M_i .

Formalmente, esiste un A -modulo \widetilde{M} con omomorfismi $\varphi_i : M_i \rightarrow \widetilde{M}$ per ogni $i \in I$ tali che il diagramma commuta per ogni $i, j \in I$ (con $i \leq j$):

$$\varphi_j \circ \varphi_{ij} = \varphi_i$$

Tale \widetilde{M} deve soddisfare la seguente **proprietà universale**:

Se N è un A -modulo con omomorfismi $\mu_i : M_i \rightarrow N$ tali che $\mu_j \circ \varphi_{ij} = \mu_i$ per ogni $j \geq i$, allora esiste un unico omomorfismo $F : \widetilde{M} \rightarrow N$ tale che $\mu_i = F \circ \varphi_i$.

Costruzione di \widetilde{M} : Consideriamo $\bigoplus_{i \in I} M_i$. Dobbiamo richiedere la compatibilità, cioè identificare x_i in M_i con la sua immagine in M_j .

$$\widetilde{M} = \left(\bigoplus_{i \in I} M_i \right) / D$$

dove $D = \langle x_i - \varphi_{ij}(x_i) \mid i, j \in I, i \leq j, x_i \in M_i \rangle$, con gli x_i generatori di $\bigoplus M_i$.

\widetilde{M} si chiama **limite diretto** (o iniettivo) degli M_i . Si denota con $\varinjlim M_i$.

Esercizio: Mostrare che \widetilde{M} soddisfa la proprietà universale con:

$$\begin{array}{ccccc} M_n & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_i M_i & & \\ \downarrow \varphi_{nm} & \searrow \varphi_n & \downarrow & & \\ M_m & \xleftarrow{\varphi_m} & (\bigoplus_i M_i) / D & \xrightarrow{\quad} & \bigoplus_i M_i \end{array}$$

Esempio 133. (\mathbb{Z}, \preceq) con ordinamento dato dalla divisibilità. Consideriamo $(\mathbb{Z}_n, \varphi_{nm})$ dove se $n|m$ (cioè $m = nk$) abbiamo la mappa $\varphi_{nm} : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_m$ data da $x \mapsto kx$.

Esercizio: Dimostrare che si tratta di un sistema diretto, e che

$$\varinjlim \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Limite diretto e prodotto tensoriale

Proposizione 134. Sia (M_i, φ_{ij}) un sistema diretto e sia N un A -modulo. Allora:

$$(\varinjlim M_i) \otimes N \cong \varinjlim (M_i \otimes N)$$

Cioè i limiti diretti commutano con il prodotto tensoriale.

Osservazione. A sua volta, $(M_i \otimes N, \varphi_{ij} \otimes \text{Id})$ è un sistema diretto, e pertanto ha senso farne il limite diretto.

Dimostrazione. Si utilizzano le proprietà universali.

- Abbiamo le mappe $\varphi_i : M_i \rightarrow \varinjlim M_i$. Queste inducono $\varphi_i \otimes \text{Id} : M_i \otimes N \rightarrow (\varinjlim M_i) \otimes N$. Dalla proprietà universale del limite diretto si ottiene una funzione:

$$A : \varinjlim (M_i \otimes N) \rightarrow (\varinjlim M_i) \otimes N$$

2. Per trovare la funzione opposta (inversa), consideriamo la funzione bilineare $M_i \times N \rightarrow M_i \otimes N \rightarrow \varinjlim(M_i \otimes N)$. Usando l'isomorfismo di aggiunzione:

$$\text{Hom}(M_i \otimes N, P) \cong \text{Hom}(M_i, \text{Hom}(N, P))$$

Vediamo le mappe come $M_i \rightarrow \text{Hom}(N, \varinjlim(M_i \otimes N))$. Per la proprietà universale del limite diretto sui moduli M_i , otteniamo una mappa $\varinjlim M_i \rightarrow \text{Hom}(N, \varinjlim(M_i \otimes N))$. Riportando indietro l'aggiunzione, otteniamo:

$$B : (\varinjlim M_i) \otimes N \rightarrow \varinjlim(M_i \otimes N)$$

3. Si verifica che A e B sono l'una l'inversa dell'altra. ■

1090.9.5 Limite Inverso (Proiettivo)

Definizione 135. Sia (I, \leq) un insieme diretto di indici. $(M_i, \pi_{ji})_{j \leq i}$ è un sistema inverso se per ogni $j \leq 1$:

$$\pi_{ji} : M_j \rightarrow M_i$$

è compatibile, ovvero tale che se $k \leq j \leq i$ allora $\pi_{ki} = \pi_{kj} \circ \pi_{ji}$.

Esempio 136. Considerando (\mathbb{N}, \preceq) , dove \preceq è la divisibili, se $n \mid m$ poniamo

$$\begin{aligned} \pi_{mn} : \mathbb{Z}_m &\longrightarrow \mathbb{Z}_n \\ \bar{a} &\longmapsto \bar{a}. \end{aligned}$$

Esiste un unico A -modulo \overline{M} con omomorfismi $\pi_i : \overline{M} \rightarrow M_i$ per ogni $i \in I$, compatibili, ovvero tali che $\pi_{ji} \circ \pi_j = \pi_i$ (dove $\pi_{ji} : M_j \rightarrow M_i$ per $i \leq j$).

Tale \overline{M} deve soddisfare la seguente **proprietà universale**:

Se N è un A -modulo con omomorfismi $\nu_i : N \rightarrow M_i$ tali che $\pi_{ji} \circ \nu_j = \nu_i$ per ogni $j \geq i$, allora esiste un unico omomorfismo $\nu : N \rightarrow \overline{M}$ tale che $\pi_i \circ \nu = \nu_i$.

\overline{M} è il **limite inverso** (o proiettivo) degli M_i , denotato con $\varprojlim M_i$.

Costruzione di \overline{M} : Prendiamo il prodotto diretto.

$$\varprojlim M_i = \left\{ (m_i)_{i \in I} \in \prod M_i \mid \forall j \geq i, m_i = \pi_{ji}(m_j) \right\}$$

Esercizio: mostrare che \overline{M} è un A -modulo che soddisfa la proprietà universale.

Esempio 137. Limite di anelli è un anello. $\varprojlim \mathbb{Z}_n = \hat{\mathbb{Z}}$ (completamento profinito di \mathbb{Z}).

$\hat{\mathbb{Z}}$ contiene \mathbb{Z} rivisto come successioni costanti:

$$\mathbb{Z} = \{(\bar{a})_{n \in \mathbb{N}}\}$$

dove dico cos'è a modulo n , per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Limiti inversi e prodotto tensoriale

Osservazione. I limiti inversi **non** commutano con il prodotto tensoriale. Ad esempio: $\varprojlim(\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$. Osserviamo che $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \{0\}$. Infatti:

$$\bar{a} \otimes \frac{c}{d} = \bar{a} \otimes \frac{nc}{nd} = \overline{n\bar{a}} \otimes \frac{c}{nd} = 0$$

Quindi $\varprojlim(\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) = \{0\}$. Tuttavia $(\varprojlim \mathbb{Z}_n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \neq \{0\}$. Infatti

- $\mathbb{Z} \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$;
- \mathbb{Q} è uno \mathbb{Z} -modulo piatto
- perciò si ha

$$\{0\} \neq \mathbb{Q} \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq \hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Esempio 138. Fissato un primo p , considerando $\{p^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ordinato da $p^n \leq p^m$ sse $n \leq m$, si ha $\varprojlim \mathbb{Z}_{p^n} = \mathbb{Z}_p$ (Interi p -adici), $\mathbb{Z}_p \supseteq \mathbb{Z}$.

1090.10 Lezione 9 - <2025-10-14 Mar>

1090.10.1 Anelli e Moduli di Frazioni

Anelli di frazioni Sia A un anello.

Definizione 139. Un sottoinsieme $S \subseteq A$ si dice parte moltiplicativa se:

1. $1 \in S$
2. per ogni $x, y \in S$ allora $xy \in S$.

Esempio 140. • $S = A$.

- Preso $x \in A$, $S := \{1, x^2, x^3, \dots\}$.
- Se A è un dominio: $S = A \setminus \{0\}$
- Se $\mathcal{P} \subseteq A$ è ideale primo, allora $S = A \setminus \mathcal{P}$.

Fissato ora $S \subseteq A$ parte moltiplicativa (che pensiamo essere l'insieme dei “denominatori”), definiamo una relazione \sim su $A \times S$:

$$(a, s) \sim (b, t) \quad \text{sse} \quad \exists u \in S \text{ t.c. } u(at - bs) = 0.$$

\sim è una relazione di equivalenza:

- è ovviamente riflessiva e simmetrica;
- se $(a, s) \sim (b, t)$ e $(b, t) \sim (c, w)$ allora

$$\begin{aligned} \exists u \in S \text{ t.c. } u(at - bs) = 0 \\ \exists v \in S \text{ t.c. } v(bw - ct) = 0 \end{aligned}$$

e in particolare

$$\begin{aligned} uv(awt - bws) + uv(bws - cts) &= 0 \\ uv(awt - cts) &= 0 \\ uvt(aw - cs) &= 0 \end{aligned}$$

e siccome $uvt \in S$ poiché S è parte moltiplicativa si ha la tesi: $(a, s) \sim (c, w)$.

Poniamo $\frac{a}{s} := [(a, s)]_{\sim}$. Indichiamo l'insieme quoziante:

$$S^{-1}A := \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in A, s \in S \right\}.$$

Si definiscono quindi

$$\begin{aligned} \frac{a}{s} + \frac{b}{t} &= \frac{at + bs}{st} \\ \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} &= \frac{ab}{st}. \end{aligned}$$

Esercizio: dimostrare la buona definizione e le proprietà di anello commutativo con unità.

L'unità è $1_{S^{-1}A} = \frac{1}{1} = \frac{s}{s}$ per ogni $s \in S$.

Definizione 141. L'anello $S^{-1}A$ si dice anello delle frazioni di A rispetto a S .

La funzione

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow S^{-1}A \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

è un omomorfismo di anelli; in generale non è iniettiva.

Infatti in generale si ha

$$\frac{a}{s} = \frac{0}{1} \text{ se } \exists t \in S \text{ t.c. } ta = 0$$

e quindi tutti gli 0-divisori vengono mandati in $\frac{0}{1}$. È invece iniettiva se A è dominio e $0 \notin S$.

Osservazione. Se A è un dominio e $S = A \setminus \{0\}$, allora

$$S^{-1}A = \text{Frac}(A).$$

Proposizione 142. (Proprietà universale). Per ogni anello B e per ogni omomorfismo $g : A \rightarrow B$ tale che $g(S) \subseteq B^{\times}$ esiste un unico omomorfismo $\tilde{g} : S^{-1}A \rightarrow B$ tale che il diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ f \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ S^{-1}A & & \end{array}$$

ovvero $\tilde{g} \circ f = g$.

Dimostrazione. Poniamo $\tilde{g}\left(\frac{a}{s}\right) := g(a)g(s)^{-1}$. Dimostrare che \tilde{g} è ben definita e $\tilde{g} \circ f = g$.

Inoltre, se $h : S^{-1}A \rightarrow B$ facesse commutare il diagramma:

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = h\left(\frac{a}{1}\right)s^{-1} = g(a)g(s^{-1}) = g(a)g(s)^{-1}. \quad \blacksquare$$

Esempio 143. In $A = \mathbb{Z}_6$, prendiamo $S = \{\bar{1}, \bar{3}\}$ parte moltiplicativa: $\bar{3}\bar{3} = \bar{9} = \bar{3}$.

Notiamo che

$$\frac{\bar{x}}{\bar{s}} = \frac{\bar{0}}{\bar{1}} \quad \text{se} \quad \exists \bar{u} \in S \text{ t.c. } \bar{u}\bar{x} = \bar{0}.$$

e pertanto:

$$\frac{\bar{0}}{\bar{1}} = \frac{\bar{2}}{\bar{1}} = \frac{\bar{2}}{\bar{3}} = \frac{\bar{4}}{\bar{1}} = \frac{\bar{4}}{\bar{3}} = \frac{\bar{0}}{\bar{3}}.$$

Inoltre

$$\frac{\bar{3}}{\bar{1}} = \frac{\bar{1}}{\bar{3}} \quad \text{poiché } \bar{3}(\bar{9} - \bar{1}) = 0 \text{ in } \mathbb{Z}_6 \\ \dots$$

e in particolare, quindi,

$$S^{-1}\mathbb{Z}_6 = \left\{ \frac{\bar{0}}{\bar{1}}, \frac{\bar{1}}{\bar{1}} \right\} \cong \mathbb{Z}_2.$$

Osservazione. Se $0 \in S$ allora $\frac{a}{s} = \frac{0}{1}$ e quindi $S^{-1}A$ è l'anello zero.

Osservazione. Se $S = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ allora

$$\frac{a}{s^n} = \frac{b}{s^m} \quad \text{se} \quad \exists q \in \mathbb{N} \text{ t.c. } s^q(s^m a - s^n b) = 0$$

e dunque se A è un dominio e $s \neq 0$ allora

$$S^{-1}A = A\left[\frac{1}{s}\right]$$

ovvero il sottoanello di $\text{Frac}(A)$ generato da $\frac{1}{s}$. In questo caso $S^{-1}A$ si indica con A_s .

Esempio 144. Sia \mathbb{K} un campo, e sia $A = \mathbb{K}[[X]]$ anello delle serie formali. Se

$$S = \{1, X, X^2, \dots\}$$

allora $S^{-1}A = \mathbb{K}[[X]]\left[\frac{1}{X}\right] = \mathbb{K}((X))$ campo delle serie di Laurin a coefficienti in \mathbb{K} .

Esempio 145. Se $S = A \setminus \mathcal{P}$ con \mathcal{P} ideale primo di A allora

$$A_{\mathcal{P}} := S^{-1}A$$

è detto localizzatore di A a \mathcal{P} .

- Se $A = \mathbb{Z}$ e $\mathcal{P} = (p)$, allora

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\} \subseteq \mathbb{Q}.$$

- Se $A = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ con \mathbb{K} campo e \mathcal{P} è ideale primo di A , allora

$$A_{\mathcal{P}} = \left\{ \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{g(X_1, \dots, X_n)} \mid g \notin \mathcal{P} \right\}.$$

Se \mathcal{P} è massimale del tipo

$$\mathcal{P} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

allora

$$A_{\mathcal{P}} = \left\{ \frac{f(X_1, \dots, X_n)}{g(X_1, \dots, X_n)} \mid g(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}$$

funzioni razionali definite in (a_1, \dots, a_n)

Ideali dell'anello di frazioni Si consideri

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow S^{-1}A \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

- Se $\mathcal{A} \subseteq A$ è ideale di A , allora l'ideale esteso mediante f è:

$$\mathcal{A}^e = \langle f(\mathcal{A}) \rangle = \left\{ \frac{a}{s} \mid a \in \mathcal{A}, s \in S \right\}$$

- Viceversa, se \mathcal{B} ideale di $S^{-1}A$ allora la contrazione di \mathcal{B} mediante f è:

$$\mathcal{B}^c := f^{-1}(\mathcal{B}) = \left\{ a \in A \mid \frac{a}{1} \in \mathcal{B} \right\}.$$

Poniamo E l'insieme degli ideali estesi di $S^{-1}A$, C l'insieme degli ideali contratti di A .

Proposizione 146. 1. Ogni ideale di $S^{-1}A$ è un ideale esteso.

2. Se \mathcal{A} ideale di A allora

$$\mathcal{A}^{ec} = \bigcup_{s \in S} (\mathcal{A} : s) = \left\{ a \in A \mid as \in \mathcal{A} \text{ per qualche } s \in S \right\}.$$

In particolare $\mathcal{A}^e = (1)$ sse $\mathcal{A} \cap S \neq \emptyset$ ^[329].

3. $\mathcal{A} \in C$ sse nessun elemento di S è zero divisore in A/\mathcal{A} .

4. Esiste una biiezione

$$\{\text{ideali primi di } A \text{ disgiunti da } S\} \longleftrightarrow \{\text{ideali primi di } S^{-1}A\}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xlongleftarrow{\hspace{1cm}} & \mathcal{P}^e =: S^{-1}\mathcal{P} \\ \mathcal{B}^c & \xlongleftarrow{\hspace{1cm}} & \mathcal{B} \end{array}$$

Dimostrazione. 1. Sia \mathcal{B} ideale di $S^{-1}A$ e $\frac{a}{s} \in \mathcal{B}$, allora $a = s \cdot \frac{a}{s} \in \mathcal{B}$ e pertanto $a \in \mathcal{B}^c$.

Quindi $\frac{a}{s} \in \mathcal{B}^{ce}$ e pertanto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}^{ce}$. Segue $\mathcal{B} = \mathcal{B}^{ce}$.

2. Sia \mathcal{A} ideale di A . $b \in \mathcal{A}^{ec}$ sse $\frac{b}{1} = \frac{c}{s}$ per $c \in \mathcal{A}$ e $s \in S$ ovvero sse $sb \in \mathcal{A}$.

3. Sia $\mathcal{A} = \mathcal{B}^c$ e $s \in S$ uno zero divisore in A/\mathcal{A} . Allora esiste $a \in A \setminus \mathcal{A}$ tale che $as \in \mathcal{A}$, ovvero $a \in \mathcal{B}$, e quindi $a \in \mathcal{A}$. Assurdo.

Viceversa, se ogni $s \in S$ non è zero divisore in A/\mathcal{A} e $a \in \mathcal{A}^{ec}$ allora esiste $s \in S$ tale che $as \in \mathcal{A}$. Siccome s non è zero divisore, allora $a \in \mathcal{A}$, ovvero $\mathcal{A}^{ec} \subseteq \mathcal{A}$ e quindi $\mathcal{A}^{ec} = \mathcal{A}$.

4. Sia Q un ideale primo di $S^{-1}A$. Allora $Q^c = f^{-1}(Q)$ è un ideale primo di A . Inoltre, se $Q^c \cap S \neq \emptyset$ allora Q conterrebbe un elemento di s , invertibile e quindi $Q = (1)$. Assurdo.

Viceversa, se \mathcal{P} primo di A tale che $S \cap \mathcal{P} = \emptyset$, allora \mathcal{P}^e è primo: infatti

$$\frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} \in \mathcal{P}^e \quad \rightarrow \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} = \frac{u}{w} \quad u \in \mathcal{P}, w \in S$$

e quindi esiste $v \in S$ tale che

$$v(wab - ust) = 0$$

con $ust \in \mathcal{P}$. Pertanto $vwab \in \mathcal{P}$.

Siccome necessariamente $vw \notin \mathcal{P}$, allora $ab \in \mathcal{P}$ e pertanto $a \in \mathcal{P}$ oppure $b \in \mathcal{P}$, e quindi $\frac{a}{s} \in \mathcal{P}^e$ oppure $\frac{b}{t} \in \mathcal{P}^e$.

Inoltre $\mathcal{P}^{ec} = \mathcal{P}$; infatti, se $x \in \mathcal{P}^{ec}$ allora $x = \frac{y}{s}$ con $y \in \mathcal{P}, s \in S$ e dunque esiste $t \in S$ tale che $t(sx - y) = 0$ ovvero $tsx \in \mathcal{P}$. Siccome $ts \notin \mathcal{P}$ allora $x \in \mathcal{P}$.

Viceversa $Q^{ce} = Q$ per i punti precedenti. ■

In particolare, fissato \mathcal{P}_0 ideale primo di A , se $S = A \setminus \mathcal{P}_0$ allora esiste una biiezione che conserva l'inclusione

$$\{\text{ideali primi di } A \text{ contenuti in } \mathcal{P}_0\} \longleftrightarrow \{\text{ideali primi di } A_{\mathcal{P}_0}\}$$

e dunque $A_{\mathcal{P}_0}$ è un anello locale con unico ideale massimale \mathcal{P}_0^e .

Localizzazione come limite iniettivo Dato \mathcal{P} primo, sia $S = A \setminus \mathcal{P}$.

Per ogni $s \in S$ si definisce

$$U_s := \{Q \in \text{Spec}(A) \mid s \notin Q\} = \text{Spec}(A) \setminus Z((s))$$

dove $Z(\mathcal{A}) = \{Q \in S \mid \mathcal{A} \subseteq Q\}$.

Si ha che $U_t \subseteq U_s$ se

$$\forall Q \in \text{Spec}(A) \left(t \notin Q \rightarrow s \notin Q \right)$$

e quest'ultimo è vero sse $t^n = us$ per qualche $n > 0$ e $u \in A$. Infatti:

(\Rightarrow): se $t \notin Q$ allora $t^n \notin Q$ allora $us \notin Q$ e dunque $s \notin Q$;

(\Leftarrow): se $t \notin Q \rightarrow s \notin Q$ per ogni Q , allora $s \in Q \rightarrow t \in Q$ per ogni Q ;

dunque i primi di $A/(s)$ sono anche primi di $A/(t)$ e quindi $\mathcal{R}(t) \subseteq \mathcal{R}(s)$ e pertanto $t \in \mathcal{R}(s)$:

$$\exists n > 0 \text{ t.c. } t^n = us \quad u \in A.$$

Definiamo pertanto su S una relazione d'ordine parziale ponendo $t \geq s$ se esiste $n > 0$ ed esiste $u \in A$ tale che $t^n = us$, ovvero se $U_t \subseteq U_s$.

(S, \leq) è un insieme diretto.

????? Finire

1090.11 Lezione 10 - <2025-10-17 Ven>

Sia \mathcal{P} ideale primo, e sia $S := A \setminus \mathcal{P}$. Per ogni $s \in S$ si definisce

$$U_s := \{Q \in \text{Spec}(A) \mid s \notin Q\} = \text{Spec}(A) \setminus Z((s))$$

e quindi U_s è un aperto in $\text{Spec}(A)$.

Si ha che $U_t \subseteq U_s$ sse esiste $n \in \mathbb{N}^+$ e $a \in A$ tale che

$$t^n = as.$$

Definiamo su S una relazione d'ordine parziale:

$$t \geq s \iff U_t \subseteq U_s.$$

Se $t \geq s$ allora esistono $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $t^n = as$ ed esiste un omomorfismo^[330]

$$\begin{aligned} \varphi_{s,t} : A_s &\longrightarrow A_t \\ \frac{b}{s^m} &\longmapsto \frac{a^m b}{(as)^m} = \frac{a^m b}{t^{nm}} \end{aligned}$$

tale che $(A_s, \varphi_{st})_{\substack{s,t \in S \\ t \geq s}}$ è un sistema diretto^[331]

Si ha che

$$\varinjlim_{s \notin \mathcal{P}} A_s \cong A_{\mathcal{P}}$$

Infatti, per ogni $s \notin \mathcal{P}$ esiste un omomorfismo

$$\begin{aligned}\psi_s : A_s &\longrightarrow A_{\mathcal{P}} \\ \frac{a}{s^n} &\longmapsto \frac{a}{s^n}\end{aligned}$$

tale che $\psi_t \circ \varphi_{st} = \psi_s$. Per la proprietà universale del limite diretto esiste un omomorfismo

$$F : \lim_{\longrightarrow} A_s \rightarrow A_{\mathcal{P}}.$$

F iniettiva: se $F\left(\frac{a}{s}\right) = 0$ allora $\frac{a}{s}$ banale in $A_{\mathcal{P}}$ e quindi esiste $t \notin S$ tale che $ta = 0$. Dunque $a = 0$ in A_t e pertanto $\left(\frac{a}{s}\right)$ è banale in $\lim_{\longrightarrow} A_s$.

Se $\frac{a}{s} \in A_{\mathcal{P}}$ allora $\frac{a}{s}$ proviene da A_s , e quindi $\frac{a}{s} \in \text{ran}(F)$. Quindi F è suriettiva.

Esempio 147. Sia $A = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ con \mathbb{K} campo. Sia

$$\mathcal{M} = (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n).$$

Se $f(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$:

$$f \in \mathcal{M} \iff f(a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Quindi l'anello A_f è

$$A_f := \left\{ \frac{g(X_1, \dots, X_n)}{f(X_1, \dots, X_n)^m} \mid g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n], m \in \mathbb{N} \right\}$$

composto di tutte le funzioni razionali definite fuori dagli zeri di f .

Inoltre

$$\lim_{f \notin \mathcal{M}} A_f = A_{\mathcal{M}} = \left\{ \frac{h(X_1, \dots, X_n)}{r(X_1, \dots, X_n)} \mid r(a_1, \dots, a_n) \neq 0 \right\}.$$

Localizzazione di moduli Se A è un anello, $S \subseteq A$ parte moltiplicativa e M un A -modulo.

Si definisce

$$S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S \right\}$$

dove

$$\frac{m}{s} = [(m, s) \in M \times S]_{\sim}, \quad (m_1, s_1) \sim (m_2, s_2) \iff \exists t \in S \ t(s_2m_1 - s_1m_2) = 0.$$

Con le seguenti operazioni, $S^{-1}M$ è sia un A -modulo che un $S^{-1}A$ -modulo:

$$\frac{m}{2} + \frac{n}{t} = \frac{tm + sn}{st}$$

$$a\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{am}{s}$$

$$\left(\frac{a}{t}\right)\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{am}{st}.$$

e viene detto modulo delle frazioni di M rispetto ad S .

Notazione:

- Se $S = A \setminus \mathcal{P}$ per \mathcal{P} primo,

$$S^{-1}M =: M_{\mathcal{P}}.$$

- Se $S = \{s^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ per qualche $s \in A$ fissato

$$S^{-1}M =: M_s.$$

Osservazione. C'è un omomorfismo di A -moduli

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow S^{-1}M \\ m &\longmapsto \frac{m}{1}. \end{aligned}$$

Osservazione. Se $g : M \rightarrow N$ è omomorfismo di A -moduli, allora g induce un omomorfismo di $S^{-1}A$ moduli

$$\begin{aligned} (S^{-1}g) : S^{-1}M &\longrightarrow S^{-1}N \\ \frac{m}{s} &\longmapsto \frac{g(m)}{s}. \end{aligned}$$

E inoltre

$$\begin{aligned} (S^{-1}\text{Id}_M) &= \text{Id}_{S^{-1}M} \\ S^{-1}(h \circ g) &= (S^{-1}h) \circ (S^{-1}g) \end{aligned}$$

e pertanto $S^{-1} : M \mapsto S^{-1}M$ è un funtore covariante dalla categoria degli A -moduli a quella degli $S^{-1}A$ -moduli.

Proposizione 148. Il funtore $S^{-1} : M \mapsto S^{-1}M$ è un funtore esatto, ovvero se

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

è una successione esatta di A -moduli, allora

$$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$$

è esatta per ogni $S \subseteq A$ parte moltiplicativa.

Dimostrazione. Per funtorialità, se $\text{im } f = \ker g$ allora $g \circ f = 0$ e quindi

$$(S^{-1}g) \circ (S^{-1}f) = S^{-1}(g \circ f) = S^{-1}0 = 0$$

e pertanto $\text{im}(S^{-1}f) \subseteq \ker(S^{-1}g)$.

Viceversa, se $\frac{m}{s} \in \ker(S^{-1}g)$ allora $\frac{g(m)}{s} = 0$ e dunque

$$\exists t \in S \quad \text{t.c.} \quad t g(m) = g(t m) = 0 \quad \text{in } M''.$$

Quindi $tm \in \ker h = \text{im } f$ e pertanto esiste $m' \in M'$ tale che

$$tm = f(m') \implies \frac{m}{1} = \frac{f(m')}{t} = (S^{-1}f)\left(\frac{m'}{t}\right).$$

Pertanto $\frac{m}{1} \in \text{im}(S^{-1}f)$ e pertanto

$$\frac{m}{s} = \frac{1}{s} \cdot \frac{m}{1} \in \text{im}(S^{-1}f). \quad \blacksquare$$

In particolare:

- f iniettiva implica $S^{-1}f$ iniettiva;
- f suriettiva implica $S^{-1}f$ suriettiva;
- se $N \subseteq M$ sottomodulo, posso considerare $\iota : N \rightarrow M$ inclusione, che induce

$$(S^{-1}\iota) : S^{-1}N \rightarrow S^{-1}M$$

iniettiva, e pertanto $S^{-1}N$ può essere considerato come un sottomodulo di $S^{-1}M$.

Proposizione 149. Se N, P sono sotto A -moduli di M , $S \subseteq A$ parte moltiplicativa. Allora

1. $S^{-1}(N + P) = S^{-1}N + S^{-1}P$ come sotto- $S^{-1}A$ -moduli di $S^{-1}M$.
2. $S^{-1}(N \cap P) = (S^{-1}N) \cap (S^{-1}P)$.
3. $S^{-1}(M/N) = (S^{-1}M)/(S^{-1}N)$

Dimostrazione. Le 1. e 2. sono immediate.

Per 3. considero:

$$0 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow M/N \rightarrow 0$$

e applico S^{-1} :

$$0 \rightarrow S^{-1}N \rightarrow S^{-1}M \rightarrow S^{-1}(M/N) \rightarrow 0$$

esatta. Applico il Teorema Fondamentale di Isomorfismo. ■

Localizzazione e prodotto tensoriale

Proposizione 150. Si ha che

$$S^{-1}M \cong S^{-1}A \otimes_A M$$

canonicamente

Dimostrazione. Considero la funzione bilineare

$$\begin{aligned} f : S^{-1}A \times M &\longrightarrow S^{-1}M \\ \left(\frac{a}{s}, m\right) &\longmapsto \frac{am}{s}. \end{aligned}$$

Per la proprietà universale del prodotto tensoriale f induce

$$\tilde{f} : S^{-1}A \otimes_A M \rightarrow S^{-1}M$$

suriettiva perché lo è f .

Resta da dimostrare l'iniettività di \tilde{f} . Sia $\sum_i \left(\frac{a_i}{s_i} \otimes m_i \right) \in \ker \tilde{f}$.

FINIRE ??? ■

Corollario 151. $S^{-1}A$ è un A -modulo piatto.

Dimostrazione. Se $0 \rightarrow M' \rightarrow M$ esatta allora consideriamo:

$$0 \rightarrow M' \otimes_A S^{-1}A \rightarrow M \otimes_A S^{-1}A$$

e per la proposizione precedente:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & M' \otimes_A S^{-1}A & \longrightarrow & M \otimes_A S^{-1}A \\ & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & S^{-1}M' & \longrightarrow & S^{-1}M \end{array}$$

esatta per esattezza di S^{-1} . ■

Proposizione 152. Se M, N sono A -moduli e S è una parte moltiplicativa, allora esiste un isomorfismo canonico di $S^{-1}A$ -moduli

$$S^{-1}(M \otimes_A N) \cong (S^{-1}M) \otimes_{S^{-1}A} (S^{-1}N).$$

Dimostrazione. Lasciata per esercizio. ■

In particolare, se $S = A \setminus \mathcal{P}$ allora

$$(M \otimes_A N)_{\mathcal{P}} \cong M_{\mathcal{P}} \otimes_{A_{\mathcal{P}}} N_{\mathcal{P}}.$$

Proprietà locali

Definizione 153. Una proprietà P di anelli o moduli si dice locale se

$$M \text{ ha } P \iff \forall \mathcal{P} \subseteq A \text{ primo, } M_{\mathcal{P}} \text{ ha } P.$$

Esempio 154. La proprietà “essere nullo” è una proprietà locale. Se $M_{\mathcal{P}}$ è nullo per ogni \mathcal{P} , allora sia per assurdo $m \in M \setminus \{0\}$ e consideriamo

$$\text{Ann}(m) = \{a \in A \mid am = 0\}.$$

$\text{Ann}(m)$ è ideale di A , proprio. Quindi esiste \mathcal{M} ideale massimale di A che contiene $\text{Ann}(m)$. Ma $\frac{m}{1} = 0$ in $M_{\mathcal{M}}$ e dunque esiste $s \notin \mathcal{M}$ tale che $sm = 0$. Assurdo.

Esempio 155. La proprietà “essere un anello locale” non è una proprietà locale. \mathbb{Z} non è un anello locale, ma $\forall \mathcal{P}$ primo di \mathbb{Z} , $\mathbb{Z}_{\mathcal{P}}$ è locale.

1090.12 Lezione 11 - <2025-10-20 Lun>

Proposizione 156. “Essere piatto” è una proprietà locale.

Lemma 157. Se $A \rightarrow B$ omomorfismo di anelli e M è un A -modulo, allora per ogni B -modulo P

$$(M \otimes_A B) \otimes_B P \cong M \otimes_A (B \otimes_A P)$$

come B -moduli.

Dimostrazione. (della Proposizione 156). (\Rightarrow): Se M è piatto e $0 \rightarrow N \rightarrow P$ successione esatta di $A_{\mathcal{P}}$ moduli, allora la seguente successione di A -moduli è piatta:

$$0 \rightarrow N \otimes_A M \rightarrow P \otimes_A M$$

e siccome $A_{\mathcal{P}}$ è piatto, allora

$$0 \rightarrow (N \otimes_A M) \otimes_A A_{\mathcal{P}} \rightarrow (P \otimes_A M) \otimes_A A_{\mathcal{P}}$$

è esatta, ma il primo modulo è:

$$\begin{aligned} (N \otimes_A M) \otimes_A A_{\mathcal{P}} &\cong N \otimes_{A_{\mathcal{P}}} (M \otimes_A A_{\mathcal{P}}) \\ M \otimes_A A_{\mathcal{P}} &\cong M_{\mathcal{P}} \\ (N \otimes_A M) \otimes_A A_{\mathcal{P}} &\cong N \otimes_{A_{\mathcal{P}}} M_{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

mentre per il secondo si ha

$$(P \otimes_A M) \otimes_A A_{\mathcal{P}} \cong P \otimes_{A_{\mathcal{P}}} M_{\mathcal{P}}.$$

e dunque se M è piatto allora $M_{\mathcal{P}}$ è piatto per ogni \mathcal{P} primo di A .

(\Leftarrow): Viceversa, se $M_{\mathcal{P}}$ piatti per ogni \mathcal{P} e N, P A -moduli con

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow N \rightarrow P &\quad \text{esatta} \\ 0 \rightarrow N_{\mathcal{P}} \rightarrow P_{\mathcal{P}} &\quad \text{esatta per ogni } \mathcal{P} \end{aligned}$$

allora è esatta:

$$\begin{array}{ccc} 0 \longrightarrow N_{\mathcal{P}} \otimes_{A_{\mathcal{P}}} M_{\mathcal{P}} & \longrightarrow & P_{\mathcal{P}} \otimes_{A_{\mathcal{P}}} M_{\mathcal{P}} \\ \parallel & & \parallel \\ (N \otimes M)_{\mathcal{P}} & & (P \otimes M)_{\mathcal{P}} \end{array}$$

e dunque per ogni \mathcal{P} è iniettiva:

$$0 \rightarrow (N \otimes M)_{\mathcal{P}} \rightarrow (P \otimes M)_{\mathcal{P}}$$

e pertanto

$$0 \rightarrow N \otimes M \rightarrow P \otimes M$$

è esatta. ■

1090.12.1 Decomposizione primaria di ideali

Motivazioni:

- Geometria Algebrica: individuare le “componenti irriducibili” di un sottoinsieme algebrico di \mathbb{K}^n .
- Teoria dei Numeri: “fattorizzare gli ideali” di anelli di interi algebrici.

Osservazione. Se A è un PID allora A è un UFD: per ogni $a \in A$

$$a = p_1^{e_1} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k}$$

dove i p_i sono irriducibili (in un PID irriducibile sse primo) a due a due non associati. Dunque ogni ideale di A è in modo unico un prodotto (=intersezione) di primi distinti non nulli.

Definizione 158. Sia A un anello. Un ideale $\mathcal{A} \subsetneq A$ si dice primario se

$$xy \in \mathcal{A} \implies x \in \mathcal{A} \text{ oppure } y^n \in \mathcal{A} \text{ per qualche } n \in \mathbb{N}^+.$$

Osservazione. Equivalentemente, $\mathcal{A} \subsetneq A$ è prima sse nel quoziente A/\mathcal{A} ogni zero-divisore è nilpotente.

Proposizione 159. Se \mathcal{P} è primo, allora \mathcal{P} è primario.

Esempio 160. Se $A = \mathbb{Z}$, allora (p^n) con p primo e $n \in \mathbb{N}^+$ sono tutti e soli i primari non nulli di \mathbb{Z}

FINIRE?????

Proposizione 161. In un PID, \mathcal{A} è primario sse $\mathcal{A} = (p^n)$ per p irriducibili e $n \in \mathbb{N}^+$.

Proposizione 162. La contrazione di un ideale primario è un ideale primario.

Dimostrazione. ?

■

Proposizione 163. Se Q è primario, allora $r(Q)$ è un ideale primo, ed è il più piccolo primo contenente Q .

Dimostrazione. ?

■

Esempio 164. Esempi 2) e 3) di a pag. 51

BOH, manca un pezzo di lezione

Proposizione 165. Se $r(\mathcal{A})$ è massimale, allora \mathcal{A} è primario.

Dimostrazione. L’immagine di $r(\mathcal{A})$ in A/\mathcal{A} è il nilradicale $N(A/\mathcal{A})$.

Se $N(A/\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{P} \subseteq A/\mathcal{A} \\ \mathcal{P} \text{ primo}}} \mathcal{P} = \mathcal{M}$ è massimale, allora A/\mathcal{A} ha un solo ideale primo \mathcal{M} .

Dunque ogni elemento di A/\mathcal{A} è o invertibile o nilpotente. Quindi ogni zero-divisore, siccome non è invertibile, è nilpotente.

■

Definizione 166. Una decomposizione primaria di un ideale \mathcal{A} è una sua rappresentazione come intersezione di ideali primari

$$\mathcal{A} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n.$$

Se ne esiste una, diciamo che \mathcal{A} è decomponibile

Osservazione. Non è detto che tale rappresentazione esista, né che sia unica.

Esempio 167. In \mathbb{Z} tutti gli ideali sono decomponibili.

Lemma 168. Se Q_1, \dots, Q_n sono \mathcal{P} -primari, allora $Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$ è \mathcal{P} -primario.

Dimostrazione. Sia $Q = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$,

$$r(Q) = r(Q_1) \cap \cdots \cap r(Q_n) = \mathcal{P}.$$

Inoltre, se $xy \in Q$ e $y \notin Q$ allora $y \notin Q_i$, ovvero $x^n \in Q_i$ per qualche $n > 0$.

Dunque $x \in r(Q_i) = \mathcal{P} = r(Q)$ e pertanto $x^m \in Q$ per qualche $m > 0$. Segue che Q è \mathcal{P} -primario. ■

Definizione 169. Diciamo che una decomposizione primaria è minimale se i $r(Q_i)$ sono tutti distinti e $Q_i \supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j$ per $i = 1, \dots, n$.

Osservazione. Ogni decomposizione primaria può ridursi a una minimale, sostituendo $\bigcap_{i \in I} Q_i$ \mathcal{P} -primari con $Q := \bigcap_{i \in I} Q_i$ ed eliminando i Q_i tali che $Q_i \supseteq \bigcap_{j \neq i} Q_j$.

Lemma 170. Se Q è \mathcal{P} -primario e $x \in A$ allora:

1. se $x \in Q$ allora $(Q : x) = (1)$;
2. se $x \notin Q$ allora $(Q : x)$ è \mathcal{P} -primario e quindi

$$r((Q : x)) = \mathcal{P};$$

3. se $x \notin \mathcal{P}$ allora $Q = (Q : x)$.

Si ricorda che

$$(Q : x) = \{y \in A \mid xy \in Q\}.$$

Dimostrazione. 1. Ovvio.

2. Supponiamo che $x \in Q$. Sia $y \in (Q : x)$: $xy \in Q$, ma $x \notin Q$, e pertanto $y^n \in Q$ per qualche $n > 0$.

Allora $y \in r(Q) = \mathcal{P}$. Quindi $(Q : x) \subseteq \mathcal{P}$ e pertanto vale:

$$Q \subseteq (Q : x) \subseteq \mathcal{P}$$

e pertanto, passando ai radicali: $r((Q : x)) = \mathcal{P}$.

Dimostro che $(Q : x)$ è primario. Se $yz \in (Q : x)$ allora $xyz \in Q$ e pertanto $yz \in r(Q) = \mathcal{P}$.

Poiché \mathcal{P} primo o $y \in \mathcal{P}$ oppure $z \in \mathcal{P}$ ovvero o $y^n \in (Q : x)$ o $z^n \in (Q : x)$ qualche n , dato che $\mathcal{P} = r((Q : x))$.

3. Si ha che $Q \subseteq (Q : x)$. Viceversa, se $y \in (Q : x)$ allora $yx \in Q$ e quindi $y \in Q$ oppure $x \in r(Q) = \mathcal{P}$. Ma la seconda opzione è impossibile, e pertanto $y \in Q$, ovvero $(Q : x) \subseteq Q$. ■

Teorema 171. (Primo teorema di unicità). Se \mathcal{A} è decomponibile e

$$\mathcal{A} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$$

è una decomposizione primaria minimale, detti $\mathcal{P}_i := r(Q_i)$ (distinti), allora i \mathcal{P}_i sono precisamente gli ideali primi che occorrono nell'insieme

$$\{r(\mathcal{A} : x) \mid x \in A\}.$$

In particolare:

- i \mathcal{P}_i non dipendono dalla decomposizione minimale;
- il numero dei Q_i non dipende dalla decomposizione minimale.

Dimostrazione. Vedi dimostrazione del Teorema 4.5 di . ■

1090.13 Lezione 12 - <2025-10-21 Mar>

Esempio 172. In $A = \mathbb{K}[X, Y]$, con \mathbb{K} campo, consideriamo l'ideale $\mathcal{A} = (X^2, XY)$. Allora $\mathcal{A} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2^2$, con

$$\mathcal{P}_1 := (X), \quad \mathcal{P}_2 = (X, Y).$$

Infatti: $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2^2$ sono primari (\mathcal{P}_1 è primo e $r(\mathcal{P}_2^2) = \mathcal{P}_2$ massimale).

Ovviamente $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2^2$ (notiamo che $\mathcal{P}_2^2 = (X^2, XY, Y^2)$).

Viceversa, se $f \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2^2$:

$$f = Xg = X^2a + XYb + Y^2c, \quad g, a, b, c \in A.$$

Allora $X \mid c$: $c = Xc'$ con $c' \in A$:

$$f = X^2a + XY(b + Yc') \in \mathcal{A}.$$

Osservazione. In questo esempio $\mathcal{P}_1 \subseteq \mathcal{P}_2$:

$$r(\mathcal{A}) = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1.$$

($r(\mathcal{A})$ è primo ma \mathcal{A} non è primario).

Fatto: se A è un [anello noetheriano](#) (tutti gli ideali sono finitamente generati), allora ogni ideale è decomponibile.

Notazione:

- i $\mathcal{P}_i = r(Q_i)$ che intervengono in una decomposizione primaria si dicono appartenenti o associati ad \mathcal{A} ;

- quelli che sono minimali rispetto all'inclusione si dicono minimali o isolati;
- gli altri si dicono immersi.

Proposizione 173. Sia \mathcal{A} decomponibile. Allora ogni ideale primo $\mathcal{P} \supseteq \mathcal{A}$ contiene un primo minimale appartenente ad \mathcal{A} .

Quindi i primi minimali appartenenti ad \mathcal{A} coincidono con i primi minimali (rispetto all'inclusione) nell'insieme dei primi che contengono \mathcal{A} .

Dimostrazione. Sia $\mathcal{A} = \bigcap_i Q_i \subseteq \mathcal{P}$.

$$r(\mathcal{A}) = \bigcap_i r(Q_i) \subseteq r(\mathcal{P}) = \mathcal{P}.$$

Se $\mathcal{P}_i := r(Q_i)$, per *absorbance* $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{P}$ per qualche i . ■

Osservazione. Non è vero che le componenti primarie non dipendono dalla decomposizione primaria minimale.

Esempio 174. In $A = \mathbb{K}[X, Y]$, con \mathbb{K} campo,

$$(X^2, XY) = (X) \cap (X, Y)^2 = (X) \cap (X^2, Y).$$

Le componenti primarie associate a primi isolati non dipendono dalla decomposizione.

Teorema 175. (Secondo teorema di unicità). Sia \mathcal{A} ideale decomponibile,

$$\mathcal{A} = Q_1 \cap \cdots \cap Q_n$$

decomposizione primaria minimale. Sia $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_k\}$ l'insieme dei primi minimali di \mathcal{A} , con $\mathcal{P}_i = r(Q_i)$.

Allora $Q_1 \cap \cdots \cap Q_k$ non dipende dalla decomposizione.

Dimostrazione. Se $n = 1$ è ovvio.

Viceversa, sia \mathcal{P}_i un primo minimale appartenente ad \mathcal{A} . Esiste $a \in \bigcap_{j \neq i} \mathcal{P}_j \setminus \mathcal{P}_i$, altrimenti per *absorbance* esisterebbe $j \neq i$ tale che $\mathcal{P}_j \subseteq \mathcal{P}_i$ contro la minimalità di \mathcal{P}_i .

Dunque per ogni $j \neq i$, $a \in r(Q_j)$ e quindi $a^{h_j} \in Q_j$ per qualche $h_j > 0$. Se $t \geq h_j$ per ogni j , si ha

$$a^t \in \bigcap_{j \neq i} Q_j \setminus Q_i.$$

Quindi, per il lemma precedente,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A} : a^t) &= \left(\bigcap_j Q_j : a^t \right) \\ &= \bigcap_j (Q_j : a^t) \\ &= \bigcap_{j \neq i} \underbrace{(Q_j : a^t)}_{=(1)} \cap \underbrace{(Q_i : a^t)}_{=Q_i} \end{aligned}$$

e pertanto $(\mathcal{A} : a^t) = Q_i$ per t sufficientemente grande.

Ma \mathcal{A} dipende solo dai \mathcal{P}_i , non dai Q_i . ■

Esempio 176. (Esempio di ideale non decomponibile). Sia $A = C([0, 1], \mathbb{R})$, e consideriamo (0). Questo ideale non è decomponibile.

- Osservazione: Se lo fosse

$$\begin{aligned}(0) &= Q_1 \cap \cdots \cap Q_n \\ (0) &= r(0) = \underbrace{r(Q_1)}_{\mathcal{P}_1} \cap \cdots \cap \underbrace{r(Q_n)}_{\mathcal{P}_n} \\ (0) &= \mathcal{P}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{P}_n\end{aligned}$$

con \mathcal{P}_i ideali primi.

- Come sono fatti gli ideali massimali in A ?

Alcuni sono di facile descrizione: per ogni $x \in [0, 1]$ considero

$$\begin{aligned}\varphi_x : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x)\end{aligned}$$

ha nucleo $\mathcal{M}_x := \{f \in A \mid f(x) = 0\}$ ideale massimale.

- Claim: $\{\mathcal{M}_x \mid x \in [0, 1]\}$ è l'insieme di tutti e soli i massimali di A .

Sia \mathcal{M} un massimale di A tale che per ogni $x \in [0, 1]$, $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_x$. Quindi per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $f_x \in \mathcal{M}$ tale che $f_x(x) \neq 0$.

Poniamo

$$U_x := \{y \in [0, 1] \mid f_x(y) \neq 0\} = [0, 1] \setminus f_x^{-1}(0)$$

aperto di $[0, 1]$. Inoltre $\{U_x \mid x \in [0, 1]\}$ è ricoprimento di $[0, 1]$ (compatto) e pertanto esistono $x_1, \dots, x_m \in [0, 1]$ tali che

$$[0, 1] \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}.$$

Dunque per ogni $x \in [0, 1]$ esiste $i = 1, \dots, m$ tale che $f_{x_i}(x) \neq 0$: considerando la funzione

$$F = f_{x_1}^2 + \cdots + f_{x_m}^2 \in \mathcal{M}$$

e $F(x) \neq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$. Quindi F invertibile in A , assurdo.

- Osservo che l'insieme dei divisori dello zero in A è contenuto in $\bigcup_i \mathcal{P}_i$: se $fg = 0$ con $f \neq 0$ allora $fg \in \bigcap \mathcal{P}_i$. Allora $g \in \mathcal{P}_i$ per qualche $i^{[332]}$. Sia D l'insieme dei divisori dello zero.
- Sia quindi per ogni i , \mathcal{M}_i massimale contenente \mathcal{P}_i :

$$D \subseteq \bigcup_i \mathcal{P}_i \subseteq \bigcup_i \mathcal{M}_i \subseteq \bigcup_i \mathcal{M}_{x_i}.$$

Quindi per ogni $f \in D$ esiste $f(x_i) = 0$ per almeno un $i = 1, \dots, n$. Assurdo, basta costruire una funzione “a spike” sugli x_i , con le *spike* ben distanziate.

Parte II

Algebra commutativa avanzata

1090.14 Lezione 13 - <2025-10-24 Ven>

Lei segue

1090.14.1 Condizioni Catenarie (Noetherianità - Artinianità)

Sia (V, \leq) un insieme parzialmente ordinato. Analizziamo alcune proprietà fondamentali.

Definizione 177. Vale la proprietà **ACC** (Ascending Chain Condition) se per ogni successione $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq V$ tale che

$$v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_i \leq v_{i+1} \leq \cdots$$

la catena di disugualanze è **stazionaria**. Ovvero:

$$\exists n_0 \text{ t.c. } v_{n_0} = v_{n_0+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}$$

Definizione 178. Vale la proprietà **MC** (Maximal Condition) se ogni sottoinsieme non vuoto di V ammette un elemento massimale rispetto a \leq .

Lemma 179. Sia (V, \leq) un insieme parzialmente ordinato. Si ha che #+begin_quote (V, \leq) soddisfa ACC se e solo se (V, \leq) soddisfa MC.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Supponiamo che (V, \leq) non soddisfi la MC. Allora esiste $T \subseteq V$, con $T \neq \emptyset$, tale che T non ha elementi massimali. Dato che $T \neq \emptyset$:

- Esiste $t_1 \in T$. Poiché t_1 non è massimale in T , esiste $t_2 \in T$ tale che $t_1 < t_2$.
- Poiché t_2 non è massimale in T , esiste $t_3 \in T$ tale che $t_2 < t_3$, e così via.

Costruisco così una catena ascendente di elementi in V :

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$$

Questa catena non è stazionaria, dunque per V non vale la ACC.

(\Leftarrow): Supponiamo che (V, \leq) soddisfi la MC. Consideriamo una catena ascendente in V :

$$v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_i \leq v_{i+1} \leq \cdots$$

Sia $T = \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq V$. Poiché $T \neq \emptyset$ e vale la MC per V , esiste un elemento massimale $v_{n_0} \in T$. Di conseguenza:

$$\forall i \in \mathbb{N} : \quad v_{n_0+i} = v_{n_0}$$

Quindi V soddisfa la ACC. ■

1090.14.2 Moduli e Anelli Noetheriani e Artiniani

Sia R un anello commutativo con unità e sia M un R -modulo. Sia $S_M = \{\text{sottomoduli di } M\}$. Abbiamo due possibilità di ordinamento:

1. Su S_M considero l'ordine parziale dato dall'inclusione: $G_1 \leq G_2$ se e solo se $G_1 \subseteq G_2$.
2. Su S_M considero l'ordine parziale inverso: $G_1 \leq G_2$ se e solo se $G_1 \supseteq G_2$.

Definizione 180. Si dice che:

- Il modulo M è **noetheriano** quando (S_M, \subseteq) soddisfa la ACC (che è equivalente alla MC).
- Il modulo M è **artiniano** quando (S_M, \supseteq) soddisfa la ACC (spesso indicata come DCC, Descending Chain Condition, rispetto all'inclusione standard).

Osservazione. La **DCC** (Descending Chain Condition) per un modulo M è la seguente: data una famiglia di sottomoduli di M , la catena discendente di inclusioni:

$$G_1 \supseteq G_2 \supseteq \cdots \supseteq G_i \supseteq G_{i+1} \supseteq \cdots$$

è stazionaria, cioè esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad G_{n_0} = G_{n_0+i}$$

Definizione 181. Sia R anello commutativo con unità.

- R è **noetheriano** se è noetheriano come modulo su se stesso. (sse ogni catena ascendente di ideali diventa stazionaria).
- R è **artiniano** se è artiniano come modulo su se stesso (sse ogni catena discendente di ideali diventa stazionaria).

1090.14.3 Esempi e Controesempi

Esempio 182. Sia $R = \mathbb{Z}$. \mathbb{Z} è noetheriano? \mathbb{Z} è artiniano?

Considero una catena ascendente di ideali in \mathbb{Z} :

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_j \subseteq I_{j+1} \subseteq \cdots$$

So che \mathbb{Z} è un PID (Dominio a Ideali Principali), cioè ogni ideale di \mathbb{Z} può essere generato da un unico elemento. Vale $I_j = (a_j)$ per opportuno $a_j \in \mathbb{Z}$. La catena diventa:

$$(a_1) \subseteq (a_2) \subseteq \cdots \subseteq (a_j) \subseteq (a_{j+1}) \subseteq \cdots$$

L'inclusione $(a_j) \subseteq (a_{j+1})$ significa che $a_{j+1} | a_j$ (ovvero a_j è multiplo di a_{j+1}). Quindi: a_1 è diviso da a_2 , a_2 è diviso da a_3 , ecc. Essendo \mathbb{Z} anche un UFD (Dominio a Fattorizzazione Unica), a_1 ha un numero finito di fattori, quindi la catena deve diventare stazionaria.

Quindi \mathbb{Z} è **noetheriano**.

Creiamo ora una catena discendente:

$$2\mathbb{Z} \supsetneq 4\mathbb{Z} \supsetneq 8\mathbb{Z} \cdots \supsetneq 2^i\mathbb{Z} \supsetneq 2^{i+1}\mathbb{Z} \supsetneq \cdots$$

Questa è una catena discendente di ideali in \mathbb{Z} non stazionaria.

Quindi \mathbb{Z} **non** è artiniano.

Osservazione. Non esistono *anelli* artiniani non noetheriani (Teorema di Akizuki-Hopkins-Levitzki).

Ma: esistono *R-moduli* artiniani non noetheriani.

Esempio 183. (Il gruppo di Prüfer).

Considero lo \mathbb{Z} -modulo \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Gli elementi sono classi $[\alpha]$, dove per $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$:

$$\alpha \sim \beta \longleftrightarrow \alpha - \beta \in \mathbb{Z}$$

Fisso $p \in \mathbb{Z}$ primo e considero il sottomodulo:

$$E(p) = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ t.c. } \alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z} \text{ per un qualche } t \in \mathbb{N} \right\}$$

$E(p)$ non è solo un sottoinsieme, ma anche un sottomodulo di \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Fisso ora la potenza $t \in \mathbb{N}$ e definisco:

$$G_t = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ t.c. } \alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z} \text{ con } r \in \mathbb{Z} \right\}$$

(Nota: non importa se la frazione è ai minimi termini).

Ad esempio:

$$G_0 = \left\{ \alpha \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ t.c. } \alpha = \frac{r}{1} + \mathbb{Z} \right\} = \{0 + \mathbb{Z}\}$$

1. G_t è sottomodulo di $E(p)$ generato da $\frac{1}{p^t} + \mathbb{Z}$, per ogni $t \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione: Che G_t sia un sottomodulo è per esercizio. Verifichiamo che è generato da quell'elemento:

$$\left\langle \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \right\rangle_R = \left\{ r \cdot \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \text{ t.c. } r \in \mathbb{Z} \right\} \subseteq G_t$$

Viceversa, $\forall \alpha \in G_t$, $\alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z}$ con $r \in \mathbb{Z}$. Ho che:

$$\alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z} = r \cdot \left(\frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \right) \in \left\langle \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \right\rangle_R$$

Quindi $G_t = \left\langle \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \right\rangle_R$.

2. Ogni sottomodulo di $E(p)$ è del tipo G_t , per un opportuno t .

Sia H un sottomodulo di $E(p)$ proprio ($H \subsetneq E(p)$). Visto che per quanto visto sopra per il sottomodulo nullo vale $\{0 + \mathbb{Z}\} = G'$, considero

$$\{0 + \mathbb{Z}\} \neq H \subsetneq E(p)$$

Poiché $H \neq G_0$, allora esiste $\alpha \in H$ tale che $\alpha \neq 0 + \mathbb{Z}$, cioè:

$$\alpha = \frac{r}{p^t} + \mathbb{Z} \in E(p) \text{ per un qualche } t \in \mathbb{N}$$

con $r \neq 0$ e $r \notin p^t \mathbb{Z}$.

Sia p^s la più alta potenza di p che divide r (sicuramente $s < t$). Allora semplifichiamo la frazione:

$$\frac{r}{p^t} = \frac{r'}{p^{t'}} \quad \text{con } \text{MCD}(r', p) = 1$$

Nota che $\notin \mathbb{Z}$ (è ancora una frazione, solo ridotta).

- Si ha che $\frac{1}{p^{t'}} + \mathbb{Z} \in H$.

Infatti, per l'**Identità di Bezout**: $\text{MCD}(r', p) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ar' + bp^{t'} = 1$.

Ovvero:

$$1 - ar' \in p^{t'} \mathbb{Z}$$

Dividendo per $p^{t'}$:

$$\frac{1 - ar'}{p^{t'}} \in \mathbb{Z} \implies \frac{1}{p^{t'}} - \frac{ar'}{p^{t'}} \in \mathbb{Z} \implies \frac{1}{p^{t'}} + \mathbb{Z} = \frac{ar'}{p^{t'}} + \mathbb{Z}$$

Ovvero:

$$\frac{1}{p^{t'}} + \mathbb{Z} = a \cdot \underbrace{\left(\frac{r'}{p^{t'}} + \mathbb{Z} \right)}_{\alpha} \quad \text{con } \alpha \neq 0 + \mathbb{Z} \text{ in } H$$

Dunque $\frac{1}{p^{t'}} + \mathbb{Z} \in H$ e pertanto $G_{t'} \subseteq H$.

- Si ha che $\bigcup_{t \in \mathbb{N}} G_t = E(p)$ e $G_0 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \dots$

Infatti:

$$\left\langle \frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} \right\rangle_R = G_t$$

$$\frac{1}{p^t} + \mathbb{Z} = \frac{p}{p^{t+1}} + \mathbb{Z} = p \cdot \left(\frac{1}{p^{t+1}} + \mathbb{Z} \right) \in G_{t+1}$$

Quindi vale che $G_i \subseteq G_{i+1}$.

- Sia ora $m \in \mathbb{N}$ il **massimo** esponente tale che $G_m \subseteq H$ (che esiste perché $H \subsetneq E(p)$).

Supponiamo che $G_m \subsetneq H$. Allora esiste $\alpha_1 \in H \setminus G_m$.

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{p^{t_1}} + \mathbb{Z} \quad \text{con } \text{MCD}(r_1, p) = 1$$

Se $\alpha_1 \notin G_m$ allora $t_1 > m$.

Ripetendo il ragionamento di Bezout sopra, ottengo:

$$\frac{1}{p^{t_1}} + \mathbb{Z} \in H \implies G_{t_1} \subseteq H \quad \text{con } t_1 > m$$

Questo è assurdo perché m era il massimo esponente. Ma allora: $G_m = H$.

3. $E(p)$ è Artiniano ma non Noetheriano

Dimostrazione: Creo una catena discendente di sottomoduli:

$$G_{t_1} \supseteq G_{t_2} \supseteq \cdots \supseteq G_{t_\ell} \supseteq G_{t_{\ell+1}} \supseteq \cdots$$

Questa corrisponde a una catena discendente di numeri naturali

$$t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_\ell \dots$$

Tale catena è necessariamente stazionaria, e quindi anche la catena di sottomoduli è stazionaria, e pertanto $E(p)$ è **Artiniano**.

Ma **non** è noetheriano. Considero la catena ascendente:

$$G_0 \subsetneq G_1 \subsetneq \cdots \subsetneq G_i \subsetneq G_{i+1} \subsetneq \cdots$$

Queste sono tutte inclusioni **strette!** Infatti:

$$\frac{1}{p^{i+1}} + \mathbb{Z} \notin G_i$$

Se $\frac{1}{p^{i+1}} + \mathbb{Z} \in G_i$, allora $\frac{1}{p^{i+1}} + \mathbb{Z} = r \cdot \left(\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \right)$ con opportuno $r \in \mathbb{Z}$. Da cui:

$$\frac{1}{p^{i+1}} - \frac{r}{p^i} \in \mathbb{Z}$$

Allora $1 - rp$ è multiplo di p^{i+1} .

$$1 - rp = \ell \cdot p^{i+1} \implies p \text{ divide } 1$$

Ma p è primo, assurdo.

Quindi $G_i \subsetneq G_{i+1}$ e pertanto $E(p)$ non è noetheriano.

1090.14.4 Spazi Vettoriali

Sia $R = \mathbb{K}$ un campo.

Proposizione 184. Sia \mathbb{K} campo, sia V un \mathbb{K} -spazio vettoriale. Sono equivalenti:

1. V è spazio vettoriale con dimensione finita.
2. V è un \mathbb{K} -modulo noetheriano.
3. V è un \mathbb{K} -modulo artiniano.

(Nota: L'anello dei polinomi a coefficienti in \mathbb{K} , a 1 indeterminata, ha invece dimensione INFINTA; la base è data da tutte le potenze di x).

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2. \wedge 1. \Rightarrow 3.): Sia per ipotesi $\dim_{\mathbb{K}} V = n \in \mathbb{N}$.

Se ora considero 2 sottomoduli di V , $M \supsetneq L$ (sottomoduli di V sse sottospazi di V), vale:

$$\dim_{\mathbb{K}} V \geq \dim_{\mathbb{K}} M > \dim_{\mathbb{K}} L$$

Ogni catena ascendente o discendente di sottospazi vettoriali di V contiene al massimo $n+1$ elementi se le inclusioni sono strette, ad esempio

$$\{0\} = L_0 \subsetneq L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \cdots \subsetneq L_n = V$$

Ad ogni inclusione la dimensione aumenta almeno di 1. Ma allora valgono sia ACC sia DCC se e solo se V è sia modulo Noetheriano sia modulo Artiniano.

(2. \Rightarrow 1. \wedge 3. \Rightarrow 1.): Supponiamo che V sia uno spazio vettoriale **non** finito dimensionale. Sia $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subseteq V$ una base (o insieme linearmente indipendente) tale che:

- $\forall n \in \mathbb{N} : \{v_1, \dots, v_n\}$ è linearmente indipendente.
- $\forall n \in \mathbb{N} : L_n := \langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}$.

Consideriamo:

$$M_n = \langle \{v_i\}_{i \in \mathbb{N}} \setminus \{v_1, \dots, v_n\} \rangle_{\mathbb{K}}$$

Vale:

$$L_1 \subsetneq L_2 \subsetneq \cdots \subsetneq L_j \subsetneq L_{j+1} \subsetneq \cdots$$

Questa è una catena ascendente di sottomoduli di V **non stazionario**, quindi V non noetheriano (assurdo, se ipotizziamo 2).

Analogo per 3 \Rightarrow 1:

$$M_1 \supsetneq M_2 \supsetneq \cdots \supsetneq M_i \supsetneq M_{i+1} \supsetneq \cdots$$

Questa è una catena discendente **non stazionario**, ovvero V non artiniano (assurdo, se ipotizziamo 3).

Quindi deve essere $\dim V < \infty$. ■

1090.14.5 Caratterizzazione dei Moduli Noetheriani

Proposizione 185. Sia M un R -modulo.

M è noetheriano se e solo se ogni sottomodulo di M è finitamente generato (f.g.).

Dimostrazione. (\Rightarrow): Sia M noetheriano per ipotesi. Sia G un sottomodulo di M e supponiamo per assurdo che G **non** sia finitamente generato. Sia $\Gamma = \{\text{sottomoduli di } G \text{ finitamente generati}\}$. Ad esempio $\{0_M\} \in \Gamma$ e quindi $\Gamma \neq \emptyset$.

Dato che M è noetheriano, vale la M.C. (Condizione Massimale) su ogni famiglia di sottomoduli di M .

Dunque \exists elemento massimale in Γ : sia esso N .

- È possibile che $N = G$? No, perché N è f.g. mentre G no.
- Allora $N \subsetneq G$. Esiste $g \in G \setminus N$.

Considero $N_1 = N + \langle g \rangle_R$. N_1 è finitamente generato (somma di f.g. e ciclico) e sta in G . Quindi $N_1 \supseteq N$ e $N_1 \in \Gamma$. Assurdo (N è massimale in Γ) e pertanto G deve essere finitamente generato.

(\Leftarrow): Supponiamo che ogni sottomodulo sia f.g. Consideriamo una catena ascendente di sottomoduli di M :

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_j \subseteq L_{j+1} \subseteq \cdots$$

Sia:

$$G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i$$

G è ancora un sottomodulo di M , e quindi G è f.g. per ipotesi: $G = \langle g_1, \dots, g_t \rangle_R = g_1 R + \cdots + g_t R$, con $t \in \mathbb{N}$.

Per ogni $i = 1, \dots, t$, esiste n_i tale che $g_i \in L_{n_i}$. Sia allora:

$$N = \max\{n_1, \dots, n_t\} \quad \text{con } g_1, \dots, g_t \in L_N$$

Allora:

$$G \subseteq L_N \subseteq L_{N+1} \subseteq \cdots \subseteq G$$

Da cui $G = L_{N+i}$, cioè la catena è stazionaria. Quindi M è noetheriano ■

1090.15 Lezione 14 - <2025-10-27 Lun>

Proposizione 186. Sia M un R -modulo. M è Noetheriano sse ogni sottomodulo di M è finitamente generato.

Corollario 187. R è Noetheriano sse ogni ideale di R è finitamente generato.

Lemma 188. Sia M un R -modulo.

1. Se M è Noetheriano, allora ogni sottomodulo di M è Noetheriano; ogni modulo quoziante di M è Noetheriano.
2. Se M è Artiniano, allora ogni sottomodulo di M è Artiniano; ogni modulo quoziante di M è Artiniano.

Dimostrazione. Si dimostra 1.

Sia G un sottomodulo di M . Considero una catena ascendente di sottomoduli di G : questa è anche catena ascendente di sottomoduli di M , quindi deve essere stazionaria.

Sia M/G , con G sottomodulo di M un quoziante di M . Considero una catena ascendente di sottomoduli di M/G . Ricordando che

$$\{G'/G\} \quad \xleftarrow{1:1} \quad \{G' \text{ sottomodulo di } M : G' \supseteq G\}$$

si ha

$$G_1/G \subseteq G_2/G \subseteq \cdots \subseteq G_i/G \subseteq G_{i+1}/G \subseteq \cdots$$

dove $G_i \supseteq G$ è sottomoduli di M . Dunque si ha

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_i \subseteq G_{i+1} \subseteq \cdots$$

catena ascendente di sottomoduli di M : pertanto stazionaria. Pertanto lo è anche la catena G_i/G . \blacksquare

Lemma 189. Se M_1, M_2 sono due R -moduli isomorfi, allora M_1 è Noetheriano (risp. Artiniano) sse M_2 è Noetheriano (risp. Artiniano).

Dimostrazione. Sia $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ isomorfismo, e siano

$$S_{M_i} = \{\text{sottomoduli di } M_i\}, \quad i = 1, 2$$

Allora φ induce $\tilde{\varphi} : S_{M_1} \rightarrow S_{M_2}$

$$\tilde{\varphi}(G) = \varphi[G], \quad \varphi[G] \cong G. \quad \blacksquare$$

Proposizione 190. Sia M un R -modulo, e sia G un sottomodulo di M .

1. M è Noetheriano sse G è Noetheriano e M/G è Noetheriano.
2. M è Artiniano sse G è Artiniano e M/G è Artiniano.

Dimostrazione. Si dimostra 1.

(\Rightarrow): Lemma 188.

(\Leftarrow): Considero una catena ascendente di sottomoduli di M :

$$L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_i \subseteq L_{i+1} \subseteq \cdots$$

Ottengo una catena ascendente di sottomoduli di G intersecando con G :

$$L_1 \cap G \subseteq L_2 \cap G \subseteq \cdots \subseteq L_i \cap G \subseteq L_{i+1} \cap G \subseteq \cdots$$

che è stazionaria (in quanto G Noetheriano). Sia $n_1 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$L_{n_1} \cap G = L_{n_1+j} \cap G.$$

Considero ora invece

$$(L_1 + G)/G \subseteq (L_2 + G)/G \subseteq \cdots \subseteq (L_i + G)/G \subseteq (L_{i+1} + G)/G \subseteq \cdots$$

catena ascendente in M/G Noetheriano. Allora esiste $n_2 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$(L_{n_2} + G)/G = (L_{n_2+j} + G)/G.$$

Allora per ogni $j \in \mathbb{N}$: $L_{n_2} + G = L_{n_2+j} + G$ (per la corrispondenza tra sottomoduli del quoziente).

Sia quindi $n = \max \{n_1, n_2\}$. Allora per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\begin{cases} L_n \cap G = L_{n+j} \cap G \\ L_n + G = L_{n+j} + G. \end{cases}$$

Dimostro che $L_{n+j} \subseteq L_n$: Sia $g \in L_{n+j} \subseteq G + L_{n+j}$.

Quindi $g \in G + L_{n+j} = G + L_n$ ed esiste $a \in G$, $b \in L_n$ tali che $g = a + b$.

$$a = g - b$$

Inoltre, $g \in L_{n+j}$, $b \in L_n \subseteq L_{n+j}$ e pertanto $g - b \in L_{n+j}$, ovvero $a \in G \cap L_{n+j} = G \cap L_n$.

In particolare $a \in L_n$, $b \in L_n$: $g = a + b \in L_n$. ■

Corollario 191. Siano L, M, N degli R -moduli tali che

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

sia una SEC.

M è Noeriano (risp. Artiniano) sse L, N Noetheriano (risp. Artiniano).

Dimostrazione. f è iniettivo, quindi $L \cong \text{im } f \cong \ker g$.

Per il primo teorema di isomorfismo su g (suriettiva):

$$M/\ker g \cong N$$

Dunque:

- M è Artiniano sse $\ker g$ e $M/\ker g$ sono Artiniani (per la Proposizione 190) sse L e N sono Artiniani (per il Lemma 189).
- M è Noetheriano sse $\ker g$ e $M/\ker g$ sono Noetheriani (per la Proposizione 190) sse L e N sono Noetheriani (per il Lemma 189). ■

Corollario 192. Siano M_1, \dots, M_n degli R -moduli. Allora M_1, \dots, M_n sono Noetheriano (risp. Artiniani) sse $M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ è Noetheriano (risp. Artiniano).

Dimostrazione. Per induzione. Il caso $n = 1$ è verificato.

Al passo induttivo, si supponga l'enunciato vero per somme dirette di $n - 1$ moduli. Considero

$$\begin{aligned} f : M_n &\hookrightarrow M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1} \oplus M_n \\ m &\mapsto 0 \oplus \dots \oplus 0 \oplus m. \end{aligned}$$

morfismo iniettivo di R -moduli.

Considero inoltre la proiezione suriettiva

$$\pi : M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1} \oplus M_n \rightarrow \frac{M_1 \oplus \dots \oplus M_{n-1} \oplus M_n}{f[M_n]}.$$

Allora ottengo la SEC

$$0 \rightarrow M_n \xrightarrow{f} M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1} \oplus M_n \xrightarrow{\pi} \frac{M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1} \oplus M_n}{f[M_n]}.$$

Inoltre

$$\frac{M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1} \oplus M_n}{f[M_n]} \cong M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1}$$

e pertanto anche la seguente è una SEC

$$0 \rightarrow M_n \xrightarrow{f} M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1} \oplus M_n \xrightarrow{\tilde{\pi}} M_1 \oplus \cdots \oplus M_{n-1}.$$

Per il Corollario 191 e per ipotesi induttiva:

- M_1, \dots, M_n sono Artiniani sse $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ è Artiniano;
- M_1, \dots, M_n sono Noetheriani sse $M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ è Noetheriano. ■

Corollario 193. Se R è Noetheriano (risp. Artiniano) allora ogni R -modulo finitamente generato è Noetheriano (risp. Artiniano).

Dimostrazione. Sia M un R -modulo finitamente generato. Allora esistono $g_1, \dots, g_\ell \in M$ tali che

$$M = g_1R + g_2R + \cdots + g_\ell R = \langle g_1, \dots, g_\ell \rangle_R$$

e dunque esiste un morfismo di R -moduli suriettivo

$$\begin{aligned} f : \bigoplus_{i=1}^{\ell} R &\longrightarrow M \\ (r_1, \dots, r_\ell) &\longmapsto r_1g_1 + \cdots + r_\ell g_\ell. \end{aligned}$$

Costruisco quindi la SEC:

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{\ell} R \xrightarrow{f} M \rightarrow 0.$$

Dunque per il Corollario 191 $\bigoplus_{i=1}^{\ell} R$ è Noetheriano (risp. Artiniano) sse $\ker f$ e M sono Noetheriani (risp. Artiniani).

Ma per il Corollario 192, se R è Noetheriano (risp. Artiniano) allora $\bigoplus_{i=1}^{\ell} R$ è Noetheriano (risp. Artiniano). ■

Quindi M è Noetheriano (risp. Artiniano). ■

Osservazione. (Cambiamento di Anello). Sia M un R -modulo,

$$\text{Ann}(M) = \{r \in R \mid r \cdot M = \{0_M\}\}.$$

Sia $I \subseteq \text{Ann}(M)$ ideale di R .

Allora M ha la struttura di R/I -modulo, data da

$$\begin{aligned} * : R/I \times M &\longrightarrow M \\ (r+I, m) &\longmapsto rm \end{aligned}$$

Questa è ben definita^[333], e dota M di una struttura di R/I -modulo.

Inoltre $N \subseteq M$ è un sotto R -modulo sse $N \subseteq M$ è un sotto R/I -modulo.

Corollario 194. Sia M un R -modulo, I ideale di R , $I \subseteq \text{Ann}(M)$.

M è Noetheriano (risp. Artiniano) come R -modulo sse M è Noetheriano (risp. Artiniano) come R/I -modulo.

Corollario 195. J ideale di R . R/J è un R -modulo Noetheriano (risp. Artiniano) sse R/J è un anello Noetheriano (risp. Artiniano).

Dimostrazione. $\text{Ann}_R(R/J) = J$

■

Teorema 196. Sia M un R -modulo. Se esistono $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_t$ ideali massimali di R tali che

$$\mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_t \cdot M = \{0_M\}$$

allora M è Noetheriano sse M è Artiniano.

Dimostrazione. Si dimostra per induzione su t .

- Pass base: Se $t = 1$ allora esiste \mathcal{M} ideale massimale di R tale che $\mathcal{M} \cdot M = \{0_M\}$. Allora $\mathcal{M} \subseteq \text{Ann}(M)$.

M è Noetheriano (risp. Artiniano) come R -modulo sse M è Noetheriano (risp. Artiniano) come R/\mathcal{M} -modulo.

Ma R/\mathcal{M} è un campo, e quindi M è Noetheriano come R/\mathcal{M} -modulo sse M è Artiniano come R/\mathcal{M} -modulo.

- Ipotesi induttiva: Considero $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_t$ ideali massimali di M tali per cui vale l'ipotesi del teorema. Considero inoltre la seguente SEC:

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_t \cdot M \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} \frac{M}{\mathcal{M}_t \cdot M} \longrightarrow 0$$

Pertanto M è Noetheriano (risp. Artiniano) sse $\mathcal{M}_t \cdot M$ e $M/(\mathcal{M}_t \cdot M)$ sono Noetheriani (risp. Artiniani) come R -moduli per il Corollario 191. (★)

Quindi, siccome $\mathcal{M}_t \subseteq \text{Ann}(M/\mathcal{M}_t \cdot M)$, per il passo base si ottiene che $M/\mathcal{M}_t \cdot M$ è Noetheriano sse $M/\mathcal{M}_t \cdot M$ è Artiniano. (★★)

Inoltre, per l' R -modulo $\mathcal{M}_t \cdot M$ vale

$$\mathcal{M}_1 \cdot \mathcal{M}_2 \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_{t-1} \cdot (\mathcal{M}_t \cdot M) = \{0_M\}$$

e quindi per ipotesi induttiva $\mathcal{M}_t \cdot M$ è Noetheriano sse $\mathcal{M}_t \cdot M$ è Artiniano. (★★★)

Quindi, se M è Noetheriano allora per (★)

- $\mathcal{M}_t \cdot M$ è Noetheriano, e quindi per $(\star\star\star)$ è Artiniano.
- $M/\mathcal{M}_t M$ è Noetheriano e quindi per $(\star\star)$ è Artiniano.

Siccome $\mathcal{M}_t M$ e $M/\mathcal{M}_t M$ sono Artiniani, allora per (\star) si ha che M è Artiniano.

Quindi, se M è Artiniano allora per (\star)

- $\mathcal{M}_t \cdot M$ è Artiniano, e quindi per $(\star\star\star)$ è Noetheriano.
- $M/\mathcal{M}_t M$ è Artiniano e quindi per $(\star\star)$ è Noetheriano.

Siccome $\mathcal{M}_t M$ e $M/\mathcal{M}_t M$ sono Noetheriani, allora per (\star) si ha che M è Noetheriano. ■

Domanda: com'è fatto un modulo sia Noetheriano che Artiniano?

Definizione 197. Sia M un R -modulo. M si dice semplice se $M \neq 0$ e gli unici sottomoduli di M sono M e $\{0\}$.

Lemma 198. Sia M un R -modulo. M è semplice sse $M \cong R/\mathcal{M}$ con \mathcal{M} ideale massimale.

Dimostrazione. (\Leftarrow): esercizio.

(\Rightarrow): Siccome M è semplice allora $M \neq \emptyset$, dunque esiste $x \in M \setminus \{0_M\}$.

$$0 \neq x \cdot R \subseteq M \implies x \cdot R = M.$$

Quindi M è ciclico e quindi (per l'esercizio seguente) $M \cong R/I$ per I ideale di R .

Ma M ha solo i sottomoduli M e $\{0\}$, e quindi R/I è un campo (ovvero I massimale). ■

Esercizio: M è ciclico sse $M \cong R/I$ per I ideale di R .

Definizione 199. Sia M un R -modulo. Una catena stretta di M è

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$$

con M_i sottomoduli di M . La catena ha lunghezza n .

Per convenzione la catena stretta del modulo 0 ha lunghezza 0.

Definizione 200. Una catena stretta è una serie di composizione se M_i/M_{i-1} è semplice.

Osservazione. Cosa significa la richiesta che M_i/M_{i+1} sia semplice?

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{i-1} \subset M_i \subset \cdots \subset M_n = M.$$

È possibile inserire un sottomodulo L di M : $M_{i-1} \subset L \subset M_i$ in modo da avere una catena stretta? Se così fosse:

$$0 = M_{i-1}/M_{i-1} \subset L/M_{i-1} \subset M_i/M_{i-1}$$

si ha che L/M_{i-1} è sottomodulo proprio di M_i/M_{i-1} , e quindi M_i/M_{i-1} non è semplice.

Quindi dire che la catena stretta è serie di composizione significa che non è possibile aggiungere ulteriori sottomoduli e ottenere ancora una catena stretta.

1090.16 Lezione 15 - <2025-10-28 Mar>

Teorema 201. Sia M un R -modulo, e supponiamo che M abbia una serie di composizione di lunghezza n .

1. Ogni catena stretta di sottomoduli di M ha lunghezza $\leq n$.
2. Ogni serie di composizione di M ha lunghezza n .
3. Ogni catena stretta di sottomoduli di M di lunghezza $n' < n$ si può estendere ad una serie di composizione.
4. Ogni catena stretta di sottomoduli di M di lunghezza n è una serie di composizione.

Definizione 202. Per ogni R -modulo M , si definisce:

$$\ell(M) := \begin{cases} +\infty, & \text{se } M \text{ non ha una} \\ & \text{serie di composizioni;} \\ \min \{\text{lunghezze delle serie di composizioni di } M\}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Lemma 203. Sia M un R -modulo tale che $\ell(M) < \infty$. Se $L \subsetneq M$ sottomodulo, allora $\ell(L) < \ell(M)$.

Dimostrazione. Detto $t := \ell(M)$, esiste una serie di composizione

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{t-1} \subset M_t = M$$

con M_i/M_{i-1} semplice.

Definendo $L_i := L \cap M_i$ si ottiene

$$0 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_{t-1} \subseteq L_t = L$$

Si può considerare

$$L_i \xrightarrow{j_i} M_i \xrightarrow{\pi} M_i/M_{i-1}$$

e in particolare, se $\varphi_i := \pi \circ j_i$

$$\ker(\varphi_i) = L_i \cap M_{i-1} = L \cap M_i \cap M_{i-1} = L_{i-1}$$

dove l'ultima uguaglianza è data da $M_i \supset M_{i-1}$.

Per il primo teorema di isomorfismo

$$L_i/L_{i-1} \cong \varphi_i[M_i/M_{i-1}]$$

e φ_i è isomorfismo tra L_i/L_{i-1} e $\varphi_i[M_i/M_{i-1}] \subseteq M_i/M_{i-1}$ sottomodulo.

In particolare L_i/L_{i-1} è isomorfo ad un sottomodulo del modulo semplice M_i/M_{i-1} : ci sono solo due possibilità:

- $L_i/L_{i-1} \cong 0$: allora $L_{i-1} = L_i$;
- $L_i/L_{i-1} \cong M_i/M_{i-1}$: quindi L_i/L_{i-1} è semplice.

Tornando alla catena

$$0 = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \cdots \subseteq L_{t-1} \subseteq L_t = L$$

per ottenere una catena stretta: nei casi in cui $L_i/L_{i-1} \cong 0$, tolgo uno di questi sottomoduli dalla catena, ottenendo solo inclusioni strette:

$$0 = L'_0 \subset L'_1 \subset \cdots \subset L'_{t'} = L$$

tale che L'_i/L'_{i-1} è semplice. Questa è una serie di composizione per L , tale che $t' \leq t$. Pertanto $\ell(L) < +\infty$.

Se per assurdo si avesse $t' = t$, allora non si è cancellato nessun L_i , ed in particolare

$$L_1/0 \cong M_1/0 \implies L_1 = M_1.$$

Pertanto per ogni i si ottiene $L_i = M_i$ ed in particolare $L_t = M_t$ (ovvero $L = M$). Assurdo perché $L \supsetneq M$ per ipotesi.

Pertanto

$$\ell(L) \leq t' < t = \ell(M) \implies \ell(L) < \ell(M). \quad \blacksquare$$

Dimostrazione. (del Teorema 201).

1. Sia $0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_r = M$ catena stretta. Siccome $M'_i \subset M$ è sottomodulo proprio di M allora, per il Lemma 203 si ottiene

$$0 = \ell(M'_0) < \ell(M'_1) < \cdots < \ell(M'_r) = \ell(M) \leq n$$

e pertanto $r \leq \ell(M) \leq n$.

Una catena stretta di sottomoduli di M ha al massimo lunghezza n .

2. Supponiamo che M abbia una serie di composizione la cui lunghezza è n_1 . In particolare, questa serie di composizione è una catena stretta. Per il punto 1.

$$n_1 \leq \ell(M) \leq n$$

Quindi $n_1 = \ell(M)$ per ogni serie di composizione di M , ed in particolare anche $n = \ell(M)$.

3. Considero una catena stretta di sottomoduli di M , di lunghezza $t \leq \ell(M)$.

- Se $t < \ell(M)$, la catena stretta non può essere una serie di composizione (per il punto 2.). Pertanto esistono due moduli consecutivi nella catena il cui quoziente non è semplice. Usando i sottomoduli non banali di questo quoziente, riesco a inserire un modulo nella catena stretta.

Estendo di una inclusione la catena.

- Se $t = \ell(M)$, per 1. non è possibile fare catene strette di sottomoduli di M di lunghezza $> \ell(M)$. Pertanto tutti i quozienti della catena sono semplici, perché altrimenti sarebbe possibile “allungarla”.

Quindi la catena stretta è una catena di composizione. Si è quindi dimostrato anche il punto 4. ■

Definizione 204. *Se un R -modulo M ha una serie di composizione allora si dice che M ha lunghezza finita, e $\ell(M)$ è la lunghezza di M .*

Teorema 205. Sia M un R -modulo. M ha lunghezza finita sse M è sia Noetheriano che Artiniano.

Dimostrazione. (\Rightarrow): sia $n := \ell(M) < +\infty$.

Si consideri una catena ascendente di sottomoduli di M

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_{i-1} \subseteq M_i \subseteq \dots$$

Se questa non è stazionaria, sarebbe possibile estrarre una catena stretta di sottomoduli di M di lunghezza infinita. Assurdo per il Teorema 201.

Si consideri una catena discendente di sottomoduli di M

$$M \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_{i-1} \supseteq M_i \supseteq \dots$$

Se questa non è stazionaria, sarebbe possibile estrarre una catena stretta di sottomoduli di M di lunghezza infinita. Assurdo per il Teorema 201.

(\Leftarrow): Sia M Noetheriano e Artiniano.

Se $M = 0$ allora $\ell(M) = 0$.

Supponiamo quindi $M \neq 0$. Sia

$$S := \{\text{sottomoduli propri di } M\}.$$

Sicuramente $S \neq \emptyset$, in quanto $\{0\} \in S$.

M è Noetheriano. Per la condizione massimale, sia N_1 un elemento massimale di S .

- Se $N_1 = 0$, allora M è semplice: $0 \subset M$ è serie di composizione.
- Se $N_1 \neq 0$, sia

$$S_1 := \{\text{sottomoduli propri di } N_1\} \neq \emptyset.$$

e dunque esiste un elemento massimale di S_1 : N_2 .

Inoltre M/N_1 e N_1/N_2 sono entrambi semplici^[334].

Iterando la costruzione di N_1 e N_2 , se ad un certo punto ottengo $N_t = 0$ ho finito:

$$M \supset N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_t = 0$$

è serie di composizione.

È possibile che la costruzione continui senza avere $N_t = 0$? No, perché quella ottenuta sarebbe una catena discendente non stazionaria. Assurdo perché M è Artiniano. ■

Esempio 206. Considero $M = \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ uno \mathbb{Z} -modulo.

Si consideri S :

$$S = \{\text{sottomoduli propri di } \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}\}$$

in corrispondenza 1 : 1 con

$$\{\text{sottomoduli propri di } \mathbb{Z} \text{ che contengono } 120\mathbb{Z}\}.$$

$2\mathbb{Z}$ è sottomodulo proprio di \mathbb{Z} che contiene $120\mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z}$ è ideale massimale in \mathbb{Z} ? Sì.

$$\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 2\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 6\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 30\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 60\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 0.$$

Un'altra serie di composizione è

$$\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 5\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 15\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 30\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 60\mathbb{Z}/120\mathbb{Z} \supset 0.$$

Definizione 207. Sia M un \mathbb{R} -modulo tale che $\ell(M) < +\infty$. Sia

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M$$

una serie di composizione. La famiglia

$$\{M_i/M_{i-1}\}_{i=1,\dots,t}.$$

si dice famiglia dei fattori di composizione della serie di composizione.

Due serie di composizione sono isomorfe se le loro famiglie dei fattori di composizione sono uguali (a meno di isomorfismo di moduli).

Osservazione. Due serie di composizione di un \mathbb{R} -modulo M :

$$\begin{aligned} 0 &= M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M \\ 0 &= M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_t = M \end{aligned}$$

sono isomorfe se esiste una permutazione $\sigma \in S_t$ tale che

$$\forall i = 1, \dots, t : \quad M_i/M_{i-1} \cong M_{\sigma(i)}/M_{\sigma(i)-1}.$$

Teorema 208. (Jordan-Holder). Sia M un R -modulo, $\ell(M) < +\infty$. Allora ogni due serie di composizioni di M sono isomorfe.

Lemma 209. Sia M un R -modulo, $L \neq L'$ due sottomoduli propri di M tali che

$$M/L \quad M/L'$$

sono semplici. Allora

$$M/L \cong L'/L \cap L' \quad M/L' \cong L/L \cap L'$$

Dimostrazione. Dimostro che $L \subsetneq L + L'$. Vale sempre $L \subseteq L + L'$.

Se per assurdo $L = L + L'$, siccome $L \neq L'$, allora

$$L' \subsetneq L + L' = L \subset M.$$

Quozientando per L' :

$$0 \subset L/L' \subset M/L'$$

con M/L' semplice. Assurdo.

Quindi $L \subset L + L' \subseteq M$.

- Se $L + L' \subset M$, allora $\emptyset \neq (L + L')/L' \subset M/L'$ semplice. Assurdo

In definitiva, la situazione è $L \subset L + L' = M$ e pertanto

$$M/L \cong \frac{L + L'}{L} \cong \frac{L'}{L \cap L'}$$

per il terzo teorema di isomorfismo.

Ripetendo tutto scambiando L e L' si ottiene $M/L' \cong L/L \cap L'$. ■

Dimostrazione. (del Teorema 208). $M = 0$ ha un'unica serie di composizione. Quindi si pone $M \neq \emptyset$.

Si dimostra per induzione su $\ell(M)$.

- Passo base: se $\ell(M) = 1$ allora $0 \subset M$ è l'unica serie di composizione fattibile.
- Passo induttivo: supponiamo il teorema vero per moduli di lunghezza finita per moduli di lunghezza finita $< \ell(M) =: t$.

Fisso due serie di composizioni per M :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M \tag{15}$$

$$0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_t = M \tag{16}$$

Supponiamo che $M_{t-1} = M'_{t-1}$. Questo è un modulo di lunghezza finita $< \ell(M)$, e pertanto vale l'ipotesi induttiva: le serie di composizione sono isomorfe:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_{t-1}$$

$$0 = M'_0 \subset M'_1 \subset \cdots \subset M'_{t-1}$$

Riaggiungendo al fondo $M_t = M'_t = M$ ho ancora isomorfismo:

$$M_t/M_{t-1} = M'_t/M'_{t-1}$$

Se invece $M_{t-1} \neq M'_{t-1}$, allora chiamo $L := M_{t-1} \cap M'_{t-1}$. Per il Lemma 209

$$M_t/M_{t-1} \cong M'_{t-1}/L \quad M'_t/M'_{t-1} \cong M_{t-1}/L$$

- Se $L = 0$ allora $M_t/M_{t-1} \cong M'_{t-1}$ e $M'_t/M'_{t-1} \cong M_{t-1}$ moduli semplici. Pertanto le uniche serie di composizioni possibili sono

$$\begin{aligned} 0 &\subset M_{t-1} \subset M \\ 0 &\subset M'_{t-1} \subset M. \end{aligned}$$

Le due famiglie dei fattori di composizioni sono uguali a meno di isomorfismo.

- Se $L \neq 0$ allora

$$0 \subset L \subset M_{t-1} \subset M_t = M$$

è una catena stretta, con M_t/M_{t-1} e M_{t-1}/L semplici (per il Lemma 209)

È pertanto possibile inserire, “tra” $0 \subseteq L, t - 2^{[335]}$ sottomoduli propri di L in modo da avere una serie di composizione di M :

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{t-2} = L \subset M_{t-1} \subset M_t = M \quad (17)$$

Ragionando con la serie di composizione (16) si ottiene la serie di composizione:

$$0 = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_{t-2} = L \subset M'_{t-1} \subset M'_t = M \quad (18)$$

Le serie (17) e (18) sono isomorfe.

Per induzione si dimostra che la serie (17) è isomorfa alla serie (15) e che la serie (18) è isomorfa alla serie (16). ■

1090.17 Lezione 16 - <2025-10-31 Ven>

Lemma 210. Sia M un R -modulo, $n := \ell(M) < +\infty$. Sia N un sottomodulo di M . Allora

$$\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N).$$

Dimostrazione. 1. $\ell(N) < +\infty$ e $\ell(M/N) < +\infty$: se M è sia Artiniano che Noetheriano, lo stesso vale per N e per M/N .

2. $\ell(M) = \ell(N) + \ell(M/N)$:

- Se $N = 0$ allora $\ell(N) = 0$, e $M/0 \cong M$: la formula è banalmente vera.
- Se $N = M$, allora $M/N \cong 0$ e la formula è vera
- Se $N \neq 0, M$ allora

$$0 \subset N \subset M$$

catena stretta di sottomoduli di M . A questa è possibile aggiungere opportunamente $n - 2$ sottomoduli di M e ottenere una serie di composizione di M :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset \underbrace{M_t = N}_{\text{serie di comp. per } N} \subset M_{t+1} \subset \cdots \subset M_n = M$$

e dunque $\ell(N) = t$. Quozientando ora la seconda parte della catena rispetto a N :

$$0 \cong N/N = M_t/N \subset M_{t+1}/N \subset \cdots \subset M_n/N = M/N$$

catena stretta. È anche una serie di composizione di M/N , in quanto per il terzo teorema di isomorfismo

$$(M_{i+1}/N)/(M_i/N) \cong M_{i+1}/M_i$$

che è semplice.

Questa serie di composizione ha lunghezza $n - t$, e pertanto

$$\ell(M/N) = n - t = \ell(M) - \ell(N).$$

■

Teorema 211. Consideriamo $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ SEC di R -moduli.

1. $\ell(M) < +\infty$ sse $\ell(L) < +\infty$ e $\ell(N) < +\infty$;
2. se M, N, L hanno lunghezza finita, allora

$$\ell(M) = \ell(L) + \ell(N).$$

Dimostrazione. 1. Per esercizio.

2. Si consideri la SEC

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0.$$

Allora $L \cong \text{Im}(f) = \ker(g)$, e $M/\ker g \cong N$. Applicando il Lemma 210 a $\ker(g) \subset M$:

$$\ell(M) = \ell(\ker g) + \ell(M/\ker g) = \ell(L) + \ell(N).$$

■

Proposizione 212. Sia V uno spazio vettoriale su campo \mathbb{K} (ovvero un \mathbb{K} -modulo con \mathbb{K} campo).

V ha dimensione finita come \mathbb{K} -spazio vettoriale sse V ha lunghezza finita come \mathbb{K} -modulo.

Inoltre

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \ell(V)$$

Dimostrazione. La doppia implicazione segue banalmente da un risultato di qualche lezione fa.

Resta da dimostrare che $\dim_{\mathbb{K}}(V) = \ell(V)$. Per induzione su $t := \dim_{\mathbb{K}}(V)$.

- Se $t = 0$ allora $V = 0$ come \mathbb{K} -spazio vettoriale, ovvero è il \mathbb{K} -modulo nullo: segue che $\ell(V) = 0$.
- Se $t = 1$ allora gli unici sottospazi vettoriali di V sono 0 e V . Pertanto gli unici sottomoduli di V sono 0 e V (e quindi V è un \mathbb{K} -modulo semplice). L'unica serie di composizione è

$$0 \subset V.$$

Pertanto $\ell(V) = 1$.

- Passo induttivo: la tesi è vera per spazi vettoriali di dimensione $< t$ (con $t \geq 2$).

Sia $v \in V \setminus \{0\}$ (che esiste perché $t > 0$). Sia U il sottospazio vettoriale di V generato da v . Allora $\dim_{\mathbb{K}}(U) = 1 = \ell(U)$ per ipotesi induttiva. Si può considerare quindi la SEC

$$0 \longrightarrow U \xhookrightarrow{i} V \xrightarrow{\pi} V/U \longrightarrow 0$$

e pertanto per il Teorema di nullità + rango

$$\dim_{\mathbb{K}}(V) = \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(U)}_{=1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{K}}(V/U)}_{t-1}$$

e per ipotesi induttiva questo è

$$\dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(V/U) = \ell(U) + \ell(V/U) = \ell(V)$$

dove l'ultima uguaglianza è per il Lemma 210. ■

1090.17.1 Anelli Noetheriani

Definizione 213. Un anello A è Noetheriano se vale una delle seguenti affermazioni equivalenti:

1. vale ACC per gli ideali di A ;
2. vale MAX COND sui sottoinsiemi non vuoti di ideali di A ;
3. ogni ideale di A è finitamente generato.

Osservazione. In un anello Noetheriano ogni ideale possiede una decomposizione primaria.

Definizione 214. Sia \mathcal{A} un ideale di A . \mathcal{A} è irriducibile se $\mathcal{A} \neq A$ e non è intersezione di due ideali di A che lo contengono propriamente.

Proposizione 215. Sia A anello Noetheriano. Allora ogni ideale \mathcal{A} di A è intersezione di un numero finito di ideali irriducibili.

Dimostrazione. Sia Σ l'insieme degli ideali di A propri che non siano intersezione di un numero finito di ideali irriducibili.

Per assurdo supponiamo che $\Sigma \neq \emptyset$. Per MAX COND esiste un elemento massimale \mathcal{A} in Σ .

\mathcal{A} non è irriducibile, poiché altrimenti sarebbe intersezione di un numero finito ($=1$) di ideali irriducibili (ma $\mathcal{A} \in \Sigma$). Pertanto esistono due $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ ideali di A tali che

$$\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 \quad \wedge \quad \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1 \wedge \mathcal{A} \subset \mathcal{B}_2.$$

Pertanto $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \notin \Sigma$, per massimalità di \mathcal{A} .

Quindi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sono intersezione di un numero finito di irriducibili. Pertanto anche \mathcal{A} lo è. Assurdo.

Quindi $\Sigma = \emptyset$. ■

Proposizione 216. Sia A Noetheriano e \mathcal{A} ideale irriducibile. Allora \mathcal{A} è primario.

Dimostrazione. Se \mathcal{A} è irriducibile, allora \mathcal{A} è proprio.

Supponiamo di avere $a, b \in A$ tale che $a \cdot b \in \mathcal{A}$ irriducibile. WLOG sia $b \notin \mathcal{A}$. Dimostro che $a \in \sqrt{\mathcal{A}}$.

Si consideri il *colon ideal*:

$$(\mathcal{A} : a) = \{c \in A \mid ac \in \mathcal{A}\} \supseteq \mathcal{A}$$

per cui vale la catena

$$(\mathcal{A} : a) \subseteq (\mathcal{A} : a^2) \subseteq \cdots \subseteq (\mathcal{A} : a^j) \subseteq \dots$$

Questa è una AC di ideali, e pertanto è stazionaria (A Noetheriano quindi vale ACC). Esiste quindi $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$(\mathcal{A} : a^n) = (\mathcal{A} : a^{n+t}), \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Dimostro che $\mathcal{A} = (\mathcal{A} + (a^n)) \cap (\mathcal{A} + (b))$.

(\subseteq): ovvio.

(\supseteq): Sia $r \in (\mathcal{A} + (a^n)) \cap (\mathcal{A} + (b))$. Allora esistono $x, y \in \mathcal{A}$ e $l, m \in A$ tali che

$$\begin{aligned} r &= x + l \cdot a^n = y + m \cdot b \\ ra &= x \cdot a + l \cdot a^{n+1} = ya + m \cdot a \cdot b \\ l \cdot a^{n+1} &= ya + mab - xa \end{aligned}$$

Siccome $ab \in \mathcal{A}$, tutti i termini della somma sono in \mathcal{A} , e dunque $l \cdot a^{n+1} \in \mathcal{A}$, ovvero

$$l \in (\mathcal{A} : a^{n+1}) = (\mathcal{A} : a^n) \implies l \cdot a^n \in \mathcal{A}.$$

Siccome $r = x + l \cdot a^n$ è somma di elementi di \mathcal{A} , allora $r \in \mathcal{A}$.

Siccome \mathcal{A} è irriducibile, allora deve valere una delle seguenti:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} + (a^n) \quad \vee \quad \mathcal{A} = \mathcal{A} + (b)$$

Ma siccome $b \notin \mathcal{A}$, si può avere soltanto la seguente uguaglianza: $\mathcal{A} = \mathcal{A} + (a^n)$, ovvero $a^n \in \mathcal{A}$.

Quindi \mathcal{A} è primario. ■

Corollario 217. Sia A Noetheriano. Allora ogni ideale proprio possiede una decomposizione primaria.

Esempio 218. Un esempio di anello Noetheriano sono gli anelli polinomiali: $A[X_1, \dots, X_n]$ con A anello commutativo con unità Noetheriano.

Dunque in $A[X_1, \dots, X_n]$ ogni ideale è finitamente generato, e quindi ogni ideale proprio di $A[X_1, \dots, X_n]$ ha una decomposizione primaria.

Gli ideali per cui è “facile” trovare una decomposizione primaria sono gli ideali monomiali:

- un monomio è $X_1^{a_1} \dots X_n^{a_n}$ con $a_i \in \mathbb{N}$;
- un ideale è monomiale se è possibile generarlo con un insieme di monomi.

MANCA UN LEMMA

Lemma 219. Sia $(X_{i_1}^{a_1}, \dots, X_{i_l}^{a_l}) \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ^[336]. Questo ideale è primario e

$$\sqrt{(X_{i_1}^{a_1}, \dots, X_{i_l}^{a_l})} = (X_{i_1}, \dots, X_{i_l}).$$

Lemma 220. Ogni ideale monomiale è scritto “in modo unico” come intersezione di ideali monomiali generati da potenze pure. ■

Dimostrazione. BOH

Esempio 221. Sia \mathbb{K} un campo, si consideri l’anello Noetheriano $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Sia

$$\mathcal{A} = (X_1^3, X_2^3, X_1^2 X_3^2, X_1 X_2 X_3^2, X_2^2 X_3^2).$$

Allora, considerando $(X_1^3, X_2^3, \textcolor{red}{X}_1^2 \textcolor{red}{X}_3^2, X_1 X_2 X_3^2, X_2^2 X_3^2)$

$$\mathcal{A} = (X_1^3, X_2^3, \textcolor{red}{X}_1^2, X_1 X_2 X_3^2, X_2^2 X_3^2) \cap (X_1^3, X_2^3, \textcolor{red}{X}_3^2, X_1 X_2 X_3^2, X_2^2 X_3^2).$$

Iterando questo procedimento, si ottiene che

$$\mathcal{A} = (X_1^3, X_2^3, X_3^2) \cap (X_1^2, X_2) \cap (X_1, X_2^2).$$

E questi sono ideali irriducibili (non dimostrato) e pertanto primari.

Questa decomposizione però non è minimale. Per ottenerne una minimale bisogna intersecare i due con stesso radicale:

$$\mathcal{A} = (X_1^3, X_2^3, X_3^2) \cap (X_1^2, X_1 X_2, X_2^2).$$

Questi sono tutti primari, ma non irriducibili.

1090.18 Lezione 17 - <2025-11-03 Lun>

Lemma 222. Siano A, B anelli commutativi con unità, e sia $f : A \rightarrow B$ morfismo suriettivo. Se A è Noetheriano allora B è Noetheriano.

Dimostrazione. Dal primo teorema di isomorfismo degli anelli sappiamo che:

$$A / \ker f \cong B$$

La tesi si riduce quindi a dimostrare che $A / \ker f$ è un anello noetheriano.

Dimostro che se I è un ideale di A noetheriano, allora A/I è noetheriano (come anello). Prendo allora una catena ascendente (AC) di ideali di A/I . Ricordo che gli ideali del quoziente sono della forma I_j/I dove $I_j \supseteq I$. Vale:

$$I_1/I \subseteq I_2/I \subseteq \dots \subseteq I_\ell/I \subseteq \dots \quad \forall j \text{ t.c. } I_j \supseteq I$$

Da cui, passando agli ideali in A :

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \subseteq I_\ell \subseteq \dots$$

Questa è una catena ascendente di ideali di A . Poiché A è noetheriano, la catena è stazionaria:

$$\exists n_0 \text{ t.c. } I_{n_0} = I_{n_0+j} \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Di conseguenza, anche la catena ascendente di ideali in A/I è stazionaria e quindi $A/\ker f$ è noetheriano e quindi anche B è un anello noetheriano. ■

Corollario 223. Se A è Noetheriano e I è ideale di A , allora A/I è anello Noetheriano.

Lemma 224. Sia A Noetheriano, S parte moltiplicativa di A .

Allora $S^{-1}A$ è Noetheriano.

Dimostrazione. Prendo una catena ascendente di ideali di $S^{-1}A$:

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_\ell \subseteq \dots \quad \text{con } I_j \text{ ideali di } S^{-1}A$$

Considero il morfismo canonico di localizzazione $f : A \rightarrow S^{-1}A$ definito da $a \mapsto \frac{a}{1}$.

- Se I è un ideale di A , allora l'estensione $(f(I)) \subseteq S^{-1}A$ è un ideale indicato con I^e (esteso).
- Se invece I è un ideale di $S^{-1}A$, allora la contrazione $f^{-1}(I) \subseteq A$ è un ideale indicato con I^c (contratto).

(Nota: In generale, se ho un morfismo di anelli $f : A \rightarrow B$, se $a \subseteq A \rightarrow a^{ec} \supseteq a$, e se $b \subseteq B \rightarrow b^{ce} \subseteq b$).

Ma: se $f : A \rightarrow S^{-1}A$, allora tutto funziona bene estendendo e contraendo ideali. In particolare vale:

$$I^{ce} = I \quad \text{in } S^{-1}A$$

Dalla catena ascendente iniziale in $S^{-1}A$, contraggo ogni ideale in A :

$$I_1^c \subseteq I_2^c \subseteq \cdots \subseteq I_\ell^c \subseteq \dots$$

Questa è una catena ascendente di ideali di A . Poiché A è noetheriano, questa catena è stazionaria. Allora, estendendo nuovamente:

$$I_1^{ce} = I_1 \subseteq I_2^{ce} = I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_\ell^{ce} = I_\ell = I_{\ell+1}^{ce} = \dots$$

Quindi $I_\ell = I_{\ell+1}$. La catena iniziale è stazionaria. ■

Corollario 225. Sia A Noetheriano, \mathcal{P} ideale primo di A . Allora $A_{\mathcal{P}}$ è Noetheriano.

Lemma 226. Siano, A, B anelli commutativi con unità, $f : A \rightarrow B$ morfismo e A Noetheriano.

Se B è un A -modulo^[337] finitamente generato, allora B è un anello Noetheriano.

Dimostrazione. Sia B f.g. come A -modulo:

$$\exists b_1, \dots, b_\ell \in B \text{ t.c. } B = A \cdot b_1 + \cdots + A \cdot b_\ell$$

Da lezione 14 sappiamo che: “Se A è un anello noetheriano e M è un A -modulo f.g., allora M è un A -modulo noetheriano.”

Quindi B è un A -modulo noetheriano. Ogni ideale di B (inteso come anello) è anche un A -sottomodulo. Allora: se prendo una catena ascendente di ideali di B , questa è anche una catena ascendente di A -sottomoduli di B (A -modulo). Allora:

$$\text{AC è stazionaria} \implies B \text{ è noetheriano.}$$

■

1090.18.1 Teorema della base di Hilbert

Lemma 227. Sia A anello commutativo con unità e siano $I \subseteq J$ ideali di $A[x]$. Definito, per ogni $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}_i(I) := \left\{ a \in A \mid \exists a_{i-1}, \dots, a_0 \in A \ (a x^i + a_{i-1} x^{i-1} + \cdots + a_0 \in I) \right\}$$

valgono le seguenti affermazioni:

1. $\forall i \in \mathbb{N}: \mathcal{L}_i(I)$ ideali di A , e $\mathcal{L}_i(I) \subseteq \mathcal{L}_i(J)$;
2. $\mathcal{L}_0(I) \subseteq \mathcal{L}_1(I) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}_t(I) \subseteq \dots$;
3. Se $\mathcal{L}_n(I) = \mathcal{L}_n(J)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ allora $I = J$.

Dimostrazione.

1. Per esercizio.
2. Sia $a \in L_n(I)$: \exists un polinomio di I che ha grado n e il cui coefficiente direttore è a :

$$f = ax^n + \cdots \in I \quad (\text{termini di grado } < n)$$

$a \in L_{n+1}(I)$? Considero $x \cdot f \in I$, ha grado $n+1$ e il suo coefficiente direttore è a . ✓

3. $\forall n \in \mathbb{N}: L_n(I) = L_n(J) \rightarrow I = J$. Per ipotesi $I \subseteq J$. Supponiamo $I \subsetneq J$: allora $\exists g \in J \setminus I$. Scelgo $g \in J \setminus I$ di grado minimo, sia $\deg(g) = n$:

$$g = g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \cdots + g_0 \in J \wedge g_n \neq 0$$

Per ipotesi $L_n(I) = L_n(J)$. Quindi $\exists h \in I$ con $\deg(h) = n$ e stesso coefficiente direttore di g :

$$h = h_n x^n + h_{n-1} x^{n-1} + \cdots + h_0$$

Allora $g - h$ è un polinomio di grado $< n$. Vale $g - h \in I$? Se $g - h \in I$, allora $g = (g - h) + h \in I$ (poiché $h \in I$). ASSURDO. Quindi $g - h \notin I$. Ma $g - h \in J \setminus I$, e g aveva grado minimo in $J \setminus I$. Ma $\deg(g - h) < \deg(g)$. ASSURDO. ■

Teorema 228. (Teorema della base di Hilbert - *Basissatz*).

Sia A Noetheriano. Allora $A[X]$ è Noetheriano.

Dimostrazione. Considero una catena ascendente di ideali in $A[x]$:

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_\ell \subseteq \cdots$$

Considero le catene dei coefficienti direttori:

$$L_0(I_0) \subseteq L_1(I_1) \subseteq \cdots \subseteq L_i(I_\ell) \subseteq \cdots$$

o anche, fissando j :

$$L_0(I_j) \subseteq L_1(I_j) \subseteq \cdots \subseteq L_i(I_j) \subseteq \cdots \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Cerco di dimostrare che: $\forall n \in \mathbb{N} : L_n(I_j) = L_n(I_{j+1})$ per un qualche j . Studio:

$$S = \{L_i(I_j) \mid i, j \in \mathbb{N}\}$$

Questa è una famiglia di ideali di A non vuota. Ora: A è noetheriano; uso la condizione massimale: esiste un elemento massimale in S , sia $L_p(I_q)$.

Allora $\forall i > p, \forall j > q : L_i(I_j) = L_p(I_q)$. Devo ancora vedere cosa capita se $i = 0, \dots, p-1$.

Considero le colonne:

$$\begin{aligned} L_0(I_1) &\subseteq L_0(I_2) \subseteq L_0(I_3) \subseteq \cdots \subseteq L_0(I_\ell) \subseteq \cdots \\ &\vdots \\ L_{p-1}(I_1) &\subseteq L_{p-1}(I_2) \subseteq \cdots \subseteq L_{p-1}(I_\ell) \subseteq \cdots \end{aligned}$$

Queste sono AC di ideali di A , ciascuna è stazionaria. Per un q' abbastanza grande, sono tutte stazionarie. Da q' in poi:

$$L_i(I_{q'}) = L_i(I_j) \quad \forall j \geq q', \forall i = 0, \dots, p-1$$

Sia $Q = \max\{q, q'\}$. Vale che $\forall i \in \mathbb{N} \rightarrow L_i(I_Q) = L_i(I_j) \quad \forall j \geq Q$. Per il lemma sopra (punto 3):

$$I_j = I_Q \quad \forall j \geq Q$$

Quindi la AC iniziale di ideali in $A[x]$ è stazionaria, e $A[x]$ è noetheriano. ■

Corollario 229. Sia A Noetheriano. Allora $A[X_1, \dots, X_n]$ è Noetheriano.

Dimostrazione. Si ha che

$$A[X_1, \dots, X_n] \cong (A[X_1, \dots, X_{n-1}])[X_n]$$

e pertanto applicando il Teorema 228 n volte si ottiene la tesi. ■

Esempio 230. Se si considera un anello polinomiale con ∞ indeterminate, il corollario non vale.

Sia $B = A[X_1, \dots, X_n, \dots]$ con A Noetheriano. Sia I l'ideale di B :

$$I := \{\text{polinomi con termine noto } 0\} \subseteq B.$$

I è generato da

$$I := (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$$

e pertanto non è finitamente generato. Segue che B non è Noetheriano.

A-algebre Siano A, B anelli e sia $f : A \rightarrow B$ un morfismo di anelli. Allora B è una A -algebra, ovvero B è un anello ed un A -modulo.

Detto $A' := \text{im } f \subseteq B$ sottoanello di B , allora qualsiasi $B' \subseteq B$ è una sottoalgebra se

$$A' \subseteq B'.$$

???

Questo diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ f \swarrow & & \searrow f \\ B' & \xleftarrow{i} & A' \end{array}$$

e pertanto $i : B' \rightarrow B$ è un morfismo di A -algebre.

Intersecando una famiglia di sotto A -algebre di B si ottiene una sotto A -algebra.

Sia $\Gamma \subseteq B$ un sottoinsieme e si consideri la famiglia di sotto A -algebre di B che contengono Γ . L'intersezione di questa famiglia è la sotto A -algebra generata da Γ , e si indica con $A'[\Gamma]$.

In particolare, se $\Gamma = \{\beta_1, \dots, \beta_\ell\} \subseteq B$:

$$A'[\beta_1, \dots, \beta_\ell] := A'[\Gamma] = \left\{ \sum_{i=(i_1, \dots, i_\ell) \in \Lambda} a'_i \beta_1^{i_1} \dots \beta_\ell^{i_\ell} \mid \Lambda \subseteq \mathbb{N}^\ell \text{ finito}, a'_i \in A' \right\}$$

Teorema 231. Sia A anello Noetheriano, e sia B del tipo:

$$B = A'[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$$

con $\beta_1, \dots, \beta_\ell \in B$. Allora B è Noetheriano.

Dimostrazione. B è A -algebra f.g. t.c. $f : A \rightarrow B$ e $\exists \beta_1, \dots, \beta_\ell$ t.c. $B = A'[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$. So che $A[x_1, \dots, x_\ell]$ è noetheriano. Esiste un unico morfismo di anelli:

$$g : A[x_1, \dots, x_\ell] \rightarrow B \quad \text{che estende } f, \text{ ovvero:}$$

$$g|_A = f \quad \wedge \quad g(x_i) = \beta_i$$

Il morfismo g è suriettivo? Ogni elemento in B è del tipo: $\sum_{i \in \Lambda} a'_i \beta_1^{i_1} \dots \beta_\ell^{i_\ell}$. Allora una sua controimmagine mediante g è:

$$\sum_{i \in \Lambda} a_i x_1^{i_1} \dots x_\ell^{i_\ell} \quad \text{con } a_i \in f^{-1}(a'_i)$$

Quindi g è un morfismo suriettivo di un anello noetheriano in B ; segue B è noetheriano. ■

Osservazione. Dalla costruzione di

$$g : A[X_1, \dots, X_\ell] \rightarrow B = A'[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$$

vale che

$$\frac{A[x_1, \dots, x_\ell]}{\ker g} \cong A'[\beta_1, \dots, \beta_\ell]$$

Pertanto ogni A -algebra finitamente generata è quoziente di un opportuno anello polinomiale su un suo ideale.

1090.19 Lezione 18 - <2025-11-04 Mar>

Definizione 232. Sia $A[[X]]$ l'anello delle serie formali nell'indeterminata x a coefficienti nell'anello A . Un elemento $f \in A[[X]]$ si scrive come:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \quad \text{con } a_i \in A$$

Teorema 233. (Teorema di Cohen). Sia A un anello commutativo con unità, tale che ogni suo **ideale primo** è finitamente generato (f.g.). Allora A è **noetheriano**.

Dimostrazione. Supponiamo che valga l'ipotesi (ogni primo è f.g.); per assurdo supponiamo che A **non** sia noetheriano.

- Sia:

$$\Sigma = \{I \text{ ideali di } A \mid I \text{ non è f.g.}\}$$

Poiché A non è noetheriano, esiste almeno un ideale di A non finitamente generato, quindi $\Sigma \neq \emptyset$.

Se $I \in \Sigma$, allora I non è un ideale primo (perché per ipotesi tutti i primi sono f.g.). Vale che Σ è parzialmente ordinato mediante l'inclusione. Cerco di applicare il **Lemma di Zorn**.

Considero un sottoinsieme $\Phi \subseteq \Sigma$ totalmente ordinato, sia Φ :

$$\forall I', I'' \in \Phi \implies I' \subseteq I'' \vee I'' \subseteq I'$$

(ovvero Φ è una catena di ideali).

Sia $J = \bigcup_{I \in \Phi} I$. J è un ideale perché Φ è una catena. Ci chiediamo: $J \in \Sigma$? Supponiamo che $J \notin \Sigma$: allora J sarebbe finitamente generato.

$$J = (a_1, \dots, a_\ell) \quad \text{con } a_i \in A$$

Per ogni $i = 1, \dots, \ell$, esiste $I^{(i)} \in \Phi$ tale che $a_i \in I^{(i)}$. Poiché Φ è una catena, esiste un indice h (o un ideale $I^{(h)}$) "più grande" che li contiene tutti, tale che:

$$a_i \in I^{(h)} \quad \forall i = 1, \dots, \ell$$

Allora:

$$J = (a_1, \dots, a_\ell) \subseteq I^{(h)} \subseteq J \implies J = I^{(h)}$$

Ma questo è assurdo, perché $I^{(h)} \in \Sigma$ e quindi non è f.g., mentre avevamo supposto J f.g. Di conseguenza J non è f.g., ovvero $J \in \Sigma$.

Allora J è un maggiorante in Σ della catena Φ . Posso usare il Lemma di Zorn:

$$\exists P \in \Sigma \text{ elemento massimale in } \Sigma.$$

- **Dimostro che P è primo.**

Innanzitutto, P è proprio? Poiché $A = (1)$ è f.g., $A \notin \Sigma$, quindi $P \in \Sigma$ implica che P è ideale proprio.

Supponiamo per assurdo che P **non** sia primo:

$$\exists a, b \in A \setminus P \quad \text{e} \quad a \cdot b \in P$$

Considero l'ideale $P + (a)$. Poiché $a \notin P$, vale $P \subsetneq P + (a)$. Da cui:

$$P + (a) \notin \Sigma \quad (\text{perché } P \text{ è massimale in } \Sigma)$$

Quindi $P + (a)$ è finitamente generato. Possiamo scriverlo come:

$$P + (a) = (p_1 + r_1 a, \dots, p_t + r_t a) \quad \text{con } p_i \in P, r_i \in A$$

(Nota: i generatori sono multipli di a sommati a elementi di P).

Penso adesso all'ideale quoziante:

$$K = (P : a) = \{x \in A \mid x \cdot a \in P\} \supseteq P$$

È vero che $b \in K$? Sì, perché $ab \in P$. Inoltre $b \notin P$, quindi $K \supsetneq P$ (contiene propriamente P). Per la massimalità di P in Σ , allora $K \notin \Sigma$, ovvero K è finitamente generato. Allora l'ideale $(a) \cdot K$ è f.g.

Adesso dimostro che:

$$P = (p_1, \dots, p_t) + (a) \cdot K$$

(\supseteq): So che $p_i \in P$ e quindi $(p_1, \dots, p_t) \subseteq P$. Inoltre $(a) \cdot K$ e $K = (P : a)$, per definizione $(a) \cdot K \subseteq P$. Ma allora:

$$P \supseteq (p_1, \dots, p_t) + (a) \cdot K$$

(\subseteq): Sia $r \in P$. Poiché $P \subseteq P + (a) = (p_1 + r_1 a, \dots, p_t + r_t a)$, esistono opportuni elementi c_i di A tali che:

$$r = c_1 \cdot (p_1 + r_1 a) + \dots + c_t \cdot (p_t + r_t a)$$

Riscrivendo:

$$r = \sum_{i=1}^t c_i p_i + \left(\sum_{i=1}^t c_i r_i \right) \cdot a$$

Isoliamo il termine con a :

$$\left(\sum_{i=1}^t c_i r_i \right) \cdot a = r - \sum_{i=1}^t c_i p_i$$

Osserviamo che $r \in P$ e $\sum c_i p_i \in P$, quindi il membro destro è in P . Di conseguenza:

$$\left(\sum_{i=1}^t c_i r_i \right) \cdot a \in P \implies \sum_{i=1}^t c_i r_i \in K$$

Da cui:

$$r = \underbrace{c_1 p_1 + \cdots + c_t p_t}_{\in (p_1, \dots, p_t)} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^t c_i r_i \right) a}_{\in (a)K}$$

Quindi $r \in (p_1, \dots, p_t) + (a) \cdot K$.

Allora abbiamo dimostrato che $P = (p_1, \dots, p_t) + (a) \cdot K$. Poiché K è f.g., anche $(a)K$ è f.g., e la somma di ideali f.g. è f.g. Allora P è finitamente generato.

ASSURDO: avevamo supposto $P \in \Sigma$ (non f.g.). L'assurdo deriva dall'aver supposto P non primo. Quindi P deve essere primo.

Ma per ipotesi del teorema, **ogni ideale primo di A è f.g.**. Otteniamo un ulteriore **ASSURDO** (perché $P \in \Sigma$). ■

Ma allora deve essere $\Sigma = \emptyset$, ovvero A è noetheriano.

Teorema 234. (Teorema della Base di Hilbert per Serie Formali). Sia A noetheriano, allora: $A[\![X]\!]$ è Noetheriano

Dimostrazione. Dimostro che ogni ideale primo di $A[\![X]\!]$ è f.g. (usando il Teorema di Cohen appena dimostrato).

Sia allora P ideale primo in $A[\![X]\!]$. Consideriamo il morfismo di valutazione (o termine noto):

$$\begin{aligned} h : A[\![X]\!] &\longrightarrow A \\ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i &\longmapsto a_0 \end{aligned}$$

h è un morfismo di anelli ed è suriettivo. Vale allora che $h(P)$ è un ideale di A noetheriano, e quindi $h(P)$ è finitamente generato.

Siano i generatori:

$$h(P) = (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)}) \quad \forall j = 1, \dots, t$$

E scegliamo delle controimmagini in P :

$$a_0^{(j)} \in h(P) : \exists f^{(j)} \in P \text{ t.c. } h(f^{(j)}) = a_0^{(j)}$$

Con:

$$f^{(j)} = a_0^{(j)} + \underbrace{f_1^{(j)}x + f_2^{(j)}x^2 + \dots}_{\text{termini in } x} \in P$$

Se $x \in P$: Per ogni $a_0^{(j)} \in h(P)$, possiamo scrivere $a_0^{(j)} = f^{(j)} - \sum_{i=1}^{\infty} f_i^{(j)} x^i$. Il termine della sommatoria è divisibile per x , che sta in P , quindi la sommatoria sta in P . Anche $f^{(j)} \in P$. Quindi $a_0^{(j)} \in P$ (visto come costante in $A[\![X]\!]$). Allora $(a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)}) \subseteq P$. E dato che $x \in P$:

$$P \supseteq (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)}) + (x)$$

Dimostro che vale l'uguaglianza. Sia $f \in P$:

$$f = b_0 + b_1 x + \dots$$

$b_0 \in h(P)$ e dunque $b_0 \in (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)}) \subseteq A$.

Quindi b_0 è combinazione lineare dei generatori in A , e quindi in $A[\![X]\!]$. Allora:

$$f \in (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)}) + (x) \implies P = (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)}) + (x)$$

e pertanto P è f.g.

Se $x \notin P$: Valeva $h(P) = (a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(t)})$. Ho che $\forall f \in P$:

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad \text{con } b_0 \in h(P)$$

Quindi $b_0 = b_0^{(1)} a_0^{(1)} + \dots + b_0^{(t)} a_0^{(t)}$ con $b_0^{(j)} \in A$.

Consideriamo:

$$f - \sum_{j=1}^t b_0^{(j)} f^{(j)}$$

Questa serie ha termine noto 0 (è $b_0 - b_0$). Ma allora:

$$f - \sum_{j=1}^t b_0^{(j)} f^{(j)} = x \cdot g_1 \in P \quad \text{dove } P \text{ primo}$$

So che $x \notin P$, ma dato che P è primo, deve essere $g_1 \in P$.

Quindi $g_1 \in P$ e quindi g_1 ha termine noto $b_1 \in h(P)$:

$$b_1 \in h(P) : b_1 = b_1^{(1)} a_0^{(1)} + \dots + b_1^{(t)} a_0^{(t)}$$

E allora ripeto tutto quanto fatto per f . Dopo un certo numero di ripetizioni, si ottiene:

$$f - \left(\sum_{j=1}^t \left(\sum_{i=0}^v b_i^{(j)} x^i \right) f^{(j)} \right) = x^{v+1} g_{v+1}$$

Da cui, definendo $e^{(j)} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i^{(j)} x^j$ (che sono elementi ben definiti in $A[\![X]\!]$), dimostro che:

$$f = \sum_{j=1}^t e^{(j)} f^{(j)}$$

Infatti, per ogni $v \in \mathbb{N}$:

$$f - \sum_{j=1}^t e^{(j)} f^{(j)} = x^v g_v - \left(\sum_{j=1}^t \left(\sum_{i=v}^{\infty} b_i^{(j)} x^i \right) f^{(j)} \right)$$

Tutto il termine a destra appartiene all'ideale $(x^v)A[\![X]\!]$.

$$f - \sum_{j=1}^t e^{(j)} f^{(j)} \in (x^v)A[\![X]\!] \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

Quindi:

$$f - \sum_{j=1}^t e^{(j)} f^{(j)} \in \bigcap_{v \in \mathbb{N}} (x^v) = (0) \implies f = \sum_{j=1}^t e^{(j)} f^{(j)} \implies f \in (f^{(1)}, \dots, f^{(t)}) \subseteq A[\![X]\!]$$

e pertanto $P = (f^{(1)}, \dots, f^{(t)})$ è f.g.

Segue $A[\![X]\!]$ è noetheriano. ■

1090.19.1 Sottoanelli e Noetherianità

Se ho un anello noetheriano, posso dedurre che ogni suo sottoanello è noetheriano? **NO**: in generale, A noetheriano e B sottoanello di A **non** implica B anello noetheriano!

Esempio 235. Sia $A_\infty = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n, \dots]$ con \mathbb{K} campo (anello polinomi infinite variabili). Vale che A_∞ **non** è noetheriano. Si ha che:

$$I = \{\text{polinomi con termine noto } 0\} = (x_1, \dots, x_n, \dots)$$

non è finitamente generato.

Da cui: $A_n = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow A_\infty$ è inclusione. Allora:

$$A_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

E comunque vale sempre che A_∞ è un dominio di integrità. Se si ha A_∞ dominio di integrità, allora posso studiare L campo delle frazioni di A_∞ . Dato L campo: L è sempre anello noetheriano (è $\#$ finito di ideali, solo (0) e (1) , con AC stazionarie). Ma L contiene come sottoanello A_∞ che **non** è noetheriano.

Esercizio:

- $A[x]$ noetheriano implica A noetheriano?
- $A[\![X]\!]$ noetheriano implica A noetheriano?

1090.19.2 Divisori dello Zero e Decomposizione Primaria

Definizione 236. Sia M un A -modulo. Un elemento $a \in A$ è uno **zero-divisore** di M se $\exists m \in M, m \neq 0_M$ tale che $a \cdot m = 0_M$. Indico:

$$\text{zdv}(M) = \{ \text{0-divisori su } M \} \subseteq A$$

Osservazione. Questo è simile a:

$$\text{Ann}(M) = \{ a \in A \mid a \cdot M = 0 \}$$

Osservazione. Se $M = \{0\}$, $\text{zdv}(M) = \emptyset$. Se $M \neq \{0\}$, $\text{zdv}(M) \neq \emptyset$ (infatti $0_A \in \text{zdv}(M)$).

Osservazione. Se prendo come A -modulo l'anello A : $\text{zdv}(A)$ (come anello) = $\text{zdv}(A)$ (come A -modulo).

Proposizione 237. Sia A commutativo con 1 e a ideale di A decomponibile. Allora:

$$\text{zdv}(A/a) = \bigcup_{P \in \text{Ass}(a)} P$$

(dove $\text{Ass}(a) = \{P_1, \dots, P_t\}$ sono i primi associati nella decomposizione primaria minimale $a = q_1 \cap \dots \cap q_t$, con $\sqrt{q_i} = P_i$).

Dimostrazione. Sia $a = q_1 \cap \dots \cap q_t$ una decomposizione primaria minimale con $\sqrt{q_i} = P_i$.

(\subseteq): Sia $a \in \text{zdv}(A/a) \subseteq A$. Per definizione di zero divisore nel modulo quoziante:

$$\exists x \in A \setminus a \text{ t.c. } a(x + a) = a$$

Ovvero:

$$x \notin a \quad \text{e} \quad \exists a \in A \text{ t.c. } ax \in a$$

Considero la decomposizione minimale. Poiché $x \notin a = \bigcap_{i=1}^t q_i$, deve esistere almeno un indice j tale che $x \notin q_j$. Per la **I condizione della minimalità** (nessun ideale è superfluo):

$$\exists j \in \{1, \dots, t\} : q_j \not\subseteq q_j \quad \text{ovvero} \quad \bigcap_{i \neq j} q_i \not\subseteq q_j$$

Ma qui sappiamo specificamente che $x \notin q_j$ ma $ax \in a \subseteq q_j$. Quindi:

$$ax \in q_j \wedge x \notin q_j$$

Poiché q_j è **primario**:

$$a \in \sqrt{q_j} = P_j \implies a \in \bigcup_{P \in \text{Ass}(a)} P$$

■

1090.20 Lezione 19 - <2025-11-07 Ven>

Sia A anello commutativo con unità, $A \subseteq A$ ideale decomponibile. Dimostro che

$$\bigcup_{p \in \text{ass}(A)} p \subseteq \text{zdv}(A/A)$$

Nota: se $p \in \text{ass}(A)$ esiste $b \in A$ tale che $(A : b)$ è p -primario.

$$(A : b) \subseteq \sqrt{(A : b)} = p \subsetneq A$$

e quindi $(A : b)$ è ideale proprio di A , e pertanto $b \notin A$.

Sia quindi $a \in p = \sqrt{(A : b)}$: allora esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che

$$a^j \in (A : b)$$

e quindi $a^j b \in A$. Fissiamo il minimo $j \in \mathbb{N}$ tale che $a^j b \in A$: quindi $a^{j-1} b \in A$. Si noti che $j \geq 1$, altrimenti $b \in A$, assurdo.

$$\begin{aligned} a^j \cdot b + A &= A && \text{in } A/A \\ a^{j-1} \cdot b + A &\neq A && \text{in } A/A. \end{aligned}$$

Siccome A/A è un A -modulo, posso scrivere

$$A = a^j \cdot b + A = a \cdot \underbrace{(a^{j-1} \cdot b + A)}_{\neq 0}$$

e questa è la definizione di $a \in \text{zdv}(A/A)$.

Corollario 238. Sia A Noetheriano, A ideale proprio di A :

$$\sqrt{A} = \bigcap_{p \in \text{ass}(A)} p$$

$$\text{zdv}(A/A) = \bigcup_{p \in \text{ass}(A)} p.$$

Se $A \neq 0$ allora (0) è decomponibile, e pertanto

$$N(A) = \sqrt{(0)} = \bigcap_{p \in \text{ass}((A))} p$$

$$\text{zdv}(A) = \bigcup_{p \in \text{ass}(0)} p.$$

Lemma 239. Sia A anello commutativo con unità, A ideale proprio di A tale che \sqrt{A} è finitamente generato.

Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$(\sqrt{A})^n \subseteq A.$$

Dimostrazione. Sia $\sqrt{A} = (a_1, \dots, a_t)$. Per ogni i esiste $n_i \in \mathbb{N}$ tale che $a_i^{n_i} \in A$. Si definisce

$$n = 1 + \sum_{i=1}^t (n_i - 1)$$

$(\sqrt{A})^n$ è generato da

$$L = \{a_1^{r_1} \cdots a_t^{r_t} \mid r_i \in \mathbb{N}, r_1 + \cdots + r_t = n\}.$$

In particolare, per ogni $a_1^{r_1} \cdots a_t^{r_t} \in L$ almeno uno degli $r_i \geq n_i$, e pertanto $a_i^{r_i} \in A$. Per assorbimento si ha che $a_1^{r_1} \cdots a_t^{r_t} \in A$ e $L \subseteq A$. \blacksquare

Proposizione 240. Sia A ideale proprio di A Noetheriano. Considero $p \in \text{Spec}(A)$.

$$p \in \text{ass}(A) \iff \exists b \in A [(A : b) = p] \iff \exists \lambda \in A/A [(0_{A/A} : \lambda) = \text{Ann}_{A/A}(\lambda) = p].$$

Dimostrazione. La seconda biimplicazione è lasciata per esercizio. Si dimostra la prima.

(\Leftarrow) : Già sappiamo che esiste

$$\left[\exists b \in A [(A : b) \text{ è } p\text{-primario}] \right] \iff p \in \text{ass}(A)$$

Ma p è primo e in particolare è p -primario, e pertanto $p \in \text{ass}(A)$.

(\Rightarrow) : Sia

$$A = q_1 \cap \cdots \cap q_n$$

decomposizione primaria minimale di A , con $p_i = \sqrt{q_i}$.

Per minimalità della decomposizione primaria di A si ha che per ogni $j = 1, \dots, t$

$$a_j := \bigcap_{i \neq j} q_j \supsetneq A.$$

Supponiamo che $p = p_j$. Per il lemma precedente

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad p_j^n \subseteq q_j.$$

Allora vale che

$$p_j^n a_j \subseteq q_j a_j \subseteq q_j \cap a_j = A.$$

Scelgo quindi il minimo n per cui $p_j^n a_j \subseteq A$, e quindi $p_j^{n-1} a_j \not\subseteq A$.

Esiste $x \in p_j^{n-1} a_j \setminus A$; in particolare $x \in a_j \setminus A$. Quindi $x \in q_i$ per ogni $i \neq j$, e $x \notin q_j$.

$$(A : x) = \left(\bigcap_{i=1}^t q_i : i \right) = \bigcap_{i=1}^t (q_i : x) = (q_j : x)$$

dove l'ultima uguaglianza vale perché se $x \in q_i$ allora $(q_i : x) = A$.

Inoltre, se $x \notin q_j$, allora $(q_j : x)$ è un ideale p_j -primario.

$$x \cdot p_j \subseteq p_j^n \cdot a_j \subseteq A \implies p_j \subseteq (A : x).$$

Concludendo, si ottiene

$$p_j \subseteq (A : x) \subseteq \sqrt{(A : x)} = p_j$$

ovvero la tesi $(A : x) = p_j$. ■

Teorema 241. Sia A un anello Noetheriano, A ideale. Sia

$$b = \bigcap_{i=1}^{\infty} A^i.$$

Allora $b = Ab$.

Dimostrazione. Se $A = A$ allora $b = Ab$.

Sia quindi ora $A \subsetneq A$: in generale $A \cdot b \subseteq b$. Devo dimostrare che $b \subseteq A \cdot b$.

Siccome $A \cdot b \subseteq A \subsetneq A$ si ha che $A \cdot b$ è ideale proprio; pertanto ne esiste una decomposizione primaria minimale:

$$Ab = q_1 \cap \cdots \cap q_t; \quad \sqrt{q_i} = p_i.$$

Se per assurdo esiste $i = 1, \dots, t$ tale che $b \not\subseteq q_i$ allora esiste $x \in b \setminus q_i$.

$$x \cdot A \subseteq A \cdot b = q_1 \cap \cdots \cap q_t \subseteq q_i$$

e pertanto $xA \subseteq q_i$ con $x \notin q_i$. Siccome q_i è primario, ogni elemento di $A \in \sqrt{q_i} = p_i$.

Inoltre esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $p_i^n \subseteq q_i$.

$$b = \bigcap_{i=1}^{\infty} \subseteq A^n \subseteq q_i.$$

Assurdo. Dunque per ogni $i = 1, \dots, t$ si ha che $b \subseteq q_i$ e pertanto

$$b \subseteq q_1 \cap \cdots \cap q_t = A. ■$$

Reminder:

Lemma 242. (Lemma di Nakayama). Sia M un A -modulo finitamente generato, e A ideale di A tale che

$$A \subseteq \text{Jac}(A)$$

e $AM = M$. Allora $M = 0$.

$(\text{Jac}(A))$ è il radicale di Jacobson di $A^{[338]}$.

Teorema 243. (Teorema di intersezione di Krull). Sia A un anello Noetheriano, A ideale di A tale che $A \subseteq \text{Jac}(A)$. Allora

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A^i = (0).$$

Dimostrazione. Sia $b = A^i$. Allora $b = Ab$ (per il risultato sopra).

b è un A -modulo finitamente generato. Allora $b = (0)$ per il Lemma di Nakayama. \blacksquare

Proposizione 244. Sia A Noetheriano in cui ogni ideale primo è massimale: $\text{Spec}(A) = \text{Max}(A)$.

Allora:

1. A ha un numero finito di ideali massimali (A è semi-locale);
2. A è Artiniano.

Dimostrazione. Posso supporre $A \neq 0$.

1. Sia \mathcal{M} un ideale massimale di A . Allora \mathcal{M} è ideale primo minimale di (0) : supponiamo per assurdo $\mathcal{M} \supseteq p \supsetneq (0)$, p primo. Allora p è massimale, e pertanto $\mathcal{M} = p$.

Ma in un anello Noetheriano l'insieme dei primi associati ad un ideale proprio è finito, e pertanto

$$\text{Max}(A) = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_\ell\}.$$

2. Si è già dimostrato che, per

$$\text{Spec}(A) = \text{Max}(A) = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_\ell\}.$$

si ha

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{p \in \text{Spec}(A)} p = \bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{M}_i.$$

Siccome A è Noetheriano allora esiste t tale che $(0) \subseteq (\sqrt{(0)})^t \subseteq (0)$:

$$\mathcal{M}_1^t \cdot \mathcal{M}_2^t \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_\ell^t \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^{\ell} \mathcal{M}_i \right)^t = (\sqrt{(0)})^t = (0)$$

Segue che $\mathcal{M}_1^t \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_\ell^t = 0$ e pertanto

A è Noetheriano sse A è Artiniano

e quindi A è Artiniano. \blacksquare

Lemma 245. Sia A artiniano. Allora ogni ideale primo è massimale: $\text{Spec}(A) = \text{Max}(A)$.

Dimostrazione. È da dimostrare “ \subseteq ”. Sia $p \in \text{Spec}(A)$:

$$A' := A/p$$

dominio di integrità Artiniano. Fissato $b \in A'$, $b \neq 0$ allora

$$(b)_{A'} \supseteq (b^2)_{A'} \supseteq \cdots \supseteq (b^t)_{A'} \supseteq \cdots$$

(dove con $(\bullet)_{A'}$ si intende l’ideale generato da \bullet in A').

Siccome A' è Artiniano, allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$(b^{n_0})_{A'} = (b^{n_0+i})_{A'} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Quindi $b^{n_0} \in (b^{n_0+1})_{A'}$ e quindi esiste $c \in A'$ tale che $b^{n_0} = cb^{n_0+1}$:

$$b^{n_0}(1 - cb) = 0$$

con A' dominio, e pertanto $1 - cb = 0$ (poiché $b \neq 0$). Segue $bc = 1_{A'}$. Quindi b è invertibile, e A' è un campo.

Pertanto p è massimale. ■

Lemma 246. Sia A artiniano. Allora A ha un numero finito di ideali massimali.

Dimostrazione. Sia $A \neq 0$. Si definisce

$$\Phi := \left\{ A \text{ ideale di } A \mid A = \bigcap_{i=1}^t \mathcal{M}_i, t \text{ finito}, \mathcal{M}_i \text{ ideale massimale di } A \right\}.$$

Pertanto $\Phi \neq \emptyset$. Per la MIN. CONDITION esiste J minimale di Φ :

$$J = \mathcal{M}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n \in \Phi$$

Sia ora quindi \mathcal{M} un qualunque ideale \mathcal{M} massimale di A . Allora

$$J \cap \mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M} \subseteq J$$

e pertanto $J \cap \mathcal{M} \in \Phi$. Per minimalità di J si ha $J \cap \mathcal{M} = J$:

$$\mathcal{M}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n \cap \mathcal{M}$$

e quindi $\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{M}_n$.

Ma tutti gli $\mathcal{M}, \mathcal{M}_i$ sono massimali e quindi primi: segue che per qualche i :

$$\mathcal{M} \supseteq \mathcal{M}_i$$

con $\mathcal{M}, \mathcal{M}_i$ massimali. Allora $\mathcal{M} = \mathcal{M}_i$.

In definitiva si ha

$$\text{Max}(A) = \{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}. \quad \blacksquare$$

Lemma 247. Sia A Artiniano. Allora $\sqrt{(0)}$ è nilpotente.

(un ideale A è nilpotente se $A^t = (0)$).

Dimostrazione. Consideriamo la DC

$$\sqrt{0} \supseteq (\sqrt{0})^2 \supseteq \dots \supseteq (\sqrt{0})^\ell \supseteq \dots$$

Poiché A è Artiniano allora esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$(\sqrt{0})^{n_0} = (\sqrt{0})^{n_0+i} \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Supponiamo che $(\sqrt{0})^{n_0} \neq (0)$. Sia quindi

$$\Sigma = \left\{ A \text{ ideale di } A \mid A \cdot (\sqrt{0})^{n_0} \neq (\emptyset) \right\}.$$

Allora $\Sigma \neq \emptyset$, in quanto

$$\sqrt{(0)} \cdot (\sqrt{0})^{n_0} = (\sqrt{0})^{n_0+1} = (\sqrt{0})^{n_0} \neq (0).$$

Per la MIN. CONDITION esiste $b \in \Sigma$ \subseteq -minimale:

$$b \cdot (\sqrt{0})^{n_0} \neq (0)$$

e in particolare esiste $b \in b$ tale che

$$(b)(\sqrt{0})^{n_0} \neq (0) \implies (b) \in \Sigma.$$

Per minimalità, siccome $(b) \subseteq b$ si ha che $b = (b)$ e

$$b(\sqrt{0})^{n_0} \subseteq b.$$

Ma $b(\sqrt{0})^{n_0} \in \Sigma$ e per minimalità

$$b = b(\sqrt{0})^{n_0}.$$

Allora $b = b \cdot c$ con $c \in (\sqrt{0})^{n_0}$ e pertanto esiste $v \in \mathbb{N}$ tale che (esercizio)

$$(\sqrt{0})^{n_0} \subseteq \left(\sqrt{(0)} : c^v \right) = 0$$

In particolare, iterando, si ha che $b = b \cdot c^v = 0$, ma

$$(b)(\sqrt{0})^{n_0} \neq (0).$$

Assurdo. ■

1090.21 Lezione 20 - <2025-11-10 Lun>

1090.21.1 Teoremi su Anelli Artiniani e Noetheriani

Teorema 248. Se A è un anello artiniano, allora A è noetheriano.

Dimostrazione. Poiché A è artiniano, valgono le seguenti proprietà:

1. Ogni ideale primo è massimale.
2. A è semilocale (ha un numero finito di ideali massimali).
3. Il nilradicale è nilpotente, ovvero esiste un intero e tale che $(\sqrt{(0)})^e = (0)$.

Ricordiamo che il nilradicale è l'intersezione di tutti gli ideali primi. Dato che in un anello artiniano i primi sono massimali e sono in numero finito, possiamo scrivere:

$$\sqrt{(0)} = \bigcap_{P \in \text{Spec}(A)} P = \bigcap_{i=1}^n m_i \quad \text{con } \{m_1, \dots, m_n\} = \text{Max}(A)$$

Consideriamo il prodotto degli ideali massimali. Vale l'inclusione:

$$m_1 \dots m_n \subseteq \left(\bigcap_{i=1}^n m_i \right) = \sqrt{(0)}$$

Elevando alla potenza e (l'indice di nilpotenza del nilradicale):

$$m_1^e \dots m_n^e \subseteq (\sqrt{(0)})^e = (0)$$

Questo implica che il prodotto $m_1^e \dots m_n^e A = 0$. Possiamo costruire una catena di ideali (filtrazione) i cui quozienti successivi sono spazi vettoriali su campi (della forma A/m_i). Utilizzando il risultato sui moduli (“moduli di lunghezza finita”), dato che A è artiniano, questa catena ha lunghezza finita. Un anello di lunghezza finita è sia artiniano che noetheriano. Di conseguenza, A è noetheriano. ■

Corollario 249. Sia A un anello commutativo con unità. A è noetheriano e ogni ideale primo è massimale sse A è artiniano.

Esempio 250. Consideriamo $A = \mathbb{Z}$. \mathbb{Z} è un anello noetheriano, ma **non** è artiniano. Infatti, l'ideale (0) è primo in \mathbb{Z} , ma non è massimale. Questo viola la condizione necessaria del corollario.

Proposizione 251. Sia A un anello noetheriano locale (sia m l'unico ideale massimale dell'anello). Vale sempre una delle seguenti situazioni:

1. $m^n \neq m^{n+1}$ per ogni n .
2. $m^n = (0)$ per un qualche n , e in questo caso A è artiniano.

Dimostrazione. Caso 1) Se $m^n \neq m^{n+1}$, abbiamo una catena discendente (D.C.) non stazionaria:

$$m \supsetneq m^2 \supsetneq \dots \supsetneq m^n \supsetneq \dots$$

Di conseguenza, A non è artiniano.

Caso 2) Supponiamo che la condizione 1 non si verifichi. Allora deve esistere un n tale che la catena si stabilizza, ovvero:

$$\exists n \in \mathbb{N} : m^n = m^{n+1}$$

Sia $M = m^n$. Allora possiamo scrivere l'uguaglianza come $m \cdot M = M$. Dato che A è noetheriano locale:

- $M \subseteq m$ (o più precisamente M è un ideale, quindi un modulo su A).
- M è finitamente generato (perché A è noetheriano).
- m è il radicale di Jacobson di A ($Jac(A)$).

Possiamo applicare il **Lemma di Nakayama**: se M è finitamente generato e $M = Jac(A)M$, allora $M = (0)$. Quindi $m^n = (0)$.

Devo ora mostrare che, in questo caso, l'anello A è artiniano. Dimostro che ogni ideale primo di A è massimale. Sia $p \in \text{Spec}(A)$. Poiché $(0) \subseteq p$, vale:

$$m^n = (0) \subseteq p$$

Passando ai radicali:

$$\sqrt{m^n} = m \subseteq \sqrt{p} = p$$

Poiché m è l'ideale massimale (ed è unico), l'unica possibilità è che $m = p$. Dunque ogni ideale primo è massimale. Poiché A è noetheriano e ogni primo è massimale, per il Corollario precedente, A è artiniano. ■

Teorema 252. (Teorema di Struttura degli Anelli Artiniani). Se A è artiniano, allora A è isomorfo a un prodotto finito di anelli locali artiniani.

(Esercizio per esame)

1090.21.2 Teorema di Struttura di Moduli su PID

Teorema 253. Sia A un P.I.D. (Dominio a Ideali Principali) e sia M un A -modulo finitamente generato. Allora:

$$M = F \oplus E$$

dove:

- F è un modulo **libero**.
- E è il modulo di **torsione** (sottomodulo $M_{\text{tor}} = \{m \in M \mid \exists a \in A, a \neq 0 \text{ t.c. } am = 0\}$).

Inoltre, il modulo di torsione si decompone come:

$$M_{\text{tor}} \cong A/(d_1) \oplus A/(d_2) \oplus \cdots \oplus A/(d_s)$$

con la condizione di divisibilità:

$$(d_1) \supseteq (d_2) \supseteq \cdots \supseteq (d_s) \iff d_1 \mid d_2 \mid d_3 \mid \cdots \mid d_s$$

Gli elementi d_1, \dots, d_s sono detti **Fattori Invarianti** di M . Si assume $\forall d_i \neq 0$ e $d_i \notin U(A)$ (non invertibili).

Lemma 254. Sia A un anello commutativo con unità. Allora due basi diverse di un modulo libero finitamente generato hanno la stessa cardinalità (detta rango).

(Nota: se l'anello non è commutativo, esistono controesempi come $A \cong A \oplus A$, dove A è visto come modulo su se stesso).

Teorema 255. Sia A un PID e F un A -modulo libero finitamente generato. Sia M un sottomodulo di F . Allora M è libero e vale:

$$\text{rank}(M) \leq \text{rank}(F)$$

Dimostrazione. Fisso una base di F : $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, dove $m = \text{rank}(F)$. Procediamo per induzione su m .

Base dell'induzione ($m = 1$): Sia $M_1 = M \cap \langle x_1 \rangle$. Poiché F ha rango 1, $F \cong A$. I sottomoduli di A sono ideali. Dato che A è un PID, ogni ideale è principale, quindi esiste $a_1 \in A$ tale che $M_1 \cong (a_1)A$. Si aprono due casi:

1. Se $a_1 = 0$, allora $M_1 = 0$ (libero di rango 0).
2. Se $a_1 \neq 0$, allora $M_1 = \langle a_1 x_1 \rangle \cong A$ (libero di rango 1).

Passo induttivo: Supponiamo vero per n e dimostriamo per $n + 1$. Sia $M_{n+1} \subseteq F_{n+1} = \langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle$. Consideriamo un generico elemento $y \in M_{n+1}$:

$$y = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b x_{n+1}, \quad a_i, b \in A$$

Consideriamo l'insieme dei coefficienti dell'ultima coordinata:

$$a_{n+1} = \{b \in A \mid \text{è coefficiente di } x_{n+1} \text{ per un elemento } y \in M_{n+1}\}$$

Questo insieme a_{n+1} è un ideale di A . Poiché A è un PID, a_{n+1} è generato da un singolo elemento, diciamo a_{n+1} .

$$a_{n+1} = (a_{n+1})$$

- Se $a_{n+1} = 0$, allora l'ultima coordinata è sempre nulla, quindi $M_{n+1} \subseteq M_n$. Per ipotesi induttiva, M_n è libero con rango $\leq n$.
- Se $a_{n+1} \neq 0$: Esiste un elemento $w \in M_{n+1}$ tale che la sua ultima coordinata sia proprio a_{n+1} :

$$w = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + a_{n+1} x_{n+1}$$

Per ogni $y \in M_{n+1}$, scriviamo $y = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n + c x_{n+1}$. Poiché $c \in a_{n+1} = (a_{n+1})$, esiste $k \in A$ tale che $c = k \cdot a_{n+1}$. Consideriamo l'elemento $y - kw$. La sua coordinata rispetto a x_{n+1} è:

$$c - ka_{n+1} = 0$$

Quindi $y - kw \in M_n$ (dove M_n è l'intersezione con il sottomodulo generato dai primi n elementi della base). Possiamo scrivere:

$$y = (y - kw) + kw$$

Questo mostra che $M_{n+1} = M_n + wA$. Inoltre, l'intersezione $M_n \cap wA = 0$ (perché gli elementi di M_n hanno ultima coordinata 0, mentre i multipli non nulli di w hanno ultima coordinata non nulla). Quindi:

$$M_{n+1} \cong M_n \oplus wA$$

Per ipotesi induttiva, M_n è libero di rango $\leq n$. Poiché A è integro e $a_{n+1} \neq 0$, wA è libero di rango 1. Allora M_{n+1} è libero e ha rango $\leq n+1$. ■

Esempio 256. Il teorema appena mostrato vale se A non è un PID? **NO.** Ad esempio, sia $A = \mathbb{C}[X, Y]$. A è un anello noetheriano ma non è un PID. Consideriamo $M = (X, Y)$, l'ideale generato dalle indeterminate. A (come modulo su se stesso) è libero di rango 1 (generato da 1). M è un sottomodulo di A . Tuttavia, M **non** è libero. Se fosse libero, dovrebbe avere una base. I generatori sono X, Y . Esiste una relazione di dipendenza lineare non banale tra loro:

$$Y \cdot X - X \cdot Y = 0$$

Poiché $X, Y \neq 0$, i generatori non sono linearmente indipendenti. Quindi M non è libero, pur essendo sottomodulo di un modulo libero finitamente generato.

Corollario 257. Sia A un PID e M un modulo finitamente generato. Sia $N \subseteq M$ un sottomodulo. Allora N è finitamente generato.

(Nota: questo è vero per definizione se l'anello è noetheriano).

Dimostrazione. Poiché M è finitamente generato, esiste un insieme finito di generatori $\{y_1, \dots, y_s\}$. Possiamo definire un morfismo suriettivo da un modulo libero:

$$\begin{aligned} f : A^s &\longrightarrow M \\ (a_1, \dots, a_s) &\longmapsto a_1 y_1 + \dots + a_s y_s \end{aligned}$$

Consideriamo la controimmagine $f^{-1}(N)$. Questo è un sottomodulo di A^s . Per il Teorema precedente, $f^{-1}(N)$ è libero e il suo rango è $\leq s$. In particolare, $f^{-1}(N)$ ha una base finita, quindi è finitamente generato. Poiché f è suriettivo sulla restrizione, $f(f^{-1}(N)) = N$. L'immagine di un modulo finitamente generato è finitamente generata. Quindi N è finitamente generato. ■

Proposizione 258. (Forma Normale di Smith). Sia A un PID. Supponiamo B una matrice $m \times n$ a entrate in A . Allora esistono due matrici invertibili P ($m \times m$) e Q ($n \times n$) a entrate in A tali che:

$$PBQ = \left[\begin{array}{cccc|c} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_s & 0 \\ \hline & & & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Dove $d_1 | d_2 | \dots | d_s$

Mi serve l'ipotesi di PID perché, nel processo di riduzione della matrice (scambio righe, moltiplicazione per scalare, somma di righe), devo poter calcolare il MCD. Nello specifico, dati $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$ tali che la matrice

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$$

sia invertibile, opero sulle righe/colonne come combinazioni lineari. Nel caso PID, posso usare l'identità di Bezout per generare tali trasformazioni.

1090.22 Lezione 21 - <2025-11-11 Mar>

Teorema 259. (Forma normale di Smith). Sia A un PID, B una matrice $m \times n$ a entrate in A . Esistono P, Q matrici quadrate tali che

$$PBQ = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_s \end{bmatrix}$$

e tale che $d_1 | d_2 | \cdots | d_s$.

Lemma 260. C matrice quadrata $n \times n$ a entrate in A . C è invertibile sse $\det C \in A^\times$.

Lemma 261. Sia A un PID. F modulo libero finitamente generato con base m_1, \dots, m_s . Sia C una matrice $s \times s$ a coefficienti in A e $w_1, \dots, w_s \in F$ tali che

$$[m_1, \dots, m_s]C = [w_1, \dots, w_s].$$

w_1, \dots, w_s sono una base di F sse C è invertibile sse $\det(C) \in A^\times$.

Teorema 262. Sia A un PID, F modulo libero di rango n e sia N un sottomodulo di F .

Allora esistono $m_1, \dots, m_n \in F$ base di F e $d_1, \dots, d_s \in A$ tali che

$$d_1 | d_2 | \cdots | d_s$$

e tale che $d_1 m_1, \dots, d_s m_s$ è base di N .

Dimostrazione. • $N = 0$: N è generato da 0; 0 “è base” di N : $d_1 = 0$.

• $N \neq 0$: N è libero e ha rango $s \leq n$.

Fisso una base e_1, \dots, e_s di $N \subseteq F$. Fisso una base x_1, \dots, x_n di F . Siccome $e_i \in F$ allora

$$e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j; \quad a_{ij} \in A.$$

Sia quindi $B = (a_{ij})$: $[e_1, \dots, e_s] = [x_1, \dots, x_n]B$, B ha n righe e s colonne.

Considero quindi la Formale Normale di Smith: siano P, Q matrici quadrate invertibili tale che $PBQ = B'$:

$$B' = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies B = P^{-1}B'Q^{-1}$$

e pertanto vale che:

$$[e_1, \dots, e_s]Q = [x_1, \dots, x_n]P^{-1}B' \quad (19)$$

dove le seguenti sono basi, rispettivamente, di N e di F :

$$\begin{aligned} [w_1, \dots, w_s] &= [e_1, \dots, e_s]Q \\ [m_1, \dots, m_n] &= [x_1, \dots, x_n]P^{-1}. \end{aligned}$$

Pertanto, per la (19) si ha

$$[w_1, \dots, w_s] = [m_1, \dots, m_n]B' = [d_1 m_1, \dots, d_s m_s].$$

Se $d_i = 0$, allora $w_i = 0$. Assurdo. ■

Lemma 263. Sia A anello commutativo con unità, M_1, \dots, M_n degli A -moduli.

Siano $B_i \subseteq M_i$ dei sottomoduli. Allora

$$\frac{M_1 \oplus \dots \oplus M_n}{B_1 \oplus \dots \oplus B_n} \cong M_1/B_1 \oplus \dots \oplus M_n/B_n.$$

Teorema 264. (Teorema di struttura per moduli finitamente generati su PID). Sia A un PID, M un A -modulo finitamente generato. Allora

$$M \cong A^\ell \oplus A/(d_1) \oplus A/(d_2) \oplus \dots \oplus A/(d_s)$$

con $d_i \neq 0$, $d_i \notin A^\times$ e $d_i \mid d_{i+1}$.

Dimostrazione. Siccome M è finitamente generato sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme di generatori di cardinalità minima.

Esiste un morfismo suriettivo da F modulo libero di rango n in M : se $\{f_1, \dots, f_n\}$ base di F :

$$\begin{aligned} \varphi : F &\longrightarrow M \\ \sum_{i=1}^n a_i f_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i. \end{aligned}$$

Allora $\ker \varphi$ è sottomodulo di F : $\ker \varphi$ è modulo libero di rango $s \leq n$.

Per il teorema precedente esiste una base di F , v_1, \dots, v_n , e $d_1, \dots, d_s \in A$ tali che

$$d_1 v_1, \dots, d_s v_s$$

base di $\ker \varphi$ con $d_i \mid d_{i+1}$ (con $d_i \neq \emptyset$). Allora

$$\begin{aligned}
M &\cong F/\ker \varphi \cong \frac{Av_1 \oplus \cdots \oplus Av_n}{d_1v_1A \oplus \dots d_sv_sA \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0} \\
&\cong \frac{Av_1}{d_1v_1A} \oplus \cdots \oplus \frac{Av_s}{d_sv_sA} \oplus \underbrace{\frac{Av_{s+1}}{0}}_{\cong Av_1 \cong A} \oplus \cdots \oplus \frac{Av_n}{0} \\
&\cong \frac{Av_1}{d_1v_1A} \oplus \cdots \oplus \frac{Av_s}{d_sv_sA} \oplus \underbrace{A \oplus \cdots \oplus A}_{n-s \text{ volte}}
\end{aligned} \tag{20}$$

Si consideri ora il morfismo suriettivo

$$\begin{aligned}
Av_1 &\longrightarrow A/(d_1) \\
av_1 &\longmapsto a + (d_1)
\end{aligned}$$

di nucleo av_1 tali che $a + (d_1) = (d_1)$, ovvero d_1v_1A . Pertanto vale che

$$\frac{Av_1}{d_1v_1A} \cong A/(d_1).$$

Recuperando la (20) si ottiene

$$M \cong A/(d_1) \oplus \cdots \oplus A/(d_0) \oplus A^{n-s}$$

con $d_i \mid d_{i+1}$.

Se per assurdo $d_i \in A^\times$ allora $A/(d_i) \cong 0$ e pertanto avrei che M è generato da meno di n elementi. Assurdo per minimalità della cardinalità della base iniziale. ■

Definizione 265. Sia A un anello commutativo con unità. Sia M un A -modulo. $m \in M$ è un elemento di torsione se esiste $a \in A$, a non zero divisore, tale che

$$a \cdot m = 0_M.$$

Si definisce il sottomodulo di torsione:

$$M_{tor} = \{m \in M \mid m \text{ di torsione}\}$$

che è un sottomodulo di M .

Se A è un dominio si definisce

$$\text{ann}(m) = \{a \in A \mid a \cdot m = 0\}$$

ideale di A . Si ha che m è di torsione sse $\text{ann}(m) \neq (0)$.

Definizione 266. Un modulo M si dice:

- modulo di torsione se $M = M_{tor}$;

- torsion free se $M_{tor} = \{0\}$.

Lemma 267. Sia A anello commutativo con unità. Siano M, F degli A -moduli, F liebro e sia $f : M \rightarrow F$ morfismo suriettivo.

Allora esiste $F' \subseteq M$ sottomodulo libero tale che $f|_{F'}$ è isomorfismo tra F e F' e $M = F' \oplus \ker f$.

Questo lemma ci dice che data la SEC

$$0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \xrightarrow{f} F \rightarrow 0 \implies M \cong F \oplus \ker f.$$

Dimostrazione. Siccome F è libero, fisso una base di F : $\{x_i\}_{i \in I}$.

Poiché f è suriettivo allora esistono degli $y_i \in M$ tali che $f(y_i) = x_i$, per ogni $i \in I$.

Dunque $\{y_i\}_{i \in I} \subseteq M$ è linearmente indipendente: considero F' il sottomodulo libero di M generato da $\{y_i\}_{i \in I}$ linearmente indipendente.

Pertanto ovviamente $f|_{F'} : F' \rightarrow F$ è isomorfismo. Inoltre, per ogni $y \in M$:

$$f(y) = \sum_{i \in I} a_i x_i, \quad a_i \in A$$

e pertanto

$$f(y) - \sum_{i \in I} a_i f(y_i) = 0 \implies f\left(y - \sum_{i \in I} a_i y_i\right) = 0$$

e dunque

$$y = \underbrace{\left(y - \sum_{i \in I} a_i y_i\right)}_{\in \ker f} + \underbrace{\sum_{i \in I} a_i y_i}_{\in F'}$$

Da questo segue che $M = F' + \ker f$.

MANCA CHE $F' \cap \ker f = \emptyset$. ■

Lemma 268. Sia A un PID. Se N è un A -modulo finitamente generato e privo di torsione allora N è libero.

Dimostrazione. Sia $\{y_1, \dots, y_m\}$ insieme di generatori. Da $\{y_1, \dots, y_n\}$ estraggo un sottoinsieme \subseteq -massimale linearmente indipendente:

$$\{v_1, \dots, v_n\}.$$

Fissato $y \in \{y_1, \dots, y_m\}$ faccio una combinazione lineare di y, v_1, \dots, v_n che dia 0:

$$ay + b_1 v_1 + \dots + b_n v_n = 0$$

con non tutti scalari nulli.^[339] È possibile che $a = 0$? NO. (perché??)

Allora $ay \in Av_1 \oplus \dots \oplus Av_n$. In particolare esistono $a_1, \dots, a_m \in A \setminus \{0\}$ tali che

$$a_1 y_1 + \dots + a_m y_m \in Av_1 \oplus \dots \oplus Av_n.$$

Considero quindi $a = a_1 \cdot \dots \cdot a_m \neq \emptyset$ e il morfismo

$$\begin{aligned}\varphi : N &\longrightarrow Av_1 \oplus \dots \oplus Av_n \\ x &\longmapsto ax.\end{aligned}$$

φ è iniettiva: siano $x, z \in N$ tali che $\varphi(x) = \varphi(z)$

$$ax = az \implies a(x - z) = 0$$

ma $a \neq \emptyset$ e N privo di torsione: pertanto $x - z = 0$.

Per il primo teorema di isomorfismo, allora

$$N \cong \text{Im } \varphi \subseteq Av_1 \oplus \dots \oplus Av_n \text{ modulo libero}$$

e pertanto $\text{Im } \varphi$ è sottomodulo libero: N è libero. ■

Teorema 269. Sia A un PID. Sia M un A -modulo finitamente generato. Allora M/M_{tor} è *torsion-free* e inoltre esiste un sottomodulo $F \subseteq M$ libero tale che

$$M = F \oplus M_{\text{tor}}.$$

Dimostrazione. • Mostriamo che M/M_{tor} è *torsion free*.

Sia $x \in M$, $\bar{x} \in M/M_{\text{tor}}$. Supponiamo esista $b \in A$, $b \neq 0$ tale che $b\bar{x} = \bar{0}$ in M/M_{tor} .

Allora $bx \in M_{\text{tor}}$: esiste $c \in A$, $c \neq 0$ tale che $c(bx) = 0$:

$$\underbrace{(cb)}_{\neq 0} x = 0 \implies x \in M_{\text{tor}} \implies \bar{x} = 0. \quad \blacksquare$$

• Mostriamo che M/M_{tor} è libero.

M/M_{tor} è finitamente generato e privo di torsione. Allora per il lemma precedente si ha che N è libero.

Considerando ora la proiezione suriettiva $\pi : M \rightarrow M/M_{\text{tor}}$. Per il risultato precedente esiste $F' \subseteq M$ libero tale che

$$M = F' \oplus \ker \pi \cong M/M_{\text{tor}} \oplus M_{\text{tor}}.$$

Corollario 270. Sia M modulo finitamente generato su A PID.

1. M è libero sse M è *torsion free*.
2. $M = F \oplus M_{\text{tor}}$ con F libero. Il rango di F è univocamente determinato da M : $F \cong M/M_{\text{tor}}$.
3. Dunque nella scrittura del teorema di struttura, detta $\ell = \text{rank}(M/M_{\text{tor}})$

$$M \cong A^\ell \oplus A/(d_1) \oplus A/(d_2) \oplus \dots \oplus A/(d_s)$$

e ℓ è invariante di M .

ℓ si può chiamare “rango privo di torsione di M ”.

Sia A un PID, A ideale di A , $A \neq 0$ e proprio. Sia quindi $a \notin A^\times$, $a \neq 0$ tale che $A = (a)$.

Siccome A è un PID allora è un UFD e pertanto

$$a = up_1^{t_1} \cdots p_\ell^{t_\ell}$$

per $u \in A^\times$ e p_i irriducibili in A (sse p_i primo in A , poiché A è PID).

Allora $(p_i^{t_i}), (p_j^{t_j})$ sono coprimi per $i \neq j$:

$$(a) = (p_1^{t_1}) \cdots (p_\ell^{t_\ell}) = (p_1^{t_1}) \cap \cdots \cap (p_\ell^{t_\ell}).$$

Proposizione 271. (Teorema Cinese del Resto su un PID). Il morfismo

$$f : A \rightarrow A/(p_1^{t_1}) \oplus \cdots \oplus A/(p_\ell^{t_\ell})$$

è suriettivo e $\ker(f) = (a)$. Pertanto

$$A/(a) \cong A/(p_1^{t_1}) \oplus \cdots \oplus A/(p_\ell^{t_\ell}).$$

Corollario 272. (Teorema di struttura). Sia A un PID, M finitamente generato. Allora

$$M \cong A^\ell \oplus A/(p_1^{t_1}) \oplus \cdots \oplus A/(p_s^{t_s}).$$

Dimostrazione. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.. ■

1090.23 Lezione 22 - <2025-11-14 Ven>

1090.23.1 Forma canonica di Jordan

Sia A anello commutativo con unità, M un A -modulo. Sia

$$\text{End}(M) := \{\psi : M \rightarrow M \text{ morfismo di } A\text{-moduli}\}.$$

Si fornisce a $\text{End}(M)$ due operazioni:

- la somma +

$$\begin{aligned} \psi + \phi : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto \psi(m) + \phi(m) \end{aligned}$$

- la composizione \circ .

Si ha che $\langle \text{End}(M), +, \circ \rangle$ è un anello non commutativo.

Preso $a \in A$, si definisce $a \cdot \text{Id} : M \rightarrow M : m \mapsto a \cdot m$, e si pone

$$A' := \{a \cdot \text{Id} \mid a \in A\} \subseteq \text{End}(M).$$

A' è sottoanello con unità commutativo. **Fisso** $\psi \in \text{End}(M)$, e considero il più piccolo sottoanello di $\text{End}(M)$ che contenga $A' \cup \{\psi\}$: $A'[\psi]$.

$$A'[\psi] = \left\{ \sum_{i=1}^t (a_i \cdot \text{Id}) \circ \psi^i \mid t \in \mathbb{N}, a_i \in A \right\}$$

dove con $\psi^i = \psi \circ \dots \circ \psi$ ripetuta i -volte.

M ha struttura di $A'[\psi]$ -modulo:

$$\begin{aligned} A'[\psi] \times M &\longrightarrow M \\ (\Phi, m) &\longmapsto \Phi(m). \end{aligned}$$

Con questa operazione (insieme alla somma di M), M è un $A'[\psi]$ -modulo.

Si consideri ora il morfismo di anelli:

$$\begin{aligned} \alpha : A[X] &\longrightarrow A'[\psi] \\ \sum_{i=0}^t a_i \cdot X^i &\longmapsto \sum_{i=0}^t (a_i \cdot \text{Id}) \circ \psi^i. \end{aligned}$$

M quindi ha anche la struttura di $A[X]$ modulo:

$$\begin{aligned} \cdot : A[X] \times M &\longrightarrow M \\ \left(\sum_{i=0}^t a_i X^i, m \right) &\longmapsto \alpha \left(\sum_{i=0}^t a_i X^i \right)(m) = \sum_{i=0}^t (a_i \cdot I) \circ \psi^i(m). \end{aligned}$$

D'ora in avanti $A = \mathbb{K}$ campo, $M = V$ un \mathbb{K} -modulo, ovvero un \mathbb{K} -spazio vettoriale.

Fisso $\psi \in \text{End}(V)$. Posso pensare a V come un $\mathbb{K}[X]$ -modulo. Supponiamo V abbia dimensione finita.

1. Come sono fatti i $\mathbb{K}[X]$ -sottomoduli di V ?

Affinché U sia un $\mathbb{K}[X]$ -sottomodulo si deve avere che

$$\forall f \in \mathbb{K}[X], \forall m \in U \quad f \cdot m \in U$$

- per ogni $a \in \mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}[X]$, per ogni $m \in U$:

$$a \cdot m = (a \cdot \text{Id})(m) = am \in U$$

ovvero U deve essere \mathbb{K} -sottomodulo, ovvero un sottospazio vettoriale;

- considerando $X \in \mathbb{K}[X]$, per ogni $m \in U$: $X \cdot m = \psi(m) \in U$, ovvero

$$\psi|_U : U \rightarrow U.$$

Queste due condizioni sono sufficienti a garantire che U sia un $\mathbb{K}[X]$ -sottomodulo:

I $\mathbb{K}[X]$ -sottomoduli di V sono i sottospazi vettoriali di V invarianti per ψ .

2. V è un $\mathbb{K}[X]$ -modulo finitamente generato?

Per ipotesi V è un \mathbb{K} -modulo finitamente generato. Segue che V è un $\mathbb{K}[X]$ -modulo finitamente generato. La risposta quindi è **SÌ**.

3. Se applico il Teorema di Struttura a V :

$$V \cong \mathbb{K}[X]^r \oplus V_{\text{tor}}.$$

Quanto vale r ?

Se $n = \dim_{\mathbb{K}} V$, allora $\text{End } V$ è \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita,

$$\dim_{\mathbb{K}}(\text{End } V) = n^2.$$

Quindi se considero $n^2 + 1$ elementi di $\text{End}(V)$, questi saranno linearmente dipendenti: in particolare, per

$$\text{Id}, \psi, \psi^2, \dots, \psi^{n^2}.$$

esistono $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, \dots, n^2$, non tutti nulli, tali che

$$a_0 \cdot \text{Id} + (a_1 \cdot \text{Id}) \circ \psi + (a_2 \cdot \text{Id}) \circ \psi^2 + \dots + (a_{n^2} \cdot \text{Id}) \circ \psi^{n^2} = 0 \in \text{End}(V).$$

Posso quindi considerare

$$F = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n^2} X^{n^2} \in \mathbb{K}[X]$$

tale che $\alpha(F) = 0$. Inoltre $F \neq 0$. Ma per ogni $v \in V$

$$F \cdot v = \left(a_0 \cdot \text{Id} + (a_1 \cdot \text{Id}) \circ \psi + (a_2 \cdot \text{Id}) \circ \psi^2 + \dots + (a_{n^2} \cdot \text{Id}) \circ \psi^{n^2} \right)(v) = 0 \in V$$

Riassumendo, questo significa che

$$\exists F \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \quad \forall v \in V \quad (F \cdot v = 0).$$

e pertanto $\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(V) \neq (0)$ ideale di $\mathbb{K}[X]$ (PID):^[340]

$$\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(V) = (m_{\psi, V}), \quad m_{\psi, V} \neq \emptyset.$$

Segue che $V = V_{\text{tor}}$ e pertanto $r = 0$.

Quindi V è un $\mathbb{K}[X]$ -modulo finitamente generato di torsione,

$$V \cong \frac{\mathbb{K}[X]}{(p_1^{i_1})} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{K}[X]}{(p_\ell^{i_\ell})}$$

con p_j irriducibili in $\mathbb{K}[X]$.

Si ha, fissata una base \mathcal{B} di V , la funzione

$$\begin{aligned} \text{End}_{\mathbb{K}}(V) &\longrightarrow \mathbb{K}^{n,n} \\ \psi &\longmapsto A_{\psi, \mathcal{B}}. \end{aligned}$$

Cerco una base \mathcal{B}' di V rispetto a cui la matrice di ψ sia particolarmente “semplice”.

Supponiamo che

$$V = C_1 \oplus C_2 \oplus \cdots \oplus C_t$$

dove i C_i sono sottospazi invarianti per ψ , ovvero $\mathbb{K}[X]$ -sottomoduli, ovvero $\psi(C_i) \subseteq C_i$. Scelgo una base \mathcal{B}_i per ciascuno dei C_i , e pongo

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_t$$

che è una base (poiché i C_i sono in somma diretta). Allora^[341]

$$A_{\psi, \mathcal{B}'} = \text{matrice a blocchi, recuperare il disegno.}$$

Il polinomio caratteristico di una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è

$$\det(A - X \cdot \text{Id})$$

Se $A = A_{\psi, \mathcal{B}}$ e $B = A_{\psi, \mathcal{B}'}$, allora i polinomi caratteristici di A e di B hanno gli stessi zeri. Inoltre

$$\det(A - X \cdot \text{Id}) \in \mathbb{K}[X], \quad \det(A - X \cdot \text{Id}) \in \text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(V).$$

D'ora in avanti \mathbb{K} è algebricamente chiuso.

Quali sono i polinomi irriducibili di $\mathbb{K}[X]$? Sono tutti e soli i polinomi di grado 1.

Supponiamo di considerare solo polinomi irriducibili monici: $X - a$. Lo posso fare poiché per ogni $u \in \mathbb{K}^\times$: $(p) = (up)$.

Definizione 273. Sia $a \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. La matrice $n \times n$ di Jordan relativa ad a è $J(a, n) \in \mathbb{K}^{n,n}$ è

$$J(a, n) = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

il cui polinomio caratteristico è $(a - X)^n$.

Teorema 274. Sia V uno spazio vettoriale.

V è un $\mathbb{K}[X]$ -modulo ciclico tale che

$$\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(V) = ((X - a)^u)$$

sse esiste una base di V tale che la matrice associata a ψ rispetto a questa base è $J(a, u)$

Dimostrazione. (\Rightarrow): Se V è ciclico allora esiste $v \in V$ tale che $\langle v \rangle_{\mathbb{K}[X]} = V$. Ogni elemento di V è del tipo $g \cdot v$ con $g \in \mathbb{K}[X]$. Ma $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}[X - a]$ e pertanto ogni $g \in \mathbb{K}[X]$ ha scrittura del tipo

$$g = \sum_{i=0}^t b_i (X - a)^i.$$

Inoltre, $(X - a)^u \cdot v = 0$, $(X - a)^i \cdot v \neq 0$ per $i = 0, \dots, u - 1$.

Consideriamo

$$v, (X - a)v, \dots, (X - a)^{u-1}v.$$

che sono u vettori non nulli. Verifco che sono linearmente indipendenti. Supponiamo

$$\sum_{i=0}^{u-1} b_i (X - a)^i \cdot v = 0. \quad (21)$$

e che almeno uno dei b_i non è 0. Sia j il minimo indice per cui $b_j \neq 0$.

Moltiplico la (21) per $(X - a)^{u-1-j}$, ottenendo che

$$\sum_{i=j}^{u-1} b_i (X - a)^{i+u-1-j} \cdot v = 0$$

ma per ogni $i > j$ si ha che $b_i (X - a)^{i+u-1-j} v = 0$, in quanto $\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(V) = ((X - a)^u)$. Pertanto

$$b_j \underbrace{(X - a)^{u-1}v}_{\neq 0} = 0 \implies b_j = 0.$$

Assurdo. Dunque $b_i = 0$ per ogni i , e

$$\mathcal{B} = \{v, (X - a)v, \dots, (X - a)^{u-1}v\}$$

è una base di V come \mathbb{K} -spazio vettoriale.

Inoltre

$$\begin{aligned} \psi(v) &= X \cdot v = av + (X - a)v \\ \psi((X - a)v) &= X(X - a)v = a(X - a)v + (X - a)^2v \\ &\vdots \\ \psi((X - a)^i v) &= a(X - a)^i v + (X - a)^{i+1}v \end{aligned}$$

e pertanto

$$A_{\psi, \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & a \end{pmatrix} = J(a, u).$$

(\Leftarrow) : V ha una base $\{v_1, \dots, v_u\}$ rispetto a cui la matrice di ψ è $J(a, u)$.

Nella stessa base, l'endomorfismo $\psi - a$ avrà matrice associata $J(0, u)$:

$$(\psi - a)v_1 = v_2, \quad (\psi - a)v_i = v_{i+1}, \text{ per } i = 1, \dots, u-1, \quad (\psi - a)v_u = 0.$$

Segue che V come $\mathbb{K}[X]$ -modulo è generato da v_1 , ovvero che V è ciclico come $\mathbb{K}[X]$ -modulo.

Inoltre si ha che

$$\begin{aligned} (X - a)^i \cdot v_1 &\neq 0 & i < u \\ (X - a)^u \cdot v_1 &= 0 \end{aligned}$$

e pertanto $\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(V) = ((X - a)^u)$. ■

Definizione 275. Una matrice $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ è in *forma canonica di Jordan* se esistono $a_1, \dots, a_s \in \mathbb{K}$ e $u_1, \dots, u_s \in \mathbb{N}$ tali che $u_1 + u_2 + \dots + u_s = u$ e

$$A = \begin{pmatrix} J(a_1, u_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(a_2, u_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J(a_s, u_s) \end{pmatrix}.$$

Teorema 276. Sia V spazio vettoriale di dimensione finita su \mathbb{K} campo algebricamente chiuso, $\psi \in \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Allora esiste una base di V tale che la matrice di ψ è in forma canonica di Jordan.

Dimostrazione. Ottengo una matrice come quella richiesta se

$$V = C_1 \oplus \dots \oplus C_\ell$$

come $\mathbb{K}[X]$ -moduli: C_i un $\mathbb{K}[X]$ -sottomodulo, ovvero un \mathbb{K} -sottospazio vettoriale tale che $\psi(C_i) \subseteq C_i$.

Inoltre C_i deve essere un $\mathbb{K}[X]$ modulo ciclico con $\text{Ann}_{\mathbb{K}[X]}(C_i)$ del tipo $((X - a_i)^{u_i})$.

Per il Teorema di struttura di un modulo finitamente generato su PID (versione 2) ottengo che

$$V = V_{\text{tor}} = \frac{\mathbb{K}[X]}{((X - a_1)^{u_1})} \oplus \dots \oplus \frac{\mathbb{K}[X]}{((X - a_\ell)^{u_\ell})}. ■$$

Esempio 277. Si consideri una matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]$$

Allora $\det(A - X \cdot \text{Id}) = (X - 3)(X - 1)^2 \cdot (X + 1)$. Ci sono quindi due possibilità per la matrice di Jordan:

1. $J(3, 1)$, 2 volte $J(1, 1)$, $J(-1, 1)$;
2. $J(3, 1)$, $J(1, 2)$, $J(-1, 1)$.

La situazione è la seconda. Si hanno v_1, v_2, v_3 relativi agli autovalori (rispettivamente) $3, -1, 1$.

Cerco v_4 . Si ricorda che $(X - 1)v_3 = 0$, e pertanto esiste v nella base dell'autospazio relativo a 1 tale che $(X - 1)v = v_3$. Faccio i conti (sistema di equazioni lineari).

Calcolando, trovo il v_4 vettore di base per avere ψ in forma di Jordan.

1090.24 Lezione 23 - <2025-11-17 Lun>

1090.24.1 Dipendenza Integrale

Definizione 278. Siano $A \subseteq B$ anelli commutativi con unità. Un elemento $u \in B$ si dice **intero** (o integrale) su A se $\exists n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ tali che:

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_1u + a_0 = 0$$

In altre parole, u è radice di un polinomio **monico** in $A[x]$.

Definizione 279. L'anello B si dice **intero** su A se ogni suo elemento è intero su A . Se $f : A \rightarrow A'$ è un morfismo di anelli, si dice che f è intero (o che A' è intero su A') se A' è intero su $\text{Im}(f) = f(A)$.

Esempio 280. Sia \mathbb{K} un campo e \mathbb{L} un suo sottocampo. $u \in \mathbb{K}$ è intero su \mathbb{L} sse u è **algebrico** su \mathbb{L} .

Lemma 281. Sia A un UFD (Dominio a Fattorizzazione Unica) e sia \mathbb{L} il campo delle frazioni di A . Se $u \in \mathbb{K}$ è intero su A , allora $u \in A$.

Dimostrazione. Distinguiamo due casi:

- Se $u = 0_{\mathbb{K}}$, allora $u = \frac{0_A}{1_A}$ e quindi $u = 0_A \in A$.
- Se $u \neq 0_{\mathbb{K}}$, supponiamo che sia intero su A . Possiamo scrivere $u = \frac{s}{t}$ con $s, t \in A$ e $t \neq 0$. Essendo A un UFD, possiamo scrivere s e t come prodotto di irriducibili e semplificare, quindi possiamo supporre che s e t non abbiano fattori irriducibili in comune. Poiché u è intero su A , esiste $n \in \mathbb{N}$ e $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ tali che:

$$\left(\frac{s}{t}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{s}{t}\right) + a_0 = 0$$

Moltiplicando l'equazione per t^n otteniamo:

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1}t + \cdots + a_1st^{n-1} + a_0t^n = 0$$

Isoliamo s^n :

$$s^n = -t(a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0t^{n-1})$$

Ogni addendo a destra è multiplo di t , quindi t divide s^n . I fattori irriducibili di t sono anche fattori irriducibili di s^n e quindi di s . Tuttavia, visto che t e s sono stati scelti senza fattori irriducibili comuni, allora t **non ha** fattori irriducibili. Ciò implica che t è invertibile, ovvero $t \in U(A)$. Di conseguenza:

$$u = \frac{s}{t} = t^{-1}s \in A$$

■

Esempio 282. Sia $A = \mathbb{Z}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Se $u \in \mathbb{Q}$ è radice di un polinomio monico a coefficienti in \mathbb{Z} , allora $u \in \mathbb{Z}$. Ad esempio, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$ è radice di $2x - 1$, ma non è intero su \mathbb{Z} (il polinomio non è monico).

Ripasso: Siano $A \subseteq B$ anelli.

1. Consideriamo l' A -modulo B : $A \xrightarrow{i} B$. La struttura è data dalla restrizione degli scalari: $A \times B \rightarrow B$ definita da $(a, b) \mapsto i(a) \cdot b$.
2. Siano $A \subseteq B \subseteq C$ anelli. Se C è finitamente generato come B -modulo (con generatori c_1, \dots, c_m) e B è finitamente generato come A -modulo (con generatori b_1, \dots, b_k), allora C è finitamente generato come A -modulo. I generatori sono data da $\{b_i c_j\}_{\substack{i=1, \dots, k \\ j=1, \dots, m}}$. Infatti $C = c_1 B + \cdots + c_m B$ e $B = b_1 A + \cdots + b_k A$.
3. Sia M un A -modulo finitamente generato e a un ideale di A . Sia $\phi : M \rightarrow M$ un morfismo tale che $\phi(M) \subseteq a \cdot M$. Allora $\exists a_i \in a$ tali che:

$$\phi^n + a_{n-1}\phi^{n-1} + \cdots + a_0Id = 0$$

(Questo è il morfismo nullo).

Lemma 283. Siano $A \subseteq B$ anelli. Sia M un B -modulo che è finitamente generato come A -modulo (con $n \geq 1$ generatori). Sia $u \in B$ e a un ideale di A tale che $u \cdot M \subseteq a \cdot M$. Allora $\exists a_i \in a, i = 0, \dots, n-1$ tali che:

$$u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \cdots + a_0 \in (0 :_B M) = \{b \in B \mid bM = 0_M\} = Ann_B(M)$$

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione $\phi : M \rightarrow M$ definita da $m \mapsto u \cdot m$. Vale $\phi(M) = u \cdot M \subseteq a \cdot M$. Dal richiamo (3) si ottiene la tesi applicando il polinomio caratteristico all'operatore di moltiplicazione per u . ■

Definizione 284. Un anello A e un A -modulo M si dicono **fedi** quando $(0 :_A M) = (0)$.

1090.24.2 Caratterizzazioni della Dipendenza Integrale

Teorema 285. Siano $A \subseteq B$ anelli e $u \in B$. Sono equivalenti:

1. u è intero su A .
2. Il sottoanello $A[u]$ di B è un A -modulo finitamente generato.
3. Esiste un sottoanello $A' \subseteq B$ tale che $A[u] \subseteq A'$ e A' è un A -modulo finitamente generato.
4. Esiste un $A[u]$ -modulo fedele che, quando considerato come A -modulo, è finitamente generato.

Dimostrazione. (1) \Rightarrow (2): Se u è intero su A , allora $\exists n \in \mathbb{N}, \exists a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ t.c. $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_0 = 0$. $A[u]$ come A -modulo è generato da $\{u^k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Dimostro per induzione che $u^{n+k} \in A \cdot 1 + \dots + A \cdot u^{n-1}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.

- **Base (n=0):** $u^n \in A \cdot 1 + \dots + A \cdot u^{n-1}$. Si ha $u^n = -a_{n-1}u^{n-1} + \dots + (-a_0)$. Vero.
- **Passo induttivo:** Voglio mostrare che $u^{n+k+1} \in A \cdot 1 + \dots + A \cdot u^{n-1}$ sia vero per $k+1$ assumendolo vero per k . Moltiplico per u e isolo poi u^n :

$$u^{n+k} \in A \cdot u^{n-1} + \dots + A \cdot u^0 \implies u^{n+k+1} \in A \cdot u^n + \dots + A \cdot u$$

Sostituendo u^n con la combinazione lineare degli elementi di grado inferiore (per ipotesi induttiva), otteniamo che appartiene a $A \cdot 1 + \dots + A \cdot u^{n-1}$. Quindi $A[u] = 1 \cdot A + \dots + u^{n-1} \cdot A$ e pertanto $A[u]$ è finitamente generato.

(2) \Rightarrow (3): Se $A[u]$ è un A -modulo finitamente generato, basta prendere $A' = A[u]$ per soddisfare la (3).

(3) \Rightarrow (4): Esiste A' sottoanello di B con $A[u] \subseteq A'$ ed A' finitamente generato. Considero $M = A'$. Per restrizione degli scalari è un $A[u]$ -modulo; per ipotesi è un A -modulo finitamente generato. Sia $\alpha \in (0 :_{A[u]} A')$: $\alpha A' = 0$, in particolare $\alpha \cdot 1_A = 0$ (poiché $1_A \in A \subseteq A'$). Quindi $\alpha \cdot 1_A = \alpha = 0$ e pertanto $\alpha = 0_A$. Segue che A' come $A[u]$ -modulo è fedele.

(4) \Rightarrow (1): Sia M un $A[u]$ -modulo fedele e A -modulo finitamente generato. Si ha $u \cdot M \subseteq M$ (poiché M è un $A[u]$ -modulo, è chiuso per moltiplicazione per u). Inoltre $M = A \cdot M$ (A -modulo f.g.). Uso il lemma precedente con $a = A$, $a \cdot M = M$. Esistono $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ t.c. $u^n + a_{n-1}u^{n-1} + \dots + a_0 \in (0 :_{A[u]} M) = (0)$ (perché M è fedele). ■

u è intero su A .

Corollario 286. Siano $A \subseteq B$ anelli. Siano $u_1, \dots, u_n \in B$ interi su A . Allora $A[u_1, \dots, u_n]$ è finitamente generato come A -modulo.

Dimostrazione. Induzione su n .

- **n=1:** (1) \Rightarrow (2) del teorema.
- **Passo induttivo:** $A[u_1, \dots, u_n] = (A[u_1, \dots, u_{n-1}])[u_n] \cong A'[u_n]$. $A' = A[u_1, \dots, u_{n-1}]$ è un $A[u_1, \dots, u_{n-2}]$ -modulo finitamente generato e per ipotesi di induzione si ha che $A[u_1, \dots, u_{n-1}]$ è un A -modulo finitamente generato. Dal teorema precedente (implicazione 2), poiché u_n è intero su A (e quindi su A'), $A'[u_n]$ è f.g. come A' -modulo. Per la proprietà transitiva dei moduli f.g. (Richiamo 2), $A[u_1, \dots, u_n]$ è un A -modulo finitamente generato. ■

1090.24.3 Chiusura Integrale

Lemma 287. Siano $A \subseteq B$ anelli. L'insieme $A' = \{u \in B \mid u \text{ intero su } A\}$ è un sottoanello di B che contiene A . A' si chiama **chiusura integrale** di A in B .

Dimostrazione. $A \subseteq A'$: ogni elemento $a \in A$ è intero su A (radice di $x - a$). Per dire che è un sottoanello, $\forall a, b \in A': a - b, ab \in A'$? Per il corollario sopra, $A[a, b]$ è un A -modulo finitamente generato. Sia $u = a - b$ (oppure $u = ab$). Allora $A[u] \subseteq A[a, b]$. Poniamo $A' = A[a, b]$. Si ha $A'[u] \subseteq A'$ (in realtà $u \in A'$) e A' è un A -modulo finitamente generato. Dall'implicazione $(3) \Rightarrow (1)$, u è intero su A . (L'idea è che u stabilizza un modulo fedele finitamente generato). ■

Corollario 288. Siano $A \subseteq B \subseteq C$. Se B è intero su A e C è intero su B , allora C è intero su A .

Dimostrazione. Sia $c \in C$. c è intero su B , quindi $\exists n \in \mathbb{N}, b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ t.c. $c^n + b_{n-1}c^{n-1} + \dots + b_0 = 0$. c è intero su $A[b_0, \dots, b_{n-1}]$. Per il corollario precedente, $A[b_0, \dots, b_{n-1}]$ è un A -modulo finitamente generato (ogni b_i è intero su A). Per il teorema, $A[b_0, \dots, b_{n-1}][c]$ è un $A[b_0, \dots, b_{n-1}]$ -modulo finitamente generato. Per la transitività (Richiamo 2), $A[b_0, \dots, b_{n-1}, c]$ è un A -modulo f.g. Questo anello contiene $A[c]$. Per l'implicazione $(3) \Rightarrow (1)$ (usando $A[b_0, \dots, c]$ come modulo test), c è intero su A . ■

Corollario 289. Siano $A \subseteq B$ anelli. Sia A' la chiusura integrale di A in B . La chiusura integrale di A' in B è A' (cioè A' è **integralmente chiuso** in B).

Dimostrazione. Sia A'' la chiusura integrale di A' in B . A' intero su A (per def) e A'' intero su A' (per def).

Allora, per il corollario precedente (transitività), A'' è intero su A . Ogni elemento di A'' è intero su A , quindi $A'' \subseteq A'$ e in particolare $A' = A''$. ■

1090.24.4 Comportamento con Quozienti e Localizzazioni

Siano $A \subseteq B$ anelli, B intero su A .

Lemma 290. Sia b un ideale di B . Sia $a = b \cap A$ (l'ideale contratto). Si ha il diagramma commutativo:

$$\phi : A \hookrightarrow B \rightarrow B/b$$

con $\ker \phi = a$. Questo induce un morfismo iniettivo $\bar{g} : A/a \rightarrow B/b$. Posso “pensare” A/a come sottoanello di B/b . Allora B/b è intero su A/a .

Dimostrazione. Sia $\bar{B} \in B/b$. Devo mostrare che è intero su A/a . Sia $b \in B$ un rappresentante. b è intero su A , quindi:

$$\forall b \in B : b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad \text{con } a_i \in A$$

Rileggo l'equazione in B/b :

$$\bar{b}^n + \bar{a}_{n-1}\bar{b}^{n-1} + \dots + \bar{a}_0 = 0 \quad \text{con } \bar{a}_i = a_i \pmod{a}$$

La relazione “stella” (l'equazione polinomiale) mi dà una relazione intera per \bar{b} in B/b su A/a . ■

Lemma 291. Sia S parte moltiplicativa di A . Esiste $g : S^{-1}A \rightarrow S^{-1}B$ morfismo iniettivo. Questo g mi permette di “pensare” $S^{-1}A$ come sottoanello di $S^{-1}B$. $g\left(\frac{a}{s}\right) \mapsto \frac{a}{s}$. Allora $S^{-1}B$ è un intero su $S^{-1}A$.

Dimostrazione. $\forall x \in B, s \in S$, prendo la relazione intera su A per x . Cerco relazione intera per $\frac{x}{s} \in S^{-1}B$ su $S^{-1}A$. Prendo l’equazione per x e la “divido” per s^n . \blacksquare

Corollario 292. Siano $A \subseteq B$ anelli, A' chiusura integrale di A in B . Se S è parte moltiplicativa di A , allora $S^{-1}A'$ è la chiusura integrale di $S^{-1}A$ in $S^{-1}B$.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare l’uguaglianza tra due insiemi.

- $S^{-1}A'$ è intero su $S^{-1}A$ (per il lemma precedente, punto 2).
- Sia $\frac{b}{s} \in S^{-1}B$ (con $b \in B, s \in S$) un elemento intero su $S^{-1}A$. $\exists h \in \mathbb{N}, \exists \frac{a_0}{s_0}, \dots, \frac{a_{h-1}}{s_{h-1}} \in S^{-1}A$ (con $a_i \in A, s_i \in S$) tali che:

$$\left(\frac{b}{s}\right)^h + \frac{a_{h-1}}{s_{h-1}} \left(\frac{b}{s}\right)^{h-1} + \dots + \frac{a_0}{s_0} = 0$$

Sia $v = s_{h-1} \dots s_0 \in S$. Moltiplico l’equazione per $(sv)^h$:

$$\frac{v^h b^h}{1} + \frac{v^h b^{h-1} (sa_{h-1} \dots)}{s_{h-1} \dots} + \dots = 0$$

(Nota: l’obiettivo è eliminare i denominatori). Si ottiene un’espressione del tipo:

$$(s'b)^h + x_{h-1}(s'b)^{h-1} + \dots + x_0 = 0$$

dove $s' \in S$ e i coefficienti $x_i \in A$. Quindi $\exists s' \in S$ t.c. $s'b$ soddisfa un’equazione di dipendenza integrale su A .

$s'b$ è intero su A e quindi $s'b \in A'$. Allora:

$$\frac{b}{s} = \frac{s'b}{s's} \in S^{-1}A'$$

(poiché $s'b \in A'$ e $s's \in S$). \blacksquare

1090.25 Lezione 24 - <2025-11-18 Mar>

Definizione 293. Sia A un dominio. Con “chiusura integrale di A ” si intende la chiusura integrale di A nel campo delle frazioni di A .

Se A anello commutativo con l’unità, con “chiusura integrale di A ” si intende nell’anello $V^{-1}A$, dove

$$V = \{a \in A \mid a \text{ non è 0-divisore}\}.$$

Proposizione 294. Siano $A \subseteq B$ anelli, B dominio e B intero su A .

$$B \text{ campo} \iff A \text{ campo.}$$

Dimostrazione. (\Leftarrow): Sia A un campo, e sia $b \in B$, $b \neq 0$. b è intero su A , e quindi esiste $h \in \mathbb{N}$ ed esistono $a_0, \dots, a_{h-1} \in A$ tali che

$$b^h + a_{h-1}b^{h-1} + \dots + a_0 = 0$$

Supponiamo di aver scelto h minimo per cui esiste relazione integrale per b .

Isolando a_0 si ottiene

$$a_0 = -(b^{h-1} + a_{h-1}b^{h-2} + \dots + a_1)b.$$

Siccome $b \neq 0$ e per minimimalità di h si ha che $b^{h-1} + a_{h-1}b^{h-2} + \dots + a_1 \neq 0$. Questo vale in B dominio.

Pertanto $a_0 \neq 0$ in A campo. Dunque esiste $a_0^{-1} \in A \subseteq B$, e si ottiene

$$a_0^{-1} a_0 = \underbrace{-a_0^{-1} (b^{h-1} + a_{h-1}b^{h-2} + \dots + a_1)}_{b^{-1} \in B} b.$$

dove LHS è 1, e pertanto esiste $b^{-1} \in B$, dunque B campo.

(\Rightarrow): Sia B un campo, e $x \in A \subseteq B$, $x \neq 0$. Allora esiste $x^{-1} \in B$. Dimostro che $x^{-1} \in A$.

Esiste $t \in \mathbb{N}$ ed esistono $a_0, \dots, a_{t-1} \in A$ tale che

$$(x^{-1})^t + \dots$$

MANCA LA FINE

■

Corollario 295. Sia $A \subseteq B$ sottoanello, B intero su A .

Considero $q \in \text{Spec}(B)$. $q^c = q \cap A = p \in \text{Spec}(A)$.

$$q \text{ massimale in } B \iff p \text{ massimale in } A.$$

Dimostrazione. B/q è dominio ed è intero su A/p .

q è massimale in B sse B/q è campo, sse (per la prop. precedente) A/p è campo, sse p è massimale in A .

■

Reminder. Se $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ morfismi di anelli, e J ideale di C :

$$(g \circ f)^{-1}(J) = f^{-1}(g^{-1}(J))$$

è ideale.

Teorema 296. (Incompatibility Theorem). Sia $A \subseteq B$ anelli, B intero su A .

Siano $q_1, q_2 \in \text{Spec}(B)$ tali che $q_1 \subseteq q_2$ e $q_1 \cap A = q_2 \cap A = p \in \text{Spec}(A)$.

Allora $q_1 = q_2$.

Il nome del teorema segue dalla sua negazione: se $q_1 \neq q_2 \in \text{Spec}(B)$ e $q_1 \cap A = q_2 \cap A = p \in \text{Spec}(A)$ allora

$$q_1 \not\subseteq q_2 \quad \wedge \quad q_2 \not\subseteq q_1.$$

Dimostrazione. Sia $S = A \setminus p$ parte moltiplicativa di $A \subseteq B$. S è anche parte moltiplicativa di B . Scrivo $S^{-1}A = A_p$, con un abuso di notazione $S^{-1}B = B_p$.

Se B è intero su A , allora B_p è intero su A_p . A_p è anello locale, il suo unico ideale massimale è pA_p .

Inoltre si ha che $q_1 B_p \subseteq q_2 B_p$, e anche $q_1 B_p \cap A_p = q_2 B_p \cap A_p = pA_p$.

Per il risultato precedente $q_1 B_p$ e $q_2 B_p$ sono ideali massimali, e pertanto

$$q_1 B_p = q_2 B_p.$$

Gli ideali primi di B_p sono in corrispondenza 1:1 con gli ideali primi di B che non intersecano p . Segue che $q_1 = q_2$. \blacksquare

Teorema 297. (*Lying Over Theorem*). Siano $A \subseteq B$ anelli, B intero su A e $p \in \text{Spec}(A)$. Allora esiste $q \in \text{Spec}(B)$ tale che

$$q \cap A = p.$$

Dimostrazione. Sia $S = A \setminus p$ e considero B_p intero su A_p . I morfismi “canonici” danno questo diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & B \\ \theta \downarrow & & \downarrow \phi \\ A_p & \xrightarrow{\tilde{i}} & B_p \end{array}$$

Esiste un ideale massimale M in B_p . Allora $\tilde{i}^{-1}[M]$ è massimale in A_p anello locale:

$$\tilde{i}^{-1}[M] = pA_p.$$

$\phi^{-1}[M]$ è primo, e lo chiamo $q := \phi^{-1}[M]$.

$$\begin{aligned} q^c &= i^{-1}[q] = i^{-1}[\phi^{-1}[M]] \\ &= \theta^{-1}[\tilde{i}^{-1}[M]] = \theta^{-1}[pA_p] = p. \end{aligned}$$

\blacksquare

Teorema 298. (*Going-up Theorem*). Siano $A \subseteq B$ anelli, B intero su A . Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$, siano

$$p_0 \subset p_1 \subset \cdots \subset p_{n-1} \subset p_n$$

con $p_i \in \text{Spec}(A)$, e siano

$$q_0 \subset q_1 \subset \cdots \subset q_{m-1} \subset q_m$$

con $q_i \in \text{Spec}(B)$ tali che $\forall j = 1, \dots, m$

$$q_j \cap A = p_j.$$

Allora è possibile estendere la catena di ideali primi di B con $q_{m+1}, \dots, q_n \in \text{Spec}(B)$ tali che

$$q_m \subset q_{m+1} \subset \cdots \subset q_n$$

e $q_i \cap A = p_i$ per $i = m+1, \dots, n$.

Dimostrazione. È sufficiente ricondurci a $m = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{array}{ll} p_0 \subset p_1 & \text{in } A \\ q_0 & \text{in } B. \end{array}$$

Cerco $q_1 \in \text{Spec}(B)$ tale che $q_0 \subset q_1$ e $q_1 \cap A = p_1$.

B/q_0 è intero su A/p_0 e il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\tau} & B \\ \varepsilon \downarrow & & \downarrow \psi \\ A/p_0 & \xrightarrow{\rho} & B/q_0 \end{array}$$

È fissato $p_1/p_0 \in \text{Spec}(A/p_0)$. Per il *Lying over Theorem* esiste $Q \in \text{Spec}(B/q_0)$ tale che

$$\rho^{-1}(Q) = p_1/p_0.$$

Allora esiste un unico ideale primo $q_1 \in \text{Spec}(B)$, contenente q_0 ^[342], tale che $\psi^{-1}[Q] = q_1$.

Controllo che $q_1 \cap A = p_1$:

$$\begin{aligned} q_1 \cap A &= \tau^{-1}[q_1] = \tau^{-1}[\psi^{-1}[Q]] \\ &= \varepsilon^{-1}[\rho^{-1}[Q]] = \varepsilon^{-1}[p_1/p_0] = p_1. \end{aligned}$$
■

Definizione 299. Siano $A \subseteq B$ anelli, A ideale su A .

L'elemento $b \in B$ è intero su A se esistono $h \in \mathbb{N}$ ed esistono $a_0, \dots, a_{h-1} \in A$ tali che

$$b^h + a_{n-1} b^{h-1} + \dots + a_0 = 0.$$

La chiusura integrale di A in B è l'insieme degli elementi di B interi su A .

Osservazione. Se A' è la chiusura integrale di A in B , la chiusura integrale di A sta in A' .

Lemma 300. Siano $A \subseteq B$ anelli, A' chiusura integrale di A in B . Sia A ideale di A , e sia A^e in A' .

Allora la chiusura integrale di A in B è

$$\sqrt{A^e} \subseteq A'.$$

Dimostrazione. Sia $x \in B$ intero su A . Allora esiste $h \in \mathbb{N}$ ed esistono $a_0, \dots, a_{h-1} \in A$ tali che

$$x^h + a_{n-1} x^{h-1} + \dots + a_0 = 0$$

Si ha che $a_i \in A$, e quindi $x \in A'$. Isolando x^h :

$$x^h = -(a_{n-1} x^{h-1} + \dots + a_0).$$

Si ha che $x^h \in A'$ e che i coefficienti $a_i \in A \subseteq A^e$ e pertanto $x^h \in A^e$, ovvero $x \in \sqrt{A^e}$.

Sia quindi ora $x \in \sqrt{A^e}$, quindi $x^n \in A^e$:

$$x^n = a_1 x_1 + \cdots + a_\ell x_\ell$$

con $a_i \in A$ e $x_i \in A'$. x_i è intero su B per ogni $i = 1, \dots, \ell$.

Quindi detto $M = A[x_1, \dots, x_\ell]$ è modulo finitamente generato, e inoltre

$$x^n M \subseteq AM.$$

Per un lemma precedente (pre Nakayama), con ϕ la moltiplicazione di x^n , ottengo una relazione “integrale” per x a coefficienti in A :

$$(x^n)^t + a'_{t-1}(x^n)^{t-1} + \cdots + a'_0 = 0, \quad a'_i \in A.$$

Quindi x sta nella chiusura integrale di A . ■

Proposizione 301. Siano $A \subseteq B$ domini. Sia A integralmente chiuso. Sia A ideale di A e $x \in B$ intero su A .

Allora x è algebrico su \mathbb{K} , campo delle frazioni di A , e se il polinomio minimo di x su \mathbb{K} è

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0, \quad a_i \in \mathbb{K}$$

allora $a_i \in \sqrt{A}$.

Dimostrazione. x è algebrico su \mathbb{K} se è radice di un polinomio a coefficienti in \mathbb{K} .

Per ipotesi $x \in B$ intero su A ideale di A : soddisfa una relazione integrale monica a coefficienti in A . Da questa ho un polinomio a coefficienti in $A \subseteq \mathbb{K}$ di cui x è radice. Pertanto x è algebrico su \mathbb{K} .

Sia $g = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$ il polinomio minimo di x in $\mathbb{K}[t]$. (Questo è unico fintantoché monico.)

Sia \mathbb{L} un'estensione di \mathbb{K} che contiene tutte le radici di g :

$$g = (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n)$$

in $\mathbb{L}[t]$, con $x_1 = x$. I coefficienti di g sono funzioni simmetriche negli x_i : (a meno dei segni)

$$\begin{aligned} & x_1 + \cdots + x_n \\ & \sum_{1 \leq 1 < j \leq n} x_i x_j \\ & \vdots \\ & x_1 \cdots \cdot x_n. \end{aligned}$$

e pertanto gli a_i sono in $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

Dalla teoria dei campi si ha: se $x = x_1$ soddisfa una relazione integrale a coefficienti in A , allora anche gli altri x_i soddisfano la stessa relazione: x_i è intera su A .

Dal risultato precedente: i coefficienti del polinomio minimo $g \in \mathbb{K}[t]$ di x sono $a_i \in \mathbb{K}$ e sono polinomi nelle x_i interi su A e quindi su A .

Pertanto gli a_i stanno nella chiusura integrale di A in \mathbb{K} , con A integralmente chiuso (in \mathbb{K}). Segue $a_i \in A$.

Inoltre a_i è intero su A e quindi

$$a_i^\ell + \alpha_{\ell-1} a^{\ell-1} + \cdots + \alpha_0 = 0$$

con $a_j \in A$. Pertanto $a_i^\ell \in A$, dunque $a_i \in \sqrt{A}$. ■

Teorema 302. (*Going-down Theorem*). Siano $A \subseteq B$ anelli, B intero su A , B dominio. Sia A integralmente chiuso nel suo campo delle frazioni \mathbb{K} .

Considero $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$. Siano

$$\begin{aligned} p_0 \supset p_1 \supset \cdots \supset p_n, \quad p_i \in \text{Spec}(A) \\ q_0 \supset q_1 \supset \cdots \supset q_m, \quad q_i \in \text{Spec}(B) \end{aligned}$$

tali che per ogni $i = 0, \dots, m$: $q_i \cap A = p_i$.

Allora è possibile estendere la catena in B con

$$q_m \supset q_{m+1} \supset \cdots \supset q_n$$

tali che $q_j \cap A = p_j$ per ogni $j = m+1, \dots, n$

Dimostrazione. È sufficiente ricondurci a $m = 0$ e $n = 1$:

$$\begin{array}{ll} p_0 \supset p_1 & \text{in } A \\ q_0 & \text{in } B. \end{array}$$

Si ha $q_0 \cap A = p_0$.

Cerco $q_1 \in \text{Spec}(B)$, $q_0 \supset q_1$ e $q_1 \cap A = p_1$.

Sia $S = B \setminus q_0$ e sia $S^{-1}B = B_{q_0}$. Se $Q \in \text{Spec}(B_{q_0})$ allora $Q^c \subseteq B$ che è tale che $B \cap S = \emptyset$. Allora $Q^c \subseteq q_0$.

$$p_1 \rightarrow p_1 B \rightarrow p_1 B_{q_0}.$$

Tesi: $p_1 B_{q_0} \cap A = p_1$.

Sia $x \in p_1 B_{q_0}$: $x = y/s$, $s \in B \setminus q_0$ e $y \in p_1 B$. Pertanto y è intero su p_1 : per il risultato sopra, il polinomio minimo di y su \mathbb{K} :

$$X^h + a_{h-1} X^{h-1} + \cdots + a_0$$

ha $a_i \in \sqrt{p_1} = p_1$. Vale $y^h + a_{h-1} y^{h-1} + \cdots + a_0 = 0$.

Sia quindi ora $x \in p_1 B_{q_0} \cap A$: $x = y/s$ con le caratteristiche di sopra.

$$s = y \cdot x^{-1}, \quad x^{-1} \in \mathbb{K}.$$

Dividendo il polinomio minimo di y per x^h :

$$\left(\frac{y}{x}\right)^h + \frac{a_{n-1}}{x} \left(\frac{y}{x}\right)^{h-1} + \cdots + \frac{a_0}{x^h} = 0$$

dove $y/x = s$. Inoltre $a_i/x^{h-i} = v_i \in \mathbb{K}$, $a_i = v_i x^{h-1} \in p_1$.

s è intero su A , allora $v_i \in A$ (risultato precedente ponendo $A = A$).

Supponiamo per assurdo $x \notin p_1$. Allora $v_i \in p_1$ e pertanto $s^h \in p_1 B \subset p_0 B \subseteq q_0$, e pertanto $s \in q_0$ ideale primo. Ma s è in $S = B \setminus q_0$. Assurdo

Allora $x \in p_1$, e quindi $p_1 B_{q_0} \cap A \subseteq p_1$. L'altra inclusione è vera, e quindi $p_1 B$ estende la catena. ■

Parte III

Tecniche computazionali per ideali di $\mathbb{K}[X_0, \dots, X_n]$

1090.26 Lezione 25 - <2025-11-21 Ven>

Ripasso sulle A -algebre

Le \mathbb{K} -algebre finitamente generate sono uno dei principali oggetti di studio della geometria algebrica.

Consideriamo $\mathbb{K}[X]$, con \mathbb{K} campo. Questo è un PID (e quindi dominio euclideo), e considero I ideale di $\mathbb{K}[X]$. $I = (f)$.

- Sia $g \in \mathbb{K}[X]$: come faccio a stabilire se $g \in I$?

$$g \in I \iff \text{il resto della divisione euclidea di } g \text{ rispetto a } f \text{ è } 0.$$

- $\mathbb{K}[X]/I$ ha un sistema completo di generatori standard? Prendo come rappresentanti i possibili resti delle divisioni rispetto a f .

Esempio 303. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, e $\deg(f) = n > 0$. I rappresentanti per $\mathbb{R}[X]/(f)$ sono del tipo

$$a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1}, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Allora $\mathbb{R}[X]/I$ è un \mathbb{R} -spazio vettoriale che ha una base di n elementi:

$$\mathbb{R}[X]/I \cong \mathbb{R}[Y]_{\leq n-1} \quad \text{come spazio vettoriale}$$

Consideriamo ora $\mathbb{K}[X, Y]$: questo è un UFD, ma non è un PID.

- Se considero un ideale $I = (f_1, f_2)$ non principale, come faccio a capire se $g \in \mathbb{K}[X, Y]$ è $g \in I$?

$$I = (f_1, f_2) = \{s f_1 + t f_2 \mid s, t \in \mathbb{K}[X, Y]\}$$

Questo è l'**ideal membership problem** (basi di Gröbner).

1090.26.1 Monoide

Definizione 304. Γ è un monoide se è un insieme con una operazione binaria

$$\cdot : \Gamma \times \Gamma \longrightarrow \Gamma$$

tale che \cdot è associativa, e tale che esiste un elemento neutro $1_\Gamma \in \Gamma$ tale che

$$a \cdot 1_\Gamma = 1_\Gamma \cdot a = a \quad \forall a \in \Gamma.$$

Osservazione. La richiesta di associatività è per avere la possibilità di moltiplicare più di due elementi alla volta: mi “dimentico” delle parentesi.

In questa parte del corso useremo sempre monoidi commutativi.

Esempio 305. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ è un monoide e non è un gruppo. Anche $\langle \mathbb{N}^n, + \rangle$ con la ovvia somma coordinata per coordinata è un monoide ma non è un gruppo.

Definizione 306. Sia $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ un monoide.

1. $\Delta \subseteq \Gamma$, $\Delta \neq \emptyset$ è un mono-ideale se $\forall \delta \in \Delta, \forall \gamma \in \Gamma: \delta \cdot \gamma \in \Delta$.
2. $B \subseteq \Delta$, con Δ monoideale di Γ , B è un sistema di generatori per Δ se Δ è il più piccolo monoideale di Γ che contiene B .

Se B è un sistema di generatori per Δ , allora

$$\Delta = \{\beta \cdot \gamma \mid \beta \in B, \gamma \in \Gamma\}.$$

3. Σ con una operazione

$$\begin{aligned} * : \Gamma \times \Sigma &\longrightarrow \Sigma \\ (\gamma, s) &\longmapsto \gamma * s. \end{aligned}$$

Σ è un Γ -mono-modulo se $\forall s \in \Sigma, \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma:$

- (a) $1_\Gamma * s = s$;
- (b) $(\gamma_1 \cdot \gamma_2) * s = \gamma_1 * (\gamma_2 \cdot s)$.
4. $\Sigma' \subseteq \Sigma$, con Σ un Γ -mono-modulo, $\Sigma' \neq \emptyset$, Σ' è un sottomonomodulo se $\Gamma * \Sigma' \subseteq \Sigma'$.
5. $B \subseteq \Sigma$, con Σ un Γ -mono-modulo, B è un sistema di generatori se

$$\Sigma = \{\gamma * s \mid \gamma \in \Gamma, s \in B\}.$$

Esempio 307. 1. Consideriamo il monoide $\langle \mathbb{N}, + \rangle$. Cos'è un monoideale? È $C \subseteq \mathbb{N}$, $C \neq \emptyset$ tale che $\forall c \in C, \forall n \in \mathbb{N}:$

$$c + n \in C.$$

Quindi tutti i monoideali sono della forma

$$C_{n_0} := \{t \in \mathbb{N} \mid t \geq n_0\}.$$

per $n_0 \in \mathbb{N}$ fissato.

2. Consideriamo il monoide $\langle \mathbb{N}^n, + \rangle$. $C \subseteq \mathbb{N}^n$ è un monoideale se $C \neq \emptyset$ e

$$\forall (c_1, \dots, c_n) \in C, \forall (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n \left[(c_1 + m_1, \dots, c_n + m_n) \in C \right].$$

3. Consideriamo $P = A[X_1, \dots, X_n]$, con A anello commutativo con unità. Un termine è $f \in P$ tale che

$$f = X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n}, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}.$$

Chiamo $T^{(n)}$ l'insieme dei termini di P . Ogni polinomio di P è una combinazione lineare di termini di $T^{(n)}$ a coefficienti in A .

$$\forall f \in P : f = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \cdots + c_n t_n, \quad c_i \in A, t_i \in T^{(n)}. \quad (22)$$

Quindi $T^{(n)}$ è una A -base di P come A -modulo. Chiamo

$$\text{supp}(f) = \{t \in T^{(n)} \mid c_t \neq 0\}$$

dove c_t è il coefficiente di t nella scrittura (22).

Un monomio è $c \cdot t$, con $c \in A$ e $t \in T^{(n)}$. Se $A = K$ “confonderemo” le parole “monomio” e “termine”, in quanto tutti i coefficienti non nulli possono essere invertiti.

Allora l'insieme $T^{(n)}$ dotato del prodotto tra polinomi è un monoide:

- il prodotto è ovviamente associativo;
- l'elemento neutro, $1 = X_1^0 \dots X_n^0$ appartiene a $T^{(n)}$.

Inoltre

$$\begin{aligned} \log : T^{(n)} &\longrightarrow \mathbb{N}^n \\ X_1^{\alpha_1} \dots X_n^{\alpha_n} &\longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \end{aligned}$$

è un isomorfismo di monoidi: $\langle T^{(n)}, \cdot \rangle \cong \langle \mathbb{N}^n, + \rangle$.

Proposizione 308. Sia $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ un monoide. LSASE:

1. Ogni monoideale di Γ è finitamente generato.
2. Ogni catena ascendente di monoideali di Γ è stazionaria.
3. Ogni sottoinsieme non vuoto di monoideali di Γ ha un elemento \subseteq -massimale.

Definizione 309. Se vale una delle affermazioni precedenti, si dice che $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ è un monoide Noetheriano.

Osservazione. Non tutti i monoidi sono Noetheriani. Infatti, si consideri $\langle \mathbb{Q}_{\geq 0}, + \rangle$: questo è un monoide. Inoltre $I := \mathbb{Q}_{> 0}$ è un monoideale, ed è generato da

$$\left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}, n \neq 0 \right\}$$

e non è possibile generare I con un insieme più piccolo.

Lemma 310. (Lemma di Dickson). Si consideri $\langle \mathbb{N}^n, + \rangle$ con l'ordine parziale:

$$(v_1, \dots, v_n) \leq (w_1, \dots, w_n) \iff \forall i = 1, \dots, n \ (v_i \leq w_i).$$

Sia $L \subseteq \mathbb{N}^n$, $L \neq \emptyset$ e sia

$$\begin{aligned} L^{\min} &:= \{v \in L \mid v \text{ minimale rispetto a } \leq\} \\ &= \{v \in L \mid \text{se esiste } w \in L \text{ con } w \leq v \text{ allora } v = w\} \\ &= \{v \in L \mid \text{se } v = w + u \text{ con } w \in L \text{ e } u \in \mathbb{N}^n \text{ allora } u = \mathbf{0}\}. \end{aligned}$$

Allora L^{\min} è un insieme finito.

Dimostrazione. Per induzione su n .

- $n = 1$: sia $L \subseteq \mathbb{N}$, $L \neq \emptyset$:

$$L^{\min} = \left\{ \min \{ \ell \mid \ell \in L \} \right\} = \{a\}.$$

- Supponiamo la tesi vera per \mathbb{N}^{n-1} . Sia $L \subseteq \mathbb{N}^n$, $L \neq \emptyset$. Associo a L un sottoinsieme $L' \subseteq \mathbb{N}^{n-1}$:

$$(\ell_1, \dots, \ell_{n-1}, \ell_n) \in L \mapsto (\ell_1, \dots, \ell_{n-1}) \in L'.$$

Per L' vale l'ipotesi induttiva, e pertanto

$$(L')^{\min} = \{w'_1, \dots, w'_s\} \subseteq \mathbb{N}^{n-1}.$$

Posso inoltre considerare

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^{n-1} &\hookrightarrow \mathbb{N}^n \\ (v_1, \dots, v_{n-1}) &\mapsto (v_1, \dots, v_{n-1}, 0) \end{aligned}$$

Allora identifico mediante questo morfismo elementi di \mathbb{N}^{n-1} in \mathbb{N}^n : in particolare

$$w'_i = (w_1^{(i)}, \dots, w_{n-1}^{(i)}, 0) \in L' \subseteq \mathbb{N}^n.$$

Pertanto esiste $b_i \in \mathbb{N}$ tale che

$$(w_1^{(i)}, \dots, w_{n-1}^{(i)}, 0) + (0, \dots, 0, b_i) = (w_1^{(i)}, \dots, w_{n-1}^{(i)}, b_i) \in L.$$

Quindi $w'_i \leq (w_1^{(i)}, \dots, w_{n-1}^{(i)}, b_i)$.

Chiamo $b = \max \{b_1, \dots, b_s\}$. Per ogni $\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale $0 \leq \varepsilon < b$, si definisce

$$L_\varepsilon = \{v \in L' \mid v + (0, \dots, 0, \varepsilon) \in L\}.$$

Virtualmente posso pensare che $L_\varepsilon \subseteq \mathbb{N}^{n-1}$ (scordandomi dell'ultima coordinata, che è 0), e pertanto L_ε^{\min} è finito:

$$L_\varepsilon^{\min} = \{u_1^{(\varepsilon)}, \dots, u_{s_\varepsilon}^{(\varepsilon)}\}.$$

Ogni elemento di L si ottiene come $u + v$ con $v \in \mathbb{N}^n$, e u nella lista seguente:

$$\begin{array}{lll} w'_1 + (0, \dots, 0, b_1); & \dots & w'_s + (0, \dots, 0, b_s) & (L')^{\min} \\ u_1^{(1)} + (0, \dots, 0, 1); & \dots & u_{s_1}^{(1)} + (0, \dots, 0, 1) & L_1^{\min} \\ \vdots & & & \\ u_1^{(b-1)} + (0, \dots, 0, b-1); & \dots & u_{s_{b-1}}^{(b-1)} + (0, \dots, 0, b-1) & L_{b-1}^{\min}. \end{array}$$

Infatti, sia $w \in L$:

$$w = (w_1, \dots, w_n) = (w_1, \dots, w_{n-1}, 0) + (0, \dots, 0, w_n).$$

Se $w_n \geq b$, allora w è \geq di uno degli elementi della prima riga. Invece, se $w_n < b$ allora w è \geq di uno degli elementi della riga $\varepsilon = w_n$.

Quindi L^{\min} è un sottoinsieme degli elementi elencati sopra, e quindi è finito. ■

Corollario 311. Per ogni $n \geq 1$, $\langle \mathbb{N}^n, + \rangle$ è Noetheriano.

Dimostrazione. Sia Γ un monoideale di $\langle \mathbb{N}^n, + \rangle$. Allora Γ^{\min} è finito e genera tutto Γ . ■

1090.27 Lezione 26 - <2025-11-24 Lun>

Corollario 312. Sia $n \geq 1$, e sia $\{t_i\}_{i \in I \subseteq \mathbb{N}} \subseteq T^{(n)}$. Allora esiste $N > 0$ tale che per ogni $i > N$, t_i è multiplo di uno dei termini t_1, \dots, t_N .

Inoltre il monoideale generato da $\{t_i\}_{i \in I}$ è finitamente generato da $\{t_1, \dots, t_N\}$.

Dimostrazione. Consideriamo l'isomorfismo

$$\log : \langle T^{(n)}, \cdot \rangle \rightarrow \langle \mathbb{N}^n, + \rangle$$

e l'insieme $L := \{\log t_i\}_{i \in I} \subseteq \mathbb{N}^n$. Allora L^{\min} è finito, per il Lemma di Dickson.

Allora $\log^{-1}[L^{\min}]$ è un sottoinsieme finito di termini di $T^{(n)}$. A meno di rinominare gli indici, sia t_1 "minimale", ovvero $t_1 = \log^{-1}(m)$ per $m \in L^{\min}$.

$\log(t_1) = m \in L$ è minimale rispetto alla relazione \leq definita come segue:

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \leq (\beta_1, \dots, \beta_n) \iff \forall i \alpha_i \leq \beta_i.$$

e pertanto per ogni $t \in \{t_i\}_{i \in I}$, se $\log(t_1) \leq \log(t)$ allora $t = t_1 \cdot X^{u_1} \cdots X_n^{u_n}$.

A meno di riordinare gli indici, $\log^{-1}[L^{\min}] = \{t_1, \dots, t_N\}$. Allora ogni $t \in \{t_i\}_{i \in I}$ è multiplo di uno dei t_1, \dots, t_N . ■

Definizione 313. Sia $P = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, \mathbb{K} campo. Se I è ideale di P generato da termini, allora I è un ideale monomiale.

Proposizione 314. Sia I ideale di P . I è monomiale sse per ogni $f \in I$, $\text{supp } f \subseteq I$.

Dimostrazione. Dato $f = \sum_{t \in T^{(n)}} c_t t$, per $c_t \in \mathbb{K}$, si indica con

$$\text{supp } f := \left\{ t \in T^{(n)} \mid c_t \neq 0 \right\}.$$

(\Rightarrow): I è generato da $\{f \mid f \in I\}$. Per ipotesi, $\forall f \in I$ si ha che $\text{supp } f \subseteq I$. Inoltre f appartiene all'ideale generato da $\text{supp } f$. Quindi

$$\bigcup_{f \in I} \text{supp } f \subseteq I \subseteq \left(\bigcup_{f \in I} \text{supp } f \right)$$

Quindi I è generato da $\bigcup_{f \in I} \text{supp } f \subseteq T^{(n)}$ e quindi è un ideale monomiale.

(\Leftarrow): I è generato da un insieme di termini $\{t_j\}_{j \in J}$, e pertanto per ogni $f \in I$:

$$f = \sum g_i \cdot t_i, \quad g_i \in P.$$

Se $g_i = \sum_{\eta_j \in T^{(n)}} c_j \eta_j$ allora

$$g_i t_i = \sum_{\eta_j \in T^{(n)}} c_j \eta_j t_i$$

e pertanto ogni termine di $\text{supp } f$ è del tipo $\eta_j t_i$, con $\eta_j \in T^{(n)}$ e t_i tra i generatori di I .

Segue che $\text{supp } f \subseteq I$. ■

Osservazione. Se I è un ideale monomiale, posso considerare invece dei termini $\{t_i\}_{i \in I} \subseteq T^{(n)}$ che lo generano, l'insieme $\{c_i t_i\}_{i \in I}$ con $c_i \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ che è ancora un insieme di generatori di I .

Quando voglio un insieme di generatori per un ideale monomiale, considerare termini o monomi è “praticamente” uguale.

Esempio 315. In $\mathbb{Q}[X, Y]$, i due ideali:

$$\begin{aligned} I &= (2X, X - Y) \\ J &= (X, Y) \end{aligned}$$

ma $I = (X, X - Y) = (X, -Y)$ e pertanto $I = J$.

Corollario 316. In P ogni ideale monomiale è finitamente generato.

Dimostrazione. Sia I monomiale: allora esiste $\{t_i\}_{i \in I} \subseteq T^{(n)}$ che genera I . Considero da questo insieme gli elementi minimi “secondo Dickson”, ovvero i termini in I minimi rispetto alla relazione di divisibilità, che sono un insieme finito: $\{t_1, \dots, t_N\}$.

Quindi per ogni $f \in I$, $\text{supp } f \subseteq I$ e ogni elemento $t \in \text{supp } f$ è nel monoideale generato da t_1, \dots, t_N : $t = t_i \cdot u$ per $u \in T^{(n)}$.

Allora t_1, \dots, t_n generano I come ideale. ■

Risolto *Ideal Membership Problem* per ideali monomiali: dato $f \in P$, $f \in I$ ideale monomiale?

- $I = (t_1, \dots, t_N)$, $t_i \in T^{(n)}$.
- $g \in I$ sse $\text{supp } g \subseteq I$.

Quindi da f considero $\text{supp } f = \{s_1, \dots, s_\ell\}$. Verifico se ciascuno degli $s_j \in I$: controllo se s_j è multiplo di uno dei t_1, \dots, t_N .

- Se ciascun $s_j \in I$, allora $f \in I$.
- Se almeno uno degli $s_j \notin I$, allora $f \notin I$.

Definizione 317. Se I è ideale monomiale, l'insieme dei termini minimi che lo generano è base monomiale di I . (Questa base è unica, ed è un insieme minimale di generatori di I .)

1090.27.1 Monomoduli

Esempio 318. (di Monomodulo). Sia $P = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $r \geq 1$. Considero il modulo libero $P^r = Pe_1 \oplus \dots \oplus Pe_r$. Un termine in P^r è

$$t \cdot e_i, \quad t \in T^{(n)}.$$

L'insieme dei termini in P^r è $T_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}^{(n)}$, ed è un monomodulo rispetto al monoide $T^{(n)} \subseteq P$: per ogni $t \in T^{(n)}$, per ogni $t' \cdot e_i \in T_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}^{(n)}$:

$$t * t' \cdot e_i := (tt') \cdot e_i \in T_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}^{(n)}.$$

Definizione 319. In P^r , $M \subseteq P^r$ sottomodulo è modulo monomiale se possiede un insieme di generatori costituito da termini di $T_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}^{(n)}$.

Teorema 320. (di struttura dei moduli monomiali). Si consideri P^r , $M \subseteq P^r$ modulo monomiale. Allora

1. M è finitamente generato: esistono $t_1, \dots, t_s \in T^{(n)}$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in \{1, \dots, r\}$ tali che M è generato da

$$t_1 \cdot e_{\gamma_1}, \dots, t_s \cdot e_{\gamma_s}.$$

2. esistono ideali monomiali I_1, \dots, I_r in P tali che

$$M \cong I_1 e_1 \oplus \dots \oplus I_r e_r.$$

Dimostrazione. M è monomiale: esiste $B \subseteq T_{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}^{(n)}$ che genera B :

$$B_i := \left\{ t \in T^{(n)} \mid t \cdot e_i \in B \right\} \subseteq T^{(n)}.$$

Per Dickson, $I = (B_i)$ è ideale monomiale finitamente generato. Sia G_i la sua base monomiale. Allora M è finitamente generato da

$$G_1 e_1 \cup G_2 e_2 \cup \dots \cup G_r e_r$$

e inoltre

$$M \cong I_1 e_1 \oplus \dots \oplus I_r e_r. \quad \blacksquare$$

1090.27.2 Divisione

In $\mathbb{K}[X]$ esistono q, r della divisione di f rispetto a $g \neq 0$ e identifico il resto con il grado.

In $\mathbb{K}[X_1, X_2]$, $\deg(X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2}) := \alpha_1 + \alpha_2$ (gradazione standard). Questo processo si generalizza:

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_N] \rightsquigarrow \deg(X_1^{\alpha_1} \cdots X_N^{\alpha_n}) := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Quindi, se $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$:

$$\deg f := \max \{ \deg t \mid t \in \text{supp } f \}.$$

Il “problema” è che \deg in $\mathbb{K}[X]$ mi permette di ordinare “totalmente” i termini. Invece, \deg in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_N]$ non lo consente.

Esempio 321. Se $f = X_1^2 + X_2^2$, $g = X_1 + X_2$ in $\mathbb{K}[X_1, X_2]$:

$$\begin{aligned} X_1^2 + X_2^2 &= (X_1 + X_2)(X_1 + X_2) - 2X_1 X_2 \\ &= (X_1 - X_2)(X_1 + X_2) + 2X_2^2. \end{aligned}$$

Perché l’accoppiata quoziante-resto: $(X_1 + X_2, -2X_1 X_2)$ dovrebbe essere migliore di $(X_1 - X_2, 2X_2^2)$? Non c’è unicità, e il grado non consente di riconoscere i termini.

Term order

Definizione 322. Sia $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ monoide. Un ordine monoidale (monoid order) è un ordine totale \leq su Γ tale che per ogni $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma$

$$\gamma_1 \leq \gamma_2 \implies \gamma_1 \cdot \gamma_3 \leq \gamma_2 \cdot \gamma_3.$$

\leq è un term order se vale che

$$\forall \gamma \in \Gamma : \quad 1_\Gamma \leq \gamma.$$

Esempio 323. (Ordine lessicografico). $t_1, t_2 \in T^{(n)}$: detti

$$\begin{aligned} \log t_1 &= (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ \log t_2 &= (\beta_1, \dots, \beta_n) \end{aligned}$$

e scriviamo $t_1 \geq_{\text{lex}} t_2$ sse $\log t_1 - \log t_2 = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ ha prima entrata non nulla da sinistra verso destra maggiore di 0.

Ad esempio, in $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$:

$$\begin{array}{ccccc} X_1 X_3^2 & X_2 X_3^2 & X_3^3 & X_1^2 X_2 & X_1 X_2 \\ (1, 0, 2) & (0, 1, 2) & (0, 0, 3) & (2, 1, 0) & (1, 1, 0). \end{array}$$

e pertanto valgono:

$$\begin{aligned} X_1 X_3^2 &\geq_{\text{lex}} X_2 X_3^2 \\ X_1 X_3^2 &\leq_{\text{lex}} X_1 X_2. \end{aligned}$$

Si ha che \leq_{lex} è un term order.

Esempio 324. (Deglex - lessicografico graduato).

Siano $t_1, t_2 \in T^{(n)}$: $t_1 \geq_{\text{dlex}} t_2$ sse

$$\deg t_1 > \deg t_2 \vee [\deg t_1 = \deg t_2 \wedge t_1 \geq_{\text{lex}} t_2].$$

Esempio 325. Siano $t_1, t_2 \in T^{(n)}$: $t_1 \geq_{\text{drl}} t_2$ sse

- se $\deg t_1 > \deg t_2$;
- se $\deg t_1 = \deg t_2$ e, dette

$$\log(t_1) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \log(t_2) = (\beta_1, \dots, \beta_n)$$

la prima entrata non nulla di $\log(t_1) - \log(t_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$, partendo da dx verso sx, è negativa.

Combinando gli esempi precedenti, per $n = 3$, si considerino i termini

$$X_1 X_2 X_3, \quad X_1^2 X_3, \quad X_2^3.$$

Per deglex:

$$X_1^2 X_3 \geq_{\text{deglex}} X_1 X_2 X_3 \geq_{\text{deglex}} X_2^3$$

mentre per il degrevlex:

$$X_2^3 \geq_{\text{drlex}} X_1^2 X_3 \geq_{\text{drlex}} X_1 X_2 X_3.$$

Esercizio.

1. Dimostrare che per $n = 2$, Deglex e DegRevLex sono uguali.
2. Se definissi “RevLex” (ovvero senza paragone sul grado), ho un term order?

Si può definire qualunque term order su $T^{(n)}$ usando matrici $n \times n$ di rango massimo a entrate in \mathbb{Z} : data $M \in \mathbb{Z}^{n,n}$ di rango massimo:

$$t_1 \geq_M t_2 \iff M \log(t_1)^\top - M \log(t_2)^\top \text{ ha prima entrata non nulla da sinistra positiva}$$

Questo definisce un term order sse la prima entrata non nulla di ogni colonna di M è strettamente positiva.

- Per il Lex: $M = \text{Id}$;
- Per DegLex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Per DegRevLex:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1090.28 Lezione 27 - <2025-11-25 Mar>

Definizione 326. Sia $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ un monoide, e $\langle \Sigma, * \rangle$ un Γ -monomodulo. \leq_σ è un module order se \leq_σ è un ordine totale su Σ e vale che, $\forall \gamma \in \Gamma, \forall s_1, s_2 \in \Sigma$:

$$s_1 \leq_\sigma s_2 \implies \gamma * s_1 \leq_\sigma \gamma * s_2.$$

Se inoltre $\forall s \in \Sigma, \forall \gamma \in \Gamma$

$$s \leq_\sigma \gamma * s$$

allora \leq_σ è un module term-order.

Esempio 327. Se $\Gamma = T^{(n)} \subseteq P := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $\Sigma = T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)} \subseteq P^r$:

- se $r = 1$: **MANCA**;
- se $r \leq 2$: ci interessano due tipi di term order su $T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$; sia \leq_σ un term order su $T^{(n)} \subseteq P^r$:
 - TOP (term over position): dati $t_1 e_i, t_2 e_j \in T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$

$$t_1 e_i \leq t_1 e_j \iff t_1 <_\sigma t_2 \vee (t_1 = t_2 \wedge i \geq j)$$

POT (position over term): dati $t_1 e_i, t_2 e_j \in T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$

$$t_1 e_i \leq t_1 e_j \iff i > j \vee (i = j \wedge t_1 \leq_\sigma t_2).$$

Esempio 328. Sia $r = 2, n = 3$ e consideriamo $P e_1 \oplus P e_2$, $P = \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$. Dato $\leq_\sigma = \text{DegLex}$, consideriamo

$$X_2^3 e_2, \quad X_1 X_3^2 e_1.$$

- Per σ_{TOP} :

$$X_1 X_3^2 \leq_\sigma X_2^3 \implies X_1 X_3^2 e_1 \geq_{\sigma_{\text{TOP}}} X_2^3 e_2.$$

- Per σ_{POT} :

$$X_1 X_3^2 e_1 \geq_{\sigma_{\text{POT}}} X_2^3 e_2.$$

Definizione 329. Sia $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ un monoide, e $\langle \Sigma, * \rangle$ un Γ -monomodulo. Sia \leq_σ un module monoide order su Σ . \leq_σ è compatibile con \leq_τ monoid order su Γ se $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \forall s \in \Sigma$

$$\gamma_1 \geq_\tau \gamma_2 \implies \gamma_1 * s \geq_\sigma \gamma_2 * s.$$

Proposizione 330. Sia $\langle \Gamma, \cdot \rangle$ un monoide, e $\langle \Sigma, * \rangle$ un Γ -monomodulo. Sia \leq_σ un module order su Σ . Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. ogni sottoinsieme non vuoto di Σ possiede un elemento \leq_σ -minimale;
2. ogni catena \leq_σ -discendente di elementi di Σ :

$$s_1 \geq_\sigma s_2 \geq_\sigma \dots, \quad s_i \in \Sigma$$

è stazionaria

Se vale una delle due, allora σ è un buon ordinamento (*well order*).

Teorema 331. Sia \leq_σ un module order su $T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. \leq_σ è un module term order;
2. \leq_σ è un buon ordinamento.

Dimostrazione. (cенно). Si usa il fatto che in $T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$ valgono delle leggi di cancellazioni destre e sinistre:

- $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \forall s \in \Sigma$

$$\gamma_1 * s = \gamma_2 * s \implies \gamma_1 = \gamma_2;$$
- $\forall \gamma \in \Gamma, \forall s_1, s_2 \in \Sigma$

$$\gamma * s_1 = \gamma * s_2 \implies s_1 = s_2.$$

■

Fisso un term order \leq_σ su $T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$. Se $m \in P^r = Pe_1 \oplus \dots \oplus Pe_r$ si ha un'unica scrittura

$$m = \sum_{i=1}^r f_i e_i, \quad f_i \in P$$

dove ogni f_i è scritto $f_i = \sum_{t_{ij} \in T^{(n)}} c_{ij} t_{ij}$. Cambiando un po' gli indici, quindi, posso scrivere

$$m = \sum_{i=1}^s c_i \underbrace{t_i e_{\gamma_i}}_{\in T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}}.$$

Fissato \leq_γ , a meno di riordinare gli indici posso scrivere i termini della scrittura di m in modo che

$$t_1 e_{\gamma_1} \geq_\sigma t_2 e_{\gamma_2} \geq \dots \geq t_s e_{\gamma_s}.$$

Chiamo leading term di m :

$$\text{LT}_\sigma(m) = t_1 e_{\gamma_1} \in \text{supp}(m);$$

dove t_1 è la leading power product, e γ_1 è la leading position.

Il leading coefficient di m :

$$\text{LC}_\sigma(m) = c_1;$$

il leading monomial di m , invece, è

$$\text{LM}_\sigma(m) = \text{LC}_\sigma(m) \text{ LT}_\sigma(m) = c_1 t_1 e_{\gamma_1}.$$

Se $m = 0e_1 + \dots + 0e_r = \mathbf{0}$, $\text{supp } m = \emptyset$ e pertanto non sono definiti

$$\text{LT}_\sigma(\mathbf{0}), \text{LC}_\sigma(\mathbf{0}), \text{LM}_\sigma(\mathbf{0})$$

Esempio 332. Sia $r = 2$ e $n = 3$.

$$m = (X_1^3 + X_2 X_3 + X_3^4)e_1 + (X_2^3 + X_1 X_3^2)e_2$$

- σ è la DegRevLex POT. Trovo $\text{LT}_\sigma(m)$:

– prima applico POT, quindi “prevale” e_1 , e devo scegliere tra

$$X_1^3, \quad X_2 X_3, \quad X_3^4$$

– dopo per le DegRevLex, il maggiore è X_3^4

– quindi $\text{LT}_\sigma(m) = X_3^4 e_1$, $\text{LC}_\sigma(m) = 1$.

- σ è la DegRevLex TOP. Trovo $\text{LT}_\sigma(m)$:

$$\text{LT}_\sigma(m) = X_3^4 e_1.$$

Proposizione 333. Si consideri P^r , $T_{\langle e_1, \dots, e_r \rangle}^{(n)}$, \leq_σ un term order. Per ogni $f \in P$, per ogni $t \in T^{(n)}$ e per ogni $m_1, m_2 \in P^r$:

1. $\text{supp}(m_1 + m_2) \subseteq \text{supp } m_1 \cup \text{supp } m_2$.

Se inoltre $m_1 + m_2 \neq 0$ allora

$$\text{LT}_\sigma(m_1 + m_2) \leq_\sigma \max_{\leq_\sigma} \{\text{LT}_\sigma(m_1), \text{LT}_\sigma(m_2)\}$$

Se $m_1 + m_2 \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \text{LT}_\sigma(m_1) &\neq \text{LT}_\sigma(m_2) \\ \text{oppure} \end{aligned}$$

$$\text{LT}_\sigma(m_1) = \text{LT}_\sigma(m_2) \wedge \text{LC}_\sigma(m_1) \neq -\text{LC}_\sigma(m_2)$$

allora si ha che

$$\text{LT}_\sigma(m_1 + m_2) = \max_{\leq_\sigma} \{\text{LT}_\sigma(m_1), \text{LT}_\sigma(m_2)\}$$

2. $\text{LT}_\sigma(t \cdot m_1) = t \cdot \text{LT}_\sigma(m_1)$
3. $\text{LT}_\sigma(f \cdot m_1) = \max \{\eta \cdot \text{LT}_\sigma(m_1) \mid \eta \in \text{supp}(f)\}$.

Se \leq_τ è term order su P compatibile con \leq_σ su P^r

$$\text{LT}_\sigma(f \cdot m_1) = \text{LT}_\sigma(f) \cdot \text{LT}_\sigma(m_1)$$

e se $r = 1$ per ogni $f_1, f_2 \in P$

$$\text{LT}_\sigma(f_1 \cdot f_2) = \text{LT}_\sigma(f_1) \cdot \text{LT}_\sigma(f_2).$$

Definizione 334. Sia $M \subseteq P^r$ sottomodulo, fisso un term order \leq_σ .

$$\text{LT}_\sigma(M) := \left\langle \underbrace{\{\text{LT}_\sigma(m) \mid m \in M \setminus \{0\}\}}_{\subseteq T_{(e_1, \dots, e_r)}^{(n)}} \right\rangle_P$$

Si pone $\text{LT}_\sigma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Esempio 335. Sia $r = 1$, $\mathbb{K}[X, Y]$, e sia $I = (X^2 - 1, XY - 1)$. Sia $\sigma = \text{DegLex}$:

$$\text{LT}_\sigma(I) \supseteq (X^2, XY).$$

Per ogni $f \in I$, si ha che $\text{LT}_\sigma(f) \in \text{LT}_\sigma(I)$. Un generico $f \in I$ è nella forma

$$f = p(X^2 - 1) + q(XY - 1), \quad p, q \in \mathbb{K}[X; Y]$$

e ponendo $p = Y$ e $q = X$: $f = X^2Y - Y + X^2Y - X = -X - Y$. Segue che $\text{LT}_\sigma(f) = X$:

$$X \in \text{LT}_\sigma(I), \quad X \notin (X^2, XY).$$

Proposizione 336. Sia $M \subseteq P^r$ sottomodulo, \leq_σ term order.

1. se $te_i \in \text{LT}_\sigma(M)$ allora esiste $m \in M$ tale che

$$\text{LT}_\sigma(m) = t \cdot e_i.$$

2. $\text{LT}_\sigma(M)$ è un modulo monomiale e quindi è finitamente generato: esistono $m_1, \dots, m_s \in M$ tali che

$$\left\langle \text{LT}_\sigma(m_1), \dots, \text{LT}_\sigma(m_s) \right\rangle_P = \text{LT}_\sigma(M)$$

Teorema 337. (Teorema della base di Macaulay). Sia $M \subseteq P^r$ sottomodulo, \leq_σ un term order. Sia

$$B = \left\{ te_i \in T_{(e_1, \dots, e_r)}^{(n)} \mid te_i \in \text{LT}_\sigma(M) \right\} = T_{(e_1, \dots, e_r)}^{(n)} \setminus \text{LT}_\sigma(M).$$

Le classi degli elementi di B in P^r/M come \mathbb{K} -spazio vettoriale ne formano una base.

Dimostrazione. Le classi degli elementi in B sono \mathbb{K} -base di P^r/M .

1. Generano P^r/M .

Questo è equivalente a

$$\sum_{b \in B} \mathbb{K}b + M = P^r.$$

(\subseteq) ovvio.

(\supseteq) Supponiamo per assurdo che $N := \sum_{b \in B} \mathbb{K}b + M \subsetneq P^r$.

Allora esiste $m \in P^r \setminus N$, $m \neq 0$. Siccome \leq_σ è un term order su P^r , allora è un buon ordine. Pertanto scelgo m in modo che $\text{LT}_\sigma(m)$ sia \leq_σ -minimale tra i LT_σ di elementi di $P^r \setminus N$.

$\text{LT}_\sigma(m) \in B$?

- Se sì, allora

$$\underbrace{m}_{\in P^r \setminus N} - \underbrace{\text{LC}_\sigma(m)\text{LT}_\sigma(m)}_{\in \sum_{b \in B} \mathbb{K}b} \in P^r \setminus N$$

e $\text{LT}_\sigma(m - \text{LC}_\sigma(m)\text{LT}_\sigma(m)) < \text{LT}_\sigma(m)$. Assurdo per minimalità.

- Se no, allora $\text{LT}_\sigma(m) \in \text{LT}_\sigma(M)$.

In particolare, esiste $m' \in M$ tale che $\text{LT}_\sigma(m') = \text{LT}_\sigma(m)$:

$$m - \frac{\text{LC}_\sigma(m)}{\text{LC}_\sigma(m')} m' \in P^r \setminus N$$

con $\text{LT}_\sigma(m - \frac{\text{LC}_\sigma(m)}{\text{LC}_\sigma(m')} m') < \text{LT}_\sigma(m)$. Assurdo per minimalità.

Quindi $P^r = N$.

2. Linearmente indipendenti: per ogni $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, detta \bar{b}_i classe di $b_i \in B$ nel quoziente e $c_i \in \mathbb{K}$ suppongo che

$$\sum_{i=1}^s c_i \bar{b}_i = \bar{0} \quad \text{in } P^r/M. \tag{23}$$

Voglio dimostrare che $c_i = 0$ per ogni i .

Dalla (23) segue che $\sum_{i=1}^s c_i b_i = m \in M$. Se $m = \mathbf{0} \in P^r$, allora $c_i = 0$ per ogni i .

Se per assurdo $m \neq 0$, allora $\text{LT}_\sigma(m) \in \text{LT}_\sigma(M)$: inoltre

$$\text{LT}_\sigma(m) \in \{t_1, \dots, t_s\} \subseteq B$$

e pertanto $\text{LT}_\sigma(m) \in \text{LT}_\sigma(M) \cap B = \emptyset$. Assurdo

Quindi $m = 0$ e pertanto $c_i = 0$ per ogni i . ■

Quindi $\text{LT}_\sigma(M)$ ci fornisce un sistema completo di rappresentanti del quoziente P^r/M come \mathbb{K} -spazio vettoriale.

Dato M , come “calcolo” $\text{LT}_\sigma(M)$? So che è finitamente generato.

1090.28.1 Divisioni in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$

Esempio 338. Sia $f = X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_2^3 \in \mathbb{Q}[x_1, X_2]$. Consideriamo

$$\begin{aligned} g_1 &= X_1 X_2 - 1 \\ g_2 &= X_2^2 - 1. \end{aligned}$$

Fisso $\sigma = \text{Lex}$. Rispetto a quest’ordine

$$\begin{aligned} \text{LT}_\sigma(f) &= X_1^2 X_2 \\ \text{LT}_\sigma(g_1) &= X_1 X_2 \\ \text{LT}_\sigma(g_2) &= X_2^2. \end{aligned}$$

Cerco $q_1, q_2, r \in \mathbb{Q}[X_1, X_2]$ tali che

$$f = q_1 g_1 + q_2 g_2 + r.$$

Faccio la divisione:

BOH.

1090.29 Lezione 28 - <2025-11-28 Ven>

1090.29.1 Divisione con Resto con Term Order

Esempio 339. Consideriamo un esempio in $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$ fissando l'ordinamento lessicografico (**Lex**). Siano:

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_2^2 \\ g_1 &= x_1 x_2 - 1 \\ g_2 &= x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

Cerchiamo $q_1, q_2, r \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ tali che $f = q_1 g_1 + q_2 g_2 + r$. A seconda di come procediamo nella divisione, possiamo ottenere risultati diversi:

1. Nel primo caso otteniamo:

$$q_1 = x_1 + x_2, \quad q_2 = 1, \quad r = x_1 + x_2 + 1$$

2. Nel secondo caso (cambiando ad esempio l'ordine dei divisori o la strategia):

$$f = (x_1 + 1)g_2 + (x_1)g_1 + 2x_1 + 1$$

Qui il resto è $2x_1 + 1$.

In entrambi i casi, il supporto del resto r soddisfa una proprietà fondamentale: è formato da termini che **non** sono multipli né di $\text{LT}(g_1)$ né di $\text{LT}(g_2)$. In formule:

$$\forall t \in \text{supp}(r), \quad t \notin \langle \text{LT}(g_1), \text{LT}(g_2) \rangle$$

Algoritmo di Divisione: Generalizziamo il processo. Siano $m, g_1, \dots, g_s \in P^\ell$ (moduli liberi su anello di polinomi, con $\ell \geq 1$). Fissiamo un **term order**.

1. **Inizializzazione:** Poniamo $q_1 = q_2 = \dots = q_s = 0$, $r = 0$ e $v = m$ (dove v è il dividendo temporaneo).
2. **Ciclo di riduzione:** Cerco il più piccolo indice $i \in \{1, \dots, s\}$ tale che $\text{LT}(v)$ sia divisibile per $\text{LT}(g_i)$.
 - Se tale i esiste (ovvero $\text{LT}(g_i) \mid \text{LT}(v)$, quindi $\text{LT}(v) = t \cdot e_j$ e $\text{LT}(g_i) = t' \cdot e_j$), allora aggiorno il quoziente e il dividendo:

$$\begin{aligned} q_i &\longrightarrow q_i + \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} \\ v &\longrightarrow v - \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} \cdot g_i \end{aligned}$$

3. **Passaggio al resto:** Se $\forall i \in \{1, \dots, s\}$, $\text{LT}(v)$ non è divisibile per $\text{LT}(g_i)$, allora quel termine non può essere ridotto. Lo sposto nel resto:

$$\begin{aligned} r &\longrightarrow r + \text{LM}(v) \\ v &\longrightarrow v - \text{LM}(v) \end{aligned}$$

4. **Terminazione:** Se $v \neq 0$, ripeto dal passo 2. Se $v = 0$, l'algoritmo termina e restituisco $q_1, \dots, q_s \in P$ e $r \in P^\ell$.

Proposizione 340. Ad ogni passo dell'algoritmo, la relazione $m = q_1 g_1 + \dots + q_s g_s + r$ è soddisfatta.

Proposizione 341. L'algoritmo termina.

Proposizione 342. Il risultato soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\forall t \cdot e_j \in \text{supp}(r) : t \cdot e_j \notin \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P$. Nessun termine del resto è divisibile dai termini direttori dei divisori.
2. Se $q_i \neq 0$, allora $\text{LT}(q_i g_i) \leq \text{LT}(m)$.
3. $\forall i = 1 \dots s, \forall t \in \text{supp}(q_i)$, vale che $t \cdot \text{LT}(g_i) \notin \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_{i-1}) \rangle_P$. (Questa proprietà deriva dall'aver scelto sempre il **più piccolo** i possibile al passo 2).

Dimostrazione. (della Proposizione 340). Dimostriamo che a ogni iterazione vale sempre l'identità:

$$m = q_1 g_1 + \dots + q_s g_s + r + v$$

All'inizio: $m = 0 \cdot g_1 + \dots + 0 + m$. L'identità è verificata. **Allo step 2 (aggiornamento quoziante):** Modifichiamo q_i e v . La somma diventa:

$$\dots + \left(q_i + \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} \right) g_i + \dots + r + \left(v - \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} g_i \right)$$

Sviluppando, il termine aggiunto si cancella col termine sottratto, mantenendo l'identità. **Allo step 3 (aggiornamento resto):** Spostiamo un termine da v a r :

$$r + \text{LM}(v) + v - \text{LM}(v) = r + v$$

L'identità è preservata. Se l'algoritmo termina ($v = 0$), l'identità finale $m = \sum q_i g_i + r$ è esatta. ■

Dimostrazione. (della Proposizione 341). L'algoritmo termina? v viene aggiornato sia nello step 2 che nello step 3.

1. Nello step 2: $\text{LT}\left(v - \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} g_i\right) < \text{LT}(v)$ perché cancelliamo il termine direttore.
2. Nello step 3: $\text{LT}(v - \text{LM}(v)) < \text{LT}(v)$.

A ogni iterazione, $\text{LT}(v)$ cala strettamente. Essendo il **term order** un **well-founded order** (buon ordinamento), non possono esistere catene discendenti infinite. Dopo un numero finito di iterazioni otteniamo $v = 0$. ■

Dimostrazione. (della Proposizione 342).

1. Ogni termine aggiunto a r proviene da uno step 3, in cui quel termine era un $\text{LT}(v)$ non divisibile per alcun $\text{LT}(g_i)$. Quindi $\forall t \in \text{supp}(r), t \notin \langle \text{LT}(g_1) \dots \text{LT}(g_s) \rangle_P$.
2. Vogliamo mostrare che se $q_i \neq 0$, $\text{LT}(q_i g_i) \leq \text{LT}(m)$. Supponiamo sia vero per i q_i correnti e vediamo cosa accade quando ne aggiorniamo uno allo step 2. Dobbiamo verificare $\text{LT}\left(\left(q_i + \frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)}\right) g_i\right) \leq \text{LT}(m)$. Il termine a sinistra è limitato da $\max\{\text{LT}(q_i g_i), \text{LT}\left(\frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} g_i\right)\}$. Per ipotesi induttiva $\text{LT}(q_i g_i) \leq \text{LT}(m)$. Inoltre $\text{LT}\left(\frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)} g_i\right) = \text{LT}(v)$. Poiché $\text{LT}(v)$ decresce a ogni passo, $\text{LT}(v) \leq \text{LT}(m)$ iniziale. Quindi la diseguaglianza regge.
3. Quando aggiorniamo q_i aggiungendo il termine $\frac{\text{LM}(v)}{\text{LM}(g_i)}$, lo facciamo perché $\text{LT}(v)$ non era divisibile per $\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_{i-1})$ (altrimenti avremmo scelto un indice minore). Quindi il termine $t = \frac{\text{LT}(v)}{\text{LT}(g_i)}$ soddisfa $t \cdot \text{LT}(g_i) = \text{LT}(v) \notin \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_{i-1}) \rangle_P$.

■

Corollario 343. Fisso la s -upla ordinata $g_1, \dots, g_s \in P^\ell$. Allora q_1, \dots, q_s, r generati dalla divisione di $m \in P^\ell$ rispetto a $g_1 \dots g_s$ sono **UNICI**.

Dimostrazione. Supponiamo di avere due risultati diversi che soddisfano le proprietà 1., 2., 3.:

$$\begin{aligned} m &= q_1 g_1 + \dots + q_s g_s + r \\ m &= q'_1 g_1 + \dots + q'_s g_s + r' \end{aligned}$$

Sottraendo le due equazioni:

$$(*) \quad (q_1 - q'_1)g_1 + \dots + (q_s - q'_s)g_s + (r - r') = 0$$

Analizziamo $r - r'$: ogni termine nel supporto non è divisibile per i $\text{LT}(g)$. In particolare $\text{LT}(r - r') \notin \langle \text{LT}(g_1) \dots \text{LT}(g_s) \rangle_P$. Per la proprietà c) della divisione, sappiamo anche che $\text{LT}((q_i - q'_i)g_i) \notin \langle \text{LT}(g_i) \dots \text{LT}(g_{i-1}) \rangle_P$. Questo implica che i termini direttori $\text{LT}(r - r'), \text{LT}((q_1 - q'_1)g_1), \dots, \text{LT}((q_s - q'_s)g_s)$ sono a due a due distinti. Di conseguenza, nella somma (*) questi termini direttori non possono elidersi tutti. L'unica possibilità affinché la somma sia 0 è che tutti i termini siano nulli:

$$r = r', \quad q_1 = q'_1, \dots, q_s = q'_s.$$

■

1090.29.2 Problema dell'Appartenenza Ideale (Ideal Membership Problem)

Questa divisione, purtroppo, non basta a risolvere il problema dell'appartenenza ideale.

Esempio 344. Siano $n = 2, \ell = 1, P = \mathbb{Q}[x_1, x_2]$.

$$\begin{aligned} f &= x_1 x_2^2 - x_1 \\ g_1 &= x_1 x_2 + 1 \\ g_2 &= x_2^2 - 1 \end{aligned}$$

Vorrei capire se $f \in (g_1, g_2) \subseteq \mathbb{Q}[x_1, x_2]$. Notiamo che $(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$ come ideale.

$f = q_1 g_1 + q_2 g_2$ se e solo se $f \in (g_1, g_2)$.

1. **Usiamo Lex con ordine** (g_1, g_2): Dividendo $x_1x_2^2 - x_1$ per g_1 : $\text{LT}(f) = x_1x_2^2$, $\text{LT}(g_1) = x_1x_2$. Quoziente x_2 . Sottraendo: $x_1x_2^2 - x_1 - x_2(x_1x_2 + 1) = x_1x_2^2 - x_1 - x_1x_2^2 - x_2 = -x_1 - x_2$. Il resto è $r = -x_1 - x_2 \neq 0$. Concludiamo che $f \notin (g_1, g_2)$? **Forse no...**
2. **Usiamo Lex con ordine** (g_2, g_1): Dividendo $x_1x_2^2 - x_1$ per $g_2 = x_2^2 - 1$. $\text{LT}(f) = x_1x_2^2$ è divisibile per $\text{LT}(g_2) = x_2^2$. Quoziente x_1 . Sottraendo: $x_1x_2^2 - x_1 - x_1(x_2^2 - 1) = x_1x_2^2 - x_1 - x_1x_2^2 + x_1 = 0$. Qui otteniamo $f = x_1g_2 + 0g_1 + 0$. Il resto è 0, quindi $f \in (g_1, g_2)$.

Questo ci mostra che il resto dipende dall'ordine dei generatori.

1090.29.3 Base di Gröbner

Definizione 345. Sia P^ℓ , fisso un term order. Siano $g_1, \dots, g_s \in P^\ell$. Chiamo M il modulo finitamente generato da $g_1 \dots g_s$ in P^ℓ : $M = \langle g_1 \dots g_s \rangle_P$. L'insieme $\{g_1, \dots, g_s\}$ è una **Base di Gröbner (GB)** di M se:

$$\text{LT}(M) = \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P$$

Dove $\text{LT}(M)$ è l'ideale generato dai termini direttori di tutti gli elementi del modulo M .

Osservazione. Se $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ è GB di M rispetto a un certo term order, questa **non è unica**. Se $G \subset H \subseteq M$ con H finito, allora anche H è una GB di M .

Teorema 346. Fisso un term order. Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\} \in P^\ell$ una GB di $M = \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P$. Allora la divisione di $m \in P^\ell$ rispetto a g_1, \dots, g_s “dipende solo da M ”:

$$\forall m \in P^\ell, \quad \exists! r \in P^\ell \text{ t.c. } m = g + r \text{ con } g \in M = \langle g_1 \dots g_s \rangle_P$$

e tale che il supporto di r non contenga termini in $\text{LT}(M)$.

Dimostrazione. Effettuiamo la divisione di m rispetto a $g_1 \dots g_s$ e rispetto al term order fissato:

$$m = \underbrace{q_1g_1 + \dots + q_sg_s}_{\in M = \langle g_1 \dots g_s \rangle_P} + r$$

Sappiamo che $\text{supp}(r) \in T^{\langle \dots \rangle} \setminus \langle \text{LT}(g_1) \dots \text{LT}(g_s) \rangle_P$. Poiché G è GB, questo ideale è proprio $\text{LT}(M)$.

Supponiamo di prendere un'altra GB, G' , del modulo M . (Ad esempio posso prendere $H \subseteq M$ finito t.c. $G \subset H$, oppure cambiare l'ordine di $g_1 \dots g_s$). Effettuo la divisione di m rispetto a G' :

$$m = \underbrace{g'}_{\in M} + r' \quad \text{con } \text{supp}(r') \in T \setminus \langle \text{LT}(g'_i) \rangle = T \setminus \text{LT}(M)$$

Abbiamo:

$$g + r = m = g' + r' \implies g - g' = r' - r$$

Poiché $g, g' \in M$, allora $g - g' \in M$, quindi $r' - r \in M$. Distinguiamo due casi:

1. Se $r' - r = 0 \in M$ allora $r' = r$. (Tesi dimostrata).
2. Se $r' - r \neq 0 \wedge r' - r \in M$: Allora $\text{LT}(r' - r) \in \text{LT}(M) = \langle \text{LT}(g_1) \dots \text{LT}(g_s) \rangle_P$. Tuttavia, $\text{supp}(r' - r) \subseteq \text{supp}(r) \cup \text{supp}(r') \subseteq T \setminus \text{LT}(M)$. Questo è una contraddizione (LT dovrebbe essere in $\text{LT}(M)$ ma il supporto è fuori).

Deve essere necessariamente $r' - r = 0$, quindi $r' = r$. ■

Osservazione. Poiché $g - g' = r' - r$ e $r' = r$, segue che $g = g'$. Se G è una GB di $M = \langle G \rangle_P$:

$$\forall m \in M, \quad \exists! r \in P^\ell \text{ con } \text{supp}(r) \text{ fuori da } \text{LT}(M)$$

$$\exists! g \in M \text{ t.c. } m = g + r$$

In particolare, $m \in M$ sse $r = 0$. Questo risolve l'ideal membership problem.

Osservazione. Non stiamo dicendo che i quozienti q_1, \dots, q_s siano indipendenti dall'ordine dei polinomi nella GB quando effettuo la divisione. Stiamo dicendo che il **resto** r (e la parte $g \in M$) è unico.

1090.30 Lezione 29 - <2025-12-01 Lun>

1090.30.1 Module Membership Problem

Proposizione 347. Sia $M \subseteq P^\ell$ modulo. Supponiamo di conoscere, fissato un term order, una base di Groebner (GB)

$$G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P^\ell$$

che genera M . Allora per ogni $m \in P^\ell$

$$m \in M \iff \text{il resto della divisione di } m \text{ rispetto a } G \text{ trovo } 0.$$

Dimostrazione. Indichiamo con \overline{m}^G il resto della divisione di m rispetto a G .

Se G è una GB non c'è ambiguità. Se G è un insieme finito di P^ℓ , sottointendo di aver fissato un ordine tra questi polinomi.

(\Rightarrow): sia $m \in M = \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P \subseteq P^\ell$.

Essendo G una GB, vale che esistono unici $g \in M$, $r \in P^\ell$ tali che

$$m = g + r$$

tale che $\forall t \cdot e_j \in \text{supp}(r)$ si ha che

$$t \cdot e_j \notin \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P$$

Visto che $m \in M$ allora $g = m$, e pertanto $r = 0$: segue che $\overline{m}^G = 0$.

(\Leftarrow): sia $m \in P^\ell$ tale che $\overline{m}^G = 0$. Allora esistono $q_i \in P$ tali che:

$$m = \sum_{i=1}^s q_i g_i + 0 \in Pg_1 + \cdots + Pg_s = M$$

e pertanto $m \in M$. ■

1090.30.2 Esistenza della Base di Groebner

Proposizione 348. Sia $M \subseteq P^\ell$, supponiamo che esistano $g_1, \dots, g_s \in M$ tale che

$$\text{LT}(M) = \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P$$

Allora $\langle g_1, \dots, g_s \rangle_P = M$.

Dimostrazione. Per costruzione si ha $\langle g_1, \dots, g_s \rangle_P \subseteq M$.

Dimostro ora che $\langle g_1, \dots, g_s \rangle_P \not\subseteq M$, ovvero suppongo per assurdo che:

$$\langle g_1, \dots, g_s \rangle_P \subsetneq M.$$

Sia quindi $m \in M \setminus \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P$, $m \neq \mathbf{0}$, tale che $\text{LT}(m)$ sia minimo.

$$\text{LT}(m) \in \text{LT}(M) = \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P$$

e quindi $\text{LT}(m)$ è divisibile per uno dei $\text{LT}(g_i)$. In particolare sia $c \in \mathbb{K}$ tale che

$$\text{LM}(m) = c \cdot t \cdot \text{LT}(g_i).$$

Si consideri $m - ctg_i \in M$. Vale che $m - ctg_i \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P$?

$$\text{LT}(m - ctg_i) < \text{LT}(m)$$

e pertanto, per minimalità di $\text{LT}(m)$ si ha che

$$m - ctg_i \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P.$$

Pertanto

$$m = (m - ctg_i) + \underbrace{ctg_i}_{\in \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P} \in \langle g_1, \dots, g_s \rangle_P.$$

Assurdo. ■

Teorema 349. Sia $M \subseteq P^\ell$, fissato un term order. Allora esistono $g_1, \dots, g_s \in M$ tali che

$$\text{LT}(M) = \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P$$

e tali che $\langle g_1, \dots, g_s \rangle_P = M$.

Dimostrazione. Si ricorda che

$$\text{LT}(M) = \left\langle \{\text{LT}(m) \mid m \in M\} \right\rangle_P$$

Abbiamo dimostrato che un sottomodulo monomiale di P^ℓ è finitamente generato. Pertanto esistono $t_1, \dots, t_s \in T_{\langle e_1, \dots, e_\ell \rangle}^{(n)}$ tali che

$$\text{LT}(M) = \langle t_1, \dots, t_s \rangle_P$$

e inoltre, per ogni $t \in \text{LT}(M)$ esiste $g \in M$ tale che $\text{LT}(g) = t$. Quindi esistono $g_i \in M$ tali che $\text{LT}(g_i) = t_i$, e quindi

$$\{g_1, \dots, g_s\} \subseteq M$$

soddisfa le ipotesi della proposizione precedente. ■

Corollario 350. Sia $M \subseteq P^\ell$. M è finitamente generato.

Dimostrazione. Fissa il term order: allora esiste una base di Groebner che genera M . ■

Osservazione. Se G è GB di $M \subseteq P^\ell$, per ogni insieme finito H tale che:

$$G \subseteq H \subseteq M$$

allora H è una GB di M .

1090.30.3 Basi di Groebner ridotte

Fisso un term order. Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ una GB,

$$M = \langle G \rangle_P \subseteq P^\ell,$$

G è una GB di M .

Definizione 351. G è una Base di Groebner ridotta se:

1. $\text{LC}(g_i) = 1$ (*i* g_i sono monici);
2. $\{\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s)\}$ è un insieme di generatori minimale di $\text{LT}(M)$.
3. per ogni $i = 1, \dots, s$:

$$\text{supp}(g_i - \text{LT}(g_i)) \cap \langle \text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s) \rangle_P = \emptyset.$$

Siccome i $g_i - \text{LT}(g_i)$ vengono chiamate coda di g_i , la proprietà 3. si dice anche “le code dei g_i sono ridotte”.

Teorema 352. Sia $M \subseteq P^\ell$, fisso un term order. Allora esiste GB ridotta di M .

Dimostrazione. Da Teorema precedente, esiste $G = \{g_1, \dots, g_s\}$ una GB di M .

- Se $\text{LC}(g_i) = 1$, allora lascio G uguale. Altrimenti aggiorno

$$G = \left\{ \frac{g_1}{\text{LC}(g_1)}, \dots, \frac{g_s}{\text{LC}(g_s)} \right\}.$$

che genera ancora M .

?????????? FINIRE (Chiedere ad Elisa) ■

1090.30.4 Criterio di Buchberger

Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P^\ell$, fisso term order.

G è GB di $M = \langle G \rangle_P$ se e solo se per ogni $f \in P^\ell$ vale

$$f \in M \iff \bar{f}^G = 0.$$

Definizione 353. Siano $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] = P$, fissato term order, $f, g \neq 0$ dato:

$$\text{mcm}(\text{LT}(f), \text{LT}(g)) = t \in T^{(n)}.$$

L'S-polinomio di f e g è

$$S(f, g) = \frac{t}{\text{LM}(f)} f - \frac{t}{\text{LM}(g)} g.$$

Esempio 354. In $\mathbb{Q}[X, Y]$ con Deglex, considero

$$\begin{aligned} f &= X^3Y^2 - X^2Y^3 + X \\ g &= 3X^4Y + Y^2. \end{aligned}$$

Si ha che

$$\text{mcm}(f, g) = X^4Y^2$$

e pertanto si ottiene che

$$\begin{aligned} S(f, g) &= \frac{X^4Y^2}{X^3Y^2} f - \frac{X^4Y^2}{3X^4Y} g = \\ &= X^4Y^2 - X^3Y^3 + X^2 - (X^4Y^2 + Y^3/3) \\ &= -X^3Y^3 + X^2 - \frac{Y^3}{3} \end{aligned}$$

Se $f, g \in P^\ell$, la costurzione è la stessa, conattenzione:

$$\text{mcm}(t_f, t_g) = t$$

dove

$$\begin{aligned} \text{LT}(f) &= t_f \cdot e_i \\ \text{LT}(g) &= t_g \cdot e_j \end{aligned}$$

ponendo poi

$$S(f, g) = \frac{t}{\text{LC}(f) \cdot t_f} f - \frac{t}{\text{LC}(g) \cdot t_g} g.$$

Osservazione. Si ha che $S(f, g) = -S(g, f)$.

Teorema 355. Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P^\ell$, fisso un term order.

G è GB di $M = \langle G \rangle_P$ se e solo se per ogni $i < j$

$$\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$$

1090.31 Lezione 30 - <2025-12-02 Mar>

1090.31.1 Criterio di Buchberger

Fissiamo un **term order** (ordinamento monomiale). Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P$ e sia $I = (G)$ l'ideale generato da G .

Teorema 356. (Criterio di Buchberger). G è una Base di Gröbner (GB) di I se e solo se

$$\forall i < j : \overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$$

dove $\overline{S(g_i, g_j)}^G$ indica il resto della divisione dell'S-polinomio $S(g_i, g_j)$ rispetto all'insieme ordinato dei polinomi in G .

Dimostrazione. (\Rightarrow): Supponiamo che G sia una GB di I . Sappiamo che, per definizione di S-polinomio:

$$S(g_i, g_j) = ug_i - vg_j \in I = (G)$$

dove u e v sono opportuni monomi.

Abbiamo dimostrato precedentemente che se G è una GB di I , allora vale la proprietà:

$$\forall f \in P : f \in I \iff \overline{f}^G = 0$$

Allora, poiché $S(g_i, g_j) \in I$, segue immediatamente che:

$$\overline{S(g_i, g_j)}^G = 0$$

■

Per dimostrare l'altra implicazione è necessario prima un lemma.

Lemma 357. Fissato un term order, sia $\{f_1, \dots, f_l\}$ un insieme di polinomi in P tali che $\text{LT}(f_i) = t \in T^{(n)}$ per ogni i (ovvero, tutti hanno lo stesso termine direttore t). Consideriamo una combinazione lineare:

$$\sum_{i=1}^l c_i f_i \quad \text{con } c_i \in \mathbb{K}$$

Se vale che:

$$\text{LT} \left(\sum_{i=1}^l c_i f_i \right) < t$$

Allora la somma $\sum_{i=1}^l c_i f_i$ è combinazione lineare degli S-polinomi $S(f_j, f_k)$ tali che:

$$\text{LT}(S(f_j, f_k)) < t$$

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione di S-polinomio per f_j e f_k . Poiché $\text{LT}(f_j) = \text{LT}(f_k) = t$, il loro minimo comune multiplo è $\text{mcm}(\text{LT}(f_j), \text{LT}(f_k)) = t$. Quindi:

$$S(f_j, f_k) = \frac{t}{\text{LC}(f_j) \cdot \text{LT}(f_j)} f_j - \frac{t}{\text{LC}(f_k) \cdot \text{LT}(f_k)} f_k$$

Sostituendo $\text{LT}(f) = t$:

$$= \frac{t}{\text{LC}(f_j) \cdot t} f_j - \frac{t}{\text{LC}(f_k) \cdot t} f_k = \frac{1}{\text{LC}(f_j)} f_j - \frac{1}{\text{LC}(f_k)} f_k$$

Sviluppando i polinomi come $f = \text{LC}(f) \cdot t + \text{coda}(f)$:

$$= t + \left(\frac{1}{\text{LC}(f_j)} \text{coda}(f_j) \right) - t - \frac{1}{\text{LC}(f_k)} \text{coda}(f_k)$$

Ora, è evidente che i termini direttori t si cancellano, quindi:

$$\text{LT}(S(f_j, f_k)) < t$$

Poniamo $\text{LC}(f_i) = d_i$. Allora $f_i = d_i \cdot t + (\text{coda } f_i)$, dove $\text{LT}(\text{coda } f_i) < t$. Per ipotesi sappiamo che $\text{LT}(\sum_{i=1}^l c_i f_i) < t$. Sviluppando la somma:

$$\sum_{i=1}^l c_i f_i = \left(\sum_{i=1}^l c_i d_i \right) t + \text{termini minori}$$

Affinché il termine direttore sia strettamente minore di t , il coefficiente di t deve annullarsi:

$$\sum_{i=1}^l c_i d_i = 0 \tag{*}$$

(Così gli f_i se ne vanno e il termine direttore diventa più basso).

Siano ora $p_i = \frac{f_i}{d_i} \in P$. Notiamo che $S(f_j, f_k) = \frac{f_j}{d_j} - \frac{f_k}{d_k} = p_j - p_k$. Riscriviamo la somma iniziale:

$$\sum_{i=1}^l c_i f_i = \sum_{i=1}^l c_i d_i p_i = c_1 d_1 p_1 + c_2 d_2 p_2 + \cdots + c_l d_l p_l$$

Voglio scriverlo rispetto a $S(f_j, f_k)$. Uso una somma telescopica (aggiungo e tolgo termini):

$$\begin{aligned} \sum c_i f_i &= c_1 d_1 p_1 \underbrace{-c_1 d_1 p_2 + c_1 d_1 p_2}_{\text{aggiungo e tolgo}} + c_2 d_2 p_2 + \cdots + c_l d_l p_l \\ &= c_1 d_1 (p_1 - p_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2) p_2 + c_3 d_3 p_3 + \cdots + c_l d_l p_l \end{aligned}$$

Continuando iterativamente a raggruppare:

$$= c_1 d_1 (p_1 - p_2) + (c_1 d_1 + c_2 d_2) (p_2 - p_3) + \cdots + \left(\sum_{k=1}^{l-1} c_k d_k \right) (p_{l-1} - p_l) + \left(\sum_{k=1}^l c_k d_k \right) p_l$$

Osserviamo i termini:

1. $p_j - p_{j+1} = S(f_j, f_{j+1})$.

2. L'ultimo termine ha coefficiente $\sum_{k=1}^l c_k d_k$, che per la condizione (\star) è uguale a 0.

Quindi otteniamo:

$$\sum_{i=1}^l c_i f_i = \sum_{j=1}^{l-1} \left(\sum_{k=1}^j c_k d_k \right) S(f_j, f_{j+1})$$

Questa è una combinazione lineare degli $S(f_i, f_{i+1})$, e abbiamo già verificato che $\text{LT}(S(f_j, f_k)) < t$. \blacksquare

Dimostrazione. (del Teorema 356, \Leftarrow).

- **Ipotesi:** $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P$, $I = (G)$ e $\forall i < j, \overline{S(g_j, g_k)}^G = 0$.
- **Tesi:** G è una Base di Gröbner di I . Ovvero: $\forall f \in I : \text{LT}(f) \in (\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s))$.

Sia $f \in I$. Allora esistono $h_i \in P$ tali che:

$$f = \sum_{i=1}^s h_i g_i$$

Vale sicuramente che:

$$\text{LT}(f) \leq \max_{i=1 \dots s} \{\text{LT}(h_i g_i)\}$$

Da cui si aprono due casi:

1. Se $\text{LT}(f) = \max_i \{\text{LT}(h_i g_i)\}$, allora significa che $\text{LT}(f) = \text{LT}(h_i g_i) = \text{LT}(h_i) \text{LT}(g_i)$ per un qualche i .
Allora $\text{LT}(f) \in (\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s))$. ✓ (Caso OK).
2. Se $\text{LT}(f) < \max_i \{\text{LT}(h_i g_i)\}$: Fisso una scrittura di $f \in I$ in modo che $\max_i \{\text{LT}(h_i) \cdot \text{LT}(g_i)\}$ sia il **più piccolo possibile**. Chiamo allora $t = \max_i \{\text{LT}(h_i) \text{LT}(g_i)\}$ questa “minimalità”. So allora che $\text{LT}(f) < t$.

Riscrivo la somma separando i termini che hanno grado t da quelli minori:

$$f = \sum_{i=1}^s h_i g_i = \sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} h_i g_i + \sum_{\text{LT}(h_i g_i) < t} h_i g_i$$

Analizziamo la prima parte della somma: $\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} h_i g_i$. Possiamo espandere h_i nei suoi termini:

$$\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{LM}(h_i) g_i + \sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} (\text{coda } h_i) g_i$$

Il secondo addendo ha termine direttore minore di t . Concentriamoci sul primo. Ci chiediamo: $t \in \text{supp}(\sum \text{LM}(h_i) g_i)$? **NO:** perché $\text{LT}(f) < t$, quindi i termini di grado t devono cancellarsi.

Dunque:

$$\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{LM}(h_i) g_i = \sum c_i t_i g_i \quad \text{con } c_i \in \mathbb{K}, t_i \in T^{(n)}$$

Inoltre $\text{LT}(t_i g_i) = \text{LT}(t_i) \cdot \text{LT}(g_i) = \text{LT}(h_i) \text{LT}(g_i) = t$.

Questa è una combinazione lineare di polinomi con lo stesso $\text{LT} = t$, tale che il LT della somma è $< t$. Possiamo usare il **Lemma** precedente:

$$\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{LT}(h_i) g_i \text{ è combinazione lineare degli S-polinomi di } \{t_i g_i\}$$

Analizziamo gli S-polinomi coinvolti:

$$S(t_j g_j, t_k g_k) = \frac{t}{\text{LM}(g_j) \cdot t_j} t_j g_j - \frac{t}{\text{LM}(g_k) \cdot t_k} t_k g_k$$

Sia $\text{mcm}(\text{LT}(g_j), \text{LT}(g_k)) = \omega_{jk} \in T^{(n)}$. Vale che t è divisibile per $\text{LT}(g_j)$ e per $\text{LT}(g_k)$, quindi t è divisibile anche per ω_{jk} . Da cui riscrivo:

$$S(t_j g_j, t_k g_k) = \frac{t}{\omega_{jk}} S(g_j, g_k)$$

Da cui ottengo (sostituendo nella sommatoria):

$$\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{LM}(h_i) g_i = \sum c_{jk} S(t_j g_j, t_k g_k) = \sum c_{jk} \frac{t}{\omega_{jk}} S(g_j, g_k) \quad (\heartsuit)$$

Per ipotesi del teorema: $\overline{S(g_j, g_k)}^G = 0$. Questo significa (per l'algoritmo di divisione) che:

$$S(g_j, g_k) = q_1 g_1 + \cdots + q_s g_s + 0$$

dove i q_i sono trovati con l'algoritmo di divisione. In particolare ne segue che:

$$\text{LT}(S(g_j, g_k)) \geq \text{LT}(q_i g_i)$$

Riprendo allora l'equazione (\heartsuit) :

$$\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{LM}(h_i) g_i = \sum c_{jk} \left(\sum_i \frac{t}{\omega_{jk}} q_i g_i \right) = \sum_i \tilde{q}_i g_i$$

Con la proprietà fondamentale che:

$$\text{LT}(\tilde{q}_i g_i) < t$$

(perché moltiplicando per $\frac{t}{\omega_{jk}}$ i gradi scendono rispetto a t dato che nell'S-polinomio i termini massimi si cancellano).

Allora posso riscrivere f :

$$f = \underbrace{\sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{LM}(h_i) g_i}_{\text{sostituisco con } \sum \tilde{q}_i g_i} + \sum_{\text{LT}(h_i g_i)=t} \text{coda}(h_i) g_i + \sum_{\text{LT}(h_i g_i) < t} h_i g_i$$

Tutti i termini ora hanno $\text{LT}(\dots) < t$. Ottengo una scrittura:

$$f = \sum_{i=1}^s \tilde{h}_i g_i \quad \text{con } \text{LT}(\tilde{h}_i g_i) < t$$

MA: questo nega la minimalità con cui ho scelto t all'inizio! **Assurdo.**

Quindi l'ipotesi $\text{LT}(f) < \max\{\text{LT}(h_i g_i)\}$ non si verifica. L'unico caso possibile è $\text{LT}(f) = \max\{\text{LT}(h_i g_i)\}$.

$$\text{LT}(f) \in (\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s)) \implies G \in GB \text{ di } I. \quad \blacksquare$$

Ciò significa che non devo fare infiniti controlli, basta studiare gli S-polinomi.

Esempio 358. Sia $G = \{y - x^2, z - x^3\} \subseteq \mathbb{K}[x, y, z]$. Fisso il **term order Lex** con $z > y > x$.

Definiamo:

- $g_1 = y - x^2$ con $\text{LT}(g_1) = y$.
- $g_2 = z - x^3$ con $\text{LT}(g_2) = z$.

Verifico che G è GB calcolando l'S-polinomio:

$$\begin{aligned} S(g_1, g_2) &= \frac{yz}{y}(y - x^2) - \frac{yz}{z}(z - x^3) \\ &= z(y - x^2) - y(z - x^3) \\ &= zy - zx^2 - yz + yx^3 \\ &= -zx^2 + yx^3 \end{aligned}$$

Applico l'algoritmo di divisione (Buchberger) dividendo il risultato per G : Divido $-zx^2 + yx^3$ per g_1, g_2 . Ordinando i termini (Lex $z > y > x$): $-zx^2 + yx^3$.

1. $\text{LT}(-zx^2) = -zx^2$. Usiamo $g_2 = z - x^3$. Moltiplico per $-x^2$. $-zx^2 + yx^3 - (-x^2)(z - x^3) = -zx^2 + yx^3 + zx^2 - x^5 = yx^3 - x^5$.
2. Ora ho $yx^3 - x^5$. $\text{LT} = yx^3$. Usiamo $g_1 = y - x^2$. Moltiplico per x^3 . $yx^3 - x^5 - (x^3)(y - x^2) = yx^3 - x^5 - yx^3 + x^5 = 0$.

Resto: 0. Da cui: $\overline{S(g_1, g_2)}^G = 0$ e quindi per il criterio di Buchberger: $G = \{g_1, g_2\}$ è GB di $I = (G)$ rispetto a Lex con $z > y > x$.

(Volendo si può provare a prendere Lex $x > y > z$ e si nota che allora g_1 e g_2 non formano più una GB!)

1090.31.2 Algoritmo di Buchberger

Se G non è GB, come faccio a trovare una GB per (G) ?

Esempio 359. Consideriamo:

- $f_1 = x^3 - 2xy$
- $f_2 = x^2y - 2y^2 + x$

in $\mathbb{K}[x, y]$. DegLex con $x > y$.

Sia $G = \{f_1, f_2\}$. È una GB di $I = (f_1, f_2)$? Vale che:

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^3y}{x^3}f_1 - \frac{x^3y}{x^2y}f_2 = yf_1 - xf_2 = \dots = -x^2$$

Si ha che $\overline{S(f_1, f_2)}^G = 0$? Dividendo $-x^2$ per f_1 e f_2 :

$$\begin{cases} q_1 = 0 \\ q_2 = 0 \end{cases} \implies \text{Resto} = -x^2 \neq 0$$

e quindi non è GB.

Da cui $x^2 = \text{LT}(S(f_1, f_2)) \in \text{LT}(I)$ ma $x^2 \notin (\text{LT}(f_1), \text{LT}(f_2))$.

Considero allora $G' = \{f_1, f_2, S(f_1, f_2)\}$. In realtà aggiungo il resto non nullo: $G' = \{f_1, f_2, -x^2\}$. Si ha:

$$(f_1, f_2, \overline{S(f_1, f_2)}^G) = (f_1, f_2) = I$$

Quindi l'ideale generato è lo stesso. Riapplico Buchberger su G' :

- $\overline{S(f_1, f_2)}^{G'} = 0$ (ovvio, l'ho aggiunto apposta).
- Ma devo anche fare: $\overline{S(f_1, \overline{S(f_1, f_2)})}^{G'} = 0$?
- E $\overline{S(f_2, \overline{S(f_1, f_2)})}^{G'} = 0$?

Se sono nulli allora sono GB, altrimenti faccio $G'' = G' \cup \{\text{resti non nulli}\}$ ecc. In ogni caso l'algoritmo termina sempre! (Per la noetherianità dell'anello dei polinomi / condizione della catena ascendente sugli ideali dei termini direttori).

1090.32 Lezione 31 - <2025-12-05 Ven>

Proposizione 360. Si consideri l'Algoritmo di Buchberger.

- L'algoritmo termina.
- L'algoritmo è corretto.

Dimostrazione. Correttezza dell'output

Ammettiamo per un momento che l'algoritmo termini e dimostriamo che l'output è corretto. All'inizio abbiamo $G = F$.

Supponiamo che $\overline{S(f_i, f_j)}^G \neq 0$. Questo polinomio (il resto) viene aggiunto all'insieme G .

Algorithm 1 Algoritmo di Buchberger

```

1: Input:  $F = \{f_1, \dots, f_s\} \subseteq P$ , un term order.
2: Output:  $G = \{g_1, \dots, g_l\}$  tale che  $(G) = (F)$  e  $G$  è GB.
3:  $G \leftarrow F$ 
4: Repeat
5:  $G' \leftarrow G$ 
6: for ogni coppia  $\{p, q\} \subseteq G', p \neq q$  do
7:    $S \leftarrow \overline{S(p, q)}^{G'}$                                  $\triangleright$  Resto della divisione
8:   if  $S \neq 0$  then
9:      $G \leftarrow G \cup \{S\}$ 
10:    end if
11: end for
12: Until  $G = G'$ 
13: return  $G$ 

```

Vale la relazione fondamentale degli S-polinomi:

$$S(f_i, f_j) = uf_i - vf_j = q_1 f_1 + \dots + q_s f_s + r$$

Dove la parte destra rappresenta la divisione rispetto a G , e $r = \overline{S(f_i, f_j)}^G$. Il resto $g = \overline{S(f_i, f_j)}^G$ appartiene quindi all'ideale generato da F , ovvero:

$$g \in I = (f_1, \dots, f_s)$$

E quindi, l'ideale generato non cambia aggiungendo g :

$$(f_1, \dots, f_s) = (f_1, \dots, f_s, g) = I$$

È come se non avessimo aggiunto nulla dal punto di vista dell'ideale generato.

Iterando il procedimento, ogni volta che aggiungo un resto di S-polinomio non nullo, l'ideale generato dal nuovo insieme è ancora I . Abbiamo $G \supset F$ e se $\overline{S(g_i, g_j)}^G \neq 0$, tale resto appartiene a I (poiché i polinomi di $G \setminus F$ sono in I).

Alla fine, se G è l'output, avremo $(G) = (F)$. Inoltre, se G è l'output, significa che ha passato il controllo del ciclo **while** senza produrre resti non nulli, quindi soddisfa il **Criterio di Buchberger**. Di conseguenza, G è una Base di Gröbner (GB) di (F)

Terminazione dell'Algoritmo:

Ma l'algoritmo termina davvero? Vale che $G = \{g_1, \dots, g_m\} \supseteq F$ e $G \subseteq (F)$. Allora:

$$\{\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_m)\} \subseteq \text{LT}(I)$$

Nell'algoritmo, se ho un resto non nullo, sia $\bar{g} \neq 0$, aggiorno l'insieme:

$$G \rightsquigarrow G \cup \{\bar{g}\}$$

Consideriamo l'insieme dei termini direttori:

$$\{\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_m), \text{LT}(\bar{g})\} \supseteq \{\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_m)\}$$

Ci chiediamo: può valere l'uguaglianza? Sappiamo che \bar{g} è il resto di una divisione fatta rispetto a g_1, \dots, g_m . Per le proprietà della divisione, nessun termine di \bar{g} è divisibile per i $\text{LT}(g_i)$. Posso allora essere più precisa:

$$\forall i = 1, \dots, m : \quad \text{LT}(g_i) \nmid \text{LT}(\bar{g})$$

Ma quindi:

$$\text{LT}(\bar{g}) \notin (\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_m))$$

(Nota: l'ideale a destra è un ideale monomiale; se appartenesse, sarebbe divisibile per uno dei generatori). Cioè, vale l'inclusione stretta tra gli ideali generati dai termini direttori:

$$(\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_m)) \subsetneq (\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_m), \text{LT}(\bar{g}))$$

Ma allora: se l'algoritmo non terminasse, avrei una catena ascendente di ideali in P non stazionaria:

$$(\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s)) \subset (\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(f_s), \text{LT}(\bar{g})) \subset (\text{LT}(f_1), \dots, \text{LT}(\bar{g}), \text{LT}(\bar{g}')) \subset \dots$$

Ma P è un anello noetheriano (ogni ideale è finitamente generato e vale la condizione della catena ascendente). Questo genera un assurdo! Quindi l'algoritmo termina necessariamente. ■

Esempio 361. Consideriamo $P = \mathbb{K}[x, y]$ con ordine **deglex** $x > y$. Siano:

$$\begin{aligned} f_1 &= x^3 - 2xy \\ f_2 &= x^2y - 2y^2 + x \end{aligned}$$

Poniamo $I = (f_1, f_2)$ e $G = \{f_1, f_2\}$.

Calcoliamo l'S-polinomio (vedi lezione precedente per i passaggi):

$$S(f_1, f_2) = -x^2$$

Calcoliamo il resto rispetto a G :

$$\overline{S(f_1, f_2)}^G = -x^2 = f_3$$

Il resto non è nullo, quindi $\{f_1, f_2\}$ non sono base di Gröbner. Considero $G = \{f_1, f_2, f_3\}$.

Calcolo i nuovi S-polinomi:

$$\overline{S(f_1, f_2)}^G = 0 \quad (\text{già trattato})$$

Considero $S(f_1, f_3)$ (un passaggio un po' diverso dall'algoritmo standard che controlla coppie, qui mi fermo al k -esimo polinomio che dava problemi):

$$\overline{S(f_1, f_3)}^G = -2xy = f_4$$

Aggiorno G : $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Continuando:

$$\overline{S(f_1, f_3)}^G = 0$$

Considero $S(f_2, f_3)$:

$$\overline{S(f_2, f_3)}^G = -2y^2 + x = f_5$$

Aggiorno G : $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$.

Ora G passa il criterio di Buchberger (tutti gli S-polinomi riducono a 0). Ma allora G è una GB di $I = (f_1, f_2)$, dove:

$$\text{LT}(I) = (x^3, x^2y, x^2, xy, y^2)$$

È una base di Gröbner ridotta? **No**, ad esempio perché non ho trovato un insieme minimale di generatori per $\text{LT}(I)$.

La base trovata sopra non è ridotta, inoltre anche perché i polinomi non sono tutti monici. Ma allora chi è la GB ridotta?

1. Li rendo monici (se non lo sono già, devo dividerli per il Leading Coefficient LC):

$$G' = \left\{ f_1, f_2, \underbrace{-f_3}_{x^2}, \underbrace{-\frac{f_4}{2}}_{xy}, \underbrace{-\frac{f_5}{2}}_{y^2-x/2} \right\}$$

(quelli segnati in rosso sono stati resi monici).

2. Guardo i generatori non monomiali e rimuovo quelli il cui termine direttore è divisibile per il termine direttore di un altro elemento nella base. Alla fine, dopo la pulizia dei generatori ridondanti:

$$(G') = \left(-f_3, -\frac{f_4}{2}, -\frac{f_5}{2} \right) = \left(x^2, xy, y^2 - \frac{x}{2} \right)$$

3. Controllo: questo insieme rispetta la richiesta di ridotta. Quindi G' è la base ridotta di I rispetto a deglex.

Domanda: Siano P un anello di polinomi, $\{f_1, \dots, f_s\} \subseteq P$ e $\{g_1, \dots, g_l\} \subseteq P$. Vale:

$$(f_1, \dots, f_s) \stackrel{?}{=} (g_1, \dots, g_l)$$

Se P non è un PID (numero variabili $n \geq 2$), non è banale! Ecco l'algoritmo:

1. Fisso un **term order** (devo mantenere lo stesso per entrambi).
2. Calcolo la GB ridotta di (f_1, \dots, f_s) .
3. Calcolo la GB ridotta di (g_1, \dots, g_l) .
4. Se le due GB ridotte sono uguali sse $(f_1, \dots, f_s) = (g_1, \dots, g_l)$.

1090.32.1 Teorema di Eliminazione

Sia $I = (f_1, \dots, f_s) \subset P$ e $J = (g_1, \dots, g_l) \subset P$. Vale che $I \cap J$ è un ideale. Grazie alle GB, si calcola un insieme di generatori di $I \cap J$. Inoltre, con le GB si riesce a calcolare un insieme di generatori di \sqrt{I} .

Queste applicazioni si basano sulla tecnica di **Eliminazione di variabili**.

Sia $\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ dove $\underline{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ e $\underline{y} = \{y_1, \dots, y_m\}$. Vale l'inclusione $\mathbb{K}[\underline{x}] \hookrightarrow \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$. I termini sono $T_{\underline{x}, \underline{y}}^{(n+m)}$.

Definizione 362. Un term order su $T_{\underline{x}, \underline{y}}$ è un term order di eliminazione delle y rispetto alle \underline{x} se ogni termine in cui compare almeno una y_j è maggiore di qualunque termine nelle sole \underline{x} . Da cui:

$$\underline{x}^\alpha \underline{y}^\beta > \underline{x}^\gamma \quad \forall \gamma \quad \text{con } \beta \neq (0, \dots, 0)$$

Esempio 363. Consideriamo Lex su $\mathbb{K}[x_1, x_2, y_1, y_2]$. Un term order di eliminazione delle y rispetto alle x potrebbe essere:

$$y_1 > y_2 > x_1 > x_2$$

È vero che questo Lex è un term order di eliminazione delle y ? Confrontiamo $\underline{y}^{\beta_1 \beta_2} \underline{x}^{\alpha_1 \alpha_2}$ e $\underline{x}^{\gamma_1 \gamma_2}$ con $\beta_1 \neq 0 \vee \beta_2 \neq 0$.

- Se $\beta_1 \neq 0$: il vettore esponenti è $(\beta_1, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2)$ vs $(0, 0, \gamma_1, \gamma_2)$. Poiché $\beta_1 > 0$, il primo è maggiore.
- Se $\beta_1 = 0, \beta_2 \neq 0$: il vettore è $(0, \beta_2, \alpha_1, \alpha_2)$ vs $(0, 0, \gamma_1, \gamma_2)$. Poiché $\beta_2 > 0$, il primo è maggiore.

Quindi sì, funziona.

Lemma 364. Fisso un term order di eliminazione delle y rispetto alle x . Sia $f \in \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ generico. Allora:

$$f \in \mathbb{K}[\underline{x}] \iff \text{LT}(f) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$$

Dimostrazione. (\Rightarrow): Se $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ allora $\text{LT}(f) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ (ovvio).

(\Leftarrow): Sia $f \in \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ con $\text{LT}(f) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$.

Supponiamo per assurdo che $f \notin \mathbb{K}[\underline{x}]$. Sia $\underline{x}^\alpha \underline{y}^\beta \in \text{supp}(f) \setminus \{\text{LT}(f)\}$ un termine con $\beta \neq \underline{0}$. Per la proprietà dell'ordine di eliminazione, ogni termine contenente y deve essere maggiore di ogni termine contenente solo x . Quindi:

$$\underline{x}^\alpha \underline{y}^\beta > \text{LT}(f)$$

(poiché $\text{LT}(f)$ ha solo x). Ma questo contraddice la definizione di $\text{LT}(f)$ (che deve essere il massimo). Quindi deve essere $\beta = (0, \dots, 0)$ per tutti i termini.

In particolare $f \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. ■

Teorema 365. (Teorema di Eliminazione). Sia $\mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ e $<$ un term order di eliminazione delle y rispetto alle x . Considero $I \subseteq \mathbb{K}[\underline{x}, \underline{y}]$ e sia G una GB di I . Sia:

$$I' = I \cap \mathbb{K}[\underline{x}] \quad \text{ideale di } \mathbb{K}[\underline{x}]$$

(detto ideale di eliminazione).

Allora: l'insieme $G_{\underline{x}} = G \cap \mathbb{K}[\underline{x}]$ è una GB di I' rispetto al term order indotto su $T_{\underline{x}}$.

Dimostrazione. Dobbiamo mostrare che $G_{\underline{x}}$ genera I' ed è una GB. Sappiamo che $G_{\underline{x}} \subseteq I'$. Si ha: $\forall f \in I', f \in I$. Poiché G è GB di I :

$$\exists \tilde{g} \in G \text{ t.c. } \text{LT}(\tilde{g}) \text{ divide } \text{LT}(f)$$

Ma poi so che $f \in I'$ e quindi $\text{LT}(f) \in \mathbb{K}[x]$.

Dato che $\text{LT}(\tilde{g})$ divide un monomio che contiene solo variabili x , allora $\text{LT}(\tilde{g}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. (Le y non vi compaiono).

Per il Lemma precedente: se $\text{LT}(\tilde{g}) \in \mathbb{K}[\underline{x}]$ allora $\tilde{g} \in \mathbb{K}[\underline{x}]$. Quindi $\tilde{g} \in G \cap \mathbb{K}[\underline{x}] = G_{\underline{x}}$. Ma allora, per ogni $f \in I'$, il suo termine direttore è divisibile per il termine direttore di un elemento di $G_{\underline{x}}$.

Pertanto $G_{\underline{x}}$ è una GB per I' . ■

Esempio 366. Consideriamo una superficie in forma parametrica nello spazio affine \mathbb{R}^3 :

$$\begin{cases} x = u + t \\ y = t^2 + 2tu \\ z = t^3 + 3t^2u \end{cases}$$

con $t, u \in \mathbb{R}$.

Se considero il punto $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e voglio verificare che sia nella superficie, usare il sistema sopra non è molto comodo (bisogna risolvere per t, u). Sarebbe più comodo avere la rappresentazione algebrica (implicita) della superficie:

$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = 0 \\ \vdots \\ g_l(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

I punti della superficie sono le soluzioni del sistema. Da cui $I = (g_1, \dots, g_l)$. Vorrei passare dalla forma parametrica da sopra alla rappresentazione algebrica.

Costruisco l'ideale J in $\mathbb{K}[x, y, z, u, t]$:

$$J = (x - u - t, \quad y - t^2 - 2tu, \quad z - t^3 - 3t^2u)$$

Fisso un term order di eliminazione di u, t rispetto a x, y, z e calcolo una GB di J . La rappresentazione algebrica della superficie la ottengo considerando $G \cap \mathbb{K}[x, y, z]$.

Osservazione. Il **Lex** è un term order di eliminazione, ma è molto lento. Esempio: Sia $\{x^3, y^l x \mid l \in \mathbb{N}\}$. Ordinandoli in modo decrescente con Lex con $x > y$:

$$x^3 > \dots > \dots > \dots > xy > x$$

Ho infiniti termini del tipo $y^l x$ tra x e x^3 . Ma cioè: tra x e x^3 ordinati Lex ho infiniti termini!

Con **DegLex** questo non capita (o con qualunque term order che considera prima il grado):

$$x^2 > \dots > x$$

Qui non ho infiniti termini con DegLex.

Esiste un algoritmo (**F.G.L.M.**) che prende una GB rispetto a un term order $<_1$ (magari veloce come DegRevLex) e dà la base di GB dello stesso ideale rispetto a un ordine $<_2$ (come Lex, necessario per l'eliminazione) senza rifare Buchberger da zero, rendendo il calcolo più efficiente.

1090.33 Lezione 32 - <2025-12-09 Mar>

Il termine “Sizigie” deriva dal greco e significa “allineamento”.

Sia R un anello commutativo con unità, M un R -modulo finitamente generato e siano $\{f_1, \dots, f_s\} \subseteq M$ un insieme di generatori di M . Per “capire” veramente la struttura del modulo M , oltre ai generatori,abbiamo bisogno di conoscere le **relazioni** tra i generatori.

Esempio 367. Sia $R = \mathbb{K}[X, Y]$ e sia $M = \langle x^2, y^3 \rangle_R$. Esistono $a_1, a_2 \in R$ tali che $a_1 x^2 + a_2 y^3 = 0$? Ad esempio:

$$\begin{aligned} a_1 &= y^3 \\ a_2 &= -x^2 \end{aligned}$$

Infatti $y^3(x^2) + (-x^2)(y^3) = 0$. Questa è una relazione tra i generatori.

Definizione 368. Sia R anello commutativo con unità, M un R -modulo e $f_1, \dots, f_s \in M$. Allora, una **sizigia** di (f_1, \dots, f_s) è una lista ordinata $(a_1, \dots, a_s) \in R^s$ tale che:

$$a_1 f_1 + \dots + a_s f_s = 0$$

Notiamo che (a_1, \dots, a_s) è un elemento del modulo libero R^s .

Lemma 369. Siano R, M come sopra e $f_1, \dots, f_s \in M$. Definiamo l’insieme delle sizigie come:

$$\text{Syz}(f_1, \dots, f_s) = \{(a_1, \dots, a_s) \in R^s \mid (a_1, \dots, a_s) \text{ è sizigia di } (f_1, \dots, f_s)\}$$

Si ha che $\text{Syz}(f_1, \dots, f_s)$ è un R -modulo.

Dimostrazione. Possiamo fare le verifiche dirette per vedere che $\text{Syz}(f_1, \dots, f_s)$ è un sottomodulo. Oppure, più elegantemente, definiamo un morfismo di R -moduli:

$$\begin{aligned} \lambda : R^s &\longrightarrow M \\ (r_1, \dots, r_s) &\longmapsto r_1 f_1 + \dots + r_s f_s \end{aligned}$$

Vale che:

$$\ker \lambda = \{(r_1, \dots, r_s) \in R^s \mid r_1 f_1 + \dots + r_s f_s = 0\} = \text{Syz}(f_1, \dots, f_s)$$

Poiché il nucleo di un omomorfismo è sempre un modulo, segue che $\text{Syz}(f_1, \dots, f_s)$ è un R -modulo. ■

Sia ora $R = P = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi.

Teorema 370. In P^ℓ , consideriamo $t_1 e_{j_1}, \dots, t_s e_{j_s}$ con $t_i \in T^{(n)}$ (termini monomiali), dove e_1, \dots, e_ℓ è la base del modulo libero P^ℓ . Sia P^s il modulo libero con base $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_s$. Siano definite le seguenti sizigie elementari σ_{ij} per $i, j \in \{1, \dots, s\}$ con $i \neq j$:

$$\sigma_{ij} = \frac{\text{mcm}(t_i, t_j)}{t_i} \mathcal{E}_i - \frac{\text{mcm}(t_i, t_j)}{t_j} \mathcal{E}_j$$

Se $e_{j_i} \neq e_{j_j}$, allora $\sigma_{ij} = 0$. Se $e_{j_i} = e_{j_j}$, si usa la formula sopra. Notiamo che questa formula ricorda molto un **S-polinomio!**

Allora:

$$\text{Syz}(t_1 e_{j_1}, \dots, t_s e_{j_s}) \text{ è generato da } \{\sigma_{ij}\}$$

Dimostrazione. Sia $a_1 \mathcal{E}_1 + \dots + a_s \mathcal{E}_s$ una siziglia di $t_1 e_{j_1}, \dots, t_s e_{j_s} \in P^\ell$. Allora vale la relazione:

$$a_1 t_1 e_{j_1} + \dots + a_s t_s e_{j_s} = 0$$

Riscriviamo raccogliendo rispetto ai vettori della base e_1, \dots, e_ℓ :

$$f_1 e_1 + \dots + f_\ell e_\ell = 0 \quad \text{con } f_i \in P$$

Ma allora, poiché e_1, \dots, e_ℓ è una base di P^ℓ , deve essere $f_1 = \dots = f_\ell = 0$.

La siziglia (a_1, \dots, a_s) può essere vista come somma di sizigie più semplici:

- Una è la siziglia per i termini supportati su e_1 .
- Una è la siziglia per i termini supportati su e_2 .
- E così via fino a e_ℓ .

Consideriamo quindi solo i termini supportati su un generico e_j : siano essi $x^{\alpha_{r_1}} e_{j_1}, \dots, x^{\alpha_{r_k}} e_{j_k}$. Dalla siziglia (a_1, \dots, a_s) otteniamo la siziglia ristretta (a'_1, \dots, a'_r) per questi monomi:

$$(a'_1 x^{\alpha_1} + \dots + a'_r x^{\alpha_r}) \cdot e_j = 0$$

Essendo un polinomio in P , questo deve essere identicamente zero. Ma allora i coefficienti devono annullarsi a vicenda. I coefficienti sono del tipo:

$$(a'_1, \dots, a'_r) = (c_1 x^{\alpha-\alpha_1}, \dots, c_r x^{\alpha-\alpha_r}) \quad \text{con } c_i \in \mathbb{K}$$

Ad esempio, se $r = 3$, la siziglia è:

$$S = (c_1 x^{\alpha-\alpha_1}, c_2 x^{\alpha-\alpha_2}, c_3 x^{\alpha-\alpha_3}) \in P^r$$

Da cui la relazione sui coefficienti:

$$c_1 x^{\alpha-\alpha_1} x^{\alpha_1} + c_2 x^{\alpha-\alpha_2} x^{\alpha_2} + c_3 x^{\alpha-\alpha_3} x^{\alpha_3} = 0$$

Ovvero $c_1 + c_2 + c_3 = 0$. Possiamo riscrivere questa somma come combinazione di coppie:

$$S = (c_1 x^{\alpha_1}, -c_1 x^{\alpha_2}, 0) + (0, (c_1 + c_2) x^{\alpha_3}, c_3 x^{\alpha_3})$$

Queste sono sizigie che coinvolgono solo 2 termini (x^{α_i} e x^{α_j}). Quindi sono multiple delle sizigie elementari σ_{ij} (rispetto a moltiplicazioni di elementi di P). ■

Esempio 371. Sia $I = \langle x^2, xy, z^2 \rangle_P \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$. Vogliamo calcolare $\text{Syz}(x^2, xy, z^2) \subseteq P^3$. La base di P^3 è $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$. Le sizigie generatrici sono:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{x^2y}{x^2}\mathcal{E}_1 - \frac{x^2y}{xy}\mathcal{E}_2 = y\mathcal{E}_1 - x\mathcal{E}_2 \\ \sigma_{13} &= z^2\mathcal{E}_1 - x^2\mathcal{E}_3 \\ \sigma_{23} &= z^2\mathcal{E}_2 - xy\mathcal{E}_3\end{aligned}$$

Questi 3 elementi generano il modulo $\text{Syz}(x^2, xy, z^2) \subseteq P^3$.

Possiamo estendere questo risultato alla situazione non monomiale? Prendo $g_1, \dots, g_s \in P^\ell$, voglio trovare un insieme di generatori per $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s) \subseteq P^s$. Sì, anzi posso fare di più.

Fisso un **term order**. Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P^\ell$ una Base di Gröbner per il modulo $\langle G \rangle_P \subseteq P^\ell$. Definisco $s_{ij} \in P^s$ sизия di g_1, \dots, g_s per ogni $i < j$. Sappiamo che per le basi di Gröbner vale $S(g_i, g_j) \xrightarrow{G} 0$, cioè:

$$\exists q_1, \dots, q_s \in P \text{ tali che: } S(g_i, g_j) = q_1g_1 + \dots + q_sg_s$$

Ricordando che $S(g_i, g_j) = t_i g_i - t_j g_j$ (dove i t sono i coefficienti monomiali per cancellare il termine direttore), possiamo riscrivere:

$$s_{ij} = t_i \mathcal{E}_i - t_j \mathcal{E}_j - q_1 \mathcal{E}_1 - \dots - q_s \mathcal{E}_s$$

Questa espressione rappresenta una sизия (poiché la combinazione lineare dei generatori dà 0, dato che $S(g_i, g_j) - \sum q_k g_k = 0$).

L'insieme delle $\{s_{ij}\}$ è una **Base di Gröbner** del modulo $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$. Ma rispetto a quale **term order**? Si definisce un ordine $>_G$ su P^s (il modulo delle sизии) indotto dall'ordine dei termini direttori in G :

$$x^\alpha \mathcal{E}_i >_G x^\beta \mathcal{E}_j \iff \text{LT}(x^\alpha g_i) > \text{LT}(x^\beta g_j)$$

oppure, se i termini direttori sono uguali, si usa l'indice per rompere la parità (es. $i < j$).

Teorema 372. (Teorema di Schreyer).

L'insieme delle $\{s_{ij}\}$ è una **Base di Gröbner** del modulo $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$ rispetto all'ordine $>_G$

Dimostrazione. È lasciato per esercizio verificare che $>_G$ sia un term order. Prendo solo s_{ij} con $i < j$. Si ha che:

$$\text{LT}_{>_G}(s_{ij}) = t_i \mathcal{E}_i$$

Infatti:

$$s_{ij} = \underbrace{\frac{\text{mcm}(\text{LT}(g_i), \text{LT}(g_j))}{\text{LT}(g_i)} \mathcal{E}_i}_{t_i} - \underbrace{\frac{\text{mcm}(\dots)}{\text{LT}(g_j)} \mathcal{E}_j}_{t_j} - \sum q_k \mathcal{E}_k$$

Per la proprietà della divisione, i termini in q_k sono “più piccoli”. E per l'ordinamento indotto, il termine legato a g_i domina.

Da qui studio se $\{s_{ij}\}_{i < j}$ è una GB di $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$ rispetto a $>_G$. Sia $f \in \text{Syz}(g_1, \dots, g_s) \subseteq P^s$: $f = \sum_{i=1}^s f_i \mathcal{E}_i$ con $f_i \in P$. Voglio dimostrare che $\text{LT}_{>_G}(f)$ è divisibile per uno dei $\text{LT}_{>_G}(s_{ij})$.

Sia $\text{LT}_{>_G}(f) = m_\nu \mathcal{E}_\nu$ per un $\nu \in \{1, \dots, s\}$. Sia $S = \{u \mid m_u \text{LT}_{>}(g_u) = m_\nu \text{LT}_{>}(g_\nu)\}$. Allora $s = \sum_{u \in S} m_u \mathcal{E}_u$ è una sizigia di $\{\text{LT}_{>}(g_u) \mid u \in S\}$. Le sizigie di questo tipo sono generate dalle σ_{uv} . $\text{LT}_{>_G}(f)$ è divisibile per uno dei $\text{LT}_{>_G}(\sigma_{uv})$, che corrisponde al LT di una delle s_{ij} . Quindi $\{s_{ij}\}_{i < j}$ è una GB di $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$. ■

Iterando il teorema di Schreyer otteniamo una catena. Partiamo da $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq P^\ell$ (GB rispetto a $<$).

- Per Schreyer: $F_1 \subseteq P^s$ è GB di $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$ rispetto a $<_G$.
- Per Schreyer: $F_2 \subseteq P^{s_1}$ è GB di $\text{Syz}(F_1)$ rispetto all'ordine indotto...
- ecc.

Quello che trovo è una successione esatta:

$$\dots \longrightarrow P^{s_1} \xrightarrow{\phi_1} P^s \xrightarrow{\phi_0} \langle G \rangle_P \longrightarrow 0$$

Dove $\ker \phi_0 = \text{Syz}(g_1, \dots, g_s) = \text{Im } \phi_1$. Questa si chiama **Risoluzione Libera** di $\langle G \rangle_P$.

Teorema 373. (Teorema delle Sizigie di Hilbert). Sia $P = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Ogni P -modulo finitamente generato possiede una risoluzione libera di lunghezza al massimo n (numero delle indeterminate). Cioè: a un certo punto mi fermo!

Lemma 374. Sia G una GB in P^ℓ rispetto a un term order $>$. Sia $G = \{g_1, \dots, g_s\}$. Supponiamo di aver ordinato i g_1, \dots, g_s nel modo seguente: Se $\text{LT}(g_i) = m_i e_k$ e $\text{LT}(g_s) = m_j e_k$, con $i < j$, allora $m_i >_{\text{Lex}} m_j$ (Lex con $x_1 > \dots > x_n$).

Allora: Se le indeterminate x_1, \dots, x_m non compaiono in $\text{LT}(g_1), \dots, \text{LT}(g_s)$, allora le indeterminate x_1, \dots, x_m, x_{m+1} non compaiono nei LT delle sizigie s_{ij} del teorema di Schreyer rispetto a $>_G$.

Dimostrazione. Ricordiamo che $\text{LT}_{>_G}(s_{ij}) = t_i \mathcal{E}_i$. Costruisco s_{ij} : lo posso fare se g_i e g_j hanno il LT supportato sullo stesso vettore e_k della base di P^ℓ . Per come ho ordinato i g in GB:

$$\frac{\text{LM}(g_i)}{e_k} >_{\text{Lex}} \frac{\text{LM}(g_j)}{e_k} \quad \text{in } T^{(n)}$$

Per ipotesi x_1, \dots, x_m non compaiono in $\text{LM}(g)$. Faccio il minimo comune multiplo:

$$\text{mcm} \left(x_{m+1}^{\alpha_{m+1}} \dots x_n^{\alpha_n}, x_{m+1}^{\beta_{m+1}} \dots x_n^{\beta_n} \right) = x_{m+1}^{\gamma_{m+1}} \dots x_n^{\gamma_n}$$

Poiché $i < j$, l'esponente di x_{m+1} in g_i è maggiore o uguale a quello in g_j (per l'ordine Lex). Da cui il coefficiente t_i (che ottengo dividendo il mcm per $\text{LT}(g_i)$) **non** contiene x_{m+1} .

$$\text{LT}_{>_G}(s_{ij}) = t_i \mathcal{E}_i \implies \text{il LT non contiene } x_1, \dots, x_m, x_{m+1}. \quad \blacksquare$$

Dimostrazione. (del Teorema 373). Sia $M \subseteq P^\ell$ e siano g_1, \dots, g_s una GB rispetto a $>$, ordinati come nel lemma. Uso Schreyer: $\{s_{ij}\}_{i < j}$ è GB rispetto a $>_G$ di $\text{Syz}(g_1, \dots, g_s)$. Itero.

- Al passo 1, $\text{LT}_{>_G}(s_{ij})$ non contiene x_1 .
- Al passo 2, la GB $S^{(2)}$ di $\text{Syz}(S^{(1)})$ avrà LT che non contengono x_1, x_2 .

• ...

- Al passo n , i LT non contengono x_1, \dots, x_n .

Quindi i generatori del modulo delle sizigie n -esime devono essere costanti o nulli (se siamo in grado positivo). Quindi otteniamo un modulo libero. La sequenza è:

$$0 \rightarrow P^{s_\ell} \rightarrow \dots \rightarrow P^{s_1} \rightarrow P^s \rightarrow \langle G \rangle_P \rightarrow 0$$

con $\ell \leq n$. ■

Osservazione. In geometria algebrica, le risoluzioni libere di ideali di P danno una serie di informazioni sull'oggetto geometrico descritto dall'ideale. Le risoluzioni che costruiamo con Schreyer dipendono dal term order $>$ e quindi dalla GB da cui parto.

Esiste **LA** risoluzione MINIMALE di $M = \langle G \rangle_P$ e da questa si leggono ad esempio: i numeri di Betti, la lunghezza della risoluzione, la regolarità di Castelnuovo-Mumford (per ideali omogenei).

1090.34 Lezione 33 - <2025-12-15 Lun>

Esempio 375. Sia $P = \mathbb{K}[X, Y]$, con \mathbb{K} campo di caratteristica diversa da 2. Fisso come term order DegLex e $X > Y$. Fissato

$$I = (X^2 - X, XY, Y^2 - Y) \subseteq \mathbb{K}[X, Y]$$

abbiamo $G = \{X^2 - X, XY, Y^2 - Y\}$, con $g_1 = X^2 - X$, $g_2 = XY$ e $g_3 = Y^2 - Y$.

- $S(g_1, g_2) = \frac{X^2Y}{X^2}g_1 - \frac{X^2Y}{XY}g_2 = Y(X^2 - X) - X(XY) = -XY$ e quindi $\overline{S(g_1, g_2)}^G = 0$.
- $S(g_1, g_3) = Y^2(X^2 - X) - X^2(Y^2 - Y) = -XY^2 + X^2Y$ e quindi $\overline{S(g_1, g_3)}^G = \dots = 0$.
- $S(g_2, g_3) = Y(XY) - X(Y^2 - Y) = XY$ e quindi $\overline{S(g_2, g_3)}^G = 0$.

Queste condizioni implicano che G sia GB di I rispetto a DegLex con $X > Y$.

Inoltre G è la GB ridotta di I .

1090.34.1 Applicazioni alla Geometria Algebrica

Siano $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_K] = P$, $S = \{f_1, \dots, f_s\}$. Pongo

$$\begin{cases} f_1 = 0 \\ \vdots \\ f_s = 0 \end{cases}$$

Cerco $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che per ogni $i = 1, \dots, s$:

$$f_i(c_1, \dots, c_n) = 0$$

Chiamo $V(S)$ l'insieme algebrico degli zeri di S :

$$V(S) := \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n \mid f_i(c_1, \dots, c_n) = 0 \ \forall i = 1, \dots, s\}.$$

Se $I = (S) \subseteq P$, allora $V(S) = V(I)$. Molte proprietà di $V(I)$ "dipendono" da \mathbb{K} .

Esempio 376. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $P = \mathbb{K}[X, Y]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X^2 + Y^2) &= \{(0, 0)\} \\ \mathrm{V}(X, Y) &= \{(0, 0)\}.\end{aligned}$$

(X, Y) è ideale massimale in P , ma ha la stessa varietà di un ideale non massimale.

Prendendo gli stessi esempi con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X^2 + Y^2) &= \{(c_1, c_2) \in \mathbb{C}^2 \mid c_1^2 = -c_2^2\} \ni (1, i) \\ \mathrm{V}(X, Y) &= \{(0, 0)\}.\end{aligned}$$

Questa volta le varietà sono diverse.

È possibile anche considerare l'operazione inversa: se ho un insieme $V \subseteq \mathbb{K}^n$ insieme algebrico, gli associo un ideale in $P = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\mathcal{I}(V) := \{f \in P \mid f(c_1, \dots, c_n) = 0 \ \forall (c_1, \dots, c_n) \in V\}.$$

La situazione quindi è la seguente:

$$\{\text{Ideale in } \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]\} \xrightleftharpoons[\mathcal{I}]{V} \{\text{Insiemi algebrici di } \mathbb{K}^n\}$$

Il "problema" è che se $A \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ è ideale,

$$\mathcal{I}(\mathrm{V}(A)) \neq A.$$

Esempio 377. In $\mathbb{R}[X, Y]$

$$A = (X^2 + Y^2 + 1) \xrightarrow{V} \mathrm{V}(A) = \emptyset \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{I}(\mathrm{V}(A)) = \mathbb{R}[X, Y]$$

In $\mathbb{C}[X, Y]$, invece:

$$A = (X^2 + Y^2 + 1) \xrightarrow{V} \mathrm{V}(A) \neq \emptyset \xrightarrow{\mathcal{I}} \mathcal{I}(\mathrm{V}(A)) \neq \mathbb{C}[X, Y].$$

1090.34.2 Nullstellensatz di Hilbert

Teorema 378. (*weak*). Sia $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ chiuso, $P = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $A \subseteq P$ ideale. Allora

$$\mathrm{V}(A) = \emptyset \iff 1 \in A$$

Teorema 379. (*strong*). Sia $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ chiuso, $P = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $A \subseteq P$ ideale.

$$\mathcal{I}(\mathrm{V}(A)) = \sqrt{A}.$$

Per dimostrare entrambi i teoremi si utilizzerà questo risultato (non dimostrato)

Proposizione 380. Sia \mathbb{K} un campo, A una \mathbb{K} -algebra finitamente generata. Se A è un campo, allora è una estensione algebrica finita di \mathbb{K} .

Esempio 381. (di Estensione Algebrica). Consideriamo il campo \mathbb{Q} , e si scelga $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ci sono due modi fondamentalmente diversi per sceglierlo:

- $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: $\sqrt{2}$ è radice di un polinomio in $\mathbb{Q}[X]$;
- $\pi \notin \mathbb{Q}$: π non è radice di un polinomio in $\mathbb{Q}[X]$.

Una estensione algebrica di \mathbb{Q} è \mathbb{Q} a cui aggiungo (una quantità finita di) radici di polinomi in $\mathbb{Q}[X]$.

Osservazione. Un campo \mathbb{K} è algebricamente chiuso ($\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$) se per ogni polinomio in $\mathbb{K}[X]$ esiste una radice in \mathbb{K} .

Si svolgerà una dimostrazione per fasi.

Proposizione 382. Sia $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$, $P = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, M, A ideali di P . Si dimostra che:

1. M è massimale in P sse esistono $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$M = (X_1 - c_1, X_2 - c_2, \dots, X_n - c_n)$$

2. Se $A \subsetneq P$, allora esiste $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che per ogni $f \in A$, $f(b_1, \dots, b_n) = 0$.
3. $\mathcal{I}(V(A)) = \sqrt{A}$.

Dalla 2. segue immediatamente il Teorema 378, mentre la 3. è esattamente il Teorema 379.

Dimostrazione. 1. (\Leftarrow): Sia $M = (X_1 - c_1, X_2 - c_2, \dots, X_n - c_n)$ con $c_i \in \mathbb{K}$.

M è massimale sse $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/M$ è campo. Si ha che

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/(X_1 - c_1) \cong \mathbb{K}[X_2, \dots, X_n].$$

Iterativamente si ottiene che

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/(X_1 - c_1, X_2 - c_2, \dots, X_n - c_n) \cong \mathbb{K}.$$

Pertanto M è massimale in P . (questa implicazione funziona bene anche se $\mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$).

(\Rightarrow): sia M massimale in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

$$\mathbb{K} \xrightarrow{i} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \xrightarrow{\pi} \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/M$$

Quindi $\pi \circ i$ è morfismo di campi iniettiva, e pertanto $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/M$ è una \mathbb{K} -algebra finitamente generata. Per la Proposizione 380, $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/M$ è estensione algebrica di \mathbb{K} .

Poiché \mathbb{K} è algebricamente chiuso, allora

$$\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/M \cong \mathbb{K}.$$

Pertanto $\pi \circ i$ è un morfismo iniettivo di campi, ma il codominio è isomorfo a \mathbb{K} , e pertanto è isomorfismo^[343]. Si pone $\phi := \pi \circ i$.

Dunque esiste

$$\phi^{-1} : \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]/M \rightarrow \mathbb{K}.$$

In particolare pongo, per ogni $i = 1, \dots, n$:

$$c_i := \phi^{-1}(X_i + M) -$$

e in particolare $\phi^{-1}(X_i - c_i + M) = 0$ ^[344], e quindi $X_i - c_i + M \in \ker(\phi^{-1}) = (0)$ (dove l'ultima uguaglianza è perché ϕ^{-1} è isomorfismo di campi).

Quindi $X_i - c_i + M = 0 + M$ e pertanto $X_i - c_i \in M$.

Segue che $(X_1 - c_1, \dots, X_n - c_n) \subseteq M$:

- M è massimale per ipotesi;
- $(X_1 - c_1, \dots, X_n - c_n)$ è massimale per il punto 1.

e quindi si ha l'uguaglianza.

2. Sia $A \subsetneq P$. Vogliamo dimostrare che $V(A) \neq \emptyset$.

Esiste $M = (X_1 - c_1, \dots, X_n - c_n)$ massimale (l'uguaglianza per 1.) in P tale che $A \subseteq M$.

Quindi, per ogni $f \in A$, $f \in M$:

$$f = f_1 \cdot (X_1 - c_1) + \dots + f_n(X_n - c_n) \quad f_i \in P$$

Considerando ora $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$f(c_1, \dots, c_n) = f_1(c_1, \dots, c_n) \cdot (c_1 - c_1) + \dots + f_n(c_1, \dots, c_n) \cdot (c_n - c_n) = 0.$$

dunque $(c_1, \dots, c_n) \in V(A)$.

3. (\supseteq): Sia $f \in \sqrt{A}$. Allora esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $f^m \in A$.

Tesi: per ogni $(c_1, \dots, c_n) \in V(A) \subseteq \mathbb{K}^n$, allora $f(c_1, \dots, c_n) = 0$.

Ovviamente, poiché $f^m \in A$, per ogni $(c_1, \dots, c_n) \in V(A) \subseteq \mathbb{K}^n$ si ha che $f^m(c_1, \dots, c_n) = 0$:

$$0 = f^m(c_1, \dots, c_n) = (f(c_1, \dots, c_n))^m$$

e pertanto, poiché si lavora in un campo, $f(c_1, \dots, c_n) = 0$.

(\subseteq): WLOG suppongo $f \neq 0$, $f \in J(V(A))$.

Sia $B = P[Y] \cong \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y]$. Considero quindi l'ideale generato da A in B (lo denoto con $A \cdot B$) sommato all'ideale generato da $(Y \cdot f - 1)$:

$$A' := A \cdot B + (Y \cdot f - 1) \cdot B \subseteq B.$$

Supponiamo che $A' \subsetneq B$. Per il 2., allora $\emptyset \neq V(A') \subseteq \mathbb{K}^{n+1}$.

Quindi esiste $(c_1, \dots, c_n, d) \in \mathbb{K}^{n+1}$, tale che per ogni $g \in A'$

$$g(c_1, \dots, c_n, d) = 0.$$

ovvero $(c_1, \dots, c_n) \in V(A')$.

Per ogni $\tilde{g} \in A$ si ha che $\tilde{g} \in A'$. Quindi $\tilde{g}(c_1, \dots, c_n, d) = 0$, ma siccome $\tilde{g} \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\tilde{g}(c_1, \dots, c_n) = 0.$$

Pertanto $(c_1, \dots, c_n) \in V(A) \subseteq \mathbb{K}^n$.

Poiché $f \in J(V(A))$, allora $f(c_1, \dots, c_n) = 0$. Diccome $(c_1, \dots, c_n, d) \in V(A')$ e $(Y \cdot f - 1) \in A'$, allora:

$$0 = (Y \cdot f - 1)(c_1, \dots, c_n, d) = d \cdot \underbrace{f(c_1, \dots, c_n)}_{=0} - 1 = -1$$

Questo è un assurdo: pertanto $A' = B$, e in particolare $1 \in A'$. Per definizione di A' , esistono $f_1, \dots, f_\ell \in A$, esistono $q_1, \dots, q_\ell \in B$ ed esiste $p \in B$ tali che

$$1 = q_1 f_1 + \dots + q_\ell f_\ell + p(Y \cdot f - 1).$$

Sia φ il morfismo di anelli con unità:

$$\begin{aligned} \varphi : B = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, Y] &\rightarrow \mathbb{K}(X_1, \dots, X_n) \\ X_i &\mapsto X_i \\ Y &\mapsto \frac{1}{f} \end{aligned}$$

e in particolare $1 = \varphi(1_B)$.

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(1_B) = \varphi(q_1 f_1 + \dots + q_\ell f_\ell + p(Y \cdot f - 1)) \\ &= q_1 \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot f_1(X_1, \dots, X_n) + \dots + q_\ell \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot f_\ell(X_1, \dots, X_n) + \\ &\quad + p \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot (\cancel{\frac{1}{f} \cdot f} - 1) \end{aligned}$$

$$1 = q_1 \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot f_1 + \dots + q_\ell \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot f_\ell$$

Poiché i q_i sono finiti, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che, moltiplicando da entrambe le parti per f^m , “tolga” i denominatori:

$$f^m = f^m \cdot \left(q_1 \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot f_1 + \dots + q_\ell \left(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f} \right) \cdot f_\ell \right) \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$$

Posto quindi $\tilde{q}_i := f_m \cdot q_i(X_1, \dots, X_n, \frac{1}{f})$, si ha che

$$f^m = \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{q}_i f_i$$

dove gli $f_i \in A$. Segue che $f^m \in A$ e $f \in \sqrt{A}$.

■

Esempio 383. Se $\mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$, vale 1.?

In $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si consideri $(X^2 + 1)$ in $\mathbb{R}[X]$. Questo è massimale ma non soddisfa 1.

Esempio 384. Il Teorema 378 vale se $\mathbb{K} \neq \overline{\mathbb{K}}$?

$$A = (X^2 + Y^2 + 1) \subseteq \mathbb{R}[X, Y], \quad V(A) = \emptyset.$$

1090.35 TODO Lezione 34 - <2025-12-16 Mar>

???

1090.36 Lezione 35 - <2025-12-17 Mer>

Nota: con \mathbf{X} si intende la tupla X_1, \dots, X_n .

Osservazione. Siano I, J due ideali di $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

- Se $I \subseteq J$ allora $V(I) \supseteq V(J)$.
- $V(I) \cap V(J) = V(I + J)$.

In particolare, se $I = (f_1, \dots, f_\ell)$ e $J = (g_1, \dots, g_s)$, allora

$$\begin{aligned} I + J &= (f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_s) \\ V(I + J) &= V(f_1, \dots, f_\ell, g_1, \dots, g_s). \end{aligned}$$

- $V(I) \cup V(J) = V(I \cap J)$.

In particolare, se $I = (f_1, \dots, f_\ell)$ e $J = (g_1, \dots, g_s)$, allora è possibile trovare dei generatori per $I \cap J$, usando GB di eliminazione.

Definizione 385. Sia $I \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ideale, t nuova indeterminata. Per ogni $h(t) \in \mathbb{K}[t]$ si indica con

$$h \cdot I = h(t) \cdot I = hI$$

l'ideale di $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]$ generato da

$$\{h(t) \cdot f \mid f \in I\}.$$

Lemma 386. Sia $I \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ideale, t nuova indeterminata e $h(t) \in \mathbb{K}[t]$. Allora

1. Se $I = (f_1, \dots, f_\ell)$ allora

$$h \cdot I = (h(t) \cdot f_1, \dots, h(t) \cdot f_\ell).$$

2. Se $g(X_1, \dots, X_n, t) \in hI$ e $a \in \mathbb{K}$ allora

$$g(X_1, \dots, X_n, a) \in I.$$

Dimostrazione. 1. Per doppia inclusione: “ \subseteq ” è ovvia.

(\subseteq): ogni elemento di $h \cdot I$ è somma finita di addendi della forma

$$q(X_1, \dots, X_n, t) \cdot h(t) \cdot f(X_1, \dots, X_n), \quad f \in I \quad (\star)$$

Ma $f \in I$ è, siccome $I = (f_1, \dots, f_\ell)$

$$f(X_1, \dots, X_n) = \sum_{i=1}^{\ell} p_i(X_1, \dots, X_n) \cdot f_i(X_1, \dots, X_n)$$

e pertanto ciascun addendo di (\star) è scritto come:

$$q(X_1, \dots, X_n, t) \cdot \left(\sum_{i=1}^{\ell} p_i(X_1, \dots, X_n) \cdot h(t) \cdot f_i \right).$$

Quindi ogni polinomio di $h \cdot I$ è una “combinazione” di $h(t) \cdot f_i$ e pertanto

$$hI \subseteq (hf_1, \dots, hf_\ell).$$

2. Fissato $I = (f_1, \dots, f_\ell)$, allora $hI = (hf_1, \dots, hf_\ell)$.

Per ogni $g(X_1, \dots, X_n, t) \in hI$

$$g(X_1, \dots, X_n, t) = \sum_{i=1}^{\ell} q_i(X_1, \dots, X_n, t) \cdot h(t) \cdot f_i(X_1, \dots, X_n).$$

Effettuando la valutazione in a si ottiene

$$g(X_1, \dots, X_n, a) = \sum_{i=1}^{\ell} \underbrace{q_i(X_1, \dots, X_n, a)}_{\text{in } \mathbb{K}[X]} \cdot \underbrace{h(a)}_{\in \mathbb{K}} \cdot f_i(X_1, \dots, X_n)$$

e quindi $g(X_1, \dots, X_n, a) \in I$. ■

Teorema 387. Siano $I, J \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Allora

$$I \cap J = (tI + (1-t)J) \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n].$$

Dimostrazione. (\subseteq): Se $f \in I \cap J$ allora

$$\begin{cases} f \in I & \implies t \cdot f \in t \cdot I \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t] \\ f \in J & \implies (1-t) \cdot f \in (1-t) \cdot J \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]. \end{cases}$$

Quindi $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ e

$$f = t \cdot f + (1-t) \cdot f \in t \cdot I + (1-t) \cdot J$$

e pertanto $f \in (tI + (1-t)J) \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

(\supseteq): Sia quindi $f \in (tI + (1-t)J) \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

Siccome $f \in t \cdot I + (1-t) \cdot J$ allora esistono

$$p(X_1, \dots, X_n, t) \in t \cdot I, \quad q(X_1, \dots, X_n, t) \in (1-t) \cdot J$$

tali che $f(\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}, t) + q(\mathbf{X}, t)$.

- Valuto f in $t = 0$. Per il lemma precedente:

$$f = \underbrace{p(\mathbf{X}, 0)}_{\in I} + \underbrace{q(\mathbf{X}, 0)}_{\in J}$$

Ma inoltre, detto $I = (f_1, \dots, f_\ell)$, si ha che $p(\mathbf{X}, t) \in tI$:

$$p(X_1, \dots, X_n, t) = \sum_{i=1}^{\ell} \tilde{p}_i(X_1, \dots, X_n, t) \cdot t \cdot f_i$$

e quindi, valutato in $t = 0$: $p(\mathbf{X}, 0) = 0$. Quindi

$$f = p(\mathbf{X}, 0) + q(\mathbf{X}, 0) = 0 + q(\mathbf{X}, 0) = q(\mathbf{X}, 0) \in J.$$

- Valuto f in $t = 1$. Per il lemma precedente:

$$f = \underbrace{p(\mathbf{X}, 1)}_{\in I} + \underbrace{q(\mathbf{X}, 1)}_{\in J}$$

Ma inoltre, detto $J = (g_1, \dots, g_s)$, si ha che $q(\mathbf{X}, 1) \in (1-t)J$:

$$q(X_1, \dots, X_n, t) = \sum_{j=1}^s \tilde{q}_j(X_1, \dots, X_n, t) \cdot (1-t) \cdot g_j$$

e quindi, valutato in $t = 1$: $q(\mathbf{X}, 1) = 0$. Quindi

$$f = p(\mathbf{X}, 1) + q(\mathbf{X}, 1) = p(\mathbf{X}, 1) + 0 = p(\mathbf{X}, 1) \in I.$$

Pertanto, $f \in I \cap J$. ■

1090.36.1 Algoritmo di calcolo intersezioni di ideali

MANCA UN PEZZO (ma dovrebbe caricare le sue note)

1090.36.2 Calcolo del minimo comune multiplo

Osservazione. Saper calcolare l'm.c.m. è sufficiente per calcolare il M.C.D.:

$$\forall f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] : \quad f \cdot g = \text{MCD}(f, g) \cdot \text{mcm}(f, g).$$

Definizione 388. Siano $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Dico che $h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ è il minimo comune multiplo di f e g se

1. f divide h e g divide h .
2. h divide ogni polinomio multiplo sia di f che di g .

Definizione 389. Siano $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Dico che $h \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ è il massimo comune divisore di f e g se

1. h divide f e h divide g .
2. ogni polinomio multiplo sia di f che di g divide h .

Osservazione. Questi sono “unici”, nel senso che lo sono a meno di moltiplicare per un polinomio costante non nullo.

Siccome $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ è UFD (dominio a fattorizzazione unica), per ogni $f, g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$:

$$\begin{aligned} f &= p_1^{m_1} \cdots p_s^{m_s} \\ g &= q_1^{r_1} \cdots q_\ell^{r_\ell} \end{aligned}$$

con p_i, q_j irriducibili in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$:

- prendendo i divisori comuni con esponente massimo si ottiene il massimo comun divisore;
- prendendo tutti i divisori, comuni e non comuni, con esponente minimo, si ottiene in minimo comune multiplo.

Computazionalmente parlando, fattorizzare polinomi in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ è un incubo.

Proposizione 390. Siano $I, J \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ideali. Se $I = (f)$, $J = (g)$ allora $I \cap J$ è principale: $I \cap J = (h)$ con

$$h = \text{mcm}(f, g)$$

Algoritmo per il calcolo: per calcolare $\text{mcm}(f, g)$ procedo nel modo seguente:

- calcolo

$$tI + (1-t)J = (tf, (1-t)g) \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]$$

- ottengo $I \cap J = (tf, (1-t)g) \cap \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$
- $h = \text{mcm}(f, g)$ è l'unico polinomio della GB “di eliminazione della t ” che non dipende dalla t .

1090.36.3 Colon tra ideali

Ricordiamo: Se $I, J \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ideali, si definisce l'ideale:

$$I : J := \{f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \mid \forall g \in J \ (fg \in I)\}.$$

Esempio 391. In $\mathbb{K}[x, y, z]$, consideriamo $I = (xz, yz)$. Allora

$$\text{V}(I) = \{z = 0\} \cup \{x = y = 0\}$$

dove il primo insieme è un piano (disegnato in rosso), mentre il secondo è l'asse delle z (disegnato in verde)^[345].

Se io volessi “separare” questi due insiemi algebrici, come faccio? Posto $J_1 = (z)$ e $J_2 = (x, y)$.

- Potrei fare $\text{V}(I) \setminus \text{V}(J_2)$: ma questo è un piano “bucato” in $(0, 0, 0)$, che non è un insieme algebrico.
- Consideriamo invece la chiusura di $\text{V}(I) \setminus \text{V}(J_2)$ rispetto alla topologia di Zariski:

$$\overline{\text{V}(I) \setminus \text{V}(J_2)};$$

questo è il più piccolo insieme algebrico che contiene $\text{V}(I) \setminus \text{V}(J_2)$.

Si ha però che

$$\text{V}(I : J_2) \supseteq \overline{\text{V}(I) \setminus \text{V}(J_2)}.$$

C’è uguaglianza se $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{K}}$ e $I = \sqrt{I}$.

Come calcolo $I : J$?

Se $J = (f_1, \dots, f_s)$:

$$I : J = \left\{g \in \mathbb{K}[X] \mid \forall i = 1, \dots, s \ (gf_i \in I)\right\} = \bigcap_{i=1}^s I : (f_i).$$

Teorema 392. Sia I ideale di $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, $f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Calcolo un insieme dei generatori per $I \cap (f) = (h_1, \dots, h_m)$. Allora $I : (f)$ è generato da:

$$\left\{ \frac{h_1}{f}, \dots, \frac{h_m}{f} \right\}$$

Dimostrazione. Devo dimostrare che:

1. $\left\{ \frac{h_1}{f}, \dots, \frac{h_m}{f} \right\} \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$;
2. $\left\{ \frac{h_1}{f}, \dots, \frac{h_m}{f} \right\}$ generano $I : f$.

Si divide la dimostrazione in step:

- Assumiamo che $h_i/f = H \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$, allora

$$H \in I : (f) \iff H \cdot f \in I$$

ma $H \cdot f = h_i \in I$, poiché $h_i \in I \cap (f)$.

Quindi $h_i/f \in I : (f)$.

- Dimostriamo invece che $h_i/f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$:

$$h_i \in I \cap (f) \iff h_i \in I \wedge h_i \in (f)$$

ovvero h_i multiplo di f .

Quindi $h_i/f \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$.

- Esercizio per casa: dimostrare che in effetti questi polinomi generano tutto $I : (f)$. ■

Algoritmo di calcolo: per calcolare $I : (f_1, \dots, f_s)$:

- calcolo $I : (f_i)$;
- con le GB calcolo l'intersezione

$$\bigcap_{i=1}^s I : (f_i)$$

- si ha l'uguaglianza $I : (f_1, \dots, f_s) = \bigcap_{i=1}^s I : (f_i)$

Esempio 393. In geometria algebrica, se voglio lavorare in \mathbb{P}^n , gli insiemi algebrici di \mathbb{P}^n sono dati da ideali i cui generatori sono omogenei.

Il “problema” è che se prendo un sistema di equazioni omogenee, “molto” probabilmente la n -upla $(0, \dots, 0)$ è soluzione, ma $[0, \dots, 0] \notin \mathbb{P}^n$.

Per lavorare in \mathbb{P}^{n-1} , si usano quindi ideali saturati. Dato un ideale $I \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ omogeneo, la sua saturazione

$$I^{\text{sat}} = \bigcup_{i=1}^{\infty} I : M^i$$

dove $M = (X_1, \dots, X_n)$.

Un ideale I è saturato se $I^{\text{sat}} = I$.

1090.37 Lezione 36 - <2025-12-19 Ven>

1090.37.1 Automatic Geometric Theorem Proving

Esempio 394. Si consideri un parallelogramma $ABCD$:

$$AB \parallel CD, \quad AC \parallel BD$$

e sia $\{N\} = AD \cap BC$ il punto di intersezione tra le due diagonali.

Tesi:

$$\begin{aligned}\overline{AN} &= \overline{ND} \\ \overline{BN} &= \overline{CN}.\end{aligned}$$

L'idea è quella di dimostrare questo teorema tramite dei polinomi. Si fissa un sistema di assi cartesiani in modo che $A = (0, 0)$ e che AB sia parallelo all'asse x .

Si indicherà con

- u_i : parametri (a cui assegno liberamente valore in \mathbb{R});
- x_j : valori fissati una volta che do valori ai u_i .

Quindi:

$$A = (0, 0); \quad B = (u_1, 0); \quad C = (u_2, u_3); \quad D = (x_1, x_2).$$

D è "vincolato" dal fatto che voglio definire un parallelogramma.

D deve essere tale che $CD \parallel AB$ e $AC \parallel BD$:

- da $AB \parallel CD$: $x_2 = u_3$

$$x_2 - u_3 = 0 \tag{h_1}$$

- da $AC \parallel BD$: $\frac{u_3}{u_2} = \frac{x_2}{x_1 - u_1}$:

$$(x_1 - u_1)u_3 - x_2u_2 = 0 \tag{h_2}$$

N invece è intersezione di AD e BC : $N = (x_3, x_4)$:

- N è allineato con A e D : $AD \parallel AN \parallel ND$

$$\frac{u_3}{x_1} = \frac{x_2 - x_4}{x_1 - x_3} = \frac{x_4}{x_3}$$

e quindi ottengo h_3 : $u_3x_3 - x_1x_4 = 0$.

- N è allineato con B e C : $BC \parallel BN \parallel NC$:

$$\frac{x_4}{x_3 - u_1} = \frac{u_3}{u_2 - u_1}.$$

ottenendo quindi h_4 : $(u_2 - u_1)x_4 - (x_3 - u_1)u_3 = 0$.

Ho ottenuto quattro polinomi di ipotesi: h_1, h_2, h_3, h_4 .

La tesi è:

- $\overline{ND}^2 = \overline{ND}^2$, ovvero:

$$x_3^2 + x_4^2 = (x_3 - x_1)^2 + (x_4 - x_2)^2 \tag{g_1}$$

- $\overline{BN}^2 = \overline{NC}^2$, ovvero

$$(x_3 - u_1)^2 + x_4^2 = (x_3 - u_2)^2 + (x_4 - u_3)^2. \tag{g_2}$$

Ho ottenuto due polinomi tesi: g_1, g_2 .

Dentro $\mathbb{R}[u_1, u_2, u_3, x_1, x_2, x_3, x_4]$ è possibile formalizzare il teorema di cui sopra.

L'esempio di prima è l'Esempio 1 di pagine 319 di

Teorema 395. Se ho $A, B, C, D, E, F \dots$ punti del piano, posso esprimere mediante condizioni polinomiali nelle coordinate dei punti le seguenti proprietà geometriche:

1. $AB \parallel CD$;
2. $AB \perp CD$;
3. A, B, C sono allineati (riconducendosi a 1.);
4. $\overline{AB} = \overline{CD}$;
5. il punto B giace sulla circonferenza di centro C e raggio \overline{AC} ($\overline{BC} = \overline{AC}$);
6. C punto medio del segmento di estremi A, B ;
7. l'angolo acuto $A\hat{B}C$ è uguale all'angolo $D\hat{E}F$ ^[346];
8. BD biseca l'angolo $A\hat{B}C$.

Nell'Esempio 394 abbiamo scritto le ipotesi del Teorema come

$$h_1(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0$$

⋮

$$h_n(u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) = 0$$

ottengo una “configurazione” del teorema dando valori in \mathbb{R} agli u_i e mediante i polinomi h_j cerco valori per x_j :

$$p = (u_1, \dots, u_m, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

che annulli tutti i polinomi h_j , ovvero considero $I = (h_1, \dots, h_n) \subseteq \mathbb{R}[u_i, x_j] \subseteq \mathbb{R}[u_i, x_j]$ e $p \in V(I)$.

La tesi, data da $g_1 = 0, \dots, g_k = 0$ segue delle ipotesi se

$$\forall p \in V(I) \quad g_\ell(p) = 0$$

ovvero si richiede che $g_\ell \in J(V(I))$.

Definizione 396. Il polinomio g “segue strettamente” dalle ipotesi h_1, \dots, h_n quando, detto $I = (h_1, \dots, h_n)$:

$$g \in J(V(I))$$

Osservazione. Si ha, in generale, che

$$\sqrt{I} \subseteq J(V(I)).$$

Proposizione 397. Se $g \in \sqrt{I}$, con $I = (h_1, \dots, h_n)$, allora g segue strettamente da h_1, \dots, h_n .

Teorema 398. Sia $I \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ ideale, $g \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Sia t una variabile diversa. Allora

$$g \in \sqrt{I} \iff 1 \in \langle I \rangle_{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]} + (1 - g \cdot t) \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]$$

dove con $\langle I \rangle_{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]}$ si intende l'ideale generato da $I \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n] \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]$ in $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]$.

Osservazione. Si ha che

$$1 \in J := \langle I \rangle_{\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]} + (1 - g \cdot t) \subseteq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n, t]$$

se e solo se la GB di J (rispetto a qualunque term order) è $\{1\}$.

L'esempio di prima è tratto da

1090.37.2 Colorazione dei grafi

Definizione 399. Un *grafo semplice* G consiste di:

- V finito non vuoto (insieme dei vertici di G), $V = V(G)$
- un insieme finito E (anche vuoto) i cui elementi sono sottoinsiemi di V costituiti da due vertici, $E = E(G)$.

$$G = \langle V, E \rangle.$$

Un po' di nomenclatura:

- se $\{u, v\} \in E(G)$, allora “ u è adiacente a v ”;

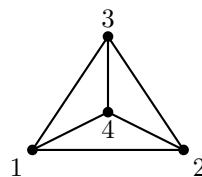
Rappresentazione: a ogni vertice associo un punto (etichettato); se $\{u, v\}$ è un lato, disegno una curva che congiunge il vertice u e il vertice v .

MANCA UN PEZZO.

Teorema 400. (Teorema dei 4 colori). Ogni grafo planare ammette una 4-colorazione.

Domanda: come capire se G qualunque è k -colorabile?

Esempio 401. Il grafico K_4 (ovvero il grafo completo con 4 vertici):



ha bisogno di 4 colori. In generale, K_n è n -colorabile.

Nella tesi PhD di David Bayer:

una colorazione di un grafo è un punto di \mathbb{A}^n che annulla dei polinomi che “contengono” le informazioni sulle adiacenze nel grafo.

Se G ha $V(G) = \{1, \dots, n\}$, lavoro in $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Una colorazione è un insieme $V(I)$ con I ideale opportuno, $V(I) \subseteq \mathbb{C}^n$.

Per studiare una k -colorazione, inserisco nell'ideale I_k delle condizioni i polinomi:

$$X_i^k - 1 : \implies V(X_i^k - 1) \text{ radice } k\text{-esima dell'unità.}$$

Ogni radice k -esima dell'unità corrisponde ad un colore.

Supponiamo ad esempio che $\{1, 2\} \in E$. Considero quindi

$$\begin{aligned} X_1^k - 1 &\in I_k \\ X_2^k - 1 &\in I_k \end{aligned}$$

e quindi $X_1^k - X_2^k \in I_k$. Quindi ogni colorazione p annulla $X_1^k - X_2^k$:

$$X_1^k - X_2^k = (X_1 - X_2) \underbrace{(X_1^{k-1} + X_1^{k-2}X_2 + \dots + X_2^{k-1})}_{g_{12}}$$

Quindi, la condizione affinché due vertici adiacenti non abbiano lo stesso colore, è che il polinomio di cui sopra non sia nullo.

Pongo quindi $g_{12} \in I_k$. Questo è sufficiente per ottenere la condizione di cui sopra:

- se $X_1 = X_2 = \xi$ radice k -esima dell'unità, allora

$$g_{12}(\xi, xi) \neq 0$$

- se $X_1 = \xi_1 \neq \xi_2 = X_2$ allora

$$g_{12}(\xi_1, xi_2) = 0$$

Sostanzialmente, quindi, per ogni $\{i, j\} \in E$, metto

$$\frac{X_i^k - X_j^k}{X_i - X_j} \in I_k$$

L'ideale I_k , quindi, è generato da

$$\left\{ X_i^k - 1 \right\}_{i=1, \dots, n} \cup \left\{ \frac{X_i^k - X_j^k}{X_i - X_j} \right\}_{\{i, j\} \in E}$$

Si ha che le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. G è k -colorabile;
2. $V(I_k) \neq \emptyset$;
3. $I_k \neq \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$

dove 2. \Leftrightarrow 3. segue dal Nullstellensatz.

Quindi, l'algoritmo è, dato un grafo G :

- costruisco I_k ;
- calcolo la GB di I_k ;
 - se GB di I_k è $\{1\}$, allora G non è k -colorabile;
 - se GB di I_k è $\neq \{1\}$, allora G è k -colorabile.

1091 Teoria dei modelli [CORSO]

NOTAZIONE IMPORTANTE: Tutte le mappe sono parziali, se non diversamente indicato.

Le dispense di questo corso sono

1091.1 Istruzioni Esame

- Esercizi settimanali da consegnare entro un paio di settimane.
- Parte da dove abbiamo smesso in Istituzioni
- Prima di scrivere bene l'esercizio chiediamo a lui che lo sketch di dimostrazione sia giusto. Inoltre, se non riusciamo lui ci dà anche i suggerimenti. (Questo garantisce un minimo di 28)
- Gli esercizi POTREBBERO essere sbagliati.
- Alla fine vuole fare un esame in cui si fanno gli esercizi fatti dagli altri durante il corso.

1091.2 Lezione 1 - <2025-09-23 Mar>

1091.2.1 Ripasso

Saturazione e omogeneità Fissiamo un modello saturo \mathcal{U} di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

- Saturo: realizza tutti i tipi $p(x)$ tali che
 1. $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ per qualche $A \subseteq \mathcal{U}$ di cardinalità piccola $|A| < \kappa$.
 2. $p(x)$ è finitamente consistente (in \mathcal{U}).
- \mathcal{U} è detto modello mostro.
- Se κ è inaccessibile ogni teoria T con un modello infinito ha un modello mostro di cardinalità κ ; nota: due modelli mostro della stessa cardinalità sono isomorfi.
- Nota: se non si vogliono usare gli inaccessibili possiamo richiedere che \mathcal{U} sia κ -saturo e κ -omogeneo e di cardinalità arbitraria.

Alcuni fatti importanti:

1. Sono fatti equivalenti:
 - \mathcal{U} è saturo;
 - \mathcal{U} realizza tutti i tipi finitamente consistenti con $< \kappa$ parametri e $\leq \kappa$ variabili.
2. Se \mathcal{U} è saturo allora \mathcal{U} è omogeneo: se $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ elementare e $|f| < \kappa$ allora esiste $h \in \text{Aut}(\mathcal{U})$ tale che $f \subseteq h$.

Definizione 1. M è debolmente λ -saturo se realizza $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$, finitamente consistente in M , con $|x| \leq \lambda$.

M si dice debolmente saturo se è debolmente $|M|$ -saturo.

Proposizione 2. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{U} è saturo;
2. \mathcal{U} è omogeneo e debolmente saturo^[347].

Osservazione. Se $N \equiv \mathcal{U}$ è un modello e c enumerazione di N , il tipo $\text{tp}(c) = p(x)$ è finitamente consistente in \mathcal{U} ; ogni realizzazione $b \models p(x)$ enumera un modello isomorfo a N . (Lemma del diagramma elementare)

Definizione 3. M è *debolmente λ -omogeneo* se per ogni $f : M \rightarrow M$ elementare, $|f| < \lambda$, per ogni $b \in M$ esiste $c \in M$ tale che $f \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \rightarrow M$ elementare. M si dice anche back and forth λ -omogeneo.

Proposizione 4. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{U} è λ -saturo;
2. \mathcal{U} è debolmente λ -omogeneo e debolmente λ -saturo.

\mathcal{U} come spazio topologico Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo.

Definizione 5. La A -topologia su \mathcal{U}^x è la topologia generata dalla seguente base di clopen:

$$\{\varphi(\mathcal{U}^x) \mid \varphi(x) \in \mathcal{L}(A)\}.$$

Osservazione. La A -topologia è compatta per saturazione di \mathcal{U} .

Proposizione 6. Per ogni $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, $q(z) \subseteq \mathcal{L}(B)$ tali che $p(\mathcal{U}^x) \cap q(\mathcal{U}^x) = \emptyset$.

Allora esistono:

- $\varphi(x)$ congiunzione di formule di $p(x)$;
- $\psi(x)$ congiunzione di formule di $q(x)$;

tali che $\varphi(\mathcal{U}^x) \cap \psi(\mathcal{U}^x) = \emptyset$.

Osservazione. Si noti che $p(\mathcal{U}^x) \subseteq \varphi(\mathcal{U}^x)$ e $q(\mathcal{U}^x) \subseteq \psi(\mathcal{U}^x)$.

Nel caso $A = B$, la Proposizione 6 afferma che la A -topologia è normale.

Definibilità e Automorfismi

Proposizione 7. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$, $b \in \mathcal{U}^z$ e $f \in \text{Aut}(\mathcal{U})$:

$$\begin{aligned} f[\varphi(\mathcal{U}^x, b)] &= \{fa \mid a \in \varphi(\mathcal{U}^x, b)\} = \{fa \mid a \in \mathcal{U}^x, \varphi(a, b)\} \\ &= \{fa \mid a \in \mathcal{U}^x, \varphi(fa, fb)\} = \{fa \mid fa \in \mathcal{U}^x, \varphi(fa, fb)\} \\ &= \{a' \mid a' \in \mathcal{U}^x, \varphi(a', fb)\} = \varphi(\mathcal{U}^x, fb) \end{aligned}$$

Ovvero gli automorfismi mappano insiemi definibili in insiemi definibili, con stessa formula e parametro diverso.

Definibilità e invarianza

Teorema 8. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ insieme definibile. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{D} è invariante su A ^[348];
2. $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{U}^x)$ per qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$.

Teorema 9. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ insieme tipo-definibile^[349]. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{D} è invariante su A ;
2. $\mathcal{D} = p(\mathcal{U}^x)$ per qualche $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

1091.2.2 Preservation Theorem

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, T una \mathcal{L} -teoria senza modelli finiti.

Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.

Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Proposizione 10. Sia $M \models T$, $b \in M^x$ e

$$q(x) := \Delta\text{-tp}_M(b) := \{\psi(x) \in \Delta \mid M \models \psi(b)\}.$$

Per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ sono fatti equivalenti:

1. per ogni Δ -morfismo^[350] $k : M \xrightarrow{\Delta} N$, $N \models T$ e $b \in \text{dom}(k)$

$$N \models \varphi(kb).$$
2. $T \vdash q(x) \rightarrow \varphi(x)$ ^[351]

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): Poiché $M, b \models q(x)$, allora $N, kb \models q(x)$, e quindi $N \models \varphi(kb)$.

(1. \Rightarrow 2.): Sia per assurdo $N \models T$ tale che $N, c \models q(x) \wedge \neg\varphi(x)$.

Allora, detto $k = \{\langle b, c \rangle\}$ ^[352], si ha che $k : M \rightarrow N$ è Δ -morfismo, poiché $N, kb = c \models q(x)$; ma $N \models \neg\varphi(kb)$. Assurdo. ■

Teorema 11. (Lyndon-Robinson Lemma). Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Sono fatti equivalenti:

1. $\varphi(x)$ è equivalente ad una $\{\wedge, \vee\}$ Δ -formula;
2. $\varphi(x)$ è preservata da Δ -morfismi.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Ovvia.

(2. \Rightarrow 1.): Mostriamo che

$$T \vdash \varphi(x) \longleftrightarrow \bigvee \{p(x) \subseteq \Delta : T \vdash p(x) \rightarrow \varphi(x)\}$$

L'implicazione \leftarrow è ovvia, mentre per \rightarrow , se $M, b \models T \wedge \varphi(x)$, sia $q(x) = \Delta\text{-tp}_M(b) \subseteq \Delta$. Per la proposizione precedente,

$$T \vdash q(x) \rightarrow \varphi(x).$$

Quindi

$$\begin{aligned} T \vdash \varphi(x) &\longleftrightarrow \bigvee \{p(x) \subseteq \Delta : T \vdash p(x) \rightarrow \varphi(x)\} \\ &\longleftrightarrow \bigvee \{\psi(x) \subseteq \{\wedge\} \Delta : T \vdash \psi(x) \rightarrow \varphi(x)\} \\ &\longleftrightarrow \psi_1(x) \vee \dots \vee \psi_n(x). \end{aligned}$$
■

1091.3 Lezione 2 - <2025-09-24 Mer>

1091.3.1 Preservation Theorem

Corollario 12. (Fatto 1). Sono fatti equivalenti:

1. T ha l'eliminazione dei quantificatori^[353];
2. ogni **isomorfismo parziale** tra **modelli** di T è una **morfismo elementare**

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Ovvio.

(2. \Rightarrow 1.): Segue banalmente dal Teorema precedente. ([Lyndon-Robinson Lemma](#)) ■

Corollario 13. (Fatto 1.5). Sono fatti equivalenti:

1. T ha Δ -eliminazione positiva dei quantificatori^[354];
2. ogni Δ -morfismo tra modelli di T è un $\{\wedge, \vee\}$ Δ -morfismo.

Proposizione 14. (Fatto 2). Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, e sia N ω -saturo, e sia $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo con $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\exists, \wedge\} \Delta$ -morfismo;
2. per ogni $b \in M^{<\omega}$ esiste $c \in N^{<\omega}$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia a una enumerazione di $\text{dom } k$, e sia $p(x, y) = \Delta\text{-tp}(a, b)$. Per 1., $p(ka, y)$ è finitamente consistente in N (in quanto considero la congiunzione di formule di $p(x, y)$ e ne prendo un esiste).

Siccome k è finita e N è ω -saturo, allora esiste $c \in N$ tale che $N, c \models p(ka, y)$. Tale c è quello cercato.

(2. \Rightarrow 1.): Ogni $\varphi(x) \in \{\exists, \wedge\} \Delta$ è della forma $\exists \bar{y} \psi(x, \bar{y})$, con $\psi(x, \bar{y}) \in \{\wedge\} \Delta$ e $|\bar{y}| < \omega$.

Sia $a \in \text{dom}(k)^x$ tale che $M \models \varphi(a)$. Voglio mostrare $N \models \varphi(ka)$.

Sia $\bar{b} \in N^{\bar{y}}$ tale che $M \models \psi(a, \bar{b})$; **FINIRE** ■

Proposizione 15. (Fatto 3). Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, e sia N ω -saturo, e sia $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo con $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\forall, \vee\}\Delta$ -morfismo;
2. per ogni $c \in N^{<\omega}$ esiste $b \in M^{<\omega}$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo.

Corollario 16. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, con N ω -saturo, $|M| = \omega$ e $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo, $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo.
2. k si estende ad un Δ -morfismo totale.

Corollario 17. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, con N ω -saturo, $|M| = \omega$ e $k : N \rightarrow M$ un Δ -morfismo, $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\forall, \vee\}\Delta$ -morfismo.
2. k si estende ad un Δ -morfismo suriettivo (parziale).

Teorema 18. (Teorema 1). Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Sono fatti equivalenti:

1. esiste $\psi(x) \in \{\exists, \wedge\}\Delta$ tale che $T \vdash \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x))$;
2. $\varphi(x)$ è preservata da Δ -morfismi totali tra modelli di T .

Corollario 19. Sono fatti equivalenti:

1. T ha Δ -eliminazione positiva dei quantificatori;
2. ogni Δ -morfismo tra modelli di T è sia un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo che un $\{\forall, \vee\}\Delta$ -morfismo.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Ovvia.

(2. \Rightarrow 1.): Per induzione sulla sintassi. Assumiamo 2. e che $\varphi(x, y)$ sia preservata da Δ -morfismi. Mostriamo che la verità di $\exists y \varphi(x; y)$ è conservata.

Per ipotesi induttiva $\varphi(x, y)$ è equivalente a $\psi(x, y) \in \{\wedge, \vee\}\Delta$, ed inoltre $\exists y \varphi(x; y)$ è equivalente a $\exists y \psi(x, y) \in \{\exists, \vee, \wedge\}\Delta = \{\exists, \wedge\}\Delta$. ????????

Per 2. $\exists y \psi(x; y)$ è preservata dai Δ -morfismi. Idem per $\forall y \psi(x; y)$.

Induzione ovvia per \wedge, \vee . ■

1091.3.2 Back-and-forth conditions for QE

Proposizione 20. (Fatto 4). Sono fatti equivalenti

1. T ha Δ -eliminazione positiva dei quantificatori;
2. per ogni $k : M \rightarrow N$ Δ -morfismo finito tra modelli ω -saturi di T :
 - per ogni $b \in M$ esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo;
 - per ogni $c \in N$ esiste $b \in M$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo.

1091.3.3 Model-completeness

Definizione 21. *T è Δ -model-completo se ogni Δ -morfismo totale $k : M \rightarrow N$ tra modelli di T è un $\{\exists, \forall, \wedge, \vee\}$ Δ -morfismo*

Proposizione 22. (Fatto 5). Sono fatti equivalenti:

1. T è Δ -model-completo;
2. T ha $\{\exists, \wedge\}$ Δ -eliminazione positiva dei quantificatori.

Dimostrazione. ??? ■

Proposizione 23. (Fatto 6). Si

Esercizio: T è model completa sse per ogni $M \models T$ la teoria $T \cup \Delta\text{-Diag}(M)$ ^[355] è una $\mathcal{L}(M)$ -teoria completa.

1091.4 Lezione 3 - <2025-09-30 Mar>

Sia T una teoria completa con un modello infinito (ovvero senza modelli finiti). Sia $\mathcal{U} \models T$ modello mostro di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

Convenzione per questa lezione: tutti i tipi $p(x)$ sono:

- $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$;
- $|p(x)| < \kappa$ (ovvero i tipi sono piccoli).

Definizione 24. Un tipo $p(x)$ si dice isolato (da φ) se esiste $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ consistente tale che $\varphi(x) \rightarrow p(x)$ ovvero $\varphi(x) \rightarrow \psi(x)$ per ogni $\psi(x) \in p(x)$ ovvero $\varphi(\mathcal{U}^x) \subseteq p(\mathcal{U}^x)$.

Definizione 25. Un tipo $p(x)$ si dice isolato da Δ (con Δ insieme di formule) se esiste $\varphi(x) \in \Delta$ che isola $p(x)$.

Un tipo $p(x)$ si dice isolato su $A \subseteq \mathcal{U}$ se è isolato da $\mathcal{L}(A)$.

Osservazione. Per ogni $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ consistente, esiste un modello $M \supseteq A$ che realizza $p(x)$ ^[356].

Domanda 1: dato $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ consistente, esiste un modello $M \supseteq A$ che non realizza $p(x)$?

Risposta banale: se $p(x)$ è isolato da A allora NO. Infatti, se $\varphi(x) \rightarrow p(x)$ per qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$, siccome ogni $M \supseteq A$ ha una soluzione di $\varphi(x)$, questa realizza $p(x)$ in M .

Osservazione. Se $a \models p(x)$ allora la formula $x = a$ isola $p(x)$.

Proposizione 26. Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}(M)$. Sono fatti equivalenti:

1. M realizza $p(x)$;
2. $p(x)$ è isolato su M.

Domanda 2: dato $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ consistente non isolato da A , esiste $M \supseteq A$ che non realizza $p(x)$? La risposta è NO.

Teorema 27. (Teorema di omissione dei tipi). Se $|\mathcal{L}(A)| \geq \omega$ allora per ogni $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ non isolato^[357] esiste $M \supseteq A$ che omette $p(x)$.

In inglese questo è l'*Omitting Type Theorem* (OTT).

Teorema 28. Sia $\mathcal{L}(A)$ numerabile, $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$. Sono fatti equivalenti.

1. $p(x)$ è realizzato in ogni modello $M \supseteq A$;
2. $p(x)$ è isolato su A .

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): questo è ovvio, vedi la Domanda 1.

(1. \Rightarrow 2.): Questo è il Teorema 357. Si dimostra $\neg 2. \Rightarrow \neg 1.$: sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ non isolato e costruiamo un modello $M \supseteq A$ che omette $p(x)$. Si vuole applicare una costruzione simile a quella di LS all'ingiù.

Si costruisce $\langle A_i : i < \omega \rangle$ per ricorsione.

- Sia $A_0 := A$.
- Data $\varphi(y) \in \mathcal{L}(A_0)$ consistente, $|y| = 1$, prendiamo $b \models \varphi(y)$ tale che $A_0 \cup \{b\}$ non isola p .
Tale b esiste per il lemma successivo.
Definiamo $A_1 := A_0 \cup \{b\}$

■

Lemma 29. Sia $\mathcal{L}(A)$ numerabile, $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ non isolato, $\varphi(y) \in \mathcal{L}(A)$ consistente con $|y| = 1$. Allora esiste $b \models \varphi(y)$ e $A \cup \{b\}$ non isola $p(x)$.

Dimostrazione. Costruiamo in ω passi un tipo $q(y)$ consistente che “descrive” le proprietà richieste a b .

Passo 0: $q_0(y) := \{\varphi(y)\}$.

Passo 1: Sia $\xi(x, y) \in \mathcal{L}(A)$. Voglio che ogni $b \models q(y)$ sia tale che $\neg \forall x (\xi(x, b) \rightarrow p(x))$.

Vorrei poter porre $q_1(y) := q_0(y) \cup \left\{ \exists x [\xi(x, y) \wedge \neg p(x)] \right\}$. Purtroppo quella non è una formula. Allora cerco un $\psi(x) \in p(x)$ tale che

$$q_1(y) := q_0(y) \cup \left\{ \exists x [\xi(x, y) \wedge \neg \psi(x)] \right\}$$

sia consistente.

Provo con tutte le $\psi(x) \in p(x)$ fino a che non ne trovo uno. Se per assurdo non esistesse, allora per

$$q_0(y) \cup \left\{ \exists x [\xi(x, y) \wedge \neg \psi(x)] \right\}$$

è inconsistente per ogni $\psi(x) \in p(x)$, ovvero $q_0(y) \wedge \exists x [\xi(x, y) \wedge \neg\psi(x)]$ è inconsistente^[358] per ogni $\psi(x) \in p(x)$, ovvero

$$\begin{aligned} & \forall y \neg \left[q_0(y) \wedge \exists x [\xi(x, y) \wedge \neg\psi(x)] \right] \\ & \forall y \left[\neg q_0(y) \vee \forall x [\neg\xi(x, y) \vee \psi(x)] \right] \\ & \forall y \left[\neg q_0(y) \vee \forall x [\xi(x, y) \rightarrow \psi(x)] \right] \\ & \forall y \forall x \left[q_0(y) \wedge (\xi(x, y) \rightarrow \psi(x)) \right] \\ & \forall x \left[\exists y (q_0(y) \wedge \xi(x, y)) \rightarrow \psi(x) \right] \end{aligned}$$

Siccome quello vale per ogni $\psi(x) \in p(x)$, allora $\exists y (q_0(y) \wedge \xi(x, y))$ isola $p(x)$. ■

Esercizio di meditazione: Leggere la dimostrazione del Teorema di Kuratowski-Ulam^[359] e convincersi che in fondo è il Lemma 29

Esercizio (?) Sia $\mathcal{L}(A)$ numerabile, e sia $P \subseteq S_x(A)$. Sono fatti equivalenti:

1. esiste un modello $M \supseteq A$ che omette tutti i tipi in P ;
2. P è magro nella A -topologia;
3. esiste un modello $M \supseteq A$ tale che $\{p \in S_x(M) \mid p \upharpoonright A \in P\}$ è magro.

Riprendiamo ora la Domanda 2:

Domanda 2: dato $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ consistente non isolato da A , esiste $M \supseteq A$ che non realizza $p(x)$?

Siano X, Y insiemi qualsiasi con $|X| = |Y| > \omega$, sia F l'insieme delle biiezioni tra X e Y . Sia $M = X \sqcup Y \sqcup F$.

Il linguaggio \mathcal{L} contiene simboli per gli insiemi X, Y, F e il simbolo $r(f, x, y)$ che vale se $f(x) = y$.

Fisso $\mathcal{U} \succeq M$ modello mostro, e siano

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_X &:= X(\mathcal{U}) \\ \mathcal{U}_Y &:= Y(\mathcal{U}) \\ \mathcal{U}_F &:= F(\mathcal{U}). \end{aligned}$$

Allora $\mathcal{U} = \mathcal{U}_X \sqcup \mathcal{U}_Y \sqcup \mathcal{U}_F$.

Per ogni $f \in \mathcal{U}_F$, $r(f, x, y)$ definisce una biiezione tra \mathcal{U}_X e \mathcal{U}_Y .

Sia $Y_0 \subseteq Y$ numerabile e $c \in \mathcal{U}_Y \setminus Y_0$. Detto $A := X \cup Y_0$ sia $p(y) = \text{tp}(c/A)$. Notiamo che $|A| > \omega$.

Voglio dimostrare che:

1. $p(y)$ è realizzato in ogni modello $N \supseteq A$;
2. $p(y)$ non è isolato.

Osserviamo che per ogni $c' \in \mathcal{U}_Y \setminus Y_0$ esiste $\hat{g} \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ e $\hat{g}c = c'$. Infatti, sia

$$g := \text{Id}_{\mathcal{U}_Y \setminus \{c, c'\}} \cup \{\langle c, c' \rangle, \langle c', c \rangle\}$$

Allora la \hat{g} diventa

$$\hat{g} = g \cup \text{Id}_{\mathcal{U}_X} \cup \{\langle f, g \circ f \rangle \mid f \in \mathcal{U}_F\}.$$

Utilizzando questa osservazione:

1. Se $N \supseteq A$ allora $|Y(N)| > \omega$ e quindi $Y(N)$ contiene un elemento $c' \notin Y_0$, e per l'osservazione $c' \equiv_A c$.
2. Supponiamo che $\varphi(y) \in \mathcal{L}(X, Y_0)$ tale che $\varphi(y) \rightarrow p(y)$. Sia $Y_1 \subseteq Y_0$ finito tale che $\varphi(y) \in \mathcal{L}(X, Y_1)$.
Sia b tale che $b \models \varphi(y)$. Sicuramente $b \notin Y_0$. Prendo $b' \in Y_0 \setminus Y_1$. Per l'osservazione $c' \equiv_A c$ e quindi $c' \models \varphi(x)$. Assurdo.

1091.5 Lezione 4 - <2025-10-01 Mer>

Sia T una teoria completa con un modello infinito (ovvero senza modelli finiti). Sia $\mathcal{U} \models T$ modello mostro di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

Convenzione per questa lezione: tutti i tipi $p(x)$ sono:

- $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$;
- $|p(x)| < \kappa$ (ovvero i tipi sono piccoli).

1091.5.1 Modelli primi e modelli atomici

Definizione 30. Un modello M è primo su $A \subseteq \mathcal{U}$ se per ogni modello $N \supseteq A$ esiste $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $f[M] \preceq N^{[360]}$.

Definizione 31. Un modello M è atomico su $A \subseteq \mathcal{U}$ se per ogni $a \in M^{<\omega}$ il $\text{tp}(a/A)$ è isolato su A .

Teorema 32. Se $\mathcal{L}(A) \leq \omega$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. M è primo su A ;
2. M è numerabile e atomico su A .

Domanda 1: Esistono dei modelli così? Prossima settimana.

Dimostrazione. (del Teorema 32)

(1. \Rightarrow 2.): Corollario del OTT. Infatti se 1. allora M è numerabile; inoltre, se non fosse atomico, prendo $b \in M^{<\omega}$ tale che $p(x) := \text{tp}(b/A)$ non è isolato su A ; prendo N che omette $p(x)$. Non posso immergere M in N (altrimenti l'immagine di b realizzerebbe $p(x)$ in N). ■

Notazione: diremo che b è isolato da A se $\text{tp}(b/A)$ è isolato su A .

Proposizione 33. Siano $a, b \in \mathcal{U}^{<\omega}$. Sono fatti equivalenti:

1. A isola a, b ;
2. $A, a^{[361]}$ isola b e A isola a .

Osservazione. Se $p(x; y) := \text{tp}((a, b)/A)$ allora

1. $\text{tp}(b/(A, a)) = p(a; y)$;
2. $\text{tp}(a/A)$ è equivalente a $\exists y p(x; y)$.

Notiamo inoltre che $\exists y p(x; y)$ è equivalente al tipo $\{\exists y \varphi(x; y) \mid \varphi \in p\}$.

Dimostrazione. (della Proposizione 361). Sia $p(x; y) := \text{tp}((a, b)/A)$

(1. \Rightarrow 2.): Fissiamo $\varphi \in p$ tale che

$$\forall x, y [\varphi(x, y) \rightarrow p(x, y)].$$

Allora ?????

- per il punto 1. dell'Osservazione precedente si ha che $\forall y [\varphi(a, y) \rightarrow p(a, y)]$, e quindi A, a isola b .
- per il punto 2. dell'Osservazione precedente si ha che $\forall x [\exists y \varphi(x, y) \rightarrow \exists y p(x, y)]$, e quindi A isola a .

(2. \Rightarrow 1.): Siccome A, a isola b , allora

$$\varphi(a; y) \rightarrow p(a; y)$$

per qualche $\varphi \in p$. Siccome A isola a , allora

$$\psi(x) \rightarrow \exists y p(x, y)$$

per qualche $\psi \in \exists y p(x, y)$, ovvero $\psi(x) \rightarrow \exists y \xi(x, y)$ per ogni $\xi \in p$.

Fissiamo una $\xi \in p$. Osserviamo che $\varphi(a, y) \rightarrow \xi(a, y)$, quindi

$$\forall y [\varphi(x, y) \rightarrow \xi(x, y)] \in \text{tp}(a/A) = \exists y p(x; y)$$

e quindi

$$\begin{aligned} & \forall x \left[\psi(x) \rightarrow \forall y [\varphi(x, y) \rightarrow \xi(x, y)] \right] \\ & \forall x \forall y \left[\psi(x) \rightarrow [\varphi(x, y) \rightarrow \xi(x, y)] \right] \\ & \forall x \forall y \left[[\psi(x) \wedge \varphi(x, y)] \rightarrow \xi(x, y) \right] \end{aligned}$$

e siccome ξ è arbitraria allora

$$\forall x \forall y \left[[\psi(x) \wedge \varphi(x, y)] \rightarrow p(x, y) \right]$$

■

Corollario 34. Se M è atomico su A , allora M è atomico su A, a per ogni $a \in M$.

Dimostrazione. Sia $b \in M^{<\omega}$. A isola a, b , quindi A, a isola b .

■

Proposizione 35. Sia $k : M \rightarrow N$ una mappa elementare e M atomico su $\text{dom } k$. Allora per ogni $b \in M$ esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \rightarrow N$ è elementare.

Dimostrazione. Sia a una enumerazione di $\text{dom } k$. Sia $p(x; y) = \text{tp}(a, b)$.

- Oss. 1: $p(a, y)$ è isolato su $\text{dom } k$.
- Oss. 2: $p(ka, y)$ è isolato su $\text{rng } k^{[362]}$.

Sia quindi $\varphi(x, y)$ tale che $\varphi(ka, y) \rightarrow p(ka, y)$. Il $c \in N$ cercato p testimone di

$$N \models \exists y \varphi(ka, y)$$

■

Possiamo quindi terminare la dimostrazione del Teorema 32.

Dimostrazione. (del Teorema 32)

(2. \Rightarrow 1.): Dato $N \supseteq A$, si consideri $\text{Id}_A : M \rightarrow N$ mappa elementare. Estendendo ω volte usando la Proposizione 35.

■

Corollario 36. Sia $\mathcal{L}(A)$ numerabile. Due modelli primi su A sono isomorfi.

1091.5.2 Categoricità numerabile

Teorema 37. Se $\mathcal{L}(A)$ è numerabile le seguenti affermazioni sono equivalenti.

1. T è ω -categorica (su A)^[363]
2. Ogni $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ è isolato su A .

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Per OTT.

(2. \Rightarrow 1.): Se ogni tipo è isolato allora ogni modello numerabile è primo su A , quindi per il Corollario 36.

■

Proposizione 38. (Forse \mathcal{L} deve essere numerabile?). Fissato $A \subseteq \mathcal{U}$ arbitrario e x con $|x| < \omega$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. Ogni $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ è isolato su A ;
2. $S_x(A)$ è finito;

3. $\mathcal{L}_x(A)^{[364]}$ è finito;
4. L'azione di $\text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ su \mathcal{U}^x ha un numero finito di orbite.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Si ha che

$$\mathcal{U}^x = \coprod_{p \in S_x(A)} p(\mathcal{U}^x).$$

Se ogni $p(x) \in S_x(A)$ è equivalente ad una formula in $\mathcal{L}_x(A)$ (ovvero $p(x)$ è isolato su A) allora per compattezza $S_x(A)$ deve essere finito.

(2. \Rightarrow 1.): Se $p(x) \in S_x(A)$ finito, allora $\neg p(x)$ è disgiunzione finita di tipi, e quindi un tipo, quindi una formula, e quindi $p(x)$ è isolato.

Ogni $q(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$ è disgiunzione di tipi completi (che sono tutti isolati) e quindi anche $q(x)$ è isolato.

(2. \Leftrightarrow 3.): Ovvia.

(2. \Leftrightarrow 4.): I tipi completi definiscono orbite e viceversa. ■

Osservazione. Ovviamente se A è infinito allora tutte le 4 opzioni sono false, in quanto

$$\mathcal{L}_x(A) \supseteq \{x = a \mid a \in A\}$$

non può essere finito.

Esercizio: Sia \mathcal{L} numerabile. Se T è forte minimale e ω -categorica allora T non è finitamente assiomatizzabile.

Teorema 39. Sia \mathcal{L} numerabile. Se T è totalmente categorica allora non è finitamente assiomatizzabile.

Teorema 40. Sia \mathcal{L} numerabile. Se T è totalmente categorica allora è finitamente assiomatizzabile modulo $\{\exists^{\geq n} x (x = x) \mid n < \omega\}$.

Definizione 41. *T ha la proprietà del modello finito (pmf) se per ogni enunciato $\varphi \in \mathcal{L}$ esiste $A \subseteq \mathcal{U}$ finito, A sottostruttura di \mathcal{U} e*

$$A \models \varphi \longleftrightarrow \mathcal{U} \models \varphi.$$

Proposizione 42. Se T ha la pmf allora non è finitamente assiomatizzabile.

Dimostrazione. Supponiamo che $T \vdash \varphi \vdash T$ per $\varphi \in \mathcal{L}$. Se A sottostruttura tale che $A \models \varphi$ allora $A \models \exists^{\geq n} x (x = x)$ per ogni n , e quindi $|A| \geq \omega$. ■

Definizione 43. Un insieme $C \subseteq \mathcal{U}$ è omogeneo se per ogni mappa elementare (su \mathcal{U}) $k : C \rightarrow C$ e per ogni $b \in C$ esiste $c \in C$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\} : C \rightarrow C$ è elementare.

Proposizione 44. Se T è forte minimale allora ogni $C = \text{acl}(C)$ è omogeneo.

(dimostrato la prossima lezione)

1091.6 Lezione 5 - <2025-10-07 Mar>

Sia T una teoria completa con un modello infinito (ovvero senza modelli finiti). Sia $\mathcal{U} \models T$ modello mostro di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

Dalla lezione precedente si hanno questi due teoremi:

Teorema 45. Sia \mathcal{L} numerabile. Se T è forteamente minimale e ω -categorica allora T non è finitamente assiomatizzabile.

Teorema 46. Sia \mathcal{L} numerabile. Se T è totalmente categorica allora non è finitamente assiomatizzabile.

Osservazione. Questi due risultati sono collegati, in quanto una teoria forteamente minimale è λ -categorica per ogni $\lambda > \omega$. Il collegamento è chiaro in luce del seguente teorema:

Teorema 47. (Teorema di Lachlon-Baldwin). Ogni modello M , $|M| > \omega$ contiene $A \subseteq M$ definibile, forteamente minimale^[365] e $M = \text{acl}(A)$

Se T è forteamente minimale allora ogni $C = \text{acl}(C)$ è omogeneo.

Dimostrazione. (della Proposizione 44). Sia $k : C \rightarrow C$ elementare e finita, a una enumerazione di $\text{dom } k$, $b \in C$.

- Caso 1: $b \in \text{acl}(\text{dom } k)$. Per ogni $h \in \text{Aut}(\mathcal{U})$, $h \supseteq k$

$$h[\text{acl dom } k] = \text{acl}(\text{rng } k)$$

Tale $h \supseteq k$ esiste per omogeneità e quindi prendo $c = h(b) \in C$ poiché $C = \text{acl}(C)$. Ottengo $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ elementare.

- Caso 2: $b \notin \text{acl}(\text{dom } k)$. Allora $\dim(\text{acl}(\text{dom } k)) < \dim C$ e quindi

$$\dim(\text{acl}(\text{rng } k)) < \dim C$$

e quindi esiste $c \in C \setminus \text{acl}(\text{rng } k)$. Quindi $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è elementare.

■

Lemma 48. Sia \mathcal{L} numerabile. Se T è forteamente minimale e ω -categorica allora T ha p.m.f.

Dimostrazione. Mostriamo per induzione che per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ esiste $A \subseteq \mathcal{U}$ sottostruttura finita di \mathcal{U} che contiene i parametri di φ e $A \models \varphi$.

Fissiamo $n \in \mathbb{N}$. Allora esiste $A_n \subseteq \mathcal{U}$ sottostruttura tale che

$$A \models \varphi \iff \mathcal{U} \models \varphi$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{L}(A)$ tale che il numero di parametri di φ + il numero dei quantificatori in φ è $\leq n$.

Dimostro per induzione sulla complessità di φ . Sia $A_n = \text{acl}(A_n)$ finito tale che ogni $p(z) \in S(A_n)$ con $|z| = n$ ha soluzione in A . (Esercizio: dimostrare che esiste).

Passo atomica e induzione per \wedge, \vee, \neg banale. Mostriamo l'induzione per \exists .

Consideriamo $\exists x \varphi(x, a)$ con $|x| = 1$, $|a| < n$. Per ipotesi induttiva si ha che, per ogni $c \in A$:

$$A \models \varphi(c, a) \longleftrightarrow \mathcal{U} \models \varphi(c, a).$$

Voglio dimostrare

$$A \models \exists x \varphi(x, a) \longleftrightarrow \mathcal{U} \models \exists x \varphi(x, a)$$

(\Rightarrow): segue immediatamente da ipotesi induttiva.

(\Leftarrow): Sia $b \in \mathcal{U}$ tale che $b, a \models \varphi(x, z)$, e sia $p(x, z) = \text{tp}(b, a)$. $|x, z| \leq n$, quindi esiste $c, a' \in A^{|x, z|}$ tale che $c, a' \models \varphi(x, z)$. Sia $k = \{\langle a', a \rangle\} : A \rightarrow A$ mappa elementare. Per omogeneità la estendo a $k \cup \{\langle c, c' \rangle\} : A \rightarrow A$ elementare, quindi $c', a \models \varphi(x; z)$. Pertanto c' è testimone di $A \models \exists x \varphi(x; z)$. ■

1091.6.1 Teorie sottili (*small*)

Sia \mathcal{L} numerabile. Sia T una teoria completa con un modello infinito (ovvero senza modelli finiti). Sia $\mathcal{U} \models T$ modello mostro di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

Definizione 49. T è sottile su A se per ogni x , $|x| < \omega$, $S_x(A)$ è numerabile.

Definizione 50. T è sottile se è sottile su \emptyset .

Proposizione 51. Se T è sottile su A e B è finito allora T è sottile su $A \cup B$.

Dimostrazione. Sia b una enumerazione di B . Ogni $p(x) \in S_x(A \cup B)$ allora $p(x) = q(x, b)$ con $q(x, z) \in S_{x,z}(A)$. Ma se $|x| < \omega$ allora $S_{x,z}(A)$ è numerabile, poiché z finito in quanto B è finito. ■

Definizione 52. Sia Δ un insieme di formule con x libera. Un Δ -albero binario è una sequenza

$$\begin{aligned} 2^{<\lambda} &\rightarrow \Delta \\ \langle \varphi_s(x) : s \in 2^{<\lambda} \rangle \end{aligned}$$

tale che

1. per ogni $s \in 2^\lambda$ il tipo

$$p_s(x) := \{\varphi_{s \upharpoonright i}(x) : i < \lambda\}$$

è consistente.

2. per ogni $r, s \in 2^\lambda$, se $r \neq s$ allora $p_r(x) \cup p_s(x)$ è inconsistente.

λ si dice altezza dell'albero.

In particolare:

- per oggi $\Delta = L_x(A)$;
- più avanti si potrà avere $\Delta = \{\varphi(x, b), \neg\varphi(x, b) \mid b \in B\}$.

Spesso la condizione 2. si ottiene richiedendo che

$$\varphi_{s \frown 0}(x) \longleftrightarrow \neg\varphi_{s \frown 1}(x)$$

Notazione: si denota con $S(\Delta)$ l'insieme dei Δ -tipi massimali consistenti^[366]

Lemma 53. Sia Δ numerabile e chiuso per negazioni. LSASE

1. esiste un Δ -albero binario di altezza ω ;
2. $|S(\Delta)| = 2^\omega$;
3. $|S(\Delta)| > \omega$

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3.): ovvio.

(3. \Rightarrow 1.): Costruiamo un albero per induzione su $n < \omega$. Assumiamo come ipotesi induttiva che per ogni $s \in 2^n$ il tipo

$$p_s(x) = \{\varphi_{s \upharpoonright i}(x) \mid i \leq n\}$$

ha $> \omega$ estensioni in $S(\Delta)$.

Claim: esiste $\psi^s(x) \in \Delta$ tale che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ e $p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\}$ abbiano $> \omega$ estensioni in $S(\Delta)$..

Posso quindi porre $\varphi_{s \sim 0}(x) := \psi^s(x)$, $\varphi_{s \sim 1}(x) := \neg\psi^s(x)$.

Dimostrazione del claim: per assurdo, supponiamo che per ogni $\psi(x) \in \Delta$ si ha che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ o $p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\}$ hanno $\leq \omega$ estensioni. Notiamo che esattamente uno tra i due tipi può avere $\leq \omega$ estensioni per ipotesi induttiva. Definiamo

$$\begin{aligned} q(x) &= p_s(x) \cup \{\psi(x) \in \Delta \mid p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\} \text{ ha } \leq \omega \text{ estensioni}\} \\ &= p_s(x) \cup \{\psi(x) \in \Delta \mid p_s(x) \cup \{\psi(x)\} \text{ ha } > \omega \text{ estensioni}\} \end{aligned}$$

Allora $q(x)$ è consistente^[367], e inoltre $q(x) \in S(\Delta)$.

Contiamo i tipi in $S(\Delta) \setminus \{q(x)\}$ che estendono $p_s(x)$. Se $p(x)$ soddisfa queste ipotesi allora è inconsistente con $q(x)$, quindi contiene $\psi(x)$ tale che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}$ ha $\leq \omega$ estensioni. Siccome Δ è numerabile allora si ottiene che la cardinalità dell'insieme dei tipi in $S(\Delta) \setminus \{q(x)\}$ che estendono $p_s(x)$ è numerabile. Assurdo. ■

Teorema 54. Sia \mathcal{L} numerabile. LSASE:

1. T è sottile.
2. esiste un modello saturo numerabile;
3. non esiste un L_x -albero binario di altezza ω per nessun x con $|x| < \omega$.

Dimostrazione. (1. \Leftrightarrow 3.): per il lemma precedente.

(2. \Rightarrow 1.): lasciato per esercizio. ■

Teorema 55. Ogni teoria sottile T ha modelli atomici su ogni A numerabile.

Lemma 56. Sia $\mathcal{L}(A)$ numerabile. Sono fatti equivalenti:

1. esiste un modello atomico su A ;
2. ogni formula $\varphi(y) \in \mathcal{L}(A)$ consistente, con $|y| < \omega$, ha una soluzione isolata su A ^[368].

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): ovvia.

(1. \Rightarrow 2.): assumiamo 2. e costruiamo $M \supseteq A$ atomico: $M = \{a_i \mid i < \omega\}$ costruito per induzione.

Sia $a := \langle a_i \mid i < \omega \rangle$. L'ipotesi induttiva è che $a \upharpoonright i$ è isolato su A .

- Passo i : considero $\psi(x, a \upharpoonright i)$ consistente. Per ipotesi induttiva esiste $\varphi(z)$ che isola $\text{tp}(a \upharpoonright i/A)$. Quindi $\psi(x; z) \wedge \varphi(z)$ è consistente. Sia $c, a' \models \psi(x; z) \wedge \varphi(z)$ isolato su A . Quindi $a' \equiv_A a \upharpoonright i$ e quindi esiste $h \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ con $h(a') = a \upharpoonright i$. quindi $h(c), a \upharpoonright i \models \psi(x; z) \wedge \varphi(z)$ isolato su A .

■

Dimostrazione. (del Teorema 55). Per assurdo, neghiamo l'ipotesi 2. del lemma precedente. Sia $\varphi(x)$ formula che non segue da nessuna formula completa.

Costruisco albero binario: $p_0(x) = \{\varphi(x)\}$. Dato $p_s(x)$, cerco $\psi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $p_s(x) \cup \{\psi(x)\}, p_s(x) \cup \{\neg\psi(x)\}$ ed estendo nel modo ovvio.

Tale ψ esiste, altrimenti $p_s(x)$ sarebbe una formula completa su A .

■

1091.7 Lezione 6 - <2025-10-08 Mer>

Esercizio (Vaught): Nessuna teoria completa T ha esattamente due modelli numerabili. (\mathcal{L} numerabile)

Soluzione: Assumiamo per assurdo che T abbia esattamente due modelli numerabili. Allora T non ha modelli finiti e non è ω -categorica, e T è sottile, in quanto un modello numerabile realizza al più ω tipi su ω .

Quindi T ha un modello numerabile saturo N , ed un modello atomico M . WLOG $M \preceq N$. Sia quindi $a \in N^{<\omega}$ tale che $\text{tp}(a)$ non è isolato. Necessariamente $a \notin M$, e quindi $M \not\cong N$.

T è piccola su a . Sia M' modello atomico su a , $M \cup \{a\} \subseteq M' \preceq N$, $M \preceq M'$

Se ci sono solo due modelli, allora $M' \cong M$ oppure $M' \not\cong N$.

- Sicuramente $M' \not\cong M$ (come per $N \not\cong N$)
- Se fosse $M' \cong N$ allora M' è atomico e saturo su a , e quindi T è ω -categorica su a (Esercizio del foglio 2). Assurdo.

Esempio 57. Esiste una teoria con esattamente 3 modelli. Vedi esercizio di IdL.

1091.7.1 Linguaggio a più sorte

Un linguaggio a più sorte \mathcal{L} è un insieme

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{fun}} \sqcup \mathcal{L}_{\text{rel}} \sqcup \mathcal{L}_{\text{sort}}.$$

dotato di una funzione arietà che assegna:

- a $r \in \mathcal{L}_{\text{rel}}$ una tupla $\langle s_0, \dots, s_n \rangle \in \mathcal{L}_{\text{sort}}^{<\omega}$; si dirà che r è di sorta $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$
- a $f \in \mathcal{L}_{\text{fun}}$ una tupla $\langle s_0, \dots, s_n \rangle \in \mathcal{L}_{\text{sort}}^{<\omega}$; si dirà che f è di sorta $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$

Un \mathcal{L} -modello \mathcal{M} è composto da

- M_s insieme per ogni $s \in \mathcal{L}_{\text{sort}}$
- per ogni $r \in \mathcal{L}_{\text{rel}}$ di sorta $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$ un insieme

$$r^{\mathcal{M}} \subseteq M_{s_0} \times \cdots \times M_{s_n}$$

- per ogni $f \in \mathcal{L}_{\text{fun}}$ di sorta $\langle s_0, \dots, s_n \rangle$ una funzione totale

$$f^{\mathcal{M}} : M_{s_1} \times \cdots \times M_{s_n} \rightarrow M_{s_0}$$

Fisso per ogni $s \in \mathcal{L}_{\text{sort}}$ un insieme di variabili V_s , tale che se $s \neq s'$ allora $V_s \cap V_{s'} = \emptyset$.

- I termini sono definiti in “modo ragionevole”. N.B. i termini hanno anche una arietà.
- Una formula atomica è $r(t_1, \dots, t_n)$ con $r \in \mathcal{L}_{\text{rel}}$ con t_i che rispettano la sorta di r .
- Per costruire le formule:
 - per \wedge, \vee, \neg tutto uguale;
 - i quantificatori sono \exists_s e \forall_s per ogni $s \in \mathcal{L}_{\text{sort}}$.

Osservazione. In generale, per un linguaggio a più sorti, posso considerare un linguaggio ad un'unica sorta che contenga un predicato per ogni sorta. Il problema insorge per linguaggi ad infinite sorti, poiché i modelli saturi costruiti nel linguaggio “ad una sorta” avrebbero elementi che non sono di nessuna sorta.

1091.7.2 Linguaggio del secondo ordine

???

1091.7.3 Immaginari

Sia T una \mathcal{L} -teoria completa con un modello infinito (ovvero senza modelli finiti). Sia $\mathcal{U} \models T$ modello mostro di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

Si definisce \mathcal{U}^{eq} struttura a più sorti nel linguaggio \mathcal{L}^{eq} : si considera $\mathcal{L}_{\text{sort}} = \{0\} \cup \mathcal{L}_{x,z}$, con $|x| = |z| = \omega^{[369]}$

1. \mathcal{U} è il dominio della sorta 0 (anche detta *home* o reale);
2. per ogni $\sigma(x, z) \in \mathcal{L}_{x,z}$, il dominio della sorta σ è

$$\mathcal{U}_\sigma := \{\sigma(\mathcal{U}^x; b) \mid b \in \mathcal{U}^z\}$$

\mathcal{L}^{eq} contiene i simboli di \mathcal{L} che “vivono nella sorta 0”, e \in_σ per ogni $\sigma \in \mathcal{L}_{x,z}$, di arietà $\langle 0^n, \sigma \rangle$ dove n è il più piccolo tale che solo le variabili in $x \upharpoonright n$ occorrono in σ .

Lemma 58. Sia \mathcal{X} tupla di variabili di sorta $\sigma(x; z)$ e \mathcal{A} tupla di parametri di sorta $\sigma(x; z)$, u variabile di sorta 0. Se $\varphi(u, \mathcal{X}) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}$. Allora esiste $\varphi'(u; z) \in \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^z$ tale che

$$\mathcal{U}^{\text{eq}} \models \forall u \left[\varphi(u, \mathcal{A}) \longleftrightarrow \varphi'(u, b) \right]$$

Morale del lemma: questa espansione non serve a nulla; i sottoinsiemi di \mathcal{U} definibili (con parametri) in \mathcal{L}^{eq} sono gli stessi che quelli definibili in \mathcal{L} .

Dimostrazione. ???? FINIRE ■

Osservazione. Per ogni $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ esiste un $B \subseteq \mathcal{U}$ tale che i sottoinsiemi $\mathcal{L}^{\text{eq}}(A)$ -definibili di \mathcal{U} sono contenuti nei $\mathcal{L}(B)$ -definibili di \mathcal{U} .

In generale, però, non esiste B tale che questa inclusione sia una uguaglianza.

Esempio 59. Sia $\mathcal{L} = \{E\}$, $E^{\mathcal{U}}$ relazione di equivalenza con due classi infinite.

Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ è una delle due classi, allora $x \in \mathcal{A}$ è equivalente a $E[b, x]$ per qualche $b \in \mathcal{U}$.

1091.8 Lezione 7 - <2025-10-14 Mar>

Osservazione. \mathcal{U}^{eq} è saturo, ovvero realizza ogni tipo $p(x, X)$ finitamente consistente con “pochi” parametri.

Osservazione. \mathcal{U}^{eq} è un modello omogeneo: se $a, \mathcal{A} \equiv_{\mathcal{L}^{\text{eq}}} a', \mathcal{A}'$, con $|a, \mathcal{A}| < \kappa$ allora esiste $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}^{\text{eq}})$ tale che

$$fa = a', \quad f\mathcal{A} = \mathcal{A}'.$$

Osservazione. Si ha che $\text{Aut}(\mathcal{U}^{\text{eq}}) \cong \text{Aut}(\mathcal{U})$ canonicamente.

1091.8.1 Sottostrutture elementari

Sia $\mathcal{V}^\dagger \preceq \mathcal{U}^{\text{eq}}$.

- Il dominio della *home sort* di \mathcal{V}^\dagger è $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$.
- Il dominio della sorta $\sigma(x; z)$ è della forma $\sigma(\mathcal{U}^x; b)$ per qualche $b \in \mathcal{U}^z$.

Detto $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{U}^x; b)$ allora

$$\mathcal{U}^{\text{eq}} \models \exists z \forall x [x \in \mathcal{A} \longleftrightarrow \sigma(x; z)]$$

e per elementarietà

$$\mathcal{V}^\dagger \models \exists z \forall x [x \in \mathcal{A} \longleftrightarrow \sigma(x; z)]$$

e quindi esiste $b' \in \mathcal{V}$ tale che $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{U}^x; b')$.

Viceversa, preso $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$ e definisco \mathcal{V}^{eq} “aggiungendo” gli insiemi $\sigma(\mathcal{U}^x; b)$ con $b \in \mathcal{V}^z$ ottengo $\mathcal{V}^{\text{eq}} \preceq \mathcal{U}^{\text{eq}}$.

Definizione 60. Un elemento $a \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ (di qualsiasi sorta) si dice definibile su $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ se esiste $\varphi(u) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}(A)$ tale che

$$\varphi(a) \wedge \exists^{=1} u \varphi(u).$$

Proposizione 61. LSASE:

1. $\mathcal{A} \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ è definibile su $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$;

2. esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $x \in \mathcal{A} \longleftrightarrow \psi(x)$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia $\varphi(\mathcal{X}) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}(A)$ tale che \mathcal{A} sia l'unica soluzione di $\varphi(\mathcal{X})$. Quindi

$$x \in A \longleftrightarrow \exists \mathcal{X} [x \in \mathcal{X} \wedge \varphi(\mathcal{X})]$$

e poi posso eliminare la parte immaginaria. ■

Definizione 62. Se $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si definisce $\text{dcl}^{\text{eq}}(A)$ l'insieme degli elementi di \mathcal{U}^{eq} definibili su A .

Se $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si definisce $\text{dcl}(A)$ l'insieme degli elementi di \mathcal{U} definibili su A .

Definizione 63. Se $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si definisce $\text{acl}^{\text{eq}}(A)$ l'insieme degli elementi di \mathcal{U}^{eq} algebrici su A .

Se $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si definisce $\text{acl}(A)$ l'insieme degli elementi di \mathcal{U} algebrici su A .

Però come possiamo definire gli elementi algebrici?

Definizione 64. (Tentativo 1). Un elemento $a \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si dice algebrico su $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ se esiste $\varphi(u) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}(A)$ tale che

$$\varphi(a) \wedge \exists^{=n} u \varphi(u)$$

per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 65. (Tentativo 2). Un elemento $a \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si dice algebrico su $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ se l'orbita

$$O(a/A) = \{fa \mid f \in \text{Aut}(\mathcal{U}^{\text{eq}}/A)\}$$

è finita.

Definizione 66. (Tentativo 3). Un elemento $a \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ si dice algebrico su $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ se

$$a \in \bigcap_{A \subseteq M^{\text{eq}}} M^{\text{eq}}.$$

Ci si deve chiedere quale di queste definizioni è ben chiara quando a è un insieme definibile.

Notiamo che, per il tentativo 3, un insieme $\mathcal{A} \in M^{\text{eq}}$ sse $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}$ è definibile su M in \mathcal{U} .

Proposizione 67. Le tre diverse definizioni di elementi algebrici sono equivalenti.

Definizione 68. Una equivalenza finita definibile in $A \subseteq \mathcal{U}^{\text{eq}}$ è una formula $\varepsilon(x; y) \in \mathcal{L}(A)$ che definisce una relazione di equivalenza su \mathcal{U}^x con un numero finito di classi.

Teorema 69. LSASE

1. $\mathcal{A} \in \text{acl}^{\text{eq}}(A)$;
2. \mathcal{A} è unione di classi di una equivalenza finita definibile in A .

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): Supponiamo $\mathcal{A} = \bigcup_{i=1}^n \varepsilon(\mathcal{U}^x, c_i)$ per $c_i \in \mathcal{U}^x$, con $\varepsilon(x; y) \in \mathcal{L}(A)$.

Utilizzando la definizione del Tentativo 2, l'orbita di \mathcal{A}/A ha cardinalità al più $\binom{m}{n}$ dove m è il numero di classi di ε .

Utilizzando invece la definizione del Tentativo 3, sia $M^{\text{eq}} \supseteq A$. Allora

$$\mathcal{U}^{\text{eq}} \models \text{"esistono } m \text{ classi di } \varepsilon\text{"}$$

e per elementarietà

$$M^{\text{eq}} \models \text{"esistono } m \text{ classi di } \varepsilon\text{"}$$

quindi per ogni $i = 1, \dots, n$ esiste $c'_i \in M^x$ tale che $\varepsilon(c'_i, c_i)$.

(1. \Rightarrow 2.): Sia $\mathcal{A} \in \text{acl}^{\text{eq}}(A)$ (utilizzando la definizione del Tentativo 1) e sia $\varphi(\mathcal{X}) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}(A)$ tale che

$$\varphi(\mathcal{A}) \wedge \exists^{\leq n} \mathcal{X} \varphi(\mathcal{X}).$$

Si definisce

$$\varepsilon(x; y) = \forall \mathcal{X} \left[\varphi(\mathcal{X}) \rightarrow [x \in \mathcal{X} \longleftrightarrow y \in \mathcal{X}] \right]$$

Claim: ε è una relazione di equivalenza finita.

Siano $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ tutte le soluzioni di $\varphi(\mathcal{X})$. Allora

$$\varepsilon(x; y) = \bigwedge_{i=1}^n [x \in \mathcal{A}_i \longleftrightarrow y \in \mathcal{A}_i]$$

e quindi ε ha al più 2^n classi. ■

Definizione 70. $a, b \in \mathcal{U}^x$ hanno lo stesso tipo forte di Shelah su $A \subseteq \mathcal{U}$ (e si scrive $a \stackrel{\text{Sh}}{\equiv}_A b$) se per ogni $\varepsilon(x; y) \in \mathcal{L}(A)$ relazione di equivalenza finita

$$\mathcal{U} \models \varepsilon(a, b).$$

Osservazione. Se $a \stackrel{\text{Sh}}{\equiv}_A b$ allora a, b hanno lo stesso tipo su A : infatti, presa $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ prendo

$$\varepsilon(x, y) := [\varphi(x) \longleftrightarrow \varphi(y)].$$

Esercizio: LSASE:

1. $a \stackrel{\text{Sh}}{\equiv}_A b$;
2. $a \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}}} b$.

Soluzione. (−1. \Rightarrow −2.): Esiste $\varepsilon(x, y) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $\neg\varepsilon(a, b)$.

Sia $\mathcal{A} = \varepsilon(\mathcal{U}^x, b) \in \text{acl}^{\text{eq}} A$. Poiché $b \in \mathcal{A}$ e $a \notin \mathcal{A}$ ottengo −2.

($\neg 2 \Rightarrow \neg 1$): Esiste $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\text{acl}^{\text{eq}} A)$ tale che

$$\varphi(a) \wedge \neg\varphi(b)$$

e pertanto

$$\mathcal{B} := \varphi(\mathcal{U}^x) \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl}^{\text{eq}} A) = \text{acl}^{\text{eq}} A.$$

Siccome $\mathcal{B} \in \text{acl}^{\text{eq}} A$

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^n \varepsilon(\mathcal{U}^x; c_i)$$

dove $\varepsilon(x; y) \in \mathcal{L}(A)$ relazione di equivalenza finita.

$a \in \mathcal{B}$, quindi per qualche c_i si ha $\varepsilon(a; c_i)$; siccome $b \notin \mathcal{B}$ si ha $\neg\varepsilon(b; c_i)$ e quindi $\neg\varepsilon(a; b)$. \blacksquare

1091.9 Lezione 8 - <2025-10-15 Mer>

1091.9.1 Eliminazione degli immaginari

Definizione 71. Una teoria T ha eliminazione degli immaginari se per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ definibile, esiste $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ tale che

$$\mathcal{U} \models \exists^{=1} z \forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \varphi(x; z)].$$

Bisogna verificare che la definizione dipende solo da T (e non dipende dal modello mostro scelto).

Definizione 72. Una teoria T ha eliminazione debole degli immaginari se per ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ definibile, esiste $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ ed esiste $k \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$\mathcal{U} \models \exists^{=k} z \forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \varphi(x; z)].$$

Nota: quando $|z| = \emptyset$ si considera $\exists^{=1} z$ come sempre vera.

Teorema 73. LSASE:

1. T ha eliminazione degli immaginari;
2. ogni insieme definibile è interdefinibile con una tupla reale;
3. ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ definibile è definibile su $\text{dcl}\{\mathcal{D}\}$, ovvero $\mathcal{D} \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{dcl}\{\mathcal{D}\})$.

Definizione 74. $a, b \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$ di sorte arbitraria sono interdefinibili se vale uno dei seguenti fatti equivalenti:

1. $\text{dcl}^{\text{eq}}(a) = \text{dcl}^{\text{eq}}(b)$;
2. $a \in \text{dcl}^{\text{eq}}(b)$ e $b \in \text{dcl}^{\text{eq}}(a)$;
3. $\text{Aut}(\mathcal{U}/a) = \text{Aut}(\mathcal{U}/b)$.

Teorema 75. LSASE:

1. T ha eliminazione debole degli immaginari;
2. ogni insieme definibile è interdefinibile con un insieme finito;

3. ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ definibile è definibile su $\text{acl}\{\mathcal{D}\}$, ovvero $\mathcal{D} \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl}\{\mathcal{D}\})$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia \mathcal{D} un insieme definibile: per ipotesi

$$\mathcal{U} \models \exists^{=k} z \forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \varphi(x; z)]$$

e dunque sia $\mathcal{B} := \{z \mid \forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \varphi(x; z)]\} = \{z_1, \dots, z_k\}$.

Quindi $\mathcal{B} \in \text{dcl}^{\text{eq}}\{\mathcal{D}\}$, e inoltre $\mathcal{D} \in \text{dcl}^{\text{eq}}\{\mathcal{B}\}$ poiché

$$\mathcal{D} = \{x \mid \exists z \in \mathcal{B} \varphi(x; z)\}.$$

(2. \Rightarrow 3.): Se $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ è tale che

$$\text{dcl}^{\text{eq}}\{\mathcal{D}\} = \text{dcl}^{\text{eq}}\{\mathcal{B}\}$$

allora $b_i \in \text{acl}\{\mathcal{B}\}$ testimoniato dalla formula $z \in \mathcal{B}$ e quindi $b \in \text{acl}\{\mathcal{D}\}$:

$$\text{acl}\{\mathcal{D}\} = \text{acl}\text{acl}\{\mathcal{D}\} = \text{acl}\text{dcl}\{\mathcal{D}\} = \text{acl}\text{dcl}\{\mathcal{B}\} = \text{acl}\{\mathcal{B}\}$$

Sappiamo che $\mathcal{D} \in \text{dcl}^{\text{eq}}\{\mathcal{B}\}$ e quindi esiste $\psi(x; \mathcal{B})$ tale che

$$\mathcal{D} = \{x \mid \psi(x; \mathcal{B})\}$$

e quindi esiste $\psi'(x; b_1, \dots, b_n)$ tale che

$$\mathcal{D} = \{x \mid \psi'(x; b_1, \dots, b_n)\}$$

e quindi $\mathcal{D} \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl}\{\mathcal{D}\})$.

(3. \Rightarrow 1.): Fissiamo $\mathcal{D} \neq \emptyset$ definibile e fissiamo $\sigma(x; z)$ e $b \in (\text{acl}\{\mathcal{D}\})^z$ tale che

$$\forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \sigma(x; z)].$$

Fisso $\delta(z; \mathcal{X})$ tale che $\delta(b; \mathcal{D}) \wedge \exists^{=k} z \delta(z; \mathcal{D})$ e pongo

$$\psi(z; \mathcal{X}) = \forall x [x \in \mathcal{X} \longleftrightarrow \sigma(x; z)] \wedge \delta(z; \mathcal{X}).$$

Affermo che

$$\exists^{=k} z \forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \sigma(x; z) \wedge \exists \mathcal{X} \psi(z; \mathcal{X})].$$

\mathcal{B} è testimone di $\exists z$. Vogliamo mostrare che esistono k testimoni di $\exists z$. Sia c tale che

$$\forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \sigma(x; c) \wedge \exists \mathcal{X} \psi(c; \mathcal{X})]$$

FINIRE ■

Teorema 76. La teoria T_{acf}^p ^[370] ha eliminazione degli immaginari.

Lemma 77. La teoria T_{acf}^p ha eliminazione debole degli immaginari.

Teorema 78. Se T è una teoria fortemente minimale e $\text{acl}(\emptyset)$ è infinita allora T ha l'eliminazione debole degli immaginari.

Lemma 79. Se ogni formula $\varphi(z) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}(A)$ consistente ha una soluzione in $\text{acl}(A)$ allora T ha l'eliminazione debole degli immaginari.

Dimostrazione. (del Lemma 79). Se \mathcal{D} è di sorta $\sigma(x; z)$ prendo come

$$\varphi(z) = \forall x [x \in \mathcal{D} \longleftrightarrow \sigma(x; z)]$$

con $\varphi(z) \in \mathcal{L}^{\text{eq}}(\{\mathcal{D}\})$.

Se $\varphi(z)$ ha soluzione in $\text{acl}(\{\mathcal{D}\})$ allora \mathcal{D} è definibile su $\text{acl}(\{\mathcal{D}\})$. La tesi segue dal Teorema 75 ■

Lemma 80. T_{acf}^p elimina gli immaginari finiti.

Dimostrazione. (del Lemma 80). Sia $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathcal{U}^m$, e sia

$$a_i = a_{i,1}, \dots, a_{i,m}.$$

Siano x, y variabili con $|x| = 1$ e $y = y_1, \dots, y_m$: si definisce

$$t(x, y) = \prod_{i=1}^n \left(x - \sum_{k=1}^m a_{i,k} y_k \right).$$

L'interpretazione di $t(x, y)$ dipende solo da \mathcal{A} e non dall'enumerazione.

Sia c la tupla dei coefficienti dello sviluppo in monomi di $t(x, y)$.

Dato \mathcal{A} definisco c e viceversa. ■

Dimostrazione. (del Teorema 370). Segue banalmente dal Lemma 80. ■

Esercizio: I grafi aleatori non hanno l'eliminazione degli immaginari.

Teorema 81. I grafi aleatori hanno eliminazione debole degli immaginari.

Lemma 82. Se \mathcal{D} è definibile sia su A che su B , allora è definibile su $A \cap B$ allora T ha eliminazione debole degli immaginari.

Dimostrazione. (del Lemma 82) Sia $A \subseteq$ -minimale tale che \mathcal{D} sia definibile su A finito.

Sia $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/\{\mathcal{D}\})$. Affermo che $f[A] = A$. Infatti \mathcal{D} è definibile su $f[A]$ e pertanto, per ipotesi, su $f[A] \cap A$. Per minimalità $f[A] = A$.

Sia a tupla che enumera A . L'orbita di $a/\{\mathcal{D}\}$ è finita, e quindi $a \in \text{acl}(\{\mathcal{D}\})$. ■

1091.10 TODO Lezione 9 - <2025-10-21 Mar>

1091.10.1 Formule e tipi invarianti

In this chapter, \mathcal{L} è un linguaggio, T is a complete theory without finite models, and \mathcal{U} is a saturated model of inaccessible cardinality κ strictly larger than $|\mathcal{L}| + \omega$.

Definizione 83. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$ è invariante su $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo, se per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$

$$f[\mathcal{D}] = \mathcal{D}$$

Osservazione. \mathcal{D} è invariante se

$$a \in \mathcal{D} \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}$$

per ogni $a \equiv_A b$, $a, b \in \mathcal{U}^z$.

Proposizione 84. Detto $\lambda = |\mathcal{L}_z(A)|$, gli insiemi invarianti su A sono al più 2^{2^λ} . ■

Dimostrazione. Vedi Proposizione 14.1 di .

Definizione 85. Una formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è A -invariante se $\varphi(\mathcal{U}^x)$ lo è.

Definizione 86. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$. Una φ -formula su \mathcal{U} è (alcune possibilità):

1. $\varphi(x; b)$ e $\neg\varphi(x; b)$ per $b \in \mathcal{U}^z$;
2. congiunzioni di formule della forma $\varphi(x; b)$ e $\neg\varphi(x; b)$ per $b \in \mathcal{U}^z$.
3. combinazioni booleane^[371] di formule della forma $\varphi(x; b)$ per $b \in \mathcal{U}^z$.
4. formula in $\mathcal{L}'_x(\mathcal{U})$ costruite a partire da $\varphi(x'; z')$ dove x' è una copia di x e z' è una copia di z .

Definizione 87. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$. Una φ -formula su A è:

3': combinazioni booleane di formule della forma $\varphi(x; b)$ per $b \in \mathcal{U}^z$ che siano invarianti su A .

Con $\mathcal{L}_\varphi(A)$ si intende l'insieme delle φ -formule su A .

Quest'ultima è la definizione utilizzata.

Definizione 88. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$. Un φ -tipo è un insieme di φ -formule.

Un φ -tipo globale è un insieme massimale finitamente consistente di φ -formule su \mathcal{U} . $S_\varphi(\mathcal{U})$ è l'insieme di tutti i φ -tipi globali.

□ Insieme esternamente definibile vedi p.118 di

Definizione 89. Un φ -tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{U})$ è A -invariante se per ogni $\psi(x; \bar{b}) \in p$ e per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$

$$p(x) \vdash \psi(x; f\bar{b})$$

ovvero esiste una congiunzione finita di formule in $p(x)$ che implica $\psi(x; f\bar{b})$. ??????

Notazione: scriveremo $p(x) \vdash fp(x)$ dove

$$fp(x) := \{\psi(x; f\bar{b}) \mid \psi(x; \bar{b}) \in p(x)\}.$$

Se $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ allora a meno di equivalenza

$$p(x) \subseteq \{\varphi(x; b), \neg\varphi(x; b) \mid b \in \mathcal{U}^z\}.$$

Notazione: definisco

$$\mathcal{D}_{p,\varphi} := \{b \in \mathcal{U}^z \mid \varphi(x; b) \in p(x)\}.$$

$\mathcal{D}_{p,\varphi}$ è un insieme **esternamente definibile** (da $\varphi(x; z)$ o da p).

Sia ${}^*\mathcal{U} \succeq \mathcal{U}$ saturo di cardinalità maggiore, tale che

$${}^*\mathcal{U}, {}^*a \vDash p(x)$$

allora

$$\mathcal{D}_{p,\varphi} = \mathcal{U}^z \cap \varphi({}^*a, {}^*\mathcal{U}^z).$$

Proposizione 90. $p(x)$ è A -invariante sse $\mathcal{D}_{p,\varphi}$ è A -invariante.

Fatto. Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $\psi(x, \bar{b}) \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{U})$ e per ogni $a \equiv_A b$ si ha:

$$p(x) \vdash \psi(x; a) \iff p(x) \vdash \psi(x; b)$$

Fatto. Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $a \equiv_A b$ si ha:

$$p(x) \vdash \varphi(x; a) \iff \varphi(x; b).$$

Fatto. Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $a \equiv_A b$ e per ogni $c \vdash p(x) \upharpoonright A \cup \{a, b\}$ ^[372] si ha:

$$\varphi(c; a) \iff \varphi(c; b).$$

Fatto. Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $a \equiv_A b$ e per ogni $c \vdash p(x) \upharpoonright A$ si ha:

$$a \equiv_{A \cup \{c\}} b.$$

Eredi e coeredi

Definizione 91. Un tipo $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ si dice finitamente soddisfacibile in A se per ogni $\psi(x) \in \{\wedge\}p$:

$$\psi(A^x) \neq \emptyset.$$

Proposizione 92. Se $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ è finitamente soddisfacibile in A , allora $p(x)$ è A -invariante.

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che $p(x) \vdash \varphi(x, a) \longleftrightarrow \varphi(x, b)$ per ogni $a \equiv_A b$.

Per assurdo se $p(x) \not\vdash \varphi(x, a) \longleftrightarrow \varphi(x, b)$ allora

$$p(x) \vdash \varphi(x, a) \not\longleftrightarrow \varphi(x, b).$$

Poiché è finitamente soddisfacibile allora esiste $c \in A^x$ tale che

$$\varphi(c, a) \not\longleftrightarrow \varphi(c, b)$$

e quindi $a \not\equiv_A b$. Assurdo. ■

Osservazione. Sia $a \in \mathcal{U}^x$ e $p(x) = \text{tp}(a/B)$. LSASE:

1. $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in A ;
2. $a \in$ chiusura di A^x nella B -topologia di \mathcal{U} .

Proposizione 93. Se $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ finitamente soddisfacibile in A , allora esiste $q(x) \subseteq p(x) \in S(\mathcal{U})$, $p(x)$ finitamente soddisfacibile in A .

Dimostrazione. Sia $p(x) \supseteq q(x)$ un tipo massimale finitamente soddisfacibile in A (che esiste per il [Lemma di Zorn](#)).

Affermo che $p(x)$ è completo. Per assurdo, supponiamo che $\psi(x), \neg\psi(x) \notin p(x)$. Per massimalità esiste $\varphi(x) \in p(x)$ tale che né $\varphi(x) \wedge \psi(x)$ né $\varphi(x) \wedge \neg\psi(x)$ sono realizzate in A . Ma esiste $c \in A^x$ tale che $c \vdash \varphi(x)$. Quindi

$$C \vdash \psi(x) \vee \neg\psi(x). \quad \blacksquare$$

Corollario 94. Tutti i tipi su un modello M si estendono a tipi globali invarianti su M .

1091.11 DONE Lezione 10 - <2025-10-22 Mer>

1091.11.1 DONE Sequenze di Morley

Sia $p(x) \in S(\mathcal{U})$ invariante su A .

Definizione 95. Una sequenza di Morley di $p(x)$ su A è $\bar{c} \in (\mathcal{U}^x)^\alpha$, $\bar{c} = \langle c_i : i < \alpha \rangle$ tale che

$$\forall i < \alpha : \quad c_i \models p(x) \upharpoonright A \cup \bar{c} \upharpoonright i.$$

1091.11.2 Sequenze di indiscernibili

Sia $(I, <)$ un ordine lineare. Una I -sequenza è

$$\bar{c} = \langle c_i : i \in I \rangle, \quad c_i \in \mathcal{U}.$$

Notazione: se $I_0 \subseteq I$ finito, $c \upharpoonright I_0$ è letto come una tupla finita.

Definizione 96. \bar{c} è una sequenza di indiscernibili su A se per ogni $I_0, I_1 \subseteq I$, $|I_0| = |I_1| = n < \omega$

$$c \upharpoonright I_0 \equiv_A c \upharpoonright I_1.$$

Nota: in questo caso scriviamo $I_0, I_1 \in I^{(n)}$ o

$$I_0, I_1 \in \binom{I}{n}.$$

Se I è insieme qualsiasi e $\bar{c} = \{c_i \mid i \in I\}$, si ha la seguente:

Definizione 97. \bar{c} è una sequenza di totalmente indiscernibili su A se per ogni n , per ogni $\{i_1, \dots, i_n\}, \{j_1, \dots, j_n\} \subseteq I$ insiemi di elementi distinti

$$(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \equiv_A (c_{j_1}, \dots, c_{j_n}).$$

Teorema 98. Ogni $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ sequenza di Morley di $p(x) \in S(\mathcal{U})$ invariante su A è indiscernibile su A .

Dimostrazione. Mostriamo per induzione su n che per ogni $I \in \omega^{(n)}$

Ipotesi induttiva $c \upharpoonright n \equiv_A c \upharpoonright I$;

Tesi $c \upharpoonright n, c_n \equiv_A c \upharpoonright I, c_i$, per $i > I$.

Vedi Proposizione 14.20 di

■

1091.11.3 Eredi e coeredi

Definizione 99. Si dice $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ finitamente soddisfacibile in M se

$$\varphi(M^x) \neq \emptyset \quad \text{per ogni } \varphi(x) \in \{\wedge\} p.$$

In questo caso si dice che $p(x)$ è un coerede di $p(x) \upharpoonright M$.

Definizione 100. Se $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in M , una sequenza di Morley di $p(x)$ su M si dice sequenza di coeredi.

Notazione: Siano $a \in \mathcal{U}^x, b \in \mathcal{U}^z$. Si scriverà

$$a \perp_M b \iff \text{tp}(a/M, b) \text{ è finitamente soddisfacibile in } M$$

ovvero per ogni $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(M)$

$$\varphi(a; b) \implies \varphi(m; b) \text{ per qualche } m \in M$$

ovvero a appartiene alla chiusura (topologica) di M^x nella (M, b) -topologia.

Si definisce il tipo

$$x \perp_M b = \{\neg\varphi(x, b) : \varphi(x; z) \in \mathcal{L}(M), \varphi(M^x, b) = \emptyset\}$$

soddisfatto da tutti i seguenti elementi:

$$a \models x \perp_M b \iff a \perp_M b.$$

Lemma 101. Valgono le seguenti proprietà.

1. Se $a \perp_M b$ allora $fa \perp_M fb$ per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M)$. (invarianza)
2. $a \perp_{MM} b$ sse $a_0 \perp_M b_0$ per ogni $a_0 \subseteq a, b_0 \subseteq b$ sottotuple finite. (carattere finito)
3. Se $a \perp_M b, c \in c \perp_M b$ allora $a, c \perp_M b$. (transitività)
4. Se $a \perp_M b$, per ogni c esiste $a' \equiv_{M,b} a$ e $a' \perp_M b, c$. (coheir extension)
5. Se $a \perp_M b_1, b_2$ e $b_1 \equiv_M b_2$ allora $b_1 \equiv_{M,a} b_2$. (non-splitting)

Dimostrazione. Vedi hw4 - TdM ■

Domanda: $a \perp_M z$ è un tipo?

$$a \perp_M z = \{\neg\varphi(a; z) \mid \varphi(M^x, z) = \emptyset \quad \varphi(x; z) \in \mathcal{L}(M)\}.$$

La risposta è NO!! See Remark 14.7 e Esercizio 14.13 di .

1091.12 DONE Lezione 11 - <2025-10-28 Mar>

Lemma 102. LSASE:

1. $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ è sequenza di coeredi su M (rispetto a qualche $p(x) \in S(\mathcal{U})$);
2. $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)$ e $c_{i+1} \equiv_{M,c \upharpoonright i} c_i$;
3. $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)$ e $c_j \equiv_{M,c \upharpoonright i} c_i$ per ogni $j > i$.

Le condizioni 2. e 3. sono banalmente equivalenti, e pertanto saranno utilizzate in maniera interscambiabile.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia $p(x) \in S(\mathcal{U})$ finitamente soddisfacibile in M tale che \bar{c} sia sequenza di coeredi rispetto a p .

Si dimostra $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)$.

Sia $\varphi(x, z_0, \dots, z_{i-1}) \in \mathcal{L}(M)$ tale che $\varphi(c_i, c \upharpoonright i)$.

Poiché $p(x)$ è completo e $c_i \models p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i)}$ allora:

$$\varphi(x; c \upharpoonright i) \in p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i)}.$$

dove con $p(x) \upharpoonright A$ si intende la restrizione di un tipo ad un insieme di parametri.

Siccome $p(x)$ finitamente soddisfacibile in M allora $\varphi(M^x; c \upharpoonright i) \neq \emptyset$. Per definizione questo significa che

$$c_i \perp_M (c \upharpoonright i).$$

Si dimostra l'equivalenza elementare.

Per definizione si ha che

$$c_i \models p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i)}, \quad c_{i+1} \models p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i+1)}$$

In particolare, dalla seconda relazione, segue che

$$c_{i+1} \models p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i)} \subseteq p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i+1)}$$

Per la completezza di $p(x)$ segue $c_i \equiv_{M,c \upharpoonright i} c_{i+1}$.

(2. \Rightarrow 1.): Sia $q(x) = \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(M, \bar{c}) \mid \models \varphi(c_i) \text{ per infiniti } i < \omega\}$. È evidente che in realtà

$$q(x) = \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(M, \bar{c}) \mid \models \varphi(c_i) \text{ per cofiniti } i < \omega\}.$$

Infatti “ \supseteq ” è ovvio, mentre per il viceversa, se per infiniti c_i vale $\varphi(c_i)$, allora in particolare esisterà $I \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi(x) \in \mathcal{L}(M, c \upharpoonright I), \quad \varphi(c_I)$$

e allora vale anche $\varphi(c_j)$ per ogni $j > I$, in quanto

$$c_j \equiv_{M,c \upharpoonright I} c_I$$

per ogni $j > I$.

In particolare $q(x)$ è chiuso per congiunzioni e finitamente soddisfacibile (ne sono testimoni i c_i).

Quindi $q(x)$ è finitamente soddisfacibile in M (poiché M è sottostruttura elementare di \mathcal{U}).

Sia quindi $p(x) \supseteq q(x)$, $p(x) \in S(\mathcal{U})$. Questo è finitamente soddisfacibile in M in quanto lo è in \mathcal{U} .

$\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ è sequenza di Morley di $p(x)$ su M

Si deve dimostrare che $c_i \models p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i)}$ per ogni $i \in \omega$.

Se per qualche c_i e per qualche $\varphi(x; c \upharpoonright i) \in p(x) \upharpoonright_{M,(c \upharpoonright i)}$ si avesse $\neg \varphi(c_i; c \upharpoonright i)$, allora per ogni $j > i$ si avrebbe (siccome $c_j \equiv_{M,(c \upharpoonright i)} c_i$)

$$\neg \varphi(c_j; c \upharpoonright i)$$

e pertanto $\neg \varphi(x; c \upharpoonright i) \in q(x)$. Assurdo perché $q(x) \subseteq p(x)$ e $p(x)$ finitamente soddisfacibile. ■

1091.12.1 Teorema di Ramsey

Vedi Sezione 15.1 di .

[Teorema di Ramsey](#)

1091.13 DONE Lezione 12 - <2025-10-29 Mer>

1091.13.1 Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski

Teorema 103. (Teorema di Ramsey). Sia M insieme infinito. Per ogni k -colorazione di $M^{(n)}$ esiste $H \subseteq M$ infinito tale che gli $H^{(n)}$ sono monocromatici.

Definizione 104. Sia $(I, <)$ un insieme parzialmente ordinato senza elementi massimi, e sia $\bar{a} := \langle a_i : i \in I \rangle$, con $a_i \in \mathcal{U}$. Sia $\bar{x} = \langle x_i : i < \omega \rangle$. Si definisce il tipo di Ehrenfeucht-Mostowski come

$$\text{EM-tp}(\bar{a}/A) := \left\{ \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}(A) \mid \varphi(a \upharpoonright I_0) \text{ per ogni } I_0 \in \binom{I}{\omega} \right\}.$$

Osservazione. Se \bar{a} è una sequenza di indiscernibili su A , allora $\text{EM-tp}(\bar{a}/A)$ è completo.

Teorema 105. (Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski). Data $\bar{a} := \langle a_i : i \in I \rangle$ con $(I, <)$ un insieme parzialmente ordinato senza elementi massimi, esiste $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ di indiscernibili su A tale che

$$\text{EM-tp}(\bar{c}/A) \supseteq \text{EM-tp}(\bar{a}/A).$$

Dimostrazione. (idea). Sia $q(\bar{x}) := \text{EM-tp}(\bar{a}/A)$. Vogliamo realizzare

$$q(x) \cup \left\{ \varphi(\bar{x} \upharpoonright_{I_0}) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x} \upharpoonright_{I_1}) \mid I_0, I_1 \in I^{(\omega)}, \varphi(x) \in \mathcal{L}(A) \right\}$$

Devo dimostrare che il tipo di cui sopra sia finitamente consistente. Basta mostrare che per ogni $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{L}(A)$ soddisfo

$$\left\{ \varphi(\bar{x} \upharpoonright_{I_0}) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x} \upharpoonright_{I_1}) \mid I_0, I_1 \in I^{(\omega)}, i = 1, \dots, n \right\}$$

con qualche $\bar{a} \upharpoonright_H, H \in I^{(\omega)}$.

Sia m il massimo tale che x_m occorre in $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Soddisfo

$$\left\{ \varphi(\bar{x} \upharpoonright_{I_0}) \longleftrightarrow \varphi(\bar{x} \upharpoonright_{I_1}) \mid I_0, I_1 \in I^{(m)}, i = 1, \dots, n \right\}$$

con qualche $\bar{a} \upharpoonright_H, H \in I^{(\omega)}$.

Coloro $I^{(m)}$ con 2^n colori: un colore per ogni valore di verità di

$$\varphi_1(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}), \dots, \varphi_n(a_{i_1}, \dots, a_{i_m}).$$

Per Ramsey esiste $H \subseteq I^{(\omega)}$ monocromatico. ■

Proposizione 106. Sia $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ sequenza di indiscernibili su A . Esiste $M \supseteq A$ tale che \bar{c} è una sequenza di indiscernibili su M .

Dimostrazione. Sia M un modello arbitrario. Consideriamo $\text{EM-tp}(\bar{c}/M)$ completo, e definiamo

$$p(\bar{x}) := \text{EM-tp}(\bar{c}/M) \supseteq \text{EM-tp}(\bar{c}/A)$$

Per il Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski esiste $\bar{b} \models p(\bar{x})$ sequenza di indiscernibili su M . Siccome $\bar{b} \models \text{EM-tp}(\bar{c}/A)$ allora

$$\bar{b} \equiv_A \bar{c}$$

e pertanto esiste $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $f(\bar{b}) = \bar{c}$, ovvero \bar{c} è indiscernibile su $f[M] \supseteq A$. ■

1091.13.2 Teorema di Hindman

Sia S un semigruppo, \mathcal{L} un linguaggio che estende il linguaggio dei gruppi moltiplicativi. Sia $\mathcal{U} \succeq S$ modello mostro.

Teorema 107. (Teorema di Hindman). Per ogni colorazione finita di \mathbb{N} esiste un insieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$\left\{ \sum_{a \in A} a \mid A \subseteq H \text{ finito} \right\}$$

è monocromatico.

Osservazione. Questo teorema dice “quasi” che esiste un insieme monocromatico chiuso per somma. Infatti, mancano le somme di lunghezza arbitraria dello stesso elemento.

Teorema 108. (Teorema di Hindman). Per ogni colorazione finita di S esiste un insieme infinito ordinato $(H, <) \subseteq S$ tale che

$$\left\{ \prod_{a \in A}^{\text{ordinato}} a \mid A \subseteq H \text{ finito} \right\}$$

è monocromatico.

Teorema 109. (Teorema di van der Waerden). Per ogni colorazione finita di \mathbb{N} esistono progressioni aritmetiche^[373] di lunghezza arbitraria monocromatiche.

Per $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ si definisce

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} := \{a \cdot b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, a \perp_S b\}.$$

Notazione: abbrevio

$$\begin{aligned} \mathcal{A} * b &:= \mathcal{A} * \mathcal{O}(b/S) \\ a * \mathcal{B} &:= \mathcal{O}(a/S) * \mathcal{B} \\ a * b &:= \mathcal{O}(a/S) * \mathcal{O}(b/S) \end{aligned}$$

Osservazione. È possibile definire i seguenti tipi

$$\begin{aligned} x \perp_S b &= \{\neg\varphi(x; b) \mid \varphi(S^x; b) = \emptyset, \varphi(x; z) \in \mathcal{L}(S)\} \\ a \perp_S z \equiv_S b &= \{\neg\varphi(a; z) \mid \varphi(S^x; b) = \emptyset, \varphi(x; z) \in \mathcal{L}(S)\} \\ x \perp_S z \equiv_S b &= \{\neg\varphi(x; z) \mid \varphi(S^x; b) = \emptyset, \varphi(x; z) \in \mathcal{L}(S)\} \end{aligned}$$

Proposizione 110. Se \mathcal{A} è tipo-definibile su S allora anche $\mathcal{A} * b$ è tipo-definibile su S .

Dimostrazione. Voglio mostrare che

$$\{a, b' \mid a \in \mathcal{A}, b' \equiv_S b, a \perp_S b'\}$$

è tipo-definibile.

Voglio quindi

$$p(x; y) = x \in \mathcal{A} \wedge x \perp_S y \equiv_S b.$$

e pertanto $\mathcal{A} * b$ è definito da

$$q(z) = \exists x, y \ (z = x \cdot y \wedge p(x, y)).$$

■

Osservazione. È possibile pensare a $*$ come una operazione:

$$\begin{aligned} * : \mathcal{U}/\equiv_S \times \mathcal{U}/\equiv_S &\longrightarrow \mathcal{U}/\equiv_S \\ (a/\equiv_S), (b/\equiv_S) &\longmapsto ab/\equiv_S \end{aligned}$$

continua a sinistra e in generale non a destra (nella S -topologia).

1091.14 TODO Lezione 13 - <2025-11-04 Mar>

1091.14.1 Topological dynamics

Sia S semigruppo (operazione definibile in \mathcal{L}), $\mathcal{U} \succeq S$.

Vogliamo definire una operazione $*$ tra sottoinsiemi di \mathcal{U} . [l'obiettivo finale è mostrare che $*$ è operazione di semigruppo su \mathcal{U}/\equiv_S]

Per $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}$ si definisce

$$\mathcal{A} * \mathcal{B} := \{a \cdot b \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}, a \perp_S b\}.$$

Notazione: abbrevio

$$\begin{aligned} \mathcal{A} * b &:= \mathcal{A} * \mathcal{O}(b/S) \\ a * \mathcal{B} &:= \mathcal{O}(a/S) * \mathcal{B} \\ a * b &:= \mathcal{O}(a/S) * \mathcal{O}(b/S) \end{aligned}$$

Osservazione. Se \mathcal{A}, \mathcal{B} sono invarianti su S , allora $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ è invariante su S .

Teorema 111. Se \mathcal{A} è tipo-definibile (su S) allora $\mathcal{A} * b$ è tipo-definibile per ogni b .

Lemma 112. Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono invarianti su S allora

$$\mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{C}) \subseteq (\mathcal{A} * \mathcal{B}) * \mathcal{C}.$$

Dimostrazione. Sia $a \cdot b \cdot c \in \mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{C})$. Allora

$$b \perp_S c, \quad a \perp_S b \cdot c$$

Voglio mostrare che esistono $a' \in \mathcal{A}$, $b' \in \mathcal{B}$, $c' \in \mathcal{C}$ tale che

$$a' \perp_S b', \quad a' \cdot b' \perp_S c'$$

e che $a \cdot b \cdot c = a' \cdot b' \cdot c'$.

È sufficiente che esiste $a' \in \mathcal{A}$ tale che

$$a' \perp_S b, \quad a', b \perp_S c$$

e che $a \cdot b \cdot c \equiv_S a' \cdot b \cdot c$.

Per il Lemma 2(4) trovo a' tale che

$$a \equiv_{S,b \cdot c} a' \perp_S b \cdot c, b, c.$$

(allora immediatamente $a' \perp_S b, c$ e $a' \perp_S b$).

In particolare, siccome $a' \perp_S b, c$ e $b \perp_S c$ per il Lemma 2(3) si ottiene che $a', b \perp_S c$.

Resta da dimostrare l'elementare equivalenza. $a' \in \mathcal{A}$ per invarianta, e siccome $a \equiv_{S,b,c} a'$

$$a, b \cdot c \equiv_S a', b \cdot c$$

e pertanto $a \cdot b \cdot c \equiv_S a' \cdot b \cdot c$. ■

Definizione 113. La relazione \perp_M è stazionaria se

$$a \equiv_S x \perp_S b$$

è un tipo completo su S, b .

D'ora in avanti \perp_M è assunta stazionaria.

Conseguenza: se $a \perp_S b$ e $a' \equiv_S a$ allora $a' \perp_S b$.

Lemma 114. Se $a \perp_S b$ e $a' \equiv_S a$ allora $a \cdot b \equiv_S a' \cdot b$.

Dimostrazione. Infatti $a, b \equiv_S a', b$. ■

Corollario 115. Se $a \perp_S b, a' \perp_S b', a' \equiv_S a, b' \equiv_S b$ allora $a \cdot b \equiv_S a' \cdot b'$.

Dimostrazione. Se per assurdo $a \cdot b \not\equiv_S a' \cdot b'$ sia $fb' = b$ per $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$, e quindi $a \cdot b \not\equiv_S f(a' \cdot b')$ e quindi $a \cdot b \not\equiv_S f(a') \cdot f(b') = a'' \cdot b$, dove $a'' \equiv_S a$. ■

Corollario 116. $a * b$ è un'orbita.

Teorema 117. Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ sono invarianti su S allora

$$\mathcal{A} * (\mathcal{B} * \mathcal{C}) = (\mathcal{A} * \mathcal{B}) * \mathcal{C}.$$

Dimostrazione. Considerare il caso $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ orbite. ■

Questo teorema vale in generale, non solo per S sottogruppo.

Proposizione 118. Se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(M)$ tale che

$$\varphi(M^x) = \psi(M^x),$$

dove $\varphi(M^x) = \varphi(\mathcal{U}^x) \cap M^x$, allora \perp_M è stazionaria:

$$a \equiv_M x \perp_M b.$$

è un tipo completo su M, b .

Dimostrazione. Sia $\varphi(x) = \varphi(x; b)$ per $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^z$.

Siano $a_1, a_2 \in \mathcal{U}^x$ tali che $a_1 \equiv_M a_2$ e $a_1 \perp_S b, a_2 \perp_S b$. Voglio mostrare che $\varphi(a_1, b) \longleftrightarrow \varphi(a_2, b)$.

Sappiamo che $\varphi(a_i, b) \longleftrightarrow \psi(a_i)$ perché $\varphi(M^x) = \psi(M^x)$.

Siccome $a_1 \equiv_M a_2$ allora $\psi(a_1) \longleftrightarrow \psi(a_2)$. ■

Osservazione. Per ottenere che \perp_M è 1-stazionaria^[374] basta aggiungere al linguaggio un predicato per ogni sottoinsieme di S .

Definizione 119. $\mathcal{A} \neq \emptyset$ è idempotente se $\mathcal{A} * \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.

Osservazione. Se \mathcal{A} è idempotente e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ allora $\mathcal{A} * \mathcal{B}$ è idempotente.

Teorema 120. (Ellis). Se \mathcal{A} è tipo-definibile e idempotente, allora esiste $b \in \mathcal{A}$ tale che $\mathcal{O}(b/S)$ è idempotente.

Dimostrazione. Per compattezza possiamo assumere che \mathcal{A} sia \subseteq -minimale tra gli idempotenti tipo-definibili.

Prendiamo $b \in \mathcal{A}$. Allora $\mathcal{A} * b = \mathcal{A}$ per minimalità.

$$\mathcal{A}' := \{a \in \mathcal{A} \mid a \perp_S b, a \cdot b \equiv_S b\}.$$

Questo insieme è tipo-definibile su S, b , ed è invariante su S . (quindi è tipo-definibile su S).

Si ha che $\mathcal{A}' \neq \emptyset$ poiché $\mathcal{A} * b = \mathcal{A}$. Inoltre \mathcal{A}' è idempotente.

Quindi $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$, e quindi $\mathcal{O}(b/S) \subseteq \mathcal{A}'$.

Quindi $\mathcal{O}(b/S)$ è idempotente. ■

Sia $S = (\mathbb{N}, \cdot, \wp(\mathbb{N}))$, $\mathcal{U} \succeq S$, \bar{a} tupla in \mathcal{U} di lunghezza $\leq \omega$.

$$\text{fp}(\bar{a}) := \{a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \mid i_0 < \dots < i_n < |\bar{a}|\}.$$

Teorema 121. (Teorema di Hindman). Per ogni colorazione finita di \mathbb{N} esiste $\bar{a} \in \mathbb{N}^\omega$ tale che $\text{fp}(\bar{a})$ è monocromatico.

Dimostrazione. Sia

$$\mathcal{A} := \{a \in \mathcal{U} \mid a \neq 0\}$$

che è definibile e idem-potente. Quindi contiene b_0 tale che $\mathcal{O}(b_0/\mathbb{N})$ è idempotente.

Sia $\bar{b} = \langle b_i : i < \omega \rangle$ sequenza di coeredi su N .

Si noti che $\text{fp}(\bar{b})$ è monocromatica (ha colore 1). Infatti

$$b_0 \cdot b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_0, \quad b_0 \cdot b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_1$$

poiché $b_1 \perp_S b_0$.

Definiamo per induzione una sequenza $\bar{a} = \langle a_i : i < \omega \rangle$ tale che

$$\text{fp}(\bar{a} \upharpoonright_n, b_1, b_0)$$

ha colore 1. (definibile da $\varphi(a \upharpoonright_n, b_1, b_0)$)

Lo assumo per ipotesi induttiva. Voglio trovare a_n . Siccome $b_1 \perp_S b_0$ allora esiste $a_n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi(a \upharpoonright_n, a_n, b_0)$$

e quindi $\text{fp}(a \upharpoonright_n, a_n, b_0)$ ha colore 1. Voglio arrivare a mostrare che $\text{fp}(a \upharpoonright_n, a_n, b_1, b_0)$ ha colore 1.

Siccome $b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$, sicuramente

$$a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_0 \text{ ha lo stesso colore di } a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_1$$

Se per assurdo $a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_1 \cdot b_0$ ha colore diverso, siccome $b_1 \perp_S b_0$ ho

$$b_1 \cdot b_0 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$$

per idempotenza quindi anche $a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_0$ ha un colore diverso. Assurdo. ■

1091.15 TODO Lezione 14 - <2025-11-05 Mer>

Teorema 122. (Teorema di van der Waerden). Per ogni colorazione finita di \mathbb{N} e per ogni $k < \omega$ esistono $m, n < \omega$ tali che la sequenza^[375]

$$\langle n + m \cdot i \mid i < k \rangle$$

è monocromatica.

Teorema 123. (Teorema di Hales-Jewett). Sia A insieme finito. Per ogni colorazione di $A^{<\omega}$ esiste $w(x) \in (A \cup \{x\})^{<\omega}$ tale che

$$\{w(d) \mid d \in A\}$$

è monocromatico (dove con $w(d)$ si intende sequenza in $A^{<\omega}$ ottenuta sostituendo ogni occorrenza di x in $w(x)$ con d).

Teorema 124. (Teorema di Hales-Jewett - versione di Koppelberg). Sia S un semigruppo, $C \subseteq S$ sottosemigruppo nice. Per ogni colorazione di C e per ogni insieme finito di retrazioni di S in C :

$$\{\sigma_i : S \rightarrow C \mid i < k\}$$

esiste un $w \in S$ tale che

$$\{\sigma_i(w) \mid i < k\}$$

è monocromatico.

Definizione 125. Un sottosemigruppo $C \subseteq S$ si dice nice se per ogni $a, b \in S$

$$a \cdot b \in C \implies a, b \in C.$$

Esempio 126. Si consideri come $S := (A \cup \{x\})^{<\omega}$ che ha come operazione la concatenazione. $C := A^{<\omega}$ è nice.

Definizione 127. Un omomorfismo $f : S \rightarrow C$ si dice retrazione

$$f|_C = \text{Id}_C.$$

Esempio 128. Si consideri come $S := (A \cup \{x\})^{<\omega}$ che ha come operazione la concatenazione, e sia $C := A^{<\omega}$.

Dato $d \in A$ considero

$$\begin{aligned}\sigma_d : S &\longrightarrow C \\ w(x) &\longmapsto w(d).\end{aligned}$$

Dimostrazione. (Teorema 124 \Rightarrow Teorema 375).

Sia $S = \{n + m \cdot x \mid n, m \in \mathbb{N}\}$, e sia $C = \langle \mathbb{N}, + \rangle$ un sottosemigruppo *nice*. Dato $k < \omega$ sia

$$\begin{aligned}\sigma_i : S &\longrightarrow C \\ n + m \cdot x &\longmapsto n + m \cdot i.\end{aligned}$$

Per il Teorema 124 esiste $n' + m' \cdot x$ tale che

$$\{\sigma_i(n' + m' \cdot x) \mid i < k\} = \{n' + m' \cdot i \mid i < k\}$$

è monocromatico. ■

Dato S semigruppo, sia $\mathcal{U} \succeq S$ modello mostro nel linguaggio che contiene \cdot e un simbolo per ogni sottoinsieme di S . Allora la relazione \perp_S è 1-stazionaria.

Allora l'operazione $*$ tra elementi di \mathcal{U}/\equiv_S è un'operazione di semigruppo.

Osservazione. \mathcal{U}/\equiv_S è uno spazio topologico compatto.

$*$ è continua a destra sse $A * b$ è tipo-definibile per ogni A tipo-definibile.

Definizione 129. Un $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{U}$ si dice:

- ideale sinistro se $\mathcal{U} * C \subseteq C$;
- ideale destro se $C * \mathcal{U} \subseteq C$;
- ideale bilatero se è sia ideale destro che sinistro.

Proposizione 130. Ogni ideale sinistro tipo-definibile contiene un ideale sinistro \subseteq -minimale e questo è tipo-definibile.

Dimostrazione. Sia C ideale sinistro tipo-definibile. Sia $b \in C$. Allora $C * b$ è un ideale sinistro tipo-definibile e $C * b \subseteq C * C \subseteq U * C \subseteq C$.

Quindi esiste $C' \subseteq C$ tale che $C' * b = C'$ per ogni $b \in C'$. Affermo che C' è minimale. Questo è tipo-definibile poiché intersezione di chiusi.

Sia $C'' \subseteq C'$ ideale sinistro: sia $b \in C'' \subseteq C'$:

$$C' = C' * b \subseteq \mathcal{U} * b \subseteq \mathcal{U} * C'' \subseteq C''. \quad \blacksquare$$

Nota: $C * C \subseteq U * C \subseteq C$, quindi C è idempotente.

Lemma 131. Sia M ideale sinistro minimale tipo-definibile. Siano $u, v \in M$ idempotenti.

1. $a * u \equiv_S a$ per ogni $a \in M$.
2. $*$ è una operazione di gruppo su $u * M$ con identità u .
3. La mappa

$$\begin{aligned} f_v : u * M &\longrightarrow v * M \\ a &\longmapsto v * a \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi.

4. Se $u \neq v$ allora $(u * M) \cap (v * M) = \emptyset$.
5. $M = \bigcup_{\substack{u \in M \\ \text{idempotente}}} u * M$.

Dimostrazione. 1. $M * u = M$, allora esiste $a' \in M$ tale che $a' * u = a$. Quindi

$$a * u = a' * u * u = a' * u = a.$$

2. Sia $a \in u * M \subseteq M$, allora $M * a = M$, quindi

$$u * M * a = u * M$$

e quindi esiste $a' \in M$ tale che $u * a' * a = u$ e quindi $u * a'$ è l'inverso sinistro di a .

3. Mostriamo che

$$\begin{aligned} f_u : v * M &\longrightarrow u * M \\ a &\longmapsto u * a \end{aligned}$$

è inversa:

$$f_u f_v(u * a) = \underbrace{u * v * u * a}_u = u * u * a = u * a.$$

Inoltre si ha che

$$f_v(a * b) = v * a * b = v * a * v * b = f_v(a) * f_v(b).$$

4. Per assurdo sia $a \in (u * M) \cap (v * M)$. Sia $a' \in u * M$ tale che $a * a' = u$ (poiché $u * M$ è un gruppo).

Siccome $a \in v * M$ allora

$$u = a * a' \in v * \underbrace{M * a'}_{=M} = v * M$$

e quindi $u = v$.

5. Sia $a \in M$ e sia $\{c \in M \mid c * a = a\}$. Questo è un idempotente tipo-definibile.

Quindi esiste $u \in \{c \in M \mid c * a = a\}$ elemento idempotente e quindi

$$u * a = a$$

e quindi $a \in u * M$.

■

Osservazione. Partendo da S semigruppo abbiamo ottenuto \mathcal{U}/\equiv_S , definendo $*$ operazione di semigruppo continua a dx. Questo è il semigruppo di Ellis. (Stone-Check compactification)

Considerando ora $u * M$ si è ottenuto un gruppo con l'operazione $*$. Questo non dipende da M e u . Questo è il gruppo di Ellis.

1091.16 DONE Lezione 15 - <2025-11-11 Mar>

Sia S un semigruppo, $\mathcal{L} = \{\cdot\} \cup \wp(S) \cup$ altro e sia \mathcal{U} modello saturo tale che $S \preceq \mathcal{U}$.

Si ha $*$ operazione di semigruppo su \mathcal{U}/\equiv_S con

$$a * b = \{a' \cdot b' \mid a \equiv_S a' \perp_S b' \equiv_S b\}.$$

L'operazione $*$ è continua a sinistra, ovvero

$x * b$ è un tipo (su S) per ogni b .

Osservazione. Esistono idempotenti, ovvero b tali che

$$b * b = \mathcal{O}(b/S).$$

Abbiamo introdotto il concetto di **ideale sinistro**:

$$M \subseteq \mathcal{U} \text{ ideale sinistro} \iff \mathcal{U} * M \subseteq M.$$

Proposizione 132. LSASE:

1. M ideale sinistro minimale;
2. per ogni $b \in M$: $M * b = M$.

Proposizione 133. Sia M ideale sinistro minimale, $a \in \mathcal{U}$. Allora $M * a$ è ideale sinistro minimale.

Dimostrazione. Sia $b * a \in M * a$ con $b \in M$ arbitrario. Basta mostrare

$$M * a * b * a = M * a$$

Ma $a * b \in M$ e pertanto $M * a * b = M$ per minimalità di M .

■

Proposizione 134. Sia M ideale sinistro minimale, $a \in \mathcal{U}$ idempotente, allora $a * M * a$ contiene un idempotente.

Dimostrazione. Sia $u \in M * a$ idempotente. Affermo che $a * u$ è idempotente.

$$a * u * a * u = a * (u * a) * u = a * u * u = a * u.$$

■

Teorema 135. (Teorema di Hales-Jewett). Sia S un semigruppo e sia $C \subseteq S$ un sottosemigruppo nice^[376]. Dato $k \in \omega$ sia

$$\Sigma := \{\sigma_i : S \rightarrow C \text{ omomorfismo} \mid \sigma_i|_C = \text{Id}_C, i < k\}$$

Per ogni colorazione finita di C esiste $a \in S \setminus C$ tale che

$$\{\sigma_i(a) \mid i < k\}$$

è monocromatico.

Lemma 136. Per ogni $\sigma \in \Sigma$, per ogni $a, b \in \mathcal{U}$ e $A \subseteq \mathcal{U}$:

1. $\sigma(\mathcal{O}(a/A)) = \mathcal{O}(\sigma a/A)$;
2. $\sigma(a * b) = \sigma(a) * \sigma(b)$.

Dimostrazione. (del Teorema 376). Sia $\mathcal{L} = \{\cdot\} \cup \wp(S) \cup \Sigma$. Sia $\mathcal{U} \succeq S$ modello mostro, e sia $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{U}^x)$, dove

$$\phi(x) : \quad x \in C.$$

- Dal momento che la proprietà *nice* è esprimibile al prim'ordine, anche \mathcal{C} è *nice*. Pertanto $\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}$ è ideale sinistro.
- Sia $M \subseteq \mathcal{U} \setminus \mathcal{C}$ ideale sinistro minimale tipo-definibile, e sia $N \subseteq \mathcal{C}$ ideale sinistro di \mathcal{C} ^[377] minimale tipo-definibile.
- Sia $v \in N$ idempotente, e sia $u \in v * M * v$ idempotente.
- Per ogni $\sigma \in \Sigma$

$$\sigma(u) \in \sigma(v) * \sigma(M) * \sigma(v) = v * \sigma(M) * v \tag{24}$$

con $\sigma(u)$ idempotente.

- $\sigma(M)$ è ideale sinistro di \mathcal{C} , in quanto σ è l'identità su \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} * \sigma(M) = \sigma(\mathcal{C} * M) \subseteq \sigma(M).$$

- Si ha che $\sigma(M) * v \subseteq N$ e per minimalità di N :

$$\sigma(M) * v = N.$$

- Applicando alla (33): $\sigma(u) \in v * N$, ma per un lemma già visto $v * N$ è un gruppo con identità v , e quindi $\sigma(u) \equiv_S v$ per ogni $\sigma \in \Sigma$.

Dunque

$$\mathcal{U} \models \exists x \in (\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}) \left[\bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \text{“}\sigma(x) \text{ ha colore 1”} \right].$$

e pertanto vale anche per S .

■

Teorema 137. (Teorema di van der Waerden). Per ogni colorazione di \mathbb{N} e per ogni $k < \omega$ esiste una progressione aritmetica di lunghezza k monocromatica.

Teorema 138. (Teorema di Szemerédi). Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ “abbastanza grande” e per ogni $k < \omega$ esiste una progressione aritmetica di lunghezza k contenuta in A .

A è “abbastanza grande” se ha densità di Banach positiva, ovvero

$$\limsup_{\substack{|I| \rightarrow \infty \\ I \text{ intervallo}}} \frac{|A \cap I|}{|I|} > 0.$$

1091.17 DONE Lezione 16 - <2025-11-12 Mer>

1091.17.1 Relazioni stabili

Sia $\pi \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ una relazione. Si indica indifferentemente

$$(x, z) \in \pi, \quad \pi(x, z).$$

Definizione 139. $\pi(x, z)$ è instabile (o ha la order property) se per ogni $m < \omega$ esiste una sequenza $\langle a_i, b_i : i < m \rangle$ tale che

$$i < j < m \implies \pi(a_i, b_j) \wedge \neg\pi(a_j, b_i). \quad (25)$$

Questa sequenza prende il nome di scaletta di lunghezza m per π (o ladder sequence).

Si potrebbe sostituire la (25) con una delle seguenti:

1. $i < j < m$ sse $\pi(a_i, b_j)$;
2. $i \leq j < m$ sse $\pi(a_i, b_j)$

Si ha che 1. \iff 2., ma non sono equivalenti alla (25)

Proposizione 140. LSASE:

1. π è instabile;
2. per ogni $m < \omega$ esiste $B \subseteq \mathcal{Z}$ e $\langle a_i : i < m \rangle$ (con $a_i \in \mathcal{X}$) tale che

$$\pi(a_0, B) \subsetneq \pi(a_1, B) \subsetneq \cdots \subsetneq \pi(a_{m-1}, B).$$

dove $\pi(a, B) = \{b \in B \mid \pi(a, b)\}$.

Proposizione 141. Sia $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$. LSASE:

1. $\psi(x; z)$ è stabile;
2. non esistono scalette di lunghezza ω ;
3. per ogni $\langle a_i, b_i : i < \omega \rangle$ sequenza di A -indiscernibili

$$\psi(a_0, b_1) \longleftrightarrow \psi(a_1, b_0).$$

Dimostrazione. (1. \Leftrightarrow 2.): Per compattezza.

(2. \Leftrightarrow 3.): EM thm. ■

Proposizione 142. $\pi(x, z)$ è stabile sse $\pi(x, x'; z, z')$ stabile per ogni x', z' .

Proposizione 143. Combinazioni Booleane di relazioni stabili sono stabili.

Dimostrazione. (\neg): Se $\langle a_i, b_i \mid i < m \rangle$ è una scaletta per π

$$i < j < m \implies \pi(a_i, b_j) \wedge \neg\pi(a_j, b_i).$$

allora $\langle a_{m-i+1}, b_{m-i+1} \mid i < m \rangle$ è una scaletta per $\neg\pi$.

(\wedge): Caso facile: siano $\pi(x; z), \sigma(x; z) \in \mathcal{L}(A)$. Si dimostra che

$$\pi(x; z), \sigma(x; z) \text{ stabili} \implies \pi(x; z) \wedge \sigma(x; z) \text{ stabile}$$

ovvero

$$\pi(x; z) \wedge \sigma(x; z) \text{ instabile} \implies \pi(x; z) \text{ instabile} \vee \sigma(x; z) \text{ instabile.}$$

Si supponga che $\langle a_i, b_i \mid i < \omega \rangle$ sequenza di A indiscernibili tali che

$$\pi(a_0, b_1) \wedge \sigma(a_0, b_1) \wedge \neg[\pi(a_1, b_0) \wedge \sigma(a_1, b_0)]$$

ovvero

$$\pi(a_0, b_1) \wedge \sigma(a_0, b_1) \wedge [\neg\pi(a_1, b_0) \vee \neg\sigma(a_1, b_0)]$$

- Se $\neg\pi(a_1, b_0)$ è vera, allora π è instabile;
- se $\neg\sigma(a_1, b_0)$ è vera, allora σ è instabile.

(\wedge): Caso generale. Siano π, σ relazioni arbitrarie. Si vuole dimostrare

$$\pi(x; z) \wedge \sigma(x; z) \text{ instabile} \implies \pi(x; z) \text{ instabile} \vee \sigma(x; z) \text{ instabile.}$$

Sia $\langle a_i, b_i \mid i < k \rangle$ scaletta per $\pi(x; z) \wedge \sigma(x; z)$, con k “abbastanza grande”, ovvero se $i < j < k$ si ha

$$\pi(a_i, b_j) \wedge \sigma(a_i, b_j) \wedge [\neg\pi(a_j, b_i) \vee \neg\sigma(a_j, b_i)].$$

- Coloro $i < j$ di verde se $\neg\pi(a_j, b_i)$;
- Coloro $i < j$ di blu se $\neg\sigma(a_j, b_i)$.

Per il [Teorema di Ramsey](#) per ogni m esiste k (ovvero quel k abbastanza grande) tale che per ogni colorazione di $\{0, \dots, k-1\}^{(2)}$ esiste $H \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ tale che $|H| \geq m$ e $H^{(2)}$ è monocromatico.

- Se $H^{(2)}$ è blu, allora σ ammette scaletta di lunghezza m ;
- se $H^{(2)}$ è verde, allora π ammette scaletta di lunghezza m .

Segue che almeno una dei due è instabile. Infatti, se σ non ammette scalette di lunghezza m' , allora non ammette scalette di lunghezza $m > m'$. Pertanto, per ogni $m > m'$ si ha che π ammette scaletta di lunghezza m . Segue che π ammette scalette di lunghezza m per ogni $m < \omega$. ■

Definizione 144. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}$ è approssimabile da π se per ogni $B \subseteq \mathcal{Z}$ finito esiste $a \in \mathcal{X}$ tale che

$$\pi(a; B) = \{b \in B \mid \pi(a, b)\} = \mathcal{D} \cap B.$$

Osservazione. Considero $\wp(\mathcal{Z})$ come spazio topologico, identificando con $2^{\mathcal{Z}}$ con la topologia prodotto. Quindi gli intorni di base di $\wp(\mathcal{Z})$ hanno la forma, per B finito e $C \subseteq B$

$$\{A \in \wp(\mathcal{Z}) \mid A \cap B = C\}.$$

\mathcal{D} è approssimabile da π sse \mathcal{D} è nella chiusura topologica di

$$\{\pi(a; \mathcal{Z}) \mid a \in \mathcal{X}\}.$$

Teorema 145. Se $\pi \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ è stabile e \mathcal{D} è approssimabile da π , allora esistono $\langle a_{ij} \mid i, j < m \rangle$ in \mathcal{X} tali che

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^m \pi(a_i, Z).$$

Proposizione 146. Sia $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$. LSASE:

1. \mathcal{D} approssimabile da ψ ;
2. \mathcal{D} è esternamente definibile da $\psi^{[378]}$.

Dimostrazione. (b. \Rightarrow 1.): Sia $B \subseteq \mathcal{U}^z$ finito. Sia $a \models p(x) \upharpoonright_{A, B}$. Allora $\pi(a, B) = \mathcal{D} \cap B$, ovvero che

$$\forall b \in B \left[\pi(a, b) \rightarrow b \in \mathcal{D} \right] \wedge \left[\neg \pi(a, b) \rightarrow b \notin \mathcal{D} \right]$$

Questo è ovvio poiché p è completo e $a \models p(x) \upharpoonright_{A, B}$.

(1. \Rightarrow b.): Sia

$$S(\mathcal{U}) \ni p(x) \supseteq \{\pi(x; b) \mid b \in \mathcal{D}\} \cup \{\neg \pi(x; b) \mid b \notin \mathcal{D}\}.$$

Sia $B \subseteq \mathcal{U}^z$ finito. Allora

$$p(x) \upharpoonright_B \supseteq \{\pi(x; b) \mid b \in \mathcal{D} \cap B\} \cup \{\neg \pi(x; b) \mid b \in B \setminus \mathcal{D}\}$$

Ma se a è tale che $\pi(a, B) = \mathcal{D} \cap B$, allora $a \models p(x) \upharpoonright_B$, e quindi $p(x)$ è finitamente consistente. ■

1091.18 TODO Lezione 17 - <2025-11-18 Mar>

Sia $\varphi \subseteq \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^z$ una relazione qualsiasi. Forse questo può essere generalizzato al di fuori del Modello Mostro

Definizione 147. Un insieme \mathcal{D} è approssimabile da $\varphi(x; z)$ dal basso se vale una delle seguenti equivalenti:

- per ogni $B \subseteq \mathcal{U}^z$ finito esiste $a \in \mathcal{U}^x$ tale che

$$\mathcal{D} \cap B = \varphi(a; B) := \varphi(a; \mathcal{U}^z) \cap B$$

$$\text{e } \varphi(a; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D};$$

- per ogni $B \subseteq \mathcal{D}$ finito esiste $a \in \mathcal{U}^x$ tale che

$$B \subseteq \varphi(a; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D}.$$

Teorema 148. Se $\varphi(x; z)$ è stabile e \mathcal{D} è approssimabile da $\varphi(x; z)$ allora esiste $\langle a_{ij} \mid i, j < m \rangle$ in \mathcal{U}^x tale che

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^m \varphi(a_{ij}, \mathcal{U}^z).$$

Lemma 149. Se $\varphi(x; z)$ è stabile, \mathcal{D} approssimato da $\varphi(x; z)$ dal basso, allora esiste $\langle a_i \mid i < m \rangle$ tale che

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \varphi(a_i, \mathcal{U}^z).$$

Dimostrazione. Costruiamo una catena $\langle a_i, b_i \mid i < m \rangle$ come segue:

1. Sia $b_0 \in \mathcal{D}$ e a_0 tale che $b_0 \in \varphi(a_0; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D}$.
2. Sia $b_1 \in \mathcal{D} \setminus \varphi(a_0; \mathcal{U}^z)$ e a_1 tale che $\{b_0, b_1\} \subseteq \varphi(a_1; \mathcal{U}^z)$.
3. Sia $b_2 \in \mathcal{D} \setminus (\varphi(a_0; \mathcal{U}^z) \cup \varphi(a_1; \mathcal{U}^z))$ e a_2 tale che $\{b_0, b_1, b_2\} \subseteq \varphi(a_2; \mathcal{U}^z)$.

Il b_i esiste poiché, se quell'insieme fosse vuoto, allora si avrebbe l'uguaglianza e quindi la tesi; gli a_i esistono per ipotesi di approssimazione dal basso. Per stabilità:

$$i < j \implies \neg \varphi(a_i, b_j) \wedge \varphi(a_j; b_i).$$

Quindi la costruzione si ferma in un passo finito. ■

Lemma 150. Se $\varphi(x; z)$ è stabile e \mathcal{D} è approssimata da $\varphi(x; z)$ allora \mathcal{D} è approssimata dal basso dalla formula

$$\psi(x_1, \dots, x_m; z) = \bigwedge_{i=1}^m \varphi(x_i; z).$$

Dimostrazione. Neghiamo il lemma e sia $B \subseteq \mathcal{D}$ un controesempio.

Costruiamo una catena $\langle a_i, b_i \mid i < m \rangle$ come segue:

1. a_0 e b_0 sono tali che

$$B \subseteq \varphi(a_0; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D}, \quad b_0 \in \varphi(a_0; \mathcal{U}^z) \setminus \mathcal{D}.$$

2. a_1 e b_1 sono tali che

$$B \subseteq \varphi(a_1; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D} \setminus \{b_0\}, \quad b_1 \in [\varphi(a_0; \mathcal{U}^z) \cap \varphi(a_1; \mathcal{U}^z)] \setminus \mathcal{D}.$$

3. a_2 e b_2 sono tali che

$$B \subseteq \varphi(a_2; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D} \setminus \{b_0, b_1\}, \quad b_2 \in [\varphi(a_0; \mathcal{U}^z) \cap \varphi(a_1; \mathcal{U}^z) \cap \varphi(a_2; \mathcal{U}^z)] \setminus \mathcal{D}.$$

Per la stabilità

$$i < j \implies \varphi(a_i, b_j) \wedge \neg\varphi(a_j, b_i)$$

e quindi la scaletta deve terminare. ■

Teorema 151. LSASE:

1. $\varphi(x; z)$ è stabile;
2. ogni $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$ esternamente definibile è definibile
3. detta κ la cardinalità di \mathcal{U} , ci sono $\leq \kappa$ insiemi esternamente definibile da $\varphi(x; z)$, ovvero $|S_\varphi(\mathcal{U})| \leq \kappa$.
4. ci sono $< 2^\kappa$ insiemi esternamente definibile da $\varphi(x; z)$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): versione debole del Teorema 428.

(2. \Rightarrow 3.): ovvia.

(3. \Rightarrow 4.): ovvia.

(Cenno $\neg 1. \Rightarrow \neg 4.$): Per ipotesi esiste una scaletta $\langle a_i, b_i \mid i \in I \rangle$ con $(I, <)$ modello saturo di T_{dlo} di cardinalità κ .

Esercizio: esistono 2^κ tagli di Dedekind in I , ovvero insiemi $C \subseteq I$ chiusi all'ingiù rispetto a $<$.

Per ogni taglio C considero il tipo

$$p_C(x) = \{\neg\varphi(x; b_i) \mid i \in C\} \cup \{\varphi(x; b_i) \mid i \in I \setminus C\}.$$

Esercizio: siccome $\langle a_i, b_i \mid i \in I \rangle$ è una scaletta, per ogni B finito sia $B \cap C < j < B \setminus C$. ■

$$a_j \models p_C(x) \upharpoonright_B.$$

Definizione 152. Il rango binario (di Shelah) di $\varphi(x; z)$??? RECUPERARE

Teorema 153. LSASE:

1. $\varphi(x; z)$ stabile;
2. il rango binario di $\varphi(x; z)$ è finito.

Dimostrazione. (Cenno $\neg 1. \Rightarrow \neg 2.$): Ci sono 2^κ insiemi esternamente definibili.

Esercizio: Esiste un b_\emptyset tale che 2^κ insiemi esternamente definibili contengano b_\emptyset e 2^κ insiemi esternamente definibili che non contengano b_\emptyset .

Iterando ottengo una sequenza $\langle b_s \mid s \in 2^{<\omega} \rangle$

(Cenno $\neg 2. \Rightarrow \neg 1.$): se rango ∞ per compattezza esiste albero di altezza κ e quindi $|S\varphi(\mathcal{U})| = 2^\kappa$. (Poiché $2^{<\kappa} = \kappa$). ■

1091.19 TODO Lezione 18 - <2025-11-25 Mar>

1091.19.1 Lascar invariance

Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$ insieme arbitrario, denotiamo con

$$f\mathcal{D} = f[\mathcal{D}] = \{fa \mid a \in \mathcal{D}\}, \quad \mathcal{O}(\mathcal{D}/A) = \{f\mathcal{D} \mid f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)\}.$$

Definizione 154. \mathcal{D} è Lascar invariante su A se è invariante su M per ogni $M \supseteq A$.

Osservazione. 1. Se A è un modello, Lascar invariante su A significa invariante su A .

2. Se $\text{acl}(A)$ è un modello^[379], allora “Lascar invariante su A ” = “invariante su $\text{acl}(A)$ ”

Domanda 1: quanti sono gli insiemi Lascar invarianti su A ?

Proposizione 155. Sia $\lambda = |\mathcal{L}_z(A)|$, con $|z| < \kappa$. Ci sono al più 2^{2^λ} insiemi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$ Lascar invarianti su A .

Dimostrazione. Sia $N \supseteq A$ modello, $|N| = \lambda$. Allora ogni insieme Lascar invariante su A è invariante su N .

Su N ci sono $2^{2^{|N|}}$ insiemi invarianti su N . ■

Teorema 156. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$ e $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo. Sia $\lambda = |\mathcal{L}_z(A)|$, con $|z| < \kappa$. LSASE:

1. \mathcal{D} è Lascar invariante su A ;
2. ogni insieme in $\mathcal{O}(\mathcal{D}/A)$ è Lascar invariante su A ;
3. $\mathcal{O}(\mathcal{D}/A)$ ha cardinalità $\leq 2^{2^\lambda}$;
4. $\mathcal{O}(\mathcal{D}/A)$ ha cardinalità $< \kappa$ (si dice che la cardinalità di $\mathcal{O}(\mathcal{D}/A)$ è bounded).
5. $c_0 \in \mathcal{D} \longleftrightarrow c_1 \in \mathcal{D}$ per ogni sequenza $\langle c_i \mid i < \omega \rangle$ di indiscernibili su A .

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Se $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ allora \mathcal{D} è invariante su $M \supseteq A$ sse $f\mathcal{D}$ è invariante su $f[M] \supseteq A$, $f[M]$ modello.

(2. \Rightarrow 3.): Ovvio per la Proposizione 155.

(3. \Rightarrow 4.): Perché κ è inaccessibile.

(4. \Rightarrow 5.): Sia $\langle c_i \mid i < \kappa \rangle$ di A indiscernibili (vedere esercizio).

Per assurdo, supponiamo che $\neg(c_0 \in \mathcal{D} \longleftrightarrow c_1 \in \mathcal{D})$. Definiamo una relazione di equivalenza su \mathcal{U}^z

$$E(u, v) \iff \forall \mathcal{C} \in \mathcal{O}(\mathcal{D}/A) (u \in \mathcal{C} \longleftrightarrow v \in \mathcal{C})$$

Questa non è una relazione definibile. E è invariante su A ^[380]. Per ipotesi, $|\mathcal{O}(\mathcal{D}/A)| = \mu < \kappa$. Quindi E ha al più 2^μ classi.

Ma $\neg(c_0 \in \mathcal{D} \longleftrightarrow c_1 \in \mathcal{D})$, quindi $\neg E(c_0, c_1)$, e quindi

$$\forall i < j < \kappa \left(\neg E(c_i, c_j) \right).$$

Quindi E ha κ classi. Assurdo.

(5. \Rightarrow 1.): Fisso un modello $M \supseteq A$ arbitrario. Devo mostrare che \mathcal{D} è invariante su M .

Prendo $a \equiv_M b$ arbitrari, e mostro che $a \in \mathcal{D} \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}$. Prendo $p(x) \in S(\mathcal{U})$ tipo globale coerente di $\text{tp}(a/M) = \text{tp}(b/M)$ (finitamente soddisfacibili poiché M è modello).

Definisco $\langle c_i \mid i < \omega \rangle$ tale che

$$c_i \models p(x) \upharpoonright_{M, c \upharpoonright i, a, b}$$

Quindi

$$\begin{aligned} a, c_0, c_1, \dots \\ b, c_0, c_1, \dots \end{aligned}$$

è una sequenza di Morley su M di $p(x)$ e pertanto, per ipotesi

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{D} &\longleftrightarrow c_0 \in \mathcal{D} \\ b \in \mathcal{D} &\longleftrightarrow c_0 \in \mathcal{D} \end{aligned}$$

e pertanto $a \in \mathcal{D} \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}$. ■

Definizione 157. Il tipo di Lascar di a su A è $\mathcal{L}(a/A)$,

$$\mathcal{L}(a/A) := \bigcap \{\mathcal{D} \mid a \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \text{ Lascar invariante su } A\}$$

Definizione 158. Il grafo di Lascar su A in \mathcal{U}^x è costruito come segue: per ogni $a, b \in \mathcal{U}^x$, c'è un arco tra a e b se

$$a \equiv_M b \quad \text{per qualche } M \supseteq A.$$

Si definisce $d_A(a, b)$ come il minimo n tale che

$$a = a_0 \equiv_{M_0} a_1 \equiv_{M_1} \cdots \equiv_{M_{n-2}} a_{n-1} \equiv_{M_{n-1}} a_n = b$$

o ∞ altrimenti.

Proposizione 159. Si ha che

$$\mathcal{L}(a/A) = \{b \mid d_A(a, b) < \infty\}.$$

Dimostrazione. (\supseteq): Sia $a \in \mathcal{D}$ Lascar invariante su A arbitrario. Devo mostrare che \mathcal{D} contiene ogni b tale che $d_A(a, b) < \infty$. Sia quindi

$$a = a_0 \equiv_{M_0} a_1 \equiv_{M_1} \cdots \equiv_{M_{n-2}} a_{n-1} \equiv_{M_{n-1}} a_n = b$$

- Esiste $f_0 \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M_0)$ tale che $f_0(a_0 = a_1)$
- Esiste $f_1 \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M_1)$ tale che $f_1(a_1 = a_2)$
- ...
- Esiste $f_{n-1} \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M_{n-1})$ tale che $f_{n-1}(a_{n-1} = a_n)$

Poiché ciascun f_i fissa un modello che fissa A , allora fissa anche \mathcal{D} , e pertanto $f_{n-1} \circ \dots \circ f_0$ fissa \mathcal{D} :

$$f_{n-1} \circ \dots \circ f_0 \mathcal{D} = \mathcal{D} \implies b = f_{n-1} \circ \dots \circ f_0 a \in \mathcal{D}$$

(\subseteq): basta mostrare che $\{b \mid d_A(a, b) < \infty\}$ è Lascar invariante. Sia b tale che $d_A(a, b) < \infty$:

$$a = a_0 \equiv_{M_0} a_1 \equiv_{M_1} \dots \equiv_{M_{n-2}} a_{n-1} \equiv_{M_{n-1}} a_n = b.$$

Sia $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M)$, con $M \supseteq A$. Voglio mostrare che $d_A(a, fb) < \infty$

$$a = a_0 \equiv_{M_0} a_1 \equiv_{M_1} \dots \equiv_{M_{n-2}} a_{n-1} \equiv_{M_{n-1}} a_n = b \equiv_M fb. \blacksquare$$

Definizione 160. Un tipo $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ è Lascar invariante su A se $\mathcal{D}_{p\varphi}$ è Lascar invariante su A .

La definizione si intende per tipi $q(x) = \bigcup_{\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{U})} p_\varphi(x)$, con $p_\varphi \in S_\varphi(\mathcal{U})$.

Osservazione. Siano $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ e $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. Se $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$ allora $p(x)$ è Lascar invariante su A .

Diciamo che $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ è un Lascar coerede su A se è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$.

Teorema 161. (falso). Se $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$, allora esiste $p(x) \in S(\mathcal{U})$, $p(x) \supseteq q(x)$ finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$.

Affinché il teorema valga, mi serve la seguente proprietà: per ogni $\theta(x), \rho(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$: $\theta(x) \vee \rho(x)$ soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$ allora o $\theta(x)$ è soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$ o $\rho(x)$ è soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$.

Esempio 162. Sia $\mathcal{U} \succeq (\mathbb{Q}, <)$, e considero la formula $(x < a) \vee (x \geq a)$.

1091.20 TODO Lezione 19 - <2025-11-26 Mer>

Teorema 163. Se $\varphi(x; z), \psi(x; z) \in \mathcal{L}$ sono stabili, $b \in \mathcal{U}^z$ e

$$\varphi(x; b) \vee \psi(x; b)$$

è soddisfatta in ogni $M \supseteq A$ allora:

- o $\varphi(x; b)$ è soddisfatta in ogni $M \supseteq A$;
- o $\psi(x; b)$ è soddisfatta in ogni $M \supseteq A$.

Osservazione. Si dice “quasi soddisfatta in A ” il luogo di “è soddisfatta in ogni $M \supseteq A$ ”. La proprietà di “quasi soddisfacibilità” è partition-regular.

Questo teorema si trova in .

Proposizione 164. Se $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ è stabile, $b \in \mathcal{U}^z$, allora

- o $\varphi(x; b)$ è soddisfatta in ogni modello M ;
- o $\neg\varphi(x; b)$ è soddisfatta in ogni modello M .

ovvero $\varphi(x; b)$ è quasi soddisfatta in \emptyset oppure $\neg\varphi(x; b)$ è quasi soddisfatta in \emptyset .

Dimostrazione. Per disegno ■

Lemma 165. Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ quasi soddisfacibile in A . Allora esiste $\theta(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}(A)$ consistente, con $|x_i| = |x|$ tale che

$$\theta(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \varphi(x_i).$$

Dimostrazione. Sia $M \supseteq A$, sia \bar{c} una enumerazione di M^x , e sia $q(\bar{x}) := \text{tp}(\bar{c}/A)$.

Ogni realizzazione di:

$$q(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(x_i) \mid i < |\bar{c}|\}.$$

enumera N^x , dove $N \cong_A M$ e N non soddisfa $\varphi(x)$, quindi $q(\bar{x}) \cup \{\neg\varphi(x_i) \mid i < |\bar{c}|\}$ è inconsistente.

Pertanto esiste $\theta(x_1, \dots, x_n) \in q(\bar{x})$ tale che

$$\theta(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \varphi(x_i). \quad \blacksquare$$

Osservazione. Nel dimostrare il Teorema 163, si ha come ipotesi che $\varphi(x; b) \vee \psi(x; b)$ sia quasi soddisfacibile in A . Per il Lemma (165), questo è equivalente a

$$\theta(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n [\varphi(x_i; b) \vee \psi(x_i; b)]$$

per qualche $\theta \in \mathcal{L}(A)$, ancora equivalente a

$$\theta(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \varphi(x_i; b) \vee \bigvee_{i=1}^n \psi(x_i; b)$$

per qualche $\theta \in \mathcal{L}(A)$. ??

Posso riscrivere il Teorema 163 come segue:

Teorema 166. Se $\varphi(x; z), \psi(x; z) \in \mathcal{L}$ sono stabili, $b \in \mathcal{U}^z$ e

$$\theta(x) \rightarrow \varphi(x; b) \vee \psi(x; b)$$

per qualche $\theta(x) \in \mathcal{L}(A)$. Allora:

- o $\varphi(x; b)$ è soddisfatta in ogni $M \supseteq A$;
- o $\psi(x; b)$ è soddisfatta in ogni $M \supseteq A$.

Dimostrazione. Ripete quella della Proposizione 164 ma si scelgono gli a_{ij} che soddisfano $\theta(x)$. ■

Osservazione. La stabilità della $\psi(x; z)$ non si usa.

Corollario 167. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ stabile. Sia $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$. Allora esiste $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ tale che $q(x) \cup p(x)$ è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$.

Dimostrazione. Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}_{\varphi^\pm}(\mathcal{U})$ massimale tale che $q(x) \cup p(x)$ è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$. Voglio mostrare che $p(x)$ è completo.

Se per assurdo esistesse $\varphi(x; b)$ tale che $\varphi(x; b), \neg\varphi(x; b) \notin p(x)$, quindi esiste $\alpha(x) \in q(x)$ e $\theta(x; b_1, \dots, b_n) \in \{\wedge\}$ tale che

$$\begin{aligned}\alpha(x) \wedge \theta(x; b_1, \dots, b_n) \wedge \varphi(x; b) \\ \alpha(x) \wedge \theta(x; b_1, \dots, b_n) \wedge \neg\varphi(x; b)\end{aligned}$$

non sono soddisfacibili in ogni $M \supseteq A$. Ma la congiunzione delle due formule è soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$, in quanto elemento di $p(x) \cup q(x)$.

Ma $\alpha(x) \wedge \theta(x; z_1, \dots, z_n) \wedge \varphi(x; z)$ è stabile, e pertanto per il teorema si ha la contraddizione. ■

Teorema 168. (T stabile). Se $a \perp_M b$ allora $b \perp_M a$.

Teorema 169. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(M)$ stabile. Se $a \perp_M b$ e $\varphi(a, b)$, allora $\varphi(a; M^z) \neq \emptyset$.

Lemma 170. Se $a \perp_M b$, allora esiste $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U} \cong_{M,b} \mathcal{V}$ tale che $a \perp_M \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Sia \bar{c} una enumerazione di \mathcal{U} , e sia $p(\bar{w}, z) = \text{tp}(\bar{c}, b/M)$. Considero

$$p(\bar{w}, b) \cup \{\neg\varphi(a, \bar{w}) \mid \varphi(x; \bar{w}) \in \mathcal{L}(M), \varphi(M^x, \bar{c}) = \emptyset\}$$

Un elemento che realizza questo tipo enumera \mathcal{V} .

Supponiamo che il tipo sia inconsistente. Allora

$$\forall \bar{w} [\theta(\bar{w}, b) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \varphi_i(a, \bar{w})]$$

ma siccome $a \perp_M b$ allora esiste $a' \in M$ tale che

$$\forall \bar{w} [\theta(\bar{w}, b) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \varphi_i(a', \bar{w})]$$

Ponendo $\bar{w} = \bar{c}$ ottengo

$$\theta(\bar{c}, b) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \varphi_i(a', \bar{c})$$

quindi $\varphi_i(M^x, \bar{c}) \neq \emptyset$. Assurdo. ■

Dimostrazione. (del Teorema 169). Sia $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$, $\mathcal{V} \cong_{M,b} \mathcal{U}$ tale che $a \perp_M \mathcal{V}$.

Allora $\varphi(a; \mathcal{V}^z)$ è un insieme esternamente definibile (nella prospettiva di \mathcal{V}). Ma $\varphi(x; z)$ è stabile, quindi $\varphi(a; \mathcal{V}^z) = \psi(\mathcal{V}^z)$ per qualche $\psi(z) \in \mathcal{L}(\mathcal{V})$.

Per *non splitting* se $b_1, b_2 \in \mathcal{V}^z$ e $b_1 \equiv_M b_2$, siccome $a \perp_M \mathcal{V}$ allora $b_1 \equiv_{M,a} b_2$.

Quindi $\varphi(a, b_1) \longleftrightarrow \varphi(a, b_2)$ e pertanto $\psi(\mathcal{V}^z) = \varphi(a, \mathcal{V}^z)$ invariante per $\text{Aut}(\mathcal{V}/M)$, quindi esiste $\theta(z) \in \mathcal{L}(M)$ tale che $\psi(\mathcal{V}^z) = \theta(\mathcal{V}^z)$.

Ma $\theta(M^z) \neq \emptyset$, quindi anche $\varphi(a, M^x) \neq \emptyset$. ■

1091.21 TODO Lezione 20 - <2025-12-02 Mar>

Recap teorema dell'ultima volta:

Teorema 171. (T stabile). Per ogni $M \models T$:

$$a \perp_M b \implies b \perp_M a.$$

Teorema 172. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ stabile. Se $a \perp_M b$ e $\varphi(a, b)$, allora

$$\varphi(a, M^z) \neq \emptyset.$$

Teorema 173. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ stabile, $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$, $A \subseteq \mathcal{U}$. LSASE:

1. $\mathcal{D}_{p,\varphi} \in \text{acl}^{\text{eq}} A^{[381]}$;
2. $p(x)$ è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$;
3. $p(x)$ è Lascar invariante su $A^{[382]}$;
4. $p(x)$ è invariante su $\text{acl}^{\text{eq}} A$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Fissiamo $M \supseteq A$ e fissiamo $\varphi(x; b) \in p(x)$, e mostriamo che $\varphi(M^x, b) \neq \emptyset$.

Nota: in realtà dovremmo mostrare che ogni $\theta(x; b_1, \dots, b_n) \in \{\wedge\}p$ è finitamente soddisfacibile.
Vedi sotto

Sia $a \models p(x) \upharpoonright_M$, allora

$$\varphi(a; M^z) = \mathcal{D}_{p,\varphi} \cap M^z.$$

Possiamo assumere che $b \perp_M a$ (se così non fosse potremmo trovare $a' \models p(x) \upharpoonright_M$ che soddisfa questa condizione).

Quindi $\varphi(a, b) \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}_{p,\theta}$: se non lo fosse, esisterebbe $b' \in M^x$ tale che $\varphi(a, b') \not\longleftrightarrow b' \in \mathcal{D}_{p,\theta}$ contraddicendo $\varphi(a; M^z) = \mathcal{D}_{p,\varphi} \cap M^z$.

Siccome $b \in \mathcal{D}_{p,\varphi}$, ottengo $\varphi(a, b)$, e per simmetria ottengo $\varphi(M^x, b) \neq \emptyset$. ■

Se invece di $\varphi(x; b)$ prendiamo $\theta(x; b_1, \dots, b_n) \in \{\wedge\}p$ osserviamo che $\theta(x; z_1, \dots, z_n)$ è stabile e che $\mathcal{D}_{p,\theta}$ è finita.

1091.21.1 Stazionarietà

Definizione 174. Sia $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$. $q(x)$ è stazionario (su A) se esiste un unico tipo $p(x) \in S(\mathcal{U})$ tale che:

- $p(x) \supseteq q(x)$;
- $p(x)$ è Lascar invariante su A .

Teorema 175. (T stabile). Ogni $q(x) \in S(\text{acl}^{\text{eq}} A)^{[383]}$ è stazionario su A .

Lemma 176. (Lemma misterioso di Harrington). Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ stabile, $p(x) \in S_{\varphi}(\mathcal{U})$, $q(z) \in S_{\varphi^{\text{op}}}(\mathcal{U})^{[384]}$ invarianti su M .

Per ogni $a \models p(x) \upharpoonright M$, $b \models q(z) \upharpoonright M$ abbiamo

$$a \in D_{q, \varphi^{\text{op}}} \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}_{p, \varphi}.$$

Dimostrazione. Possiamo assumere che $a \perp\!\!\!\perp_M b$. Affermo che

$$\varphi(a; b) \longleftrightarrow a \in \mathcal{D}_{q, \varphi^{\text{op}}}$$

altrimenti $\varphi(a; b) \not\longleftrightarrow a \in \mathcal{D}_{q, \varphi^{\text{op}}}$. Questa è una formula $\psi(a, b)$ a parametri in M .

Per $a \perp\!\!\!\perp_M b$ ottengo che esiste $a' \in M^x$ tale che

$$\varphi(a'; b) \not\longleftrightarrow a' \in \mathcal{D}_{q, \varphi^{\text{op}}}$$

e pertanto $\varphi(M^x, b) \neq \mathcal{D}_{q, \varphi^{\text{op}}} \cap M^x$. Quindi $b \not\models q(z) \upharpoonright M$.

Per simmetria $b \perp\!\!\!\perp_M a$, quindi

$$\varphi(a; b) \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}_{p, \varphi}.$$

Segue la tesi. ■

Esercizio: (T stabile). Ogni $q(x) \in S(M)^{[589]}$ è stazionario su M .

Dimostrazione. (del Teorema 383). L'esistenza di $p(x) \supseteq q(x)$ globale e Lascar invariante su A segue dall'esistenza di un coerede di Lascar globale.

Supponiamo che $p_1(x), p_2(x) \in S(\mathcal{U})$ estendono $q(x)$. Fissiamo $\varphi(x; z)$ e mostriamo che

$$\mathcal{D}_{p_1, \varphi} = \mathcal{D}_{p_2, \varphi}.$$

Fissiamo $b \in \mathcal{U}^z$ e mostriamo che

$$b \in \mathcal{D}_{p_1, \varphi} \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}_{p_2, \varphi}.$$

Sia $t(z) \in S(\mathcal{U})$ Lascar-coerede di $\text{tp}(b / \text{acl}^{\text{eq}} A)$. Fisso $M \supseteq A$ arbitrario.

Siano $a_i \models p_i(x) \upharpoonright M$. Allora per il lemma:

$$a_i \in \mathcal{D}_{t, \varphi^{\text{op}}} \longleftrightarrow b \in \mathcal{D}_{p_i, \varphi}.$$

Ma

$$a_1 \in \mathcal{D}_{t, \varphi^{\text{op}}} \longleftrightarrow a_2 \in \mathcal{D}_{t, \varphi^{\text{op}}}$$

in quanto $\mathcal{D}_{t, \varphi^{\text{op}}} \in \text{acl}^{\text{eq}} A \subseteq M$. ■

(idea un po' incasinata).

1091.22 TODO Lezione 21 - <2025-12-03 Mer>

ESERCIZIO BONUS: correggere il capitolo 18.

Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ invariante su A se

$$\mathcal{D}_{p,\varphi} = \{b \in \mathcal{U}^z \mid \varphi(x; b) \in p\}$$

invariante su A .

Sia X un insieme, G un gruppo che agisce su X . Sia $D \subseteq X$.

Definizione 177. Si dice che D è G -syndetico se un numero finito di G -traslazioni di D ricopre X , ovvero esiste $C \subseteq G$ finito tale che

$$X = \bigcup C \cdot D := \bigcup \{gD \mid g \in C\}.$$

Definizione 178. Si dice che D è G -thick se per ogni sottoinsieme $C \subseteq G$ finito

$$\bigcap C \cdot D \neq \emptyset.$$

Proposizione 179. LSASE:

1. D non è G -syndetico;
2. $X \setminus D^{[385]}$ è G -thick.

Dimostrazione. Per ogni $C \subseteq G$ finito si ha

$$X \neq \bigcup C \cdot D$$

sse $\emptyset \neq \bigcap C \cdot (X \setminus D)$. ■

Corollario 180. LSASE

1. D è G -thick;
2. per ogni $C \subseteq X$ G -syndetici: $D \cap C \neq \emptyset$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Se $D \cap C = \emptyset$ allora $D \subseteq \neg C$ quindi $\neg C$ è G -thick. Per la Proposizione 385 segue che C non è G -syndetico.

($\neg 1. \Rightarrow \neg 2.$): $\neg D$ è G -syndetico, ma $D \cap \neg D = \emptyset$. ■

D'ora in avanti, considereremo:

- $X \subseteq \mathcal{U}^x$ insieme tipo-definibile su A ;
- $Z \subseteq \mathcal{U}^z$ insieme tipo-definibile su A .

- $G \leq \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$.

Vedi “**Azione del gruppo degli automorfismi**”

D’ora in avanti, $D = \varphi(X; b) := \varphi(\mathcal{U}^x; b) \cap X$ per $b \in Z$, $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$.

Quindi se $g \in G$ allora $gD = \varphi(X, gb)$.

Si scriverà

- $L(Z)$ per indicare uno dei seguenti insiemi:

$$\begin{aligned} &\{\varphi(x; b) \mid b \in Z\} \\ &\{\varphi(X; b) \mid b \in Z\} \end{aligned}$$

- $\Sigma_G(x) := \{\theta \in L(Z) \mid \theta(x) \text{ è } G\text{-syndetico}\}$.

Notazione: in questa sezione, scriveremo $S(Z)$ per indicare l’insieme dei tipi massimali finitamente soddisfacibili in X con parametri in Z .

Teorema 181. Sia $p(x) \in S(Z)$. LSASE:

1. $p(x)$ è G -invariante
2. $p(x) \vdash \Sigma_G(x)$
3. $p(x)$ è G -thick (ogni formula in $\{\wedge\}$ p è G -thick).

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Se serve vedi sulla blackboard.

(2. \Rightarrow 3.): Se D è G -syndetico, se $p(x) \vdash x \in \neg D$ dove $\neg D$ non è G -thick, quindi $\neg 2$. ■

Corollario 182. Assumiamo che esista $p(x) \in S(Z)$ che sia G -thick. Allora

1. per ogni $D \in L(Z)$: D e $\neg D$ non sono entrambi G -syndetici;
2. $\Sigma_G(x)$ è finitamente consistente;
3. ogni G -syndetico è G -thick.

Dimostrazione. (solo di 3.). Se D è G -syndetico, se non fosse G -thick allora $\neg D$ è G -syndetico. Questo contraddice 1. ■

La seguente è una notazione *non standard*.

Definizione 183. Un insieme $D \in L(Z)$ è G -wide se per ogni partizione finita di D in insiemi in $L(Z)$, contiene un insieme G -thick.

Teorema 184. Sia $D \in L(Z)$. LSASE:

1. $\Sigma_G(x) \cup \{x \in D\}$ è finitamente consistente in X ;
2. esiste $p(x) \in S(Z)$ G -thick e $p(x) \vdash x \in D$;
3. D è G -wide.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Per 1. esiste $p(x) \in S(Z)$ tale che $p(x) \vdash \Sigma_G(x) \cup \{x \in D\}$. Per il teorema, $p(x)$ è G -thick.

(2. \Rightarrow 3.): Se C_1, \dots, C_n sono un ricoprimento di D e $p(x) \vdash x \in D$ è G -thick, allora $p(x) \vdash x \in C_i$ per qualche i . Quindi C_i è G -thick.

(2. \Rightarrow 1.): per il Teorema.

(3. \Rightarrow 2.): Sia $p(x) \supseteq \{x \in D\}$ massimale tra i $L(Z)$ -tipi che sono G -wide^[386].

Basta mostrare che $p(x)$ è completo.

Altrimenti sia $\theta(x)$ tale che $\theta(x), \neg\theta(x) \notin p(x)$. Quindi esiste $\psi_i(x) \in \{\wedge\} p$ tale che

$$\psi_1(x) \wedge \theta(x), \quad \psi_2(x) \wedge \neg\theta(x)$$

non sono G -wide.

Sia quindi C_1, \dots, C_n un ricoprimento di X che testimonia non G -wideness di entrambe. Ma C_1, \dots, C_n ricopre

$$\psi_1(x) \wedge \psi_2(x) \in p. \quad \blacksquare$$

1091.23 Lezione 22 - <2025-12-09 Mar>

D è G -thick se $\forall C \subseteq G$ finito

$$\bigcap C \cdot D \neq \emptyset$$

Si ha che $p \in S_\varphi(\mathcal{U})$ è G -invariante se e solo se

$$\forall \theta(x; b) \in \{\wedge\} p \quad \theta(\mathcal{U}^x; b) \text{ è } G\text{-thick.}$$

Definizione 185. $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è G -thick se

$$\forall \theta(x; b) \in \{\wedge\} q \quad \theta(\mathcal{U}^x; b) \text{ è } G\text{-thick.}$$

Osservazione. $p(x) \in S_x(\mathcal{U})$ è G -invariante sse è G -thick.

Domanda: se $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è G -thick, esiste $p(x) \in S(\mathcal{U})$ tale che $p(x) \supseteq q(x)$ è G -invariante? **NO.**

Nota: D'ora in avanti gli insiemi sono definibili

Definizione 186. D è G -wide se per ogni C_1, \dots, C_n ricoprimento di D un C_i è G -thick.

Fatto: $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è G -wide sse esiste $q(x) \subseteq p(x) \in S(\mathcal{U})$: G -thick

DIGRESSIONE SUL FORKING

Definizione 187. D è non-dividing se per ogni $B \subseteq G$ infinito, e per ogni $n < \omega$ esiste $C \subseteq B$ tale che

$$|C| > n, \quad \bigcap C \cdot D \neq \emptyset.$$

Definizione 188. D è non-forking se per ogni C_1, \dots, C_n ricoprimento di D , un C_i è non-dividing.

Osservazione. Se T è NIP (classe di teorie che include le teorie stabili)

$$D \text{ non-divide} \iff D \text{ è } H\text{-thick}$$

dove $H = \text{Aut}^f(\mathcal{U}/A)$.

Nota: $\text{Aut}^f(\mathcal{U}/A) \leq \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ sottogruppo generato dagli automorfismi che fissano un qualche $M \supseteq A$.

Nota: se T è stabile allora

$$\text{Aut}^f(\mathcal{U}/A) = \text{Aut}(\mathcal{U}/aclA).$$

FINE DIGRESSIONE

Siano ora:

$$\mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}^x, \quad \mathcal{X} \subseteq \mathcal{U}^z, \quad \mathcal{D} \subseteq \mathcal{X}$$

Definizione 189. \mathcal{D} è *G-syndetic* se $\exists C \subseteq G$ finito tale che

$$\bigcup C \cdot \mathcal{D} \supseteq \mathcal{X}$$

Osservazione. \mathcal{D} è *G-thick* se $\forall C \subseteq G$ finito

$$\bigcap C \cdot \mathcal{D} \neq \emptyset.$$

Fatto: \mathcal{D} non è *G-syndetic* sse $\neg\mathcal{D}$ è *G-thick*.

Si ricorda che:

$$\Sigma_G(x) = \{x \in \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ è } G\text{-syndetic}\}$$

Nota: $x \in \mathcal{D}$ è una formula in quanto \mathcal{D} è definibile

Fatto $\Sigma_G(x)$ finitamente consistente sse esiste $p(x) \in S_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})^{[387]}$ *G-invariante*.

Fatto: $\Sigma_G(x)$ è finitamente consistente con $x \in \mathcal{D}$ sse esiste $p(x) \in S_{\mathcal{X}}(\mathcal{Z})$ *G-invariante/G thick*, e $p(x) \vdash x \in \mathcal{D}$ sse \mathcal{D} è *G-wide*.

Definizione 190. \mathcal{D} è *fortemente G-syndetic* se $\forall C \subseteq \mathcal{D}$ finito $\bigcap C \cdot \mathcal{D}$ è *G-syndetic*.

(“Ufficialmente” questo si chiama insieme *thickly syndetic*).

Definizione 191. \mathcal{D} è *debolmente G-thick* se $\exists C \subseteq \mathcal{D}$ finito $\bigcup C \cdot \mathcal{D}$ è *G-thick*.

(“Ufficialmente” questo si chiama insieme *weakly syndetic*).

Teorema 192. Se \mathcal{D}, \mathcal{C} sono fortemente *G-syndetic*, allora $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ è fortemente *G-syndetic*.

Dimostrazione. Sia $C \subseteq G$ finito. Mostriamo che $\bigcap C(\mathcal{D} \cap \mathcal{C})$ è *G-syndetic*.

$$\bigcap C(\mathcal{D} \cap \mathcal{C}) = \underbrace{\left(\bigcap C\mathcal{D} \right)}_{\mathcal{D}'} \cap \underbrace{\left(\bigcap C\mathcal{C} \right)}_{\mathcal{C}'} = \mathcal{D}' \cap \mathcal{C}'$$

con \mathcal{D}' e \mathcal{C}' che sono G -syndetici.

Fisso $F \subseteq G$ finito tale che $\bigcup F\mathcal{C}' = \mathcal{X}$, e mostro che $\bigcup F(\mathcal{D}' \cap \mathcal{C}')$ è G -syndetic.

$$\bigcup F(\mathcal{D}' \cap \mathcal{C}') \supseteq \left(\bigcap F\mathcal{D}' \right) \cap \left(\bigcup F\mathcal{C}' \right) = \left(\bigcap F\mathcal{D}' \right)$$

Infatti si ha che

$$\begin{aligned} \bigcup F(\mathcal{D}' \cap \mathcal{C}') &= \bigcup_{f \in F} (f\mathcal{D}' \cap f\mathcal{C}') \supseteq \bigcup_{f \in F} \left(\left(\bigcap_{f' \in F} f'\mathcal{D}' \right) \cap f\mathcal{C}' \right) \\ &= \left(\bigcap_{f' \in F} f'\mathcal{D}' \right) \cap \left(\bigcup_{f \in F} f\mathcal{C}' \right) = \left(\bigcap F\mathcal{D}' \right) \cap \left(\bigcup F\mathcal{C}' \right). \end{aligned}$$

Pertanto, siccome $\bigcup F\mathcal{C}' = \mathcal{X}$, si ha che

$$\bigcup F(\mathcal{D}' \cap \mathcal{C}') \supseteq \left(\bigcap F\mathcal{D}' \right),$$

con $\bigcap F\mathcal{D}'$ G -syndetic. ■

Questo Teorema implica che

$${}^s\Sigma_G(x) = \{x \in \mathcal{D} \mid \mathcal{D} \text{ è fortemente } G\text{-syndetic}\}$$

è chiusa per congiunzione e quindi finitamente consistente.

Fatto ${}^s\Sigma_G(x)$ finitamente consistente con $x \in \mathcal{D}$ sse $x \in \mathcal{D}$ è debolmente G -thick.

Dimostrazione. (\Rightarrow): se ${}^s\Sigma_G(x) \cup \{x \in \mathcal{D}\}$ finitamente consistente allora $x \notin \mathcal{D}$ non fortemente G -syndetic sse $x \in \mathcal{D}$ è debolmente G -thick.

(\Leftarrow): Se ${}^s\Sigma_G(x) \vdash x \notin \mathcal{D}$ allora esiste \mathcal{C} fortemente G -syntetic tale che $\mathcal{C} \subseteq \neg\mathcal{D}$, quindi $\neg\mathcal{D}$ è fortemente G -syndetic, quindi \mathcal{D} non è debolmente G -thick. ■

Teorema 193. Se $\mathcal{C} \cup \mathcal{D}$ è debolmente G -thick allora almeno uno tra \mathcal{C} e \mathcal{D} è debolmente G -thick.

Teorema 194. Per ogni definibile, LSASE:

1. G -thick sse G -wide;
2. G -syndetic sse fortemente G -syndetic;
3. G -thick sse debolmente G -thick.

Quando questo vale, “ricorda” forking=dividing. Mostreremo che questo succede per T stabile e $G = \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A)$.

Dimostrazione. (3. \Rightarrow 1.): debolmente G -thick è “partition regular” (Teorema 193) quindi anche G -thick. Segue 1.

(1. \Rightarrow 2.): Siano \mathcal{D}, \mathcal{C} G -syndetici. Mostriamo che $\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ è G -syndetico.

Per assurdo, supponiamo sia falso. Allora $\neg\mathcal{D} \cup \neg\mathcal{C}$ è G -thick, per 1. allora $\neg\mathcal{D}$ è G -thick (oppure $\neg\mathcal{C}$).

Allora \mathcal{D} è non G -syndetic. Assurdo. ■

Definizione 195. Un insieme \mathcal{X} è stazionario se esiste un unico $p(x) \in S_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$ che è G -invariante.

Fatto: se \mathcal{X} è stazionario e G -thick= G -wide, allora

$$G\text{-thick} = G\text{-syndetic}.$$

Dimostrazione. (\supseteq): siccome $\Sigma_G(x)$ è finitamente consistente allora G -syndetico implica G -thick (non serve \mathcal{X} stazionario).

(\subseteq): per assurdo sia \mathcal{D} un G -thick e non G -syndetic. Quindi $\neg\mathcal{D}$ è G -thick.

Poiché G -thick= G -wide, allora esiste $p_1(x) \vdash x \in \mathcal{D}$ e $p_2(x) \vdash x \notin \mathcal{D}$, con $p_1, p_2 \in S_{\mathcal{X}}(\mathcal{U})$. Questo contraddice \mathcal{X} stazionario. ■

1091.24 Lezione 23 (Ultima) - <2025-12-16 Mar>

Sia $\mathcal{Z} = \mathcal{U}^z$. Fissiamo

$$G = \text{Aut}(\mathcal{U}/A), \quad H = \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A), \quad H \trianglelefteq G$$

Inoltre, per $q(x) \in S(A)$ o $q(x) \in S(\text{acl}^{\text{eq}} A)$, scegliamo

$$\mathcal{X} = q(\mathcal{U}^x).$$

Tutti gli insiemi usati per syndetic, thick, wide, etc... sono (solo) quelli definiti da una combinazione booleana di $\varphi(x; b)$ con $b \in \mathcal{Z}$ e $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ fissata formula stabile. Questo insieme di formule è

$$\Delta(\mathcal{Z}).$$

Teorema 196. (strano). Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ stabile. Dato $M \supseteq A$, $b \in \mathcal{Z}$, esistono $b_i \equiv_M b$ per $i = 1, \dots, n$ tali che una combinazione Booleana positiva^[388] di $\varphi(x; b_i), \theta(x; b_1, \dots, b_n)$ è equivalente a una formula $\psi(x)$ in $\mathcal{L}(M)$, ovvero

$$\psi(\mathcal{U}^x) = \theta(\mathcal{U}^z, \bar{b}).$$

Il Teorema ricorda questo: Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ stabile, $M \supseteq A$, $b \in \mathcal{U}^z$. Esistono $c_1, \dots, c_n \in M^z$ tali che

$$\varphi(M^x, b) = \theta(M^x; c_1, \dots, c_n)$$

dove $\theta(x; c_1, \dots, c_n)$ è combinazione booleana positiva di $\varphi(x; c_i)$.

Dal punto di vista di M , $\varphi(M^x, b)$ è un insieme esternamente definibile.

Possiamo anche richiedere che $c_i \equiv_A b$, poiché se si definisce $p(x) = \text{tp}(b/A)$ allora $p(x) \wedge \varphi(x; z)$ è relazione stabile.

Dimostrazione. (del Teorema 388). Sia $\mathcal{V} \preceq \mathcal{U}$ isomorfo ad \mathcal{U} su M . Allora esistono $b_i \equiv_M b$ per $i = 1, \dots, n$, $b_i \in \mathcal{V}$ ed esiste $\theta(x; \bar{b})$ combinazione booleana positiva delle $\varphi(x; b_i)$ tale che

$$\varphi(\mathcal{V}^x; b) = \theta(\mathcal{V}^x; \bar{b}).$$

WLOG posso trovare \mathcal{V} tale che $b \perp_M \mathcal{V}$. Per *non splitting*, se $a_1 \equiv_M a_2 \in \mathcal{V}$, allora $a_1 \equiv_{M,b} a_2$.

Quindi $\theta(\mathcal{V}^x; \bar{b})$ è invariante per $\text{Aut}(\mathcal{V}/M)$, quindi esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(M)$ tale che

$$\theta(\mathcal{V}^x; \bar{b}) = \psi(\mathcal{V}^x)$$

ovvero, in particolare

$$\mathcal{V} \models \forall x [\theta(x; \bar{b}) \longleftrightarrow \psi(x)]$$

e, per elementarietà,

$$\mathcal{U} \models \forall x [\theta(x; \bar{b}) \longleftrightarrow \psi(x)]$$

■

Teorema 197. (strano 2). Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ stabile, $b \in \mathcal{Z}$, esistono $b_i \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b$ per $i = 1, \dots, n$ tali che una combinazione Booleana positiva di $\varphi(x; b_i)$, $\theta(x; b_1, \dots, b_n)$ è equivalente a una formula $\psi(x)$ in $\mathcal{L}(A)$, ovvero

$$\psi(\mathcal{U}^x) = \theta(\mathcal{U}^z, \bar{b}).$$

Teorema 198. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ stabile. Sia $\mathcal{X} = q(\mathcal{U}^x)$, $q(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ piccolo e finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A^{[389]}$. Si consideri il gruppo $H = \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A)$.

Per ogni $\Delta(\mathcal{Z})$ -definibile D , LSASE:

1. D è H -thick;
2. D è H -wide.

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): ovvia.

(1. \Rightarrow 2.): Assumiamo WLOG che $D = \varphi(\mathcal{U}^x; b)$. Basta mostrare che $q(x) \cup \{x \in D\}$ è finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$. In questo modo possiamo estenderla a $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U}^z)$ finitamente soddisfacibile in ogni $M \supseteq A$. Quindi D è H -wide.

Fissiamo quindi $M \supseteq A$ e fissiamo $\sigma(x) \in \{\wedge\} q$. Mostriamo che $\sigma(x) \wedge \varphi(x, b)$ è soddisfacibile in M .

Per il Teorema (strano), esiste una combinazione booleana positiva di $\sigma(x) \wedge \varphi(x; b_i)$: $\theta(x; b_1, \dots, b_n)$, con $b_i \equiv_M b$, tale che $\theta(x; \bar{b}) \longleftrightarrow \psi(x)$ per qualche $\psi(x) \in \mathcal{L}(M)$.

Affermo che $\theta(x; \bar{b})$ è consistente. Da questo segue il teorema, poiché allora $\theta(x; \bar{b})$ è consistente in M . Quindi $\varphi(x) \wedge \theta(x; b_i)$ è soddisfacibile in M per qualche i , in particolare per $m \in M^x$

$$\mathcal{U} \models \sigma(m) \wedge \varphi(m; b_i)$$

e siccome $b_i \equiv_M b$ si ha che

$$\mathcal{U} \models \sigma(m) \wedge \varphi(m; b).$$

Il fatto che $\theta(x; \bar{b})$ è consistente segue dall'ipotesi che D sia H -thick. Infatti

$$\theta(x : \bar{b}) = \bigvee_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n (\sigma(x) \wedge \varphi(x; b_{\langle i,j \rangle}))$$

dove $b_{\langle i,j \rangle} \equiv_M b$, e in particolare $b_{\langle i,j \rangle} \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b$.

Quindi $b_{\langle i,j \rangle}$ sono H -coniugati. Siccome D è H -thickl, allora

$$\bigwedge_{j=1}^n \varphi(x; b_{\langle i,j \rangle})$$

sono tutti consistenti in X , quindi consistenti con $q(x)$ e quindi consistenti con $\sigma(x)$. ■

Ricordiamo che

- D non syndetic sse $\neg D$ è thick.
- D thick sse $\neg D$ non syndetic.
- D non thick sse $\neg D$ è syndetic.
- D syndetic sse $\neg D$ non thick.

Corollario 199. LSASE:

1. syndetic implica thick
2. non esiste D tale che $D, \neg D$ entrambi syndetic.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Se 1. e D syndetic, allora D è thick. Allora $\neg D$ è non syndetic.

(2. \Rightarrow 1.): Se 2. e D syndetic, allora $\neg D$ non syndetic, quindi D thick. ■

Corollario 200. LSASE

1. thick implica syndetic;
2. non esiste D tale che $D, \neg D$ entrambi thick.

Ora assumiamo che thick=wide (sse syndetic è chiuso per congiunzioni), quindi vale “syndetic implica thick”. Affermo che se $H = \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A)$ e $\mathcal{X} = q(\mathcal{U}^x)$, $q(x) \in S(\text{acl}^{\text{eq}} A)$, allora vale anche “thick implica syndetic”. Infatti abbiamo già visto che $q(x)$ è stazionario (ovvero esiste un unico tipo $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ H -thick/wide/invariante globale che lo estende).

Se per assurdo “thick non implica syndetic”, allora esistono $D, \neg D$ thick = wide, quindi posso estenderli a due diversi $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ H -invarianti. Assurdo.

Osservazione. La stessa cosa vale se al posto di H si considera

$$G = \text{Aut}(\mathcal{U}/A).$$

1091.25 INFO ESAME

Possiamo tenere le dispense del corso durante l'esame. Ha detto che molto probabilmente non ci fornirà la lista degli esercizi papabili.

Proposizione 201. Let $|\mathcal{L}| < \lambda$. Prove that the following are equivalent:

1. N is [λ-saturated](#);
2. N is weakly λ -saturated and weakly λ -homogeneous.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Un modello λ -saturo è ovviamente debolmente λ -saturo, per la caratterizzazione data dal Teorema 9.5.

Per dimostrare che N sia debolmente λ -omogeneo, sia $f : N \rightarrow N$ con $|f| < \lambda$, e sia $b \in N$. Denotato con a una enumerazione di $\text{dom } f$, $|a| < \lambda$.

Sia quindi $p(x; z)$ il tipo $\text{tp}_N(b; a)$: il tipo $p(x; a)$ è finitamente soddisfacibile (ne è testimone b), quindi è finitamente soddisfacibile il tipo $p(x; fa)$. Siccome $p(x; fa) \subseteq \mathcal{L}(fa)$, con $|fa| = |a| < \lambda$, per λ -saturazione esiste $c \in N$ tale che $N, c \models p(x; fa)$.

Pertanto $f \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è una mappa elementare, e N è debolmente λ -omogenea.

(2. \Rightarrow 1.): Si consideri il tipo finitamente soddisfacibile in una variabile $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$, $|A| < \lambda$.

Sia a una enumerazione di A , e sia $q(x; z) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ il tipo con $|z| = |a| < \lambda$ tale che

$$p(x) = q(x; a).$$

In particolare, $|x; z| \leq \lambda$. Si consideri inoltre $r(z) = \text{tp}_N(a) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$.

Allora il tipo $s(x; z) := q(x; z) \cup r(z) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$ ha variabile $|x; z| \leq \lambda$, e inoltre è finitamente soddisfacibile, poiché $p(x)$ è finitamente soddisfacibile.

Per debole λ -saturazione esistono $b \in N$, $a' \in N^z$ tali che

$$N, (b; a') \models s(x; z)$$

e pertanto, in particolare, $f : a' \mapsto a$ è una mappa elementare, $|f| < \lambda$. Per debole λ -omogeneità, esiste $c \in N$ tale che $f \cup \{\langle b, c \rangle\}$ sia una mappa elementare, e dunque

$$N, (c; a) \models s(x; z)$$

e per definizione di s questo significa che $N, c \models p(x)$. ■

Proposizione 202. Suppose \mathcal{L} countable. Let $|x| = 1$. Prove that if $S_x(A)$ is countable for every finite set A , then T is small.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{U} \models T$ modello mostro. Si costruisce $M \preceq \mathcal{U}$ numerabile tale che M è ω -saturo. Questo dimostra che T sia sottile.

Sia $\pi : \omega^2 \rightarrow \omega$ una biiezione tale che per ogni $j, k < \omega$: $j, k \leq \pi(j, k)$.

Si costruisce per induzione:

- Sia $A_0 := \emptyset$.

- Al passo n -esimo, si supponga che per ogni $i \leq n$: A_i sia finito. Dunque $S_x(A_i)$ numerabile, enumerato come segue

$$S_x(A_i) := \langle p_{ij}(x) \mid j < \omega \rangle.$$

Si scelgano quindi a_{ij} tali che $\mathcal{U}, a_{ij} \models p_{ij}(x)$ (che esistono poiché \mathcal{U} è saturo).

Si definisce quindi

$$A_{n+1} := A_n \cup \{a_{ij} \mid \pi(i, j) = n\}.$$

insieme finito.

Ponendo $M := \bigcup_{n < \omega} A_n$ si ottiene il modello cercato.

- M è numerabile, poiché unione numerabile di insiemi finiti.
- Per ogni formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}(M)$ soddisfacibile in \mathcal{U} , $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A_i)$ per qualche $i \in \omega$ e pertanto $\varphi(x) \in p_{ij}(x) \in S_x(A_i)$ per qualche $j \in \omega$. Dunque $\mathcal{U}, a_{ij} \models \varphi(x)$ e $a_{ij} \in A_{\pi(i,j)+1} \subseteq M$ e pertanto $M \preceq \mathcal{U}$, e quindi $M \models T$.
- Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}(M)$ un tipo finitamente soddisfacibile a parametri in $A \subseteq M$ finito. Allora $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A_n)$ per qualche $n \in \omega$ e pertanto esiste $q(x) \in S_x(A_n)$ tale che $p(x) \subseteq q(x)$. Per costruzione esiste $a \in M$ tale che $\mathcal{U}, a \models q(x)$ e siccome $M \preceq \mathcal{U}$ allora $M, a \models q(x)$, ovvero $M, a \models p(x)$. Quindi M è ω -saturo.

■

1092 Subacquea [META]

1092.1 Gestione immersione

- Immersione Subacquea
- Attrezzatura subacquea
- Subacquea - Lancio del pallone sparabile

1092.2 Fisiologia e fisica

- Decompressione Gas in Immersione

1092.3 Esercizi

- Esercizio: Nuoto in superficie
- Esercizio: Apnea dinamica senza attrezzi
- Esercizio: Salvamento di un apneista incosciente sul fondo
- Esercizio: Capovolte in raccolta
- Esercizio: Equipaggiamento sul fondo
- Esercizio: Capovolte con attrezzatura

1092.4 Nuoto in superficie - Descrizione

- Al via dell'istruttore l'allievo parte con il tuffo dal blocco di partenza
- 200 m in superficie, massimo in 8 minuti, alternando stile/rana ad ogni virata;
- Al termine del percorso, l'allievo si sostenta fino allo stop dell'istruttore.

1092.5 Nuoto in superficie - Tecniche componenti

1. Efficacia del tuffo
2. Efficacia degli stili
3. Efficacia delle virate
4. Andatura costante e corretto ritmo respiratorio

1092.6 Apnea dinamica senza attrezzi - Descrizione

- Entrata per rotazione;
- 25 metri + virata, con partenza alla parete;
- quota costante, mai affiorare, pause evidenti;
- il compagno segue l'esercizio in superficie, e se necessario si immerge in capovolta per segnalarne il termine;
- riemersione: atti respiratori e poi **dice il numero di passate**.

1092.7 Apena dinamica senza attrezzi - Tecniche componenti

1. Spinta dal bordo e virata corretti
2. Efficacia della rana (braccia e gambe)
3. Pausa evidente
4. Mantenimento della quota
5. Lucidità nell'emersione

1092.8 Salvamento di un apneista incosciente sul fondo - Descrizione

- Soccorritore: 50 metri in superficie con la testa fuori (<60s)
- Infortunato: (+3kg di zavorra) scende sulla verticale al segnale dell'istruttore
- Soccorritore: a 8 metri dall'infortunato capovolta, poi:
 - toglie la zavorra all'infortunato
 - toglie la **propria** zavorra
 - risalita (chiudendo le vie aeree all'infortunato)

- toglie maschera e due ventilazioni
- Trasporto (totale <180s)
- Estrazione e primo soccorso

1092.9 Salvamento di un apneista incosciente sul fondo - Tecniche componenti

1. Pinneggiate e capovolta
2. Rispetto dei tempi (60s, 180s)
3. Ordine di sgancio della zavorra
4. Corretta presa per risalire (chiudendo le vie aeree)
5. Corretto trasporto, svestizione e ventilazione
6. Corretta estrazione
7. Primo soccorso

1092.10 Capovolte in raccolta - Descrizione

- Al pronti, l'allievo si stacca dal bordo e si sostenta.
- 3 capovolte + raccordo, un solo atto respiratorio tra le due.
- L'allievo attende sostentandosi lo stop dell'istruttore.

Il compagno controlla dalla superficie con maschera, pinne e areatore.

1092.11 Capovolte in raccolta - Tecniche componenti

1. Correttezza ed efficacia delle capovolte
2. Raccordo
3. Un solo atto respiratorio
4. Mantenimento del punto fisso

1092.12 Equipaggiamento sul fondo - Descrizione

- L'allievo al **pronto** tuffo in piedi per affondare e deposita il pacchetto sul fondo.
- Ventilazioni.
- Capovolta in raccolta.
- Vestizione (Pinne, Maschera e Aereatore).
- Svuotamento maschera **prima di riemergere**
- Indossa boccaglio.

1092.13 Equipaggiamento sul fondo - Tecniche componenti

1. Capovolta corretta ed efficace
2. Giusta successione di indossamento
3. Totale svuotamento maschera con minima perdita d'aria
4. Rispetto del punto
5. Tranquillità

1092.14 Capovolte con attrezzatura - Descrizione

- Due allievi insieme.
- Tuffo per affondare e indosso le pinne prima di riemergere.
- 4 capovolte: squadra - forbice - squadra - forbice.
- L'allievo abbandona il boccaglio e risale senza espirare.

1092.15 Capovolte con attrezzatura - Tecniche componenti

1. Efficacia delle orizzontalizzazioni
2. Posizione di attesa (sulla verticale, sostentandosi con le mani)
3. Correttezza ed efficacia delle capovolte
4. Alternanza
5. Abbandono del boccaglio

1093 (bib) Zambella - A Crèche Course in Model Theory

BIB

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), e sia λ un [cardinale](#) tale che $|\mathcal{L}| + \omega < \lambda$.

1094 Modello debolmente lambda saturo

Sia M una \mathcal{L} -[struttura](#) infinita.

Definizione 1. M è debolmente λ -saturo se realizza ogni [tipo](#) $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\emptyset)$, [finitamente consistente](#) in M , con $|x| \leq \lambda$.

M si dice debolmente saturo se è debolmente $|M|$ -saturo.

1095 Modello debolmente lambda saturo sse lambda universale

Sia M una \mathcal{L} -struttura infinita.

Proposizione 1. Sono fatti equivalenti:

1. M è debolmente λ -saturo;
2. M è λ -universale.

Questo teorema vale per Teorema di Löwenheim-Skolem all'insù e Teorema di Löwenheim-Skolem all'ingiù

1096 Modello saturo sse omogeneo e debolmente saturo

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e sia κ un cardinale tale che $|\mathcal{L}| + \omega < \kappa$. Sia \mathcal{U} una \mathcal{L} -struttura di cardinalità κ .

Proposizione 1. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{U} è saturo;
2. \mathcal{U} è omogeneo e debolmente saturo.

Osservazione. Questo teorema è l'equivalente de “Modello è ricco sse omogeneo e universale”, in quanto essere debolmente saturo significa essere universale nella categoria di modelli e morfismi ricchi.

1097 Modello debolmente lambda omogeneo

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e sia λ un cardinale tale che $|\mathcal{L}| + \omega < \lambda$.

Sia M una \mathcal{L} -struttura infinita.

Definizione 1. M è debolmente λ -omogeneo se per ogni $f : M \rightarrow M$ mappa elementare di cardinalità $|f| < \lambda$, per ogni $b \in M$ esiste $c \in M$ tale che $f \cup \{\langle b, c \rangle\} : M \rightarrow M$ elementare.

M si dice anche back and forth λ -omogeneo.

M si dice debolmente omogeneo se è debolmente $|M|$ -omogeneo.

1098 Insieme invariante rispetto ad insieme di parametri in un modello mostro

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Definizione 1. Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo, x variabile con $|x| < \kappa$. $D \subseteq \mathcal{U}^x$ si dice invariante su A se per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ automorfismo^[390], il range $f[D] = D$.

1099 Caratterizzazione insiemi invarianti su un insieme in un modello mostro

Si utilizza la notazione della Teoria dei Modelli.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine fissato, T una \mathcal{L} -teoria completa senza modelli finiti. Sia $\mathcal{U} \models T$ un modello mostro di cardinalità $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.

Teorema 1. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ insieme definibile. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{D} è invariante su A ;
2. $\mathcal{D} = \varphi(\mathcal{U}^x)$ per qualche $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$.

Teorema 2. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^x$ insieme tipo-definibile. Sono fatti equivalenti:

1. \mathcal{D} è invariante su A ;
2. $\mathcal{D} = p(\mathcal{U}^x)$ per qualche $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)$.

Si noti che le definizioni di “insieme definibile” e “insieme tipo-definibile” sono differenti nell’ambito di un modello mostro.

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, e N una \mathcal{L} -struttura.

1100 Gruppo degli automorfismi di una struttura del prim'ordine

Definizione 1. Il gruppo degli automorfismi di N si indica con $\text{Aut}(N)$.

Dato $A \subseteq N$ si denota con $\text{Aut}(N/A)$ il gruppo:

$$\text{Aut}(N/A) := \{f \in \text{Aut}(N) \mid \forall a \in A \ f a = a\}.$$

1101 Orbite rispetto all'azione del gruppo degli automorfismi in una struttura del prim'ordine

Definizione 1. L'orbita di $a \in N$ sotto l'azione di gruppo di $\text{Aut}(N)$ si indica con

$$o_N(a) := \{fa \mid f \in \text{Aut}(N)\}.$$

L'orbita di $a \in N$ sotto l'azione di gruppo di $\text{Aut}(N/A)$ si indica con

$$o_N(a/A) := \{fa \mid f \in \text{Aut}(N/A)\}.$$

1102 Lyndon-Robinson Lemma

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), T una \mathcal{L} -teoria senza [modelli finiti](#).

Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula " $x = y$ ".

Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C .
 $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Teorema 1. (Lyndon-Robinson Lemma). Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Sono fatti equivalenti:

1. $\varphi(x)$ è equivalente su T ad una $\{\wedge, \vee\} \Delta$ -formula;
2. $\varphi(x)$ è preservata da Δ -morfismi.

1103 Caratterizzazione delle conseguenze di un delta-tipo tramite la preservazione per delta-morfismi

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), T una \mathcal{L} -teoria senza [modelli finiti](#).

Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula " $x = y$ ".

Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C .
 $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Proposizione 1. Sia $M \models T$ un [modello](#) di T , $b \in M^x$ e

$$q(x) := \Delta\text{-tp}_M(b) := \{\psi(x) \in \Delta \mid M \models \psi(b)\}.$$

il [Delta-tipo di b](#). Per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ sono fatti equivalenti:

1. per ogni [Delta-morfismo](#) $k : M \xrightarrow{\Delta} N$, $N \models T$ e $b \in \text{dom}(k)$
$$N \models \varphi(kb).$$
2. $T \vdash q(x) \rightarrow \varphi(x)$ ^[391]

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): Poiché $M, b \models q(x)$, allora $N, kb \models q(x)$, e quindi $N \models \varphi(kb)$.

(1. \Rightarrow 2.): Sia per assurdo $N \models T$ tale che $N, c \models q(x) \wedge \neg\varphi(x)$.

Allora, detto $k = \{\langle b, c \rangle\}$ ^[392], si ha che $k : M \rightarrow N$ è Δ -morfismo, poiché $N, kb = c \models q(x)$; ma $N \models \neg\varphi(kb)$. Assurdo. ■

Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#), T una \mathcal{L} -teoria senza [modelli finiti](#).

Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula " $x = y$ ".

Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C .
 $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

1104 Teoria con delta-eliminazione positiva dei quantificatori

Definizione 1. Si dice che T ha Δ -eliminazione positiva dei quantificatori se per ogni $\varphi(x) \in \{\exists, \forall, \wedge, \vee\}\Delta$ esiste $\psi(x) \in \{\wedge, \vee\}\Delta$ tale che

$$T \vdash \forall x \varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x).$$

1105 Caratterizzazione semantica della delta-eliminazione positiva dei quantificatori

Corollario 1. Sono fatti equivalenti:

1. T ha Δ -eliminazione positiva dei quantificatori;
2. ogni Δ -morfismo tra modelli di T è un $\{\wedge, \vee\}$ Δ -morfismo.

Questo è un banale corollario del [Lyndon-Robinson Lemma](#).

1106 Estendere dominio e codominio di un delta-morfismo

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine
- Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.
- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Proposizione 1. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, e sia N ω -saturo, e sia $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo di cardinalità $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo;
2. per ogni tupla finita $b \in M^{<\omega}$ ^[393] esiste $c \in N^{<\omega}$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia a una [enumerazione](#) di $\text{dom } k$, e sia $p(x, y) = \Delta\text{-tp}_M(a, b)$ ^[394]. Per 1., $p(ka, y)$ è finitamente consistente in N .

Siccome k è finita e N è ω -saturo, allora esiste $c \in N^y$ tale che $N, c \models p(ka, y)$. Tale c è quello cercato.

(2. \Rightarrow 1.): Ogni $\varphi(x) \in \{\exists, \wedge\}\Delta$ è della forma $\exists \bar{y} \psi(x, \bar{y})$, con $\psi(x, \bar{y}) \in \{\wedge\}\Delta$ e $|\bar{y}| < \omega$.

Sia $a \in \text{dom}(k)^x$ tale che $M \models \varphi(a)$. Voglio mostrare $N \models \varphi(ka)$.

Sia $\bar{b} \in N^{\bar{y}}$ tale che $M \models \psi(a, \bar{b})$; per l'ipotesi 2. esiste $\bar{c} \in N^{\bar{y}}$ tale che $k \cup \{\langle \bar{b}, \bar{c} \rangle\}$ sia un Δ -morfismo.

Quindi $N \models \psi(ka, \bar{c})$ e dunque $N \models \varphi(ka)$. ■

Dualmente vale la seguente proposizione.

Proposizione 2. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, e sia N ω -saturo, e sia $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo con $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\forall, \vee\}\Delta$ -morfismo;
2. per ogni $c \in N^{<\omega}$ esiste $b \in M^{<\omega}$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo.

1107 Caratterizzazione delta-morfismi estendibili a delta-morfismi totali

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#)
- Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.
- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Corollario 1. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, con N ω -saturo, $|M| = \omega$ e $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo di [cardinalità](#) $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo.
2. k si estende ad un Δ -morfismo totale.

Questo è un banale corollario de “[Estendere dominio e codominio di un delta-morfismo](#)”.

1108 Caratterizzazione delta-morfismi estendibili a delta-morfismi suriettivi

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#)
- Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.
- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Corollario 1. Siano M, N due \mathcal{L} -strutture, con N ω -saturo, $|M| = \omega$ e $k : N \rightarrow M$ un Δ -morfismo di [cardinalità](#) $|k| < \omega$. Sono fatti equivalenti:

1. k è un $\{\forall, \vee\}\Delta$ -morfismo.
2. k si estende ad un Δ -morfismo suriettivo (parziale).

Questo è banale corollario de “[Estendere dominio e codominio di un delta-morfismo](#)”

1109 Caratterizzazione della delta-eliminazione positiva dei quantificatori tramite delta-morfismi

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#)
- Sia Δ un insieme di [formule](#) chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.
- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$. Vedi “[Chiusura di un insieme di formule rispetto a connettivi logici](#)”

Sia T una [\$\mathcal{L}\$ -teoria](#).

Proposizione 1. Sono fatti equivalenti:

1. T ha [Delta-eliminazione positiva dei quantificatori](#);
2. ogni [Delta-morfismo](#) tra [modelli](#) di T è sia un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo che un $\{\forall, \vee\}\Delta$ -morfismo.
3. per ogni $k : M \rightarrow N$ Δ -morfismo finito tra [modelli \$\omega\$ -saturi](#) di T :
 - per ogni $b \in M$ esiste $c \in N$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo;
 - per ogni $c \in N$ esiste $b \in M$ tale che $k \cup \{\langle b, c \rangle\}$ è un Δ -morfismo.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Ovvia.

(2. \Rightarrow 1.): Si dimostra per induzione sulla sintassi che i Δ -morfismi preservano la verità delle formule in $\{\exists, \forall, \wedge, \vee\}\Delta$. Per il [Lyndon-Robinson Lemma](#), posto che $\{\exists, \forall, \wedge, \vee\}\Delta = \{\wedge, \vee\} \{\exists, \forall\}\Delta$, questo è sufficiente.

Assumiamo 2. e che $\varphi(x, y)$ sia preservata da Δ -morfismi.

Per il [Lyndon-Robinson Lemma](#) $\varphi(x, y)$ è equivalente a $\psi(x, y) \in \{\wedge, \vee\}\Delta$.

ed inoltre $\exists y \varphi(x; y)$ è equivalente a $\exists y \psi(x, y) \in \{\exists, \vee, \wedge\} \Delta = \{\exists, \wedge\} \Delta$. ???????

Per 2. $\exists y \psi(x; y)$ è preservata dai Δ -morfismi. Idem per $\forall y \psi(x; y)$.

Induzione ovvia per \wedge, \vee .

(2. \Rightarrow 3.): Ovvia per “[Estendere dominio e codominio di un delta-morfismo](#)”.

(3. \Rightarrow 1.): *Non dimostrata.* ■

1110 Teoria delta-model-completa

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#)
- Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.

- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Definizione 1. Una *teoria* T è Δ -model-completa se ogni Δ -morfismo totale $k : M \rightarrow N$ tra modelli di T è un $\{\exists, \forall, \wedge, \vee\}\Delta$ -morfismo.

1111 Caratterizzazione Teoria delta-model-completa tramite eliminazione positiva dei quantificatori

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#)
- Sia Δ un insieme di formule chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.
- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$.

Proposizione 1. Sia T una \mathcal{L} -teoria. Sono fatti equivalenti:

1. T è Δ -model-completa;
2. T ha $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -eliminazione positiva dei quantificatori.

Dimostrazione.

■

1112 Caratterizzazione delle formule preservate da delta-morfismi

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

- Sia \mathcal{L} un [linguaggio del prim'ordine](#)
- Sia Δ un insieme di [formule](#) chiuso per sostituzione di variabili e che contenga la formula “ $x = y$ ”.
- Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C . $\Delta^\pm := \{\neg\} \Delta$. Vedi “[Chiusura di un insieme di formule rispetto a connettivi logici](#)”

Teorema 1. Sia $\varphi(x) \in \mathcal{L}$. Sono fatti equivalenti:

1. esiste $\psi(x) \in \{\exists, \wedge, \vee\}\Delta$ tale che $T \vdash \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x))$;
2. $\varphi(x)$ è [preservata](#) da Δ -morfismi totali tra modelli di T .

Dimostrazione. Si noti che, siccome Δ contiene $x = y$, allora^[395] $1. \Leftrightarrow 1'$, dove $1'$ è

esiste $\psi(x) \in \{\wedge, \vee\} \{\exists\}\Delta$ tale che $T \vdash \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x))$.

($1' \Rightarrow 2.$): Sia $k : M \rightarrow N$ un Δ -morfismo totale. Per “[Caratterizzazione delta-morfismi estendibili a delta-morfismi totali](#)”, k è un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo ed in particolare un $\{\exists\}\Delta$ -morfismo.

Quindi per il [Lyndon-Robinson Lemma](#) allora k preserva $\varphi(x)$.

($2. \Rightarrow 1'$): Per assurdo, si neghi $1'$. Allora per il [Lyndon-Robinson Lemma](#) esiste un $\{\exists\}\Delta$ -morfismo $k : M \rightarrow N$ che non preserva $\varphi(x)$. Questo sarà in particolare un $\{\exists, \wedge\}\Delta$ -morfismo^[396].

Per “[Caratterizzazione delta-morfismi estendibili a delta-morfismi totali](#)”, esiste $h : M \rightarrow N$ Δ -morfismo totale tra modelli di T che non preserva φ (poiché h estende k e k non preserva φ). ■

1113 Chiusura di un insieme di formule rispetto a connettivi logici

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine.

Notazione: Sia Δ un insieme di [\$\mathcal{L}\$ -formule](#) (eventualmente [con parametri](#)). Se $C \subseteq \{\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg\}$ è un insieme di connettivi, $C\Delta$ denota la chiusura di Δ per i connettivi in C .

Proposizione 1. Prove that following are equivalent for every $A \subseteq \mathcal{U}$

1. $\text{acl}^{\text{eq}} A = \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl } A)$
2. $\text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A) = \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl } A)$
3. $c \equiv_{\text{acl } A} b \iff c \stackrel{\text{Sh}}{\equiv}_A b$ for all $c, b \in \mathcal{U}^\lambda$.

Dimostrazione. ($1. \Rightarrow 2.$): Siccome in generale $\text{acl } A \subseteq \text{acl}^{\text{eq}} A$ allora

$$\text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A) \subseteq \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl } A).$$

Viceversa, sia $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl } A)$ e sia $\mathcal{A} \in \text{acl}^{\text{eq}} A$. Per 1. allora $\mathcal{A} \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl } A)$ e per la caratterizzazione di dcl^{eq} allora esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(\text{acl } A)$ tale che $\mathcal{A} = \psi(\mathcal{U}^x)$.

In particolare esiste $\psi(x; z) \in \mathcal{L}$, con $|z| = |\text{acl } A|$ tale che, detta a una enumerazione di $\text{acl } A$:

$$\psi(x) = \psi(x; a) \implies \mathcal{A} = \psi(\mathcal{U}^x; a).$$

Pertanto:

$$f\mathcal{A} = f[\psi(\mathcal{U}^x; a)] = \psi(\mathcal{U}^x; fa) = \psi(\mathcal{U}^x; a) = \mathcal{A}.$$

Per arbitrarietà di \mathcal{A} si ha $f\mathcal{A} = \mathcal{A}$ per ogni $\mathcal{A} \in \text{acl}^{\text{eq}} A$: $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/\text{acl}^{\text{eq}} A)$.

($2. \Rightarrow 3.$): È noto che per ogni $c, b \in \mathcal{U}^\lambda$

$$c \stackrel{\text{Sh}}{\equiv}_A b \iff c \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b.$$

È sufficiente quindi dimostrare che 2. implichì

$$c \equiv_{\text{acl } A} b \iff c \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b$$

per ogni $b, c \in \mathcal{U}^\lambda$ per ottenere la tesi.

Ma $c \equiv_{\text{acl } A} b$ se e solo se^[397] $\mathcal{O}(c / \text{acl } A) = \mathcal{O}(b / \text{acl } A)$.

Per 2. questo è vero se e solo se $\mathcal{O}(c / \text{acl}^{\text{eq}} A) = \mathcal{O}(b / \text{acl}^{\text{eq}} A)$ e, come sopra, questo avviene se e solo se $c \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b$.

(3. \Rightarrow 1.): Vale sempre $\text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl } A) \subseteq \text{acl}^{\text{eq}} A$. Infatti, sia $\mathcal{B} \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl } A)$. Allora esiste $\psi(x; z) \in \mathcal{L}$, $|z| = n$, ed esistono $a_1, \dots, a_n \in \text{acl } A$ tali che

$$\mathcal{B} = \psi(\mathcal{U}^x; a_1, \dots, a_n).$$

Inoltre esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{L}(A)$ tali che $\varphi_i(a_i)$ e che testimoniano $a_i \in \text{acl } A$. Quindi la formula

$$\Phi(\mathcal{X}) : \quad \exists z_1, \dots, z_n \left(\mathcal{X} = \psi(\mathcal{U}^x; z_1, \dots, z_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i(z_i) \right)$$

ha parametri unicamente in A ed è realizzata da un numero finito di \mathcal{X} (poiché ciascuna φ_i ha un numero finito di realizzazioni), e inoltre $\Phi(\mathcal{B})$. Pertanto Φ testimonia $\mathcal{B} \in \text{acl}^{\text{eq}} A$.

Resta da dimostrare che 3. implica $\text{acl}^{\text{eq}} A \subseteq \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl } A)$. Sia quindi $a \in \text{acl}^{\text{eq}} A$.

- Si noti che $\mathcal{O}(a / \text{acl}^{\text{eq}} A) = \{a\}$ poiché $a \in \text{acl}^{\text{eq}} A$.
- Inoltre,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(a / \text{acl } A) &= \{b \in (\mathcal{U}^{\text{eq}})^{|a|} \mid a \equiv_{\text{acl } A} b\} \\ \mathcal{O}(a / \text{acl}^{\text{eq}} A) &= \{b \in (\mathcal{U}^{\text{eq}})^{|a|} \mid a \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b\}. \end{aligned}$$

- L'ipotesi 3. implica che

$$a \equiv_{\text{acl } A} b \iff a \equiv_{\text{acl}^{\text{eq}} A} b$$

per ogni c, b .

Utilizzando i tre fatti di cui sopra, si ottiene che

$$\mathcal{O}(a / \text{acl } A) = \mathcal{O}(a / \text{acl}^{\text{eq}} A) = \{a\}$$

ovvero a invariante su $\text{acl } A$. Per la caratterizzazione $a \in \text{dcl}^{\text{eq}}(\text{acl } A)$. ■

1114 Topological Games [LECTIO]

1114.1 Giochi di Schmidt

Definizione 1. $B \subseteq \mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri badly approximable. ($x \in \mathbb{R}$ è *badly approximable* sse ???)

B è di misura di Lebesgue nulla e magro.

1114.1.1 Alcuni giochi

Per $T \subseteq \mathbb{R}$ e $0 < \alpha, \beta < 1$, $G_{\text{Sch}}(\alpha, \beta; T)$ è il gioco logico dove i giocatori **I** e **II** giocano intervalli chiusi non vuoti $I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_i \supseteq \dots$ di \mathbb{R} tali che

$$\begin{aligned}\text{diam}(I_{2n+1}) &= \alpha \text{ diam}(I_{2n}) \\ \text{diam}(I_{2n+2}) &= \beta \text{ diam}(I_{2n+1})\end{aligned}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il giocatore **II** vince sse $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \subseteq T$. **I** altrimenti.

Definizione 2. Generalizzazione per X spazio metrico completo.

L'insieme dei $T \subseteq \mathbb{R}$ tali che I ha una strategia vincente è un σ -filtro.

1114.1.2 Definizioni di TDI

Un sottoinsieme Y di uno spaio topologico X è

- mai denso in X se $((Y)) = \emptyset$
- magro in X se è unione numerabile di insieme mai densi;
- comagro in X se $X \setminus Y$ è magro.

$\text{Mgr}(X)$ è la famiglia dei sottoinsiemi magri di X , chiuso sotto sottoinsiemi e unione numerabile.

Alcuni argomenti accennati

- Spazi di Baire.
- Se X di Baire e $U \subseteq X$ aperto allora U di Baire.
- Giochi di Choquet e spazi di Choquet. (Vedi libro di Oxtoby^[398])
- Strong Choquet Game e spazi di Strong Choquet.
- Proprietà di Baire
- Banach-Mazur Game
- Spazio di Cantor
- Lo spazio $2^{\mathbb{N}}$ è compatto e omeomorfi all'insieme di tutti i percorsi attraverso ogni finitely branching tree senza nodi terminali.
- $2^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo all'insieme di Cantor.
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus D$, dove $D \subseteq \mathbb{R}$ è un insieme numerabile e denso.
- Spazio Polacco

Definizione 3. Un insieme $P \subseteq X$ è perfetto se P è chiuso in X e senza punti isolati.

Teorema 4. (Teorema di Cantor-Bendixson). Se X è uno spazio polacco e $C \subseteq X$ è chiuso, allora esistono U, P unici tali che $U \cup P = C$; $U \cap P = \emptyset$ e

- U è numerabile (possibilmente vuoto), e aperto in C ;
- P è perfetto (possibilmente vuoto).

The perfect set game $G^*(A)$

- Gale-Stewart Games
- Alberi e alberi potati
- Se X ha la topologia discreta e X^ω ha la topologia prodotto, allora i sottoinsiemi chiusi di X^ω sono esattamente gli insiemi $[T]$, con T albero potato su X .
- Teorema di Gale-Stewart

Teorema 5. (Teorema di Martin). Se $B \subseteq \omega^\omega$ è boreiano, allora $G(B)$ è determinato.

Assumendo AC, questo vale per ogni $B \subseteq X^\omega$.

Definizione 6. Si definisce l'assioma di determinatezza per giochi su X :

AD_X : $G(A)$ è determinato per ogni $A \subseteq X^\omega$.

Se $X \supseteq Y$ allora $\text{AD}_X \implies \text{AD}_Y$.

Con AD si intende AD_ω (equivalente anche a AD_2).

???

Teorema 7. (Teorema di Martin-Woodin). Assumendo $\text{AD} + \text{DC}$: $\text{AD}_\mathbb{R}$ sse Unif.

Unif è la *uniformization property* in \mathbb{R}^2 .

1115 Cardinalità degli insiemi invarianti

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Proposizione 1. Detta $\lambda = |\mathcal{L}_z(A)|$ la cardinalità dell'insieme delle formule a parametri in A , gli insiemi invarianti su A sono al più 2^{2^λ} .

Dimostrazione. Vedi Proposizione 14.1 di . ■

1116 Insieme delle formule del prim'ordine

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine.

Definizione 1. L'insieme delle *formule del prim'ordine* del linguaggio \mathcal{L} e variabile libera $z = \langle z_i : i < \alpha \rangle$ per qualche *ordinale* α si indica con \mathcal{L}_z .

Se M è una \mathcal{L} -struttura e $A \subseteq M$, allora l'insieme delle \mathcal{L} -formule di variabile z e *parametri in A* si indica con $\mathcal{L}_z(A)$.

1117 Cardinalità dell'insieme delle formule di un linguaggio del prim'ordine

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine.

Proposizione 1. La cardinalità dell'insieme delle \mathcal{L} -formule è

$$|\text{Form}_{\mathcal{L}}| = \max(|\mathcal{L}|, \aleph_0) = |\mathcal{L}| + \omega.$$

1118 Formula invariante su un insieme

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ un insieme piccolo

Definizione 1. Una formula $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è A -invariante se $\varphi(\mathcal{U}^x)^{[399]}$ è un insieme A -invariante.

1119 phi-formula su un insieme

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo.

Definizione 1. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ una formula. Una φ -formula su A è^[400]

$$\psi(x) \in \{\wedge, \vee, \neg\}\Delta, \quad \Delta = \{\varphi(x; b) \mid b \in \mathcal{U}^z\}$$

tale che ψ sia invariante su A .

Con $\mathcal{L}_\varphi(A)$ si intende l'insieme delle φ -formule su A .

1119.1 phi-tipo su un insieme

Definizione 2. Un φ -tipo è un insieme di φ -formule.

Un φ -tipo globale è un insieme \subseteq -massimale fittamente consistente di φ -formule su \mathcal{U} . $S_\varphi(\mathcal{U})$ è l'insieme di tutti i φ -tipi globali.

Osservazione. Se $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ allora a meno di equivalenza

$$p(x) \subseteq \{\varphi(x; b), \neg\varphi(x; b) \mid b \in \mathcal{U}^z\}.$$

DA FINIRE

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di cardinalità [inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo.

1120 Tipo invariante su un insieme

Definizione 1. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ una [formula](#). Un φ -[tipo](#) $p(x) \subseteq \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{U})$ si dice A-invariante se per ogni $\psi(x; \bar{b}) \in p(x)$ e per ogni [automorfismo](#)^[401] $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$:

$$p(x) \vdash \psi(x; f\bar{b})$$

ovvero esistono $\psi_1(x), \dots, \psi_n(x) \in p(x)$ tali che

$$\mathcal{U} \models \forall x (\psi_1(x) \wedge \dots \wedge \psi_n(x) \rightarrow \psi(x; f\bar{b})).$$

Notazione: scrivremo $p(x) \vdash fp(x)$.

[DA FINIRE](#)

1121 Caratterizzazione phi-tipi invarianti su un insieme

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di cardinalità [inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ una [formula](#), e si denoti con $S_\varphi(\mathcal{U})$ l'insieme di tutti i φ -[tipi globali](#).

Se $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ allora a meno di equivalenza si può considerare

$$p(x) \subseteq \{\varphi(x; b), \neg\varphi(x; b) \mid b \in \mathcal{U}^z\}.$$

??? [DA FINIRE](#)

$$p(x) \subseteq \{\wedge, \vee\}\{\varphi(x; b), \neg\varphi(x; b) \mid b \in \mathcal{U}^z\}$$

Notazione: definisco

$$\mathcal{D}_{p,\varphi} := \{b \in \mathcal{U}^z \mid \varphi(x; b) \in p(x)\}.$$

$\mathcal{D}_{p,\varphi}$ è un insieme **esternamente definibile** (da $\varphi(x; z)$ o da p).

Sia ${}^*\mathcal{U} \succeq \mathcal{U}$ saturo di cardinalità maggiore, tale che

$${}^*\mathcal{U}, {}^*a \models p(x)$$

allora

$$\mathcal{D}_{p,\varphi} = \mathcal{U}^z \cap \varphi({}^*a, {}^*\mathcal{U}^z).$$

Proposizione 1. $p(x)$ è A -invariante sse $\mathcal{D}_{p,\varphi}$ è A -invariante.

Fatto. Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $\psi(x, \bar{b}) \in \mathcal{L}_\varphi(\mathcal{U})$ e per ogni $a \equiv_A b$ si ha:

$$p(x) \vdash \psi(x; a) \iff p(x) \vdash \psi(x; b)$$

Fatto. Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $a \equiv_A b$ si ha:

$$p(x) \vdash \varphi(x; a) \longleftrightarrow \varphi(x; b).$$

Fatto. Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $a \equiv_A b$ e per ogni $c \vdash p(x) \upharpoonright A \cup \{a, b\}$ ^[402] si ha:

$$\varphi(c; a) \longleftrightarrow \varphi(c; b).$$

Fatto. Sia $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$. $p(x)$ è A -invariante sse per ogni $a \equiv_A b$ e per ogni $c \vdash p(x) \upharpoonright A$ si ha:

$$a \equiv_{A \cup \{c\}} b.$$

1122 Tipo finitamente soddisfacibile in un insieme nel modello mostro

1123 Caratterizzazione tipi finitamente soddisfacibili in un insieme

1124 Tipo finitamente soddisfacibile è invariante

1125 Estensione tipo finitamente soddisfacibile in un insieme a tipo globale

1126 Sequenza di Morley

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessible](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Definizione 1. Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ e sia $p(x) \in S(\mathcal{U})$ un [tipo globale invariante su \$A\$](#) .

Una [sequenza di Morley](#) di $p(x)$ su A è $\bar{c} = \langle c_i : i < \alpha \rangle$, con $c_i \in \mathcal{U}^x$, tale che

$$\forall i < \alpha : \quad c_i \models p(x) \upharpoonright_{A \cup \bar{c} \upharpoonright i}.$$

1127 Sequenza di indiscernibili

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $\langle I, \leq \rangle$ un ordine lineare e sia $A \subseteq \mathcal{U}$.

Definizione 1. Una sequenza $c = \langle c_i \mid i \in I \rangle$ con $c_i \in \mathcal{U}^x$ è una sequenza di indiscernibili su A se per ogni $n \in \omega$ e per ogni $i_1 < \dots < i_n, j_1 < \dots < j_n$ elementi di I :

$$(c_{i_1}, \dots, c_{i_n}) \equiv_A (c_{j_1}, \dots, c_{j_n}).$$

1128 Sequenza di Morley è indiscernibile

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ un insieme di parametri.

Teorema 1. Sia $p(x) \in S(\mathcal{U})$ tipo globale invariante su A .

Ogni $c = \langle c_i : i < \omega \rangle$ sequenza di Morley di $p(x)$ è indiscernibile su A .

Dimostrazione. Vedi Proposizione 14.20 di

■

1129 Coerede di un tipo

BOH, vedi , pagina 120.

1130 Sequenza di coeredi

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ un tipo, e sia $M \preceq \mathcal{U}$ un modello.

Definizione 1. Se $p(x)$ è finitamente soddisfacibile su $M^{[403]}$, una sequenza di Morley di $p(x)$ su M si dice sequenza di coeredi.

1131 Caratterizzazione sequenza di coeredi

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Lemma 1. LSASE:

1. $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ è sequenza di coeredi su M (rispetto a qualche $p(x) \in S(\mathcal{U})^{[404]}$);
2. $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)^{[405]}$ e $c_{i+1} \equiv_{M, c \upharpoonright i} c_i^{[406]}$;
3. $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)$ e $c_j \equiv_{M, c \upharpoonright i} c_i$ per ogni $j > i$.

Proposizione 2. Let $A \subseteq \mathcal{U}$ and let $\langle \mathcal{D}_i : i < \omega \rangle$ be an [A-indiscernible sequence](#) in \mathcal{U}^{eq} . Prove that there is a [formula](#) $\phi(x; z) \in \mathcal{L}$ and an A -indiscernible sequence $\langle b_i : i < \omega \rangle$ in \mathcal{U}^z such that $\mathcal{D}_i = \phi(\mathcal{U}^x; b_i)$.

Dimostrazione. Si suppone che ciascun $\mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{U}^x$ per x fissata.

- Siccome $\mathcal{D}_i \in \mathcal{U}^{\text{eq}}$, allora esiste $b'_i \in \mathcal{U}^{z_i}$ ed esiste $\sigma_i(x; z_i) \in \mathcal{L}$ tale che

$$\mathcal{D}_i = \sigma_i(\mathcal{U}^x; b'_i)$$

e, ponendo z tale che $|z| = \sup_{i \in \omega} |z_i|$:

$$\mathcal{D}_i = \sigma_i(\mathcal{U}^x; b'_i), \quad b'_i \in \mathcal{U}^z.$$

- Il fatto che $\mathbf{D} := \langle \mathcal{D}_i : i < \omega \rangle$ sia una sequenza di indiscernibili su A significa che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $I, J \in \omega^{(n)}$

$$\mathbf{D} \upharpoonright_I \equiv_A \mathbf{D} \upharpoonright_J. \tag{26}$$

Siccome si ha

$$\exists z \forall x [x \in \mathcal{D}_0 \longleftrightarrow \sigma_0(x; z)]$$

allora per la (26) si ha che per ogni $i \in \omega$ (ponendo $I = \langle 0 \rangle$ e $J = \langle j \rangle$)

$$\exists z \forall x [x \in \mathcal{D}_j \longleftrightarrow \sigma_0(x; z)]$$

ovvero, se $\phi(x; z) := \sigma_0(x; z)$ vale:

$$\exists z \forall x [x \in \mathcal{D}_j \longleftrightarrow \phi(x; z)]$$

Pertanto per ogni \mathcal{D}_i esiste $d_i \in \mathcal{U}^z$ tale che

$$\mathcal{D}_i = \phi(\mathcal{U}^x; d_i). \tag{27}$$

Sia $\mathbf{d} := \langle d_i \mid i < \omega \rangle$ la sequenza associata. Si consideri EM-tp(\mathbf{d}/A). Per il [Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski](#) esiste una sequenza di indiscernibili $\mathbf{c} = \langle c_i \mid i < \omega \rangle$ tale che

$$\text{EM-tp}(\mathbf{c}/A) \supseteq \text{EM-tp}(\mathbf{d}/A)$$

Sia quindi $\mathcal{C}_i := \phi(\mathcal{U}^x; c_i)$ e $\mathbf{C} := \langle \mathcal{C}_i \mid i < \omega \rangle$.

Si dimostra che $\mathcal{C} \equiv_A \mathcal{D}$. Infatti, sia $\psi(\mathcal{X}) \in \mathcal{L}(A)$ tale che

$$\models \psi(\mathcal{C}) \implies \models \psi(\phi(\mathcal{U}^x; c_{i_1}), \dots, \phi(\mathcal{U}^x; c_{i_n})). \quad (28)$$

Se per assurdo $\models \neg \psi(\mathcal{D})$ poiché \mathcal{D} è una sequenza di indiscernibili, per ogni $j_1 < \dots < j_n < \omega$

$$\models \neg \psi(\mathcal{D}_{j_1}, \dots, \mathcal{D}_{j_n}).$$

In particolar modo, quindi, per ogni $j_1 < \dots < j_n < \omega$

$$\models \neg \psi(\phi(\mathcal{U}^x; d_{j_1}), \dots, \phi(\mathcal{U}^x; d_{j_n}))$$

e pertanto $\neg \psi(\phi(\mathcal{U}^x; z_1), \dots, \phi(\mathcal{U}^x; z_n)) \in \text{EM-tp}(\mathcal{d}/A)$. Siccome $\mathcal{c} \models \text{EM-tp}(\mathcal{d}/A)$ allora

$$\mathcal{c} \models \neg \psi(\phi(\mathcal{U}^x; z_1), \dots, \phi(\mathcal{U}^x; z_n)).$$

Assurdo, per la (28). Quindi per ogni $\psi(\mathcal{X}) \in \mathcal{L}(A)$:

$$\mathcal{C} \models \psi(\mathcal{X}) \implies \mathcal{D} \models \psi(\mathcal{X}).$$

Poiché $\mathcal{L}(A)$ è chiuso per negazioni, questo implica che $\mathcal{C} \equiv_A \mathcal{D}$:

$$\mathcal{O}(\mathcal{C}/A) = \mathcal{O}(\mathcal{D}/A) \ni \mathcal{D}$$

e pertanto esiste $F \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $F\mathcal{C} = \mathcal{D}$. Per ogni $i < \omega$:

$$\mathcal{D}_i = F\mathcal{C}_i = F[\phi(\mathcal{U}^x; c_i)] = \phi(\mathcal{U}^x; Fc_i) = \phi(\mathcal{U}^x; b_i).$$

avendo posto $b_i := Fc_i$. Siccome F è un automorfismo, e $\langle c_i \mid i < \omega \rangle$ è sequenza di indiscernibili allora anche $\langle b_i \mid i < \omega \rangle$ lo è. ■

1132 eq-espansione di un modello mostro

1133 Caratterizzazione sequenza di coeredi

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità](#) [inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Lemma 1. LSASE:

1. $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ è [sequenza di coeredi](#) su \mathcal{M} (rispetto a qualche $p(x) \in S(\mathcal{U})^{[407]}$);
2. $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)^{[408]}$ e $c_{i+1} \equiv_{M, c \upharpoonright i} c_i^{[409]}$;
3. $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)$ e $c_j \equiv_{M, c \upharpoonright i} c_i$ per ogni $j > i$.

Le condizioni 2. e 3. sono banalmente equivalenti, e pertanto saranno utilizzate in maniera interscambiabile.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): Sia $p(x) \in S(\mathcal{U})$ finitamente soddisfacibile in M tale che \bar{c} sia sequenza di coeredi rispetto a p .

Si dimostra $c_i \perp_M (c \upharpoonright i)$.

Sia $\varphi(x, z_0, \dots, z_{i-1}) \in \mathcal{L}(M)$ tale che $\varphi(c_i, c \upharpoonright i)$.

Poiché $p(x)$ è completo e $c_i \models p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i)$ allora:

$$\varphi(x; c \upharpoonright i) \in p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i).$$

dove con $p(x) \upharpoonright A$ si intende la [restrizione di un tipo ad un insieme di parametri](#).

Siccome $p(x)$ finitamente soddisfacibile in M allora $\varphi(M^x; c \upharpoonright i) \neq \emptyset^{[410]}$. Per definizione questo significa che

$$c_i \perp_M (c \upharpoonright i).$$

Si dimostra l'equivalenza elementare.

Per definizione si ha che

$$c_i \models p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i), \quad c_{i+1} \models p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i+1)$$

In particolare, dalla seconda relazione, segue che

$$c_{i+1} \models p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i) \subseteq p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i+1)$$

Per la completezza di $p(x)$ segue $c_i \equiv_{M, c \upharpoonright i} c_{i+1}$.

(2. \Rightarrow 1.): Sia $q(x) = \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(M, \bar{c}) \mid \models \varphi(c_i) \text{ per infiniti } i < \omega\}$. È evidente che in realtà

$$q(x) = \{\varphi(x) \in \mathcal{L}(M, \bar{c}) \mid \models \varphi(c_i) \text{ per cofiniti } i < \omega\}.$$

Infatti “ \supseteq ” è ovvio, mentre per il viceversa, se per infiniti c_i vale $\varphi(c_i)$, allora in particolare esisterà $I \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi(x) \in \mathcal{L}(M, c \upharpoonright I), \quad \varphi(c_I)$$

e allora vale anche $\varphi(c_j)$ per ogni $j > I$, in quanto

$$c_j \equiv_{M, c \upharpoonright I} c_I$$

per ogni $j > I$.

In particolare $q(x)$ è chiuso per congiunzioni e finitamente soddisfacibile (ne sono testimoni i c_i).

Quindi $q(x)$ è finitamente soddisfacibile in M (poiché M è [sottostruttura elementare](#) di \mathcal{U}).

Sia quindi $p(x) \supseteq q(x)$, $p(x) \in S(\mathcal{U})^{[411]}$. Questo è finitamente soddisfacibile in M in quanto lo è in \mathcal{U} .

$\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ è sequenza di Morley di $p(x)$ su M

Si deve dimostrare che $c_i \models p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i)$ per ogni $i \in \omega$.

Se per qualche c_i e per qualche $\varphi(x; c \upharpoonright i) \in p(x) \upharpoonright M, (c \upharpoonright i)$ si avesse $\neg \varphi(c_i; c \upharpoonright i)$, allora per ogni $j > i$ si avrebbe (siccome $c_j \equiv_{M, (c \upharpoonright i)} c_i$)

$$\neg \varphi(c_j; c \upharpoonright i)$$

e pertanto $\neg \varphi(x; c \upharpoonright i) \in q(x)$. Assurdo perché $q(x) \subseteq p(x)$ e $p(x)$ finitamente soddisfacibile. ■

1134 Tipo completo

Sia \mathcal{L} un linguaggio del prim'ordine, M una \mathcal{L} -struttura e $A \subseteq M$.

Definizione 1. Un tipo $p(x)$ si dice completo su A se per ogni formula con parametri $\varphi(x) \in \mathcal{L}(A)$ si ha

$$\varphi(x) \in p(x) \quad \vee \quad \neg\varphi(x) \in p(x).$$

- L'insieme dei tipi completi su A finitamente soddisfacibili si indica con $S(A)$.
- L'insieme dei tipi di variabile libera x completi su A finitamente soddisfacibili si indica con $S_x(A)$.

1135 Relazione eredi-coeredi

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $M \preceq \mathcal{U}$ un modello.

Definizione 1. Siano $a \in \mathcal{U}^x$, $b \in \mathcal{U}^z$. a è indipendente da b su M , e si scrive

$$a \perp\!\!\!\perp_M b$$

se il tipo $\text{tp}(a/M, b)$ è finitamente soddisfacibile in $M^{[412]}$.

Osservazione. LSASE:

1. $a \perp\!\!\!\perp_M b$;
2. per ogni $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(M)$

$$\varphi(a; b) \implies \varphi(m; b) \text{ per qualche } m \in M^x;$$

3. a appartiene alla chiusura (topologica) di M^x nella (M, b) -topologia di \mathcal{U}^x .

Osservazione. Si definisce il tipo

$$x \perp\!\!\!\perp_M b = \{\neg\varphi(x, b) \mid \varphi(x; z) \in \mathcal{L}(M), \varphi(M^x, b) = \emptyset\}$$

soddisfatto da tutti i seguenti elementi:

$$a \vDash x \perp\!\!\!\perp_M b \iff a \perp\!\!\!\perp_M b.$$

Invece $a \perp\!\!\!\perp_M z$ non è un tipo. Vedi Remark 14.7 e Esercizio 14.13 di .

Lemma 2. Valgono le seguenti proprietà.

1. Se $a \perp\!\!\!\perp_M b$ allora $fa \perp\!\!\!\perp_M fb$ per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/M)$. (invarianza)
2. $a \perp\!\!\!\perp_M b$ sse $a_0 \perp\!\!\!\perp_M b_0$ per ogni $a_0 \subseteq a$, $b_0 \subseteq b$ sottotuple finite. (carattere finito)

3. Se $a \perp_M b, c$ e $c \perp_M b$ allora $a, c \perp_M b$. (transitività)
4. Se $a \perp_M b$, per ogni c esiste $a' \equiv_{M,b} a$ e $a' \perp_M b, c$. (coheir extension)
5. Se $a \perp_M b_1, b_2$ e $b_1 \equiv_M b_2$ allora $b_1 \equiv_{M,a} b_2$. (non-splitting)

Dimostrazione. 1. Se $a \perp_A b$ allora $fa \perp_A fb$ per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$.

dim. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $\mathcal{U} \models \varphi(fa, fb)$; allora $\mathcal{U} \models \varphi(a; b)$ poiché f automorfismo.

Dunque, per ipotesi, $\varphi(\mathcal{U}^x; b) \cap A^x \neq \emptyset$ e pertanto

$$\varphi(\mathcal{U}^x; fb) \cap A^x \neq \emptyset$$

poiché $\varphi(\mathcal{U}^x; fb) = f[\varphi(\mathcal{U}^x; b)]$ in quanto $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$; quindi

$$\varphi(\mathcal{U}^x; fb) \cap A^x = f[\varphi(\mathcal{U}^x; b)] \cap A^x = \varphi(\mathcal{U}^x; b) \cap A^x \neq \emptyset.$$

2. $a \perp_A b$ sse $a_0 \perp_A b_0$ per ogni $a_0 \subseteq a, b_0 \subseteq b$ finiti.

dim. (\Rightarrow): Sia $\varphi(x_0; z_0) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $\mathcal{U} \models \varphi(a_0; b_0)$ (con $|x_0| = |a_0|, |z_0| = |b_0|$). Inoltre, $\varphi(x_0, z_0) = \varphi(x; z)$, con $|x| = |a|$ e $|z| = |b|$, e pertanto

$$\mathcal{U} \models \varphi(a; b).$$

Per ipotesi, quindi, $\varphi(\mathcal{U}^x; b) \cap A^x \neq \emptyset$ e dunque anche $\varphi(\mathcal{U}^x; b_0) \cap A^x \neq \emptyset$. Proiettando un elemento di $\varphi(\mathcal{U}^x; b_0) \cap A^x$ in A^{x_0} si ottiene che $\varphi(\mathcal{U}^{x_0}; b_0) \cap A^{x_0} \neq \emptyset$.

(\Leftarrow): Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $\mathcal{U} \models \varphi(a; b)$.

Siano $a_0 \subseteq a, b_0 \subseteq b$ le sottostringhe finite che compaiono in $\varphi(a; b)$, sicché si abbia

$$\mathcal{U} \models \varphi(a_0, b_0).$$

Allora, per ipotesi, $\varphi(\mathcal{U}^{x_0}; b_0) \cap A^{x_0} \neq \emptyset$. Dunque $\varphi(\mathcal{U}^{x_0}; b) \cap A^{x_0} \neq \emptyset$.

In particolare, sia $v_0 \in A^{x_0}$ tale che $\mathcal{U} \models \varphi(v_0; b)$. È possibile estendere naturalmente v_0 ad un elemento $v \in A^x$ tale che $\mathcal{U} \models \varphi(v; b)$ e pertanto

$$\varphi(\mathcal{U}^x; b) \cap A^x \neq \emptyset.$$

3. Se $a \perp_A c, b$ e $c \perp_A b$ allora $a, c \perp_A b$.

dim. Con (i) si indica l'ipotesi $a \perp_A c, b$; con (ii) l'ipotesi $c \perp_A b$.

Sia $\varphi(x; y; z) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $\models \varphi(a; c; b)$. Allora per (i) si ha che

$$\varphi(\mathcal{U}^x; c; b) \cap A^x \neq \emptyset$$

e quindi esiste $a' \in A^x$ tale che $\models \varphi(a'; c; b)$. Inoltre $\varphi(a'; y; z) \in \mathcal{L}(A)$.

Per (ii) si ha quindi che

$$\varphi(a'; \mathcal{U}^y; b) \cap A^y \neq \emptyset$$

e dunque esiste $c' \in A^y$ tale che $\models \varphi(a'; c'; b)$.

Pertanto $\varphi(\mathcal{U}^x; \mathcal{U}^y; b) \cap A^{x:y} \neq \emptyset$ (ne è rappresentante (a', c')) e quindi $a, c \perp_A b$.

4. Se $a \perp_A b$ allora esiste $a' \equiv_{A,b} a$ tale che $a' \perp_A b, c$

dim. Per ipotesi $\text{tp}(a/A, b)$ è finitamente soddisfacibile in A , allora (Prop. 14.3) esiste $p(x)$ tipo globale finitamente soddisfacibile in A che lo estende.

Allora un qualsiasi $a' \models p(x) \upharpoonright_{A,b,c}$ soddisfa la tesi. Tale a' esiste poiché $p(x) \upharpoonright_{A,b,c}$ è un tipo piccolo.

a' soddisfa la tesi poiché $\text{tp}(a/A, b) \subseteq p(x) \upharpoonright_{A,b,c}$ e dunque $a' \equiv_{A,b} a$ ed inoltre, se $\varphi(x; y; z) \in \mathcal{L}(A)$ è tale che

$$\mathcal{U} \models \varphi(a', b, c)$$

allora per completezza di p si ha $\varphi(x; b; c) \in p(x) \cap \mathcal{L}(M, b, c) = p(x) \upharpoonright_{A,b,c}$: per finita soddisfacibilità di $p(x) \upharpoonright_{A,b,c}$ in A segue che $\varphi(\mathcal{U}^x; b; c) \cap A^x \neq \emptyset$ (e quindi $a' \perp_A b, c$).

5. Se $a \perp_A b_1, b_2$ e $b_1 \equiv_A b_2$ allora $b_1 \equiv_{A,a} b_2$.

dim. Sia $p(x)$ tipo globale finitamente soddisfacibile in A che estende $\text{tp}(a/A, b_1, b_2)$.

Allora per ogni $c \models p(x) \upharpoonright_{A,b_1,b_2}$ si ha $b_1 \equiv_{A,c} b_2$.

Infatti, sia $\varphi(x; y) \in \mathcal{L}(A)$ tale che $\varphi(c; b_1)$ (ovvero $\varphi(c; y) \in \text{tp}(b_1/A, c)$). Siccome $\varphi(x; b_1) \in p(x)$ ^[413] allora $\varphi(x; b_2) \in p(x)$.

Se per assurdo $\varphi(x; b_2) \notin p(x)$ allora $\neg\varphi(x; b_2) \in p(x)$. Per finita soddisfacibilità di $p(x)$ in A , esiste $d \in A$ tale che

$$\varphi(d; b_1) \wedge \neg\varphi(d, b_2).$$

Assurdo poiché $b_1 \equiv_A b_2$.

Pertanto, dato che $\varphi(x; b_2) \in p(x)$ allora $\varphi(x; b_2) \in p(x) \upharpoonright_{A,b_1,b_2}$ e dunque $\varphi(c; b_2)$ ovvero $\varphi(c; y) \in \text{tp}(b_2/A, c)$. Per simmetria quindi $b_1 \equiv_{A,c} b_2$.

In particolare, se $a \perp_A b_1, b_2$ allora $a \models p(x) \upharpoonright_{A,b_1,b_2} \supseteq \text{tp}(a/A, b_1, b_2)$. ■

1136 Restrizione di un tipo ad un insieme di parametri

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una teoria completa senza [modelli](#) finiti e \mathcal{U} un [modello](#) saturo di [cardinalità](#) [inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello](#) mostro.

Se $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è un tipo, con $p(x) \upharpoonright A$ si intende

$$p(x) \upharpoonright A := p(x) \cap \mathcal{L}(A)$$

1137 Teorema di Ramsey

Si veda la Sezione 15.1 di

[Notazione:](#)

- per $k \in \mathbb{N}$, $(k) = \{1, \dots, k\}$
- per I insieme e λ cardinale, si indica con

$$\binom{I}{\lambda} = I^{(\lambda)} = \{J \subseteq I \mid |J| = \lambda\}.$$

l'insieme dei sottoinsiemi di I di cardinalità fissata.

Definizione 1. Una colorazione per un insieme $M^{(n)}$ è una funzione

$$f : M^{(n)} \rightarrow (k]$$

per qualche $n, k \in \omega$ fissato.

Definizione 2. Dato un insieme M ed una colorazione $f : M^{(n)} \rightarrow (k)$, $H \subseteq M$ è monocromatico se la restruzione $f \upharpoonright H^{(n)}$ è costante.

Teorema 3. Per ogni M insieme infinito e per ogni colorazione

$$f : \binom{M}{n} \rightarrow (k)$$

esiste $H \subseteq M$ infinito e monocromatico.

Dimostrazione. Sia \mathcal{L} il linguaggio del prim'ordine contenente k relazioni n -arie:

$$\mathcal{L} = \{r_i \mid i \in (k)\}$$

e sia \mathcal{M} la \mathcal{L} -struttura di dominio M , in cui

$$r_i^{\mathcal{M}} := \{(a_1, \dots, a_n) \mid f(\{a_1, \dots, a_n\}) = i\}.$$

Sia $\mathcal{U} \succeq \mathcal{M}^{[414]}$ un **modello saturo mostro**. Si noti che esiste una formula del prim'ordine che afferma che $r_i(x_1, \dots, x_n)$ rappresentano una colorazione di $M^{(n)}$ (ovvero che le relazioni sono simmetriche e sono un “ricoprimento”), e pertanto, per elementarietà, questo vale anche in \mathcal{U} .

Sia x una variabile di lunghezza 1 e sia $q(x)$ il tipo $x \notin M$. Questo è finitamente soddisfacibile, e pertanto esiste un tipo globale $p(x) \supseteq q(x)$, $p(x) \in S(\mathcal{U})$ finitamente soddisfacibile in M . Inoltre $p(x)$ è invariante su M .

Sia $\bar{c} = \langle c_i \mid i < \omega \rangle$ una sequenza di coeredi di $p(x)$ su M .

In particolare, siccome \bar{c} è un sequenza di Morley su $p(x)$ invariante su M , allora è una sequenza di indiscernibili su M . Pertanto per ogni $I, J \in \omega^{(n)}$

$$c \upharpoonright I \equiv_M c \upharpoonright J.$$

e dunque, per ogni $i = 1, \dots, k$

$$r_i(c \upharpoonright I) \iff r_i(c \upharpoonright J)$$

Segue che $\{c_i \mid i < \omega\}$ è monocromatico (WLOG di colore 1). Si osservi però che questa sequenza è in \mathcal{U} , non in M .

Si vuole costruire per induzione una sequenza $\bar{a} = \langle a_i : i < \omega \rangle$ in M monocromatica di colore 1.

Per induzione su i : si supponga per ipotesi induttiva che tutte le sottosequenze di lunghezza n di

$$(a \upharpoonright i)^\frown (c \upharpoonright n),$$

dove “ \frown ” rappresenta la concatenazione tra [stringhe](#), abbiano lo stesso colore 1. Si cerca quindi $a_i \in M$ in maniera che

$$(a \upharpoonright i)^\frown \textcolor{red}{a}_i \frown (c \upharpoonright n) = (a \upharpoonright i+1)^\frown (c \upharpoonright n)$$

abbia la stessa proprietà.

Siccome \bar{a} è sequenza di indiscernibili su $M^{[415]}$ in particolare

$$(a \upharpoonright i)^\frown (c \upharpoonright n) \frown c_n$$

ha tutte le sottostringhe di lunghezza n di colore 1 (poiché $a \upharpoonright i \subseteq M$).

In particolare esiste una formula $\varphi \in \mathcal{L}$ tale che $\varphi(a \upharpoonright i; c \upharpoonright n; c_n)$ affermi che tutte le sottosequenze di lunghezza n della stringa abbiano colore 1. Questa formula per sua natura è simmetrica nelle variabili libere.

Per la [caratterizzazione delle sequenze di coeredi](#) si ha che

$$c_n \Downarrow_M c \upharpoonright n$$

e dunque per [definizione](#) esiste $\mathbf{a} \in M$ tale che

$$\varphi(a \upharpoonright i; c \upharpoonright n; \textcolor{red}{a})$$

e, per l'osservazione di cui sopra,

$$\varphi(a \upharpoonright i; \mathbf{a}; c \upharpoonright n).$$

Quindi la stringa

$$(a \upharpoonright i)^\frown \mathbf{a} \frown (c \upharpoonright n)$$

è monocromatica di colore 1. Ponendo $a_i := \mathbf{a}$ si ha la tesi. ■

1138 Lemma del diagramma elementare

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Vedi Lemma 5.6 di

Corollario 1. Sia M è un [modello](#) infinito, c è una sua [enumerazione](#). Se^[416]

$$M, d \models q(z) := \text{tp}_M(c)$$

allora, detta $N = \text{rng } d$, si ha che N è [sottostruttura elementare](#) di M .

1139 Relazione erede-coerede stazionaria

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Sia $M \preceq \mathcal{U}$ un modello.

Definizione 1. La relazione eredi-coeredi \perp_M si dice stazionaria se per ogni $a, b \in \mathcal{U}^x$ tuple finite:

$$a \equiv_M x \perp_M b$$

è un tipo completo su M, b .

Definizione 2. La relazione eredi-coeredi \perp_M si dice n-stazionaria se per $|x| = n$ si ha:

$$a \equiv_M x \perp_M b$$

è un tipo completo su M, b .

Osservazione. Se \perp_M è 1-stazionaria e $|x| = 1$ allora per ogni a, a', b :

$$(a \perp_M b \wedge a' \equiv_M a) \implies (a' \perp_M b \wedge a' \equiv_{M,b} a).$$

Dimostrazione. DA FINIRE ■

DA FINIRE

Proposizione 3. Se per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}(M)$ tale che

$$\varphi(M^x) = \psi(M^x),$$

allora \perp_M è stazionaria, ovvero:

$$a \equiv_M x \perp_M b.$$

è un tipo completo su M, b .

Dimostrazione. Sia $\varphi(x) = \varphi(x; b)$ per $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ e $b \in \mathcal{U}^z$.

Siano $a_1, a_2 \in \mathcal{U}^x$ tali che $a_1 \equiv_M a_2$ e $a_1 \perp_M b, a_2 \perp_M b$. Voglio mostrare che $\varphi(a_1, b) \longleftrightarrow \varphi(a_2, b)$.

Sappiamo che $\varphi(a_i, b) \longleftrightarrow \psi(a_i)$ perché $\varphi(M^x) = \psi(M^x)$.

Siccome $a_1 \equiv_M a_2$ allora $\psi(a_1) \longleftrightarrow \psi(a_2)$. ■

AGGIUNGERE Remark 14.12 di

1140 Estensione semigruppo a Modello Mostro

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

- Sia S un [semigruppo](#), \mathcal{L} un [linguaggio](#) che estende il linguaggio dei gruppi $\{\cdot\}$, con \cdot funzione binaria.
- Sia $\mathcal{U} \succeq S$ un [\$\mathcal{L}\$ -modello mostro](#), ovvero \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$.
- Pertanto anche \mathcal{U} è un semigruppo.

1140.1 Operazione di semigruppo

Definizione 1. Per due insiemi $A, B \subseteq \mathcal{U}$ si definisce

$$A * B := \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B, a \perp_S b\}.$$

dove \perp_S è la [relazione eredi-coeredità](#).

Notazione: per $a, b \in \mathcal{U}$, ricordando la definizione di [orbita](#) $\mathcal{O}(a/S)$:

$$\mathcal{O}(a/S) = \{fa \mid f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)\}$$

si scrive

$$\begin{aligned} A * b &:= A * \mathcal{O}(b/S) \\ a * B &:= \mathcal{O}(a/S) * B \\ a * b &:= \mathcal{O}(a/S) * \mathcal{O}(b/S) \end{aligned}$$

Osservazione. Se $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$, allora

$$A' * B' \subseteq A * B.$$

Inoltre, se B è invariante su S allora per ogni $b \in B$ si ha

$$\mathcal{O}(b/S) \subseteq B$$

e quindi

$$A * b \subseteq A * B.$$

Proposizione 2. Siano $A, B \subseteq \mathcal{U}$ piccoli, $b \in \mathcal{U}$.

- Se A, B sono invarianti su S , allora $A * B$ è invariante su S .
- Se A è tipo-definibile (su S) allora $A * b$ è tipo-definibile.

Lemma 3. Se A, B, C sono invarianti su S allora

$$A * (B * C) \subseteq (A * B) * C.$$

Dimostrazione. Sia $a \cdot b \cdot c \in A * (B * C)$. Allora

$$b \perp_S c, \quad a \perp_S b \cdot c$$

Per il Lemma(4) trovo a' tale che^[417]

$$a \equiv_{S,b \cdot c} a', \quad a' \perp_S b \cdot c, b, c \quad (29)$$

- Siccome A è **S-invariante**, allora $a' \in A$.

Infatti se $a' \equiv_S a$ allora

$$a' \in \mathcal{O}(a'/S) = \mathcal{O}(a/S)$$

ed in particolare $a' = fa$ per qualche $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$.

- La (29) implica che $a' \perp_S b, c$; unito al fatto che $b \perp_S c$ per il Lemma(3) si ottiene che $a', b \perp_S c$. Questo implica che^[418]

$$a' \cdot b \perp_S c. \quad (30)$$

- Inoltre la (29) implica anche che

$$a' \perp_S b \quad (31)$$

Siccome $a \equiv_{S,b \cdot c} a'$ allora $a \cdot b \cdot c \equiv_S a' \cdot b \cdot c$.

Infatti, se $\varphi(y) \in \mathcal{L}(S)$ è tale che $\models \varphi(a \cdot b \cdot c)$ allora, detta

$$\psi(x) := \varphi(x \cdot b \cdot c) \in \mathcal{L}(S, b \cdot c)$$

si ottiene che $\models \psi(a)$ e, per ipotesi, $\models \psi(a')$, ovvero

$$\models \varphi(a' \cdot b \cdot c).$$

Per simmetria si ha la tesi, ovvero

$$a \cdot b \cdot c \equiv_S a' \cdot b \cdot c. \quad (32)$$

Quindi, combinando la (30) e la (31) si ottiene che

$$a' \cdot b \cdot c \in (A * B) * C.$$

Inoltre, per la (32) si ha che

$$\mathcal{O}(a' \cdot b \cdot c/S) = \mathcal{O}(a \cdot b \cdot c/S) \ni a \cdot b \cdot c$$

e pertanto

$$a \cdot b \cdot c = g(a' \cdot b \cdot c)$$

per qualche $g \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$. Siccome $(A * B) * C$ è **S-invariante** e $a' \cdot b \cdot c \in (A * B) * C$ allora

$$a \cdot b \cdot c \in (A * B) * C. \quad \blacksquare$$

Proposizione 4. Sia \perp_S 1-stazionario.

1. Se $a \perp_S b$ e $a' \equiv_S a$ allora $a \cdot b \equiv_S a' \cdot b$.
2. Se $a \perp_S b$, $a' \perp_S b'$, $a' \equiv_S a$, $b' \equiv_S b$ allora $a \cdot b \equiv_S a' \cdot b'$.
3. Per ogni $a, b \in \mathcal{U}$ tali che $a \perp_S b$ si ha che

$$a * b = \mathcal{O}(a \cdot b / S).$$

Dimostrazione. Per definizione

$$a \equiv_S x \perp_S b$$

è un [tipo completo su \$S\$](#) .

1. Se $a \perp_S b$ e $a' \equiv_S a$, allora $a \equiv_{S,b} a'$, e pertanto $a, b \equiv_S a', b$. Segue la tesi.
2. Supponiamo per assurdo che $a \cdot b \not\equiv_S a' \cdot b'$.

Sia $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$ tale che $fb' = b$ (poiché $b' \equiv_S b$ allora $b' \in \mathcal{O}(b/S)$).

Allora $a \cdot b \not\equiv_S f(a' \cdot b')$ in quanto

$$\mathcal{O}(f(a' \cdot b')/S) = \mathcal{O}(a' \cdot b/S) \neq \mathcal{O}(a \cdot b/S).$$

Ma siccome f è morfismo di semigruppi allora $f(a' \cdot b') = f(a') \cdot f(b') = a'' \cdot b$ per qualche $a'' \in \mathcal{O}(a'/S) = \mathcal{O}(a/S)$, $a'' \equiv_S a$.

Quindi si ottiene che $a \cdot b \not\equiv_S a'' \cdot b$. Questo è assurdo in quanto contraddice il punto 1.

3. Si deve dimostrare che

$$\mathcal{O}(a \cdot b/S) = a * b := \mathcal{O}(a/S) * \mathcal{O}(b/S)$$

dove, per definizione di $*$:

$$\mathcal{O}(a/S) * \mathcal{O}(b/S) = \{a' \cdot b' \mid a' = fa, b' = gb, a' \perp_S b', f, g \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)\}.$$

(\subseteq): Se $d \in \mathcal{O}(a \cdot b/S)$ allora $d = f(a \cdot b)$ per $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$. Posto $a' = fa$, $b' = fb$ si ha $d \in a * b$.

(\supseteq): Sia $a' \cdot b' \in a * b$. Allora

$$a' \equiv_S a, \quad b' \equiv_S b, \quad a' \perp_S b'$$

e pertanto, per il punto 2., si ha che $a' \cdot b' \equiv_S a \cdot b$, ovvero $a' \cdot b' \in \mathcal{O}(a \cdot b/S)$. ■

Teorema 5. Se \perp_S è 1-stazionaria, e A, B, C sono invarianti su S allora

$$A * (B * C) = (A * B) * C.$$

Dimostrazione. Considero

$$A = \mathcal{O}(a/S); \quad B = \mathcal{O}(b/S); \quad C = \mathcal{O}(c/S).$$

Allora si ha che $a \perp_S b \cdot c$ e $b \perp_S c$.

[DA FINIRE](#) ■

1140.2 Semigruppo di Ellis

[DA FINIRE](#)

Vedi anche [Teoria dei modelli \[CORSO\]](#)/Lezione 15

1140.3 Insiemi idempotenti e Teorema di Ellis

Definizione 6. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{U}$. A è idempotente se

$$A * A \subseteq A.$$

Osservazione. Se A è idempotente e $B \subseteq A$ allora $A * B$ è idempotente:

$$(A * B) * (A * B) \subseteq (A * A) * (A * A) \subseteq A * A \subseteq A.$$

Teorema 7. (Ellis). Si suppona \perp_S 1-stazionaria. Se A è tipo-definibile su S e idempotente, allora esiste $b \in A$ tale che $\mathcal{O}(b/S)$ è idempotente.

Dimostrazione. Sia $B \subseteq A$ un \perp -minimale tra gli idempotenti tipo-definibili su S ^[419].

Prendiamo $b \in B$. Allora:

- $B * b$ è tipo definibile su S per la Proposizione 2;
- Siccome B è tipo-definibile su S , allora B è invariante su S , e pertanto

$$B * b \subseteq B * B \subseteq B.$$

- Inoltre

$$(B * b) * (B * b) \subseteq B * (B * b) = (B * B) * b \subseteq B * b$$

e pertanto $B * b$ idempotente. (L'uguaglianza è in virtù del Teorema 5)

Per minimalità di B si ha che $B * b = B$.

Sia ora

$$B' := \{a \in B \mid a \perp_S b, a \cdot b \equiv_S b\} \subseteq B.$$

Questo insieme è tipo-definibile su S ,^[420] ed è invariante su S : sia $a \in B'$ e $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$:

- $fa \in B$ in quanto B è S -invariante;
- ovviamente $fa \equiv_S a$, e inoltre $a \perp_S b$, quindi per la Proposizione 4(1)

$$fa \cdot b \equiv_S a \cdot b \equiv_S b;$$

- $fa \perp_S b$ poiché \perp_S è 1-stazionaria e $fa \equiv_S a$ e $a \perp_S b$.

quindi $fa \in B'$, ovvero B' è S -invariante. Pertanto B' è tipo-definibile su S .

Si ha che $B' \neq \emptyset$:

- siccome $B * b = B$, allora in particolare esiste $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/S)$ ed esiste $a \in B$ tale che

$$a \cdot fb = b, \quad a \perp_S fb$$

ovvero, per $f^{-1} \in \text{Aut}(\mathcal{U}/B)$ e il Lemma(1):

$$f^{-1}a \cdot b = f^{-1}b \equiv_S b, \quad f^{-1}a \perp_S b$$

- inoltre, $f^{-1}a \in B$, in quanto B è A -invariante;
- quindi $f^{-1}(a) \in B'$.

Inoltre B' è idempotente. Infatti, sia $a_1 \cdot a_2 \in B' * B'$:

$$a_1 \perp_S a_2, \quad a_1 \cdot b \equiv_S b \equiv_S a_2 \cdot b, \quad a_1 \perp_S b, \quad a_2 \perp_S b.$$

- Siccome $a_1 \perp_S a_2$ allora per il Lemma(4) esiste $a'_1 \equiv_{S,a_2} a_1$ tale che

$$a'_1 \perp_S a_2, b.$$

Poiché \perp_S è 1-stazionaria ed in particolare $a'_1 \equiv_S a_1$ allora

$$a_1 \perp_S a_2, b.$$

Per ipotesi inoltre $a_2 \perp_S b$ e dunque, per il Lemma(3) $a_1, a_2 \perp_S b$ e pertanto

$$a_1 \cdot a_2 \perp_S b.$$

- Si consideri pertanto la seguente uguaglianza, valida per il Teorema 5

$$\mathcal{O}(a_1/S) * (\mathcal{O}(a_2/S) * \mathcal{O}(b/S)) = (\mathcal{O}(a_1/S) * \mathcal{O}(a_2/S)) * \mathcal{O}(b/S)$$

Espandendo la parte a sinistra dell'uguale si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(a_1/S) * (\mathcal{O}(a_2/S) * \mathcal{O}(b/S)) &= \mathcal{O}(a_1/S) * \mathcal{O}(a_2 \cdot b/S) && \text{poiché } a_2 \perp_S b \\ &= \mathcal{O}(a_1/S) * \mathcal{O}(b/S) && \text{poiché } a_2 \cdot b \equiv_S b \\ &= \mathcal{O}(a_1 \cdot b/S) && \text{poiché } a_2 \perp_S b \\ &= \mathcal{O}(b/S) && \text{poiché } a_1 \cdot b \equiv_S b \end{aligned}$$

dove si è fortemente utilizzata la Proposizione 4(3).

Espandendo invece la parte a destra dell'uguale si ottiene:

$$\begin{aligned} (\mathcal{O}(a_1/S) * \mathcal{O}(a_2/S)) * \mathcal{O}(b/S) &= \mathcal{O}(a_1 \cdot a_2/S) * \mathcal{O}(b/S) && \text{poiché } a_1 \perp_S a_2 \\ &= \mathcal{O}(a_1 \cdot a_2 \cdot b/S) && \text{poiché } a_1 \cdot a_2 \perp_S b. \end{aligned}$$

Pertanto si ha che $\mathcal{O}(b/S) = \mathcal{O}(a_1 \cdot a_2 \cdot b/S)$ ovvero che

$$a_1 \cdot a_2 \cdot b \equiv_S b.$$

- I due punti precedenti affermano che $a_1 \cdot a_2 \in B'$, ovvero che

$$B' * B' \subseteq B'.$$

Quindi, per minimalità di B si ha $B' = B$, ovvero che $b \in B'$:

$$b \perp\!\!\!\perp_S b, \quad b \cdot b \equiv_S b$$

e la Proposizione 4(3) si ha che

$$\mathcal{O}(b/S) * \mathcal{O}(b/S) = \mathcal{O}(b \cdot b/S) = \mathcal{O}(b/S)$$

Pertanto $\mathcal{O}(b/S)$ è idempotente. ■

1140.4 Gruppo di Ellis

[DA FINIRE](#)

Vedi anche [Teoria dei modelli \[CORSO\]](#)/Lezione 15

1141 Teorema di Hindman

Teorema 1. Per ogni [colorazione finita](#) di \mathbb{N} esiste un [insieme infinito](#) $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$\left\{ \sum_{a \in A} a \mid A \subseteq H \text{ finito} \right\}$$

è [monocromatico](#).

Osservazione. Questo teorema dice “quasi” che esiste un insieme monocromatico chiuso per somma. Infatti, mancano le somme di lunghezza arbitraria dello stesso elemento.

Dimostrazione. Si utilizza la “[Estensione semigruppo a Modello Mostro](#)”

Sia

$$\mathcal{A} := \{a \in \mathcal{U} \mid a \neq 0\}$$

che è definibile e idem-potente. Quindi contiene b_0 tale che $\mathcal{O}(b_0/\mathbb{N})$ è idempotente.

Sia $\bar{b} = \langle b_i : i < \omega \rangle$ sequenza di coeredi su N .

Si noti che $\text{fp}(\bar{b})$ è monocromatica (ha colore 1). Infatti

$$b_0 \cdot b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_0, \quad b_0 \cdot b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_i$$

poiché $b_1 \perp\!\!\!\perp_{\mathbb{N}} b_0$.

Definiamo per induzione una sequenza $\bar{a} = \langle a_i : i < \omega \rangle$ tale che

$$\text{fp}(\bar{a} \upharpoonright_n, b_1, b_0)$$

ha colore 1. (definibile da $\varphi(a \upharpoonright_n, b_1, b_0)$)

Lo assumo per ipotesi induttiva. Voglio trovare a_n . Siccome $b_1 \perp_{\mathbb{N}} b_0$ allora esiste $a_n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\varphi(a \upharpoonright_n, a_n, b_0)$$

e quindi $\text{fp}(a \upharpoonright_n, a_n, b_0)$ ha colore 1. Voglio arrivare a mostrare che $\text{fp}(a \upharpoonright_n, a_n, b_1, b_0)$ ha colore 1.

Siccome $b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$, sicuramente

$$a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_0 \text{ ha lo stesso colore di } a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_1$$

Se per assurdo $a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_1 \cdot b_0$ ha colore diverso, siccome $b_1 \perp_{\mathbb{N}} b_0$ ho

$$b_1 \cdot b_0 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$$

per idempotenza quindi anche $a_{i_1} \cdot \dots \cdot a_{i_n} \cdot b_0$ ha un colore diverso. Assurdo. ■

1142 Semigruppo

Un semigruppo è un insieme dotato di un'operazione binaria associativa.

[DA FINIRE](#)

1143 Omomorfismo di semigruppi

1144 Teoria dei gruppi

1145 Insieme tipo-definibile su un insieme è invariante

Si utilizza la [notazione della Teoria dei Modelli](#).

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessible](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Proposizione 1. Se $B \subseteq \mathcal{U}$ è [tipo-definibile su \$A\$](#) , ovvero esiste $p(x) \subseteq \mathcal{L}(A)^{[421]}$ tale che $B = p(\mathcal{U}^x)^{[422]}$, allora B è [invariante su \$A\$](#) .

Dimostrazione. Sia $b \in B$ e sia $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$.

$$b \in p(\mathcal{U}^x) = \bigcap_{\varphi \in p} \varphi(\mathcal{U}^x)$$

e quindi

$$f(b) \in f[p(\mathcal{U}^x)] = \bigcap_{\varphi \in p} f[\varphi(\mathcal{U}^x)] = \bigcap_{\varphi \in p} \varphi(\mathcal{U}^x) = p(\mathcal{U}^x)$$

come dimostrato in “[Insieme definibile su un insieme è invariante](#)” e “[Scambio di unioni/intersezioni e immagini/retroimmagini di funzione](#)”. ■

1146 Scambio di unioni/intersezioni e immagini/retroimmagini di funzione

1147 Tipo di Ehrenfeucht-Mostowski

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ e sia $(I, <)$ un [insieme parzialmente ordinato](#) senza [elementi massimi](#)

Definizione 1. Sia $\bar{a} := \langle a_i : i \in I \rangle$, con $a_i \in \mathcal{U}^z$.

Sia $\bar{x} = \langle x_i : i < \omega \rangle$. Si definisce il [tipo](#) di Ehrenfeucht-Mostowski come

$$\text{EM-tp}(\bar{a}/A) := \left\{ \varphi(\bar{x}) \in \mathcal{L}(A) \mid \text{per ogni } J \in I^{(\omega)} : \models \varphi(a \upharpoonright J) \right\}.$$

dove $I^{(\omega)} = \{X \in \wp(I) : \text{ot}(X) = \omega\}$.

Osservazione. Siccome $\text{ot}(J) = \omega$, allora $a \upharpoonright J = \langle a_{j_i} \mid i < \omega \rangle$, con $\langle j_i \mid i < \omega \rangle$ successione ordinata in J , e pertanto ha senso la scrittura $\varphi(a \upharpoonright J)$.

Osservazione. Se \bar{a} è una [sequenza di indiscernibili](#) su A , allora $\text{EM-tp}(\bar{a}/A)$ è [completo](#).

1148 Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ e sia $(I, <)$ un [insieme parzialmente ordinato](#) senza [elementi massimi](#)

Teorema 1. Data $\bar{a} := \langle a_i : i \in I \rangle$ esiste $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ di [indiscernibili](#) su A tale che

$$\text{EM-tp}(\bar{c}/A) \supseteq \text{EM-tp}(\bar{a}/A).$$

Osservazione. La dimostrazione di questo teorema può essere svolta utilizzando il [Teorema di Ramsey](#)

1149 Estensione di sequenza di indiscernibili su un insieme ad un Modello

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ un insieme.

Proposizione 1. Sia $\bar{c} = \langle c_i : i < \omega \rangle$ sequenza di indiscernibili su A . Allora esiste un modello $M \supseteq A$ tale che \bar{c} è una sequenza di indiscernibili su M .

Dimostrazione. Sia M un modello arbitrario. Consideriamo il [Tipo di Ehrenfeucht-Mostowski](#) $\text{EM-tp}(\bar{c}/A)$ [completo](#), e definiamo

$$p(\bar{x}) := \text{EM-tp}(\bar{c}/M) \supseteq \text{EM-tp}(\bar{c}/A)$$

Per il [Teorema di Ehrenfeucht-Mostowski](#) esiste $\bar{b} \models p(\bar{x})$ sequenza di indiscernibili su M . Siccome $\bar{b} \models \text{EM-tp}(\bar{c}/A)$ allora

$$\bar{b} \equiv_A \bar{c}$$

e [pertanto](#) esiste $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$ tale che $f(\bar{b}) = \bar{c}$, ovvero \bar{c} è indiscernibile su $f[M] \supseteq A$. ■

1150 L^AT_EX - Creare Flashcard

Utilizzando il pacchetto `flashcard` è possibile creare delle flashcard in L^AT_EX(si rimanda alla documentazione^[423]): si consigliano le seguenti impostazioni

```
\documentclass[avery5388, frame]{flashcards}
\renewcommand{\cardpaper}{a4paper}
```

In particolare un MWE di Header

```
\documentclass[avery5388, frame]{flashcards}
\renewcommand{\cardpaper}{a4paper}

% pacchetti fondamentali
\usepackage[T1]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage[italian]{babel}
\usepackage[babel]{csquotes}
\usepackage{microtype}

% pacchetti utili
\usepackage{lipsum}
\usepackage{amsmath}

% Sostituisce il comando \section
\let\oldsection\section
\makeatletter
\def\section#1{\end{flashcard}\begin{flashcard}{#1}}
\makeatother

% Riscrive begin{document} e end{document}
% così da ovviare allo sfasamento
\let\olddocument\document
\let\oldenddocument\enddocument
```

```
\renewenvironment{document}%
{%
  \olddocument\begin{flashcard}{Prima}\tiny\lipsum[1]
}{%
  \end{flashcard}\oldenddocument
}
```

può essere aggiunto in un file sufficientemente ben formato e sostituisce le sezioni del documento con delle flashcard.

1151 Teorema di Hales-Jewett

Teorema 1. Sia S un semigruppo e sia $C \subseteq S$ un sotto-semigruppo tale che per ogni $a \cdot b \in C$ si ha $a \in C$ e $b \in C$ ^[424].

Dato $k \in \omega$ sia^[425]

$$\Sigma := \{\sigma_i : S \rightarrow C \text{ omomorfismo} \mid \sigma_i|_C = \text{Id}_C, i < k\}$$

Per ogni colorazione finita di C esiste $a \in S \setminus C$ tale che $\{\sigma_i(a) \mid i < k\}$ è monocromatico.

Una dimostrazione di questo può essere prodotta utilizzando gli strumenti della Teoria dei Modelli, sfruttando il Semigruppo di Ellis. Se ne lascia qui una traccia:

Dimostrazione. Sia $\mathcal{L} = \{\cdot\} \cup \wp(S) \cup \Sigma$. Sia $\mathcal{U} \succeq S$ modello mostro, e sia $\mathcal{C} = \phi(\mathcal{U}^x)$, dove

$$\phi(x) : \quad x \in C.$$

- Dal momento che la proprietà *nice* è esprimibile al prim'ordine, anche \mathcal{C} è *nice*. Pertanto $\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}$ è ideale sinistro.
- Sia $M \subseteq \mathcal{U} \setminus \mathcal{C}$ ideale sinistro minimale tipo-definibile, e sia $N \subseteq \mathcal{C}$ ideale sinistro di \mathcal{C} minimale tipo-definibile.
- Sia $v \in N$ idempotente, e sia $u \in v * M * v$ idempotente.
- Per ogni $\sigma \in \Sigma$

$$\sigma(u) \in \sigma(v) * \sigma(M) * \sigma(v) = v * \sigma(M) * v \tag{33}$$

con $\sigma(u)$ idempotente.

- $\sigma(M)$ è ideale sinistro di \mathcal{C} , in quanto σ è l'identità su \mathcal{C} :

$$\mathcal{C} * \sigma(M) = \sigma(\mathcal{C} * M) \subseteq \sigma(M).$$

- Si ha che $\sigma(M) * v \subseteq N$ e per minimalità di N :

$$\sigma(M) * v = N.$$

- Applicando alla (33): $\sigma(u) \in v * N$, ma per un lemma già visto $v * N$ è un gruppo con identità v , e quindi $\sigma(u) \equiv_S v$ per ogni $\sigma \in \Sigma$.

Dunque

$$\mathcal{U} \models \exists x \in (\mathcal{U} \setminus \mathcal{C}) \left[\bigwedge_{\sigma \in \Sigma} \text{“}\sigma(x) \text{ ha colore 1”} \right].$$

e pertanto vale anche per S . ■

1152 Colorazione

Notazione:

- per $k \in \mathbb{N}$, $(k] := \{1, \dots, k\}$
- per I insieme e λ **cardinale**, si indica con

$$\binom{I}{\lambda} = I^{(\lambda)} = \{J \subseteq I \mid |J| = \lambda\}.$$

l'insieme dei **sottoinsiemi** di I di **cardinalità** fissata.

1152.1 Colorazione di un insieme

Definizione 1. Una colorazione per un **insieme** M è una funzione

$$f : M \rightarrow (k]$$

per qualche $n, k \in \omega$ fissato.

1152.1.1 Sottoinsieme monocromatico

Definizione 2. Dato un insieme M ed una colorazione $f : M \rightarrow (k]$, $H \subseteq M$ è monocromatico se la restrizione $f \upharpoonright H$ è costante.

1152.2 Colorazione di un grafo

1153 Teorema di Van der Waerden

Teorema 1. Per ogni **colorazione** di \mathbb{N} e per ogni $k < \omega$ esiste una **progressione aritmetica** di lunghezza k **monocromatica**.

1154 Progressione Aritmetica

1155 Teorema di Szeméredi

Teorema 1. Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ con densità di Banach positiva e per ogni $k < \omega$ esiste una **progressione aritmetica** di lunghezza k contenuta in A . ■

A ha densità di Banach positiva, se

$$\limsup_{\substack{|I| \rightarrow \infty \\ I \text{ intervallo}}} \frac{|A \cap I|}{|I|} > 0.$$

1156 Densità di Banach

1157 Stile - Scala di Formalità

Vedi [HTML DA FINIRE](#)

Prompt:

CONTESTO: Eleganza classica maschile

Ho bisogno di ordinare in base alla formalità diversi outfit. Suddividi

- gli abiti in 4 o 5 livelli di formalità, spiegando come riconoscerli;
- le giacche in 4 o 5 livelli di formalità, spiegando come riconoscerle;
- i pantaloni in 2 o 3 livelli di formalità, spiegando come riconoscerli

Dopodiché, ordina le diverse combinazioni possibili dalla più formale alla meno formale, includendo le variazioni date da:

- dolcevita sottile / camicia sotto
- gilet in maglia o meno
- colori

Dopodiché a questa lista aggiungi, nel corretto livello di formalità, outfit senza giacca, con maglioni, cardigan e dolcevita spessi

1157.1 Catalogazione dei capi formalità – Città

Livello	Tipo di outfit	Caratteristiche	Accessori
1	Abito formale liscio	Worsted liscio, zero pattern	Cravatta
2	Abito formale liscio + dolcevita	Worsted liscio, look serale	Nessuno
3	Abito formale con pattern leggerissimo	Micro-pattern molto tenue	Cravatta
4	Abito semiformal liscio	Flanella leggera o worsted meno liscio	Cravatta
5	Abito semiformal liscio + dolcevita	Liscio ma non istituzionale	Nessuno
6	Abito semiformal con micro-pattern	Gessato fine, micro-check	Cravatta
7	Abito semiformal con micro-pattern + dolcevita	Pattern tenue	Nessuno
8	Abito medio con texture leggera	Flanella fine, lana "dry"	Cravatta
14	Spezzato formale	Giacca liscia, pantalone formale	Cravatta
10	Abito medio pattern evidente	POW moderato, windowpane fine	Cravatta
9	Abito medio texture leggera + dolcevita	Texture urbana sottile	Nessuno
11	Abito medio pattern evidente + dolcevita	Pattern medio, look intellettuale	Nessuno
15	Spezzato formale + dolcevita	Look formale ma moderno	Nessuno
16	Giacca formale + chino	Spezzato urbano pulito	Cravatta
18	Giacca media + pantaloni formali	Hopsack, twill, flanella leggera	Cravatta
17	Giacca formale + chino + dolcevita	Moderno, leggermente ridotto in formalità	Nessuno
19	Giacca media + pantaloni formali + dolcevita	Texture minima	Nessuno
20	Giacca media + chino	Smart casual urbano	Cravatta
21	Giacca media + chino + dolcevita	Ottimo mix urbano	Nessuno
22	Giacca media + velluto fine	Texture moderata	Nessuno
23	Giacca media + velluto fine + dolcevita	Texture + maglia	Nessuno
24	Giacca informale (tweed/panno) + pantaloni formali	Rustico-urbano bilanciato	Cravatta
25	Giacca informale + pantaloni formali + dolcevita	Accademico moderno	Nessuno
26	Giacca informale + chino	Casual urbano composto	Nessuno
28	Giacca informale + velluto	Urban-country	Nessuno
27	Giacca informale + chino + dolcevita	Smart winter casual	Nessuno
29	Giacca informale + velluto + dolcevita	Look naturale e ricco	Nessuno
30	Giacca informale + jeans	Casual curato	Nessuno
31	Giacca informale + jeans + dolcevita	Casual invernale	Nessuno
36	Maglione texturizzato + chino	Casual con texture	Nessuno
37	Maglione texturizzato + jeans	Molto casual	Nessuno

1157.2 Scala di formalità – Campagna

Livello	Tipo di outfit	Caratteristiche
1	Abito formale liscio + camicia	Worsteds lisci
2	Abito semiformale liscio + camicia	Flanella fine, worsted poco testurizzata
3	Abito semiformale liscio + dolcevita fine	Liscio ma non urbano
4	Abito medio texturizzato + camicia	Flanella, lana dry
5	Abito medio pattern evidente + camicia	POW moderato
6	Abito medio pattern evidente + dolcevita	Pattern + dolcevita
7	Abito informale in tweed fine + camicia	Texture marcata
8	Abito informale in tweed fine + dolcevita	Tweed + maglia
9	Abito informale in flanellone/tweed spesso + camicia	Ruralità
10	Abito informale spesso + dolcevita	Massima coerenza country
11	Giacca media + pantaloni formali + camicia	Hopsack o flanella leggera
12	Giacca media + pantaloni formali + dolcevita	Texture + maglia
13	Giacca media + velluto + camicia	Country-chic
14	Giacca media + velluto + dolcevita	Molto naturale
15	Giacca media + chino + camicia	Casual rurale elegante
16	Giacca media + chino + dolcevita	Perfetto equilibrio
17	Giacca informale (tweed/panno) + pantaloni formali + camicia	British country
18	Giacca informale + pantaloni formali + dolcevita	Country-intellettuale
19	Giacca informale + chino + camicia	Rustico ma composto
20	Giacca informale + chino + dolcevita	Più tecnico
21	Giacca informale + velluto + camicia	Molto country
22	Giacca informale + velluto + dolcevita	Massima coerenza rurale
23	Giacca informale + jeans + camicia	Casual rustico
24	Giacca informale + jeans + dolcevita	Casual invernale
25	Maglione fine + pantaloni formali	Pulito e pratico
26	Maglione fine + chino	Casual elegante
27	Dolcevita fine + chino	Elegante-casual rurale
28	Dolcevita fine + jeans	Casual
29	Maglione texturizzato (shetland) + chino	Country classico
30	Maglione texturizzato + jeans	Molto casual rurale

1157.3 Scaletta CITTÀ

Livello	Tipo di outfit	Caratteristiche
1	Abito liscio	Tessuto liscio, zero texture, zero pattern
2	Abito liscio + dolcevita fine	Elegante serale urbano
3	Abito liscio flanella fine	Texture minima, molto elegante
4	Spezzato formale (giacca liscia + pantalone formale)	Quasi formale, molto urbano
5	Abito liscio flanella fine + dolcevita	Elegante ma meno formale del worsted
6	Abito con micro-pattern (gessato fine, micro-check)	Pattern basso contrasto
7	Spezzato formale + dolcevita	Elegante ma non "istituzionale"
8	Abito con micro-pattern + dolcevita	Pattern tenue + sera urbana
9	Spezzato con giacca texturizzata + pantalone formale	Texture moderata, ma ancora serio
10	Abito con pattern medio (POW moderato, micro-windowpane fine)	Pattern evidente ma non informale
11	Spezzato con giacca texturizzata + pantalone formale + dolcevita	Buona coesione urbana
12	Abito con pattern medio + dolcevita	Riduce il rumore, vibe urbano
13	Abito con texture marcata (flanellone, tweed leggero, donegal fine)	Aspetto accademico classico
14	Spezzato con giacca con pattern + pantalone formale	Pattern controllato
15	Abito con texture marcata + dolcevita	Accademico urbano elegante
16	Spezzato con giacca con pattern + pantalone formale + dolcevita	Ottima coesione con tonalità scure
17	Abito con pattern forte (POW grande, windowpane evidente)	Informalità urbana elevata
18	Abito con pattern forte + dolcevita	Molto accademico, poco formale
19	Spezzato chino + giacca elegante liscia	Casual elegante urbano
20	Spezzato chino + giacca elegante liscia + dolcevita	Elegante ma rilassato
21	Spezzato chino + giacca texturizzata	Texture marcata, casual urbano
22	Spezzato chino + giacca texturizzata + dolcevita	Ottima combinazione urbana invernale
23	Maglione standalone (merino/cashmere fine)	Eleganza minima ma pulita
24	Dolcevita standalone fine	Elegante-casual
25	Maglione texturizzato (shetland leggero)	Texture evidente, urbano-casual
26	Maglione texturizzato pesante (trecce, lambswool)	Minima formalità urbana

1157.4 Scaletta CAMPAGNA

Livello	Tipo di outfit	Caratteristiche
1	Abito liscio worsted	Massima eleganza anche fuori città
2	Abito liscio flanella fine	Elegante e compatto
3	Abito liscio worsted + dolcevita	Molto elegante nel rurale
4	Abito con micro-pattern	Pattern discreto, classicità country
5	Abito con micro-pattern + dolcevita	Eleganza moderna country
6	Abito con pattern medio (POW moderato, windowpane fine)	Perfetto in campagna, molto classic country
7	Abito con texture marcata (flanellone, tweed leggero, donegal fine)	Tessuti "naturali", molto eleganti in campagna
8	Abito con pattern medio + dolcevita	Eleganza country invernale
9	Abito con pattern forte (POW grande, windowpane evidente)	Classico gentleman rurale
10	Abito con pattern forte + dolcevita	Moderno e molto coerente
11	Spezzato con giacca texturizzata + pantalone formale	Molto elegante nel rurale
12	Spezzato con giacca con pattern + pantalone formale	Pattern naturale = elegante
13	Spezzato con giacca texturizzata + pantalone formale + dolcevita	Coerentissimo in inverno
14	Spezzato con giacca con pattern + pantalone formale + dolcevita	Country classico
15	Spezzato chino + giacca elegante liscia	Casual medio
16	Spezzato chino + giacca elegante liscia + dolcevita	Casual elegante
17	Spezzato chino + giacca texturizzata	Texture tipica, molto coerente
18	Spezzato chino + giacca texturizzata + dolcevita	Country informale elegante
19	Maglione standalone fine (merino/cashmere fine)	Eleganza minima
20	Dolcevita standalone fine	Eleganza-casual
21	Maglione texturizzato (shetland leggero)	Standard country
22	Maglione texturizzato pesante (trecce, lambswool)	Tipico "uniforme rurale"

1157.5 Scaletta Mista

Livello	Tipo di outfit	Caratteristiche
1	Abito liscio worsted	Tessuto liscio, zero texture, zero pattern
2	Abito liscio worsted + dolcevita fine	Elegante serale urbano
3	Abito liscio flanella fine	Texture minima, molto elegante
6	Abito con micro-pattern (gessato fine, micro-check)	Pattern basso contrasto
4	Spezzato formale (giacca liscia + pantalone formale)	Quasi formale, molto urbano
5	Abito liscio flanella fine + dolcevita	Elegante ma meno formale del worsted
8	Abito con micro-pattern + dolcevita	Pattern tenue + sera urbana
7	Spezzato formale + dolcevita	Elegante ma non "istituzionale"
9	Spezzato con giacca texturizzata + pantalone formale	Texture moderata, ma ancora serio
10	Abito con pattern medio (POW moderato, micro-windowpane fine)	Pattern evidente ma non informale
11	Spezzato con giacca texturizzata + pantalone formale + dolcevita	Buona coesione urbana
12	Abito con pattern medio + dolcevita	Riduce il rumore, vibe urbano
14	Spezzato con giacca con pattern + pantalone formale	Pattern controllato
15	Abito con texture marcata + dolcevita	Accademico urbano elegante
16	Spezzato con giacca con pattern + pantalone formale + dolcevita	Ottima coesione con tonalità scure
19	Spezzato chino + giacca elegante liscia	Casual elegante urbano
20	Spezzato chino + giacca elegante liscia + dolcevita	Elegante ma rilassato
21	Spezzato chino + giacca texturizzata	Texture marcata, casual urbano
22	Spezzato chino + giacca texturizzata + dolcevita	Ottima combinazione urbana invernale
23	Maglione standalone (merino/cashmere fine)	Eleganza minima ma pulita
24	Dolcevita standalone fine	Elegante-casual
25	Maglione texturizzato (shetland leggero)	Texture evidente, urbano-casual
26	Maglione texturizzato pesante (trecce, lambswool)	Estetica rurale

1158 Coordinate locali su una varietà sono Cinfinito

Esempio 1. Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , e sia $p \in M$. Allora $p \in U$ per qualche (U, φ) nell'atlante di M :

$$\varphi(p) = (x_p^1, \dots, x_p^n) \in \mathbb{R}^n$$

Queste sono dette le coordinate locali di p .

Inoltre $x^i : U \rightarrow \mathbb{R} : p \mapsto x_p^i$ sono funzioni $C^\infty(U)$.

1159 Idee tesi laurea magistrale [Bibliografia]

Qui ci sono alcune fonti da leggere per capire quale strada faccia per me in merito alla tesi di laurea:

1160 Collegare le note - Zettelkasten

In un sistema Zettelkasten un buon modo iniziale per stabilire quali collegamenti tra le note sono da fare è il seguente:

idea compass:

- N - what larger pattern does this concept belong to?
- S - what more basic components is this concept made of?
- E - what is this concept similar to?
- W - what is this concept different from?

come spiegato in .

Questo può essere fatto anche in ambito matematico, anche se con qualche aggiunta:

- S' - da quali fatti segue logicamente il teorema/lemma/proposizione?

1161 Zettelkasten

1162 Relazione stabile

Siano \mathcal{X}, \mathcal{Z} due insiemi arbitrari, e sia $\pi \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ una relazione binaria. Si scriverà indifferentemente

$$(x, z) \in \pi, \quad \pi(x, z).$$

Definizione 1. π è instabile (o ha la order property) se per ogni $m < \omega$ esiste una sequenza $\langle (a_i, b_i) : i < m \rangle$, $(a_i, b_i) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ tale che

$$i < j < m \implies \pi(a_i, b_j) \wedge \neg\pi(a_j, b_i).$$

Questa sequenza prende il nome di scaletta di lunghezza m per π (o ladder sequence).

Proposizione 2. LSASE:

1. π è instabile;
2. per ogni $m < \omega$ esiste $B \subseteq \mathcal{Z}$ e $\langle a_i \mid i < m \rangle$ (con $a_i \in \mathcal{X}$) tale che

$$\pi(a_0, B) \subsetneq \pi(a_1, B) \subsetneq \cdots \subsetneq \pi(a_{m-1}, B).$$

dove $\pi(a, B) := \{b \in B \mid \pi(a, b)\}$.

1163 Relazione stabile in un Modello Mostro

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Una qualsiasi formula $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ si indende come relazione, vedendola come

$$\psi(\mathcal{U}^x; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^z.$$

Proposizione 1. Sia $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$. LSASE:

1. $\psi(x; z)$ è **stabile**;
2. non esistono **scalette di lunghezza ω** ;
3. per ogni $\langle a_i, b_i \mid i < \omega \rangle$ **sequenza** di **A -indiscernibili**

$$\psi(a_0, b_1) \longleftrightarrow \psi(a_1, b_0).$$

Teorema 2. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. LSASE:

1. $\varphi(x; z)$ è **stabile**;
2. ogni $\subseteq \mathcal{U}^z$ **esternamente definibile** è **definibile**
3. esistono sono $\leq \kappa$ insiemi esternamente definibili da $\varphi(x; z)$, ovvero $|S_\varphi(\mathcal{U})| \leq \kappa^{[426]}$.
4. ci sono $< 2^k$ insiemi esternamente definibili da $\varphi(x; z)$.

Teorema 3. Sia $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$. LSASE:

1. $\varphi(x; z)$ **stabile**;
2. il **rango binario** di $\varphi(x; z)$ è finito.

1164 Combinazione booleana di relazioni stabili è stabile

Proposizione 1. Combinazioni Booleane di **relazioni stabili** sono stabili.

Dimostrazione. Siano \mathcal{X}, \mathcal{Z} due **insiemi** arbitrari, e siano $\pi, \sigma \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ due **relazioni** binaria. Si scriverà indifferentemente

$$(x, z) \in \pi, \quad \pi(x, z).$$

(\neg): Se π è stabile allora $\neg\pi := \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \setminus \pi$ è stabile.

Infatti, se $\langle (a_i, b_i) \mid i < m \rangle$ è una scaletta per π

$$i < j < m \implies \pi(a_i, b_j) \wedge \neg\pi(a_j, b_i).$$

allora $\langle (a_{m-i+1}, b_{m-i+1}) \mid i < m \rangle$ è una scaletta per $\neg\pi$.

(\wedge):

- Caso facile: Con la **Notazione della TEORIA DEI MODELLI** in un modello mostro

Sia \mathcal{L} un **linguaggio**, T una **teoria completa** senza **modelli finiti** e \mathcal{U} un **modello saturo** di **cardinalità inaccessibile** $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un **modello mostro**.

Siano $\mathcal{X} = \mathcal{U}^x$ e $\mathcal{Z} = \mathcal{U}^z$ e siano $\pi(x; z), \sigma(x; z) \in \mathcal{L}(A)$. Si dimostra che

$$\pi(x; z), \sigma(x; z) \text{ stabili} \implies \pi(x; z) \wedge \sigma(x; z) \text{ stabile}$$

ovvero

$$\pi(x; z) \wedge \sigma(x; z) \text{ instabile} \implies \pi(x; z) \text{ instabile} \vee \sigma(x; z) \text{ instabile}.$$

Si supponga che $\langle a_i, b_i \mid i < \omega \rangle$ sequenza di A indiscernibili tali che

$$\pi(a_0, b_1) \wedge \sigma(a_0, b_1) \wedge \neg[\pi(a_1, b_0) \wedge \sigma(a_1, b_0)]$$

ovvero

$$\pi(a_0, b_1) \wedge \sigma(a_0, b_1) \wedge [\neg\pi(a_1, b_0) \vee \neg\sigma(a_1, b_0)]$$

- Se $\neg\pi(a_1, b_0)$ è vera, allora π è instabile;
- se $\neg\sigma(a_1, b_0)$ è vera, allora σ è instabile.

- Caso generale. Siano π, σ relazioni arbitrarie. Si vuole dimostrare

$$\pi(x; z) \wedge \sigma(x; z) \text{ instabile} \implies \pi(x; z) \text{ instabile} \vee \sigma(x; z) \text{ instabile.}$$

Sia $\langle a_i, b_i \mid i < k \rangle$ scaletta per $\pi(x; z) \wedge \sigma(x; z)$, con k “abbastanza grande”, ovvero se $i < j < k$ si ha

$$\pi(a_i, b_j) \wedge \sigma(a_i, b_j) \wedge [\neg\pi(a_j, b_i) \vee \neg\sigma(a_j, b_i)].$$

- Coloro $i < j$ di verde se $\neg\pi(a_j, b_i)$;
- Coloro $i < j$ di blu se $\neg\sigma(a_j, b_i)$.

Per il [Teorema di Ramsey](#) per ogni m esiste k (ovvero quel k abbastanza grande) tale che per ogni [colorazione](#) di $\{0, \dots, k-1\}^{(2)}$ esiste $H \subseteq \{0, \dots, k-1\}$ tale che $|H| \geq m$ e $H^{(2)}$ è [monocromatico](#).

- Se $H^{(2)}$ è blu, allora σ ammette scaletta di lunghezza m ;
- se $H^{(2)}$ è verde, allora π ammette scaletta di lunghezza m .

Segue che almeno una dei due è instabile. Infatti, se σ non ammette scalette di lunghezza m' , allora non ammette scalette di lunghezza $m > m'$. Pertanto, per ogni $m > m'$ si ha che π ammette scaletta di lunghezza m . Segue che π ammette scalette di lunghezza m per ogni $m < \omega$. ■

1165 Insieme approssimabile da una relazione

Siano X, Z due [insiemi](#) arbitrari, e sia $\pi \subseteq X \times Z$ una [relazione](#) binaria. Si scriverà indifferentemente

$$(x, z) \in \pi, \quad \pi(x, z).$$

Definizione 1. $\mathcal{D} \subseteq Z$ è approssimabile da π se per ogni $B \subseteq Z$ finito esiste $a \in X$ tale che

$$\pi(a; B) = \{b \in B \mid \pi(a, b)\} = \mathcal{D} \cap B.$$

Osservazione. Considero $\wp(Z)$ come [spazio topologico](#), identificandolo con 2^Z con la [topologia prodotto](#).^[427] Quindi gli intorni di base di $\wp(Z)$ hanno la forma, per B finito e $C \subseteq B$

$$\{A \in \wp(Z) \mid A \cap B = C\}.$$

\mathcal{D} è approssimabile da π sse \mathcal{D} è nella chiusura topologica di

$$\{\pi(a; \mathcal{Z}) \mid a \in X\}$$

dove come al solito $\pi(a; \mathcal{Z}) = \{b \in \mathcal{Z} \mid \pi(a; b)\}$.

1166 Caratterizzazione relazione stabile tramite insiemi approssimabili

Siano \mathcal{X}, \mathcal{Z} due insiemi arbitrari, e sia $\pi \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ una relazione binaria. Si scriverà indifferentemente

$$(x, z) \in \pi, \quad \pi(x, z).$$

Teorema 1. Se $\pi \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Z}$ è stabile e $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Z}$ è approssimabile da π , allora esiste una sequenza (una matrice) $\langle a_{ij} \mid i, j < m \rangle$ in \mathcal{X} tali che

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^m \pi(a_{ij}, \mathcal{Z})$$

dove con $\pi(a, \mathcal{Z}) = \{b \in \mathcal{Z} \mid \pi(a, b)\}$.

1167 Caratterizzazione relazione stabile in un modello mostro tramite insiemi approssimabili

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Una qualsiasi formula $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ si indende come relazione, vedendola come

$$\psi(\mathcal{U}^x; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^z.$$

Teorema 1. Se $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è stabile e \mathcal{D} è approssimabile da $\varphi(x; z)$ allora esiste $\langle a_{ij} \mid i, j < m \rangle$ in \mathcal{U}^x tale che^[428]

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^m \varphi(a_{ij}, \mathcal{U}^z).$$

Lemma 2. Se $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ è stabile, \mathcal{D} approssimato da $\varphi(x; z)$ dal basso, allora esiste $\langle a_i \mid i < m \rangle$ tale che

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \varphi(a_i, \mathcal{U}^z).$$

Lemma 3. Se $\varphi(x; z)$ è stabile e \mathcal{D} è approssimata da $\varphi(x; z)$ allora \mathcal{D} è approssimata dal basso dalla formula

$$\psi(x_1, \dots, x_m; z) = \bigwedge_{i=1}^m \varphi(x_i; z).$$

Dimostrazione. (del Teorema 428). Per il Lemma 3 \mathcal{D} è approssimata dal basso da

$$\psi(x_1, \dots, x_m; z) = \bigwedge_{i=1}^m \varphi(x_i; z) \tag{34}$$

e per il Lemma 2 esiste $\langle a_{i1}, \dots, a_{im} \mid i < m \rangle$ tale che

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \psi(a_{i1}, \dots, a_{im}; \mathcal{U}^z).$$

Per la (34) si ha

$$\psi(a_{i1}, \dots, a_{im}; \mathcal{U}^z) = \bigcap_{j=1}^m \varphi(a_{ij}; \mathcal{U}^z)$$

e pertanto si ha la tesi:

$$\mathcal{D} = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^m \varphi(a_{ij}; \mathcal{U}^z).$$
■

1168 Insieme approssimabile da una relazione in un Modello Mostro

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una teoria completa senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di cardinalità [inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Sia $A \subseteq \mathcal{U}$ piccolo.

Una qualsiasi [formula](#) $\psi(x; z)$ si indende come [relazione binaria](#), vedendola come

$$\psi(\mathcal{U}^x; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^z.$$

Proposizione 1. Sia $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(A)$, $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$. LSASE:

1. \mathcal{D} [approssimabile](#) da ψ ;
2. \mathcal{D} è [esternamente definibile](#) da ψ .

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): Se $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p, \psi}$, siano allora $B \subseteq \mathcal{U}^z$ finito e $a \models p(x) \upharpoonright_{A, B}$ ^[429]. Questo esiste per [saturazione](#).

Allora $\pi(a, B) = \mathcal{D} \cap B$, in quanto

$$\forall b \in B \left[\pi(a, b) \rightarrow b \in \mathcal{D} \right] \wedge \left[\neg \pi(a, b) \rightarrow b \notin \mathcal{D} \right]$$

Questo è ovvio poiché p è completo e $a \models p(x) \upharpoonright_{A, B}$.

(1. \Rightarrow 2.): Sia^[430]

$$S_\psi(\mathcal{U}) \ni p(x) \supseteq \{\pi(x; b) \mid b \in \mathcal{D}\} \cup \{\neg \pi(x; b) \mid b \notin \mathcal{D}\}.$$

Sia $B \subseteq \mathcal{U}^z$ finito. Allora

$$p(x) \upharpoonright_B \supseteq \{\pi(x; b) \mid b \in \mathcal{D} \cap B\} \cup \{\neg \pi(x; b) \mid b \in B \setminus \mathcal{D}\}$$

Ma se a è tale che $\pi(a, B) = \mathcal{D} \cap B$, allora $a \models p(x) \upharpoonright_B$, e quindi $p(x)$ è finitamente consistente. ■

1169 Topologia di 2^X

1170 Cardinalità insieme delle parti

1171 Insieme esternamente definibile in un modello mostro

Si utilizza la [Notazione della TEORIA DEI MODELLI](#)

Sia \mathcal{L} un [linguaggio](#), T una [teoria completa](#) senza [modelli finiti](#) e \mathcal{U} un [modello saturo](#) di [cardinalità inaccessibile](#) $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un [modello mostro](#).

Definizione 1. Un insieme $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$ si dice esternamente definibile da $\varphi(x; z) \in \mathcal{L}$ se esiste $p(x) \in S_\varphi(\mathcal{U})$ ^[431] tale che

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{p, \varphi} := \{a \in \mathcal{U}^z \mid \varphi(x; a) \in p(x)\}.$$

Proposizione 2. Sia $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{U}^z$. LSASE:

1. \mathcal{D} è esternamente definibile da $\varphi(x; z)$;
2. esiste una [estensione elementare](#) ${}^*\mathcal{U} \succ \mathcal{U}$, esiste ${}^*a \in {}^*\mathcal{U}$ tale che

$$\mathcal{D} = \varphi({}^*a, {}^*\mathcal{U}^z) \cap \mathcal{U}^z$$

1172 Forma differenziale in un punto

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

1173 Forma differenziale

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Anche $\Omega^\bullet(M)$ graduato.

1174 Prodotto wedge tra forme differenziali

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

$\Omega^\bullet(M), \wedge$ è un'algebra graduata

1175 Differenziale di una forma

Sia M una varietà differenziabile, e si indichi con $\Omega^k(M)$ l'insieme delle k -forme differenziali su M .

Definizione 1. Il differenziale è una funzione $d: \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ definita come segue:

- se $k = 0$, allora $\Omega^0(M) = C^\infty(M)^{[432]}$ e quindi, localmente,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

dove si è utilizzata la notazione di Einstein;

- se $k > 0$, allora localmente $\omega = f_I dx^I$, e si definisce

$$d\omega = \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^I.$$

dove $I = (i_1, \dots, i_k) \in \{1, \dots, n\}^k$ è un multi-indice di elementi diversi, e

$$dx^I := dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

1176 Proprietà del differenziale di forme

Proposizione 1. Valgono le seguenti proprietà:

1. d è lineare;
2. $d(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+1}(M)$;
3. $d \circ d = 0$;
4. per $\omega \in \Omega^k(M)$ e $\varphi \in \Omega^p(M)$: $d(\omega \wedge \varphi) = (d\omega) \wedge \varphi + (-1)^k \omega \wedge (d\varphi)$

Osservazione. Se M è una varietà n -dimensionale e $\omega \in \Omega^n(M)$, allora $d\omega = 0$.

1177 Gruppo di Coomologia di De Rham

Sia M una varietà differenziabile di dimensione n , e sia $\Omega^k(M)$ lo spazio vettoriale delle k -forme. Si indichi con

$$d^k : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$$

il differenziale di forme.

Osservazione. Si ha che $\text{rng } d^{k-1} \subseteq \ker d^k$ ^[433], per le proprietà del differenziale di forme.

Definizione 1. Per ogni $0 \leq k \leq n$ si definisce il k -esimo gruppo di Coomologia di De Rham di M lo spazio vettoriale reale dato dal quoziente:

$$H_{dR}^k(M) := \frac{\ker d^k}{\text{rng } d^{k-1}}$$

con la convenzione che, per $k = 0$, $\text{rng } d^{-1} = O$ è lo spazio vettoriale banale.

Si indica con^[434]

$$H_{dR}^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n H_{dR}^k(M).$$

e questo è uno spazio vettoriale graduato.

Osservazione. Si ha che $H_{dR}^k(M) = 0$ sse tutte le k -forme chiuse sono esatte.

Proposizione 2. Siano $[\omega], [\omega'] \in H_{dR}^k(M)$. Allora

1. $d\omega = 0$;
2. $\omega \in \Omega^k(M)$;
3. $[\omega] = [\omega']$ sse $\omega' = \omega + d\eta$ per qualche $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$.

1178 Forma differenziale chiusa

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\Omega^k(M)$ lo spazio vettoriale delle k -forme. Si indichi con d il differenziale di forme.

Definizione 1. Una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ è chiusa se $d\omega = 0$

1179 Forma differenziale esatta

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\Omega^k(M)$ lo spazio vettoriale delle k -forme. Si indichi con d il differenziale di forme.

Definizione 1. Una forma $\omega \in \Omega^k(M)$ è esatta se esiste $\eta \in \Omega^{k-1}(M)$ tale che $d\eta = \omega$.

1180 Campo vettoriale conservativo su \mathbb{R}^n

1181 Coomologia di De Rham di \mathbb{R} .

\mathbb{R} è una varietà differenziabile di dimensione 1. Pertanto esistono k -forme solo per $k = 0, 1$. Pertanto dobbiamo calcolare solo la Coomologia di De Rham:

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}), \quad H_{dR}^1(\mathbb{R})$$

mentre tutti gli altri saranno lo spazio vettoriale banale O .

- $H_{dR}^0(\mathbb{R})$

Si ha che

$$H_{dR}^0(\mathbb{R}) = \frac{\ker d^0}{O} \cong \ker d^0$$

Sia quindi $f \in \Omega^0(\mathbb{R}) = C^\infty(\mathbb{R})^{[435]}$ tale che $df = 0$, $df = 0$ sse $f' = 0$ sse f è costante (poiché il dominio è connesso).

Pertanto $\ker d^0 \cong \mathbb{R}$, e $H_{dR}^0(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

- $H_{dR}^1(\mathbb{R})$

Se $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R})$, allora $\omega = f dx$ per $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

- Sicuramente $d\omega = d(f dx) = f(d \circ d)(x) = 0$, e pertanto $\Omega^1(\mathbb{R}) = \ker d^1$.
- Invece, se considero $g = \int_0^x f(\tau) d\tau \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora

$$dg = \omega$$

e pertanto $\text{rng } d^0 = \Omega^1(\mathbb{R})$.

Segue che

$$H_{dR}^1(\mathbb{R}) = \frac{\ker d^1}{\text{rng } d^0} = \frac{\Omega^1(\mathbb{R})}{\Omega^1(\mathbb{R})} = O.$$

Pertanto, in definitiva, si ha che

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ O & k \geq 1. \end{cases}$$

1182 Coomologia di De Rham di \mathbb{R}^n .

Teorema 1. (Lemma di Poincaré) Sia $H_{dR}^k(\mathbb{R}^n)$ la coomologia di De Rham di \mathbb{R}^n ^[436], per $n > 1$. Allora

$$H_{dR}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ O & k \neq 0 \end{cases}$$

dove O è lo spazio vettoriale banale.

1183 Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa Coomologia di de Rham

Siano M, N due varietà differenziabili di dimensione, rispettivamente, m ed n . Si indichi con H_{dR} la coomologia di De Rham.

Teorema 1. Se $F : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra varietà differenziabili, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha l'isomorfismo tra spazi vettoriali:

$$H_{dR}^k(M) \cong H_{dR}^k(N)$$

Dimostrazione. Fissato $k \in \mathbb{N}$, si consideri il pullback sulle forme:

$$F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$$

che soddisfa $dF^*\omega = F^*d\omega$ (dove d è la derivata esterna).

- Se $\omega \in \Omega^k(N)$ è chiusa, allora $d\omega = 0$

$$dF^*\omega = F^*d\omega = 0$$

e pertanto $F^*\omega$ è chiusa.

- Se $\omega \in \Omega^k(N)$ è esatta, allora esiste η tale che $\omega = d\eta$:

$$F^*\omega = F^*d\eta = dF^*\eta$$

e quindi $F^*\omega$ è esatta.

Ragionando allo stesso modo con F^{-1} e $(F^{-1})^*$ si ottiene la tesi. ■

Teorema 2. Se $F : M \rightarrow N$ è un diffeomorfismo tra varietà differenziabili, allora si ha l'isomorfismo tra algebre graduate:

$$H_{dR}^\bullet(M) \cong H_{dR}^\bullet(N)$$

Definizione 4.1.4 e Proposizione 4.1.5 di

1184 Pullback di una funzione tra varietà differenziabili

Siano M, N due varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ , e $\omega \in \Omega^n(N)$ una n -forma su N .

Definizione 1. Il pullback di ω lungo F è $F^*\omega \in \Omega^n(M)$ che, per ogni $v_1, \dots, v_n \in T_p N^{[437]}$:

$$(F^*\omega)_p(v_1, \dots, v_n) = \omega_{F(p)}(F_\star|_p(v_1), \dots, F_\star|_p(v_n))$$

La funzione $F^* : \Omega^n(N) \rightarrow \Omega^n(M)$ si dice pullback di F .

1185 Proprietà del pullback di una funzione tra varietà differenziabili

Proposizione 1. Siano M, N due varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

1. $F^* : \Omega^n(N) \rightarrow \Omega^n(M)^{[438]}$ è una funzione lineare per ogni $n \geq 0$, e induce per linearità una funzione

$$F^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M).$$

2. Per ogni $\omega, \psi \in \Omega^\bullet(N)^{[439]}$

$$F^*(\omega \wedge \psi) = F^*\omega \wedge F^*\psi.$$

3. Per ogni $\omega \in \Omega^\bullet(N)$:

$$F^*(d\omega) = d \circ F^*\omega$$

dove d è il differenziale di forme.

4. Se P è una varietà differenziabile, $G : N \rightarrow P$ è una funzione C^∞ , allora

$$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*.$$

5. Se F è un diffeomorfismo allora $F^* : \Omega^\bullet(N) \rightarrow \Omega^\bullet(M)$ è un isomorfismo di algebre graduate, e $(F^*)^{-1} = (F^{-1})^*$

1186 0-gruppo di coomologia di de Rham di una varietà connessa

Sia M una varietà differenziabile, e sia $H^0(M)$ lo 0-gruppo di coomologia di De Rham di M .

- Se M è connesso, allora $H^0(M) = \mathbb{R}$.
- Se $M = \coprod_{\alpha \in A} M_\alpha$, con M_α componenti connesse, allora $H^0(M) = \mathbb{R}^A$, dove con \mathbb{R}^A si intende la somma diretta di A copie di \mathbb{R} .

Questo segue dal fatto che le funzioni a valori in \mathbb{R} con le derivate nulle sono necessariamente costanti sulle componenti connesse (vedi “Funzione localmente costante sse costante sulle componenti connesse” e “Teorema della derivata nulla”).

1187 Prodotto wedge in Coomologia di De Rham

Sia M una varietà differenziabile e sia $H_{dR}^\bullet(M)$ la somma diretta dei gruppi di coomologia di De Rham.

Definizione 1. Si definisce il prodotto cup (o prodotto wedge)

$$\wedge : H_{dR}^\bullet(M) \times H_{dR}^\bullet(M) \longrightarrow H_{dR}^\bullet(M)$$
$$([\omega], [\eta]) \longmapsto [\omega \wedge \eta]$$

dove $\omega \wedge \eta$ è il prodotto wedge tra forme differenziali.

Osservazione. Questo prodotto rende $H_{dR}^\bullet(M)$ un'algebra (reale) graduata associativa e anticommutativa.

1188 Coomologia di De Rham come funtore

DA FINIRE

1189 Successione di spazi vettoriali esatta

Definizione 1. Siano V, W, U degli spazi vettoriali, e siano $f : V \rightarrow W$ e $g : W \rightarrow U$ due funzioni lineari. La successione

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U$$

si dice esatta in W se^[440]

$$\text{Im } f = \ker g$$

Osservazione. Se

$$0 \longrightarrow V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} U \longrightarrow 0$$

è una successione esatta in ogni suo termine, si chiama successione esatta corta e si ha che

- f è iniettiva;
- g è suriettiva;
- $\text{Im } f = \ker g$.

Osservazione. Data una successione di spazi vettoriali (di dimensione finita) esatta $\langle (V^k, d^k) \rangle$, si ha che (dal teorema di nullità più rango), le dimensioni rispettano:

$$\sum (-1)^i \dim V^i = 0.$$

1190 Complesso di cocatene

Definizione 1. Un complesso di cocatene è una successione

$$A^\bullet := \langle (A^k, d^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

- A^k è uno spazio vettoriale;
- $d^k : A^k \rightarrow A^{k+1}$ è una applicazione lineare

e tali che $d^{k+1} \circ d^k = 0$ (ovvero immagine e kernel sono $\text{Im } d^k \subseteq \ker d^{k+1}$).

1191 Coomologia di un complesso di cocatene

Definizione 1. Sia $A^\bullet := \langle (A^k, d^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ un complesso di cocatene.

Si definisce il k -esimo gruppo di coomologia del complesso il quoziante^[441]:

$$H^k(A^\bullet) := \frac{\ker d^k}{\text{Im } d^{k-1}}.$$

Spesso si indica con:

- $Z^k := \ker d^k$ l'insieme dei k -coclicli;
- $B^k := \text{Im } d^{k-1}$ l'insieme dei k -cobordi.

Osservazione. Il quoziante di cui sopra è ben definito in quanto le seguenti inclusioni sono tutti sottospazi vettoriali:

$$\text{Im } d^{k-1} \subseteq \ker d^k \subseteq A^k$$

Osservazione. Per ciascun $k \in \mathbb{N}$, $H^k(A^\bullet)$ è uno spazio vettoriale.

1192 Morfismo tra complessi di cocatene

Definizione 1. Siano $C^\bullet := \langle (C^k, d_C^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ e $D^\bullet := \langle (D^k, d_D^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ due complessi di cocatene. Un morfismo tra complessi di cocatene $F^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ è una successione $F^\bullet := \langle F^k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$ tale che per ogni $k \in \mathbb{Z}$:

- $F^k : C^k \rightarrow D^k$ è applicazione lineare;
- $F^k \circ d_C^{k-1} = d_D^{k-1} \circ F^{k-1}$, ovvero il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} C^{k-1} & \xrightarrow{F^{k-1}} & D^{k-1} \\ d_C^{k-1} \downarrow & & \downarrow d_D^{k-1} \\ C^k & \xrightarrow{F^k} & D^k \end{array}$$

1193 Successione Esatta di Complessi di Cocatene

Siano C'^\bullet , C^\bullet e C''^\bullet dei complessi di cocatene, e siano $F^\bullet : C'^\bullet \rightarrow C^\bullet$ e $G^\bullet : C^\bullet \rightarrow C''^\bullet$ dei morfismi. La successione

$$C'^\bullet \xrightarrow{F^\bullet} C^\bullet \xrightarrow{G^\bullet} C''^\bullet$$

si dice successione esatta se:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\
 & \downarrow (d^{k-2})' & & \downarrow d^{k-2} & & \downarrow (d^{k-2})'' & \\
 0 & \longrightarrow & (C^{k-1})' & \xrightarrow{F^{k-1}} & C^{k-1} & \xrightarrow{G^{k-1}} & (C^{k-1})'' \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (d^{k-1})' & & \downarrow d^{k-1} & & \downarrow (d^{k-1})'' & \\
 0 & \longrightarrow & (C^k)' & \xrightarrow{F^k} & C^k & \xrightarrow{G^k} & (C^k)'' \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (d^k)' & & \downarrow d^k & & \downarrow (d^k)'' & \\
 0 & \longrightarrow & (C^{k+1})' & \xrightarrow{F^{k+1}} & C^{k+1} & \xrightarrow{G^{k+1}} & (C^{k+1})'' \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow (d^{k+1})' & & \downarrow d^{k+1} & & \downarrow (d^{k+1})'' & \\
 & \cdots & & \cdots & & \cdots &
 \end{array}$$

- il diagramma commuta;
- tutte le righe sono successioni esatte corte di spazi vettoriali.

1194 Morfismo tra complessi di cocatene induce morfismo in coomologia

Siano

$$C^\bullet := \langle (C^k, d_C^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}, \quad D^\bullet := \langle (D^k, d_D^k) \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$$

due complessi di cocatene e sia $F^\bullet : C^\bullet \rightarrow D^\bullet$ un morfismo, $F^\bullet = \langle F^k \rangle_{k \in \mathbb{Z}}$.

Allora, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, F^\bullet induce un morfismo tra i gruppi di coomologia:

$$\begin{aligned}
 F^* : H^k(C^\bullet) &\longrightarrow H^k(D^\bullet) \\
 [c] &\longmapsto [F^k c]
 \end{aligned}$$

1195 Zig-Zag Lemma (per complessi di cocatene)

Proposizione 1. Sia

$$0 \longrightarrow A^\bullet \xrightarrow{F^\bullet} B^\bullet \xrightarrow{G^\bullet} C^\bullet \longrightarrow 0 \quad (*)$$

una SEC di complessi di cocatene. Allora esiste δ , detto “morfismo di connessione”, tale che^[442]

$$\begin{array}{ccccc} H^k(A^\bullet) & \xrightarrow{F^*} & H^k(B^\bullet) & \xrightarrow{G^*} & H^k(C^\bullet) \\ & \searrow \delta & & & \swarrow \\ H^{k+1}(A^\bullet) & \xrightarrow{F^*} & H^{k+1}(B^\bullet) & \xrightarrow{G^*} & H^{k+1}(C^\bullet) \end{array}$$

è una successione esatta lunga.

Dimostrazione. La dimostrazione si svolge in due fasi:

1. Devo trovare δ (buona def + applicazione lineare).
2. Esattezza della successione (solo $\ker F^* = \text{Im } \delta$).

FASE 1.

Se $*$ è SEC, allora il seguente è diagramma commutativo a righe esatte.

$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ 0 \rightarrow A^{k+1} & \xrightarrow{F_{k+1}} & B^{k+1} & \xrightarrow{G_{k+1}} & C^{k+1} & \rightarrow 0 \\ & \uparrow d_A^k & & \uparrow d_B^k & & \uparrow d_C^k & \\ & 0 \rightarrow A^k & \xrightarrow{F_k} & B^k & \xrightarrow{G_k} & C^k & \xrightarrow{G_k} 0 \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

Sia quindi $[c] \in H^k(C^\bullet)$ (i.e. $c \in C^k$ t.c. $dc = 0$).

Poiché la seconda riga è esatta allora G^k è **suriettiva**, e pertanto esiste $b \in B^k$ t.c.

$$Gb = c.$$

Considero ora $d_B^k(b)$ (abbreviato db).

$$G db = dGb = dc = 0$$

(per commutatività di (1))

Segue quindi che

$$db \in \ker G^{k+1} = \text{Im } F^{k+1}$$

dove l'ultima uguaglianza sussiste per esattezza della prima riga. Pertanto esiste $a \in A^{k+1}$ t.c.

$$Fa = b' := db$$

Questo a è unico poiché F iniettiva (per esattezza della I^a riga). Inoltre

$$F da = dFa = db = 0 \implies da = 0.$$

Definisco quindi

$$\boxed{\delta([c]) := [a]}$$

Abbiamo fatto:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \uparrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

Resta da dimostrare:

1. Che l'unica scelta fatta (ovvero b) non influisce sulla definizione.
2. Che δ è ben definita (rispetto al quoziente).
3. Che δ è lineare.

- 1.** Siano $b, b' \in B^k$ tali che

$$G^k(b) = G^k(b') = c.$$

e sia $a, a' \in A^{k+1}$ t.c. $Fa = db$, $Fa' = db'$. Allora

$$0 = G(b) - G(b') = G(b - b')$$

e pertanto (per esattezza della seconda riga) esiste $\tilde{a} \in A^k$ t.c.

$$\begin{aligned} b - b' &= F\tilde{a} \\ d(b - b') &= dF\tilde{a} \\ db - db' &= F d\tilde{a} \end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che $Fa = db$:

$$\begin{aligned} Fa &= db = db' + F d\tilde{a} \\ &= Fa' + F d\tilde{a} \\ &= F(a' + d\tilde{a}) \end{aligned}$$

e, poiché F è iniettiva, segue che:

$$a = a' + d\tilde{a} \implies [a] = [a'].$$

- 2.** Sia $c \in \text{Im } d^{k-1}$. Dimostriamo $a \in \text{Im } d^k$, dove la nomenclatura è la solita:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ & \uparrow d & \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

Sia quindi $c = d\gamma$. Per esattezza G suriettiva, e quindi $\gamma = G\beta$.

$$c = dG\beta = G(d\beta).$$

Per il punto precedente, la scelta di b è ininfluente, pertanto pongo

$$b := d\beta, \quad \text{e } G(dd\beta) = c$$

La situazione quindi è la seguente:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ b & \xrightarrow{G} & c \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ \beta & \xrightarrow{G} & \gamma \end{array}$$

Segue che $F(a) = db = dd\beta = 0$ e dunque, per iniettività, $a = 0$. Siccome $0 \in \text{Im } d^k$, la tesi.

3. δ è lineare poiché ?

FASE 2.

Resta da dimostrare l'esattezza. Noi dimostriamo soltanto

$$\ker F^* = \text{Im } \delta.$$

(\supseteq): Sia $[a] = \delta^*[c] \in \text{Im } \delta^*$:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

Quindi si ha che

$$Fa = db \implies [Fa] = 0$$

Ma $0 = [Fa] =: F^*[a]$ e quindi $[a] \in \ker F^*$.

(\subseteq): Sia $[a]$ t.c. $F^*[a] = 0$, $[a] \in \ker F^*$. i.e. $Fa = db$.

Detto quindi $c = Gb$

$$dc = dGb = Gdb = GFa = 0$$

(righe esatte: $GF = 0$)

Pertanto, è possibile utilizzare la costruzione di prima:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{F} & db \\ \downarrow d & & \downarrow d \\ b & \xrightarrow{G} & c \end{array}$$

ottenendo $\delta[c] = [a]$. Segue che $[a] \in \text{Im } \delta$. ■

1196 Teorema di Mayer-Vietoris (in coomologia)

Sia M una varietà differenziabile, e sia $\{U_0, U_1\}$ un suo ricoprimento aperto. Si considerino le seguenti inclusioni:

$$\begin{array}{ccccc} & & U_0 & & \\ & \nearrow \iota_0 & & \searrow j_0 & \\ U_0 \cap U_1 & & & & U_0 \cup U_1 = M \\ & \searrow \iota_1 & & \nearrow j_1 & \\ & & U_1 & & \end{array}$$

È possibile farne il pullback alle forme differenziali per ogni $k \in \mathbb{N}$, ottenendo:

$$\begin{array}{ccccc} & & A^k(U_0) & & \\ & \swarrow \iota_0^* & & \nwarrow j_0^* & \\ A^k(U_0 \cap U_1) & & & & A^k(M) \\ & \swarrow \iota_1^* & & \nwarrow j_1^* & \\ & & A^k(U_1) & & \end{array}$$

Si ricorda che il pullback di una inclusione è la restrizione della forma all'aperto considerato, ovvero:

$$\begin{aligned} \iota_0^* \omega &= \omega|_{U_0 \cap U_1} \\ \iota_1^* \omega &= \omega|_{U_0 \cap U_1} \\ j_0^* \omega &= \omega|_{U_0} \\ j_1^* \omega &= \omega|_{U_1} \end{aligned}$$

Si consideri ora la somma diretta tra spazi vettoriali $A^k(U_0) \oplus A^k(U_1)$: si definiscono le seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} j^* : A^k(M) &\longrightarrow A^k(U_0) \oplus A^k(U_1) \\ \omega &\longmapsto (j_1^* \omega, j_2^* \omega) = (\omega|_{U_0}, \omega|_{U_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iota_1^* - \iota_0^* : A^k(U_0) \oplus A^k(U_1) &\longrightarrow A^k(U_0 \cap U_1) \\ (\eta, \tau) &\longmapsto \iota_1^* \eta - \iota_0^* \tau = \eta|_{U_0 \cap U_1} - \tau|_{U_0 \cap U_1}. \end{aligned}$$

Si ottiene quindi, considerando queste funzioni per ogni $k \in \mathbb{N}$ (e ricordando che la somma diretta è commutativa e associativa):

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow A^\bullet(M) \xrightarrow{j^*} A^\bullet(U_0) \oplus A^\bullet(U_1) \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_0^*} A^\bullet(U_0 \cap U_1) \longrightarrow 0 \\ \omega &\longmapsto (\omega|_{U_0}, \omega|_{U_1}) \\ (\eta, \tau) &\longmapsto \eta|_{U_0 \cap U_1} - \tau|_{U_0 \cap U_1} \end{aligned}$$

Teorema 1. Questa [successione](#) è esatta.

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in tre fasi:

1. j^* è iniettiva.

Sia $\eta \in A^\bullet(M)$ tale che $j^*\eta = 0$. Allora

$$\eta|_{U_0} = 0, \quad \eta|_{U_1} = 0$$

e [pertanto](#) $j = 0$ in $M = U_0 \cup U_1$.

2. $\text{Im } j^* = \ker(\iota_1^* - \iota_0^*)$ ^[443]

(\subseteq): è ovvio.

(\supseteq): sia $(\eta, \tau) \in \ker(\iota_1^* - \iota_0^*)$. Allora in $U_0 \cap U_1$ si ha che $\eta \equiv \tau$. Definendo quindi

$$\omega = \begin{cases} \eta & \text{su } U_0 \\ \tau & \text{su } U_1 \end{cases}$$

questa è ben definita e $j^*\omega = (\eta, \tau)$.

3. $(\iota_1^* - \iota_0^*)$ è suriettiva.

Si utilizza una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\mathcal{U} = \{U_0, U_1\}$: esistono [due funzioni](#) $\rho_0, \rho_1 \in C^\infty(M) = A^0(M)$ tali che i loro [supporti](#)

$$\begin{aligned} \text{supp } \rho_0 &= \overline{\{x \in M \mid \rho_0(x) \neq 0\}} \subseteq U_0 \\ \text{supp } \rho_1 &= \overline{\{x \in M \mid \rho_1(x) \neq 0\}} \subseteq U_1 \end{aligned}$$

e per ogni $x \in M$: $\rho_0(x) + \rho_1(x) = 1$.

Sia quindi $\eta \in A^\bullet(U_0 \cap U_1)$. Si definiscono:

$$\begin{aligned} \omega &= -\rho_1 \eta && \text{su } U_0 \\ \tau &= \rho_0 \eta && \text{su } U_1 \end{aligned}$$

(estese a 0 dove non sono definite), e si ottiene che

$$\begin{aligned} (\iota_1^* - \iota_0^*)(\omega, \tau) &= \rho_0 \eta + \rho_1 \eta \\ &= (\rho_0 + \rho_1) \eta = \eta. \end{aligned}$$
■

Osservazione. È possibile vedere questa come una [successione](#) di complessi di cocatene

Osservazione. Tramite lo [Zig-Zag Lemma](#), otteniamo una [successione esatta in coomologia](#) ([somma diretta commuta con quoziente](#)):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \cdots & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 H^k(M) & \xrightarrow{j^*} & H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) & \xrightarrow{\iota_1^* - \iota_0^*} & H^k(U_0 \cap U_1) & & \\
 & & & & & & \\
 & & & & \nearrow \partial^* & & \\
 H^{k+1}(M) & \xleftarrow{j^*} & H^{k+1}(U_0) \oplus H^{k+1}(U_1) & \longrightarrow & \dots & &
 \end{array}$$

ed è possibile calcolare esplicitamente il morfismo di connessione ∂^* ([oltre che gli altri morfismi](#)), seguendo la costruzione: dato $[\eta] \in H^k(U_0 \cap U_1)$,

$$\eta = (\iota_1^* - \iota_0^*)(-\rho_1 \eta, \rho_0 \eta)$$

Facendo il differenziale di $(-\rho_1 \eta, \rho_0 \eta)$ su ambo le componenti, si [ottiene](#)

$$(-d\rho_1 \wedge \eta, d\rho_0 \wedge \eta)$$

in quanto $d\eta = 0$ ^[444]. Ponendo ora

$$\omega = \begin{cases} -d\rho_1 \wedge \eta & \text{su } U_0 \\ d\rho_0 \wedge \eta & \text{su } U_1 \end{cases}$$

che è ben definita in quanto in $p \in U_0 \cap U_1$, se le coordinate in un intorno sono (x^1, \dots, x^n) si ha

$$-d\rho_1 \wedge \eta = -\frac{\partial \rho_1}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge \eta = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} (1 - \rho_0) dx^\mu \wedge \eta = \frac{\partial \rho_0}{\partial x^\mu} dx^\mu \wedge \eta = d\rho_0 \wedge \eta$$

e si ottiene per definizione che $j^*\omega = (-d\rho_1 \wedge \eta, d\rho_0 \wedge \eta)$.

Quindi $\partial^*[\eta] = [\omega]$, con

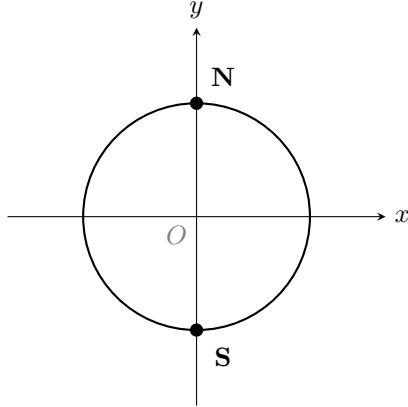
$$\omega = \begin{cases} -d\rho_1 \wedge \eta & \text{su } U_0 \\ d\rho_0 \wedge \eta & \text{su } U_1 \end{cases}$$

1197 Coomologia della circonferenza

Teorema 1. La coomologia di S^1 ^[445] è :

$$H^k(S^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

Dimostrazione. Si consideri la circonferenza \mathbb{S}^1 rappresentata in figura:



È una **varietà differenziabile** di dimensione 1, quindi si vogliono calcolare la **coomologia** $H^0(\mathbb{S}^1)$ e $H^1(\mathbb{S}^1)$.

Si definiscono due aperti:

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{N}\} \cong \mathbb{R} \\ U_1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{S}\} \cong \mathbb{R} \\ U_0 \cap U_1 &= \mathbb{S}^1 \setminus \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\} \cong \mathbb{R} \sqcup \mathbb{R} \end{aligned}$$

dove gli ultimi sono **diffeomorfismi**. Utilizzando **Mayer-Vietoris** si ottiene la seguente successione esatta:

$$H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \longrightarrow H^0(U_0 \cap U_1) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^1(U_0) \oplus H^1(U_1)$$

- Siccome la **coomologia è invariante per diffeomorfismi**, si ottiene

$$H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^0(\mathbb{R}) \oplus H^0(\mathbb{R}) \longrightarrow H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^1(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R})$$

- Ricordando la **coomologia di \mathbb{R}** :

$$H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

la successione diventa:

$$H^0(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow H^0(\mathbb{R} \sqcup \mathbb{R}) \longrightarrow H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0 \oplus 0$$

- Ricordando come funziona lo 0 gruppo di coomologia:

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow 0$$

- Poiché la successione è esatta in $H^1(\mathbb{S}^1)$, allora ∂^* il morfismo di connessione è suriettivo, e pertanto $\dim H^1(\mathbb{S}^1) < \infty$. Posso applicare la somma alterna=0 ottenendo che

$$\dim H^1(\mathbb{S}^1) = 1$$

e pertanto $H^1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{R}$. ■

Troviamo ora un generatore di $H^1(\mathbb{S}^1)$. Poiché è uno spazio vettoriale 1-dimensionale, è sufficiente trovare $[\omega] \in H^1(\mathbb{S}^1) \setminus \{0\}$.

Si sfrutta la definizione dei morfismi della successione di Mayer-Vietoris: sia $[f] \in H^0(U_0 \cap U_1)$, e siano ρ_0, ρ_1 una partizione dell'unità:

$$\partial^*[f] = [\omega], \quad \omega = \begin{cases} -d\rho_1 \cdot f & \text{su } U_0 \\ d\rho_0 \cdot f & \text{su } U_1. \end{cases}$$

Si consideri anche il morfismo $(\iota_1^* - \iota_0^*)$, ricordando che $H^0(U_0 \cap U_1) = H^0(A \sqcup B) \cong H^0(A) \oplus H^0(B)^{[446]}$, dove A e B sono le semicirconferenze destre e sinistre:

$$\begin{aligned} H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) &\xrightarrow{(\iota_1^* - \iota_0^*)} H^0(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{\cong} H^0(A) \oplus H^0(B) \\ ([u], [v]) &\longmapsto \left([(u-v)|_{U_0 \cap U_1}] \right) \longmapsto \left([(u-v)|_A], [(u-v)|_B] \right) \\ [g] &\longmapsto \left([g|_A], [g|_B] \right) \end{aligned}$$

con u, v funzioni costanti C^∞ rispettivamente su U_0 e U_1 : $u-v|_A \equiv k_1$ e $u-v|_B \equiv k_2$, con $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ e tali che $k_1 = k_2$.

Si deve scegliere $[f]$ in maniera tale che $\partial^*[f] \neq 0$, ovvero

$$[f] \notin \ker \partial^* = \text{Im}(\iota_1^* - \iota_0^*)$$

Sia ad esempio $f \in C^\infty(U_0 \cap U_1)$ tale che $f|_A = 1$ e $f|_B = 0$, $[f] \in H^0(U_0 \cap U_1)$. Allora necessariamente $[f] \notin \text{Im}(\iota_1^* - \iota_0^*)$, e quindi $\partial^*[f] \neq 0$.

Pertanto, $[\omega]$ è un generatore di $H^1(\mathbb{S}^1)$, con

$$\omega = \begin{cases} -d\rho_1 & \text{su } U_0 \cap A \\ d\rho_1 & \text{su } U_1 \cap A \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

ben definita.

1198 Coomologia delle sfere

Teorema 1. Sia \mathbb{S}^n la sfera n -dimensionale. Allora la sua coomologia di De Rham è:

$$H^k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, n \\ 0 & k \neq 0, n \end{cases}$$

Dimostrazione. Vedi Esempio 5.3.7 di .

Si considerino i poli $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n+1}$ di \mathbb{S}^n , e siano

$$U_0 := \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{N}\}, \quad U_1 := \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{S}\}.$$

- Siccome $U_0 \cong U_1 \cong \mathbb{R}^n$ diffeomorfi, allora^[447]

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad H^k(U_0) \cong H^k(U_1) \cong H^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- $U_0 \cap U_1 = \mathbb{S}^n \setminus \{\mathbf{N}, \mathbf{S}\} \cong \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, e pertanto

$$\forall k \in \mathbb{N} : \quad H^k(U_0 \cap U_1) \cong H^k(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Si dimostra il teorema per induzione su $n \geq 1$.

- Passo base $n = 1$.

Si è già dimostrato che

$$H^k(\mathbb{S}^1) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

- Passo induttivo. Sia $n > 1$ e si suppona il teorema vero per \mathbb{S}^{n-1} . Si dimostra per \mathbb{S}^n

- Se $k = 0$: Siccome \mathbb{S}^n è connesso, allora $H^0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$.
- Se $k = 1$: Si consideri Mayer-Vietoris:

$$0 \rightarrow H^0(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \rightarrow H^0(U_0 \cap U_1) \rightarrow H^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow H^1(U_0) \oplus H^1(U_1)$$

per le considerazioni di cui sopra si ha:

- * $H^0(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$
- * $H^0(U_0 \cap U_1) \cong \mathbb{R}$ in quanto connesso
- * $H^0(U_0) \oplus H^0(U_1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ^[448]
- * $H^1(U_0) \oplus H^1(U_1) \cong 0$

e pertanto si ottiene:

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{\partial^*} H^1(\mathbb{S}^n) \rightarrow 0$$

Siccome ∂^* è suriettiva^[449], allora $\dim H^1(\mathbb{S}^n) < \infty$ e quindi, usando la somma alterna delle dimensioni, si ottiene

$$H^1(\mathbb{S}^n) = 0$$

- Se $1 < k \leq n$: Si consideri Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{k-1}(U_0) \oplus H^{k-1}(U_1) & \xrightarrow{\quad} & H^{k-1}(U_0 \cap U_1) \\
 & \nearrow \partial^* & \\
 H^k(\mathbb{S}^n) & \xrightarrow{\quad} & H^k(U_0) \oplus H^k(U_1)
 \end{array}$$

Per le considerazioni di cui sopra:

- * $k-1 > 0$, e pertanto $H^{k-1}(U_0) \oplus H^{k-1}(U_1) \cong 0$;
- * $k > 0$, e pertanto $H^k(U_0) \oplus H^k(U_1) \cong 0$;
- * $H^{k-1}(U_0 \cap U_1) \cong H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$.

La successione diventa:

$$0 \longrightarrow H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\partial^*} H^k(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0$$

e pertanto:

$$H^k(\mathbb{S}^n) = H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

Dunque, per ipotesi induttiva:

$$\begin{aligned}
 H^n(\mathbb{S}^n) &= H^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{R} \\
 1 < k < n \qquad \qquad \qquad H^k(\mathbb{S}^n) &= H^{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \cong 0.
 \end{aligned}$$

- Se $k > n$: per motivi di dimensione, $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$. ■

Proposizione 2. Un generatore di $H^n(\mathbb{S}^n)$ è $[\nu]$, dove ν è una forma volume su \mathbb{S}^n .

Dimostrazione. La dimostrazione si articola in alcune fasi

1. Esistenza di una forma volume

Questo segue dal fatto che \mathbb{S}^n è orientabile.

2. La forma volume non è esatta

Se per assurdo ν fosse esatta, allora $\nu = d\omega$. Poiché \mathbb{S}^n è compatta, allora per il Teorema di Stokes:

$$\int_M \nu = \int_M d\omega = 0$$

ma questo è assurdo.

Siccome la forma volume è una n -forma, allora è chiusa, e pertanto $[\nu] \in H^n(\mathbb{S}^n)$, e siccome non è esatta allora $[\nu] \neq 0$. Quindi $[\nu]$ genera $H^n(\mathbb{S}^n) \cong \mathbb{R}$. ■

Proposizione 3. Si definisca la mappa data dall'integrale:

$$\int : H^n(\mathbb{S}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[\omega] \longmapsto \int_{\mathbb{S}^n} \omega$$

Questo è un **isomorfismo**.

Dimostrazione. La dimostrazione si sviluppa in diversi passi.

1. La mappa è ben definita in coomologia

Questo vale per il teorema di Stokes.

2. La mappa è lineare

3. La mappa è non nulla

Infatti $\int_{\mathbb{S}^n} \nu > 0$ per ν **forma volume**. (Questo lo si può fare in quanto \mathbb{S}^n è **compatta** e **orientabile**.)

Da questo segue che sia un isomorfismo:

- è **iniettiva** in quanto il suo **kernel** (siccome $H^n(\mathbb{S}^n)$ ha dimensione 1) può avere solo dimensione 0 (non ha dimensione 1 per il punto 3.)
- è **suriettiva** per il punto 3 (siccome raggiunge un elemento non nullo, siccome \mathbb{R} ha dimensione 1, per linearità raggiunge tutti gli elementi).

■

1199 Forma volume su una varietà differenziabile

Definizione 1. Sia M una **varietà differenziabile** n -dimensionale. Una forma volume è una **n -forma mai nulla** ν .

Esempio 2. Su (U, x^1, \dots, x^n) **carta locale**,

$$dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

è una n -forma mai nulla su V .

Osservazione. Se ν è una forma volume su M , allora esiste **una** $f \in C^\infty(U)$ tale che^[450]

$$f \cdot \nu|_U = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad f > 0.$$

Proposizione 3. Se ν è una forma volume su M , allora l'integrale è positivo:

$$\int_M \nu > 0.$$

Dimostrazione. Vedi Osservazione 4.3.6

1200 Caratterizzazione varietà differenziabile orientabile tramite forma volume

Teorema 1. Sia M una varietà differenziabile. Esiste una forma volume su M sse M è orientabile.

1201 Integrazione di forme su varietà differenziabile orientata

Sia M una varietà differenziabile orientata n -dimensionale, sia ω una forma differenziale, $\omega \in \Omega^n(M)$ a supporto compatto. Sia $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlante orientato di M .

- Se $\text{supp } \omega \subseteq U$, con (U, φ) una carta, si definisce:

$$\int_M \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \omega$$

tramite il pullback $(\varphi^{-1})^* : \Omega^n(M) \rightarrow \Omega^n(\mathbb{R}^n)$.

È possibile mostrare che questa definizione è ben posta, ovvero non dipende dalla scelta di $U \supseteq \text{supp } \omega$.

- Altrimenti, sia $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ la partizione dell'unità associata all'atlante scelto; si definisce

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int \rho_\alpha \omega.$$

Ciascun $\rho_\alpha \omega$ ricade nel caso precedente, in quanto

$$\text{supp}(\rho_\alpha \omega) \subseteq U_\alpha.$$

Definizione 1. Sia $\omega \in \Omega^n(M)$ una forma differenziale a supporto compatto. Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ e $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sono come sopra, allora si pone:

$$\int_M \omega := \sum_{\alpha \in A} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} (\varphi_\alpha^{-1})^*(\rho_\alpha \omega).$$

1202 Teorema di Stokes

Teorema 1. Sia M una varietà differenziabile orientabile, e sia ω una $n - 1$ -forma a supporto compatto. Allora l'integrale:^[451]

$$\int_M d\omega = 0.$$

1203 Coomologia dello spazio proiettivo reale

Teorema 1. Sia $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ lo spazio proiettivo reale di dimensione n . La sua coomologia di De Rham è

$$H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ \mathbb{R} & k = n \text{ dispari} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dimostrazione. Consideriamo le seguenti mappe:

- Si consideri $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, e si consideri la mappa antipodale:

$$\begin{aligned} a : \mathbb{S}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\ \mathbf{x} &\longmapsto -\mathbf{x} \end{aligned}$$

Questa induce i seguenti pullback^[452]:

$$\begin{aligned} a^* : \Omega^k(\mathbb{S}^n) &\longrightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^n) \\ \mathbf{a}^* : H^k(\mathbb{S}^n) &\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

- Si consideri la proiezione al quoziente:

$$\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n\mathbb{R} = \mathbb{S}^n / \sim_a$$

Che induce i seguenti pullback:

$$\begin{aligned} \pi^* : \Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) &\longrightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^n) \\ \boldsymbol{\pi}^* : H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) &\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n). \end{aligned}$$

Se $k = 0$ allora, siccome $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$ è connesso, si ha che $H^0(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Sia quindi ora $k > 0$.

1. **Claim:** $\Omega^k(\mathbb{S}^n) = \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+ \oplus \Omega^k(\mathbb{S}^n)_-$ ^[453], e inoltre $\pi^*[\Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})] \subseteq \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$ ^[454].

dim.: Si definiscono:

$$\begin{aligned} \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+ &:= \left\{ \omega \in \Omega^k(\mathbb{S}^n) \mid a^* \omega = \omega \right\}; \\ \Omega^k(\mathbb{S}^n)_- &:= \left\{ \omega \in \Omega^k(\mathbb{S}^n) \mid a^* \omega = -\omega \right\} \end{aligned}$$

gli insiemi delle forme invarianti e antiinvarianti.

Siccome $a^* \circ a^* = \text{Id}_{\Omega^k(\mathbb{S}^n)}$, segue la decomposizione. In particolare:

$$\omega = \left(\frac{\omega + a^* \omega}{2} \right) + \left(\frac{\omega - a^* \omega}{2} \right) \tag{*}$$

Inoltre, siccome per definizione di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$: $\pi \circ a = \pi$: **allora**

$$(\pi \circ a)^* = \pi^* \implies a^* \circ \pi^* = \pi^*$$

e pertanto, per ogni $\omega \in \Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})$:

$$a^*(\pi^*\omega) = \pi^*\omega.$$

Segue che $\pi^*[\Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R})] \subseteq \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$

2. **Claim:** In realtà $\pi^* : \Omega^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$ è isomorfismo.

Non dimostrato.

3. **Claim:** Segue che $H^k(\mathbb{S}^n) = H^k(\mathbb{S}^n)_+ \oplus H^k(\mathbb{S}^n)_-$, e inoltre $H^k(\mathbb{P}^n\mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+$.

dim.: Si definiscano:

$$\begin{aligned} H^k(\mathbb{S}^n)_+ &:= \{[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n) \mid \mathbf{a}^*[\omega] = [\omega]\} \\ H^k(\mathbb{S}^n)_- &:= \{[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n) \mid \mathbf{a}^*[\omega] = -[\omega]\} \end{aligned}$$

Per dimostrare la somma diretta è sufficiente:

- Mostrare che $H^k(\mathbb{S}^n)_+ \cap H^k(\mathbb{S}^n)_- = \{0\}$

Sia quindi $[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+ \cap H^k(\mathbb{S}^n)_-$: allora

$$-[\omega] = \mathbf{a}^*[\omega] = [\omega]$$

e pertanto $[\omega] = 0$.

- Mostrare che se $[\omega] \in H^k(\mathbb{S}^n)$ allora esistono $[\omega_1] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+$ e $[\omega_2] \in H^k(\mathbb{S}^n)_-$ tali che:

$$[\omega] = [\omega_1] + [\omega_2].$$

Ma in particolare, per (\star) :

$$\omega = \underbrace{\left(\frac{\omega + a^*\omega}{2} \right)}_{\in \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+} + \underbrace{\left(\frac{\omega - a^*\omega}{2} \right)}_{\in \Omega^k(\mathbb{S}^n)_-}$$

e dunque, ponendo:

$$\omega_1 := \frac{\omega + a^*\omega}{2}$$

$$\omega_2 := \frac{\omega - a^*\omega}{2}$$

si ottiene che

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^*[\omega_1] &= [a^*\omega_1] = [\omega_1] \\ \mathbf{a}^*[\omega_2] &= [a^*\omega_2] = [-\omega_2] = -[\omega_2] \\ [\omega_1] + [\omega_2] &= [\omega]. \end{aligned}$$

Rispetto all'isomorfismo $H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+$, questo è indotto da π^* :

$$\begin{aligned}\pi^* : H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) &\longrightarrow H^k(\mathbb{S}^n)_+ \\ [\omega] &\longmapsto [\pi^* \omega]\end{aligned}$$

- La mappa è ben definita in quanto corestrizione di un pullback, e se $[\omega] \in H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$ allora

$$a^* \circ \pi^* \omega = \pi^* \omega$$

e dunque $\pi^*[\omega] = [\pi^* \omega] \in H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})_+$.

- La mappa è iniettiva: siano $[\omega], [\tau] \in H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$ tali che $\pi^*[\omega] = \pi^*[\tau]$. Allora

$$\pi^*(\omega - \tau) = d\eta.$$

Siccome π^* è un isomorfismo, esiste ν tale che

$$\eta = \pi^* \nu$$

e in particolare:

$$\pi^*(\omega - \tau) = d\pi^* \nu = \pi^* d\nu$$

e dunque $\omega - \tau = d\nu$ per l'iniettività di π^* :

$$[\omega] = [\tau].$$

- La mappa è suriettiva: se $[\eta] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+$, allora WLOG^[455] si ha

$$a^* \eta = \eta$$

e pertanto $\eta \in \Omega^k(\mathbb{S}^n)_+$. Per il Claim 2., esiste $\omega \in \Omega^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$ tale che $\pi^* \omega = \eta$, e inoltre

$$0 = d\eta = d\pi^* \omega = \pi^* d\omega$$

e siccome π^* isomorfismo per ogni k , $d\omega = 0$ e quindi $[\omega] \in H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R})$ e $\pi^*[\omega] = [\eta]$.

Dunque, se $k \neq n$, allora $H^k(\mathbb{S}^n) = 0$ (per la coomologia delle sfere), ma

$$H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong H^k(\mathbb{S}^n)_+ \subseteq H^k(\mathbb{S}^n) = 0$$

e quindi $H^k(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) = 0$.

Sia ora quindi $k = n$. La situazione è la seguente^[456]:

$$H^n(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong H^n(\mathbb{S}^n)_+ \subseteq H^n(\mathbb{S}^n) = \langle [\nu] \rangle$$

dove ν è la forma volume su \mathbb{S}^n . È possibile calcolare che

$$a^* \nu = (-1)^{n+1} \nu$$

e pertanto: $a^*[\nu] = (-1)^{n+1}[\nu]$.

- Se n è pari, allora $n+1$ è dispari, e quindi $a^*[\nu] = -[\nu]$, e quindi $[\nu] \notin H^n(\mathbb{S}^n)_+$:

$$H^n(\mathbb{S}^n)_+ = 0 \implies H^n(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) = 0.$$

- Se n è dispari, allora $n+1$ è pari, e quindi $a^*[\nu] = [\nu]$, e quindi $[\nu] \in H^n(\mathbb{S}^n)_+$:

$$H^n(\mathbb{S}^n)_+ = \langle [\nu] \rangle \cong \mathbb{R} \implies H^n(\mathbb{P}^n \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

1204 Coomologia del toro

1205 Ricoprimento aciclico di una varietà differenziabile

1206 Varietà differenziabile di tipo finito

Esempio 1.

1207 Varietà differenziabile di tipo finito ha coomologia di dimensione finita

1207.1 Varietà differenziabile compatta ha coomologia di dimensione finita

1208 Coomologia a supporto compatto

Osservazione. Si considerino \mathbb{R} e \mathbb{R}^n , con $n \neq 1$. Allora

$$\mathbb{R} \approx \{p\} \approx \mathbb{R}^n$$

dove “ \approx ” indica che sono omotopi.

Considerando invece la coomologia a supporto compatto di \mathbb{R} e di \mathbb{R}^n :

$$\forall k : H_c^k(\mathbb{R}) \neq H_c^k(\mathbb{R}^n)$$

e pertanto, possiamo affermare che $H_c^k(M)$ non è invariante per omotopia.

Osservazione. La coomologia a supporto compatto è uguale alla coomologia di complesso di cocatene di A_c^\bullet .

1209 Coomologia a supporto compatto 0-dimensionale

Si confronti con “Coomologia di De Rham 0-dimensionale”

Se M è una varietà differenziabile:

- Se M è connessa, allora:
 - se M è compatta, allora $H_c^0(M) \cong \mathbb{R}$;
 - se M non è compatta, allora $H_c^0(M) = 0$.

1210 Coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}

Teorema 1. Se H_c^k indica la coomologia a supporto compatto, allora

$$H_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Per motivi di dimensione $H_c^k(\mathbb{R}) = 0$ per $k > 0$. Per $k = 0$ segue dalla coomologia di \mathbb{R} .

Per quanto riguarda $H_c^1(\mathbb{R})$, dimostro che l'integrale

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} : H_c^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_{\mathbb{R}} \omega\end{aligned}$$

è un **isomorfismo**.

- $\int_{\mathbb{R}}$ è ben definita.

Se $\omega = df$ per qualche $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a **supporto compatto**, allora per il **teorema fondamentale del calcolo integrale**:

$$\int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} f' dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t) - f(-t)] = 0$$

dove l'uguaglianza a zero segue dal supporto compatto di f .

- $\int_{\mathbb{R}}$ è suriettiva.

Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ a **supporto compatto**, $f \geq 0$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} f dt \neq 0$$

e pertanto $\dim \text{Im } \int_{\mathbb{R}} > 0$. Necessariamente quindi

$$\dim \text{Im } \int_{\mathbb{R}} = 1.$$

- $\int_{\mathbb{R}}$ è iniettiva.

Sia $\omega = g dt \in A_c^1(\mathbb{R})$ una **1-forma** a **supporto compatto** tale che $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$. Si definisce

$$f(t) := - \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau.$$

Allora f è a **supporto compatto**, e $df = \omega$. Allora $[\omega] = 0$.

Pertanto $\ker \int_{\mathbb{R}} = 0$.

Dunque $H_c^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. ■

Corollario 2. Se $f \in C^\infty(\mathbb{R})^{[457]}$ è a **supporto compatto** e:

- $\forall x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0$;
- la **misura di Lebesgue**: $\mu(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}) > 0$

allora $\{[f dt]\}$ è una **base** di $H_c^1(\mathbb{R})$

Esempio 3. La funzione

$$f = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

soddisfa i requisiti del corollario.

1211 Coomologia a supporto compatto di \mathbb{R}^n

Teorema 1. (Lemma di Poincaré a supporto compatto). Se H_c^k indica la coomologia a supporto compatto, allora

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = n \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Osservazione. Consideriamo $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ funzione C^∞ a supporto compatto, tale che

$$\int_{\mathbb{R}} e \, dt = 1.$$

Sia $\varepsilon \in A_c^n(\mathbb{R}^n)$ una n -forma differenziale a supporto compatto:

$$\varepsilon := e(x^1) \cdot \dots \cdot e(x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \quad [\varepsilon] \in H_c^n(\mathbb{R}^n).$$

Allora l'integrale $\int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon = 1$ e pertanto $[\varepsilon] \in H_c^n(\mathbb{R}^n)$ lo genera.

1212 Coomologia in dimensione massima

Si indica con H^k la Coomologia di De Rham, con H_c^k coomologia a supporto compatto, e con \cong gli isomorfismi

Teorema 1. Sia M una varietà differenziabile connessa di dimensione n .

- Se M è orientabile e compatta, allora

$$H^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

- Se M è orientabile e non compatta, allora

$$H^n(M) = 0.$$

- Se M è non orientabile, allora

$$H^n(M) = 0.$$

- Se M è orientabile, allora

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

5. Se M è non orientabile, allora

$$H_c^n(M) = 0.$$

Dimostrazione. 1. Per DP e DP per varietà compatte

$$H^n(M) \cong H^0(M)$$

e siccome M connessa

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}.$$

2. Siccome M è connessa, allora $H_c^0(M) = 0$ (come per H^0). Quindi per DP

$$H^n(M) \cong H_c^0(M) = 0.$$

3. Come nel calcolo della coomologia di $\mathbb{P}^n\mathbb{R}$, per M non orientabile esiste \widetilde{M} orientabile n -dimensionale e

$$\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$$

continua e suriettiva tale che il pullback

$$\pi^* : H^n(M) \rightarrow H^n(\widetilde{M})$$

è iniettivo

- Se M è non compatta, allora \widetilde{M} è non compatta (poiché l'immagine $\pi[\widetilde{M}] = M$ e immagine continua di spazio compatto è compatto).

Per 2. allora $H^n(\widetilde{M}) = 0$ e siccome π^* è iniettiva allora $H^n(M) = 0$.

- Se M è compatta, allora \widetilde{M} è compatta. Per dimostrare che $H^n(M) = 0$ è sufficiente mostrare che per ogni ω , $[\omega] = 0$. Per iniettività di π^* , è sufficiente mostrare che $\pi^*[\omega] = 0$ per ogni ω .

Si considerino quindi:

- il pullback:

$$\pi^* : A^n(M) \rightarrow A^n(\widetilde{M})$$

- la mappa $A : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ tale che $A^2 = \text{Id}$ e che scambia l'orientazione di M .

Quindi, per ogni ω , siccome A inverte l'orientazione:

$$\int_{\widetilde{M}} \pi^* \omega = - \int_{\widetilde{M}} A^* \pi^* \omega.$$

Ma $A^* \pi^* \omega = (\pi \circ A)^* \omega = \pi^* \omega$, e quindi

$$- \int_{\widetilde{M}} A^* \pi^* \omega = - \int_{\widetilde{M}} \pi^* \omega.$$

Segue che $\int_{\widetilde{M}} \pi^* \omega = 0$ e, per la DP, $\pi^* \omega = 0$.

Pertanto, $\pi^*[\omega] = [\pi^* \omega] = 0$.

4. Per DP $H_c^n(M)^* \cong H^0(M) \cong \mathbb{R}$, quindi $\dim H_c^n(M)^* < \infty$ e dunque $H_c^n(M)^* \cong H_c^n(M)$

$$H_c^n(M) \cong \mathbb{R}.$$

5. Lasciato per esercizio, simile a 3. ■

Osservazione. Mettendo insieme l'isomorfismo dato da DP e quello tra spazio vettoriale e il suo duale, si ottiene che, se M è una varietà differenziabile connessa, orientabile e compatta, e $\dim M = n$, allora

$$\begin{aligned} \int_M : H^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned}$$

è un **isomorfismo**.

Questo segue anche dal fatto che:

1. \int_M è una mappa lineare;
2. è suriettiva, poiché $\int_M \nu \neq 0^{[458]}$, per ν **forma volume** (che esiste per la **caratterizzazione delle v.d. orientabili**)
3. è iniettiva, in quanto $\ker \int_M \neq H^n(M)$ (poiché $\int_M \nu \neq 0$, per il **Teorema Nullità + Rango**)

Osservazione. Se M è una varietà differenziabile qualsiasi, allora la dimensione di $H_c^n(M)$ è uguale al numero di componenti connesse orientabili di M .

Osservazione. Quindi, se M è una varietà differenziabile connessa e orientabile di dimensione n , esiste $\omega_M \in A_c^n(M)$ tale che

1. La coomologia a supporto compatto $H_c^n(M) = \langle [\omega_M] \rangle^{[459]}$;
2. $\int_M \omega_M = 1$.

Infatti, per la **Dualità di Poincaré** si ha il seguente **isomorfismo** con lo **spazio duale**^[460]:

$$H^0(M) \xrightarrow{\cong} H_c^n(M)^*$$

$$[\omega] \longmapsto \left([\tau] \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \right)$$

- Siccome M è connessa, allora $\dim H^0(M) = 1 < +\infty$.
- Pertanto $\dim H_c^n(M)^* = 1$ (per la dualità di Poincaré).
- Quindi esiste

$$F : H_c^n(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

non nulla. Quindi F **isomorfismo**, ed esiste $[\tau_M] \in H_c^n(M)$ non nullo tale che $F[\tau_M] = 1$.

- Per l'isomorfismo dalla dualità di Poincaré, esiste $[\omega_0] \in H^0(M)$ tale che

$$\begin{aligned} F : H_c^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\tau] &\longmapsto \int_M \omega_0 \wedge \tau \end{aligned}$$

- In particolare, quindi

$$1 = F[\tau_M] = \int_M \omega_0 \wedge \tau_M.$$

Si pone $\omega_M := \omega_0 \wedge \tau_M$.

- Sicuramente $[\omega_M] \in H_c^n(M)$, per definizione del [prodotto wedge](#).
- $[\omega_M] \neq 0$ (e quindi genera tutto lo spazio): infatti, se per assurdo $[\omega_M] = 0$ allora ω_M è esatta, e quindi, per il [Teorema di Stokes](#),

$$\int_M \omega_M = 0.$$

Assurdo.

1213 Caratterizzazione forme esatte di grado massimo su varietà orientabile, connessa e compatta

Proposizione 1. Sia M una varietà differenziabile orientabile, connessa e compatta. Allora una n -forma differenziale $\omega \in A^n(M)$ è esatta sse l'integrale

$$\int_M \omega = 0.$$

Dimostrazione. (\Rightarrow): per il [Teorema di Stokes](#).

(\Leftarrow): Per la [Dualità di Poincaré](#) (e [Cohomologia in dimensione massima](#)), si ha che $H^n(M)$ ha dimensione 1.^[461] Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_M : H^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Infatti

1. \int_M è [lineare](#);
2. sia dominio che codominio hanno dimensione 1;
3. $\int_M \nu \neq 0$ ^[462], per ν [forma volume](#) (che esiste per la [caratterizzazione](#) delle v.d. orientabili)

Quindi, se $\int_M \omega = 0$ allora $[\omega] = 0$ in $H^n(M)$, ovvero ω è esatta. ■

Osservazione. Nelle condizioni di cui sopra, quindi, se $[\eta], [\omega] \in H^n(M)$

$$[\eta] = [\omega] \iff \int_M (\eta - \omega) = 0.$$

1214 Caratterizzazione forme esatte di grado massimo a supporto compatto su varietà orientabile connessa

Proposizione 1. Sia M una varietà differenziabile orientabile, connessa. Allora una n -forma differenziale $\omega \in A_c^n(M)$ a supporto compatto è esatta sse l'integrale

$$\int_M \omega = 0.$$

Dimostrazione. (\Rightarrow): per il Teorema di Stokes.

(\Leftarrow): Per la Dualità di Poincaré (e Coomologia in dimensione massima), si ha che $H_c^n(M)$ ha dimensione 1. Pertanto:

$$\begin{aligned} \int_M : H_c^n(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\omega] &\longmapsto \int_M \omega \end{aligned}$$

è un isomorfismo. Infatti

1. \int_M è lineare;
2. sia dominio che codominio hanno dimensione 1;
3. siccome $H_c^n \cong \mathbb{R}$, allora $H_c^n = \langle [\omega_M] \rangle$; posso sempre scegliere ω_M tale che $\int_M \omega_M = 1$, e pertanto $\int_M \omega_M \neq 0$.

Quindi, se $\int_M \omega = 0$ allora $[\omega] = 0$ in $H^n(M)$, ovvero ω è esatta. ■

1215 Integrale di forma su sottovarietà non nullo implica forma non esatta

Corollario 1. Sia M è una varietà differenziabile orientabile, e $S \subseteq M$ una sottovarietà di M , compatta e di dimensione $k < n$; sia $\omega \in A^k(M)$.

Allora, se $\int_S \omega \neq 0^{[463]}$ allora ω non è esatta.

Dimostrazione. Sia $i : S \hookrightarrow M$ l'inclusione:

$$\int_S \omega := \int_M i^* \omega$$

dove i^* è il pullback.

Se ω è esatta, allora $\omega = d\eta$:^[464]

$$i^*\omega = d(i^*\omega)$$

e quindi

$$\int_S \omega = \int_S i^*(d\eta) = \int_S d(i^*\omega) = 0$$

per il [Teorema di Stokes](#). ■

1216 Boolean valued semantics for infinitary logics [CORSO]

See the [campusnet webpage](#), and the course material.

1216.1 Lecture 1 - <2025-11-17 Lun>

We work in ZFC

Definizione 1. Given a cardinal λ , L is a λ -signature if

$$L = \{R_i \mid i \in I\} \cup \{f_j \mid j \in J\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$$

such that:

- R_i is an α_i -ary predicate symbol for some $\alpha_i < \lambda$ for all $i \in I$;
- f_j is an β_j -ary function symbol for some $\beta_j < \lambda$ for all $j \in J$;
- c_k is a constant symbol for all $k \in K$.

Note: if $\lambda = \omega$ a λ -signature is a first order signature.

Definizione 2. Let L be a λ -signature. We fix $\{x_\alpha \mid \alpha < \lambda\}$ a set of free variable.

The L-terms are obtained as expected:

- if x is a variable, it is a term;
- if f_j is β_j -ary and $(t_\beta \mid \beta < \beta_j)$ is a sequence of terms, then

$$f_J(t_\beta \mid \beta < \beta_j)$$

is a term for all $j \in J$;

- c_k is a term for all $k \in K$.

The L-atomic formulae are obtained as expected:

- if R_i is an α_i -ary relation symbol and $(t_\alpha \mid \alpha < \alpha_i)$ is a sequence of terms, then

$$R_i(t_\alpha \mid \alpha < \alpha_i)$$

is an atomic L-formula.

Osservazione. In both formulae and terms only $< \lambda$ variables can occur (check through induction).

Definizione 3. Given κ, λ infinite regular cardinals and L a λ -signature, the $L_{\kappa, \lambda}$ -formulae are defined as follows:

- every atomic L -formula is an $L_{\kappa, \lambda}$ -formula
- if φ is an $L_{\kappa, \lambda}$ -formula, then $\neg\varphi$ is;
- if $U \in [\lambda]^{<\lambda} := \{X \subseteq \lambda \mid |X| < \lambda\}$ and φ is a $L_{\kappa, \lambda}$ -formula, then

$$\forall \{x_\alpha \mid \alpha \in U\} \varphi, \quad \exists \{x_\alpha \mid \alpha \in U\} \varphi,$$

are $L_{\kappa, \lambda}$ -formulae;

- if $|Z| < \kappa$ and $\{\varphi_z \mid z \in Z\} \subseteq L_{\kappa, \lambda}$ -formulae and there is $U \subseteq [\lambda]^{<\lambda}$ s.t. for each $z \in Z$

$$\text{Frvar}(\varphi_z) \subseteq \{x_\alpha \mid \alpha \in U\}$$

then the following are $L_{\kappa, \lambda}$ -formulae:

$$\bigwedge_{z \in Z} \varphi_z, \quad \bigvee_{z \in Z} \varphi_z.$$

Definizione per induzione di Frvar.

Esempio 4. In L_{ω_1, ω_1} , consider $L_{\kappa, \lambda} = \{R\}$ with R a binary relation symbol. Consider these axioms:

- Order axioms of R ;
- this axiom:

$$\forall(x_n \mid n < \omega) \left[\left[\bigwedge_{n < m < \omega} (x_n R x_m) \right] \rightarrow \left[\exists y \bigwedge_{n \in \omega} x_n R y \right] \right]$$

One can check that a Tarski-Model has to be an uncountable linear order.

Esempio 5. In L_{ω_1, ω_1} consider

$$L = \{R, c_\alpha \mid \alpha < \omega_1, d_n \mid n < \omega, X, Y\}.$$

- X, Y are unary relations
- R is the graph of a surjecting function $X \rightarrow Y$, with axioms:

$$\begin{aligned} \forall x, y, z (R(x, y) \wedge R(x, z)) &\rightarrow (y = z); \\ \forall x, y R(x, y) &\rightarrow ((x \in X) \wedge (y \in Y)); \\ \forall x &\left[X(x) \longleftrightarrow (\exists y R(x, y)) \right]; \\ \forall y &\left[Y(y) \longleftrightarrow (\exists x R(x, y)) \right]. \end{aligned}$$

- we add two axioms

$$\begin{aligned} \forall x & \left(X(x) \longleftrightarrow \bigvee_{n \in \omega} (x = d_n) \right); \\ \forall y & \left(Y(y) \longleftrightarrow \bigvee_{\alpha \in \omega_1} (y = c_\alpha) \right); \end{aligned}$$

- we add the last axiom

$$\bigwedge_{\substack{m, n \in \omega \\ m \neq n}} d_n \neq d_m \wedge \bigwedge_{\substack{\alpha, \beta \in \omega_1 \\ \alpha \neq \beta}} c_\alpha \neq c_\beta.$$

So we have a R functional from X to Y , total and surjective on Y s.t. X is countable and Y is uncountable. This theory can't have a Tarski-Model.

From now on no function symbols in what is written, but reintroducing them is a standard exercise.

1216.1.1 Tarski semantics for $L_{\kappa, \lambda}$

Definizione 6. Given a λ -signature $L = \{R_i \mid i \in I, c_k \mid k \in K\}$ (relational), \mathcal{M} is an L -structure if

$$\mathcal{M} = (M, R_i^{\mathcal{M}} \mid i \in I, c_k^{\mathcal{M}} \mid k \in K)$$

with

- $R_i^{\mathcal{M}} \subseteq M^{\alpha_i}$ for all $i \in I$ where α_i is the arity of R_i ;
- $c_k^{\mathcal{M}} \in M$ for all $k \in K$.

\mathcal{M} is a Tarski-model.

We say that $\mathcal{M} \models R_i(x_j \mid j \in U, c_k \in V)[m_j/x_j \mid j \in U]$ for $m_j \in M$, where $U \cup V = \alpha_j$ iff

$$(m_j \mid j \in U, c_k^{\mathcal{M}} \mid k \in V) \in R_i^{\mathcal{M}}.$$

(we are discarding the order with this notation)

Given $\varphi(x_j \mid j \in U)$ with displayed free variables

$$\mathcal{M} \models \varphi(x_j \mid j \in U)[m_j/x_j \mid j \in U]$$

iff

- if φ is $\neg\psi$ and $\mathcal{M} \not\models \psi(x_j \mid j \in U)[m_j/x_j \mid j \in U]$.
- if φ is $\exists V \psi$ and

$$\mathcal{M} \models \psi(x_j \mid j \in U, y_\ell \mid \ell \in V)[m_j/x_j \mid j \in U, n_\ell/y_\ell \mid \ell \in V]$$

for some $\{n_\ell \mid \ell \in V\} \subseteq M$.

- if φ is

$$\bigwedge_{z \in Z} \psi_z(x_j \mid j \in U)$$

and for all $z \in Z$ we have $\mathcal{M} \models \psi_z(x_j \mid j \in U)[m_j/x_j \mid j \in U]$

- if φ is

$$\bigvee_{z \in Z} \psi_z(x_j \mid j \in U)$$

and for some $z \in Z$ we have $\mathcal{M} \models \psi_z(x_j \mid j \in U)[m_j/x_j \mid j \in U]$

With this semantics

- the first example is in L_{ω_1, ω_1} and its Tarski models are linear orders of uncountable cofinality.
- the second example is in $L_{\omega_2, \omega}$ and has no Tarski models.

1216.1.2 Proof system

See page 9 of

Teorema 7. (Soundness Theorem for Tarski Semantics). The proof system is sound for Tarski Semantics.

Fact: the proof system is not complete for Tarski Semantics

Esempio 8. Recall the Example 5. The conjunction of all the axioms is an $L_{\omega_2, \omega}$ -sentence which is coherent for the proof system but Tarski-false. Hence its negation is Tarki-valid but not provable.

Esempio 9. Failure of completeness and interpolation for Tarski-semantics. Let

$$L_0 = \{=\}, \quad L_1 = \{=, c_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}, \quad L_2 = \{=, d_n \mid n < \omega\}$$

and let

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \bigwedge_{\alpha < \beta < \omega_1} c_\alpha \neq c_\beta, & \psi_1 &\in \{L_1\text{-sentences}\} \\ \psi_2 &= \exists v \left(\bigwedge_{n \in \omega} v \neq c_n \right) \wedge \left(\bigwedge_{n < m < \omega} c_n \neq c_m \right) & \psi_2 &\in \{L_2\text{-sentences}\} \end{aligned}$$

then $\psi_1 \models_{TS} \psi_2$ but $\psi_1 \not\models \psi_2$.

1216.2 Lecture 2 - <2025-11-19 Mer>

A little recap/obs about last lecture.

Osservazione. 1. $L_{\omega, \omega}$ is (equivalent to) first order logic.

2. $L_{\infty, \lambda} = \bigcup_{\kappa \in \text{Reg}} L_{\kappa, \lambda}$, where $\text{Reg} \subseteq \text{Card}$ are the regular cardinals; $L_{\infty, \infty} = \bigcup_{\lambda \in \text{Reg}} L_{\infty, \lambda}$.

The $L_{\infty, \omega}$ is a “good logic”, very tame with nice semantics, boolean valued, while $L_{\infty, \infty}$ is a “bad logic”.

Lets write a proof of the following:

$$\bigwedge_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\varphi_i \vee \psi_j) \vdash \left(\bigwedge_{i \in I} \varphi_i \right) \vee \left(\bigwedge_{j \in J} \psi_j \right).$$

which is the following, from the rules in in Section 3.2

$$\begin{array}{c} \frac{\varphi_i \vdash \varphi_i, \psi_j \quad \psi_j \vdash \varphi_i, \psi_j \quad \forall i \in I, j \in J}{\varphi_i \vee \psi_j \vdash \varphi_i, \psi_j, \quad \forall i \in I, j \in J} \\ \frac{}{\bigwedge_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\varphi_i \vee \psi_j) \vdash \varphi_i, \psi_j, \quad \forall i \in I, j \in J} \\ \frac{}{\bigwedge_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\varphi_i \vee \psi_j) \vdash \varphi_i, \bigwedge_{j \in J} \psi_j, \quad \forall i \in I} \\ \frac{}{\bigwedge_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\varphi_i \vee \psi_j) \vdash \bigwedge_{i \in I} \varphi_i, \bigwedge_{j \in J} \psi_j} \\ \hline \bigwedge_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (\varphi_i \vee \psi_j) \vdash \left(\bigwedge_{i \in I} \varphi_i \right) \vee \left(\bigwedge_{j \in J} \psi_j \right) \end{array}$$

Esempio 10. If $(M, E) \models \text{ZFC}$ as axiomatized in signature $\{\in\}$, we have that:

1. $\{(\Gamma, \Delta) \in M^2 \mid (M, E) \models \text{there is a proof of } \Gamma \vdash \Delta\}$ is a class which is uniformly Δ_1 -definable in M without parameters i.e. there are Δ_0 -formulae^[465] $\theta_0(x, y, z)$ and $\theta_1(x, y, w)$ s.t.

$$\text{ZFC} \vdash$$

[...]

Completeness for the proof system fine for ω -signatures. (first order signatures). But this is not important, since $L_{\infty, \omega}$ is the good infinitary logic.

1216.2.1 Failure of interpolation for Tarski semantics on $L_{\infty, \omega}$ and $L_{\infty, \infty}$.

In PHD THESIS (to cite):

1. There are $\psi_0, \psi_1, \psi_0 \in L_{\omega_2, \omega}$ and $\psi_1 \in L_{\omega_1, \omega}$ s.t. $\psi_0 \rightarrow \psi_1$ is Tarski valid, but for no θ in $L_{\infty, \omega}$, for $\{=\} = L(\psi_0) \cap L(\psi_1)$ $\psi_0 \rightarrow \theta$ and $\theta \rightarrow \psi_1$ are both Tarski-valid
2. for any $\psi_0 \rightarrow \psi_1$ valod for Tarski semantics on $L_{\infty, \omega}$ there is a θ in $L_{\infty, \infty}$ such that

$$\psi_0 \rightarrow \theta, \quad \theta \rightarrow \psi_1$$

are tarski valid, and θ is in $L(\psi_0) \cap L(\psi_1)$.

3. $L_{\infty, \infty}$ interpolation fails. There is $\varphi \rightarrow \psi$ in L_{ω_1, ω_1} which is Tarski valid but has not interpolant θ which is in $L_{\infty, \infty}$ which respect to Tarski semantics.

Counterexample to interpolation for TS in $L_{\omega_2, \omega}$: Let $L_0 = \{c_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ and $L_1 = \{d_n \mid n \in \omega\}$.

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \bigwedge_{\alpha < \beta < \omega_1} (c_\alpha \neq c_\beta) \\ \psi_1 &= \exists v \left(\bigwedge_{n < \omega} d_n \neq v \right) \end{aligned}$$

$\psi_0 \rightarrow \psi_1$ is Tarski valid. In fact, if \mathcal{M} is a $L_0 \cup L_1$ structure s.t. $\mathcal{M} \models \psi_0$, then M (the domain of \mathcal{M}) is uncountable. Then $D = \{d_n^{\mathcal{M}} \mid n \in \omega\} \neq M$, so there is $u \in M$ s.t. $u \notin D$. u witness $\mathcal{M} \models \psi_1$.

In $L = \{=\}$, structures are categorical in each infinite cardinality (obv). Then for \mathcal{M} an L -structure of infinite cardinality, $\text{Th}(\mathcal{M})$ is model-complete, in the sense that $\mathcal{M}_0 \sqsubseteq \mathcal{M}_1$ models of $\text{Th}(\mathcal{M})$ are $\mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_1$.

Now, by way of contradiction, assume θ is an L -sentence for $L = \{=\}$ s.t. $\psi_0 \rightarrow \theta$ and $\theta \rightarrow \psi_1$ are both Tarski-valid. Then

$$\begin{aligned}\neg\psi_1 &\rightarrow \neg\theta, & \neg\theta &\rightarrow \neg\psi_0. \\ \neg\psi_0 &\equiv \bigvee_{\alpha < \beta < \omega_1} c_\alpha = c_\beta \\ \neg\psi_1 &\equiv \forall v \left(\bigvee_{n \in \omega} d_n = v \right)\end{aligned}$$

$\neg\psi_1$ is true only in a countable structure. On the other hand $\neg\psi_0$ can be true in structures of any infinite size.

In particular $\neg\theta$ is true in structures for $\{=\}$ of any infinite cardinality, so it is true in all structure of infinity cardinality (by the Lemma 11). Then $\neg\psi_0$ is true in an uncountable structure. Absurd.

Lemma 11. Let A, B some infinite $\{=\}$ -structures s.t. $A \sqsubseteq B$, $a_1, \dots, a_n \in A$ and $\sigma \in L_{\infty, \omega}$,

$$A \models \sigma(a_1, \dots, a_n) \longleftrightarrow B \models \sigma(a_1, \dots, a_n).$$

Dimostrazione. Let $B \models \exists x \psi(x, a_1, \dots, a_n)$, and let $C = A \cup \{c\}$ s.t. $B \models \psi(c, a_1, \dots, a_n)$.

Then $C \sqsubseteq B$, $C \models \psi(c, a_1, \dots, a_n)$ and $C \cong A$ via an infinity morph f that fized a_1, \dots, a_n , so

$$A \models \psi(f(c), a_1, \dots, a_n). \quad \blacksquare$$

1216.2.2 Boolean valid semantics

Definizione 12. Let L be a relational λ -signature. \mathcal{M} is a B -valued model for $L = \{R_i \mid i \in I\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$ for B a boolean algebra if the following holds:

$$\mathcal{M} = (M, R_i^{\mathcal{M}}, c_k^{\mathcal{M}})$$

1. There is a function

$$\begin{aligned}=^{\mathcal{M}}: M^2 &\longrightarrow B \\ (\tau, \sigma) &\longmapsto [\![\tau = \sigma]\!]_B^{\mathcal{M}}\end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned}[\![\tau = \tau]\!]_B^{\mathcal{M}} &= 1_B \\ [\![\tau = \sigma]\!]_B^{\mathcal{M}} &= [\![\sigma = \tau]\!]_B^{\mathcal{M}} \\ [\![\tau = \sigma]\!]_B^{\mathcal{M}} \wedge [\![\sigma = \nu]\!]_B^{\mathcal{M}} &\leq [\![\tau = \nu]\!]_B^{\mathcal{M}}.\end{aligned}$$

2. For each $i \in I$, given n_i the arity of R_i , there is a function

$$R_i^{\mathcal{M}} : M^{n_i} \longrightarrow B$$

$$(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i}) \longmapsto \llbracket R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i}) \rrbracket_B^{\mathcal{M}}$$

1216.3 Lecture 3 - <2025-11-24 Lun>

Last lecture:

1. Proof that interpolation fail for $L_{\infty, \omega}$.
2. Failure of completeness for Tarski semantics with regard to the Proof System in .
3. $\mathcal{M} \models_{L_{\infty, \omega}}^{\text{TS}} \varphi$ is $\Delta_1(\text{ZFC})$.
4. $\mathcal{M} \models_{L_{\infty, \infty}}^{\text{TS}} \varphi$ is at least $\Pi_1(\text{ZFC})$

Note that 3. and 4. say that the concept of provability in $L_{\infty, \omega}$ is “good”, since its absolute, while in $L_{\infty, \infty}$ is not.

In this lecture we will show a sentence ψ and a structure \mathcal{M} s.t. $\mathcal{M} \models \psi$ holds in V but not in $V[G]$.

Esempio 13. We built a bijection between ω and ω_1 :

$$L = \{R, X, Y\} \cup \{c_\alpha \mid \alpha < \omega_1^V\} \cup \{d_n \mid n \in \omega\}$$

where R is binary and X, Y are unary.

- ψ is given by the conjunction of:

1. $R : X \rightarrow Y$ is the graph of a bijection (first order sentence);
2. $\forall x \left(X(x) \longleftrightarrow \bigwedge_{\alpha < \omega_1^V} x = c_\alpha \right) \wedge \bigwedge_{\alpha < \beta < \omega_1^V} (c_\alpha \neq c_\beta);$
3. $\forall y \left(Y(y) \longleftrightarrow \bigwedge_{n \in \omega} y = d_n \right) \wedge \bigwedge_{n < m < \omega} (d_n \neq d_m).$

Then $\psi \models^{\text{TS}} \perp$.

We want to show that there is no proof in V of $\psi \vdash \perp$.

Assume “ P is a proof of $\psi \vdash \perp$ ”, $P \in V$. But that is $\Delta_1(\text{ZFC})$ in parameters P, ψ, \perp . Let G be V -generic for $\text{Coll}(\omega, \omega_1^V)$, then

$$V[G] \models “P \text{ is a proof of } \psi \vdash \perp”$$

but in

$$V[G] \models \exists f \left[(f : \omega_1^V \rightarrow \omega) \text{ is a bijection} \right].$$

Then we can consider

$$\mathcal{M} = (f, \omega_1^V, \omega, c_\alpha \mapsto \alpha, d_n \mapsto n)$$

and $M \models \psi$. Given ZFC consistency, we have that there is no proof P of $\psi \vdash \perp$ in V .

Osservazione. Why $\mathcal{M} \models_{L_{\infty,\omega}}^{\text{TS}} \varphi$ is Δ_1 ? Because we need only to consider the structure $\mathcal{M}^{<\omega}$ to understand what is true in \mathcal{M} , where M is its domain.

In fact, if

$$\mathcal{M} \models \exists(x_1, \dots, x_n) \psi(x_1, \dots, x_n) \quad (35)$$

the we know that for every $a_1, \dots, a_n \in M$

$$\mathcal{M} \models \psi(x_1, \dots, x_n)[a_i/x_i : i = 1, \dots, n]$$

is simple i.e. Δ_1 , so (35) iff:

$$V \models \exists s \in M^{<\omega} \mathcal{M} \models \psi(x_1, \dots, x_n)[s_i/x_i \mid i < n]$$

simple in parameters M and ω .

Osservazione. But if we consider:

$$M \models_{L_{\infty,\omega}}^{\text{TS}} \exists(x_n \mid n < \omega) \psi(x_n \mid n < \omega)$$

which is equivalent to

$$V \models \exists f \in M^\omega \mathcal{M} \models \psi(x_n \mid n < \omega)[f(i)/x_i \mid i < \omega]$$

and so we have to know M^ω to check whether $\exists(x_n \mid n < \omega) \psi(x_n \mid n < \omega)$ is true when I have to check it for $\psi(x_n \mid n < \omega)$.

Esempio 14. Let $L = \{<\}$ binary relation, and let ψ be the conjunction of

- Axioms of linear order
- $\forall(x_n \mid n < \omega) \exists y \left[\bigwedge_{n \in \omega} (x_n < y) \right]$.

In V we have that $\langle \omega_1^V, \in \rangle \models \psi$.

Quantifier elimination axiom: given $C = \{c_i \mid i \in I\}$ a set of constant in a signature L :

$$\text{QE}_C := \forall x \left[\bigvee_{i \in I} (x = c_i) \right]$$

and if $\mathcal{M} \models \text{QE}_C$ then, given M domain of \mathcal{M} , we have $|M| \leq |I|$.

Inductively, one maps $\psi \mapsto \psi_c$, by

$$\begin{aligned} \left(\bigwedge_{j \in K} \psi_j \right)_C &= \bigwedge_{j \in J} ((\psi_j)_C) \\ \left(\exists x \psi(x) \right)_C &= \bigwedge_{i \in I} (\psi(c_i))_C \\ (\neg \psi)_C &= \neg (\psi)_C \\ &\vdots \end{aligned}$$

Fact: $\psi \equiv_{\text{QE}_C}^{\text{TS}} \psi_C$ for $\text{L}_{\infty,\omega}$.

One can generalize this concept on $\psi \equiv_{\text{QE}_C}^{\text{TS}} \psi_C$ for $\text{L}_{\infty,\infty}$.

Esempio 15. We give an example of a $\psi \equiv_{\text{QE}_C} \varphi$ in V but not in some $V[G]$. Given $C = \{c_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$:

$$\begin{aligned}\psi : \quad & \forall(x_n \mid n \in \omega) \exists y \left[\bigwedge_{n < \omega} (x_n < y) \right] \\ \varphi : \quad & \bigwedge_{f \in (C^\omega)^V} \bigvee_{\alpha < \omega_1^V} \left[\bigwedge_{n < \omega} (f(n) < c_\alpha) \right]\end{aligned}$$

Then $V \models (\psi \equiv_{\text{QE}_C}^{\text{TS}} \varphi)$.

If then G is V -generic for $\text{Coll}(\omega, \omega_1)$ then

$$\begin{array}{ll} \langle \omega_1^V, \in, c_\alpha \mapsto \alpha : \alpha < \omega_1^V \rangle \models \psi & \text{holds in } V \\ \langle \omega_1^V, \in, c_\alpha \mapsto \alpha : \alpha < \omega_1^V \rangle \models \varphi & \text{holds in } V \\ \langle \omega_1^V, \in, c_\alpha \mapsto \alpha : \alpha < \omega_1^V \rangle \not\models \psi & \text{holds in } V[G] \\ \langle \omega_1^V, \in, c_\alpha \mapsto \alpha : \alpha < \omega_1^V \rangle \models \varphi & \text{holds in } V[G]. \end{array}$$

Modulo QE_C , $\text{L}_{\infty,\infty}$ is the same as second order logic, at least for Tarski semantics.

In fact, if $C = \{c_i \mid i \in I\}$, it is true in $\text{L}_{\infty,|I|^+}$. Given a typical second order formula:

$$\forall R \underbrace{\bigwedge_{\text{first order}} R(x) \wedge \psi(x, y, z, \dots)}$$

we can write in $\text{L}_{\infty,|I|^I}$:

$$\forall(x_i \mid i \in I) \bigwedge_{i \in I} R(x_i) \wedge \psi(x_i, y, z, \dots)$$

TO BE ELABORATED NEXT LECTURE.

Failure of compactness for $\text{L}_{\omega_1,\omega}$ for Tarski semantics.

Let

$$T = \left\{ \bigwedge_{n \in \omega} c_n = c_\omega \right\} \cup \{c_n \neq c_m \mid n < m \leq \omega\}.$$

If $T_0 \subseteq T$ is finite, let K be s.t. all constant $c_i \in \psi \in T_0$ are with $i < K$ or $i = \omega$. Then T_0 holds in

$$(K + 1, c_i \mapsto i, c_\omega \mapsto k) \models T_0$$

while no $\mathcal{M} \models T$.

1216.3.1 Boolean valued semantics

Definizione 16. Let L be a relational first order signature, $L = \{R_i \mid i \in I\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$, and let B be a boolean algebra.

$\mathcal{M} = (M, R_i^{\mathcal{M}}, c_k^{\mathcal{M}})$ is a B -valued model for L if the following holds:

1. There is a function

$$\begin{aligned} =^{\mathcal{M}} : M^2 &\longrightarrow B \\ (\tau, \sigma) &\longmapsto \llbracket \tau = \sigma \rrbracket_B^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

s.t.

$$\begin{aligned} \llbracket \tau = \tau \rrbracket_B^{\mathcal{M}} &= 1_B \\ \llbracket \tau = \sigma \rrbracket_B^{\mathcal{M}} &= \llbracket \sigma = \tau \rrbracket_B^{\mathcal{M}} \\ \llbracket \tau = \sigma \rrbracket_B^{\mathcal{M}} \wedge \llbracket \sigma = \eta \rrbracket_B^{\mathcal{M}} &\leq \llbracket \tau = \eta \rrbracket_B^{\mathcal{M}}. \end{aligned}$$

2. For each $i \in I$, given n_i the arity of R_i , $R_i^{\mathcal{M}}$ is a function

$$\begin{aligned} R_i^{\mathcal{M}} : M^{n_i} &\longrightarrow B \\ (\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i}) &\longmapsto \llbracket R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i}) \rrbracket_B^{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

s.t.

$$\llbracket R_i(\tau_1, \dots, \tau_{n_i}) \rrbracket_B^{\mathcal{M}} \wedge \bigwedge_{j=1}^{n_i} \llbracket \tau_j = \sigma_j \rrbracket_B^{\mathcal{M}} \leq \llbracket R_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n_i}) \rrbracket_B^{\mathcal{M}}.$$

3. For each $k \in K$, $c_k^{\mathcal{M}} \in M$.

If $B = 2 = \{0, 1\}$, then the B -valued models are exactly the Tarski models. The rules are given by the equality axioms in Section 3.2 in .

Definizione 17. Let \mathcal{M} be a B -valued model and assume B is a complete boolean algebra (otherwise in what follows replace B by $\text{RO}(B^+)$).

Definition 3.4 of

1216.4 Lecture 4 - <2025-11-26 Mer>

Esempio 18. Let $L = \{R_i \mid i \in I\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$ be a ω -signature, where R_i are n_i -ary relation symbols and c_k are constant symbols.

For each $j \in J$ let

$$\mathcal{M}_j = (M_j, R_i^{\mathcal{M}_j}, c_k^{\mathcal{M}_j})$$

be a Tarski L -structure. Consider the $\wp(J)$ -structure \mathcal{N} :

$$\mathcal{N} = \left(\prod_{j \in J} M_j, R_i^{\mathcal{N}}, c_k^{\mathcal{N}} \right)$$

- for each $k \in K$: $c_k^{\mathbb{N}} = (c_k^{\mathcal{M}_j} \mid j \in J)$:

$$c_k^{\mathcal{N}} : j \mapsto c_k^{\mathcal{M}_j}$$

- for each $i \in I$:

$$\llbracket R_i^{\mathcal{N}}(f_1, \dots, f_{n_i}) \rrbracket_{\wp(J)}^{\mathcal{N}} = \left\{ j \in J \mid R_i^{\mathcal{M}_j}(f_1, \dots, f_{n_i}) \right\}$$

[...]: prove that this is in fact a $\wp(J)$ -structure. This is the standard construction of the ultraproduct (before the equivalent relation).

Esempio 19. Let's consider

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Lebesgue measurable, } \text{supess } |f| < \infty\}$$

where $\text{supess } |f| = \sup \{r \in \mathbb{R} \mid \mu(|f| > r) > 0\}$.

The unit ball of $L^\infty(\mathbb{R})$ is

$$B_1(L^\infty(\mathbb{R})) := \left\{ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > 1\}) = 0 \right\}$$

Let $\mathcal{M} = B_1(L^\infty(\mathbb{R}))$ be a Meas-model in a language $L = \{+, \cdot, =\}$, where $+, \cdot$ are ternary relation symbols identifying the graphs of those functions, and where

$$\text{Meas} = \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ is Lebesgue Measurable}\}.$$

The evaluations are:

- $\llbracket f = g \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\text{Meas}} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\};$
- $\llbracket f + g = h \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\text{Meas}} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) + g(x) = h(x)\};$
- $\llbracket f \cdot g = h \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\text{Meas}} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \cdot g(x) = h(x)\};$

and this is a boolean model.

We can now consider the boolean algebra

$$\text{MALG} := \text{Meas} / \text{Null} = \{[A]_{\text{Null}} \mid A \in \text{Meas}\}, \quad [A] = [B] \iff \mu(A \Delta B) = 0$$

Is $L^\infty(\mathbb{R})$ a MALG-model? We could use the evaluations

- $\llbracket f = g \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\text{MALG}} = [\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}]_{\text{Null}};$
- $\llbracket f + g = h \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\text{MALG}} = [\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) + g(x) = h(x)\}]_{\text{Null}};$
- $\llbracket f \cdot g = h \rrbracket_{\mathcal{M}}^{\text{MALG}} = [\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \cdot g(x) = h(x)\}]_{\text{Null}}.$

Osservazione. For any info about boolean algebras, see , Chapters 3 and 4.

Definizione 20. Let B a Boolean Algebra and F a filter on B (or dually $I = \widetilde{F} = \{\neg a \mid a \in F\}$):

$$B/F := \{[a]_F \mid a \in B\}, \quad [a]_F = [b]_F \iff (a \Delta b) \in I$$

B/F is a boolean algebra with operations

$$\begin{aligned}[a]_F \vee [b]_F &= [a \vee b]_F \\ [a]_F \wedge [b]_F &= [a \wedge b]_F \\ \neg[a]_F &= [\neg a]_F\end{aligned}$$

Definizione 21. Let \mathcal{M} be a B -valued model for L . We define the B/F -structure \mathcal{M}/F as follows:
if

$$\mathcal{M} = (M, R_i^{\mathcal{M}}, c_k^{\mathcal{M}})$$

then

$$\mathcal{M}/F = (M/F, R_i^{\mathcal{M}/F}, c_k^{\mathcal{M}/F})$$

- $M/F := \{[\tau]_F \mid \tau \in M\}$ where

$$[\tau]_F := \{\sigma \mid \llbracket \sigma = \tau \rrbracket_{\mathcal{M}}^B \in F\}$$

- we obviously have that

$$\llbracket [\tau]_F = [\tau]_F \rrbracket_{\mathcal{M}/F}^{B/F} = [1_B]_F$$

- copy for relations, and well poseness

See Definition 3.5 of .

Fact if G is a ultrafilter of the boolean algebra B , and \mathcal{M} is a B -valued model for L , we have that \mathcal{M}/G is a B/G -valued model.

But $B/G \cong 2$ (since G is a ultrafilter), so \mathcal{M}/G is a Tarski model.

Esempio 22. Let $\{\mathcal{M}_j \mid j \in J\}$ be L -Tarski-structures, for $L = \{R_i \mid i \in I\} \cup \{c_k \mid k \in K\}$ an and c_k are constant symbols, and consider the $\wp(J)$ -structure \mathcal{N} :

$$\mathcal{N} = \left(\prod_{j \in J} M_j, R_i^{\mathcal{N}}, c_k^{\mathcal{N}} \right)$$

as in the Example 18.

Let G be an ultrafilter of $\wp(J)$, i.e. G is a ultrafilter on J . Then \mathcal{N}/G is a Tarski structure, and it is called the ultraproduct of $\{\mathcal{M}_j \mid j \in J\}$ by G .

Teorema 23. (Los Theorem) $\mathcal{N}/G \models \varphi(f_1, \dots, f_n)$ iff $\{j \in J \mid \mathcal{M}_j \models \varphi(f_1(j), \dots, f_n(j))\} \in G$.

Exercise: for all $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ and $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{N}$

$$\llbracket \varphi(f_1, \dots, f_n) \rrbracket_{\mathcal{M}}^B = \{j \in J \mid \mathcal{M}_j \models \varphi(f_1(j), \dots, f_n(j))\}$$

Definizione 24. Given a logic L_{**} among the $L_{\kappa, \lambda}$, we say that a B -valued model \mathcal{M} for L is a L_{**} -fill if for L_{**} -formulae (in display free variables)

$$\varphi(x_i \mid i \in I, y_k \mid k \in K)$$

we have that

$$\llbracket \exists(x_i \mid i \in I) \varphi(x_i \mid i \in I, y_k \mid k \in K) \rrbracket_{\mathcal{M}}^B = ???$$

Fact: The Los Theorem for $L_{\infty,\infty}$ fails for at least one theory T . (De Bondt)

Teorema 25. (Folklore; V. & Pierobon; V. & Santiago). For any $L_{\infty,\omega}$ theory T TFAE:

1. T is Boolean consistent (so there is a B -valued model \mathcal{M} s.t. $\llbracket \bigwedge T \rrbracket_{\mathcal{M}}^B$);
2. T is provably consistent (for the proof system given);
3. T has a Full model for $L_{\infty,\omega}$.

proves 1. \Leftrightarrow 2. for $L_{\infty,\infty}$.

Teorema 26. Assume \mathcal{M} is full for $L_{\omega,\omega}$. Then for all $L_{\omega,\omega}$ -formula $\varphi(x_i \mid i \in I)$ and $(\sigma_i \in i \in I) \in M^I$ and G ultrafilter on B

$$\mathcal{M}/G \models \varphi([\sigma_i]_G \mid i \in I) \iff \llbracket \varphi(\sigma_i \mid i \in I) \rrbracket_{\mathcal{M}}^B \in G$$

Counterexample to fullness: take $C^\omega(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is analytic}\}$. We make $\mathcal{M} = C^\omega(\mathbb{R})$ a MALG-valued model for $L = \{C, <\}$, with C unary and $<$ binary:

$$\begin{aligned} \llbracket f = g \rrbracket_{\text{MALG}}^{\mathcal{M}} &= \left[\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\} \right] \\ \llbracket C(f) \rrbracket_{\text{MALG}}^{\mathcal{M}} &= \begin{cases} [\mathbb{R}], & f \text{ is constant} \\ [\emptyset], & f \text{ is not constant} \end{cases} \\ \llbracket f < g \rrbracket_{\text{MALG}}^{\mathcal{M}} &= \left[\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < g(x)\} \right] - \end{aligned}$$

\mathcal{M} is not a full model for first order logic.

1216.5 Lecture 5 - <2025-12-01 Lun>

Non ho preso appunti

1217 Teorema di Milliken-Taylor

Teorema 1. For every finite coloring of $\mathbb{N}^{(2)}$ there is an infinite sequence $\bar{a} = \langle a_i : i < \omega \rangle$ in \mathbb{N} such that $\text{ocfp}(\bar{a}) \subseteq \text{fp}(\bar{a})^{(2)}$ is monochromatic, where

$$\text{ocfp}(\bar{a}) := \left\{ \{a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}, a_{j_1} + \cdots + a_{j_m}\} \in \text{fp}(\bar{a})^{(2)} \mid i_1 < \cdots < i_n < j_1 < \cdots < j_m \right\}.$$

Dimostrazione. Si dimostra la seguente affermazione:

For every finite coloring of $\mathbb{N}^{(2)}$ there is an infinite sequence $\bar{a} = \langle a_i : i < \omega \rangle$ in \mathbb{N} such that $\text{ocfp}(\bar{a}) \subseteq \text{fp}(\bar{a})^{(2)}$ is monochromatic, where

$$\text{ocfp}(\bar{a}) := \left\{ \{a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}, a_{j_1} + \cdots + a_{j_m}\} \in \text{fp}(\bar{a})^{(2)} \mid i_1 < \cdots < i_n < j_1 < \cdots < j_m \right\}.$$

Sia $\mathcal{U} \succeq \mathbb{N}$ modello saturo in un linguaggio \mathcal{L} che contiene un simbolo di relazione per ogni sottoinsieme proprio di \mathbb{N} e per ogni colore di $\mathbb{N}^{(2)}$. Segue che $\perp_{\mathbb{N}}$ è 1-stazionaria

Sia $\mathcal{A} := \{a \in \mathcal{U} \mid a \neq 0\}$. Questo è un insieme definibile ed è idempotente, pertanto esiste $b_0 \in \mathcal{A}$ tale che $\mathcal{O}(b_0/\mathbb{N})$ sia idempotente.

Sia $\bar{b} = \langle b_i \mid i < \omega \rangle$ una sequenza di coeredi su \mathbb{N} . In particolare si ha:

1. per ogni $i < \omega$: $b_i \perp_{\mathbb{N}} b \upharpoonright_i$ (e quindi $b_1 \perp_{\mathbb{N}} b_0$ e $b_2 \perp_{\mathbb{N}} b_1, b_0$);
2. per ogni $i < \omega$: $b_{i+1} \equiv_{\mathbb{N}, b \upharpoonright_i} b_i$ (e quindi $b_1 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$);
3. $b_1 + b_0 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$, e $b_2 + b_1 \equiv_{\mathbb{N}, b_0} b_1$.

Si costruisce induuttivamente una sequenza $\bar{a} = \langle a_i \mid i < \omega \rangle$ che soddisfi la tesi.

Per ipotesi induuttiva al passo h si supponga di aver costruito $\bar{a} \upharpoonright_h = \langle a_i \mid i < h \rangle$ tale che

$$\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright_h, b_1, b_0) \text{ è monocromatico verde.}$$

Claim: Questo implica che anche $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright_h, b_2, b_1, b_0)$ sia monocromatico verde.

Esiste una formula $\varphi_h(\bar{a} \upharpoonright_h, b_2, b_1, b_0) \in \mathcal{L}$ che afferma questa cosa.

Siccome per 1. si ha che $b_2 \perp_{\mathbb{N}} b_1, b_0$, allora esiste $a_h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mathcal{U} \models \varphi_h(\bar{a} \upharpoonright_h, a_h, b_1, b_0).$$

ovvero $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright_{h+1}, b_1, b_0)$ ha solo elementi verdi.

Si è quindi costruita \bar{a} tale che $\text{ocfp}(\bar{a}, b_1, b_0)$ è monocromatico, e pertanto anche $\text{ocfp}(\bar{a}) \subseteq \text{fp}(\bar{a})^{(2)}$ lo è. ■

Claim: $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright_h, b_1, b_0)$ monocromatico verde implica che anche $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright_h, b_2, b_1, b_0)$ sia monocromatico verde.

Dimostrazione del Claim: Infatti

$$\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright h, b_2, b_1, b_0) = \text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright h, b_1, b_0) \cup$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, a_{j_1} + \dots + a_{j_m} + b_2 + b_1 + b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (36)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, a_{j_1} + \dots + a_{j_m} + b_2 + b_1\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (37)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, a_{j_1} + \dots + a_{j_m} + b_2 + b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (38)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, b_2 + b_1 + b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (39)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_2, b_1 + b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (40)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_2 + b_1, b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (41)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, b_2 + b_1\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (42)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_2, b_1\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (43)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n}, b_2 + b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (44)$$

$$\cup \left\{ \{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_2, b_0\} \mid i_1 < \dots < i_n < j_1 < \dots < j_m < h \right\} \quad (45)$$

- Per gli elementi in (36), (37), (39), (41), (42), per 3. $b_2 + b_1 \equiv_{\mathbb{N}, b_0} b_1$ e pertanto è possibile ricondursi ad un elemento di $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright h, b_1, b_0)$, insieme monocromatico verde.
- Per gli elementi in (38), (44), (45), per 2. $b_2 \equiv_{\mathbb{N}, b_0} b_1$ e pertanto è possibile ricondursi ad un elemento di $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright h, b_1, b_0)$, insieme monocromatico verde.
- Per (43), siccome \bar{b} è una sequenza di coeredi, allora è una sequenza di indiscernibili, e pertanto $(b_2, b_1) \equiv_{\mathbb{N}} (b_1, b_0)$ e dunque è possibile ricondursi ad un elemento di $\text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright h, b_1, b_0)$, insieme monocromatico verde.
- Sia $\{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_2, b_1 + b_0\}$ un elemento di (40). Siccome, per 1., $b_2 \perp_{\mathbb{N}} b_1, b_0$, allora $b_2 \perp_{\mathbb{N}} b_1 + b_0, b_0$ (questo segue banalmente). Inoltre, per 3., si ha che $b_1 + b_0 \equiv_{\mathbb{N}} b_0$.

Per il Lemma 14.8(5) *non-splitting*, allora $b_1 + b_0 \equiv_{\mathbb{N}, b_2} b_0$. Pertanto l'elemento considerato ha lo stesso colore di

$$\{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_2, b_0\}$$

che a sua volta, poiché $(b_2, b_0) \equiv_{\mathbb{N}} (b_1, b_0)$ come argomentato al punto precedente, ha lo stesso colore di

$$\{a_{i_1} + \dots + a_{i_n} + b_1, b_0\} \in \text{ocfp}(\bar{a} \upharpoonright h, b_1, b_0)$$

che è verde per ipotesi.

1218 Teorema di Schwarz

https://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Schwarz

1219 Kernel di una funzione tra spazi vettoriali è spazio vettoriale

1220 Quoziente di spazi vettoriali

1220.1 Dimensione dello spazio vettoriale quoziente

Proposizione 1. Sia V spazio vettoriale infinito dimensionale, $W \subseteq V$. Se $\dim W = n < +\infty$, allora il quoziente V/W avrà dimensione infinita.

Dimostrazione. Se per assurdo $\dim V/W = m$, allora

$$\frac{V}{W} \oplus W \cong V$$

e, per la Formula di Grassman, $\dim V = m + n$. Assurdo. ■

1221 Pullback di una funzione tra varietà differenziabili in coomologia

Siano M, N due varietà differenziabili, $F : M \rightarrow N$ una funzione C^∞ .

Definizione 1. Poiché il pullback commuta con il differenziale, F induce un morfismo tra algebre graduate:

$$\begin{aligned} F^* : H_{dR}^\bullet(N) &\longrightarrow H_{dR}^\bullet(M) \\ [\omega] &\longmapsto F^*[\omega] := [F^*\omega]. \end{aligned}$$

1222 Insieme approssimabile dal basso da una relazione

Si utilizza la Notazione della TEORIA DEI MODELLI

Sia \mathcal{L} un linguaggio, T una teoria completa senza modelli finiti e \mathcal{U} un modello saturo di cardinalità inaccessibile $\kappa > |\mathcal{L}| + \omega$. \mathcal{U} è un modello mostro.

Una qualsiasi formula $\psi(x; z) \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ si indende come relazione, vedendola come

$$\psi(\mathcal{U}^x; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{U}^x \times \mathcal{U}^z.$$

Forse questo può essere generalizzato al di fuori del Modello Mostro

Definizione 1. Un insieme \mathcal{D} è approssimabile da $\varphi(x; z)$ dal basso se vale una delle seguenti affermazioni equivalenti equivalenti:

- per ogni $B \subseteq \mathcal{U}^z$ finito esiste $a \in \mathcal{U}^x$ tale che^[466]

$$\mathcal{D} \cap B = \varphi(a; B) := \varphi(a; \mathcal{U}^z) \cap B$$

$$e \varphi(a; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D};$$

- per ogni $B \subseteq \mathcal{D}$ finito esiste $a \in \mathcal{U}^x$ tale che

$$B \subseteq \varphi(a; \mathcal{U}^z) \subseteq \mathcal{D}.$$

1223 Rango binario di Shelah di una relazione

1224 (bib) FIPSAS - “P1 - Lezione T5 - Apparato respiratorio e circolatorio”

1224.1 Approfondimento SLIDES

Approfondimento fatto tramite

1224.1.1 Slide 1: FIPSAS - 1° GRADO AR: ARGOMENTI DEL CORSO

Contenuto della Slide (Riepilogo) La slide elenca gli argomenti principali del corso **FIPSAS 1° Grado AR** (Autorespiratore ad Aria). Gli argomenti includono: Attrezzatura di base, Cenni di Fisica per il subacqueo, Apparato uditivo e compensazione, La vista in immersione, Attrezzatura ARA, Apparato respiratorio e circolatorio, Assorbimento e rilascio di gas in immersione, Comportamento e tecnica d'immersione, Tabelle d'immersione, e Pianificazione dell'immersione.

Approfondimento dal Manuale P1 Il corso di **1° Grado AR (P1)** abilita il subacqueo a immergersi fino a una profondità massima di **18 metri**, sempre accompagnato da almeno un compagno. Il percorso didattico completo della FIPSAS per gli autorespiratori si articola in tre livelli base (1°, 2° e 3° grado AR), che abilitano a profondità crescenti: 18 m, 30 m e 42 m.

Il **Manuale P1** funge da strumento di studio fondamentale, contenendo in forma estesa tutte le informazioni che l'istruttore illustrerà in aula. La struttura teorica del corso si articola in 12 capitoli che riflettono gli argomenti elencati nella slide, aggiungendo in particolare i cenni sull'ambiente marino.

Il corso include una parte teorica e una pratica in acqua. L'addestramento in piscina (o altro bacino delimitato) è fondamentale per acquisire l'acquaticità e sviluppare le abilità richieste in immersione in un ambiente sicuro e a bassa profondità. L'addestramento in acque libere (mare o lago) è indispensabile per **consolidare le abilità** nell'ambiente effettivo di immersione, sempre sotto la continua supervisione dell'istruttore, per diventare subacquei consapevoli e immergersi in sicurezza.

1224.1.2 Slide 2: CENNI DI ANATOMIA E FISIOLOGIA - Cellule (p. 71)

Contenuto della Slide (Riepilogo) Introduzione al concetto di **Cellule** come unità base degli organismi e la loro funzione vitale (nascere, nutrirsi, riprodursi, morire). Viene definita la formula del **Metabolismo cellulare**: $O_2 + \text{nutrimenti} \rightarrow CO_2 + \text{scorie} + \text{energia}$.

Approfondimento dal Manuale P1 / Manuale Federale d'Immersione Le cellule sono l'unità funzionale della vita. Il **Metabolismo cellulare** è il processo di “combustione” di sostanze energetiche (come **zuccheri** e **grassi**) all'interno della cellula per ricavare l'**energia** indispensabile.

Questo processo vitale genera calore e i sottoprodotto di scarto: **anidride carbonica (CO₂) e scorie**. Il metabolismo stabilisce la necessità fisiologica di un costante apporto di **Ossigeno (O₂)** e di una rimozione efficace della CO₂.

L'azoto (N₂), che costituisce circa il 78% dell'aria respirata, è un **gas inerte e non interviene nei processi metabolici**. L'Ossigeno, invece, rappresenta circa il 21% dell'aria inspirata e viene utilizzato nei processi metabolici.

1224.1.3 Slide 3: CENNI DI ANATOMIA E FISIOLOGIA - Tessuti, Organi, Apparati

Contenuto della Slide (Riepilogo) Viene presentata la gerarchia strutturale del corpo:

- **Tessuti:** Insieme di cellule (es. Sangue, Adiposo, Nervoso, Muscolare, Cartilagineo, Osseo).
- **Organi:** Insieme di tessuti (es. Occhio, Orecchio, Polmone, Cuore).
- **Apparati:** Insiemi di organi (es. Visivo, Uditivo, Respiratorio, Circolatorio).

Approfondimento dal Manuale P1 Sebbene il Manuale P1 non approfondisca specificamente la definizione di tessuti o apparati in questo punto, esso tratta in dettaglio gli apparati cruciali per il subacqueo, come evidenziato dalla struttura del corso:

1. **Orecchio e compensazione (T3):** L'orecchio, in particolare l'orecchio medio, è trattato ampiamente in relazione agli effetti della pressione.
2. **Vista in immersione (T4):** Tratta le alterazioni percettive causate dall'ambiente subacqueo (distorsione delle dimensioni e delle distanze, riduzione del contrasto e del rilievo cromatico) e la funzione della maschera.
3. **Apparato respiratorio e cardiocircolatorio (T6):** Questi sistemi sono fondamentali per sostenere il metabolismo cellulare, garantendo lo scambio O₂/CO₂ e il trasporto nel corpo.

1224.1.4 Slide 4: APPARATO RESPIRATORIO - Funzione e Costituzione (p. 71)

Contenuto della Slide (Riepilogo) **Funzione:** Fornire O₂ al sangue ed eliminare la CO₂. **Costituzione - Vie aeree superiori:** Naso, seni paranasali, bocca, faringe, laringe. **Costituzione - Vie aeree inferiori:** Trachea, bronchi, polmoni.

Approfondimento dal Manuale Federale d'Immersione L'apparato respiratorio ha il compito di mettere in atto la **fase meccanica** della respirazione (richiamo dell'aria) e lo **scambio gassoso** (captazione di O₂ ed eliminazione di CO₂).

La respirazione è guidata primariamente dalla necessità di smaltire la CO₂. Lo **stimolo respiratorio** è dato principalmente dall'incremento della **pressione parziale dell'anidride carbonica** nel sangue. Specifiche cellule nervose nel midollo allungato (nuclei chemiotattici) sono sensibili all'eccesso di CO₂ (iperkapnia) e, in misura minore, alla mancanza di O₂ (ipossia), e da qui partono i comandi per i muscoli respiratori.

1224.1.5 Slide 5: APPARATO RESPIRATORIO - Vie Aeree Inferiori (Dettaglio)

Contenuto della Slide (Riepilogo) Viene fornita una lista sequenziale delle vie aeree inferiori, culminanti negli **alveoli** dove avvengono gli scambi, e l'elenco delle strutture associate:

- Trachea (1)
- Bronchi (2)
- Polmoni (3)
- Bronchioli (4)
- Lobuli (5)
- Alveoli (6)
- Pleure (7) e Diaframma (8).

Approfondimento dal Manuale P1 / Manuale Federale d'Immersione Le vie aeree inferiori (trachea, bronchi, bronchioli e alveoli) contengono l'**aria ventilata a vuoto** che non partecipa agli scambi gassosi, nota come **Spazio morto bronco tracheale**.

Gli alveoli sono il sito primario dello scambio gassoso. Il **diaframma** è un muscolo fondamentale per la respirazione.

1224.1.6 Slide 6: APPARATO RESPIRATORIO - Respirazione: Inspirazione (Fase attiva)

Contenuto della Slide (Riepilogo) L'**Inspirazione** è la **fase attiva**. Si verifica quando il **diaframma si contrae e si abbassa**, espandendo la gabbia toracica e permettendo all'aria di entrare nei polmoni.

Approfondimento dal Manuale P1 (Non si trovano dettagli aggiuntivi sul processo meccanico dell'inspirazione oltre quanto già riportato).

1224.1.7 Slide 7: APPARATO RESPIRATORIO - Respirazione: Espirazione (Fase passiva)

Contenuto della Slide (Riepilogo) L'**Espirazione** è la **fase passiva**. Il diaframma si rilassa e si alza; la cassa toracica si rilassa (o si comprime).

Frequenza respiratoria media: 12-18 atti al minuto.

Volume di ventilazione totale: 7-8 litri al minuto.

Approfondimento dal Manuale P1 Il manuale sottolinea che la respirazione deve essere **regolare e continua** e, per il subacqueo, è raccomandato che **l'espirazione sia più lunga dell'inspirazione**.

In caso di affanno (condizione in cui la CO₂ ristagna nella parte inferiore dei polmoni), si deve **interrompere qualsiasi attività**, assumere una posizione orizzontale, e se possibile, facilitare la respirazione utilizzando il pulsante del secondo stadio dell'erogatore.

1224.1.8 Slide 8: APPARATO RESPIRATORIO - Volumi e Capacità Polmonari

Contenuto della Slide (Riepilogo)

- **Volume polmonare medio totale:** 5500 cc (5.5 litri).
- **Capacità vitale:** 4000 cc (Volume di ventilazione 500 cc + Volume di riserva inspiratoria 2500 cc + Volume di riserva espiratoria 1000 cc).
- **Volume residuo:** 1350 cc.
- **Spazio morto bronco tracheale:** 150 cc.

Approfondimento dal Manuale P1 / Manuale Federale d'Immersione Il volume dei polmoni (Capacità polmonare) è stimato in circa **5500 cc (5,5 litri)**.

Il concetto di **Spazio morto bronco tracheale** (150 cc) è importante perché questo è il volume d'aria contenuto nelle vie aeree che **non partecipa agli scambi gassosi** e viene ventilato a vuoto ad ogni atto respiratorio.

1224.1.9 Slide 9: APPARATO RESPIRATORIO - Composizione Aria e Ruolo dell'Azoto

Contenuto della Slide (Riepilogo)

- **Aria inspirata:** N₂ (Azoto) 79%, O₂ (Ossigeno) 21%, CO₂ trascurabile.
- **Aria espirata:** O₂ 16%, CO₂ 5%.
- **Azoto (N₂):** Gas inerte, non partecipa al metabolismo cellulare.
- **Stimolo respiratorio:** Dato dal livello di CO₂. L'eccesso di CO₂ (ipercapnia) produce affanno.

Approfondimento dal Manuale P1 / Manuale Federale d'Immersione L'aria che respiriamo è composta da circa **78% di Azoto (N₂) e 21% di Ossigeno (O₂)**. L'azoto è un gas inerte, ma la sua esposizione a pressioni superiori a quella atmosferica durante l'immersione fa sì che venga assorbito dai tessuti.

La CO₂ è il principale regolatore della respirazione. Un aumento della concentrazione di anidride carbonica nel sangue determina l'aumento della frequenza respiratoria per eliminarla. Il subacqueo deve stare attento all'**affanno**, una condizione in cui la CO₂ ristagna nella parte inferiore dei polmoni, spesso causata da una respirazione tecnicamente non corretta.

La tossicità dei gas è legata alla loro pressione parziale (p), secondo la **Legge di Dalton** ($p = f \times P$):

- **Ossigeno:** Diventa tossico ad elevate pressioni parziali. Il limite universalmente accettato è **1.6 atm** per 45 minuti. Se respiriamo aria ($f = 0.21$), una pO₂ di 1.6 atm si raggiunge teoricamente a **66 metri**.

- **Azoto:** Ad elevate pressioni parziali causa la **narcosi da azoto** (o ebbrezza da profondità o “martini effect”). La pressione parziale massima sicura per l’azoto in immersione sportiva è circa **4.3 atm**, corrispondente a circa **45 metri** di profondità in aria.

1224.1.10 Slide 10: APPARATO RESPIRATORIO - Respirazione in Immersione

Contenuto della Slide (Riepilogo) In immersione la respirazione deve essere:

1. Regolare e continua.
2. Senza pause pronunciate.
3. L’spirazione deve essere più lunga dell’inspirazione (idealmente 1 volta e $\frac{1}{2}$).
4. Consigliata la respirazione a “dente di sega”.

Approfondimento dal Manuale P1 La regola di non trattenere il respiro, specialmente in risalita, è fondamentale per la sicurezza.

Se il subacqueo con autorespiratori non espira durante la risalita, l’aria contenuta nei polmoni si espande a causa della diminuzione della pressione ambiente (Legge di Boyle-Mariotte). Questa espansione forzata (sovradistensione polmonare), non trovando via d’uscita, può **lacerare il tessuto polmonare**, causando l’ingresso d’aria nel circolo sanguigno arterioso e portando all’**Embolia Gassosa Arteriosa (EGA)**. Questo incidente, tra i più gravi, può teoricamente verificarsi anche risalendo da poco più di un metro di profondità.

1224.1.11 Slide 11: APPARATO CIRCOLATORIO - Funzione e Costituzione (p. 75)

Contenuto della Slide (Riepilogo) **Funzione:** Distribuire l’O₂ al corpo e portare la CO₂ ai polmoni. **Costituzione:**

1. Cuore (pompa).
2. Arterie (vasi che partono dal cuore).
3. Vene (vasi che arrivano al cuore).
4. Sangue (arterioso ricco di O₂, venoso ricco di CO₂).

Approfondimento dal Manuale P1 / Manuale Federale d’Immersione La funzione del sangue è cruciale. Oltre ai globuli rossi, il sangue contiene **piastrine e globuli bianchi**. Le piastrine, che servono a far coagulare il sangue, e i globuli bianchi, coinvolti nella risposta immunitaria, hanno un ruolo nell’evoluzione della **Malattia da Decompressione (MDD)**.

L’apparato circolatorio è l’intermediario tra lo scambio gassoso nei polmoni e l’uso dei gas nelle cellule (metabolismo cellulare).

1224.1.12 Slide 12: APPARATO CIRCOLATORIO - Grande e Piccolo Circolo

Contenuto della Slide (Riepilogo)

1. **Piccolo Circolo (Circolazione polmonare):** VD → Polmoni (scambio gas) → AS.

2. **Grande Circolo (Circolazione sistemica):** VS → Corpo (nutrimento cellule) → AD.

Approfondimento dal Manuale P1 / Manuale Federale d'Immersione Il **Piccolo Circolo** è l'insieme dei vasi sanguigni tra il ventricolo destro (VD) e l'atrio sinistro (AS). Un aspetto interessante è che in questo circolo le **vene contengono sangue arterioso e le arterie contengono sangue venoso**.

Le valvole presenti nel cuore e nei vasi sanguigni assicurano che il **verso della circolazione non possa invertirsi**.

1224.1.13 Appendice: Principi Fisici e Fisiologici Correlati al Contenuto delle Slide

Sebbene le slide si concentrino sull'anatomia e fisiologia di base, per un subacqueo tali concetti sono indissolubilmente legati alle leggi fisiche e agli effetti iperbarici:

Compensazione e Boyle-Mariotte: La legge di Boyle-Mariotte ($P \times V = k$) spiega che all'aumentare della pressione (in discesa), il volume dei gas diminuisce. Questa legge è fondamentale per la sicurezza perché spiega la necessità di:

1. **Compensazione dell'orecchio medio:** Scendendo, il volume d'aria nell'orecchio medio (normalmente chiuso dalla tuba di Eustachio) diminuisce, causando intorflessione del timpano, fastidio e potenziale dolore/lacerazione. La manovra di compensazione (es. Valsalva o Marcante-Odaglia) introduce aria nell'orecchio medio attraverso la tuba per ristabilire l'equilibrio pressorio.
2. **Compensazione della maschera:** La maschera racchiude il naso, permettendo la compensazione di questo spazio, che altrimenti si schiaccerebbe contro il viso.

Assorbimento dei Gas e Legge di Henry: La **Legge di Henry** afferma che, a temperatura costante, la quantità di gas che si scioglie in un liquido è **direttamente proporzionale alla pressione** che il gas esercita sul liquido. Questa legge governa l'assorbimento dell'azoto nei tessuti corporei durante l'immersione:

- In immersione, l'organismo assorbe azoto in quantità proporzionale alla pressione.
- Durante la risalita, l'azoto assorbito deve essere rilasciato in modo controllato, altrimenti può portare alla **formazione di bolle gassose** (MDD - Malattia da Decompressione).
- L'azoto viene assorbito dai tessuti con velocità proporzionale al loro **grado di vascolarizzazione**. La cessione (desaturazione) avviene secondo il percorso inverso.
- Per prevenire la MDD, è fondamentale rispettare una **corretta velocità di risalita** (9 m/min) e le **soste di decompressione** (se fuori curva).

1225 (bib) Neuman - Physiology and Medicine of Hyperbaric Oxygen Therapy, 2008

Certamente. Di seguito, fornirò un **report MOLTO APPROFONDITO** sui capitoli specifici richiesti, con particolare attenzione agli aspetti rilevanti per la subacquea, l'ossigenoterapia iperbarica (HBOT) e la medicina subacquea.

Questo report è basato sul testo “Physiology and Medicine of Hyperbaric Oxygen Therapy”.

DA FINIRE

Capitolo 4: The Physics of Hyperbaric Oxygen Therapy (La Fisica dell’Ossigenoterapia Iperbarica)

Questo capitolo stabilisce i principi fisici che sono fondamentali per comprendere sia l’immersione che l’HBOT.

Unità di Pressione e Misurazione L’unità di pressione più utile e riconosciuta internazionalmente nella comunità iperbarica è l’atmosfera assoluta (**ATA**, **Atmospheres Absolute**).

1225.1 La pressione atmosferica al livello del mare è pari a 1 ATA (che equivale a 14.7 psi o 101.32 kPa).

1225.2 La pressione assoluta (P_{abs}) è la somma della pressione atmosferica (P_{atm}) e della pressione misurata dal manometro (P_{gauge}): $P_{abs} = P_{atm} + P_{gauge}$. Ad esempio, un trattamento a 2.4 ATA al livello del mare richiede una pressione manometrica di 1.4 ATA (1.0 ATA + 1.4 ATA = 2.4 ATA).

Pressione Parziale dei Gas (Partial Pressure) Il concetto di **pressione parziale** di un singolo gas in una miscela è cruciale.

1225.3 È direttamente proporzionale alla percentuale di quel gas nel volume totale della miscela.

1225.4 Determina direttamente la quantità di gas assorbito nei tessuti. Questo è fondamentale per la comprensione di condizioni come l’embolia gassosa arteriosa (AGE), la malattia da decompressione (DCS) e la tossicità da ossigeno (oxygen toxicity), come trattato nei Capitoli 13, 14 e 23.

1225.5 Per esempio, a 6.0 ATA (165 fsw), la pressione parziale di ossigeno (P_{O_2}) è 1.26 ATA e quella dell’azoto (P_{N_2}) è 4.74 ATA, assumendo aria (21% O_2 , 79% N_2) [75t].

Capitolo 5: Clearance to Dive and Fitness for Work (Idoneità all’Immersione e al Lavoro Iperbarico)

Questo capitolo affronta la valutazione medica dei candidati subacquei e del personale iperbarico, un ruolo spesso ricoperto dai medici iperbarici.

Filosofia e Modelli di Valutazione

1225.6 Ruolo del Medico Iperbarico: I medici iperbarici esaminano spesso subacquei sportivi e commerciali per valutarne l'idoneità e, talvolta, per trattare lesioni legate all'immersione.

1225.7 Modelli Amministrativi: Esistono differenze regionali significative.

- **Subacquei Ricreativi:** Il modello più diffuso prevede che il candidato compili un **questionario di screening** (come il Recreational Scuba Training Council [RSTC] Medical Statement). Se le risposte sono positive, è richiesta una consulenza medica.
- **Subacquei Commerciali/Occupazionali:** È quasi sempre richiesta una **valutazione medica obbligatoria** da parte di un medico formato in medicina subacquea (ad esempio in Australia e Nuova Zelanda) [81f].

1225.8 Approccio di I Primi Principi (A Generic Approach): Per valutare l'idoneità in presenza di una condizione medica, si devono porre tre domande fondamentali:

1. La condizione potrebbe predisporre a una **malattia da immersione** (diving illness)?
2. La condizione potrebbe essere **provocata dall'immersione**?
3. La condizione potrebbe **compromettere la sicurezza o le prestazioni** del subacqueo sott'acqua?

1225.9 Rispondere “sì” o “non lo so” a una di queste richiede una revisione più approfondita, e un “sì” definitivo richiede una valutazione rischio/beneficio.

Condizioni Mediche Specifiche con Rilevanza Subacquea

1225.10 Forame Ovale Pervio (Patent Foramen Ovale, PFO): Vi è una comprovata sovra-rappresentazione di shunt destro-sinistro (come il PFO) tra i subacquei che hanno sofferto di DCS neurologica o vestibulocolococleare. Un shunt maggiore è stato riscontrato nel 71% dei casi vestibulocolococleari (rispetto al 12% dei controlli).

- **Gestione PFO:** Per un aspirante subacqueo con PFO “largo” o facilmente provocabile, l'immersione è sconsigliata. Per un PFO “piccolo” e con **shunting** minimo, il candidato può essere idoneo dopo consulenza sul rischio trascurabile.

- 1225.11 Asma: L'asma è comune nella popolazione subacquea. Il principale rischio è il barotrauma polmonare (PBT), che può portare ad AGE. È difficile dimostrare con certezza che i subacquei asmatici siano a rischio significativamente maggiore di infortuni da immersione. La valutazione può includere la spirometria o il test di provocazione bronchiale [102, 103f].
- 1225.12 Radiografia del Torace (CXR): La necessità di routine è controversa. Tuttavia, una CXR può rilevare anomalie polmonari (ad esempio, bolle enfisematose) che predispongono a PBT e AGE. Tali anomalie sono state associate a casi di PBT e AGE.
- 1225.13 Esame Neurologico: È fondamentale documentare quantitativamente eventuali anomalie per avere un punteggio di riferimento (baseline score) nel caso in cui il subacqueo necessiti di trattamento per DCS neurologica.

Capitolo 8: Pulmonary Gas Exchange, Oxygen Transport, and Tissue Oxygenation (Scambio Gassoso Polmonare, Trasporto di Ossigeno e Ossigenazione Tissutale)

Questo capitolo copre la fisiologia fondamentale del trasporto dell'ossigeno, essenziale per capire come la respirazione in ambiente iperbarico influenzi il corpo.

Fisiologia del Trasporto di Ossigeno L'HBOT aumenta l'ossigenazione dei tessuti, in particolare grazie all'aumento della P_{O_2} arteriosa.

- 1225.14 L' O_2 si lega all'emoglobina (Hb) per essere trasportato, ma in condizioni iperbariche, la quantità di ossigeno disciolto fisicamente nel plasma aumenta drasticamente (secondo la Legge di Henry, discussa nel Capitolo 4).
- 1225.15 Durante la respirazione di O_2 al livello del mare, la P_{O_2} nel sangue venoso giugulare raramente superava i 60 mmHg; la respirazione di ossigeno a 3.5 ATA porta a profili di ossigenazione tissutale che riflettono un'alta differenza artero-venosa [177, 603f].

Vasocostrizione Iperossica L'iperossia (alta P_{O_2}) induce vasocostrizione arteriolarica.

- 1225.16 Questo effetto è più marcato nei vasi del cervello, della retina e del muscolo scheletrico.
- 1225.17 Nonostante la riduzione del flusso sanguigno (ad esempio, cerebrale, che diminuisce l'apporto di ossigeno), l'enorme aumento di O_2 disciolto garantisce comunque un aumento netto di ossigeno fornito ai tessuti.
- 1225.18 Un'elevata P_{aCO_2} (anidride carbonica arteriosa) aumenta il flusso sanguigno cerebrale, il che a sua volta aumenta la tossicità dell'ossigeno per il sistema nervoso centrale (CNS) e il rischio di convulsioni.

Capitolo 10: Pressure Effects on Human Physiology (Effetti della Pressione sulla Fisiologia Umana)

Questo capitolo distingue gli effetti della pressione (idrostatica o barometrica, **pressure per se**) dagli effetti delle pressioni parziali dei gas.

Range Fisiologico di Pressione

- 1225.19 Gli esseri umani, senza una cabina pressurizzata, possono tollerare un range di pressione che va da circa 0.17 ATA (a 50.000 piedi di altitudine) a 70 ATA (circa 2300 piedi sotto la superficie del mare). Questa variazione di circa 700 volte è tollerabile solo con l'uso di attrezzature specializzate per la respirazione.

Effetti delle Pressioni Parziali dei Gas (Partial Pressure Effects)

- 1225.20 Narcosi da Azoto (Rapture of the Deep): Quando si respira aria in profondità, l'aumento della P_{N_2} provoca narcosi (come descritto da Paul Bert nel 1878 e da Cousteau 100 anni dopo). La narcosi da azoto è un problema neurologico che limita le immersioni in aria a circa 4 ATA (99 fsw) [214f, 220].

- 1225.21 Tossicità da Ossigeno del SNC (CNS Oxygen Toxicity): È il limite più pressante nell'uso dell'ossigeno iperbarico (in HBOT e immersione con Nitrox). Può verificarsi rapidamente a P_{O_2} di 2 ATA o superiore e può portare a convulsioni violente con poco o nessun preavviso.

Effetti della Pressione Idrostatica (Hydrostatic Pressure)

- 1225.22 HPNS (High-Pressure Nervous Syndrome): A profondità estreme (oltre 10–15 ATA), la compressione idrostatica diretta influenza il SNC, producendo un aumento dell'attività neurale che risulta in tremori.
- 1225.23 Effetti Moderati (<5 ATA): Anche i livelli moderati di pressione (quelli utilizzati in HBOT) possono avere effetti misurabili che non sono semplicemente dovuti alla P_{O_2} : alterazioni nella diffusione dei gas polmonari, resistenza delle vie aeree, flusso sanguigno tissutale locale, e segnalazione neuronale.

Capitolo 13: Arterial Gas Embolism (Embolia Gassosa Arteriosa)

L'embolia gassosa arteriosa (AGE) è una grave complicanza iatrogena o da immersione.

Eziologia e Rischio Subacqueo

- 1225.24 Causa Principale: Nella subacquea, l'AGE è quasi sempre una conseguenza del barotrauma polmonare (PBT). Il PBT si verifica quando l'aria rimane intrappolata nei polmoni durante la risalita (anche di soli 1 metro) e l'espansione del gas rompe gli alveoli, permettendo all'aria di entrare nel flusso sanguigno arterioso.
- 1225.25 Sintomi: I sintomi sono estremamente variabili, ma sono riferibili all'occlusione del sistema vascolare del SNC. I segni suggestivi di AGE includono perdita di coscienza transitoria, cecità o disorientamento dopo l'emersione.
- 1225.26 Diagnosi: L'AGE è una diagnosi clinica. Qualsiasi paziente con una storia suggestiva di AGE richiede un esame neurologico dettagliato e una consulenza iperbarica, poiché le lesioni neurologiche sottili sono difficili da escludere in fase acuta e un ritardo nel trattamento può rendere le lesioni irreversibili.

Trattamento Iperbarico (HBOT)

1225.27 Priorità: La ricompressione immediata è indicata per l'AGE confermata o sospetta.

1225.28 Protocolli: Il trattamento mira a ridurre meccanicamente la dimensione delle bolle (Legge di Boyle) e ad aumentare la P_{O_2} tissutale.

- Il **Tavolo 6A della Marina USA (U.S. Navy Treatment Table 6A)** è stato storicamente raccomandato per l'AGE, prevedendo un'escursione a **6 ATA (165 fsw)** per massimizzare la compressione delle bolle, seguita dalla porzione di respirazione a ossigeno identica al Tavolo 6 [59, 327f].

- Tuttavia, alcuni studi mettono in discussione l'ulteriore vantaggio di una compressione superiore a **2.82 ATA** [327f].

Capitolo 14: Decompression Sickness (Malattia da Decompressione)

La DCS si verifica quando i gas inerti disciolti (principalmente azoto) formano bolle nei tessuti e nel sangue a seguito di una decompressione troppo rapida.

Patogenesi e Sintomatologia

1225.29 Fattori di Rischio: Il rischio è legato al carico di gas inerte (profilo tempo-profondità), alla velocità di risalita e alla presenza di shunt destro-sinistro (PFO), che permettono alle bolle venose (VGE) di raggiungere la circolazione arteriosa.

1225.30 Sintomi Comuni: I sintomi sono estremamente variabili, ma i più comuni includono dolore (bends), parestesia, debolezza muscolare e affaticamento [314f]. La DCS cardiorespiratoria (chokes) è caratteristica di alti livelli di VGE.

1225.31 Diagnosi: La DCS è una diagnosi clinica basata su storia e esame fisico. La differenziazione tra DCS neurologica e AGE si basa su fattori come il tempo di insorgenza e la presenza di alterazione della coscienza.

Trattamento Iperbarico e Protocolli

- 1225.32 Ricompressione:** Il trattamento primario è la ricompressione, per ridurre la dimensione delle bolle e favorirne la riassorbimento.
- 1225.33 Protocolli Standard:** Il Tavolo 6 della Marina USA (U.S. Navy Table 6) (2.8 ATA o 60 fsw, respirando O₂) è il gold standard per la DCS [323, 324t]. La raccomandazione iniziale per la DCS neurologica è la compressione a 18 msw (60 fsw) respirando O₂ al 100%.
- 1225.34 Uso di Gas Inerti Terapeutici:** L'uso di un gas inerte diverso (come l'elio in una miscela Heliox o Nitrox) durante la ricompressione profonda (es. Tavolo 6A) può facilitare l'eliminazione delle bolle [322, 327f].
- 1225.35 Trattamento in Acqua (In-Water Recompression, IWR):** Può essere utilizzato in luoghi remoti quando non è disponibile una camera iperbarica. Richiede la somministrazione di ossigeno al 100% tramite maschera a pieno facciale, protezione termica e un accompagnatore.
- 1225.36 Terapia Aggiuntiva (Adjunctive Therapy):** La somministrazione di liquidi (cristalloidi) è considerata cruciale (Livello 1C) [341, 342t]. La lidocaina può essere usata come adiuvante per la DCS neurologica [342t, 375].
- 1225.37 Ritardo nel Trattamento (Delayed Treatment):** Sebbene il beneficio diminuisca col ritardo, la ricompressione può essere comunque utile. Per i sintomi lievi, un ritardo non è associato a un peggioramento a lungo termine dell'esito.

Capitolo 22: Effects of Pressure (Effetti della Pressione)

Questo capitolo si concentra sulle complicazioni dirette causate dalle variazioni di pressione, note come barotraumi.

Barotrauma dell'Orecchio Medio (Middle Ear Barotrauma, MEBT)

1225.38 Complicazione più Comune: Il MEBT è la complicanza più frequente dell'HBOT (incidenza 3.8 - 12 per 1000 esposizioni). È causato dall'incapacità di equilibrare la pressione tra l'orecchio medio e l'ambiente esterno, spesso dovuto alla disfunzione della Tuba di Eustachio (ET).

1225.39 Prevenzione e Trattamento: Si prevengono con l'educazione alle manovre di compensazione (come Valsalva). In caso di disfunzione cronica o incapacità di compensare, si può ricorrere alla miringotomia (incisione del timpano) o all'inserimento di un tubo di ventilazione (tympanostomy tube) [518, 519f, 585].

Barotrauma dell'Orecchio Interno (Inner Ear Barotrauma, IEBT)

1225.40 Rischio Rare ma Serio: IEBT è raro ma può portare a perdita dell'udito e disfunzione vestibolare. Le lesioni includono rotture della membrana della finestra rotonda o della membrana di Reissner.

1225.41 Chirurgia Otologica: La stapediectomia (intervento chirurgico per l'otosclerosi) è considerata una controindicazione relativa all'immersione e all'HBOT, a causa del potenziale rischio di penetrazione della protesi e danni all'orecchio interno dovuti ai cambiamenti di pressione. Si sconsiglia l'immersione anche dopo la timpanoplastica.

Altri Barotraumi

1225.42 Barodontalgia: Dolore ai denti causato da variazioni di pressione. È stato segnalato in aviatori e subacquei, ma non nei pazienti sottoposti a HBOT.

1225.43 Impianti Cocleari: Sebbene siano stati riportati casi di subacquei con impianti funzionanti, si raccomanda di consultare il produttore prima di iniziare l'HBOT per garantire la sicurezza del paziente e mantenere la garanzia.

Capitolo 23: Oxygen Toxicity (Tossicità da Ossigeno)

L'esposizione a elevate pressioni parziali di ossigeno può causare tossicità chimica che colpisce principalmente il SNC, i polmoni e la retina [604f].

Tossicità del Sistema Nervoso Centrale (CNS Toxicity)

- 1225.44** **Limite più Critico:** È la limitazione più pressante dell'HBOT e dell'immersione con gas arricchiti.
- 1225.45** **Manifestazione:** Si manifesta con convulsioni (crisi epilettiche). Possono essere precedute da sintomi prodromici (tremori, nausea, contrazioni muscolari, alterazioni visive), ma questi segnali non sono affidabili e non sempre si verificano prima dell'esordio convulsivo.
- 1225.46** **Fattori di Rischio:** La ritenzione di CO_2 aumenta il rischio di convulsioni perché induce vasodilatazione cerebrale, che aumenta l'esposizione del cervello all'ossigeno.
- 1225.47** **Tolleranza:** La tolleranza alla tossicità del SNC è stata definita utilizzando un indice obiettivo pre-convulsivo, come i decrementi progressivi nel rapporto T_I/T_T (componente temporale della ventilazione).

Tossicità Polmonare (Pulmonary Toxicity)

- 1225.48** **Effetti:** La tossicità polmonare è causata dal danno chimico all'epitelio alveolare e all'endotelio capillare [604f].
- 1225.49** **Misurazione:** Viene misurata dal declino progressivo e significativo della Capacità Vitale (VC) [613, 614f]. Sono state generate curve iperboliche per prevedere la tolleranza polmonare all'ossigeno in base alla pressione e alla durata dell'esposizione [617f, 621f].

Estensione della Tolleranza (Oxygen Tolerance Extension)

- 1225.50** **Intermittent Exposure (Air Breaks):** La tossicità polmonare e del SNC può essere ritardata in modo significativo alternando periodi di respirazione di ossigeno (O_2) con periodi di respirazione di aria ambiente (air breaks). Questo metodo è essenziale per la sicurezza nei protocolli HBOT prolungati, come il Tavolo 6 della Marina USA.

Ossigeno Iperbarico nella Subacquea (Sintesi)

Per riassumere l'interesse per la subacquea nei capitoli analizzati:

Fisica e Pressione (Capitoli 4 & 10): Il subacqueo deve comprendere come le pressioni parziali dei gas (in particolare P_{N_2} e P_{O_2}) influenzino la tossicità e la narcosi. La profondità (fsw) è direttamente correlata alla pressione assoluta (ATA). A profondità estreme (oltre 10-15 ATA), la limitazione diventa la **HPNS** (effetti diretti della pressione).

Medicina Subacquea (Capitoli 5, 13, 14, 22):

- 1225.51** **Idoneità:** La valutazione medica per l'immersione è cruciale, specialmente per condizioni come PFO o anamnesi di asma, che aumentano il rischio di DCS e PBT/AGE.
- 1225.52** **Incidenti:** AGE (causata da PBT, spesso in risalita rapida) e DCS (formazione di bolle) sono le emergenze primarie.
- 1225.53** **Trattamento:** La ricompressione immediata è il trattamento fondamentale, spesso utilizzando il Tavolo 6 della Marina USA (60 fsw/2.8 ATA O_2).
- 1225.54** **Barotrauma:** La complicanza più comune per i subacquei è il barotrauma dell'orecchio medio (MEBT), ma l'IEBT è più grave; si deve prestare attenzione anche alla presenza di chirurgia otologica pregressa (es. stapedectomy).

Limiti e Sicurezza (Capitoli 10 & 23):

- 1225.55** La sicurezza in immersione è limitata dalla tossicità da ossigeno del SNC a $P_{O_2} \geq 2$ ATA e dalla narcosi da azoto a $P_{N_2} \geq 3 - 4$ ATA.
- 1225.56** L'uso di *interruzioni di aria (*air breaks)** è la tecnica standard per estendere la tolleranza all'ossigeno durante i trattamenti prolungati di ricompressione (come il Tavolo 6).

1226 Esercizio: Nuoto in superficie

1226.1 Descrizione

- Al via dell'istruttore l'allievo parte con il tuffo dal blocco di partenza
- 200 m in superficie, massimo in 8 minuti, alternando stile/rana ad ogni virata;
- Al termine del percorso, l'allievo si sostenta fino allo stop dell'istruttore.

1226.2 Tecniche componenti

1. Efficacia del tuffo
2. Efficacia degli stili
3. Efficacia delle virate
4. Andatura costante e corretto ritmo respiratorio

1227 Esercizio: Apnea dinamica senza attrezzi

1227.1 Descrizione

- Entrata per rotazione;
- 25 metri + virata, con partenza alla parete;
- quota costante, mai affiorare, pause evidenti;
- il compagno segue l'esercizio in superficie, e se necessario si immerge in capovolta per segnalarne il termine;
- riemersione: atti respiratori e poi **dice il numero di passate**.

1227.2 Tecniche componenti

1. Spinta dal bordo e virata corretti
2. Efficacia della rana (braccia e gambe)
3. Pausa evidente
4. Mantenimento della quota
5. Lucidità nell'emersione

1228 Esercizio: Salvamento di un apneista incosciente sul fondo

1228.1 Descrizione

- Soccorritore: 50 metri in superficie con la testa fuori (<60s)
- Infortunato: (+3kg di zavorra) scende sulla verticale al segnale dell'istruttore
- Soccorritore: a 8 metri dall'infortunato capovolta, poi:
 - toglie la zavorra all'infortunato
 - toglie la **propria** zavorra
 - risalita (chiudendo le vie aeree all'infortunato)
 - toglie maschera e due ventilazioni
- Trasporto (totale <180s)
- Estrazione e primo soccorso

1228.2 Tecniche componenti

1. Pinneggiate e capovolta
2. Rispetto dei tempi (60s, 180s)

3. Ordine di sgancio della zavorra
4. Corretta presa per risalire (chiudendo le vie aeree)
5. Corretto trasporto, svestizione e ventilazione
6. Corretta estrazione
7. Primo soccorso

1229 Esercizio: Capovolte in raccolta

1229.1 Descrizione

- Al pronti, l'allievo si stacca dal bordo e si sostenta.
- 3 capovolte + raccordo, un solo atto respiratorio tra le due.
- L'allievo attende sostentandosi lo stop dell'istruttore.

Il compagno controlla dalla superficie con maschera, pinne e areatore.

1229.2 Tecniche componenti

1. Correttezza ed efficacia delle capovolte
2. Raccordo
3. Un solo atto respiratorio
4. Mantenimento del punto fisso

1230 Esercizio: Equipaggiamento sul fondo

1230.1 Descrizione

- L'allievo al **pronto** tuffo in piedi per affondare e deposita il pacchetto sul fondo.
- Ventilazioni.
- Capovolta in raccolta.
- Vestizione (Pinne, Maschera e Aereatore).
- Svuotamento maschera **prima di riemergere**
- Indossa boccaglio.

1230.2 Tecniche componenti

1. Capovolta corretta ed efficace
2. Giusta successione di indossamento

3. Totale svuotamento maschera con minima perdita d'aria
4. Rispetto del punto
5. Tranquillità

1231 Esercizio: Capovolte con attrezzatura

1231.1 Descrizione

- Due allievi insieme.
- Tuffo per affondare e indosso le pinne prima di riemergere.
- 4 capovolte: squadra - forbice - squadra - forbice.
- L'allievo abbandona il boccaglio e risale senza espirare.

1231.2 Tecniche componenti

1. Efficacia delle orizzontalizzazioni
2. Posizione di attesa (sulla verticale, sostentandosi con le mani)
3. Correttezza ed efficacia delle capovolte
4. Alternanza
5. Abbandono del boccaglio

1232 Immersione Subacquea ricreativa

1232.1 Pianificazione dell'immersione

DA FINIRE

1232.2 Briefing

1232.2.1 Briefing

Descrizione immersione:

- Descrizione del punto e del percorso d'immersione:
 - Schizzo del fondale
 - Descrizione del percorso in immersione
 - Ambiente sottomarino, flora e fauna
 - Rispetto dell'ambiente marino
- Descrizione puntuale degli esercizi

- Organizzazione del gruppo
- Definizione delle coppie e ordine di immersione
- Profondità massima e tempo massimo (verifica autonomia/pressione bombole)

Ripasso delle procedure:

- Verifica dei segnali
- Procedura di risalita di emergenza (compagno perso)
- Comportamento di coppia e controlli di coppia:
 - 5 cinghiaggi: pinne e coltello, zavorra, jacket e cinghia bombola, strumenti, maschera
 - 5 aria: primo erogatore, secondo erogatore, manometro, carico jacket, scarichi jacket
 - Non lasciare mai il proprio compagno
- Mantenere la propria posizione nel gruppo
- Non superare la profondità della guida
- Mantenere assetto neutro

Aspetti tecnici immersione:

- Modalità di discesa e risalita (problemi di compensazione e altri inconvenienti)
- Modalità per tappa di sicurezza e sosta profonda
- Modalità d'ingresso e uscita dall'acqua e punto di ritrovo

Migliorie da implementare Immersione 30 novembre 2025 (Ce.F.Is):

- Fare un briefing in ordine cronologico
- Durante il briefing dire quello che si farà davvero, ed in particolare, in immersione, fare quello che si è detto.

1232.2.2 Debriefing

- Analisi critica dell'andamento/errori di tutti i partecipanti;
- Descrizione dell'ambiente sottomarino: flora e fauna avvistate.

Migliorie da implementare Immersione 30 novembre 2025 (Ce.F.Is):

- Il debriefing deve essere cronologico.
- Renderlo coinvolgente.
- Deve essere approfondito.

1232.3 Gestione dell'immersione da istruttore

Alcuni suggerimenti da tenere a mente, di validità generale:

1232.3.1 Comfort degli allievi

- In Acqua, fare quanto dichiarato nel briefing.

1232.3.2 Sicurezza

- Accertarsi del *No Deco Time* di ciascun partecipante
- Fare attenzione alla profondità massima: farci solo una “toccata e fuga”.
 - Non chiedere aria quando c’è il rischio di sforare la profondità massima.

1232.3.3 Percorso

- È importante, però non concentrartici troppo: è meglio “sbagliare strada” ma andare pianino e tenere il gruppo compatto piuttosto che correre per cercare la strada e perdersi gli allievi (o far sgranare il gruppo).

1232.3.4 Altri consigli

- Quando ci si ferma per far compattare il gruppo, mostrare qualcosa affinché le persone non si annoino

1233 Attrezzatura subacquea

L’attrezzatura con cui mi immergo è

- Gav Tecnico
 - Tagliasagole
 - Snorkel flessibile
 - Sparabile
 - Rocchetto sparabile
- Erogatore primario e frusta GAV
- Erogatore secondario e manometro
- Torcia
- Computer
- Secondo Computer
- Bussola
- Maschera primaria

- Maschera secondaria
- Cappuccio
- Muta
- Guanti
- Cappuccio
- Calzari
- Zavorra
- Wetnote
- Lavagnetta
- Boa Segnasub
- Pinne
- Pinne di riserva (?)

1233.1 Gestione in acqua

- GAV:
 - Manometro fissato con moschettone al D-ring basso a sx
 - Erogatori fissati con apposito sostegno allo spallaccio dx
 - Torcia fissata con doppio moschettone allo spallaccio dx
 - Tagliasagole in cintura a sx
- Tascone GAV
 - Aeratore
 - Sparabile e rocchetto
- Tasca Muta DX:
 - Wetnote
 - Seconda Maschera

1233.2 Gestione fuori dall'acqua

1233.2.1 CESTA + BORSONE

Nella cesta:

- scatola degli erogatori
 - erogatori
 - wetnote

- torcia (?)
- manico GOPRO
- scatola maschera 1
- scatola maschera 2
- scatola dei computer + extra
- scatola per corde
- scatola per utensili
- Porta GOPRO
- tasca GAV
 - snorkel
 - sparabile
- GAV
- Tasca per le BATTERIE
 - caricabatterie torce
 - cavo GOPRO
 - Alimentatore

Nel borsone:

- sacca stagna con: muta, cappuccio, guanti
- calzari (in un sacchetto)
- busta con il cambio (per riporre il cambio pre immersione)
- busta con l'accappatoio
- zainetto con gli EXTRA

Sacchetta stagna azzurra con telefono, portafoglio e chiavi (per la barca e non).

1233.3 Gestione a casa

1234 Subacquea - Lancio del pallone sparabile

1235 Decompressione Gas in Immersione

1236 Restrizione di una forma ad una sottovarietà

Siano N una [varietà differenziabile](#), $M \subseteq N$ una [sottovarietà](#), $i : M \hookrightarrow N$ l'inclusione.

Definizione 1. Se $\omega \in \Omega^n(N)$ è una *n-forma*, allora la restruzione di ω a M è la *n-forma* $\omega|_M \in \Omega^n(M)$:

$$\omega|_M := i^*\omega$$

dove i^* indica il *pullback*.

DA FINIRE:

- Ad una sottovarietà? Siamo sicuri? Non basta una immersione?
- È una definizione? O piuttosto una proposizione?
-

1237 Algebra Graduata

Definizione 1. Sia R un anello e sia V una *R-algebra* (dotata di un prodotto $g : V \times V \rightarrow V$). V si dice algebra graduata se esistono V_i per $i \in \mathbb{N}$ delle *R-algebre* tali che la *somma diretta* (come *R-moduli*):

$$V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$$

e tali che, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$ le *immagini*:

$$g[V_i \times V_j] \subseteq V_{i+j}.$$

1238 Morfismo tra algebre graduate

Definizione 1. Siano $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$, $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j$ due *algebre graduate*.

- Un morfismo di algebre graduate è $F : V \rightarrow W$ *morfismo tra algebre* tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'*immagine*:

$$F[V_i] \subseteq W_i.$$

- Un isomorfismo tra algebre graduate è un morfismo *biettivo* tale che la sua *inversa* sia ancora un morfismo.
- Un morfismo graduato di grado d è $F : V \rightarrow W$ *morfismo tra algebre* tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'*immagine*:

$$F[V_i] \subseteq W_{i+d}.$$

1239 Modulo graduato

Definizione 1. Sia M un *R-modulo*. M si dice graduato se esistono degli *R-moduli* M_i , $i \in \mathbb{N}$, tali che la *somma diretta* sia:

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

Osservazione. Siccome sono moduli i seguenti:

- **gruppi abeliani** (sono \mathbb{Z} -moduli);
- **anelli** (considerati con la somma sono gruppi abeliani, e quindi \mathbb{Z} -moduli)
- **spazi vettoriali** (sono \mathbb{K} -moduli con \mathbb{K} campo)

questa definizione è valida per tutti questi esempi. Si noti che **non è valida** per le [Algebre Graduate](#).

1240 Morfismo tra moduli graduati

Definizione 1. Siano $V = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} V_i$, $W = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j$ due **moduli graduati**.

- Un morfismo di moduli graduate è $F : V \rightarrow W$ **morfismo tra moduli** tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'immagine:

$$F[V_i] \subseteq W_i.$$

- Un isomorfismo tra moduli graduati è un morfismo **biettivo** tale che la sua **inversa** sia ancora un morfismo.

- Un morfismo graduato di grado d è $F : V \rightarrow W$ **morfismo tra moduli** tale che, per ogni $i \in \mathbb{N}$, l'immagine:

$$F[V_i] \subseteq W_{i+d}.$$

1241 INBOX - Fleeting Notes

1241.1 Note di lettura: “Il Pendolo di Foucault”.

“perché quando lavori ad un testo in maniera ossessiva [...] non ti puoi sottrarre all'universo di discorso in cui vivi”

Quanto è vero, mi capita ogni volta che studio con interesse una materia. Ho paura che facendo un PhD mi specializzi troppo e poi non sia più capace ad uscire da quell'universo. Chissà se manterrò la mia curiosità?? E la voglia di studiare COSE DIVERSE

Ora posso studiare corsi diversi, spaziare i miei interessi. Ma poi?!

1241.2 Note di lettura: Il Grande Gatsby

Questo romanzo è ambientato nel periodo a cavallo tra le due guerre mondiali a New York. La ragione principale per cui ho letto questo libro è l'atmosfera e l'ambientazione dei primi del novecento, che mi proiettano in un tempo molto diverso dal nostro, in cui alcuni valori si rispettano più rispetto che al presente.

Ciò nonostante, questo romanzo in particolare mette in luce gli aspetti più corrotti della New York di quei tempi (nonostante non lo faccia in modo esplicito, bensì alludendo ad “altro”). L'aspetto forse più importante, invece, è quello psicologico: alcuni temi trattati sono incredibilmente comuni e ci toccano da vicino.

C'è il protagonista, Gatsby. Ha vissuto la sua vita con un unico obiettivo, un unico sogno, una utopia: poter amare Daisy. Ma strada facendo, si rende conto di tenere più al sogno che all'amore

di Daisy. L'idea del suo amore, formatasi e consolidata si tramite i ricordi, completamente basata su un "ritorno al passato", che permetteva a Gatsby di andare avanti.

Quando egli si è reso conto, realizzando il suo "sogno", che quella idealizzazione era utopica, e che non sarebbe potuto tornare al passato, la sua intera vita è crollata. E il climax di questa vicenda è stata la sua morte, indirettamente causata proprio da Daisy. Daisy quindi ha ucciso sia moralmente che "fisicamente" Gatsby.

C'è poi il funerale di Gatsby, che rappresenta l'emblema dell'idea che la fama non porta amicizie e felicità: Gatsby era popolarissimo, alle sue feste partecipavano a centinaia, ma al suo funerale non è andato nessuno —

1241.3 How to study well

1. Prepare EVERYTHING the night before, so that when you sit on your desk all you have to do is to take your pencil and STUDY !
-

1. Put away phone
2. Don't allow yourself sit up untill you're done !

1241.4 Metodo di Studio e Organizzazione

1241.4.1 Come studiare

1. Dividere lo studio in 3 parti
 - lettura / comprensione
 - rielaborazione
 - ripasso.
2. Interlacciare materie diverse
 - allontanare le sedute di ripasso.

1241.4.2 In particolare

- sessione di studio iniziali
 - 70% lettura e comprensione
 - 30% passaggio su org-roam.
- sessione di studio di ripasso.
 - utilizzo di tecniche tipo Flashcard tramite org-roam.

1241.4.3 Dubbi e Riflessioni

Ma siamo sicuri che sia il metodo migliore per ripassare ??

Potrei stampare le Flashcard

1241.5 Salvataggio tools

Dovrei salvare in org-mode gli strumenti per fare le cose: ad esempio E-DICE. Per quanto riguarda i programmi, potrei avere un link ad una dir sul server

1241.6 META

[INPUT](#)

1242 Teorema della derivata nulla

funzione ha derivata nulla sse costante sulle componenti connesse.

[DA FINIRE](#)

1243 Funzione Bilineare

1244 Pullback di una inclusione tra varietà differenziabili

[DA FINIRE](#)

1245 Coomologia delle unioni disgiunte

Vedi Osservazione 5.1.4 dell'Abate-Tovena .

1246 Riduzione della coomologia di un prodotto con la retta reale

Teorema 1. Sia M una [varietà differenziabile](#), e sia

$$\pi : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

la proiezione. Allora π induce un [pullback](#):

$$\pi^* : H^\bullet(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^\bullet(M)$$

che è un [isomorfismo](#) tra le [coomologie](#).

1247 Teorema di invarianza omotopica per la coomologia di De Rham

Teorema 1. Siano M, N varietà differenziabili. Se sono omotopicamente equivalenti, allora hanno coomologia di De Rham isomorfa (come algebra graduata^[467]):

$$H_{dR}^\bullet(M) \cong H_{dR}^\bullet(N).$$

1248 Varietà Differenziabile Orientabile

Definizione 1. Una varietà differenziabile M si dice orientabile se ammette un atlante orientato (i.e. tale che $\det J_{\phi\psi} > 0$).

1249 Supporto di una forma differenziale

Definizione 1. Sia M una varietà differenziabile, e sia ω una forma differenziale. Il supporto di ω è la chiusura topologica:^[468]

$$\text{supp}(\omega) = \overline{\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}}.$$

1250 Atlante orientato

DA FINIRE

1251 Partizione dell'unità

1252 Orientabilità delle sfere

Teorema 1. Sia S^n la sfera n -dimensionale. Allora S^n è una varietà differenziabile orientabile.

DA FINIRE

1253 Formula di Künneth

1254 \mathbb{R}^n è contraibile

Teorema 1. Per ogni $n > 0$, lo spazio topologico \mathbb{R}^n è contraibile.

1255 Varietà differenziabili diffeomorfe hanno stessa coomologia a supporto compatto

Proposizione 1. Se M, N sono varietà differenziabili diffeomorfe, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$H_c^k(M) \cong H_c^k(N)$$

sono **isomorfe**, dove H_c^k indica la **coomologia a supporto compatto**.

1256 Successione di spazi vettoriali esatta induce successione esatta dei duali

Siano A, B, C **spazi vettoriali**, $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ **funzioni lineari**. Siano A^*, B^*, C^* gli **spazi vettoriali duali**, e f^*, g^* le **funzioni duali**.

Proposizione 1. Se la seguente è una **successione di spazi vettoriali esatta in B** :

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

allora la seguente

$$C^* \xrightarrow{g^*} B^* \xrightarrow{f^*} A^*$$

è esatta in B^*

1257 Teorema fondamentale del calcolo integrale

1258 Funzione duale

Sia $f : A \rightarrow B$ un **morfismo** tra **spazi vettoriali**, e siano A^*, B^* gli **spazi duali**.

Definizione 1. La funzione duale di f è

$$\begin{aligned} f^* : B^* &\longrightarrow A^* \\ \beta &\longmapsto f^*(\beta) \end{aligned}$$

tale che, per ogni $a \in A$, $f^*(\beta)(a) = (\beta \circ f)(a)$.

1259 Successione di Mayer-Vietoris per coomologia a supporto compatto

Sia M una **varietà differenziabile**. Si indichi con A_c^\bullet l'insieme delle **forme differenziali a supporto compatto** e con j_* l'estensione a zero di tali forme.

Sia $\{U_0, U_1\}$ un **ricoprimento aperto** di M . Si definiscono^[469]

$$\begin{aligned} s : A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) &\longrightarrow A_c^\bullet(M) \\ (\omega_0, \omega_1) &\longmapsto j_*\omega_0 + j_*\omega_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta : A_c^\bullet(U_0 \cap U_1) &\longrightarrow A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) \\ \eta &\longmapsto (-j_*\eta, j_*\eta). \end{aligned}$$

Queste sono **funzioni lineari** e **morfismi** tra complessi di cocatene.

Proposizione 1. (Proposizione 5.5.8 di).

La successione

$$0 \longrightarrow A_c^\bullet(U_0 \cap U_1) \xrightarrow{\delta} A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) \xrightarrow{s} A_c^\bullet(M) \longrightarrow 0$$

è una SEC di spazi vettoriali (e di complessi di cocatene^[470]), e pertanto induce una successione esatta in coomologia:

$$\cdots \longrightarrow H_c^{k-1}(M) \xrightarrow{\partial_*} H_c^k(U_0 \cap U_1) \longrightarrow H_c^k(U_0) \oplus H_c^k(U_1) \longrightarrow \cdots$$

Inoltre, anche la successione duale lo è:

Osservazione. La scrittura di cui sopra si ha in virtù del fatto che la coomologia a supporto compatto è uguale alla coomologia di complesso di cocatene di A_c^\bullet .

Dimostrazione. Si dimostra unicamente la suriettività di s (ovvero l'esattezza della catena $A_c^\bullet(U_0) \oplus A_c^\bullet(U_1) \xrightarrow{s} A_c^\bullet(M) \rightarrow 0$).

Sia $\omega \in A_c^\bullet(M)$. Sia $\{\rho_0, \rho_1\}$ una partizione dell'unità relativa al ricoprimento $\{U_0, U_1\}$.

Si ha che $\rho_0\omega \in A_c^\bullet(U_0)$ e $\rho_1\omega \in A_c^\bullet(U_1)$:

$$s(\rho_0\omega, \rho_1\omega) = j_*\rho_0\omega + j_*\rho_1\omega = \rho_0\omega + \rho_1\omega = (\rho_0 + \rho_1)\omega = \omega.$$

■

1260 Forma differenziale a supporto compatto

Sia M una varietà differenziabile.

Definizione 1. Si denota con $A_c^k(M)$ l'insieme delle k -forme differenziali a supporto compatto:

$$A_c^k(M) \subseteq A^k(M).$$

Queste formano uno spazio vettoriale graduato: $A_c^\bullet(M)$:^[471]

$$A_c^\bullet(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_c^k(M)$$

nonché un complesso di cocatene con il differenziale. Infatti, se $\omega \in A_c^k(M)$, allora $d\omega \in A_c^{k+1}(M)$, in quanto

$$\text{supp } d\omega \subseteq \text{supp } \omega.$$

1261 Estensione a zero di una forma differenziale a supporto compatto

Sia M una varietà differenziabile, e si considerino le forme differenziali a supporto compatto A_c^k .

Definizione 1. Se $U \subseteq M$ aperto e $\omega \in A_c^k(M)$, si definisce $j_*\omega \in A_c^k(M)$:

$$(j_*\omega)_p = \begin{cases} \omega_p & p \in U \\ 0 & p \notin U \end{cases}$$

1262 Dualità di Poincaré

Teorema 1. Sia M una varietà differenziabile orientabile. Allora, per ogni $0 \leq k \leq n$ il seguente integrale (per il prodotto tensoriale tra coomologie di De Rham H^k e a supporto compatto H_c^k) è ben definito^[472]

$$\begin{aligned} \int_M : H^k(M) \otimes H_c^{n-k}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ([\omega], [\tau]) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \tau \end{aligned}$$

e induce un isomorfismo sullo spazio duale:

$$\begin{aligned} \int_M : H^k(M) &\xrightarrow{\cong} H_c^{n-k}(M)^* \\ [\omega] &\longmapsto \left([\tau] \mapsto \int_M \omega \wedge \tau \right) \end{aligned}$$

Dimostrazione. La mappa è ben definita per il Teorema di Stokes. Si dimostra l'isomorfismo solo per varietà di tipo finito.

Passo 0: Considero un ricoprimento $\{U, V\}$ di M , e scrivo le due successioni Mayer-Vietoris (quella normale e quella a supporto compatto), si ottiene un diagramma in cui tutti i quadrati sono commutativi, tranne (\star) , che è commutativo a meno del segno (*non dimostrato*):

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H^k(M) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \longrightarrow & H^k(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(M) \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow f_M & & \downarrow f_U & & \downarrow f_{U \cap V} \\ \cdots & \rightarrow & H_c^{n-k}(M)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U \cap V)^* \longrightarrow H_c^{n-k-1}(M)^* \rightarrow \cdots \end{array}$$

Passo 1: Si dimostra per induzione sulla cardinalità s di un ricoprimento aciclico (ovvero $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tale che ogni intersezione finita non vuota di aperti sia diffeomorfa ad \mathbb{R}^n , e quindi abbia la stessa coomologia) di M .

- Passo base $s = 1$: M è ricoperto da un solo aperto che ha la Coomologia di \mathbb{R} .

Quindi, per $k \neq 0$ le coomologie sono nulle, mentre^[473]:

$$H^0(M) \cong \mathbb{R}, \quad H_c^{n-0}(M) \cong \mathbb{R}$$

Pertanto $H_c^n(M)^* \cong \mathbb{R}$, e \int_M è effettivamente l'isomorfismo.

- Passo induttivo: Supponiamo la tesi vera per tutte le varietà che ammettono un ricoprimento aciclico di cardinalità $s - 1$, e la dimostriamo per una varietà che ammette un ricoprimento aciclico di s aperti.

Sia quindi M una varietà con un ricoprimento aciclico $\{U_1, \dots, U_s\}$, e siano

$$U := U_1 \cup \dots \cup U_{s-1}, \quad V := U_s$$

Allora $U \cap V$ è ricoperta da $\{U_1 \cap U_s, \dots, U_{s-1} \cap U_s\}$. Scriviamo il diagramma commutativo di cui sopra:

$$\begin{array}{ccccccc} H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \longrightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^k(M) & \longrightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \\ \int_U \downarrow & & \int_V \downarrow & & \int_M \downarrow & & \int_U \downarrow & & \int_V \downarrow & & \int_{U \cap V} \downarrow \\ H_c^{n-k+1}(U)^* \oplus H_c^{n-k+1}(V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(M)^* & \rightarrow & H_c^{n-k}(U)^* \oplus H_c^{n-k}(V)^* \rightarrow H_c^{n-k}(U \cap V)^* \end{array}$$

Per ipotesi induttiva, tutti i morfismi evidenziati in rosso sono isomorfismi, e quindi, per il [Lemma del cinque](#), anche \int_M è isomorfismo. ■

Osservazione. Se M è una [varietà differenziabile orientabile](#) e [compatta](#), allora $H_c^k(M) = H^k(M)$, e pertanto, per DP:

$$H^k(M) \cong H^{n-k}(M)^*$$

Osservazione. Sempre nel caso in cui M è una [varietà differenziabile orientabile](#) e [compatta](#), allora^[474] la [dimensione](#) $\dim H^k(M) < +\infty$ e quindi, applicando nuovamente DP

$$H^{n-k}(M) \cong H^k(M)^* \cong H^k(M)$$

1263 Prodotto Tensoriale

1264 Immagine continua di spazio compatto è compatto

1265 Forma volume sulla sfera

1266 Coomologia del nastro di Moebius

1267 Caratterizzazione forma esatta sulla sfera

1268 Caratterizzazione forma esatta nello spazio proiettivo reale di dimensione dispari

1269 Integrale di forme su sottovarietà differenziabile

DA FINIRE

1270 Coomologia delle superfici topologiche compatte orientabili

Teorema 1. Se Σ_g è la superficie topologica compatta orientabile di genere g , allora la Coomologia di De Rham è^[475]

$$H_{dR}^k(\Sigma_g) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^g \oplus \mathbb{R}^g & k = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove “ \cong ” è un isomorfismo.

Lemma 2. La coomologia del toro bucato, $\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \setminus \{\text{punto}\}$ è

$$H_{dR}^k(\tilde{\mathbb{T}}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ \mathbb{R}^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 0 \end{cases}$$

Dimostrazione. Dato il Toro \mathbb{T} , di cui si conosce la coomologia^[476], si considera:

$$\mathbb{T} = \tilde{\mathbb{T}} \cup D$$

dove $\tilde{\mathbb{T}} = \mathbb{T} \setminus \{p\}$ e D è un intorno aperto attorno a p , omotopo a \mathbb{R}^2 , di cui si conosca le coomologia^[477]. Si noti che $\tilde{\mathbb{T}} \cap D$ è omotopo a \mathbb{S}^1 , di cui si conosce la coomologia^[478]. Si scrive quindi Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H_{dR}^0(\mathbb{T}) \rightarrow H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus H_{dR}^0(D) \rightarrow H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) \\ & & \searrow & & & & \\ & H_{dR}^1(\mathbb{T}) & \xhookrightarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus H_{dR}^1(D) & \rightarrow & H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) & \\ & & \swarrow & & & & \\ & H_{dR}^2(\mathbb{T}) & \xhookrightarrow{\quad} & H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}}) \oplus H_{dR}^2(D) & \rightarrow & H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) & \rightarrow 0 \end{array}$$

Si possono semplificare alcuni termini:

- siccome tutti gli spazi sono connessi, ogni H_{dR}^0 è isomorfo a \mathbb{R} (in particolare, $H_{dR}^0(\tilde{\mathbb{T}}) \cong \mathbb{R}$);
- siccome $\tilde{\mathbb{T}}$ è orientabile ma non compatta, allora $H_{dR}^2(\tilde{\mathbb{T}}) = 0$;
- si sostituiscono gli $H_{dR}^k(D) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^2)$ e $H_{dR}^k(\tilde{\mathbb{T}} \cap D) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^1)$, nonché gli elementi della coomologia di \mathbb{T} .

La successione esatta è necessaria solo più per calcolare $H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & \mathbb{R}^2 & \xhookrightarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow & & \\
 & & \mathbb{R} & \xleftarrow[\beta]{} & 0 & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

(Non dimostrato: $H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}})$ ha dimensione finita). Utilizzando la somma alterna delle dimensioni, si ottiene che

$$-1 + 2 - 1 + 2 - \dim H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) + 1 - 1 = 0$$

ovvero $\dim H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) = 2$, $[H_{dR}^1(\tilde{\mathbb{T}}) \cong \mathbb{R}^2]$. ■

Dimostrazione. (Del Teorema 475) Caso $k = 0$: siccome Σ_g è connessa, allora $[H_{dR}^0(\Sigma_g) = \mathbb{R}]$.

Caso $k = 2$ e $k \geq 2$: Σ_g è una varietà differenziabile di dimensione 2.

- per ogni $k > 2$: $H_{dR}^k(\Sigma_g) = 0$, per questione di dimensione;
- per $k = 2$: siccome Σ_g è compatta e orientabile, allora (Coomologia in dimensione massima)

$$[H_{dR}^2(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}]$$

Caso $k = 1$: Consideriamo Σ_g rappresentato in Figura 41: possiamo dividerlo nei due insiemi U, V , rappresentati in Figura 42:

- U è omotopo alla superficie $\tilde{\Sigma}_{g-1} := \Sigma_{g-1} \setminus \{\text{punto}\}$;
- V è omotopo a $\tilde{\mathbb{T}} := \mathbb{T} \setminus \{\text{punto}\}$, dove \mathbb{T} è il Toro.
- $U \cap V$ è omotopo a \mathbb{S}^1 , come si vede in Figura 43.

Siccome si vuole utilizzare la sequenza di Mayer-Vietoris, (sfruttando l'invarianza della coomologia per omotopia) è necessario calcolare la coomologia di $\tilde{\Sigma}_{g-1}$. Si procede per induzione

- Caso base: $\Sigma_1 = \mathbb{T}$, è verificato.
- Ipotesi induttiva: si supponga vera l'ipotesi per Σ_{g-1} :

$$H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) \cong \mathbb{R}^{g-1} \oplus \mathbb{R}^{g-1}$$

Si vuole dimostrare la tesi per Σ_g . Si procede scrivendo la successione di Mayer-Vietoris, utilizzando U e V come sopra.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{dR}^0(\Sigma_g) & \rightarrow & H_{dR}^0(U) \oplus H_{dR}^0(V) & \rightarrow & H_{dR}^0(U \cap V) \\ & & & & \searrow & & \\ & & H_{dR}^1(\Sigma_g) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^1(U) \oplus H_{dR}^1(V) & \rightarrow & H_{dR}^1(U \cap V) \\ & & & & \swarrow & & \\ & & H_{dR}^2(\Sigma_g) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^2(U) \oplus H_{dR}^2(V) & \rightarrow & H_{dR}^2(U \cap V) \rightarrow 0 \end{array}$$

Sostituendo utilizzando le considerazioni sull'omotopia:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H_{dR}^0(\Sigma_g) & \rightarrow & H_{dR}^0(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^0(\tilde{T}) & \rightarrow & H_{dR}^0(S^1) \\ & & & & \searrow & & \\ & & H_{dR}^1(\Sigma_g) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^1(\tilde{T}) & \rightarrow & H_{dR}^1(S^1) \\ & & & & \swarrow & & \\ & & H_{dR}^2(\Sigma_g) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^2(\tilde{T}) & \rightarrow & H_{dR}^2(S^1) \rightarrow 0 \end{array}$$

- Tutte le superfici in gioco sono connesse, quindi $H_{dR}^0 \cong \mathbb{R}$;
- Si conoscono la coomologia di \mathbb{S}^1 e \tilde{T} ^[479], nonché le coomologie di dimensione 0 e 2 si Σ_g ;
- $\tilde{\Sigma}_{g-1}$ è una superficie orientabile non compatta, e quindi $H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \cong 0$.

Resta quindi:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & \searrow & & \\ & & H_{dR}^1(\Sigma_g) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & & & \swarrow & & \\ & & \mathbb{R} & \xleftarrow{\quad} & 0 & \longrightarrow & 0 \rightarrow 0 \end{array}$$

Utilizzando la **somma alterna delle dimensioni** si ottiene:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - 2 + 1 - \dim H_{dR}^1(\Sigma_g) + \dim H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) + 2 - 1 + 1 \\ \dim H_{dR}^1(\Sigma_g) &= 1 - 2 + 1 + \dim H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) + 2 - 1 + 1 = \dim H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) + 2. \end{aligned} \quad (\star\star)$$

È qui che entra in gioco l'ipotesi induttiva. Se si considera $\Sigma_{g-1} = A \cup B$, con $A = \Sigma_{g-1} \setminus \{q\}$ e B intorno aperto di q omotopo a \mathbb{R}^2 , si ottiene che:

- $H_{dR}^k(A) \cong H_{dR}^k(\tilde{\Sigma}_{g-1})$, in quanto sono omotopi, di cui si conoscono tutte le coomologie tranne H_{dR}^1 :

$$H_{dR}^0(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \cong \mathbb{R}, \quad H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) = 0;$$

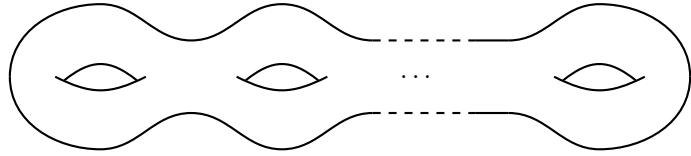


Figura 41: La superficie Σ_g

- $H_{dR}^k(B) \cong H_{dR}^k(\mathbb{R}^2)$, coomologia nota;
- $H_{dR}^k(A \cap B) \cong H_{dR}^k(\mathbb{S}^1)$, coomologia nota.

Scrivendo Mayer-Vietoris:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & H_{dR}^0(\Sigma_{g-1}) & \longrightarrow & H_{dR}^0(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^0(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & H_{dR}^0(\mathbb{S}^1) \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_{dR}^1(\Sigma_{g-1}) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^1(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & H_{dR}^1(\mathbb{S}^1) \\
 & & & & \swarrow & & \\
 H_{dR}^2(\Sigma_{g-1}) & \xleftarrow{\quad} & H_{dR}^2(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus H_{dR}^2(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & H_{dR}^2(\mathbb{S}^1) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Per ipotesi induttiva si conoscono tutte le $H_{dR}^k(\Sigma_{g-1})$, e pertanto, sostituendo tutte le coomologie note:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow \\
 & & \mathbb{R}^{g-1} \oplus \mathbb{R}^{g-1} & \xrightarrow{\quad} & H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) \oplus 0 \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & & & & \swarrow \\
 & & \mathbb{R} & \xleftarrow{\quad} & 0 \oplus 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

e facendo la somma alterna delle dimensioni:

$$\dim H_{dR}^1(\tilde{\Sigma}_{g-1}) = -1 + 2 - 1 + 2(g-1) + 1 - 1 = 2(g-1)$$

che, applicata in $(\star\star)$:

$$H_{dR}^1(\Sigma_g) \cong \mathbb{R}^g \oplus \mathbb{R}^g.$$

■

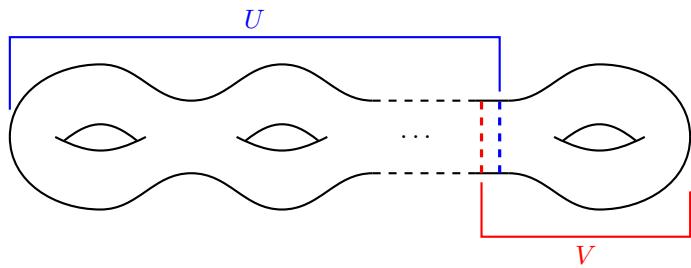


Figura 42: Gli insiemi U e V

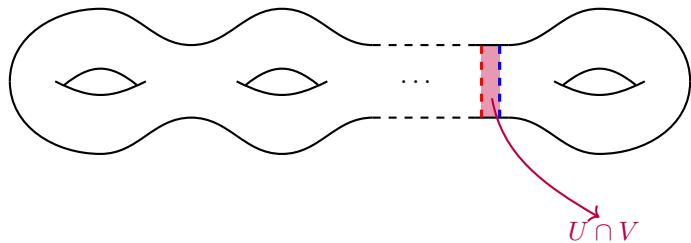


Figura 43: L'insieme $U \cap V$

1271 Grado di una funzione propria tra varietà differenziali

1272 Teorema di Sard

1273 Teorema del Grado

1274 Teorema Nullità + Rango

1274.1 Mappa lineare non nulla tra spazi vettoriali di dimensione uno è isomorfismo

1275 Superficie Topologica

1276 Funtore da RMod a Rmod - Torsione

Sia R un PID commutativo con unità.

Definizione 1. Si definisce il *funtore* $\text{Tor} : R\text{Mod} \rightarrow R\text{Mod}$, dove $R\text{Mod}$ è la *categoria degli R -moduli*, come segue:

- ad un *modulo* M associa la sua *torsione* $\text{Tor}(M)$;

- al morfismo tra moduli $f : M \rightarrow N$ associa

$$f|_{\text{Tor}(M)} : \text{Tor}M \rightarrow \text{Tor}N.$$

Osservazione. Questa definizione è ben posta, in quanto, se $f : M \rightarrow N$ è un morfismo tra moduli, allora per ogni $m \in M$, l'annullatore:

$$\text{ann}(f(m)) \supseteq \text{ann}(m)$$

e quindi l'immagine: $f[\text{Tor}M] \subseteq \text{Tor}N$.

1277 Delta di Kronecher

1278 Rango di un modulo

1278.1 Rango di un modulo libero

Sia R un anello commutativo con unità.

Definizione 1. Sia M un modulo libero, e sia E una sua base. La cardinalità di E si dice **rango** di M e si indica con $\text{rg } M$.

Osservazione. La definizione è ben posta in virtù del Teorema della Base.

È possibile estendere la definizione di cui sopra come segue:

1278.2 Rango di un modulo FG

Sia R un PID, e sia M un R -modulo finitamente generato. Allora^[480] $M' := M / \text{Tor } M$ è libero. È pertanto ben definito il suo rango.

Definizione 2. Si definisce il rango di M come

$$\text{rg } M := \text{rg } M'$$

1279 Prodotto cartesiano di moduli

1280 Sottomoduli in somma diretta

Sia R un anello commutativo con unità.

Teorema 1. Sia M un R -modulo, e siano $U, V \subseteq M$ sottomoduli. Sono fatti equivalenti:

1. per ogni $m \in M$, esistono unici $u \in U, v \in V$ tali che

$$m = u + v$$

2. $U + V = M$ ^[481] e $U \cap V = \{0\}$;

3. $M \cong U \oplus V$.

Dimostrazione. (1. \Rightarrow 2.): L'esistenza di u, v garantiscono che $U + V = M$. Se per assurdo si avesse $0 \neq x \in U \cap V$, allora

$$0 = 0 + 0 = (x) + (-x)$$

negando l'unicità della scrittura.

(2. \Rightarrow 3.): Si consideri il morfismo:

$$\begin{aligned}\phi : U \oplus V &\longrightarrow M \\ (u, v) &\longmapsto u + v\end{aligned}$$

Allora:

- ϕ è suriettivo, poiché $U + V = M$;
- ϕ è iniettivo: se $\varphi(u, v) = u + v = 0$, allora $u = -v$, e quindi $u, v \in U \cap V = \{0\}$, e $(u, v) = 0$.

Quindi ϕ è un **isomorfismo**.

(3. \Rightarrow 1.): Considerando l'isomorfismo ϕ del punto precedente, allora, se $(u, v) = \phi^{-1}(m)$ con $u \in U$ e $v \in V$, allora

$$u + v = m$$

e questa scrittura è unica. ■

Definizione 2. Quando vale una delle condizioni equivalenti, si dice che U e V sono in somma diretta, e si scrive (con un abuso di notazione), $M = U \oplus V$.

1281 Ogni anello ha struttura di modulo su sé stesso

Osservazione. Sia R un **anello commutativo con unità**. R ha una struttura di **R -Modulo** canonica, considerando la somma dell'anello è il prodotto dell'anello.

1282 Logical Pluralism

Vedi "<https://plato.stanford.edu/entries/logical-pluralism/>",

1283 Sottogruppo generato

1284 Condizione sufficiente modello omega-saturo

DA FINIRE

I think that in order to show that some model M (of cardinality ω) of a theory T is ω -saturated it is enough to have the **back and forth lemma** for every $k : N \rightarrow M$.

1285 Funzione olomorfa

1286 Funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette primitiva

Proposizione 1. Se $U \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora f ammette una primitiva su U , ovvero esiste $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che^[482]

$$f = g'.$$

1287 Logaritmo complesso è olomorfo su un aperto semplicemente connesso

Proposizione 1. Se $U \subseteq \mathbb{C}$ è un aperto semplicemente connesso tale che $0 \notin U$, allora

$$\log : U \rightarrow \mathbb{C}$$

è una funzione olomorfa.

Dimostrazione. Consideriamo $f(z) = 1/z$. Questa è una funzione olomorfa su U , e quindi esiste g una primitiva di f , $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Facendo la derivata:

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z} e^{g(z)} \right) = \frac{1}{z} e^{g(z)} g'(z) - \frac{1}{z^2} e^{g(z)} = 0.$$

Siccome U è connesso, allora $\frac{1}{z} e^{g(z)} = \lambda > 0$ costante, ovvero

$$e^{g(z)} = \lambda z.$$

Segue che $e^{-\log \lambda g(z)} = z$, $-\log \lambda g(z)$ olomorfa. ■

1288 Funzione olomorfa su aperto semplicemente connesso ammette un logaritmo

Proposizione 1. Se U è un aperto semplicemente connesso e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e tale che $f(x) \neq 0$ per ogni x , allora esiste $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che

$$e^{g(z)} = f(z).$$

Dimostrazione. È sufficiente prendere una primitiva per $f'(z)/f(z)$. ■

1289 Funzione olomorfa su un aperto semplicemente connesso ammette radice m-esima

Proposizione 1. Se $U \subseteq \mathbb{C}$ è un **aperto semplicemente connesso** e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $f(x) \neq 0$, allora per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ tale che $g(x) \neq 0$ tale che

$$[g(z)]^m = f(z).$$

Dimostrazione. Se $h(z)$ è **logaritmo per $f(z)$** , è sufficiente porre

$$g(z) := e^{\frac{1}{m}h(z)}.$$
■

1290 Mappa esponenziale tra fasci di funzioni olomorfe

Sia $X \subseteq \mathbb{C}$: si considerino i fasci \mathcal{O}_X e \mathcal{O}_X^* .

Definizione 1. Si definisca la **mappa esponenziale**: $\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$: per ogni $U \subseteq \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\exp_U : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X^*(U) \\ f(z) &\longmapsto e^{f(z)}.\end{aligned}$$

Osservazione. Il **fascio nucleo** $\ker \exp = \mathbb{Z}$ **fascio localmente costante**, perché

$$e^{2\pi i z} = 1 \iff z \in \mathbb{Z}.$$

Proposizione 2. La mappa $\exp : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ è un **morfismo di fasci suriettivo**.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e $f \in \mathcal{O}_X^*(U)$. Allora per ogni $p \in U$ esiste $W \subseteq U$ **intorno aperto semplicemente connesso** di p , tale che

$$f|_W \in \text{Im } \exp_W.$$

Questo vale perché ogni **funzione olomorfa** mai nulla su un aperto semplicemente connesso **ammette un logaritmo**.

Quindi, per definizione, f appartiene al **fascio immagine**:

$$f \in (\text{Im } \exp)(U)$$

e pertanto $\text{Im } \exp = \mathcal{O}_X^*$.

■

1291 Spazio topologico semplicemente connesso è connesso

1292 Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite spighe

Sia X uno **spazio topologico**, e sia

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

una **successione** di **morfismi** di **fasci** di **gruppi**.

Proposizione 1. La successione è **esatta** in \mathcal{G} se e solo se, per ogni $p \in X$:

$$\mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p$$

la successione delle **spighe**^[483] è una **successione di gruppi**^[484] **esatta** in \mathcal{G}_p .

Dimostrazione. (\Rightarrow): Lasciata per esercizio.

(\Leftarrow): Si utilizza la **caratterizzazione dell'esattezza sulle sezioni**. Sia $U \subseteq X$ aperto:

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$$

1. Mostriamo che $\psi_U \circ \varphi_U \equiv 0$.

Sia $f \in \mathcal{F}(U)$. Allora

$$\psi_U \varphi_U(f) \in \mathcal{H}(U)$$

e pertanto, per ogni $p \in U$:

$$\mathcal{H}_p \ni [\psi_U \varphi_U(f)]_p = \psi_p \varphi_p[f]_p = 0$$

dove l'ultima uguaglianza è per ipotesi.

Allora, siccome \mathcal{H} è un **fascio**, si ha

$$\psi_U \varphi_U(f) = 0.$$

2. Sia $g \in \ker \psi_U \subseteq \mathcal{G}(U)$, e sia $p \in U$:

$$[g]_p \in \mathcal{G}_p.$$

Allora $\psi_p[g]_p = [\psi_U(g)]_p = 0$ in quanto $\psi_U(g) = 0$.

Pertanto $[g]_p \in \ker \psi_p = \text{Im } \varphi_p$, e quindi esiste $s \in \mathcal{F}_p$ tale che

$$[g]_p = \psi_p(s)$$

ovvero esiste $W \subseteq U$ intorno aperto di p , esiste $f \in \mathcal{F}(W)$ tale che

$$s = [f]_p \implies [g]_p = \varphi_p[f]_p = [\varphi_W(f)]_p$$

Quindi esiste $W' \subseteq W$ intorno aperto di p tale che

$$g|_{W'} = \varphi_W(f)|_{W'} = \varphi_{W'}(f)$$

e quindi $g|_{W'} \in \text{Im } \varphi_{W'}$. ■

1293 Successione di morfismi esatta

1294 Caratterizzazione morfismo di fasci iniettivo tramite spighe

Sia X uno spazio topologico, e siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due fasci di gruppi su X .

Proposizione 1. Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, LSASE:

1. φ è un morfismo di fasci iniettivo;
2. per ogni $p \in X$: $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ ^[485] è un morfismo di gruppi iniettivo;
3. per ogni $U \subseteq X$ aperto: $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ è un morfismo di gruppi iniettivo.

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia considerati:

- Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite spighe
- Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite sezioni
- Caratterizzazione morfismo di fasci iniettivo tramite successione esatta

■

1295 Caratterizzazione morfismo di fasci suriettivo tramite spighe

Sia X uno spazio topologico, e siano \mathcal{F}, \mathcal{G} due fasci di gruppi su X .

Proposizione 1. Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci, LSASE:

1. φ è un morfismo di fasci suriettivo;
2. per ogni $p \in X$: $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p$ ^[589] è un morfismo di gruppi suriettivo.

Dimostrazione. La dimostrazione è ovvia considerati:

- Caratterizzazione di successione esatta di fasci tramite spighe
- Caratterizzazione morfismo di fasci suriettivo tramite successione esatta

■

1296 Esattezza di successione di fasci rispetto alle sezioni globali

Sia X uno spazio topologico.

Proposizione 1. Se $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ è un morfismo di fasci iniettivo, allora

$$\varphi_X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X)$$

è iniettivo.

Proposizione 2. Se la seguente è una **successione esatta di fasci**,

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_{r-1}} \mathcal{F}_r$$

allora la **successione** sulle sezioni globali

$$\mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{\varphi_{1,X}} \mathcal{F}_2(X) \xrightarrow{\varphi_{2,X}} \dots \xrightarrow{\varphi_{r-1,X}} \mathcal{F}_r(X)$$

è un **complesso** (i.e. $\varphi \circ \varphi = 0$) ma non è necessariamente una **successione esatta**.

Proposizione 3. Data la **successione esatta di fasci**:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

allora la **successione** sulle sezioni globali:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\varphi_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\psi_X} \mathcal{H}(X)$$

è **esatta**

Dimostrazione. Sicuramente φ_X è iniettivo e φ_U è iniettivo per ogni $U \subseteq X$, e per la Proposizione 2 $\text{Im } \varphi_X \subseteq \ker \psi_X$. Per dimostrare l'esattezza resta da dimostrare che

$$\text{Im } \varphi_X \supseteq \ker \psi_X$$

Sia quindi $g \in \ker \psi_X \subseteq \mathcal{G}(X)$. Allora^[486] esiste $\{U_i\}$ ricoprimento aperto di X , esiste $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tali che

$$g|_{U_i} = \varphi_{U_i}(f_i).$$

Denotando con $U_{ij} := U_i \cap U_j$, si ha

$$\begin{aligned} g|_{U_{ij}} &= \varphi_{U_i}(f_i)|_{U_{ij}} = \varphi_{U_{ij}}(f_i|_{U_{ij}}) \\ &= \varphi_{U_j}(f_j)|_{U_{ij}} = \varphi_{U_{ij}}(f_j|_{U_{ij}}) \end{aligned}$$

Siccome $\varphi_{U_{ij}}$ è iniettiva, allora $f_i|_{U_{ij}} = f_j|_{U_{ij}}$.

Per l'**assioma di fascio** di \mathcal{F} , esiste $f \in \mathcal{F}(X)$ tale che $f|_{U_i} = f_i$. Inoltre, per ogni i :

$$\varphi_X(f)|_{U_i} = \varphi_{U_i}(f|_{U_i}) = \varphi_{U_i}(f_i) = g|_{U_i}$$

e pertanto $\varphi_X(f) - g|_{U_i} = 0$. Per l'**assioma di fascio**,

$$\varphi_X f = g$$

e pertanto $g \in \text{Im } \varphi_X$. ■

1297 Complesso

Una **successione di morfismi** si dice **complesso** se la **composizione** di due morfismi consecutivi è la mappa nulla.

1298 Atlante complesso

Definizione 1. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, connesso e a base numerabile. Un atlante complesso è una collezione di carte locali: $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ tale che:

- $U_\alpha \subseteq X$ è aperto e $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento di X ;
- $V_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n$ è aperto, e $n =: \dim_{\mathbb{C}} X$ è la dimensione di X ;
- $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$ omeomorfismo;

tale che, per ogni $\alpha, \beta \in A$, se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ allora^[487]

$$\varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha : \varphi_\beta[U_\alpha \cap U_\beta] \rightarrow \varphi_\alpha[U_\alpha \cap U_\beta]$$

è un biolomorfismo.

1299 Struttura Complessa

Definizione 1. Una struttura complessa per X spazio topologico di Hausdorff, connesso e a base numerabile è un atlante complesso massimale rispetto all'inclusione.

1300 Varietà Complessa

Definizione 1. Si dice che X spazio topologico di Hausdorff, connesso e a base numerabile è una varietà complessa se ha una struttura complessa fissata.

Osservazione. Sia quindi X una varietà complessa.

- X è una varietà topologica di dimensione $2n$.
- X è una varietà differenziabile reale C^∞ di dimensione $2n$.
- X , come varietà differenziabile, è sempre orientabile. Infatti, se $\psi : U \rightarrow V$ è un biolomorfismo tra aperti di \mathbb{C}^n , che induce $F : U \rightarrow V$ diffeomorfismo C^∞ tra aperti di \mathbb{R}^{2n} , si ha che^[488]

$$\det J_F = |\det J_\psi|^2$$

Nel caso $n = 1$, se $\psi = u + iv$ olomorfa, allora $F = (u, v)$, e

$$J_F = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}$$

Per Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} v_y &= u_x \\ v_x &= -u_y \end{aligned}$$

e quindi

$$\det J_F = u_x^2 + u_y^2 = |\psi'|^2 = |\det J_\psi|^2.$$

1301 Superficie di Riemann

Definizione 1. Una superficie di Riemann è una varietà complessa di dimensione 1.

1301.1 Genere topologico di una Superficie di Riemann

Osservazione. Una superficie di Riemann è sempre una superficie topologica orientabile, e quindi, se è compatta, è omeomorfo ad una sfera con g manici.

Definizione 2. Se X è una superficie di Riemann compatta, $X \xrightarrow{\text{omeo}} T_g$.^[489] Allora g è il genere topologico di X , e si indica con $g(X)$.

1302 Sfera di Riemann

Definizione 1. La sfera di Riemann è la sfera 2-dimensionale \mathbb{S}^2 dotata di una struttura complessa.

Su \mathbb{S}^2 si considerano due carte locali:

- $\varphi : U := \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ proiezione stereografica;
- $\psi : V := \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} \rightarrow \mathbb{C}$ data da:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^2 \setminus \{S\} & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C} \\ & \searrow \text{proiezione} & \swarrow \text{coniugio} \\ & \text{stereografica} & \\ & \text{del polo sud} & \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Allora si ha:

$$\begin{array}{ccc} U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus \{N, S\} & & \\ \varphi \nearrow & & \searrow \psi \\ \mathbb{C}_z \setminus \{0\} & \xrightarrow{h(z)} & \mathbb{C}_w \setminus \{0\} \end{array}$$

dove $h(z)$ è un biolomorfismo:

$$w = h(z) = \frac{1}{z}.$$

Proposizione 2. \mathbb{S}^2 è una superficie di Riemann compatta, di [BROKEN LINK: 40333d07-ddb5-4df6-bbfe-85e21ab20dc3] 0

Osservazione. Si indica con $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ la sfera di Riemann, per mezzo della seguente mappa:

$$\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \xrightarrow{\text{stereo}} \mathbb{C}$$

$$N \longmapsto \infty$$

Proposizione 3. La sfera di Riemann è **biolomorfa** allo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.^[490]

1303 Esempi fondamentali di varietà complesse

Esempio 1. \mathbb{C}^n è una **varietà complessa** di dimensione n .

1303.1 Spazio proiettivo complesso è una varietà complessa

Lo **spazio proiettivo** complesso $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, di coordinate omogenee $(z_0 : \dots : z_n)$ è **varietà complessa** con l'**atlante**: $U_i := \{z_i \neq 0\}$;

$$\begin{aligned}\varphi_i : U_i &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (z_0 : \dots : z_n) &\longmapsto \left(\frac{z_0}{z_i}; \dots; \frac{\check{z}_i}{z_i}; \dots; \frac{z_n}{z_i} \right).\end{aligned}$$

I cambiamenti di coordinate sono **biolomorfismi**.

Esempio 2. Lo spazio $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ è una **superficie di Riemann compatta** di [BROKEN LINK: 40333d07-ddb5-4df6-bbfe-85e21ab20dc3] zero, con le due carte

$$\begin{array}{ll}\varphi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C} & \varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C} \\ (z_0, z_1) \longmapsto \frac{z_1}{z_0} & (z_0, z_1) \longmapsto \frac{z_0}{z_1}\end{array}$$

Il cambiamento di coordinate è dato da

$$\begin{aligned}\mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z}\end{aligned}$$

1303.2 Aperti connessi di una varietà complessa sono varietà complessa

Proposizione 3. Ogni **aperto connesso** di una **varietà complessa** è una varietà complessa della stessa dimensione.

1304 Struttura Complessa per le sfere

La **sfera** \mathbb{S}^2 ha la **struttura complessa** della **Sfera di Riemann**.

Teorema 1. Le sfere \mathbb{S}^4 e \mathbb{S}^{2n} per $n \geq 4$ non ammettono una **struttura complessa**.

Nel caso di \mathbb{S}^6 , è ancora un problema aperto.

1305 Toro complesso

1305.1 Costruzione come quoziente di gruppi

In \mathbb{C}^n si considerino $2n$ vettori $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$, linearmente indipendenti su \mathbb{R} .

Si consideri ora il sottogruppo additivo di \mathbb{C}^n generato da $\{w_1, \dots, w_{2n}\}$:

$$\Gamma := \{m_1 w_1 + \dots + m_{2n} w_{2n} \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$$

Alcune proprietà:

- Γ è isomorfo a \mathbb{Z}^{2n} come gruppo,
- $\Gamma \subseteq \mathbb{C}^n$ è chiuso;
- Γ ha la topologia discreta, ovvero ogni suo punto è isolato.

Γ prende il nome di reticolo.

Sia quindi $X := \mathbb{C}^n / \Gamma$ il gruppo quoziante, con proiezione suriettiva:

$$\pi : \mathbb{C}^n \rightarrow X.$$

Si dota quindi X della topologia quoziante.

- **Topologia di X :**

Definiamo la mappa $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} : w_i \mapsto e_i$, dove $\{e_i\}$ è la base canonica di \mathbb{R}^{2n} . Questa è \mathbb{R} -lineare ed è un omeomorfismo.

Quindi è una mappa chiusa, e, siccome Γ è chiuso, anche $\phi|_\Gamma$ è chiusa. Inoltre^[491]

$$\phi(\Gamma) = \mathbb{Z}^{2n}$$

e pertanto ϕ è un omeomorfismo tra Γ e \mathbb{Z}^{2n} .

Inoltre, ovviamente, ϕ induce un isomorfismo tra i gruppi:

- \mathbb{R}^{2n} e \mathbb{C}^n ;
- Γ e \mathbb{Z}^{2n} .

Pertanto^[492]

$$X \xrightarrow{\text{omeo}} \frac{\mathbb{R}^{2n}}{\mathbb{Z}^{2n}} \xrightarrow{\text{omeo}} (\mathbb{S}^1)^{2n}$$

e quindi X è una varietà topologica compatta, orientabile e di dimensione pari.

- **Mappa π**

Siccome X è il quoziante per l'azione di Γ su \mathbb{C}^n , allora è una mappa aperta.

Possiamo ora costruire un atlante complesso per X .

1. Siccome $0 \in \Gamma$ e Γ è discreto, esiste un intorno aperto U di 0 in \mathbb{C} tale che $\Gamma \cap U = \{0\}$. Ovvero

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ t. c. } \forall w \in \Gamma \setminus \{0\} \quad \|w\| > 2\varepsilon.$$

Allora, per ogni $z_0 \in \mathbb{C}^n$ fissato, detto

$$D(z_0; \varepsilon) := \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z - z_0\| < \varepsilon\}$$

la mappa

$$\pi|_{D(z_0; \varepsilon)} : D(z_0; \varepsilon) \rightarrow X$$

è **iniettiva**: se $z_1, z_2 \in D$ sono tali che $\pi(z_1) = \pi(z_2)$ allora

$$z_1 - z_2 \in \Gamma : \quad \|z_1 - z_2\| \leq \|z_1 - z_0\| + \|z_0 - z_2\| < 2\varepsilon$$

e quindi $z_1 - z_2 = 0$.

2. Sia quindi $U_{z_0} := \pi[D(z_0; \varepsilon)]$. Siccome π è una mappa aperta, $U_{z_0} \subseteq X$ è un aperto. Inoltre

$$\pi|_{D(z_0; \varepsilon)} : D(z_0; \varepsilon) \rightarrow U_{z_0}$$

è un **omeomorfismo**, poiché è una funzione continua, biiettiva e aperta^[493].

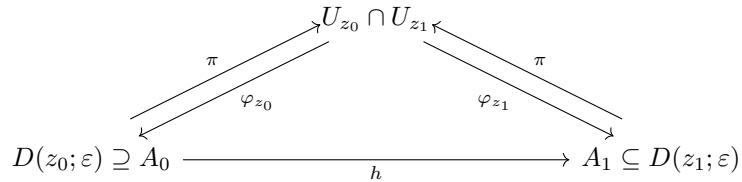
Ammette quindi un inverso $\varphi_{z_0} := (\pi|_{D(z_0; \varepsilon)})^{-1}$:

$$\varphi_{z_0} : U_{z_0} \rightarrow D(z_0; \varepsilon).$$

Quindi $(U_{z_0}; \varphi_{z_0})$ è una carta locale.

Si propone $\{(U_{z_0}; \varphi_{z_0})\}_{z_0 \in \mathbb{C}^n}$ come **atlante complesso**.

- Sicuramente $X = \bigcup_{z_0 \in \mathbb{C}^n} U_{z_0}$.
- Si dimostra la compatibilità: siano $z_0, z_1 \in \mathbb{C}^n$ tali che $U_{z_0} \cap U_{z_1} \neq \emptyset$:



Per ogni $z \in A_0$ si ha

$$\pi(z) = \pi(h(z))$$

e pertanto $z - h(z) \in \Gamma$.

Se consideriamo l'inclusione $\iota : A_0 \subseteq \mathbb{C}^n$ si ha che

$$i - h : A_0 \rightarrow \mathbb{C}$$

ha immagine in Γ insieme discreto. Inoltre $i - h$ è continua, e pertanto è **localmente costante**.

Pertanto, $i - h$ è costante sulle **componenti connesse** di A_0 , ovvero per ogni $\Omega \subseteq A_0$ componente connessa (aperta) esiste $\omega_\Omega \in \Gamma$ tale che

$$\forall z \in \Omega : \quad h(z) = z + \omega_\Omega.$$

Pertanto $h|_\Omega$ è olomorfa, e quindi lo è h .

1306 Funzione biolomorfa

1307 Equazioni di Cauchy-Riemann

Se $f = u + iv$ è una **funzione olomorfa**, allora per le **derivate parziali** vale

$$\begin{aligned} v_y &= u_x \\ v_x &= -u_y \end{aligned}$$

1308 Proiezione stereografica

1309 Topologia più fine

1310 Azione di gruppo su uno spazio topologico

1311 Punto di accumulazione

Definizione 1. Sia X uno spazio topologico, $S \subseteq X$. Un punto $x_0 \in X$ è un punto di accumulazione per S se per ogni intorno aperto U di x_0 ,

$$(U \setminus \{x_0\}) \cap S \neq \emptyset.$$

Osservazione. Non è richiesto che $x_0 \in S$.

1312 Sottoinsieme discreto

Definizione 1. Sia X uno spazio topologico. $S \subseteq X$ si dice **discreto** se ogni suo punto è **isolato**.

Osservazione. Equivalentemente, S è discreto sse la sua **topologia di sottospazio** è la **topologia discreta**.

1313 Ordine di una funzione olomorfa

Definizione 1. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, $z_0 \in U$ tale che $f(z_0) = 0$. L'ordine di f in z_0 è^[494]

$$\text{ord}_{z_0} f = \begin{cases} \min \{k \geq 0 \mid f^{(k)}(z_0) \neq 0\} & \text{se esiste} \\ +\infty & \text{se } f \text{ è nulla in un intorno di } z_0. \end{cases}$$

Osservazione. Si ha che

$$\text{ord}_{z_0} f > 0 \iff f(z_0) = 0.$$

Proposizione 2. Se $\text{ord}_{z_0} f$ esiste ed è $< +\infty$, allora per il Teorema di analicità delle funzioni olomorfe,

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n, \quad a_m \neq 0.$$

1314 Teorema di analicità delle funzioni olomorfe

1315 Forma normale locale per funzione olomorfa

Proposizione 1. Sia $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, sia $z_0 \in U$ tale che l'ordine esista e:

$$m := \text{ord}_{z_0} f, \quad 0 < m < +\infty.$$

Allora esiste U_{z_0} intorno aperto di z_0 , esiste $r > 0$ ed esiste un biolomorfismo

$$\begin{aligned} h : U_{z_0} &\longrightarrow \{|z| < r\} \subset \mathbb{C} \\ z_0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

tale che per ogni $z \in U_{z_0}$: $f(z) = h(z)^m$.

Dimostrazione. Siccome in un intorno U_{z_0} di z_0 si può scrivere:

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^m \sum_{n \geq 0} a_{n+m} (z - z_0)^n$$

definita $g(z) := \sum_{n \geq 0} a_{n+m} (z - z_0)^n$, si ha che g è olomorfa in U_{z_0} e $g(z_0) = a_m \neq 0$.

A meno di restringere U_{z_0} , possiamo assumere $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in U_{z_0}$ ^[495].

Pertanto esiste $k(z)$ olomorfa in U_{z_0} e mai nulla tale che $g(z) = k(z)^m$ e pertanto

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) = (z - z_0)^m k(z)^m = [(z - z_0)k(z)]^m.$$

Allora, posto $h(z) = (z - z_0)k(z)$, si ha:

- $h(z_0) = 0$;

- $h(z)$ è olomorfa in U_{z_0} ;
- la derivata $h'(z) = k'(z)(z - z_0) + k(z)$ e pertanto

$$h'(z_0) = k(z_0) \neq 0$$

dunque $h' \neq 0$ in U_{z_0} .

Quindi, a meno di restringere U_{z_0} e $r > 0$, per il Teorema di inversione locale, si ha un biolomorfismo. ■

Osservazione. Quindi, su U_{z_0} , f fattorizza come segue:

$$\begin{array}{ccc} U_{z_0} & \xrightarrow[\sim]{h} & \{|z| < r\} \\ & \searrow f & \downarrow z \mapsto z^m \\ & & \{|z| < r^m\} \end{array}$$

1316 Principio di identità per funzioni olomorfe

DA FINIRE: le funzioni olomorfe o sono nulle in un intorno dello zero, oppure hanno uno zero isolato.

1317 Teorema di inversione locale

1318 Funzione olomorfa iniettiva è biolomorfismo locale

Corollario 1. Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è iniettiva in un intorno di z_0 , con $f(z_0) = 0$, allora f è un biolomorfismo locale tra un intorno di z_0 e un intorno di 0, ovvero esistono $U' \subseteq U$ intorno di z_0 e $V' \subseteq \mathbb{C}$ intorno di 0 tali che^[496]

$$f|_{U'} : U' \rightarrow V'$$

è una funzione biolomorfa.

1319 Funzione olomorfa su una superficie di Riemann a valori complessi

Sia X una superficie di Riemann, $U \subseteq X$ aperto, e $f : U \rightarrow \mathbb{C}$.

Definizione 1. La funzione f si dice **olomorfa in** $p \in U$ se esiste una carta locale

$$\varphi : U_0 \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$$

con $p \in U_0$ tale che $f \circ \varphi^{-1}$ sia olomorfa in $\varphi(p)$.

Osservazione. Questa definizione non dipende dalla scelta della carta locale.

Definizione 2. *f si dice olomorfa in U se è olomorfa in p per ogni p ∈ U.*

Proposizione 3. Se f è olomorfa su U, allora è anche continua e \mathcal{C}^∞ vedendo X e \mathbb{C} come varietà differenziabili reale.

Osservazione. L'insieme delle funzioni olomorfe in U:

$$\{f : U \subseteq X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa}\}$$

è una \mathbb{C} -algebra

1320 Funzione olomorfa tra superfici di Riemann

Siano X, Y due superfici di Riemann, $F : X \rightarrow Y$ una funzione.

Definizione 1. *F si dice olomorfa in p ∈ X se esistono*

- una carta locale per X: $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{C}$, con $p \in U_1$;
- una carta locale per Y: $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2 \subseteq \mathbb{C}$, con $F(p) \in U_2$;

tali che $\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}$ sia definita e olomorfa in un intorno di $\varphi_1(p) \in V_1 \subseteq \mathbb{C}$.

Definizione 2. *F si dice olomorfa se è olomorfa in p per ogni p ∈ X.*

Proposizione 3.

1. La funzione identità $\text{Id} : X \rightarrow X$ e tutte le funzioni costanti sono olomorfe.
2. La condizione non dipende dalla scelta delle carte locali.
3. Se $Y = \mathbb{C}$, si ottiene la stessa definizione di funzioni olomorfe $F : X \rightarrow \mathbb{C}$.
4. Se F è olomorfa, allora F è continua, \mathcal{C}^∞ e preserva l'orientazione come mappa tra varietà differenziabili.
5. Composizione di mappe olomorfe è olomorfa.

1321 Fascio delle funzioni olomorfe su una superficie di Riemann

Definizione 1. Sia X una superficie di Riemann. Il fascio delle funzioni olomorfe su X, denotato con \mathcal{O}_X , è definito come:

- per ogni $U \subseteq X$: $\mathcal{O}_X(U) = \{f : U \subseteq X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ olomorfa}\}$ l'insieme delle funzioni olomorfe
- le restrizioni ovvie.

1322 Teorema del massimo modulo

1322.1 Versione complessa

Teorema 1. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che il modulo $|f|$ ha un massimo in U . Allora f è costante.

1322.2 Per superfici di Riemann

Sia X una superficie di Riemann.

Teorema 2. Sia $U \subseteq X$ aperto connesso, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa tale che il modulo $|f|$ ha un massimo in U . Allora f è costante.

Dimostrazione. Sia $z_0 \in U$ il punto in cui $|f|$ ha massimo, e sia $\lambda_0 := f(z_0)$. Consideriamo la retroimmagine $f^{-1}(\lambda_0)$:

- $f^{-1}(\lambda_0) \neq \emptyset$, in quanto contiene z_0 ;
- $f^{-1}(\lambda_0)$ è chiusa in U , in quanto f continua e \mathbb{C} è di Hausdorff.

Sia quindi $z_1 \in f^{-1}(\lambda_0)$, e sia $U_1 \subseteq U$ un intorno aperto connesso di z_1 su cui sia definita una carta locale

$$\varphi : U_1 \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{C}.$$

Allora V è connesso.

Consideriamo quindi $g := f \circ \varphi^{-1} : V \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Siccome V è aperto connesso e $|g|$ ha massimo in $\varphi(z_1) \in V$, per il teorema del massimo modulo su \mathbb{C} , g è costante in λ_0 .

Quindi $f|_{U_1}$ è costante in λ_0 , e pertanto $U_1 \subseteq f^{-1}(\lambda_0)$.

Segue che $f^{-1}(\lambda_0)$ è aperto in U , e per connessione di U , si ha la tesi. ■

1323 Principio di identità per funzioni olomorfe su Superficie di Riemann

Siano X, Y due superfici di Riemann.

Teorema 1. Sia $U \subseteq X$ un aperto connesso.

1. Se $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa non costante, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(\lambda)$ è un sottoinsieme discreto di U .
2. Siano $f, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe, $f \neq g$. Allora

$$\{z \in U \mid f(z) = g(z)\}$$

è sottoinsieme discreto di U .

Dimostrazione. Il 2. segue da 1. per $\lambda = 0$ e $f - g$. Si dimostra quindi solo 1.

È sufficiente il caso $\lambda = 0$. Per ogni $z_0 \in U$ tale che $f(z_0) = 0$ si ha esattamente una delle seguenti:

- f è nulla in un intorno di z_0 ;
- z_0 è uno zero isolato per f .

Segue dal Principio di identità per funzioni olomorfe in \mathbb{C} .

Sia quindi

$$A := \{z \in U \mid f(z) = 0, f \equiv 0 \text{ in un intorno di } z\}.$$

- A è aperto per definizione, in quanto intorno di ogni suo punto.
- Sia $z_0 \in U \setminus A$.
 - Se $f(z_0) = 0$, siccome $z_0 \notin A$ allora z_0 è uno zero isolato, e quindi esiste $U_{z_0} \subseteq U$ intorno di z_0 tale che

$$\forall z \in U_{z_0}, \quad f(z) \neq 0.$$

e quindi $U_{z_0} \cap A = \emptyset$

- Se $f(z_0) \neq 0$, allora per continuità esiste $U_{z_0} \subseteq U$ intorno di z_0 tale che

$$\forall z \in U_{z_0} \quad f(z) \neq 0$$

e quindi $U_{z_0} \cap A = \emptyset$.

Segue che $U \setminus A$ sia aperto, e quindi A chiuso.

Siccome U è connesso, allora:

- $A = U$, e quindi $f \equiv 0$, assurdo perché f non costante;
- $A = \emptyset$, quindi f ha solo zeri isolati e pertanto $f^{-1}(0)$ è discreto in U . ■

Teorema 2. Siano $F, G : X \rightarrow Y$ funzioni olomorfe, e sia

$$\mathcal{S} := \{p \in X \mid F(p) = G(p)\}.$$

Allora $\mathcal{S} = X$ oppure \mathcal{S} è chiuso e discreto in X .

Corollario 3. Sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfa non costante. Allora per ogni $y \in Y$, la retroimmagine $F^{-1}(y)$ è un sottoinsieme chiuso e discreto in X .

1324 Funzione meromorfa

1325 Funzione meromorfa su una superficie di Riemann a valori complessi

Sia X una superficie di Riemann.

Definizione 1. Sia $A \subseteq X$ aperto. Una funzione meromorfa su A è una funzione olomorfa

$$f : A \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$$

tale che:

- $S \subseteq A$ è un sottoinsieme chiuso e discreto
- nei punti di S , f ha singolarità eliminabili o poli.

Proposizione 2. Sia $U \subseteq X$ aperto connesso, f meromorfa su U , $f \not\equiv 0$. Allora

$$T := \{z_0 \in U \mid f(z_0) = 0 \text{ oppure } z_0 \text{ è polo per } f\}$$

è chiuso e discreto in U .

Proposizione 3. Sia $U \subseteq X$ è un aperto connesso e f, g sono funzioni meromorfe su U . Se f e g coincidono su un sottoinsieme non discreto di U , allora $f = g$.

1326 Fascio delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann

Definizione 1. Sia X una superficie di Riemann. Il fascio delle funzioni meromorfe su X , denotato con \mathcal{M}_X , è definito come:

- per ogni $U \subseteq X$: $\mathcal{M}_X(U) = \{f \text{ meromorfa su } U\}$ l'insieme delle funzioni meromorfe
- le restrizioni ovvie.

Osservazione. Per ogni $U \subseteq X$, $\mathcal{M}_X(U)$ è una C -algebra.

Osservazione. Il fascio \mathcal{O}_X è un sottofascio di \mathcal{M}_X .

Proposizione 2. Se U è connesso, allora $\mathcal{M}_X(U)$ è un campo.

Dimostrazione. Infatti, sia $\mathcal{M}_X(U)$, $f \not\equiv 0$. Si definisca

$$\begin{aligned} Z &:= \{\text{zeri di } f\} \\ S &:= \{\text{poli di } f\} \end{aligned}$$

Allora $f : U \setminus (Z \cup S) \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa mai nulla, e pertanto

$$\frac{1}{f} : U \setminus (Z \cup S) \rightarrow \mathbb{C}$$

è olomorfa, con $Z \cup S$ discreto.

Allora $\frac{1}{f}$ ha zeri in S e poli in Z ^[497], e quindi è meromorfa. ■

1327 Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann

Sia \mathbb{C}_∞ la sfera di Riemann.

Proposizione 1. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ un intorno di ∞ in \mathbb{C}_∞ , e f una funzione complessa definita su U . f è meromorfa in ∞ se e solo se $f(1/z)$ è meromorfa in $z = 0$.

Sia $\mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}$ il fascio delle funzioni meromorfe e sia $\mathbb{C}(z)$ il seguente insieme:

$$\mathbb{C}(z) := \left\{ \frac{p(z)}{q(z)} \mid p, q \in \mathbb{C}[z] \right\}$$

dove $\mathbb{C}[z]$ indica l'anello dei polinomi di variabile z .

Teorema 2. Si ha che

$$\mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty) = \mathbb{C}(z).$$

Dimostrazione. (\supseteq): Sia $f(z) \in \mathbb{C}(z)$: allora, siccome \mathbb{C} è un campo algebricamente chiuso, esistono $c \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $e_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tali che

$$f(z) = c \prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{e_i}$$

e quindi f è olomorfa e non nulla in $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$, e inoltre $\text{ord}_{\lambda_i} f = e_i$ ^[498]. Allora $f(z)$ è meromorfa su \mathbb{C} .

Per mostrare che f sia meromorfa ad ∞ , consideriamo

$$\begin{aligned} g(w) &:= f\left(\frac{1}{w}\right) = c \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{w} - \lambda_i\right)^{e_i} = c \prod_{i=1}^r \frac{(1 - \lambda_i w)^{e_i}}{w^{e_i}} \\ &= c \cdot \frac{\prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i w)^{e_i}}{w^{\sum_i e_i}} \end{aligned}$$

Allora in $w = 0$ si ha che g è meromorfa e

$$\text{ord}_0 g = \text{ord}_\infty f = - \sum e_i.$$

Per la Proposizione 1, f è meromorfa in \mathbb{C}_∞ . ■

Osservazione. Si noti che, per $f(z) = \frac{p(z)}{g(z)}$, scritti come nella prima parte della dimostrazione, si ha che

$$\sum_{i=1}^r e_i = \deg p - \deg q.$$

Inoltre, si ha che

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} \text{ord}_p f &= \text{ord}_\infty f + \sum_{p \in \mathbb{C}} \text{ord}_p f = - \sum e_i + \sum e_i = 0; \\ \text{ord}_\infty f &= - \sum e_i = \deg q - \deg p. \end{aligned}$$

Dimostrazione. (\subseteq): Sia $f \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty)$: f non è identicamente nulla e \mathbb{C}_∞ è compatto, quindi si ha che l'insieme di tutti gli zeri e i poli di f in $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_\infty$ è:

$$\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$$

Sia quindi $e_i := \text{ord}_{\lambda_i} f \in \mathbb{Z}$, e consideriamo

$$g(z) = \prod_{i=1}^r (z - \lambda_i)^{e_i} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty)$$

per il punto precedente. Si consideri quindi $h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$: in quanto rapporto di funzioni meromorfe, è meromorfa, e inoltre, per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\text{ord}_{z_0} h = \text{ord}_{z_0} f - \text{ord}_{z_0} g = 0$$

per costruzione di g : segue che $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa e non nulla. In \mathbb{C} si ha che

$$h(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n.$$

Ma h è meromorfa in ∞ , quindi $k(w) := h(1/w)$ è meromorfa in $w = 0$:

$$k(w) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{w^n}$$

Pertanto $w = 0$ è un **polo**, perciò deve esistere $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > N$: $a_n = 0$.

Pertanto $h(z)$ è un polinomio mai nullo su \mathbb{C} , e pertanto^[499] deve essere costante. Quindi $f = k \cdot g$ per $k \in \mathbb{C}$, ed è razionale. ■

1328 Ordine di una funzione meromorfa

Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto, $z_0 \in U$, f **meromorfa** in U e non identicamente nulla in un intorno di z_0 .

Allora in un intorno di z_0 si ha lo **sviluppo di Serie di Laurent**:

$$f(z) = \sum_{n \geq m} a_n (z - z_0)^n$$

con $m \in \mathbb{Z}$ tale che $a_m \neq 0$.

Definizione 1. Si definisce l'ordine di f in z_0 :

$$\text{ord}_{z_0} f := m.$$

(Se f è nulla in un intorno di z_0 , si pone $\text{ord}_{z_0} f = +\infty$).

Osservazione. Se una funzione è olomorfa in z_0 , allora il suo ordine (come funzione meromorfa) coincide con **quello come funzione olomorfa**.

Osservazione. Ci sono tre possibilità:

- $m > 0$: f è **olomorfa** e nulla in z_0 ^[500];
- $m = 0$: f è **olomorfa** e non nulla in z_0 ^[589];

- $m < 0$: f ha in z_0 un **polo** di ordine $|m|$.

Proposizione 2. 1. L'ordine è invariante per biolomorfismo locale: se

$$h : V \subseteq \mathbb{C} \rightarrow W \subseteq \mathbb{C}$$

è un **biolomorfismo** tra un intorno di v_0 e un intorno di w_0 , allora

$$\text{ord}_{w_0} f \circ h = \text{ord}_{z_0} f.$$

2. f ha ordine m in z_0 se e solo se, in un **intorno** U_{z_0} di z_0 :

$$\forall z \in U_{z_0} : f(z) = (z - z_0)^m \cdot g(z)$$

con $g : U_{z_0} \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e mai nulla.

3. Date f, g meromorfe su U e $z_0 \in U$, si ha

- $\text{ord}_{z_0}(f \cdot g) = (\text{ord}_{z_0} f) + (\text{ord}_{z_0} g)$

- $\text{ord}_{z_0}(1/f) = -\text{ord}_{z_0} f$

- $\text{ord}_{z_0}(f + g) = \begin{cases} \min \{\text{ord}_{z_0} f; \text{ord}_{z_0} g\} & \text{ord}_{z_0} f \neq \text{ord}_{z_0} g \\ \geq \text{ord}_{z_0} f & \text{ord}_{z_0} f = \text{ord}_{z_0} g \end{cases}$ In ogni caso
 $\text{ord}_{z_0}(f + g) \geq \min \{\text{ord}_{z_0} f; \text{ord}_{z_0} g\}$

1329 Ordine di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann

Definizione 1. Sia X una **superficie di Riemann**, $U \subseteq X$ **aperto** e $p_0 \in U$.

Sia f **meromorfa** su U . Se $\varphi : U_p \rightarrow V$ è una **carta locale** per $p \in U_p$ intorno aperto, allora si pone^[501]

$$\text{ord}_{p_0} f := \text{ord}_{\varphi(p_0)}(f \circ \varphi^{-1}).$$

1330 Isomorfismo tra superfici di Riemann

Siano X, Y due **superfici di Riemann**, $F : X \rightarrow Y$ una **funzione**.

Definizione 1. F si dice un **isomorfismo** (o **biolomorfismo**) tra X e Y (e si dice che $X \cong Y$ sono **isomorfe**) se

- F è **olomorfa**
- F è **biettiva**
- $F^{-1} : Y \rightarrow X$ è **olomorfa**.

Proposizione 2. Se X, Y sono **superfici di Riemann** biolomorfe, allora sono

- spazi topologici omeomorfi;
- varietà differenziabili diffeomorfe.

1331 Teorema della mappa aperta (superfici di Riemann)

Siano X, Y due superfici di Riemann.

Teorema 1. Se $F : X \rightarrow Y$ è una funzione olomorfa non costante, allora F è aperta.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq X$ aperto, e sia $x_0 \in U$. Mostriamo che $F(x_0)$ è interno a $F(U)$ ^[502].

Si scelgano due carte locali:

- $U_1 \subseteq U$ connesso, $x_0 \in U_1$:

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1.$$

- $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$, con $F(x_0) \in U_2$.

Si definisce $f := \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1} : V_1 \rightarrow \mathbb{C}$, olomorfa per definizione, con V_1 connesso perché omeomorfo ad U_1 .

Quindi, per il teorema della mappa aperta, f è costante oppure f è aperta.

- Se f è costante, allora^[503] F è costante in U_1 , e quindi per il Principio di identità F è costante in X . Assurdo.

Quindi f è aperta, e pertanto $f[V_1]$ aperto in \mathbb{C} , con $f(\varphi_1(x_0)) \in f[V_1]$. Quindi

$$U_2 \supseteq \varphi_2^{-1}[f[V_1]] = F[\varphi_1^{-1}[V_1]] = F[U_1]$$

è aperto in U_2 e contiene $F(x_0)$. ■

1332 Modulo di un numero complesso

1333 Funzione olomorfa su una superficie di Riemann compatta a valori complessi

Corollario del Teorema del massimo modulo e del Teorema di Weierstrass.

Corollario 1. Se X è una superficie di Riemann compatta, e $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora f è costante.

1334 Singolarità isolata (Analisi Complessa)

1334.1 Per superfici di Riemann

Sia X una superficie di Riemann, $p_0 \in X$ e U intorno aperto di p_0 .

Definizione 1. Se $f : U \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ è olomorfa, allora si dice che f ha una singolarità isolata in p_0 .

Teorema 2. Ci sono esattamente tre possibilità:

1. esiste finito il [limite](#)

$$\lim_{p \rightarrow p_0} |f(p)|$$

e in questo caso si dice che f ha una singolarità eliminabile in p_0 ;

2. esiste il [limite](#)

$$\lim_{p \rightarrow p_0} |f(p)| = +\infty$$

e in questo caso si dice che f ha un polo in p_0 ;

3. non esiste il [limite](#)

$$\lim_{p \rightarrow p_0} |f(p)|$$

e in questo caso si dice che f ha una singolarità essenziale in p_0 .

Osservazione. Se $\varphi : U_1 \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ è una carta locale in p_0 , con $z_0 := \varphi(p_0)$, allora $f \circ \varphi^{-1}$ ha una singolarità isolata in z_0 che sarà eliminabile / polo / essenziale in base a che tipo di singolarità è p per f .

1335 Serie di Laurent

1336 Sottoinsieme discreto in un compatto

Sottoinsiemi discreti in uno spazio compatto sono finiti.

1337 Torrent

Per trovare i torrent:

- in italiano: ilcorsaroblu.org

1338 Sfera di Riemann biolomorfa alla retta proiettiva complessa

Proposizione 1. La [sfera di Riemann](#) \mathbb{C}_∞ è biolomorfa allo [spazio proiettivo complesso](#) $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$.

Dimostrazione. Si consideri

$$F : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 : \quad z \mapsto \begin{cases} (z : 1) & z \in \mathbb{C} \\ (1 : 0) & z = \infty \end{cases}$$

F è ovviamente biunivoca. Consideriamo le carte:

$$\begin{aligned} A &:= \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_\infty & U_0 &= \{z_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1(z_0 : z_1) \\ B &:= \mathbb{C}_\infty \setminus \{0\} & U_1 &= \{z_1 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1(z_0 : z_1) \end{aligned}$$

Allora si hanno le seguenti composizioni:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{F} & U_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \\
 (z_0 : z_1) & \longmapsto & \frac{z_0}{z_1} & & \\
 z & \xrightarrow{\text{Id}} & z & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{C} & \longrightarrow & B & \xrightarrow{F} & U_0 \longrightarrow \mathbb{C} \\
 w \longmapsto & \begin{cases} 1/w & w \neq 0 \\ \infty & w = 0 \end{cases} & & (z_0 : z_1) \longmapsto & \frac{z_1}{z_0} \\
 w \longmapsto & \begin{cases} 1/w & w \neq 0 \\ \infty & w = 0 \end{cases} & \longrightarrow & \begin{cases} (1/w : 1) & w \neq 0 \\ (1 : 0) & w = 0 \end{cases} & \longrightarrow \begin{cases} w & w \neq 0 \\ 0 & w = 0 \end{cases} \\
 & \searrow & & & \nearrow \\
 & & \text{Id} & &
 \end{array}$$

Entrambe sono l'identità, che è olomorfa. Anche le inverse sono olomorfe, quindi si ha la tesi. ■

1339 Teorema della mappa aperta (Analisi Complessa)

Teorema 1. Sia $U \subseteq \mathbb{C}$ aperto e connesso, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ funzione olomorfa non costante. Allora f è aperta.

1340 Corrispondenza funzioni meromorfe su una superficie di Riemann e funzioni olomorfe sulla Sfera di Riemann

Sia X una [superficie di Riemann](#), sia \mathbb{C}_∞ la [Sfera di Riemann](#), e sia $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ il [piano proiettivo complesso](#), [biolomorfo](#) a \mathbb{C}_∞ ^[504].

Proposizione 1. C'è una corrispondenza biunivoca tra:

- le [funzioni meromorfe](#) su X a valori in \mathbb{C} : $\mathcal{M}_X(X)$
- le [funzioni olomorfe](#) $F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ non costanti in ∞ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funzioni meromorfe } f \\ \text{su } X \text{ a valori in } \mathbb{C} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{mappe olomorfe} \\ F : X \rightarrow \mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ \text{non costanti in } \infty \end{array} \right\}.$$

Dimostrazione. (\rightarrow): Sia $f \in \mathcal{M}_X(X)$: si definisce

$$F : X \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) \in \mathbb{C} & x \text{ non è un polo} \\ \infty & x \text{ è un polo.} \end{cases}$$

o, equivalentemente,

$$F : X \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

$$x \longmapsto \begin{cases} (f(x) : 1) \in \mathbb{C} & x \text{ non è un polo} \\ (1 : 0) & x \text{ è un polo.} \end{cases}$$

Verifichiamo che F è olomorfa:

- Se $x_0 \in X$ non è un polo per f , allora $F(x_0) \in U_1 = \{z_1 \neq 0\} \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, quindi componendo le carte:

$$X \xrightarrow{F} U_1 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \xrightarrow{(x:y) \mapsto \frac{x}{y}} \mathbb{C}$$

$$x_0 \longmapsto F(x_0) = (f(x) : 1) \longmapsto f(x)$$

e si ottiene un mappa olomorfa per ipotesi.

- Se $x_0 \in X$ è un polo per f , allora in un intorno $U_{x_0} \subseteq X$ di x_0 ^[505] si ha che

$$\frac{1}{f(x)} =: g(x)$$

è olomorfa e nulla in x_0 ^[506]. Quindi, per ogni $x \in U_{x_0} \setminus \{x_0\}$:

$$F(x) = (f(x) : 1) = \left(\frac{1}{g(x)} : 1 \right) = (1 : g(x))$$

mentre per $x = x_0$:

$$F(x) = (1 : 0) = (1 : g(x_0))$$

Quindi, per ogni $x \in U_{x_0}$, $F(x) \in U_0 := \{z_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$, e si ottiene:

$$U_{x_0} \subseteq X \xrightarrow{F} U_0 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \xrightarrow{(x:y) \mapsto \frac{y}{x}} \mathbb{C}$$

$$x \longmapsto F(x) = (1 : g(x)) \longmapsto g(x)$$

che è una funzione olomorfa.

Quindi F è olomorfa, ed è la funzione associata ad $f \in \mathcal{M}_X(X)$.

(\leftarrow): Sia $F : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ una funzione olomorfa non costante in $(1 : 0)$.

Sia $S := F^{-1}((1 : 0))$: per il **principio di identità**, questo è un sottoinsieme discreto.

Inoltre, l'**immagine** $F(X \setminus S) \subseteq U_1 := \{z_1 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$: quindi si definisce $f : X \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$ come segue:

$$\begin{array}{ccc} X \setminus S & \xrightarrow{F} & U_1 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \xrightarrow{(z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1}} & \mathbb{C} \\ & \searrow f & & & \end{array}$$

In particolare si ha che

$$F|_{X \setminus S} = (f(x) : 1).$$

Verificare che:

1. $f \in \mathcal{O}(X \setminus S)$;
2. $f \in \mathcal{M}_X(X)$.

■

Osservazione. La biezione si restringe a

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{funzioni meromorfe } f \\ \text{su } X \text{ a valori in } \mathbb{C} \text{ non} \\ \text{costanti} \end{array} \right\} \xleftarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{l} \text{mappe olomorfe} \\ F : X \rightarrow \mathbb{C}_{\infty} \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ \text{non costanti} \end{array} \right\}.$$

1340.1 Esistenza funzioni meromorfe a valori complessi per superfici di Riemann compatte

Proposizione 2. Se X è una **superficie di Riemann compatta**, sono fatti equivalenti:

1. esiste $f \in \mathcal{M}_X(M)$ **funzione meromorfa non costante**;
2. esiste $F : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ **funzione olomorfa e suriettiva**.

Dimostrazione. Questo segue banalmente da:

- Corrispondenza funzioni meromorfe su una superficie di Riemann e funzioni olomorfe sulla Sfera di Riemann
- **Proprietà funzione olomorfa non costante tra superfici di Riemann con dominio compatto**

■

1341 Proprietà funzione olomorfa non costante tra superfici di Riemann con dominio compatto

Teorema 1. Siano X, Y superfici di Riemann, X compatta. Se $F : X \rightarrow Y$ è olomorfa e non costante, allora:

1. F è suriettiva;
2. Y è compatta;
3. ogni fibra di F è finita.

Dimostrazione. Per il Teorema della mappa aperta, F è aperta, quindi $F(X)$ è aperta in Y . Siccome $F(X)$ è compatto^[507], allora^[508] $F(X)$ è chiusa.

Allora, dato che Y è connessa per definizione, $F(X) = Y$. Seguono ovviamente i punti 1. e 2.

Per il Principio di identità, ogni fibra è discreta, ma X è compatto e quindi ogni fibra è finita. ■

1342 Fibra di una funzione

[https://it.wikipedia.org/wiki/Fibra_\(matematica\)](https://it.wikipedia.org/wiki/Fibra_(matematica))

1343 L^AT_EX - Testo Multiriga in ambiente matematico

Il comando standard per creare del testo multiriga dentro un ambiente matematico è il seguente:

```
\parbox{[LARGHEZZA]}{[TESTO]}
```

Un esempio è il seguente codice

```
\begin{equation*}
\parbox{10em}{\centering funzioni meromorfe \,(f\,) su \,(X\,) a valori in \,(\mathbb{C}\,)}
\end{equation*}
```

che produce

funzioni meromorfe f
su X a valori in \mathbb{C}

1344 Grafico di funzioni olomorfe è superficie di Riemann

Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, con U aperto. Sia

$$\Gamma_f := \{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in U\}$$

il suo grafico.

Proposizione 1. Γ_f è una superficie di Riemann con carta locale data dalla proiezione sul primo fattore

$$\begin{aligned}\pi : \Gamma_f &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, f(z)) &\longmapsto z\end{aligned}$$

Osservazione. In generale, date $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfe, il grafico:

$$\Gamma_f := \left\{ (z, f_1(z), \dots, f_n(z)) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid z \in U \right\}$$

è una superficie di Riemann con carta locale data dalla proiezione sul primo fattore

$$\begin{aligned}\pi : \Gamma_f &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (z, f_1(z), \dots, f_n(z)) &\longmapsto z\end{aligned}$$

1345 Teorema della funzione implicita complesso

Teorema 1. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}_{z,w}^2$ un aperto, e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Si definisce

$$X := \{p \in \Omega \mid F(p) = 0\}.$$

Sia $p_0 = (z_0, w_0) \in X$ tale che $\frac{\partial F}{\partial w}(p_0) \neq 0$ ^[509].

Allora esiste $\Omega_0 \subseteq \Omega$ intorno aperto di p_0 tale che $X \cap \Omega_0$ è il grafico di una funzione olomorfa

$$w = f(z)$$

definita in un intorno di z_0 .

1346 Superficie di Riemann definita tramite Teorema della funzione implicita

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{C}_{z,w}^2$ un aperto, e sia $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ olomorfa. Si definisce

$$X := \{p \in \Omega \mid F(p) = 0\}.$$

Sia $p_0 = (z_0, w_0) \in X$ tale che $\frac{\partial F}{\partial w}(p_0) \neq 0$ ^[510].

Proposizione 1. Se

1. X è connesso;
2. per ogni $p \in X$, il gradiente $\nabla F(p) \neq \mathbf{0}$;

allora X è una superficie di Riemann.

Dimostrazione. Per ogni $p \in X$, per la condizione 2., almeno una delle proiezioni sugli assi è onto locale, che dà una carta locale. I cambiamenti di coordinate sono dati da:

- la funzione identità;
- $w = f(z)$ olomorfismo.

■

1347 Curva Piana affine liscia complessa

Sia $F \in \mathbb{C}[x, y]$ ^[511] irriducibile, e se ne consideri il luogo degli zeri:

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid F(x, y) = 0\} = V(F) \subseteq \mathbb{C}^2$$

- Siccome F è irriducibile, X è connessa^[512];
- X si dice **liscia** se per ogni $p \in X$, il gradiente $\nabla F(p) \neq \mathbf{0}$.

Sotto queste ipotesi, quindi, X è una superficie di Riemann, ma non è compatta.

1347.1 Molteplicità dei punti di una Curva Piana affine liscia complessa

Si considerino la funzione

$$\begin{aligned}\pi : X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x\end{aligned}$$

non costante, e la derivata parziale olomorfa

$$\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

Proposizione 1. Per ogni $p \in X$, la molteplicità $\text{mult}_p \pi = \text{ord}_p \varphi + 1$ ^[513]

Dimostrazione. Trattiamo separatamente se p è uno zero o meno.

- Se $\varphi(p) \neq 0$, allora per il Teorema della funzione implicita localmente X è il grafico di una funzione olomorfa $y = g(x)$, e quindi π è una carta locale. Ovviamente $\text{mult}_p \pi = 1$, mentre $\text{ord}_p \varphi = 0$.
- Se $\varphi(p) = 0$, allora $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, ma, poiché X è liscia, allora $\frac{\partial F}{\partial x}(p) \neq 0$.

Per il teorema della funzione implicita, allora X è il grafico di una funzione olomorfa $x = h(y)$, con derivata

$$h'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)}$$

In un intorno U di p , quindi, $(h(y), y)$ è una parametrizzazione di X :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C} & \xleftarrow{\text{mappa locale}} & U & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{C} & \xrightarrow{x \mapsto (x-x_0)} & \mathbb{C} \\ y & \longleftarrow & (x, y) & \longleftarrow & x & \longleftarrow & x - x_0 \\ y & \longleftarrow & & & (h(y), y) & & \end{array}$$

la scrittura locale di π centrata in $p = (x_0, y_0)$ è quindi

$$h(y) - x_0 \implies \text{mult}_p \pi = \text{ord}_{y_0} (h(y) - x_0).$$

Ma per le proprietà dell'ordine delle funzioni olomorfe,

$$\text{mult}_p \pi = \text{ord}_{y_0} (h(y) - x_0) = \left(\text{ord}_{y_0} h'(y) \right) + 1$$

Inoltre, si consideri l'ordine di $h'(y)$: per le proprietà dell'ordine delle funzioni meromorfe:

$$\begin{aligned} \text{ord}_{y_0} h'(y) &= \text{ord}_{y_0} \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)} \right) \\ &= \text{ord}_{y_0}(-1) + \text{ord}_{y_0} \frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y) - \text{ord}_{y_0} \frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y) \end{aligned}$$

Ma $\frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)$ è la scrittura locale di φ , e quindi per definizione

$$\text{ord}_p \varphi = \text{ord}_{y_0} \frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y)$$

mentre -1 e $\frac{\partial F}{\partial x}(h(y), y)$ sono entrambe funzioni olomorfe e non nulle in un intorno di p , e pertanto hanno ordine 0. Segue la tesi:

$$\text{ord}_{y_0} h'(y) = \text{ord}_{y_0} \frac{\partial F}{\partial y}(h(y), y) = \text{ord}_p \varphi$$

$$\text{mult}_p \pi = \text{ord}_p \varphi + 1.$$

■

1348 Curva Piana proiettiva liscia complessa

Sia $F \in \mathbb{C}[x_0 : x_1 : x_2]^{[514]}$ un polinomio omogeneo, e se ne consideri il luogo degli zeri omogeneo:^[515]

$$X := \{(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \mid F(x_0 : x_1 : x_2) = 0\} = V(F) \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$$

Proposizione 1. Se per ogni $p \in X$ il gradiente $\nabla F(p) \neq \mathbf{0}^{[516]}$, allora X è una superficie di Riemann compatta.

Definizione 2. Si definisce il grado di X come il grado di F :

$$\deg X := \deg F$$

1349 Sottovarietà complessa dello spazio proiettivo

Consideriamo lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$: questa è una varietà complessa^[517]. Sia $X \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ connesso e chiuso.

Definizione 1. Diciamo che X è una **sottovarietà complessa di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$** di dimensione 1, se, per ogni $p \in X$:

- esiste $U_j = \{(z_0 : \dots : z_n) \in \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n \mid z_j \neq 0\} \overset{\text{omeo}}{\approx} \mathbb{C}^{n-1}$
- esiste $V_p \subseteq U_j$ intorno aperto di p

tale che $X \cap V \subseteq \mathbb{C}^n$ è il **grafico** di $n-1$ **funzioni olomorfe** di una variabile:

$$X \cap V_p = \left\{ \left(x, g_1(x), \dots, g_{n-1}(x) \right) \right\}.$$

Osservazione. Al variare di p , la proiezione

$$\begin{aligned} \pi_p : X \cap V_p &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, g_1(x), \dots, g_{n-1}(x)) &\longmapsto x \end{aligned}$$

è una **carta locale**: questo dà luogo ad un **atlante complesso** per X .

Pertanto X è una **superficie di Riemann compatta**^[519].

1350 Superficie di Riemann proiettiva

Definizione 1. Una **superficie di Riemann compatta** si dice **proiettiva** se è **biolomorfa** ad una **sottovarietà complessa di $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$** ^[520]

1351 Forma normale locale per superfici di Riemann

Proposizione 1. Siano X, Y superfici di Riemann, $F : X \rightarrow Y$ olomorfa non costante. Sia $p \in X$.

Allora esiste un unico $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ tale che per ogni **carta locale**

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$$

di Y centrata in $F(p)$ ^[521] esiste $\varphi_1 : U_1 \rightarrow V_1$ carta locale di X centrata in p ^[522] tale che l'espressione di F nelle carte locali sia $z \mapsto z^m$, ovvero

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(z) = z^m.$$

Dimostrazione. Fissiamo $\varphi_2 : U_2 \rightarrow V_2$ carta locale centrata in $F(p)$, e scegliamo $\psi : U \rightarrow V$ carta locale per X centrata in p .

Sia $T : V \rightarrow V_2$ l'espressione di F nelle carte locali ψ e φ_2 :

$$\forall w \in V : \quad T(w) = \varphi_2 \circ F \circ \psi^{-1}(w)$$

In particolare:

- $T(0) = 0$;
- T è olomorfa

Siccome F non è costante, allora T non è costante, e pertanto $w = 0$ è uno zero isolato per T : esiste quindi $m := \text{ord}_0 T^{[523]}$ finito. In particolare, $m \geq 1$ poiché $T(0) = 0$.

Per il Teorema di Forma Normale nel caso di funzioni olomorfe, esiste $\eta : U_0 \rightarrow U_0$ biolomorfismo, per $U_0 \subseteq \mathbb{C}$ intorno di 0, tale che

$$\eta(0) = 0, \quad T(w) = (\eta(w))^m.$$

Sia quindi $U_1 := \psi^{-1}[U_0] \ni p$, $U_1 \subseteq U$ aperto, e poniamo

$$\varphi_1 := \eta \circ \psi : U_1 \rightarrow V_1 \subseteq \mathbb{C}$$

carta locale di X centrata in p . Allora,

$$\begin{aligned} \varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(x) &= \varphi_2 \circ F \circ \psi^{-1} \circ \eta^{-1}(z) = \\ &= (\varphi_2 \circ F \circ \psi^{-1}) \circ \eta^{-1}(z) = \\ &= T \circ \eta^{-1}(z) = (\eta \circ \eta^{-1}(x))^m = z^m. \end{aligned}$$

Resta da dimostrare l'unicità di m . Notiamo che per ogni aperto A di $p \in X$ esiste $\tilde{A} \subseteq A$ intorno aperto di p tale che, considerando^[524]

$$F|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow F[\tilde{A}]$$

si abbia:

1. per p si abbia $(F|_{\tilde{A}})^{-1}[F(p)] = \{p\}$
2. per ogni $q \neq F(p)$, $q \in F[\tilde{A}]$ si abbia che $(F|_{\tilde{A}})^{-1}(q)$ ha cardinalità m .

Infatti, è sufficiente prendere $\tilde{A} := \varphi_1^{-1}[U_0] \cap A$:

1. se esistesse $p' \in \tilde{A}$ tale che $F(p) = F(p')$, allora in particolare $\varphi_2 \circ F(p) = \varphi_2 \circ F(p')$, e quindi

$$0 = (\varphi_1(p))^m = (\varphi_1(p'))^m$$

e pertanto $\varphi_1(p') = 0$, ovvero $p' = p$;

2. sia $q \neq F(p)$, $q \in F[\tilde{A}] \subseteq U_2$. Allora $0 = \varphi_2 \circ F(p) \neq \varphi_2(q)$. In particolare, esistono esattamente m radici $r_1, \dots, r_m \in U_0 \cap \varphi_1[\tilde{A}]$ tali che

$$(r_i)^m = \varphi_2(q)$$

Poiché φ_1 è omeomorfismo, ci sono esattamente m elementi dentro la fibra di q .

Quindi m non dipende dalla scelta di φ_2 o dalla costruzione, ma solo da F . Quindi m è unico. ■

Proposizione 2. Per ogni intorno aperto U di p in X , esiste U' intorno aperto di p in X tale che

1. la fibra di $F(p)$ in \tilde{U} contenga solo p ;
2. per ogni $p \neq q \in F[\tilde{U}]$, la fibra di q in \tilde{U} ha cardinalità m .

1351.1 Molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann

Definizione 3. Tale $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ si dice molteplicità di F in p , e si indica con

$$m =: \text{mult}_p F$$

Corollario 4. Se esistono delle carte per cui la scrittura locale di F in un intorno di p è

$$f(z) = z^n \cdot g(z)$$

con $g(z)$ olomorfa e $g(0) \neq 0$, allora $n = \text{mult}_p F$.

Dimostrazione. Poiché $g(z)$ è continua e $g(0) \neq 0$, allora esiste un intorno U di 0 tale che $g(z)$ è non nulla su 0. WLOG si consideri U semplicemente connesso.

Allora esiste $h(z)$ tale che $g(z) = (h(z))^n$:

$$f(z) = z^n \cdot g(z) = (z \cdot h(z))^n$$

Se $\theta(z) := z \cdot h(z)$ è un biolomorfismo locale in 0, allora definisce un cambio di coordinate su Y tale per cui la scrittura locale di F diventa $w \mapsto w^n$, e per il Teorema di Forma Normale, $n = \text{mult}_p F$.

- $\theta(0) = 0$;
- $\theta'(z) = h(z) + z \cdot h'(z)$, e quindi $\theta'(0) = h(0) \neq 0$.

Per il Teorema della funzione inversa $\theta(z)$ è un biolomorfismo locale. ■

Osservazione. Quindi si ha che:

1. Se $m = 1$, allora F è un biolomorfismo locale in p ;
2. Se $m > 1$, allora F non è iniettiva in nessun intorno di p ;

e dunque sono equivalenti^[525]:

- $\text{mult}_p F = 1$;
- F è un biolomorfismo locale in p ;
- F è iniettiva in un intorno di p .

Osservazione. Siccome essere biolomorfismo locale è una condizione aperta, si ha che

$$\{p \in X \mid \text{mult}_p F = 1\}$$

è un aperto di X .

Esempio 5. Vedi un esempio di calcolo delle molteplicità.

1352 Punto di ramificazione per una funzione tra superfici di Riemann

Siano X, Y superfici di Riemann, $F : X \rightarrow Y$ olomorfa non costante.

Proposizione 1. L'insieme^[526]

$$R = \{p \in X \mid \text{molt}_p F > 1\}$$

è un insieme chiuso e discreto.

Dimostrazione. R è un insieme chiuso in quanto $R = X \setminus \{p \in X \mid \text{molt}_p F = 1\}$.

Sia ora $p \in R$. Per il Teorema di Forma Normale, siano

$$\begin{aligned}\varphi_1 : U_1 &\rightarrow V_1 \\ \varphi_2 : U_2 &\rightarrow V_2\end{aligned}$$

le carte centrate in p e $F(p)$ tali che

$$\varphi_2 \circ F \circ \varphi_1^{-1}(z) = z^m$$

con $m = \text{molt}_p F$.

Osserviamo che la funzione olomorfa $h(z) = z^m$ è iniettiva nell'intorno di ogni $z_0 \neq 0$.

Siccome φ_1, φ_2 sono biettive, allora F è localmente iniettiva nell'intorno di ogni $q \in U_1$, con $q \neq 0$, e quindi

$$\forall q \in U_1 \setminus \{p\} : \quad \text{molt}_p F = 1$$

e pertanto $U_1 \cap R = \{p\}$. Allora p è un punto isolato. ■

Definizione 2. Un punto $p \in X$ tale che $\text{molt}_p F > 1$ si dice **punto di ramificazione** per F , mentre $q := F(p) \in Y$ si dice **punto di diramazione**.

Osservazione. Se X è compatto, F ha un numero finito di punti di ramificazione e di diramazione.

Osservazione. Come si trovano i punti di ramificazione?

Sia $f : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow V \subseteq \mathbb{C}$ l'espressione di F in alcune carte locali. Si fissano le seguenti nomenclature:

$$U \subseteq \mathbb{C} \longleftrightarrow A \subseteq X$$

$$z_0 \in U \longleftrightarrow p \in A$$

$$f(z_0) \in V \longleftrightarrow F(p)$$

Applicando una traslazione, si ottiene che, per costruzione^[527]

$$\text{mult}_p F = \text{ord}_{z_0}(f - f(z_0))$$

Siccome $f - f(z_0)$ è una funzione olomorfa, allora per costruzione

$$\text{mult}_p F = \text{ord}_{z_0} (f - f(z_0)) = \text{ord}_{z_0} \left(\frac{d}{dz} (f - f(z_0)) \right) + 1 = [\text{ord}_{z_0} f'] + 1$$

Segue che

$$\text{mult}_p F > 1 \iff [\text{ord}_{z_0} f'] > 0 \iff f'(z_0) = 0$$

e pertanto i punti di ramificazione di F in A corrispondono agli zeri di $f'(z)$ in U .

1353 Polinomio Irriducibile

1354 Esempio di calcolo delle molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann

Esempio 1. Si consideri la seguente funzione olomorfa tra le sfere di Riemann:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longmapsto z^2 \\ \infty &\longmapsto \infty \end{aligned}$$

Se ne vogliono calcolare le molteplicità. Allora:

- per $0 \in \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}_\infty$, si ha che $\text{mult}_0 F = 2$, in quanto la funzione è localmente iniettiva;
- per $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{C}_\infty$, si ha $\text{mult}_{z_0} F = 1$;
- in ∞ , consideriamo la scrittura tramite la carta locale $w = 1/z$: allora

$$w \mapsto w^2$$

è l'espressione di F nell'intorno di ∞ , e quindi $\text{mult}_\infty F = 2$.

1355 Teorema del Grado per olomorfismi tra superfici di Riemann

Siano X, Y superfici di Riemann compatte, e sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfismo non costante.

Definizione 1. Per ogni $y \in Y$ si definisce^[528]

$$d(y) := \sum_{p \in F^{-1}(y)} \text{mult}_p F$$

Teorema 2. $d(y)$ non dipende da y .

Dimostrazione. Si fissi $y_0 \in Y$, e sia

$$F^{-1}(y_0) := \{x_1, \dots, x_h\}, \quad m_i := \text{mult}_{x_i} F.$$

Allora $d(y_0) = m_1 + \dots + m_h$.

Consideriamo ora:

- su Y la carta locale w , centrata in y_0 ^[529];
- su X , le carte locali z_i , centrate in x_i , tali per cui l'espressione locale di F è

$$w = z_i^{m_i}.$$

A meno di restringermi, considero tutti i domini disgiunti.

Queste esistono per il [Teorema di Forma Normale](#).

Si consideri ora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'insieme

$$D(0; \varepsilon) := \{|z| < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{C}$$

e si definiscano:

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon &:= w^{-1}(D(0; \varepsilon)) \subseteq Y \\ \Delta_{x_i} &:= z_i^{-1}\left(D(0; \varepsilon^{1/m_i})\right) \subseteq X \end{aligned}$$

A meno di restringere ε , si può supporre che w e z_i siano degli omeomorfismi su Δ_ε e Δ_{x_i} .

Si ha che, per ogni i , $F(\Delta_{x_i}) = \Delta_\varepsilon$

- Per ogni $y \in \Delta_\varepsilon \setminus \{y_0\}$, ci sono m_i [retroimmagini](#) in Δ_{x_i} , ciascuna di [molteplicità](#) 1.

Infatti, ci sono esattamente m_i radici $\eta_1, \dots, \eta_{m_i} \in D(0; \varepsilon^{1/m_i})$ tali che

$$(\eta_\ell)^{m_i} = w(y) \in D(0; \varepsilon)$$

e siccome z_i è un omeomorfismo, ne esistono altrettanti in Δ_{x_i} .

I punti sono di molteplicità 1 poiché la funzione $z \mapsto z^m$ è [iniettiva in un intorno di ogni punto \$z \neq 0\$](#) , e questa cosa si trasmette ad F .

Per le proprietà delle retroimmagini si ha la seguente inclusione

$$\bigcup_{i=1}^h \Delta_{x_i} \subseteq F^{-1}(\Delta_\varepsilon).$$

- Se vale l'uguaglianza: $\bigcup_{i=1}^h \Delta_{x_i} = F^{-1}(\Delta_\varepsilon)$, allora per ogni $y \in \Delta_\varepsilon \setminus \{y_0\}$

$$d(y) = m_1 + \dots + m_h = d(y_0)$$

e quindi d è [localmente costante](#), con Y [connesso](#): vale che d è costante.

- A meno di restringere ε , si ottiene l'uguaglianza.

Per assurdo, supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ ammissibile^[530], si abbia $\bigcup_{i=1}^h \Delta_{x_i} \subsetneq F^{-1}(\Delta_\varepsilon)$.

Allora, esiste un certo n_0 tale per cui, per ogni $n > n_0$, esiste $y_n \in \Delta_{1/n}$ tale che

$$F^{-1}(y_n) \setminus \bigcup_{i=1}^h \Delta_{x_i} \neq \emptyset$$

e sia $x_n \in F^{-1}(y_n) \setminus \bigcup_{i=1}^h \Delta_{x_i}$.

Si hanno due **successioni** $\{x_n\}, \{y_n\}$ tali per cui $F(x_n) = y_n$, e inoltre $y_n \rightarrow y$ in Y ^[531].

Poiché X è compatto, x_n ha una **sottosuccessione** $\{x_{n_k}\}$ convergente ad $\tilde{x} \in X$, e siccome F è continua (e quindi continua per successioni)

$$F(\tilde{x}) = y_0$$

ovvero $\tilde{x} \in F^{-1}(y_0) = \{x_1, \dots, x_h\}$.

Quindi, se $\tilde{x} = x_j$, allora esiste k_0 tale che per ogni $k > k_0$: $x_{n_k} \in \Delta_{x_j}$. Questo contraddice il fatto che

$$x_{n_k} \in F^{-1}(y_{n_k}) \setminus \bigcup_{i=1}^h \Delta_{x_i} \implies x_{n_k} \notin \Delta_{x_j}.$$

Assurdo. ■

Definizione 3. Si definisce il **grado** di F come:

$$\deg F := d(y), \quad y \in Y.$$

1356 Caratterizzazione isomorfismo tra superfici di Riemann tramite grado

Siano X, Y superfici di Riemann compatte, e sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfismo non costante.

Proposizione 1. La mappa F è un **isomorfismo** se e solo se ha **grado** $\deg F = 1$.

Dimostrazione. (\Rightarrow): Se F è isomorfismo allora è **biunivoca**, e pertanto:

- ogni punto di Y ha un solo elemento nella **fibra**;
- ogni punto di X ha **molteplicità** 1

e quindi $\deg F = 1$.

(\Leftarrow): Poiché $\deg F = 1$,

- per ogni $x \in X$, $\text{mult}_x F = 1$, e quindi esiste U_x intorno di x e V_x intorno di $F(x)$ tale che F sia un **biolomorfismo**;
- allora per ogni $y \in Y$ esiste un unico $x \in X$ tale che $F(x) = y$

Questo prova la biettività.

Sia quindi $G := F^{-1} : Y \rightarrow X$. Dimostrando che G sia olomorfa si ha la tesi.

Sia $y \in Y$ e $x = G(y)$. Allora F è un biolomorfismo locale tra U_x e V_y , e pertanto

$$G : V_y \rightarrow U_x$$

è olomorfa. Quindi G è olomorfa. ■

1357 Somma ordini di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann è nulla

Proposizione 1. Sia X una [superficie di Riemann compatta](#) e sia $f \in \mathcal{M}_X(X)^{[532]}$ una [funzione meromorfa](#) e non nulla. Allora la somma degli ordini:

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p f = 0$$

Dimostrazione. La funzione f induce la funzione [olomorfa](#)^[533]

$$\begin{aligned} F : X &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ x &\longmapsto (f(x) : 1) \\ x \text{ polo} &\longmapsto (1 : 0) \end{aligned}$$

- Se x_0 è uno zero di f , allora: $F(x_0) \in U_1 = \{z_1 \neq 0\}$: per φ carta locale di X centrata in x_0 :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xleftarrow{\varphi} & X & \xrightarrow{F} & U_1 \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \xrightarrow{(z_0 : z_1) \mapsto \frac{z_0}{z_1}} & \mathbb{C} \\ 0 & \longmapsto & x_0 & \longmapsto & (f(x_0) : 1) & \longmapsto & f(x_0) \end{array}$$

e pertanto $f(x_0) = f \circ \varphi^{-1}(0)$ e in un intorno di 0:

$$f \circ \varphi^{-1}(z) = (z)^{\text{ord}_{x_0} f} \cdot g(z)$$

per $g(z)$ olomorfa e mai nulla.

Ma questa è una scrittura locale per F , e quindi^[534] $\text{mult}_{x_0} F = \text{ord}_{x_0} f$.

- Se x_1 è un polo di f , allora $F(x_1) = (1 : 0)$: esiste quindi un intorno U di x_1 tale che:

- per ogni $x \in U$: $F(x) \in U_0 := \{z_0 \neq 0\}$;
- f è ben definita e non nulla su $U \setminus \{x_1\}$ ^[535]

e quindi, se $g(x)$ [olomorfa](#) è espressione locale di F in U_0 , per ogni $x \in U$:

$$F(x) = (1 : g(x))$$

In particolare, g è olomorfa e $g : X \rightarrow \mathbb{C}$, e $g(x_1) = 0$. Pertanto, per il punto precedente

$$\text{mult}_{x_1} F = \text{ord}_{x_1} g.$$

Su $U \setminus \{x_1\}$:

$$F(x) = (1 : g(x)) = (f(x) : 1)$$

e quindi $g(x) = \frac{1}{f(x)}$. Quindi $g(x)$ è meromorfa in U , e per ogni $x \in U$:

$$\text{ord}_x g = -\text{ord}_x f.$$

In particolare $\text{mult}_{x_1} F = -\text{ord}_{x_1} f$

Calcolando ora la somma, e applicando il [Teorema del Grado](#):

$$\sum_{p \in X} \text{ord}_p f = \sum_{x_0 \text{ zero}} \text{ord}_{x_0} f + \sum_{x_1 \text{ polo}} \text{ord}_{x_1} f = \underbrace{\sum_{x_0 \text{ zero}} \text{mult}_{x_0} F}_{=\deg F} - \underbrace{\sum_{x_1 \text{ polo}} \text{mult}_{x_1} F}_{=\deg F} = 0 \quad \blacksquare$$

1358 Caratterizzazione sfera di Riemann tramite meromorfismo

Proposizione 1. Se X è [superficie di Riemann compatta](#) ed esiste un [meromorfismo](#) $f \in \mathcal{M}_X(X)$ ^[536] con un unico [polo](#), e questo è di [ordine](#) 1, allora sono [isomorfe](#):^[537]

$$X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong \mathbb{C}_{\infty}$$

Dimostrazione. Si consideri F come nella dimostrazione di “[Somma ordini di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann è nulla](#)”, $F : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$. Allora il [grado](#) di F :

$$\deg F = \sum_{x \in F^{-1}(1:0)} \text{mult}_{x_0} F = \sum_{x \text{ polo}} -\text{ord}_{x_0} f = 1$$

e quindi F è un [isomorfismo](#). ■

1359 Caratteristica di Eulero-Poincaré per una superficie di Riemann

Definizione 1. La [caratteristica di Eulero](#) di una [superficie di Riemann compatta](#) X , indicata con $\chi(X)$, è la sua [caratteristica di Eulero](#) come [superficie topologica \(orientabile\)](#):^[538]

$$\chi(X) = 2 - 2g(X) = V - L + F$$

dove, fissata una qualsiasi [triangolazione](#):

- V è il numero di vertici;
- L è il numero di lati;
- F è il numero di facce.

1360 Formula di Hurwitz (Superfici di Riemann)

Siano X, Y superfici di Riemann compatte, e sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfismo non costante.

Teorema 1. Le caratteristiche di Eulero di X e Y sono legate da questa formula:^[539]

$$\chi(X) = (\deg F) \cdot \chi(Y) - \underbrace{\sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1)}_{K:=}$$

dove $\deg F$ è il grado di F . Indicando invece con $g(X), g(Y)$ i generi topologici, si ha equivalentemente:

$$2g(X) - 2 = (\deg F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1).$$

Dimostrazione. La dimostrazione di articola in due passi. Si indichi con $d := \deg F$.

1. Costruzione della triangolazione

Costruiamo una triangolazione di Y avente come vertici i punti di diramazione di F in Y : siccome Y è compatto, sono in numero finito. Sappiamo che

$$\chi(Y) = V - L + F = 2 - 2g(Y).$$

2. Sollevare la triangolazione

Portiamo la triangolazione su Y ad una su Y tramite F .

- Vertici: i vertici sono le controimmagini dei vertici in Y ;
- Lati: se $L \subseteq Y$ è lato aperto, allora $L \overset{\text{omeo}}{\approx} (0, 1)$ ^[540], e non contiene punti di diramazione.
Allora

$$F|_{F^{-1}(L)} : F^{-1}(L) \longrightarrow L$$

è un rivestimento topologico di grado $d = \deg F$. Pertanto è una unione disgiunta

$$F^{-1}(L) = L_1 \sqcup L_2 \sqcup \cdots \sqcup L_d$$

dove $F|_{L_i} : L_i \rightarrow L$ è un omeomorfismo.

- Facce: Se $T \subseteq Y$ è l'interno del triangolo, allora T non contiene punti di diramazione, e

$$F|_{F^{-1}(T)} : F^{-1}(T) \longrightarrow T$$

è un rivestimento topologico di grado $d = \deg F$. Pertanto è una unione disgiunta

$$F^{-1}(T) = T_1 \sqcup T_2 \sqcup \cdots \sqcup T_d$$

dove $F|_{T_i} : T_i \rightarrow T$ è un omeomorfismo.

3. Calcolo di $\chi(X)$ -

Indicati con V', L', F' i numeri della triangolazione di X , si ha

$$L' = d \cdot L, \quad F' = d \cdot F, \quad V' < d \cdot V.$$

L'uguaglianza per lati e facce segue dal fatto che su tutto $X \setminus F^{-1}(\{\text{vertici}\})$ la funzione F sia un rivestimento topologico di grado d .

Se $q \in Y$ è un vertice, allora la **cardinalità** della **fibra** è:

$$\begin{aligned} |F^{-1}(q)| &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 = \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 - d + d \\ &= \sum_{p \in F^{-1}(q)} 1 - \sum_{p \in F^{-1}(q)} \text{mult}_p F + d = d - \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\text{mult}_p F - 1) \end{aligned}$$

applicando il **Teorema del Grado**. Per costruzione, il numero di vertici è:

$$\begin{aligned} V' &= \sum_{q \text{ vertici}} |F^{-1}(q)| = \sum_{q \text{ vertici}} \left[d - \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\text{mult}_p F - 1) \right] \\ &= d \cdot V - \sum_{\substack{p \text{ vertice} \\ \text{in } X}} (\text{mult}_p F - 1) = d \cdot V - \underbrace{\sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1)}_{K:=} \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dal fatto che se $p \in X$ non è **di ramificazione**, allora la molteplicità $\text{mult}_p F = 1$.

Concludendo, si ha che

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= -\chi(X) = -V' + L' - F' \\ &= -d \cdot (V - L + F) + K = -d \cdot \chi(Y) + K \\ &= +(\deg F) \cdot (2g(Y) - 2) + K. \end{aligned}$$
■

1361 Mappa di potenza complessa

Consideriamo, per $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^m \end{aligned}$$

Proposizione 1. Per ogni $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, esiste U **intorno aperto** di z_0 tale che la **restrizione** $\phi|_U$ sia **iniettiva**.

Dimostrazione. È noto che:^[541] per ogni $w, z \in \mathbb{C}$:

$$w^m - z^m = (w - z) \left(\sum_{i=1}^m z^{m-i} \cdot w^{i-1} \right).$$

Si consideri quindi

$$P(w, z) := \sum_{i=1}^m z^{m-i} \cdot w^{i-1}$$

- Questo è un **Polinomio**, quindi è **continuo**, ed in particolare **continuo in ogni punto**.
- $P(z_0, z_0)$ è

$$\sum_{i=1}^m z_0^{m-i} \cdot z_0^{i-1} = \sum_{i=1}^m z_0^{m-1} = m z_0^{m-1}$$

e siccome $m \neq 0$, $P(z_0, z_0) \neq 0$.

Quindi esiste $V \subseteq \mathbb{C}^2$ tale che per ogni $(w, z) \in V$: $P(w, z) \neq 0$, ed esiste^[542] $U \subseteq \mathbb{C}$ intorno di z_0 tale che $V \supseteq U \times U$.

Siano quindi ora $z_1, z_2 \in U$ tali che $\phi(z_1) = \phi(z_2)$: si ha che $(z_1, z_2) \in V$ e

$$0 = (z_1^m - z_2^m) = (z_1 - z_2) \cdot \underbrace{P(z_1, z_2)}_{\neq 0}$$

e quindi $z_1 = z_2$. ■

1362 Scomposizione della differenza di potenze

Per ogni $X, Y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$X^n - Y^n = (X - Y) \cdot \left[\sum_{i=1}^n X^{n-i} \cdot Y^{i-1} \right]$$

1363 Polinomi sono continui

Questo è sicuramente vero per polinomi reali e complessi

1364 Convergenza di una successione in uno spazio topologico

1365 Cardinalità della fibra di un olomorfismo tra superfici di Riemann

Siano X, Y **superfici di Riemann compatte**, e sia $F : X \rightarrow Y$ **olomorfismo** non costante. Sia $d := \deg F$ il **grado di F** .

Proposizione 1. Per ogni $y \in Y$, la **cardinalità** della **fibra** di y è:

- se y non è di diramazione, $|F^{-1}(y)| = d$;
- se y è di diramazione, $|F^{-1}(y)| < d$.

Dimostrazione. Poiché le due superfici sono compatte, allora F ha un numero finito di punti di diramazione.

- Se y non è di diramazione, significa che per ogni $p \in F^{-1}(y)$, $\text{mult}_p F = 1$, e pertanto la tesi.
- Se y è di diramazione, significa che esiste $q \in F^{-1}(y)$ tale che $\text{mult}_q F > 1$, e pertanto la tesi. ■

1366 Triangolazione di una superficie topologica

1367 Caratteristica di Eulero per una superficie topologica

DA FINIRE: Caratteristica di Eulero per una Superficie Topologica

Proposizione 1. La caratteristica eulero di una superficie topologica compatta è una delle seguenti, per il teorema di classificazione:^[543]

- $\chi(T_g) = 2 - 2g$;
- $\chi(P_n) = 2 - n$;
- $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$.

1368 Teorema di classificazione delle superfici topologiche

Teorema 1. Ogni superficie topologica compatta è omeomorfa a una e una sola tra:

- \mathbb{S}^2 ;
- T_g ;
- la somma connessa di n copie di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$.

per $n, g \geq 1$. Inoltre, tutte queste superfici sono distinte tra loro.

1369 Superficie Topologica Orientabile

1370 Sfera con g manici

DA FINIRE

Somma connessa di superfici topologiche

1371 Somma connessa di superfici topologiche

DA FINIRE

1372 Piano Proiettivo Reale è superficie topologica

1373 Genere topologico di una Superficie di Riemann non cresce per olomorfismo

Siano X, Y superfici di Riemann compatte, e sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfismo non costante.

Proposizione 1. Per il genere topologico vale:

$$g(X) \geq g(Y).$$

Dimostrazione. È sufficiente utilizzare la Formula di Hurwitz, ottenendo che:^[544]

$$g(X) = 1 + \underbrace{(\deg F)}_{\geq 1} \cdot (g(Y) - 1) + \underbrace{\frac{1}{2} K}_{\geq 0} \geq g(Y). \quad \blacksquare$$

Corollario 2. Inoltre, se F non è isomorfismo, allora si ha una tra le seguenti:

- $g(X) > g(Y)$;
- $g(X) = g(Y) \leq 1$.

Dimostrazione. Se F non è isomorfismo, allora $\deg F \geq 2$.

$$g(X) \geq 1 + 2 \cdot (g(Y) - 1) = 2g(Y) - 1$$

- se $g(Y) > 1$, allora $2g(Y) - 1 > g(Y)$, e pertanto $g(X) > g(Y)$;
- se $g(Y) = 1$, allora $g(X) = 1 + K$
- se $g(Y) = 0$,

■

1374 Genere topologico di un curva piana proiettiva liscia complessa

Sia $X \subseteq \mathbb{P}_\mathbb{C}^2$ ^[545] una curva liscia di grado d , e sia $F(z_0, z_1, z_2)$ polinomio omogeneo (di grado d) di cui X è luogo di zeri.

Proposizione 1. Il genere topologico di X è

$$g(X) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $(0 : 1 : 0) \notin X^{[546]}$. Allora

$$F(0 : 1 : 0) \neq 0$$

e quindi z_1^d compare in F . Consideriamo ora la funzione olomorfa e non costante:

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (z_0 : z_1 : z_2) &\longmapsto (z_0 : z_2). \end{aligned}$$

Per la [Formula di Hurwitz](#), detto g il genere di X :^[547]

$$2g - 2 = \deg \pi \cdot (-2) + \underbrace{\sum_{p \in X} (\text{mult}_p \pi - 1)}_{r :=}.$$

È necessario calcolare $\deg \pi$ e r .

- Consideriamo $U_2 = \{z_2 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $U_2 \cong \mathbb{C}_{x,y}^2$ per mezzo della mappa $x = \frac{z_0}{z_2}$, $y = \frac{z_1}{z_2}$, e sia $X_2 := X \cap U_2 \cong X'_2 \subseteq \mathbb{C}_{x,y}^2$. Allora

$$\begin{aligned} \pi_2 : X'_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

è scrittura in carte locali di π , e pertanto per ogni $p \in X_2$: $\text{mult}_p \pi = \text{mult}_{p'} \pi_2$.

Inoltre, $X'_2 \subseteq \mathbb{C}_{x,y}^2$ è il luogo di zeri

$$f(x, y) = 0, \quad f(x, y) := F(x, y, 1)$$

e pertanto è una [curva piana liscia affine](#): detta

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

si ha che^[548] per ogni $p' \in X'_2$: $\text{mult}_{p'} \pi_2 = \text{ord}_{p'} \varphi + 1$, e quindi

$$\boxed{\text{mult}_p \pi - 1 = \text{ord}_{p'} \varphi}$$

- Si noti che f è un polinomio di grado al massimo d , e y^d compare in f , quindi per ogni $x_0 \in \mathbb{C}$: $f(x_0, y)$ è di grado d .

Si ha che $\pi_2^{-1}(x_0) = \{(x_0, y) \in X'_2 \mid f(x_0, y) = 0\}$, e quindi $\pi_2^{-1}(x_0)$ contiene d zeri contati con molteplicità. Ma la molteplicità m come zero di $f(x_0, y)$ è esattamente l'[ordine](#) di $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y) + 1$, e pertanto

$$d = \sum_{p' \in \pi_2^{-1}(x_0)} m_{p'} = \sum_{p' \in \pi_2^{-1}(x_0)} (\text{ord}_{p'} \varphi + 1) = \sum_{p' \in \pi_2^{-1}(x_0)} \text{mult}_{p'} \pi_2 = \deg \pi_2 = \deg \pi$$

L'ultima uguaglianza si ha perché π_2 è la scrittura in carte locali di π . Segue che $\deg \pi = d$.

- Consideriamo adesso $U_0 = \{z_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, $U_0 \cong \mathbb{C}_{u,v}^2$ per mezzo della mappa $u = \frac{z_1}{z_0}$, $v = \frac{z_2}{z_0}$, e sia $X_0 := X \cap U_0 \cong X'_0 \subseteq \mathbb{C}_{u,v}^2$.

$X'_0 \subseteq \mathbb{C}_{u,v}^2$ è luogo di zeri:

$$g(u, v) = 0, \quad g(u, v) = F(1, u, v).$$

La scrittura in carte locali di π è

$$\begin{aligned}\pi_0 : X'_0 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto v\end{aligned}$$

e pertanto, detta

$$\begin{aligned}\psi : \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, v) &\longmapsto \frac{\partial g}{\partial u}\end{aligned}$$

si ha che, per ogni $p \in X_0$:

$$\text{mult}_p \pi - 1 = \text{ord}_{p'} \psi.$$

- Le funzioni φ e ψ sono olomorfe, e si ha

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z_1} \Big|_{(x:y:1)} \\ \psi(u, v) &= \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial z_1} \Big|_{(1:u:v)}\end{aligned}$$

Sia ora $p \in X \setminus X_2$: necessariamente $p \in X_0$.

Consideriamo la scrittura di φ per $p' \in X'_0$:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(u, v) &= \varphi\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}\right) = \frac{\partial F}{\partial z_1}\left(\frac{1}{v}, \frac{u}{v}, 1\right) \\ &= \left(\frac{1}{v}\right)^{d-1} \frac{\partial F}{\partial z_1}(1, u, v) = \left(\frac{1}{v}\right)^{d-1} \psi(u, v).\end{aligned}$$

Quindi $\tilde{\varphi}$ è **meromorfa**, e per ogni $p \in X \setminus X_2$: l'**ordine**

$$\begin{aligned}\text{ord}_{p'} \varphi &= -(d-1)\text{ord}_{p'}(v) + \text{ord}_{p'} \psi \\ &= (\text{mult}_p \pi - 1) - (d-1)\text{mult}_p \pi\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $p \in X \setminus X_2 = \pi^{-1}(1 : 0)$:

$\text{mult}_p \pi - 1 = \text{ord}_{p'} \varphi + (d-1) \text{mult}_p \pi$

Calcolando infine r , si ha

$$\begin{aligned}
r &= \sum_{p \in X} (\text{mult}_p \pi - 1) = \sum_{p \in X_2} (\text{mult}_p \pi - 1) + \sum_{p \in \pi^{-1}(1:0)} (\text{mult}_p \pi - 1) \\
&= \sum_{p \in X_2} \text{ord}_{p'} \varphi + \sum_{p \in \pi^{-1}(1:0)} (\text{ord}_{p'} \varphi + (d-1) \text{mult}_p \pi) \\
&= \underbrace{\sum_{p \in X} \text{ord}_{p'} \varphi}_{=0} + (d-1) \underbrace{\sum_{p \in \pi^{-1}(1:0)} \text{mult}_p \pi}_{\deg \pi =}
\end{aligned}$$

dove lo zero è dato dal fatto che la somma degli ordini è nulla.

Pertanto $r = d \cdot (d-1)$, e quindi

$$2g-2 = -2d + d \cdot (d-1) \implies g = \frac{(d-2)(d-1)}{2}. \quad \blacksquare$$

1375 Funzione olomorfa tra superfici di Riemann compatte induce rivestimento topologico

Siano X, Y superfici di Riemann compatte, e sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfismo non costante.

Proposizione 1. Sia $D \subseteq Y$ l'insieme (finito) dei punti di diramazione di F . Allora

$$F|_{X \setminus F^{-1}(D)} : X \setminus F^{-1}(D) \rightarrow Y \setminus S$$

è un rivestimento topologico di grado $d = \deg F^{[549]}$.

Dimostrazione. Questo segue dalla dimostrazione del Teorema del Grado. ■

Definizione 2. Si dice che F è un rivestimento ramificato.

1376 TOPIC - Geometria Differenziale Complessa

1377 Funzione olomorfa tra superfici di Riemann di genere uno è rivestimento topologico

Siano X, Y superfici di Riemann compatte, e sia $F : X \rightarrow Y$ olomorfismo non costante.

Proposizione 1. Se il genere di X e Y :

$$g(X) = g(Y) = 1$$

allora F non ha punti di ramificazione, e quindi è un rivestimento topologico.

Dimostrazione. Infatti, per la [Formula di Hurwitz](#):

$$2g(X) - 2 = (\deg F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1)$$

e pertanto la somma delle [molteplicità](#):

$$\sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1) = 0$$

Ma per definizione $\text{mult}_p F \geq 1$, e quindi devono tutti avere molteplicità 1. ■

1378 Funzione olomorfa a valori nella sfera di Riemann ramifica

Sia X una [superficie di Riemann compatta](#), \mathbb{C}_∞ la [sfera di Riemann](#), e $F : X \rightarrow Y$ una [funzione olomorfa](#) non costante.

Proposizione 1. Se F non è un [isomorfismo](#), allora esistono dei [punti di ramificazione](#) (ovvero F ramifica).

Dimostrazione. Per la [Formula di Hurwitz](#) si ha che, detto $Y := \mathbb{C}_\infty$

$$2g(X) - 2 = (\deg F)(2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1).$$

dove g indica il [genere topologico](#) e $\text{mult}_p F$ indica la [molteplicità](#).

Vale che:

- il genere di \mathbb{C}_∞ è 0.
- necessariamente $g(X) = 0$,
- siccome F non è isomorfismo, allora $\deg F \geq 2$.

Quindi

$$-2 = -2(\deg F) + \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1) \implies \underbrace{2(\deg F - 1)}_{\geq 1} = \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1)$$

Quindi $\sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1) > 0$, e pertanto F ha almeno un punto di ramificazione. ■

1379 Mappe tra tori complessi

Osservazione. Sia X un [toro complesso](#), di dimensione 1:

$$X = \mathbb{C}/L$$

quoziente di gruppi con $L \subseteq \mathbb{C}$ reticolo e $\pi : \mathbb{C} \rightarrow X$ proiezione. Alcune osservazioni:

1. Per ogni $x_0 \in X$, si consideri $a \in \mathbb{C}$ tale che $x_0 = \pi(a)$, e le due funzioni (entrambi **biolomorfismi**)

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T_{x_0}} & X \\ & x \longmapsto x + x_0 & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F_a} & \mathbb{C} \\ & z \longmapsto z + a & \end{array}$$

Questo diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{F_a} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{T_{x_0}} & X \end{array}$$

infatti

$$\pi(F_a(z)) = \pi(z + a) = \pi(z) + \pi(a) = T_{x_0}(\pi(z)).$$

2. π è un **biolomorfismo** locale per ogni punto di \mathbb{C} , ed è quindi un **rivestimento topologico**.

3. Per ogni diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

f è **olomorfa** se e solo se g è **olomorfa**.

Osservazione. Siano $X := \mathbb{C}/L$, $Y := \mathbb{C}/M$ due tori complessi, ($L, M \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$) reticolati, con proiezioni

$$\pi_X : \mathbb{C} \rightarrow X, \quad \pi_Y : \mathbb{C} \rightarrow Y$$

Se esiste $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione **\mathbb{C} -lineare**^[550] tale che l'**immagine** $f(L) \subseteq M$, allora f passa al **quoziente**, inducendo un **morfismo di gruppi** F :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow[F]{} & Y \\ [x] & \dashrightarrow & [f(x)] \end{array}$$

- Siccome f è **biolomorfa** e π_X, π_Y sono biolomorfismi locali, allora F è **olomorfa**. in
- F non **ramifica**, ovvero ha sempre **molteplicità 1**, perché in ogni punto è composizione di biolomorfismo locali. Pertanto F è **rivestimento topologico**.
- Il **grado** di F è la **cardinalità** del quoziente $M/f(L)$.

Proposizione 1. Siano $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$ due tori complessi, e $F : X \rightarrow Y$ funzione olomorfa non costante tale che $F(0) = 0$.

Allora esiste $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, \mathbb{C} -lineare, tale che $f(L) \subseteq M$ che induce F .

Dimostrazione. Si hanno i seguenti rivestimenti:

- Si consideri la [Formula di Hurwitz](#):^[551]

$$2g(X) - 2 = \deg F \cdot (2g(Y) - 2) + \sum_{p \in X} \text{mult}_p F - 1$$

Poiché $g(X) = g(Y) = 1$ (in quanto tori), allora

$$\sum_{p \in X} \text{mult}_p F - 1 = 0 \implies \text{mult}_p F = 1.$$

Quindi F non ramifica, ed è un [rivestimento topologico](#) di grado finito.

- π_X è un [rivestimento topologico](#).
- π_Y è un rivestimento topologico, ed inoltre è [rivestimento universale](#) per Y

Quindi $F \circ \pi_X : \mathbb{C} \rightarrow Y$ è [rivestimento topologico universale](#). Per il [Teorema del Rivestimento Universale](#), questo è unico a meno di [omeomorfismo](#), e pertanto esiste $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ omeomorfismo che fa commutare il diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathbb{C} \\ \pi_X \downarrow & & \downarrow \pi_Y \\ X & \xrightarrow{\quad F \quad} & Y \end{array}$$

Siccome $F(0) = 0$, allora $f(0) \in M$. A meno di comporre f con la traslazione per $-f(0)$ possiamo supporre che $f(0) = 0$. Questo non varia né la commutatività del diagramma, né il fatto che sia un omeomorfismo.

- f è olomorfa, in quanto entrambe π_X, π_Y sono biolomorfismi locali.
- Siano quindi $z \in \mathbb{C}, \ell \in L$:

$$\pi_Y \circ f(z) = F \circ \pi_X(z) = F \circ \pi_X(z + \ell) = \pi_Y \circ f(z + \ell)$$

e quindi esiste $w(z, \ell) \in M$ tale che

$$f(z + \ell) - f(z) = w(z, \ell).$$

Si fissi $\ell \in L$ e si consideri $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto f(z + \ell) - f(z)$, questa funzione è [continua](#), a valori in M [discreto](#), e a dominio [connesso](#). [Quindi è costante](#): per ogni $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z + \ell) - f(z) = w(\ell).$$

Siccome f è olomorfa, posso derivare, ottenendo che

$$\forall z \in \mathbb{C} : f'(z + \ell) = f'(z)$$

Dal momento che $\ell \in L$, benché fissato, è arbitrario, si ha

$$\forall z \in \mathbb{C}, \forall \ell \in L : f'(z + \ell) = f'(z)$$

- Se $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ sono i generatori di L , ovvero

$$L = \{z_1 w_1 + z_2 w_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$

allora si consideri $P \subseteq \mathbb{C}$ parallelogramma chiuso di lati w_1, w_2 . Per il punto precedente, le seguenti [immagini](#) sono uguali:

$$f'(\mathbb{C}) = f'(P).$$

Inoltre, P è [compatto](#), e dal momento che f' è continua, anche $f'(\mathbb{C})$ è compatto. Quindi f' è limitata.

Per il [Teorema di Liouville](#), f' è costante, ovvero per ogni $z \in \mathbb{C}$: $f'(z) = a$ con $a \in \mathbb{C}$ fissata.

Segue che $f(z) = az + b$, ma siccome $f(0) = 0$: $b = 0$, e

$$f(z) = a \cdot z. \quad \blacksquare$$

Corollario 2. Siano $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$ due tori complessi, e $F: X \rightarrow Y$ funzione olomorfa non costante. Allora F è una composizione

$$X \xrightarrow{\widetilde{F}} Y \xrightarrow{T_{-F(0)}} Y$$

dove \widetilde{F} è omomorfismo di gruppi indotto da una mappa \mathbb{C} -lineare.

1380 Isomorfismo tra tori complessi

Proposizione 1. Siano $X = \mathbb{C}/L$, $Y = \mathbb{C}/M$ [tori complessi, quozienti](#) con $L, M \subseteq \mathbb{C}$ reticolati. Sono fatti equivalenti

1. $X \cong Y$ sono [isomorfi](#);
2. esiste $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\gamma \cdot L = M$.

Dimostrazione. (2. \Rightarrow 1.): la funzione $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \gamma z$ [induce](#) un biolomorfismo $F: X \rightarrow Y$.

(1. \Rightarrow 2.): Sia $F: X \rightarrow Y$ biolomorfismo. A meno di comporre per una traslazione in Y , possiamo supporre che $F(0) = 0$. [Quindi](#) F è indotto da una $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lineare, con $f(L) \subseteq M$. Siccome F è biunivoca, allora $f(L) = M$. \blacksquare

1381 Classificazione dei tori complessi

Si consideri il semipiano superiore di \mathbb{C} :

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Per ogni $\tau \in \mathbb{H}$, sia L_τ il reticolo generato da 1 e τ :

$$L_\tau := \{z_1 + z_2 \tau \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$

e sia $X_\tau := \mathbb{C}/L_\tau$ il **toro complesso** dato dal **quoziente** con L_τ .

Proposizione 1. Sia Y un toro complesso qualsiasi. Allora esiste $\tau \in \mathbb{H}$ tale che

$$Y = X_\tau.$$

Dimostrazione. Sia $Y = \mathbb{C}/M$, con M , e siano $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ tale che

$$M := \{z_1 w_1 + z_2 w_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Allora w_1, w_2 sono **R-linealmente indipendenti**, e $w_1 \neq 0$. Sia $\gamma := \frac{1}{w_1}$.

Allora $\gamma \cdot M$ è il reticolo generato da 1, $\frac{w_2}{w_1}$, linearmente indipendenti su \mathbb{R} . Pertanto, $\frac{w_2}{w_1} \notin \mathbb{R}$.

- Se $\operatorname{Im} \frac{w_2}{w_1} > 0$, allora $\tau := \frac{w_2}{w_1}$ e

$$\gamma \cdot M = L_\tau$$

e **quindi** $Y \cong X_\tau$.
- Se $\operatorname{Im} \frac{w_2}{w_1} < 0$, allora $\tau := -\frac{w_2}{w_1}$ e^[552]

$$\gamma \cdot M = L_\tau$$

e **quindi** $Y \cong X_\tau$.

■

La situazione quindi è la seguente:^[553]

$$\{\text{tori complessi}\} / \text{iso} \xleftarrow{1:1} \{X_\tau\}_{\tau \in \mathbb{H}} / \text{iso}$$

Proposizione 2. Siano $\tau, \tau' \in \mathbb{H}$. Sono fatti equivalenti:

1. sono isomorfi: $X_\tau \cong X_{\tau'}$;
2. esiste $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{Z})$ ^[554] tale che

$$\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}.$$

Dimostrazione. Per la **caratterizzazione dei tori isomorfi**, $X_\tau \cong X_{\tau'}$ se e solo se esiste $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\gamma \cdot L_\tau = L_{\tau'}$, dove

$$\begin{aligned} L_\tau &= \{z_1 + \tau z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} \\ L_{\tau'} &= \{z_1 + \tau' z_2 \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} \\ \gamma \cdot L_\tau &= \{\gamma \cdot (z_1 + \tau z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} = \{z_1 \gamma + z_2 (\gamma \tau) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

ovvero se e solo se esiste $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tale che $\gamma, \gamma\tau \in L_{\tau'}$, e lo generano come gruppo additivo.

(\Rightarrow): Siccome $\gamma, \gamma\tau \in L_{\tau'}$ allora esistono $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{aligned} 0 \neq \gamma &= c\tau' + d \\ \gamma\tau &= a\tau' + b \end{aligned}$$

Allora $\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$, e $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$:

$$\begin{pmatrix} \gamma\tau \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Siccome $1, \tau' \in \gamma L_{\tau}$ allora esistono $a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma(c'\tau + d') \\ \tau' &= \gamma(a'\tau + b') \end{aligned}$$

Allora $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ è tale che :

$$\begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma\tau \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Segue che $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è invertibile, e con inversa in $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$, pertanto

$$\det \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$$

e devono entrambi essere numeri interi. Segue che

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \pm 1$$

Inoltre si ha che^[555]

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \tau &= \operatorname{Im} \left(\frac{a\tau' + b}{c\tau' + d} \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{(a\tau' + b)(c\bar{\tau}' + d)}{|c\tau' + d|^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{ac|\tau'|^2 + ad\tau' + bc\bar{\tau}' + bd}{|c\tau' + d|^2} \right) \\
&= \frac{1}{|c\tau' + d|^2} \cdot \operatorname{Im}(ac|\tau'|^2 + ad\tau' + bc\bar{\tau}' + bd) \\
&= \frac{1}{|c\tau' + d|^2} \cdot \operatorname{Im}(ad\tau' + bc\bar{\tau}') \\
&= \frac{1}{|c\tau' + d|^2} \cdot \left[ad \operatorname{Im}(\tau') + bc \operatorname{Im}(\bar{\tau}') \right] \\
&= \frac{1}{|c\tau' + d|^2} \cdot \left[ad \operatorname{Im}(\tau') - bc \operatorname{Im}(\tau') \right] \\
&= \frac{1}{|c\tau' + d|^2} \cdot (ad - bc) \operatorname{Im}(\tau') \\
&= \frac{1}{|c\tau' + d|^2} \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \operatorname{Im}(\tau')
\end{aligned}$$

e quindi, per concordanza dei segni ($\operatorname{Im} \tau > 0$, $\operatorname{Im} \tau' > 0$), si deve avere $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0'$.

(\Leftarrow): Supponiamo quindi che $\tau = \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d}$, con

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{Z}).$$

Sia $\gamma := c\tau' + d$.

- $\gamma \neq 0$, poiché $(c, d) \neq (0, 0)$ visto che la matrice è invertibile, e $\tau' \notin \mathbb{R}$.
- Ovviamente $\gamma, \gamma\tau \in L_{\tau'}$, in quanto

$$\gamma\tau = \gamma \frac{a\tau' + b}{c\tau' + d} = a\tau' + b.$$

- Per dimostrare che $\gamma, \gamma\tau$ generino $L_{\tau'}$ come gruppo additivo, è sufficiente scrivere $1, \tau'$ come \mathbb{Z} -combinazione lineare di $\gamma, \gamma\tau$. In particolare, sia $A' \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ la matrice inversa di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Allora

$$A' \cdot \begin{pmatrix} \gamma\tau \\ \gamma \end{pmatrix} = A' \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau' \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

Proposizione 3. Il gruppo lineare speciale $\operatorname{SL}(2; \mathbb{Z})$ agisce su \mathbb{H} tramite

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}(2; \mathbb{Z}), \quad & \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\
& \tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.
\end{aligned}$$

Osservazione. In particolare, quindi, $X_\tau \cong X_{\tau'}$ se e solo se τ, τ' sono nella stessa orbita per questa azione. In definitiva, si ha

$$\{\text{tori complessi}\} / \text{iso} \xleftarrow{1:1} \{X_\tau\}_{\tau \in \mathbb{H}} / \text{iso} \xleftarrow{1:1} \mathbb{H} / \text{SL}(2; \mathbb{Z})$$

1382 Azione di gruppo

1382.1 Orbita sotto azione di gruppo

1383 Teorema di Liouville

1384 Complesso coniugato

1385 Gruppo delle funzioni in a valore intero

Sia X un insieme qualsiasi. Allora l'insieme delle funzioni

$$\mathbb{Z}^X := \{f : X \rightarrow \mathbb{Z}\}$$

ha una struttura di gruppo abeliano rispetto alla somma puntuale: per ogni $f, g \in \mathbb{Z}^X$, si definisce $(f + g)$ come:

$$\begin{aligned} (f + g) : X &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longmapsto f(x) + g(x). \end{aligned}$$

1385.1 Supporto di una funzione a valore intero

Definizione 1. Sia $D \in \mathbb{Z}^X$. Si definisce il supporto di D come:

$$\text{supp } D := \{p \in X \mid D(p) \neq 0\}.$$

1386 Divisore di una superficie di Riemann

Sia X una superficie di Riemann, e sia \mathbb{Z}^X il gruppo delle funzioni a valori in \mathbb{Z} .

Definizione 1. Un divisore di X è una funzione $D \in \mathbb{Z}^X$ tale che il supporto $\text{supp } D$ sia un sottoinsieme chiuso e discreto di X .

I divisori formano un sottogruppo di \mathbb{Z}^X , indicato con $\text{Div}(X)$.

Osservazione. Se X è compatto, allora i divisori sono tutte e sole le funzioni con supporto finito^[556]. Questo è lo \mathbb{Z} -modulo libero generato dai punti di X : $\text{Div}(X) \cong \mathbb{Z}^{(X)}$.

In questo caso scriviamo D come una somma formale finita di punti:

$$D = \sum_{p \in X} D(p) \cdot p, \quad D(p) \in \mathbb{Z}.$$

Notazione: In generale, scriviamo tutti i divisori come somma formale (non finita).

1386.1 Grado di un divisore di una superficie di Riemann

Definizione 2. Sia X una superficie di Riemann compatta, $D \in \text{Div}(X)$. Il grado di D è

$$\deg D := \sum_{p \in X} D(p) \in \mathbb{Z}.$$

Osservazione. La funzione $\deg : \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è un omomorfismo di gruppi.

1387 Divisore di una funzione Meromorfa

Sia X una superficie di Riemann, e sia $\mathcal{M}(X)$ l'insieme delle funzioni meromorfe a valori in \mathbb{C} .

Definizione 1. Sia $f \in \mathcal{M}(X)$ non nulla. Il divisore di f è il divisore in $\text{Div}(X)$ dato dalla somma formale degli ordini:

$$\text{div}(f) := \sum_{p \in X} (\text{ord}_p f) \cdot p.$$

Definizione 2. Si indica con $\text{PDiv}(X) \subseteq \text{Div}(X)$ l'insieme dei divisori principali di X :

$$\text{PDiv}(X) = \{D \in \text{Div}(X) \mid \exists f \in \mathcal{M}(X) : D = \text{div}(f)\} \subseteq \text{Div}(X)$$

Osservazione. Se $f, g \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$, allora $\text{div}(f \cdot g) = \text{div } f + \text{div } g$. Pertanto

$$\text{div} : \mathcal{M} \setminus \{0\} \rightarrow \text{Div}(X)$$

è un omomorfismo di gruppi, e dunque l'immagine

$$\text{PDiv}(X) = \text{div}[\mathcal{M} \setminus \{0\}]$$

è un sottogruppo di $\text{Div}(X)$.

1388 Divisori linearmente equivalenti di una superficie di Riemann

Sia X una superficie di Riemann, e si indichi con $\text{Div}(X)$ il gruppo dei divisori e con $\text{PDiv}(X)$ il sottogruppo dei divisori principali.

Definizione 1. Due divisori $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$ si dicono linearmente equivalenti (e si scrive $D_1 \sim D_2$) se $D_1 - D_2$ è un divisore principale.

Osservazione. Questa definizione si estende naturalmente ai punti di X , tramite il divisore, per ogni $p_0 \in X$:

$$D : X \mapsto \mathbb{Z} : p_0 \neq p \mapsto 0 : p_0 \mapsto 1.$$

Questo si scrive (come somma formale), come $D = p_0$.

Proposizione 2. L'equivalenza lineare è una relazione di equivalenza su $\text{Div}(X)$, le cui classi di equivalenza sono i laterali di $\text{PDiv}(X)$ in $\text{Div}(X)$.

1389 Gruppo di Picard di una superficie di Riemann

Sia X una [superficie di Riemann](#), e si indichi con $\text{Div}(X)$ il [gruppo dei divisori](#) e con $\text{PDiv}(X)$ il [sottogruppo](#) dei [divisori principali](#).

Definizione 1. Il [gruppo di Picard di \$X\$](#) è il [quoziente](#)

$$\text{Pic}(X) := \frac{\text{Div}(X)}{\text{PDiv}(X)}.$$

Osservazione. Questo è un [gruppo abeliano](#), e i suoi elementi sono [classi](#) di equivalenza lineare.

1389.1 Grado di un elemento del gruppo di Picard

Proposizione 2. Se X è [compatta](#), allora $\deg^{[557]}$ passa al quoziente e definisce un [omomorfismo](#) di gruppi suriettivo

$$\begin{aligned} \deg : \text{Pic}(X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [D] &\longmapsto \deg D. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Infatti, se f è [meromorfa](#) e non nulla, $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}$, allora^[558]

$$\deg(\text{div } f) = \sum_{p \in X} \text{ord}_p f = 0. \quad \blacksquare$$

1390 Caratterizzazione sfera di Riemann tramite gruppo di Picard

Sia X una [superficie di Riemann](#), e si indichi con $\text{Pic}(X)$ il [gruppo di Picard di \$X\$](#) .

Proposizione 1. Se X è compatta, allora sono fatti equivalenti:

1. il [grado](#) $\deg : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è un [isomorfismo](#);
2. $X \cong \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong \mathbb{C}_{\infty}$ sono [biolomorfe](#)^[559].

Dimostrazione. Si noti che $\deg : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è [iniettivo](#) se e solo se ogni [divisore](#) di grado 0 è [principale](#).

(2. \Rightarrow 1.): Si consideri $X = \mathbb{C}_{\infty}$. È sufficiente mostrare che \deg sia iniettivo.

Sia quindi $D = \sum_{i=1}^n e_i \lambda_i + e_0 \infty$ un generico divisore di X ,

$$e_0 + \sum_{i=1}^n e_i = 0.$$

Allora la funzione $f(z) := \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i)^{e_i}$ è [meromorfa](#), e testimone del fatto che D sia principale.

(1. \Rightarrow 2.): Siano $p, q \in X$, $p \neq q$, e sia $D = p - q$. Allora $\deg D = 0$, e pertanto D è principale.

Quindi esiste $f \in \mathcal{M}(X) \setminus \{0\}^{[560]}$ tale che il **divisore** di f è D :

$$\operatorname{div} f = D = p - q$$

Pertanto $f \in \mathcal{O}(X \setminus \{q\})^{[561]}$ e in q la funzione ha un **polo di ordine 1**.

Dunque f induce $F : X \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ di **grado 1**, che è un **biolomorfismo**. ■

Osservazione. Abbiamo dimostrato che:

1. su \mathbb{P}^1 due punti sono sempre **linearmente equivalenti**;
2. se su X compatto esistono p, q distinti tali che $p \sim q$, allora $X \cong \mathbb{P}^1$.

1391 Divisore effettivo di una superficie di Riemann

Sia X una **superficie di Riemann**, e si indichi con $\operatorname{Div}(X)$ il **gruppo dei divisorini di X** .

Definizione 1. Un divisore $D \in \operatorname{Div}(X)$ si dice **effettivo** (e si indica $D \geq 0$) se

$$\forall p \in X : \quad D(p) \geq 0.$$

Notazione:

- Si scrive che $D > 0$ se $D \geq 0$ e $D \neq 0$.
- Analogamente, diciamo che

$$\begin{aligned} D_1 \geq D_2 &\text{ se } D_1 - D_2 \geq 0 \\ D_1 > D_2 &\text{ se } D_1 - D_2 > 0 \end{aligned}$$

e quest'ultima è una **relazione d'ordine parziale** su $\operatorname{Div}(X)$.

Osservazione. Se X è **compatta**, allora vale, per il **grado**:

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\implies \deg D \geq 0 \\ D > 0 &\implies \deg D \not\geq 0 \end{aligned}$$

Osservazione. Ogni $D \in \operatorname{Div}(X)$ si scrive in maniera unica come

$$D = P - N$$

con $P \geq 0$, $N \geq 0$, tali che l'**intersezione** dei loro **supporti** sia **vuota**:

$$(\operatorname{supp} P) \cap (\operatorname{supp} N) = \emptyset.$$

1392 Pullback di un divisore tra superfici di Riemann

Siano X, Y superfici di Riemann, $F : X \rightarrow Y$ olomorfa non costante. Si indichi con $\text{Div}(X), \text{Div}(Y)$ il gruppo dei divisorî.

Definizione 1. Per ogni $q \in Y$, si definisce il divisore:^[562]

$$F^*(q) := \sum_{p \in F^{-1}(q)} (\text{mult}_p F) \cdot p$$

Questo ha supporto su $F^{-1}(q)$, che è discreto per il principio d'identità.

Osservazione. Se X, Y sono compatte, allora il grado del divisore è uguale al grado di F :

$$\deg F^*(q) = \deg F.$$

Definizione 2. Sia $D = \sum_{q \in Y} m_q \cdot q \in \text{Div}(Y)$. Il pullback di D lungo F è

$$F^*D := \sum_{q \in Y} m_q F^*q \in \text{Div}(X).$$

Osservazione. Se X, Y sono compatte, allora

$$\deg F^*D = (\deg F)(\deg D).$$

Infatti, detto $D = \sum_{i=1}^r m_i q_i$:

$$\begin{aligned} F^*D &= \sum_{i=1}^r m_i F^*(q_i) = \sum_{i=1}^r m_i \cdot \left(\sum_{p \in F^{-1}(q_i)} (\text{mult}_p F) \cdot p \right) \\ \deg F^*D &= \sum_{i=1}^r m_i \cdot \underbrace{\left(\sum_{p \in F^{-1}(q_i)} (\text{mult}_p F) \right)}_{\deg F^*(q_i)} \\ &= \sum_{i=1}^r m_i \cdot \deg F^*(q_i) = \deg F \cdot \left(\sum_{i=1}^r m_i \right) = (\deg F) \cdot (\deg D). \end{aligned}$$

1392.1 Pullback come omomorfismo

Osservazione. Si ha che $F^* : \text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ è omomorfismo di gruppi.

Lemma 3. Sia $f \in \mathcal{M}(Y) \setminus \{0\}$ ^[563]. Allora^[564]

$$F^*(\text{div } f) = \text{div}(f \circ F).$$

Dimostrazione. Sia $p \in X$.

- Il coefficiente di p in $\text{div}(f \circ F)$ è l'ordine $\text{ord}_p(f \circ F)$;
- il coefficiente di $q := F(p)$ in $\text{div}(f)$ è $\text{ord}_q f$, e pertanto il coefficiente di p in $F^*(\text{div } f)$ è $(\text{ord}_p f) \cdot (\text{mult}_p F)$.

Inoltre si ha che $\text{ord}_p(f \circ F) = (\text{ord}_p f) \cdot (\text{mult}_p F)$.

Infatti, localmente,

- detto $n := \text{ord}_p(f)$, f si scrive come $z^n \cdot g(z)$, con $g(z)$ olomorfa e mai nulla;
- per il Teorema di Forma Normale, detto $m := \text{mult}_p F$, F si scrive come z^m .

Componendo localmente: $f \circ F$ è

$$(z^m)^n \cdot g(z) = z^{m \cdot n} \cdot g(z)$$

e quindi, per le proprietà dell'ordine, si ha che

$$\text{ord}_p(f \circ F) = m \cdot n = (\text{ord}_p f) \cdot (\text{mult}_p F). \quad \blacksquare$$

Osservazione. Quindi il pullback di un divisore principale è principale, e F^* passa al quoziente, definendo un omomorfismo tra i gruppi di Picard:

$$F^* : \text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(X).$$

1393 Divisore di ramificazione di una funzione olomorfa

Siano X, Y superfici di Riemann, $F : X \rightarrow Y$ olomorfa non costante.

Definizione 1. Il divisore di ramificazione di F è il divisore:^[565]

$$R_F := \sum_{p \in X} (\text{mult}_p F - 1) \cdot p$$

supportato sui punti di ramificazione.

Osservazione. Nel caso in cui X, Y sono compatte, la Formula di Hurwitz si può scrivere come:^[566]

$$2g(X) - 2 = (\deg F)(2g(Y) - 2) + \deg R_F.$$

1394 Fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann

Sia X una superficie di Riemann, e sia $\text{Div}(X)$ il gruppo dei divisorini di X . Fissiamo $D \in \text{Div}(X)$

Notazione: Se $U \subseteq X$ è un aperto, denotiamo con $D|_U$ la restrizione di D a U :

$$D|_U : U \rightarrow \mathbb{Z}$$

a supporto discreto.

Definizione 1. Si definisce il *fascio* associato a D , $\mathcal{O}_X(D)$:

- per ogni $U \subseteq X$ aperto:^[567]

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(D)(U) &:= \{f \in \mathcal{M}_X(U) \mid \operatorname{div} f + D|_U \geq 0\} \\ &= \{f \in \mathcal{M}_X(U) \mid \forall p \in U : \operatorname{ord}_p f \geq -D(p)\}\end{aligned}$$

- le *restrizioni ovvie*.

Questo è un fascio di spazi vettoriali.

Si noti che nella definizione di $\mathcal{O}_X(D)(U)$ si è fatto un piccolo abuso di notazione:

$$\operatorname{div} f + D|_U \geq 0$$

è ben definita solo nelle componenti connesse di U dove $f \not\equiv 0$, e pertanto viene imposta solo lì.

Proposizione 2. Siano $p \in U \subseteq X$ e $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$.

1. Se $D(p) = 0$, ovvero $p \notin \operatorname{supp} D$, allora f è olomorfa in p . Pertanto^[568]

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U \setminus \operatorname{supp} D)$$

2. Se $D(p) < 0$, allora $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ è *olomorfa* e nulla in p , con uno zero di *ordine* almeno $|D(p)|$.

3. Se $D(p) > 0$ allora f può avere un *polo* in p di ordine al più $D(p)$.

Esempio 3. In particolare, se $D = -p$, allora $\mathcal{O}_X(-p)$ è il fascio delle funzioni olomorfe e nulle in p , $\mathcal{O}_X(-p) \subseteq \mathcal{O}_X$.

Proposizione 4. Indicato con \mathcal{M}_X il *fascio delle funzioni meromorfe*, si ha che

1. Per ogni $U \subseteq X$:

$$\mathcal{O}_X(D)(U) \subseteq \mathcal{M}_X(U)$$

è *C-sottospazio vettoriale*;

2. $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{M}_X$ è *sottoprefascio*.
3. $\mathcal{O}_X(D) \subseteq \mathcal{M}_X$ è *sottofascio*.

Proposizione 5. Siano $D, D_1, D_2 \in \operatorname{Div}(X)$.

1. Se $D = 0$, allora $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X$ *fascio delle funzioni olomorfe*.
2. Se $D \geq 0$ ^[569], allora $\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X(D)$ (in quanto non si stanno imponendo zeri).
3. Se $D_1 \leq D_2$ ^[570], allora $\mathcal{O}_X(D_1) \subseteq \mathcal{O}_X(D_2)$ è *sottofascio*.

Dimostrazione. La 3. è l'unica che necessita una dimostrazione. Se $D_1 \leq D_2$, allora per ogni $p \in X$:

$$\begin{aligned}D_1(p) &\leq D_2(p) \\ -D_1(p) &\geq -D_2(p)\end{aligned}$$

e dunque se $f \in \mathcal{O}_X(D_1)(U)$: per ogni $p \in U$ l'ordine è

$$\text{ord}_p f \geq -D_1(p) \geq -D_2(p)$$

e quindi $f \in \mathcal{O}_X(D_2)$. ■

1395 Sezioni globali del fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann

Sia X una superficie di Riemann, e sia $\text{Div}(X)$ il gruppo dei divisori di X . Fissiamo $D \in \text{Div}(X)$, e si consideri il fascio $\mathcal{O}_X(D)$ associato a D .

Definizione 1. Si denota $\mathcal{O}_X(D)(X)$ la sezione globale di $\mathcal{O}_X(D)$ con

$$L(D) = \mathcal{O}_X(D)(X) = \mathcal{O}(D)(X) = H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$$

Osservazione. Si ha che $L(D)$ è un \mathbb{C} -sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_X(X)$ ^[571]

1395.1 Dimensione della sezione globale del fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann compatta

Lemma 2. Sia X compatta, $D \in \text{Div}(X)$ di grado $\deg D < 0$. Allora $L(D) = \{0\}$.

Dimostrazione. Sia per assurdo $f \in L(D)$ diversa da 0. Allora $f \in \mathcal{M}_X(X) \setminus \{0\}$ è tale che^[572]

$$\text{div}(f) + D \geq 0 \implies \deg(\text{div}(f) + D) \geq 0$$

Ma il grado è omomorfismo di gruppi, e quindi

$$0 \leq \deg(\text{div}(f) + D) = \deg \text{div}(f) + \deg D$$

e inoltre $\deg \text{div } f = 0$. Quindi $\deg D \geq 0$. ■

Osservazione. Se X è compatto, si ottiene una sequenza esatta corta di \mathbb{C} -spazi vettoriali:

$$0 \longrightarrow L(D-p) \hookrightarrow L(D) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

Questo implica che $\ker \alpha \cong L(D-p)$.

Poiché $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ e α è \mathbb{C} -lineare, ci sono solo due possibilità per l'immagine di α :

- $\dim \text{Im } \alpha = 0$: per il teorema di nullità più rango,

$$L(D) \cong L(D-p).$$

- $\dim \text{Im } \alpha = 1$: allora α è suriettivo, e pertanto, per il [primo teorema di isomorfismo](#), il [quoziente](#) è [isomorfo](#)

$$\frac{L(D)}{L(D-p)} \cong \mathbb{C}$$

In entrambi i casi, questo implica che $L(D)$ ha \mathbb{C} -dimensione finita se e solo se $L(D-p)$ ha \mathbb{C} -dimensione finita^[573].

Corollario 3. Data X superficie di Riemann compatta, ci sono solo due possibilità:

1. per ogni $D \in \text{Div}(X)$ lo spazio $L(D)$ ha \mathbb{C} -dimensione finita;
2. per ogni $D \in \text{Div}(X)$ lo spazio $L(D)$ ha \mathbb{C} -dimensione infinita.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo esistano D e D_∞ divisori di X tali che

$$\dim L(D) < \infty, \quad \dim L(D_\infty) = \infty.$$

Poiché X è compatto, allora $\text{supp } D$ e $\text{supp } D_\infty$, insiemi [discreti](#), sono [finiti](#). Pertanto D_∞ si può ottenere da D aggiungendo e togliendo un numero finito di punti. Per l'osservazione precedente, allora, D_∞ deve avere dimensione finita. ■

Teorema 4. Se X è compatto, per ogni $D \in \text{Div}(X)$ si ha che

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) < +\infty$$

Dimostrazione. Per il Lemma 2, esistono divisori di X tali che $\dim L(D) < \infty$. Pertanto, per il corollario precedente, per ogni $D \in \text{Div}(X)$: $\dim L(D) < \infty$. ■

1396 Divisori linearmente equivalenti inducono fasci isomorfi

Sia X una [superficie di Riemann](#), si indichi con $\text{Div}(X)$ il [gruppo dei divisori di \$X\$](#) , e con \sim la [relazione di equivalenza lineare](#).

Proposizione 1. Se $D_1, D_2 \in \text{Div}(X)$, $D_1 \sim D_2$, allora i due [fasci indotti](#) sono [isomorfi](#):

$$\mathcal{O}_X(D_1) \cong \mathcal{O}_X(D_2)$$

Più precisamente, se $D_1 - D_2 = \text{div}(h)$ per qualche $h \in \mathcal{M}_X(X) \setminus \{0\}$ ^[574] allora per ogni $U \subseteq X$ l'isomorfismo è dato da^[575]

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(D_1)(U) &\longrightarrow \mathcal{O}_X(D_2)(U) \\ f &\longmapsto f \cdot h|_U \end{aligned}$$

1397 Pic⁰ di una superficie di Riemann

Sia X una [superficie di Riemann](#), e si indichi con $\text{Pic}(X)$ il [gruppo di Picard](#) di X .

Osservazione. In generale, se X è [compatto](#) di genere g , allora la [mappa di grado](#) è [suriettiva](#)

$$\deg : \text{Pic}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

e si indica con $\text{Pic}^0(X) := \ker \deg$ il [kernel](#): si ha che $\text{Pic}^0(X)$ è un [toro complesso](#) di dimensione g .

1398 L^AT_EX - Enumerate skippabile

Si definisce un comando `\skipitem` che permette di saltare un numero di un elenco `enumerate`, inserendo un `item` classico.

```
\def\skipitem{\item[$\bullet$]}
```

MWE:

```
\documentclass{article}
\def\skipitem{\item[$\bullet$]}

\begin{document}

\begin{enumerate}
\item Foo
\item Boo
\skipitem
\item Foo2
\end{enumerate}

\end{document}
```

1399 L^AT_EX - Verificare se argomento condizionale è pieno

Si supponga di stare definendo un nuovo comando, e che #1 sia un argomento.

```
\if\relax\detokenize{\#1}\relax
    % codice da eseguire se #1 è vuoto
\else
    % codice da eseguire se #1 non è vuoto
\fi
```

1400 Successione esatta corta di fasci data da un divisore e un punto di una superficie di Riemann

Sia X una [superficie di Riemann](#), e sia $\text{Div}(X)$ il [gruppo dei divisori](#) di X . Siano:

- per ogni $D \in \text{Div}(X)$, $\mathcal{O}_X(D)$ il fascio associato a D ;
- \mathcal{O}_X il fascio delle funzioni olomorfe;
- per ogni $p \in X$, \mathbb{C}_p il fascio grattacielo centrato in p .

Osservazione. Per $p \in X$:

- $\mathcal{O}_X(-p)$ è il fascio delle funzioni olomorfe nulle in p , ed è pertanto sottofascio di \mathcal{O}_X :

$$\mathcal{O}_X(-p) \hookrightarrow \mathcal{O}_X$$

- Inoltre, si ha la mappa di valutazione in p , morfismo di fasci $\text{ev}_p : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathbb{C}_p$: se $p \in U$:

$$\begin{aligned} \text{ev}_{p,U} : \mathcal{O}_X(U) &\longrightarrow \mathbb{C}_p(U) \\ f &\longmapsto f(p) \end{aligned}$$

se $p \notin U$ allora $\text{ev}_{p,U} = 0$.

È possibile dimostrare che il fascio nucleo $\ker \text{ev}_p = \mathcal{O}_X(-p)$ e che ev_p è morfismo di fasci suriettivo.

Si ottiene quindi la SEC di fasci di spazi vettoriali:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-p) \hookrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\text{ev}_p} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

Proposizione 1. Per ogni $D \in \text{Div}(X)$ e $p \in X$ esistono i e φ tali che

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(D-p) \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_p \longrightarrow 0$$

sia una SEC di fasci di spazi vettoriali.

Dimostrazione. Siccome $D-p \leq D$, allora $\mathcal{O}_X(D-p) \subseteq \mathcal{O}_X(D)$ è sottofascio, e pertanto è possibile prendere come i l'inclusione.

È necessario quindi costruire $\mathcal{O}_X(D) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_p$ suriettiva il cui nucleo sia $\mathcal{O}_X(D-p)$. Si fissi $U_p \subseteq X$ intorno aperto e connesso di p , e $z_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ carta locale tale che $z_p(p) = 0$.

Si definisce φ . Sia ora $U \subseteq X$ aperto.

- Se $p \notin U$, allora si pone $\varphi_U := 0$.
- Se $p \in U$, sia $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$. Allora l'ordine

$$\text{ord}_p f \geq -D(p)$$

- se f è nulla in un intorno di p , si pone $\varphi_U(f) = 0$;
- se f è non nulla in un intorno di p , allora f nella carta locale ha uno sviluppo in serie di Laurent:

$$f = \sum_{n \geq -D(p)} a_n z_p^n$$

Si pone $\varphi_U(f) := a_{-D(p)} \in \mathbb{C}$. Si noti che

$$\begin{aligned} a_{-D(p)} \neq 0 &\iff \text{ord}_p f = -D(p) \\ a_{-D(p)} = 0 &\iff \text{ord}_p f > -D(p) \\ &\iff \text{ord}_p f \geq -D(p) + 1 \\ &\iff f \in \mathcal{O}_X(D-p) \subseteq \mathcal{O}_X(D). \end{aligned}$$

Si è dimostrato anche che $\ker \varphi = \mathcal{O}_X(D-p)$.

Resta da dimostrare che φ sia un **morfismo di fasci suriettivo**. Sia $U \subseteq X$ aperto.

- Se $p \notin U$, allora $\varphi_U(U) = 0 = \mathbb{C}_p(U)$, e rispetta la suriettività.
- Se $p \in U$, sia $\lambda \in \mathbb{C} = \mathbb{C}_p(U)$. Vogliamo dimostrare che per ogni $q \in U$ esiste $W \subseteq U$ intorno aperto di q , ed esiste $F \in \mathcal{O}_X(D)(W)$ tale che $\lambda|_W = \varphi_W(F)$.

Per ogni $q \neq p$ questo è ovvio: è sufficiente prendere un intorno W di q che non contenga p , ottenendo che $0 \in \mathcal{O}_X(D)(W)$ e $\varphi_W(0) = 0 = \lambda|_W$.

Sia quindi U_p l'intorno di p di cui sopra: $z_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ carta locale tale che $z_p(p) = 0$. A meno di restringere U_p , è possibile supporre che

$$U_p \cap \text{supp } D\{p\}$$

in quanto il supporto è insieme discreto in uno spazio di Hausdorff. Allora $D|_{U_p} = D(p) \cdot p$.

Sia $g \in \mathcal{M}_X(U_p)$ data da $g := \lambda z_p^{-D(p)}$.

- g è olomorfa su $U_p \setminus \{p\}$;
- $\text{ord}_p g = -D(p)$

e pertanto $\text{div } g + D|_{U_p} \geq 0$: $g \in \mathcal{O}_X(D)(U_p)$ e $\varphi_{U_p}(g) = \lambda$. ■

1401 Fibrato vettoriale complesso di una varietà differentiabile

Sia X una **varietà differentiabile**.

Definizione 1. Un **fibrato vettoriale complesso** \mathcal{C}^∞ per X è una coppia (E, π) dove E è una varietà differentiabile e $\pi : E \rightarrow X$ è una **funzione \mathcal{C}^∞** tale che:

1. per ogni $x \in X$, la **fibra** $E_x := \pi^{-1}(x)$ ha una struttura di **spazio vettoriale complesso**;
2. esiste $\{U_\alpha\}$ **ricoprimento aperto** di X , ed esistono $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ **diffeomorfismi** tali che

- il seguente diagramma è commutativo;

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi_{U_\alpha} \\
 & U_\alpha &
 \end{array}$$

- la **restrizione** $\phi_\alpha|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{C}^r$ è \mathbb{C} -lineare.

Definizione 2. Il numero r nella definizione precedente si dice **rango di E** .

1401.1 Cociclo di un fibrato vettoriale complesso

1402 Fibrato vettoriale olomorfo

Sia X una **varietà complessa**.

Definizione 1. Un **fibrato vettoriale olomorfo** su X è una **varietà complessa** E con $\pi : E \rightarrow X$ **olomorfa** tale che:

1. per ogni $x \in X$, la **fibra** $E_x := \pi^{-1}(x)$ è **spazio vettoriale complesso**;
2. esiste $\{U_\alpha\}$ **ricoprimento aperto** di X ed esistono $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{C}^r$ **biolomorfismi** tali che

- il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc}
 \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\phi_\alpha} & U_\alpha \times \mathbb{C}^r \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi_{U_\alpha} \\
 & U_\alpha &
 \end{array}$$

- la **restrizione** $\phi_\alpha|_{E_x} : E_x \rightarrow \mathbb{C}^r$ è \mathbb{C} -lineare.

- 1403 Cociclo di un fibrato vettoriale olomorfo**
- 1404 Spazio tangente complessificato**
- 1405 Funzione antiolomorfa su una superficie di Riemann**
- 1406 Spazio tangente olomorfo**
- 1407 Sezioni globali del fascio associato ad un divisore sulla sfera di Riemann**

Sia X una [superficie di Riemann](#), e sia $\text{Div}(X)$ il [gruppo dei divisorini di \$X\$](#) . Per ogni $D \in \text{Div}(X)$ si consideri il [fascio \$\mathcal{O}_X\(D\)\$ associato](#) a D . Sia $L(D) = \mathcal{O}_X(D)(X)$ la [sezione globale](#).

Proposizione 1. Sia $X = \mathbb{C}_\infty$ e sia $D \in \text{Div}(\mathbb{C}_\infty)$ un [divisore](#) della [sfera di Riemann](#) di [grado](#) $d > 0$:

$$D = \sum_{i=1}^n e_i \lambda_i + e_0 \infty, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, e_i \in \mathbb{Z}$$

dove $d = e_0 + \sum e_i$. Consideriamo $f(z) = \prod (z - \lambda_i)^{-e_i} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty)$ ^[576]. Allora^[577]

$$L(D) = \{g(z) \cdot f(z) \mid g \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]\}$$

Dimostrazione. Nota: l'[ordine di \$f\$](#) è:

- $\text{ord}_{\lambda_i} f = -e_i$,
- $\text{ord}_\infty = \sum_{i=1}^n e_i$ ^[578]
- per ogni $p \in \mathbb{C} \setminus \{\lambda_i\}$: $\text{ord}_p f = 0$.

Quindi $\text{div } f = -\sum e_i \lambda_i + (\sum e_i) \cdot \infty$ e in particolare

$$D + \text{div } f = d \cdot \infty.$$

“ \supseteq ”: Se $g \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]$, [allora](#) $g \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty)$, e inoltre

$$\text{ord}_\infty g = -\deg g \leq -d.$$

In particolare quindi^[579]

$$\text{div } g = \sum_{p \in \mathbb{C}_\infty} (\text{ord}_p g) \cdot p = -\deg g \cdot \infty + \sum_{p \in g^{-1}(0)} \underbrace{(\text{ord}_p g)}_{>0} \cdot p$$

e pertanto

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(f \cdot g) + D &= \operatorname{div} g + \operatorname{div} f + D = \left(\sum_{p \in g^{-1}(0)} (\operatorname{ord}_p g) \cdot p \right) - \deg g \cdot \infty + d \cdot \infty \\ &\geq \left(\sum_{p \in g^{-1}(0)} (\operatorname{ord}_p g) \cdot p \right) - d \cdot \infty + d \cdot \infty = \sum_{p \in g^{-1}(0)} \underbrace{(\operatorname{ord}_p g) \cdot p}_{>0} \geq 0\end{aligned}$$

“ \subseteq ”: Sia $h \in L(D) \setminus \{0\}$ ^[580], e si consideri

$$g := \frac{h}{f} \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty)$$

Allora^[581]

$$\operatorname{div} g = \underbrace{\operatorname{div}(h)}_{\geq -D} - \operatorname{div}(f) \geq -D - \operatorname{div} f = -d \cdot \infty$$

e pertanto per ogni $z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{ord}_z g \geq 0$: g è olomorfa, e quindi è una funzione razionale senza poli, ovvero $g \in \mathbb{C}[z]$:

$$\deg g(z) = -\operatorname{ord}_\infty g \leq d.$$

■

Corollario 2. Sia $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}_\infty)$ un divisore della sfera di Riemann di grado $d > 0$. Allora i seguenti spazi vettoriali sono isomorfi:

$$L(D) \cong \mathbb{C}_{\leq d}[z]$$

Corollario 3. Sia $D \in \operatorname{Div}(\mathbb{C}_\infty)$. Allora la dimensione di $L(D)$ è finita e

$$\dim_{\mathbb{C}} L(D) = \begin{cases} 0 & \deg D < 0 \\ 1 + \deg D & \deg D \geq 0 \end{cases}$$

1408 Sezioni globali del fascio associato ad un punto per superfici di Riemann compatte

Sia X una superficie di Riemann, e sia $\operatorname{Div}(X)$ il gruppo dei divisorini di X . Per ogni $D \in \operatorname{Div}(X)$ si consideri il fascio $\mathcal{O}_X(D)$ associato a D . Sia $L(D) = \mathcal{O}_X(D)(X)$ la sezione globale.

Osservazione. Se X è una superficie di Riemann compatta e $p \in X$, allora come divisore è effettivo: $p \geq 0$. Pertanto, indicato con \mathcal{O}_X il fascio delle funzioni olomorfe, si ha^[582] che

$$\mathcal{O}_X \subseteq \mathcal{O}_X(p)$$

è sottofascio: siccome tutte le funzioni costanti sono olomorfe su X , si ha:

$$\mathbb{C} \subseteq \mathcal{O}_X(X) \subseteq L(p).$$

- Se $\dim L(p) > 1$, allora esiste $f \in L(p)$ non costante.

- Per **costruzione**, si ha che:
 - * per ogni $x \in X \setminus \{p\}$: $\text{ord}_x f \geq 0$, ovvero f olomorfa in x ;
 - * $\text{ord}_p f \geq -1$.
- Siccome f non è costante, allora non può essere olomorfa su X . Quindi $\text{ord}_p f = -1$
In particolare, f ha un polo in p di ordine 1.
Quindi, $X \cong \mathbb{C}_\infty$ è **biolomorfismo**.

Segue il seguente corollario.

Corollario 1. Se X è una superficie di Riemann compatta e $X \not\cong \mathbb{C}_\infty$, allora per ogni $p \in X$:

$$L(p) \cong \mathbb{C}.$$

1409 Formula di Grassman

1410 Complesso di catene Nucleo e Immagine

Sia R un **anello** commutativo con unità, e siano

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_\bullet &:= \left\{ (C_n, \partial_n^C) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ \mathcal{D}_\bullet &:= \left\{ (D_n, \partial_n^D) \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \\ f_\bullet &:= \left\{ C_n \xrightarrow{f_n} D_n \right\}_{n \in \mathbb{Z}}\end{aligned}$$

due **complessi di catene** di R -moduli e un **morfismo** tra loro

Definizione 1. Il **Kernel** (o **Nucleo**) di f_\bullet , denotato con $\ker(f_\bullet)$, è il **sottocomplesso** di \mathcal{C}_\bullet definito termine a termine dal **kernel**:

$$(\ker f)_n = \ker(f_n) = \{x \in C_n \mid f_n(x) = 0\}$$

L'**Immagine** di f_\bullet , denotata con $\text{Im}(f_\bullet)$, è il **sottocomplesso** di \mathcal{D}_\bullet definito termine a termine dall'**immagine**:

$$(\text{Im } f)_n = \text{Im}(f_n) = \{f_n(x) \mid x \in C_n\}$$

1411 Somma e intersezione di complessi di catene

Sia R un **anello** commutativo con unità, e sia \mathcal{C}_\bullet un **complejo di catene** di R -moduli.

Definizione 1. Siano \mathcal{S}_\bullet e \mathcal{T}_\bullet due **sottocomplessi** di \mathcal{C}_\bullet . Si definiscono la **somma** $\mathcal{S}_\bullet + \mathcal{T}_\bullet$ e l'**intersezione** $\mathcal{S}_\bullet \cap \mathcal{T}_\bullet$ come i complessi di catene dati termine a termine dalla **somma** e **intersezione** degli R -moduli:

$$\begin{aligned}(S + T)_n &:= S_n + T_n \\ (S \cap T)_n &:= S_n \cap T_n\end{aligned}$$

I differenziali sono quelli indotti (ristretti) da \mathcal{C}_\bullet , dato che la somma e l'intersezione di sottomoduli preservano la condizione di stabilità rispetto al bordo.

1412 Caratterizzazione funzioni tra complessi di catene tramite successioni esatte

Sia $\mathcal{A}_\bullet, \mathcal{B}_\bullet$ due complessi di catene.

Proposizione 1. Sia $f_\bullet : \mathcal{A}_\bullet \rightarrow \mathcal{B}_\bullet$ un morfismo di complessi. Valgono le seguenti caratterizzazioni tramite successioni esatte:

1. **Iniettività:** f_\bullet è iniettivo se e solo se la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{B}_\bullet$$

(ovvero se $\ker(f_\bullet) = 0$).

2. **Suriettività:** f_\bullet è suriettivo se e solo se la seguente successione è esatta:

$$\mathcal{A}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{B}_\bullet \longrightarrow 0$$

(ovvero se $\text{coker}(f_\bullet) = 0$).

3. **Isomorfismo:** f_\bullet è un isomorfismo se e solo se la seguente successione è esatta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{B}_\bullet \longrightarrow 0$$

1413 Isomorfismo indotto da una SEC di complessi di catene

Proposizione 1. Sia data una successione esatta corta di complessi di catene:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} \mathcal{B}_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} \mathcal{C}_\bullet \longrightarrow 0$$

Utilizzando i teoremi di isomorfismo, possiamo caratterizzare i termini della successione come segue:

1. Il morfismo f_\bullet induce un isomorfismo tra \mathcal{A}_\bullet e l'immagine in \mathcal{B}_\bullet :

$$\mathcal{A}_\bullet \cong \text{Im}(f_\bullet) = \ker(g_\bullet)$$

2. Il morfismo g_\bullet induce un isomorfismo tra il quoziente di \mathcal{B}_\bullet e \mathcal{C}_\bullet :

$$\mathcal{B}_\bullet / \text{Im}(f_\bullet) \cong \mathcal{C}_\bullet$$

o, equivalentemente:

$$\mathcal{B}_\bullet / \mathcal{A}_\bullet \cong \mathcal{C}_\bullet$$

(identificando \mathcal{A}_\bullet con la sua immagine tramite l'iniezione f_\bullet).

1414 L^AT_EX - Dimensione font mathmode

The following illustrates font size alterations in mathmode:

```
\documentclass[letterpaper]{article}
\usepackage{graphicx} % Necessary to use \scalebox
\usepackage{amsmath,amssymb}
\begin{document}
\noindent
normal: $ x^2 + 2xy + y^2 $\\
displaystyle: $ \{\displaystyle x^2 + 2xy + y^2\} $\\
scriptstyle: $ \{\scriptstyle x^2 + 2xy + y^2\} $\\
scriptscriptstyle: $ \{\scriptscriptstyle x^2 + 2xy + y^2\} $\\
textstyle: $ \{\textstyle x^2 + 2xy + y^2\} $\\

\noindent
\scalebox{0.5}{%
normal: $ x^2 + 2xy + y^2$}
\end{document}
```

1415 Somma diretta di complessi di catene

Sia R un [anello commutativo con unità](#).

Definizione 1. Sia $\{\mathcal{C}_\bullet^\alpha\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di [complessi di catene](#) di R -moduli, dove $\mathcal{C}_\bullet^\alpha = \{(C_n^\alpha, \partial_n^\alpha)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. La **somma diretta** dei complessi, denotata con $\bigoplus_{\alpha \in A} \mathcal{C}_\bullet^\alpha$, è il complesso di catene $\mathcal{S}_\bullet = \{(S_n, \partial_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ definito come segue:

- L' n -esimo modulo è la [somma diretta dei moduli](#) della famiglia:

$$S_n = \bigoplus_{\alpha \in A} C_n^\alpha$$

- Il differenziale $\partial_n : S_n \longrightarrow S_{n-1}$ agisce componente per componente:

$$\partial_n((x_\alpha)_\alpha) = (\partial_n^\alpha(x_\alpha))_\alpha$$

Nel caso di due complessi \mathcal{A}_\bullet e \mathcal{B}_\bullet , la somma diretta si denota con $\mathcal{A}_\bullet \oplus \mathcal{B}_\bullet$.

1415.1 Somma diretta di morfismi tra complessi di catene

Definizione 2. Siano $\{\mathcal{C}_\bullet^\alpha\}_{\alpha \in I}$ e $\{\mathcal{D}_\bullet^\alpha\}_{\alpha \in I}$ due famiglie di [complessi di catene](#) di R -moduli indicizzate da un insieme I . Sia $\{F_\bullet^\alpha : \mathcal{C}_\bullet^\alpha \longrightarrow \mathcal{D}_\bullet^\alpha\}_{\alpha \in I}$ una famiglia di [morfismi di complessi di catene](#).

Il morfismo somma diretta, denotato con $\bigoplus_{\alpha \in I} F_\bullet^\alpha$, è la mappa tra le somme dirette dei complessi:

$$\Phi_\bullet = \bigoplus_{\alpha \in I} F_\bullet^\alpha : \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\bullet^\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{D}_\bullet^\alpha$$

definita, per ogni grado $n \in \mathbb{Z}$, come la *somma diretta dei morfismi* di moduli n -esimi:

$$\Phi_n = \bigoplus_{\alpha \in I} F_n^\alpha : \bigoplus_{\alpha \in I} C_n^\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in I} D_n^\alpha$$

Questo definisce un morfismo di complessi poiché, per la definizione di differenziale nella somma diretta, si ha la commutatività con i differenziali componenti per componente.

1416 L^AT_EX - Mostrare margini di un documento

Per mostrare i margini di un documento è necessario il pacchetto `geometry`: la sua opzione `showframe` consente di vedere i margini della pagina.

MWE

1417 Omologia della somma diretta di complessi di catene

Teorema 1. L'omologia della somma diretta di complessi di catene è isomorfa alla somma diretta delle omologie dei singoli complessi. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$, vale l'isomorfismo naturale:

$$H_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\bullet^\alpha \right) \cong \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$$

In altre parole, il funtore omologia $H_n(-)$ commuta con le somme dirette.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}_\bullet = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\bullet^\alpha$ il complesso somma diretta. Ricordiamo che il differenziale $\partial_n^S : \bigoplus C_n^\alpha \rightarrow \bigoplus C_{n-1}^\alpha$ è definito componente per componente:

$$\partial_n^S((x_\alpha)_\alpha) = (\partial_n^\alpha(x_\alpha))_\alpha$$

Analizziamo i moduli dei cicli Z_n e dei bordi B_n del complesso somma diretta.

1. **Cicli (Kernel):** Un elemento $x = (x_\alpha)_\alpha \in \bigoplus C_n^\alpha$ è un ciclo se e solo se $\partial_n^S(x) = 0$. Poiché l'operazione è componente per componente, questo equivale a dire che $\partial_n^\alpha(x_\alpha) = 0$ per ogni α . Pertanto, il modulo dei cicli della somma diretta è la somma diretta dei cicli:

$$Z_n(\mathcal{S}_\bullet) = \ker \left(\bigoplus \partial_n^\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha \in I} \ker(\partial_n^\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} Z_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$$

2. **Bordi (Immagine):** Un elemento $x = (x_\alpha)_\alpha \in \bigoplus C_n^\alpha$ è un bordo se esiste $y = (y_\alpha)_\alpha \in \bigoplus C_{n+1}^\alpha$ tale che $\partial_{n+1}^S(y) = x$. Questo equivale a richiedere che $\partial_{n+1}^\alpha(y_\alpha) = x_\alpha$ per ogni α , ovvero che ogni componente x_α sia un bordo nel rispettivo complesso $\mathcal{C}_\bullet^\alpha$. Pertanto, il modulo dei bordi della somma diretta è la somma diretta dei bordi:

$$B_n(\mathcal{S}_\bullet) = \text{Im} \left(\bigoplus \partial_{n+1}^\alpha \right) = \bigoplus_{\alpha \in I} \text{Im}(\partial_{n+1}^\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in I} B_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$$

3. Conclusione: Per definizione di omologia, abbiamo:

$$H_n(\mathcal{S}_\bullet) = \frac{Z_n(\mathcal{S}_\bullet)}{B_n(\mathcal{S}_\bullet)} = \frac{\bigoplus_{\alpha \in I} Z_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)}{\bigoplus_{\alpha \in I} B_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)}$$

Poiché per ogni α , $B_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha) \subseteq Z_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$, possiamo applicare la proposizione sulla commutatività del quoziente con la somma diretta ([Quoziente di somma diretta di moduli](#)):

$$\frac{\bigoplus_{\alpha \in I} Z_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)}{\bigoplus_{\alpha \in I} B_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)} \cong \bigoplus_{\alpha \in I} \frac{Z_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)}{B_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)} = \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$$

■

Osservazione. L'isomorfismo naturale dimostrato nel teorema precedente, che lega la somma diretta delle omologie all'omologia della somma diretta, è indotto dalla mappa che "assembla" le classi di omologia componenti.

Definiamo l'applicazione:

$$\Phi : \bigoplus_{\alpha \in I} H_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha) \longrightarrow H_n \left(\bigoplus_{\alpha \in I} \mathcal{C}_\bullet^\alpha \right)$$

Sia $x \in \bigoplus_{\alpha} H_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$. L'elemento x è una famiglia $([z_\alpha])_{\alpha \in I}$ dove:

- $z_\alpha \in Z_n(\mathcal{C}_\bullet^\alpha)$ è un ciclo rappresentante per la classe $[z_\alpha]$;
- $[z_\alpha] = 0$ per quasi tutti gli α (ovvero la famiglia è a supporto finito).

L'isomorfismo Φ agisce mandando la famiglia di classi nella classe della famiglia dei cicli:

$$\Phi \left(([z_\alpha])_{\alpha \in I} \right) = [(z_\alpha)_{\alpha \in I}]$$

La mappa inversa Φ^{-1} "smonta" una classe di omologia della somma diretta nelle classi componenti:

$$\Phi^{-1} \left([(c_\alpha)_{\alpha \in I}] \right) = ((c_\alpha)_{\alpha \in I})$$

dove $(c_\alpha)_\alpha$ è un ciclo in $\bigoplus \mathcal{C}_\bullet^\alpha$ (e quindi ogni c_α è un ciclo in $\mathcal{C}_\bullet^\alpha$).

1418 Omologia Singolare Relativa di una coppia topologica buona

Sia R un PID fissato.

Sia (X, A) una [coppia topologica](#), si indichi con X/A lo [spazio quoziente](#) dove A è contratto a p_A , $\pi : X \rightarrow X/A$ proiezione.

Proposizione 1. Se (X, A) è una coppia topologica buona, allora l'omologia relativa è isomorfa a:

$$\forall n \in \mathbb{N} : H_n(X, A) \cong H_n\left(X/A, \{p_A\}\right) \cong \widetilde{H}_n(X/A)$$

dove \widetilde{H}_n indica l'omologia singolare ridotta.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq X$, $A \subseteq U$ aperto che realizza la bontà di (X, A) .

1. Abbiamo il seguente omeomorfismo:

$$\pi : (X \setminus A, U \setminus A) \longrightarrow \left(\frac{X}{A} \setminus \{p_A\}, \frac{U}{A} \setminus \{p_A\}\right)$$

che induce un isomorfismo

$$\forall n : H_n(X \setminus A, U \setminus A) \cong H_n\left(\frac{X}{A} \setminus \{p_A\}, \frac{U}{A} \setminus \{p_A\}\right)$$

2. Poiché $A \subseteq U$ è un retratto di deformazione, allora

$$\forall n : H_n(X, A) \cong H_n(X, U).$$

3. Allo stesso modo $\{p_A\} \subseteq U/A$ è un retratto di deformazione, e quindi **FIXME**

$$\forall n : H_n\left(X/A, \{p_A\}\right) \cong H_n(X/A, U/A).$$

4. Per il Teorema di Escissione:

$$\begin{aligned} H_n(X \setminus A, U \setminus A) &\cong H_n(X, U) \\ H_n(X/A, U/A) &\cong H_n\left(\frac{X}{A} \setminus \{p_A\}, \frac{U}{A} \setminus \{p_A\}\right) \end{aligned}$$

Tutto questo dà l'isomorfismo richiesto:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \xrightarrow[2.]{\cong} & H_n(X, U) & \xleftarrow[4.]{\cong} & H_n(X \setminus A, U \setminus A) \\ & & & & \downarrow 1. \cong \\ H_n\left(X/A, \{p_A\}\right) & \xrightarrow[\cong]{3.} & H_n\left(X/A, U/A\right) & \xleftarrow[\cong]{4.} & H_n\left(\frac{X}{A} \setminus \{p_A\}, \frac{U}{A} \setminus \{p_A\}\right) \end{array} \quad \blacksquare$$

Per quanto riguarda l'ultimo isomorfismo, si consideri la SEL in omologia ridotta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{H}_n(\{p_A\}) & \longrightarrow & \widetilde{H}_n(X/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, \{p_A\}) \\
 & & \swarrow & & \\
 \widetilde{H}_{n-1}(\{p_A\}) & \xleftarrow{\quad} & \widetilde{H}_{n-1}(X/A) & \longrightarrow & H_{n-1}(X/A, \{p_A\}) \\
 & & & \nearrow & \\
 & & \cdots & & \\
 \widetilde{H}_0(\{p_A\}) & \xleftarrow{\quad} & \widetilde{H}_0(X/A) & \longrightarrow & H_0(X/A, \{p_A\}) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ricordando l'[omologia del punto](#):

$$\forall k \geq 0 : \quad \widetilde{H}_k(\{p_A\}) = 0$$

per ogni n otteniamo un segmento della forma:

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \widetilde{H}_n(X/A) \longrightarrow H_n(X/A, \{p_A\}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Per l'esattezza della successione, si ha un isomorfismo:

$$\widetilde{H}_n(X/A) \cong H_n(X/A, \{p_A\}).$$

1419 Attaccamento di una k-cellula a uno spazio topologico

Definizione 1. Una **k -cellula** (o cella di dimensione k), denotata solitamente con e^k , è uno [spazio topologico omeomorfo alla palla chiusa unitaria](#) in \mathbb{R}^k :

$$e^k \stackrel{\text{omeo}}{\sim} \mathbb{D}^k = \{x \in \mathbb{R}^k : \|x\| \leq 1\}$$

Il **bordo** ∂e^k è omeomorfo alla **sfera** \mathbb{S}^{k-1}

Definizione 2. Un **collare** (o k -collare) di e^k è un sottoinsieme $C \subseteq e^k$ tale che $\partial e^k \subseteq C$ è un **retratto di deformazione forte**.

Definizione 3. Dato uno [spazio topologico](#) X , e^k una k -cellula e una [mappa continua](#) $\varphi : \partial e^k \rightarrow X$, detta mappa di attaccamento, l'**attaccamento di e^k ad X tramite φ** è lo spazio [quoziente](#):

$$X \cup_{\varphi} e^k := (X \amalg e^k) / \sim$$

dove la [relazione di equivalenza](#) \sim :

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y \\ x \in \partial e^k, y = \varphi(x) \\ y \in \partial e^k, x = \varphi(y) \\ x, y \in \partial e^k, \varphi(x) = \varphi(y). \end{cases}$$

La **topologia** su $X \cup_{\varphi} e^k$ è la **topologia quoziente** rispetto alla proiezione $\pi : X \amalg e^k \rightarrow (X \amalg e^k) / \sim$.

Mappe indotte. Sia quindi $\varphi : \partial e^k \rightarrow X$ fissata, $Y := X \cup_{\varphi} e^k$. Questa definisce:

1. φ si chiama mappa di attaccamento;
2. $\Phi : e^k \rightarrow Y$ è la mappa caratteristica di e^k :

$$e^k \hookrightarrow X \amalg e^k \xrightarrow{\pi} X \cup_{\varphi} e^k.$$

3. $j : X \hookrightarrow X \amalg e^k \xrightarrow{\pi} X \cup_{\varphi} e^k$ è un omeomorfismo sull'**immagine**.

Osservazione. Si hanno le seguenti proprietà:

1. $\Phi(\dot{e}^k)$ è aperto in Y ;
2. se l'**immagine** $\varphi(\partial e^k)$ è chiusa in X , allora $j(X \setminus \varphi(\partial e^k))$ è aperto in Y .

Proposizione 4. Sia X spazio topologico di Haussdorff, $\varphi : \partial e^k \rightarrow X$ mappa di attaccamento, $Y := X \cup_{\varphi} e^k$. Allora

1. Y è di **Hausdorff**;
2. Se $C \subseteq e^k$ è un collare di ∂e^k , allora

$$j(X) \subseteq j(X) \cup \Phi(C)$$

è un **retratto di deformazione forte**.

Dimostrazione. 1. Siano $x, y \in Y$, $x \neq y$. Si studiano diversi casi.

- Se sono nella **parte interna**:

$$x, y \in \Phi(\dot{e}^k)$$

allora esistono due aperti $U_x, U_y \subseteq \dot{e}^k$ disgiunti, tali che $\Phi(U_x), \Phi(U_y) \subseteq \Phi(\dot{e}^k)$ sono intorni aperti disgiunti di x, y . **Segue** che lo sono in Y .

- Se $x, y \in j(X \setminus \varphi(\partial e^k))$:

- siccome X è Hausdorff e $\varphi(\partial e^k)$ è **compatto**^[583], allora $\varphi(\partial e^k)$ è chiuso;
- quindi $j(X \setminus \varphi(\partial e^k))$ è aperto di Y ;
- come per il punto precedente, si trovano due intorni aperti disgiunti di x, y in $j(X \setminus \varphi(\partial e^k))$, che lo sono anche per Y .

- Se $x \in j(X \setminus \varphi(\partial e^k))$ e $y \in \Phi(\dot{e}^k)$, per quanto detto nei punti precedenti

$$j(X \setminus \varphi(\partial e^k)), \quad \Phi(\dot{e}^k)$$

sono entrambi aperti, e disgiunti.

- Se $x, y \in j \circ \varphi(\partial e^k) = \Phi(\partial e^k)$: siano $A_x, A_y \subseteq X$ intorni aperti disgiunti delle retroimmagini di x, y , e consideriamo

$$V'_x := \varphi^{-1}(A_x), \quad V'_y := \varphi^{-1}(A_y), \quad V'_x, V'_y \subseteq \partial e^k.$$

Poiché A_x e A_y sono disgiunti, allora anche V_x, V_y sono disgiunti. Inoltre necessariamente esistono $V_x, V_y \subseteq e^k$ aperti disgiunti tali che

$$V_x \cap \partial e^k = V'_x, \quad V_y \cap \partial e^k = V'_y.$$

Gli aperti $j(A_x) \cup \Phi(V_x)$ e $j(A_y) \cup \Phi(V_y)$ sono quelli cercati.

2. Sia $H : C \times [0, 1] \rightarrow C$ la mappa che rende $\partial e^k \subseteq C$ un **retratto di deformazione forte**, $r : C \rightarrow \partial e^k$.

Definiamo $\hat{H} : X \amalg C \times [0, 1] \rightarrow X \amalg C$ come segue:

$$\hat{H}(x, t) = \begin{cases} H(x, t) & x \in C \\ x & x \in X \end{cases}$$

- \hat{H} è passa al quoziente: se $x \sim y$, allora $\hat{H}(x, t) \sim \hat{H}(y, t)$.

– se $x \in X$ e $y \in \partial e^k$ tali che $x = \varphi(y)$, allora

$$\begin{aligned} \hat{H}(x, t) &= x \\ \hat{H}(y, t) &= H(y, t) = y \end{aligned}$$

– se $x, y \in \partial e^k$ tali che $\varphi(x) = \varphi(y)$, allora

$$\hat{H}(x, t) = x, \quad \hat{H}(y, t) = y$$

- Lo spazio $(X \amalg C)/\sim = j(X) \cup \Phi(C)$.

- Posso quindi definire una funzione

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : (j(X) \cup \Phi(C)) \times [0, 1] &\rightarrow j(X) \cup \Phi(C) \\ ([x]_\sim, t) &\mapsto [H(x, t)]_\sim \end{aligned}$$

che è l'identità su $j(X)$.

- \mathbf{H} è una omotopia:

$$\mathbf{H}(x, 0) = \begin{cases} \Phi(H(\Phi^{-1}(x), 0)) = x & x \in \Phi(C) \\ x & x \in j(X) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, 1) &= \begin{cases} \Phi(H(\Phi^{-1}(x), 1)) & x \in \Phi(C) \\ x & x \in j(X) \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Phi(r(\Phi^{-1}(x))) & x \in \Phi(C) \\ x & x \in j(X) \end{cases} \end{aligned}$$

e quindi $\mathbf{H}(x, 1) \in j(X)$, in quanto per ogni $y \in \partial e^k$, $\Phi(y) \in j(X)$. ■

D'ora in avanti si potrà considerare che $X \subseteq X \cup_{\varphi} e^k$.

1419.1 Attaccamento di una famiglia di k-celle ad uno spazio topologico

Definizione 5. Sia X uno spazio topologico e sia $\{e_{\alpha}^k\}_{\alpha \in A}$ una famiglia di k -celle indicizzata da un insieme A . Per ogni $\alpha \in A$, sia data una mappa continua dal bordo di e_{α}^k per ogni α : $\varphi_{\alpha} : \partial e_{\alpha}^k \rightarrow X$.

L'attaccamento della famiglia di celle $\{e_{\alpha}^k\}$ ad X è lo spazio quoziante:

$$Y = X \cup_{\{\varphi_{\alpha}\}} \left(\coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \right) := \left(X \amalg \coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \right) / \sim$$

dove \amalg denota l'unione disgiunta topologica e la relazione \sim è data da

$$x \sim y \iff \begin{cases} x = y \\ x \in \partial e_{\alpha}^k, y = \varphi_{\alpha}(x) \in X \\ y \in \partial e_{\alpha}^k, x = \varphi_{\alpha}(y) \in X \\ \exists \alpha, \beta \in A : x \in \partial e_{\alpha}^k, y \in \partial e_{\beta}^k \text{ e } \varphi_{\alpha}(x) = \varphi_{\beta}(y) \end{cases}$$

Per ogni $\alpha \in A$, è indotta la mappa caratteristica di e_{α}^k .

$$\Phi_{\alpha} : e_{\alpha}^k \hookrightarrow X \amalg \coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \xrightarrow{\pi} \left(X \amalg \coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \right) / \sim .$$

La topologia su Y è la topologia quoziante indotta dalla proiezione

$$\pi : \left(X \amalg \coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \right) \longrightarrow \left(X \amalg \coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \right) / \sim$$

Si può considerare $X \subseteq X \cup_{\{\varphi_{\alpha}\}} \left(\coprod_{\alpha \in A} e_{\alpha}^k \right)$

1420 Omologia per attaccamento di k-cellula

Sia R un PID.

Sia X uno spazio topologico di Haussdorff, e^k una k -cella, $\varphi : \partial e^k \rightarrow X$ continua e

$$Y := X \cup_{\varphi} e^k$$

l'attaccamento di e^k ad X .

Proposizione 1. La mappa $\Phi : (e^k, \partial e^k) \longrightarrow (Y, j(X))$ induce un **isomorfismo** in **omologia relativa**:

$$\forall q : H_q(e^k, \partial e^k) \cong H_q(Y, j(X)).$$

Dimostrazione. Sia C un **collare** di ∂e^k .

1. Abbiamo il seguente **omeomorfismo**:

$$\Phi|_{e^k \setminus \partial e^k} : (e^k \setminus \partial e^k, C \setminus \partial e^k) \longrightarrow (Y \setminus j(X), (j(X) \cup \Phi(C)) \setminus j(X))$$

che induce un **isomorfismo**

$$\forall n : H_n(e^k \setminus \partial e^k, C \setminus \partial e^k) \cong H_n(Y \setminus j(X), (j(X) \cup \Phi(C)) \setminus j(X))$$

2. Poiché $\partial e^k \subseteq C$ e $j(X) \subseteq j(X) \cup \Phi(C)$ sono **retratti di deformazione**, allora

$$\begin{aligned} \forall n : H_n(Y, j(X)) &\cong (Y, j(X) \cup \Phi(C)) \\ \forall n : H_n(e^k, \partial e^k) &\cong H_n(e^k, C) \end{aligned}$$

3. Per il **Teorema di Escissione**:

$$\begin{aligned} H_n(e^k \setminus \partial e^k, C \setminus \partial e^k) &\cong H_n(e^k, C) \\ H_n(Y \setminus j(X), (j(X) \cup \Phi(C)) \setminus j(X)) &\cong H_n(Y, (j(X) \cup \Phi(C))) \end{aligned}$$

Tutto questo dà l'isomorfismo richiesto:

$$\begin{array}{ccccc} H_n(e^k, \partial e^k) & \xrightarrow[2.]{\cong} & H_n(e^k, C) & \xleftarrow[3.]{\cong} & H_n(e^k \setminus \partial e^k, C \setminus \partial e^k) \\ & & & & \downarrow 1. \cong \\ H_n(Y, j(X)) & \xrightarrow[2.]{\cong} & H_n(Y, j(X) \cup \Phi(C)) & \xleftarrow[3.]{\cong} & H_n(Y \setminus j(X), (j(X) \cup \Phi(C)) \setminus j(X)) \end{array} \blacksquare$$

Proposizione 2. Per l'**omologia singolare**:

1. Per ogni $q \neq k, k-1$:

$$H_q(Y) \cong H_q(X);$$

2. Vale una e una sola delle seguenti:

- si ha un **isomorfismo** con la **somma diretta**

$$H_k(Y) \cong H_k(X) \oplus R$$

e, se $H_{k-1}(X)$ è **finitamente generato**, allora lo è anche $H_{k-1}(Y)$ e vale la seguente formula per il **rango**:

$$\text{rk}(H_{k-1}(Y)) = \text{rk}(H_{k-1}(X));$$

- si ha un **isomorfismo**:

$$H_k(Y) \cong H_k(X)$$

e, se $H_{k-1}(X)$ è **finitamente generato**, allora lo è anche $H_{k-1}(Y)$ e vale la seguente formula per il **rango**:

$$\text{rk} (H_{k-1}(Y)) = \text{rk} (H_{k-1}(X)) - 1.$$

Dimostrazione. Si noti che per la proposizione precedente:

$$H_q(Y, j(X)) \cong H_q(e^k, \partial e^k) = \begin{cases} R & q = k \\ 0 & q \neq k \end{cases}$$

per l'**omologia relativa già calcolata**.

1. Si scriva la **SEL per l'omologia relativa**:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{q+1}(Y, j(X)) & \longrightarrow & H_q(j(X)) & \longrightarrow & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, j(X)) \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & H_q(X) & & \end{array}$$

Per $q \neq k$, $q \neq k-1$, allora $q \neq k$ e $q+1 \neq k$, e quindi

$$H_{q+1}(Y, j(X)) = 0, \quad H_q(Y, j(X)) = 0.$$

Pertanto, $H_q(X) \cong H_q(j(X)) \cong H_q(Y)$

2. Si consideri sempre la SEL per l'omologia relativa, vicino a $q = k$.

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{k+1}(Y, j(X)) & \rightarrow & H_k(j(X)) & \rightarrow & H_k(Y) & \rightarrow & H_k(Y, j(X)) & \rightarrow & H_{k-1}(j(X)) \rightarrow H_{k-1}(Y) \rightarrow H_{k-1}(Y, j(X)) \\ & & \parallel & & & & \parallel & & \\ & & H_k(X) & & & & H_{k-1}(X) & & \end{array}$$

e si facciano le dovute sostituzioni

$$0 \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(Y) \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} H_{k-1}(X) \longrightarrow H_{k-1}(Y) \longrightarrow 0$$

Siccome R è un R -modulo libero, ed R è un PID, **allora ogni suo sottomodulo è libero**. In particolare lo è il **kernel** $\ker \alpha$. Ci sono solo due casi possibili:

- (a) $\boxed{\ker \alpha \cong R}$: allora sicuramente la seguente è esatta:

$$0 \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(Y) \longrightarrow \ker \alpha \longrightarrow 0$$

e siccome $\ker \alpha \cong R$ è **libero**, **si ha che**

$$H_k(Y) \cong H_k(X) \oplus R.$$

Per la seconda parte, per il **primo teorema di isomorfismo** questa è una **successione esatta corta**:

$$0 \longrightarrow R/\ker \alpha \xrightarrow{\overline{\alpha}} H_{k-1}(X) \longrightarrow H_{k-1}(Y) \longrightarrow 0$$

- $R/\ker \alpha$ è finitamente generato. Inoltre è di torsione.

Infatti, siccome $\ker \alpha \subseteq R$ è sottomodulo, allora è ideale di un PID, e pertanto esiste $r \in R$, $r \neq 0$ tale che^[584]

$$\ker \alpha = (r)$$

Allora per ogni $p + \ker \alpha \in R/\alpha$, $r \cdot [p] = 0$.

Pertanto ha **rango nullo**.

- Se $H_{k-1}(X)$ è finitamente generato, allora lo è anche $H_{k-1}(Y)$.^[585]

Pertanto vale la formula

$$\text{rk } H_{k-1}(X) = \text{rk } H_{k-1}(Y) + \underbrace{\text{rk}(R/\ker \alpha)}_{=0}.$$

1. $\boxed{\ker \alpha = 0}$: allora la seguente è esatta:

$$0 \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(Y) \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \ker \alpha \end{array} \quad R \xrightarrow{\alpha} H_{k-1}(X) \longrightarrow H_{k-1}(Y) \longrightarrow 0$$

e pertanto lo sono entrambe le seguenti:

$$0 \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow H_k(Y) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{\alpha} H_{k-1}(X) \longrightarrow H_{k-1}(Y) \longrightarrow 0$$

Segue che $H_k(X) \cong H_k(Y)$, e $H_{k-1}(Y) \cong H_{k-1}(X)/R$.

Quindi, se $H_{k-1}(X)$ è finitamente generato, allora $H_{k-1}(Y)$ è finitamente generato, e inoltre per il **rango vale**:

$$\text{rk } H_{k-1}(X) = \text{rk } H_{k-1}(Y) + \underbrace{\text{rk } R}_{=1}.$$

■

1421 CW-complexo

Definizione 1. Un **CW-complexo** è uno spazio topologico X dato dall'unione:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$$

tale che:

- X_0 è **discreto** e **finito**;

- per ogni k : esiste una famiglia $\{e_\alpha^{k+1}\}_{\alpha \in A^{k+1}}$ di $(k+1)$ -celle ed una famiglia di funzioni continue dal bordo $\varphi_\alpha^{k+1} : \partial e_\alpha^{k+1} \rightarrow X_k$; tali che X_{k+1} sia dato dal seguente attaccamento:

$$X_{k+1} := X_k \cup_{\{\varphi_\alpha^{k+1}\}} \left(\coprod_{\alpha \in A^{k+1}} e_\alpha^{k+1} \right)$$

Lo spazio X_n si dice n -scheletro.

Osservazione. Se Φ_α^n sono le mappe caratteristiche per e_α^n , allora il seguente diagramma commuta

$$\begin{array}{ccc} \coprod_\alpha e_\alpha^n & \xrightarrow{\coprod_\alpha \Phi_\alpha^n} & X_n \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod_\alpha \partial e_\alpha^n & \xrightarrow{\coprod_\alpha \varphi_\alpha^n} & X_{n-1} \end{array}$$

dove \coprod indica l'unione disgiunta.

Osservazione. Per ogni n , (X_{n+1}, X_n) è una coppia topologica buona.

Esempio 2. La sfera \mathbb{S}^n ha una naturale struttura di CW-complesso. Infatti, fissato $p \in \mathbb{S}^n$, siano

$$X_0 = X_1 = \cdots = X_{n-1} := \{p\}$$

e si definisca $X_n = \{p\} \cup_\varphi e_1^n$, dove

$$\begin{aligned} \varphi : \partial e_1^n &\longrightarrow X_{n-1} \\ x &\longmapsto p \end{aligned}$$

1421.1 Topologia

Osservazione. La topologia su un CW-complesso è la topologia debole, ovvero

$$C \subseteq X \text{ chiuso} \iff \forall i \ C \cap X_i \text{ chiuso.}$$

Proposizione 3. Un CW-complesso è limite diretto dei suoi scheletri con le mappe di immersione.

1422 Struttura di CW-complesso per spazio proiettivo reale

Lemma 1. Si consideri lo spazio proiettivo reale \mathbb{RP}^n come quoziente sulla sfera, e la mappa:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1} \\ p &\longmapsto [p] \end{aligned}$$

Allora si ha il seguente omeomorfismo con l'attaccamento del disco \mathbb{D}^n :

$$\mathbb{RP}^n \cong \mathbb{RP}^{n-1} \cup_h \mathbb{D}^n$$

Dimostrazione. Definiamo la funzione

$$f : \mathbb{RP}^{n-1} \amalg \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$$

come segue:

- per $[x_0, \dots, x_{n-1}] \in \mathbb{RP}^{n-1}$: $f[x_0, \dots, x_{n-1}] = [x_0, \dots, x_{n-1}, 0]$;
- per $\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{D}^n$: $f(\mathbf{x}) = \left[x_0, \dots, x_{n-1}, \sqrt{1 - \|\mathbf{x}\|^2} \right]$, dove $\|\cdot\|$ è la norma euclidea di \mathbb{R}^n .

Si ha che f è **suriettiva**. Infatti, sia $[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{RP}^n$.

- Se $x_n = 0$, allora $[x_0, \dots, x_n] = f[\underbrace{x_0, \dots, x_{n-1}}_{\in \mathbb{RP}^{n-1}}]$.
- Se $x_n \neq 0$, allora, siccome \mathbb{RP}^n è quoziante sulla sfera:

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i^2 + x_n^2 = 1 \implies x_n^2 = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} x_i^2.$$

– Se $x_n > 0$, allora $[x_0, \dots, x_n] = f(\mathbf{x})$, con

$$\mathbf{x} = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{D}^n$$

– Se $x_n < 0$, allora $[x_0, \dots, x_n] = [-x_0, \dots, -x_n]$ e si ricade nel caso precedente.

Inoltre f è **chiusa**: infatti, sia $C \subseteq \mathbb{RP}^{n-1} \amalg \mathbb{D}^n$ un chiuso. Siccome $\mathbb{RP}^{n-1} \amalg \mathbb{D}^n$ è **compatto** (in quanto **unione di compatti**), allora C è **compatto**. Pertanto, l'**immagine** $f(C) \subseteq \mathbb{RP}^n$ è compatto, con \mathbb{RP}^n di **Hausdorff**. Ma un **compatto in un Hausdorff** è **chiuso**, e quindi $f(C)$ è chiuso.

Si consideri ora la **proiezione al quoziante** $\pi : \mathbb{RP}^{n-1} \amalg \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^{n-1} \cup_h \mathbb{D}^n$. Si dimostra che f **fattorizza** con π . Siano quindi $p, q \in \mathbb{RP}^{n-1} \amalg \mathbb{D}^n$ tali che $\pi(p) = \pi(q)$.

- Se $p \in \partial \mathbb{D}^n$ e $q \in \mathbb{RP}^{n-1}$ sono tali che $h(p) = q$

$$\begin{array}{lll} p = (x_0, \dots, x_{n-1}) & \rightsquigarrow & f(p) = [x_0, \dots, x_{n-1}, 0] \\ q = [y_0, \dots, y_{n-1}] & \rightsquigarrow & f(q) = [y_0, \dots, y_{n-1}, 0] \end{array}$$

e si ha che

$$[x_0, \dots, x_{n-1}] = [y_0, \dots, y_{n-1}].$$

Quindi $f(p) = f(q)$.

- se $p, q \in \partial \mathbb{D}^n$ tali che $h(p) = h(q)$:

$$\begin{array}{lll} p = (x_0, \dots, x_{n-1}) & \rightsquigarrow & f(p) = [x_0, \dots, x_{n-1}, 0] \\ q = (y_0, \dots, y_{n-1}) & \rightsquigarrow & f(q) = [y_0, \dots, y_{n-1}, 0] \end{array}$$

e si ha che

$$[x_0, \dots, x_{n-1}] = [y_0, \dots, y_{n-1}]$$

Quindi $f(p) = f(q)$.

Per la proprietà universale della topologia quoziente, esiste \bar{f} tale che

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \amalg \mathbb{D}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}\mathbb{P}^n \\ \downarrow & & \nearrow \bar{f} \\ \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \cup_h \mathbb{D}^n & & \end{array}$$

commuti, e in particolare \bar{f} è un omeomorfismo. ■

Corollario 2. $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ ha una struttura di CW-complesso: al passo k si aggiunge una cella di dimensione k , per ogni $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \left(((\mathbb{D}^0 \cup_h \mathbb{D}^1) \cup_h \mathbb{D}^2) \cup_h \dots \right) \cup_h \mathbb{D}^n$$

1423 Struttura di CW-complesso per spazio proiettivo complesso

Lemma 1. Si consideri lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ come quoziente sulla sfera, e la mappa:

$$\begin{aligned} h : \mathbb{S}^{2n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1} \\ p &\longmapsto [p] \end{aligned}$$

Allora si ha il seguente omeomorfismo con l'attaccamento del disco \mathbb{D}^n :

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^n \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \cup_h \mathbb{D}^{2n}$$

Corollario 2. $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ha una struttura di CW-complesso: al passo k si aggiunge una cella di dimensione $2k$, per ogni $k \in \{0, \dots, n\}$.

1424 Omologia singolare relativa per scheletri di CW-complessi

Sia R un PID fissato.

Osservazione. Sia X un CW-complesso, con scheletri X_j . Allora il quoziente di contrazione ad un punto:

$$X_{j+1}/X_j \cong \bigvee_{\alpha} \mathbb{S}_{\alpha}^{j+1}$$

è omeomorfo all'unione ad un punto delle sfere $j+1$ -dimensionali. L'omologia singolare relativa di (X_n, X_{n-1}) è:

1. Per il calcolo dell'omologia relativa di una coppia topologica buona:

$$H_q(X_n, X_{n-1}) \cong \widetilde{H}_q(X_n/X_{n-1})$$

dove \widetilde{H}_q è l'omologia ridotta

$$2. \quad \widetilde{H}_q(X_n/X_{n-1}) = \widetilde{H}_q(\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^n)$$

3. Per il calcolo dell'**omologia dell'unione al punto**, e per l'**omologia delle sfere**, si ha:^[586]

$$\widetilde{H}_q\left(\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^n\right) = \begin{cases} 0 & q \neq n \\ \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_q(\mathbb{S}_\alpha^n) = \bigoplus_\alpha R \cdot [e_\alpha^n] & q = n \end{cases}$$

Dunque $H_n(X_n, X_{n-1}) \cong \bigoplus_\alpha R \cdot [e_\alpha^n]$, dove $[e_\alpha^n]$ è il generatore associato alla n -cella α .

Più precisamente, se

$$\Phi_\alpha^n : (e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n) \longrightarrow (X_n, X_{n-1})$$

è la **mappa caratteristica**, allora questa **induce** $(\Phi_\alpha^n)_*$:

$$(\Phi_\alpha^n)_* : H_n(e_\alpha^n; \partial e_\alpha^n) \rightarrow H_n(X_n, X_{n-1})$$

con $H_n(e_\alpha^n; \partial e_\alpha^n) \cong R$.

Se $c_\alpha^n : \Delta_n \longrightarrow e_\alpha^n$ è un **omeomorfismo** (ovvero è un **simplesso singolare** dal **simplesso standard**), allora $[c_\alpha^n] \in H_n(e_\alpha^n, \partial e_\alpha^n)$, e dunque

$$[e_\alpha^n] := (\Phi_\alpha^n)_*[c_\alpha^n].$$

Nota: Siccome c_α^n è un omeomorfismo, allora $[c_\alpha^n]$ non è nullo, e pertanto neanche $(\Phi_\alpha^n)_*[c_\alpha^n]$ lo sarà. Inoltre, per costruzione, vedendo $(\Phi_\alpha^n)_*[c_\alpha^n]$ dentro $\widetilde{H}_q(\bigvee_\alpha \mathbb{S}_\alpha^n)$, questo deve stare dentro $\widetilde{H}_q(\mathbb{S}_\alpha^n) \cong R$, e quindi lo genera.

1425 Omologia singolare di CW-complessi

Proposizione 1. Sia X un CW-complesso, X_n il suo n -scheletro. Se X è finito dimensionale^[587]

1. per ogni $q > n$: $H_q(X_n) = 0$;
2. per ogni $q < n$, l'inclusione $X_n \hookrightarrow X$ **induce** un **isomorfismo**

$$H_q(X_n) \xrightarrow{\cong} H_q(X);$$

3. per $q = n$, l'inclusione $X_n \hookrightarrow X$ **induce** una mappa **suriettiva**

$$H_q(X_n) \twoheadrightarrow H_q(X).$$

Osservazione. Questa proposizione ci assicura che gli n -scheletri siano delle “approssimazioni” di X .

Dimostrazione. (della Proposizione 587). Fissato q , si consideri la catena di inclusioni

$$X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X$$

che **induce**

$$H_q(X_0) \hookrightarrow H_q(X_1) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow H_q(X_n) \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow H_q(X)$$

- Per j tale che $j \neq q, q+1$, si può considerare la SEL indotta dall'omologia relativa di (X_j, X_{j-1}) :

$$H_{q+1}(X_j, X_{j-1}) \longrightarrow H_q(X_{j-1}) \longrightarrow H_q(X_j) \longrightarrow H_{q-1}(X_j, X_{j-1})$$

dove $H_{q+1}(X_j, X_{j-1}) = H_q(X_j, X_{j-1}) = 0$, e quindi $H_q(X_{j-1}) \cong H_q(X_j)$.

- Si noti che, per $q > 0$: $H_q(X_0) = 0$, in quanto X_0 è un insieme discreto e finito^[588].

Dunque si ha la seguente successione esatta:

$$H_q(X_0) \xrightarrow{\cong} H_q(X_1) \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} H_q(X_{q-1}) \xrightarrow{?} H_q(X_q) \xrightarrow{?} H_q(X_{q+1}) \xrightarrow{\cong} H_q(X_{q+2}) \xrightarrow{\cong} \cdots \xrightarrow{\cong} H_q(X)$$

che dà luogo a

1. $0 = H_q(X_0) \cong \dots \cong H_q(X_{q-1})$;
2. $H_q(X_{q+1}) \cong H_q(X_{q+2}) \cong \dots \cong H_q(X)$.
3. Consideriamo invece la SEL indotta dall'omologia relativa di (X_{q+1}, X_j) :

$$H_q(X_q) \longrightarrow H_q(X_{q+1}) \longrightarrow H_q(X_{q+1}, X_q).$$

Siccome $H_q(X_{q+1}, X_q) = 0$, allora $H_q(X_q) \longrightarrow H_q(X_{q+1})$ è suriettiva. ■

Proposizione 2. Per ogni $q \geq 0$:

$$H_q(X) = H_q(X_{q+1})$$

Dimostrazione. Si sfrutti la commutatività tra omologia e limiti diretti per i CW-complessi:

$$H_q(X) = \varinjlim H_q(X_i)$$

Inoltre, per ogni $i, j \geq q + 1$ si ha che questi sono isomorfismi:

$$\begin{array}{ccc} H_q(X_i) & \xrightarrow{\cong} & H_q(X_j) \\ & \searrow \cong & \swarrow \cong \\ & H_q(X_{q+1}) & \end{array}$$

Questo è sufficiente per garantire che $H_q(X_{q+1}) = \varinjlim H_q(X_i)$. ■

Proposizione 3. Sia X un CW-complesso tale che $X = X_n$ e con un numero finito di celle. Allora

1. per ogni q , il modulo di omologia singolare $H_q(X)$ è finitamente generato;
2. per ogni $q > n$: $H_q(X) = 0$;
3. $H_n(X)$ è libero.

Dimostrazione. Consideriamo la SEL dell'omologia relativa:

$$H_q(X_{q-1}) \longrightarrow H_q(X_q) \longrightarrow H_q(X_q, X_{q-1})$$

Per la proposizione precedente, $H_q(X_{q-1}) = 0$, e dunque

$$i : H_q(X_q) \hookrightarrow H_q(X_q, X_{q-1}) \cong \bigoplus_{\alpha} R \cdot [e_{\alpha}^q]$$

è una mappa **iniettiva**, dove l'ultimo **isomorfismo** è dato da un risultato precedente. Pertanto $H_q(X_q, X_{q-1})$ è un modulo libero e finitamente generato (per ipotesi vi è solo un numero finito di celle), e $i(H_q(X_q))$ ne è **sottomodulo**.

Siccome R è un PID, **allora**, $H_q(X_q)$ è libero e finitamente generato.

- In particolare, quindi $H_n(X_n) = H_n(X)$ è libero e finitamente generato (quindi si ha 3.)
- Inoltre, consideriamo $H_q(X) = H_q(X_{q+1})$:

$$H_q(X_q) \longrightarrow H_q(X_{q+1}) \longrightarrow H_q(X_{q+1}, X_q)$$

dove $H_q(X_{q+1}, X_q) = 0$. Pertanto questa **mappa è suriettiva**

$$H_q(X_q) \longrightarrow H_q(X_{q+1})$$

con $H_q(X_q)$ finitamente generato. Allora $H_q(X) = H_q(X_{q+1})$ è finitamente generato. Si ha 1.

- Per finire, se $q > n$: $H_q(X_n) = 0$, ma $H_q(X_n) = H_q(X)$. Segue 2. ■

1426 Complesso di catene cellulari

Sia X un **CW-complesso**, R PID fissato.

Definizione 1. Il **complesso di catene cellulari** $\mathcal{S}_\bullet^{cw}(X)$ è il complesso di catene di R -moduli,

$$\mathcal{S}_\bullet^{cw}(X) := \left\{ (S_q^{cw}, d_q) \right\}_{q \in \mathbb{Z}}$$

tale che

1. $S_q^{cw} = H_q(X_q, X_{q-1}) \cong \bigoplus_{\alpha} R \cdot [e_{\alpha}^q]$ è l'**omologia singolare relativa del CW-complesso**.
2. $d_q : S_q^{cw}(X) \longrightarrow S_{q-1}^{cw}(X)$ è definita come $d_q := \pi_{q-1}^{(q-1, q-2)} \circ \partial_q^{(q, q-1)}$ nel diagramma commutativo di Figura 44, dove le righe sono le **SEL dell'omologia relativa**.

Proposizione 2. La composizione $d_{q-1} \circ d_q = 0$.

Dimostrazione. È sufficiente considerare il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(X_q) & \xrightarrow{\partial_q^{(q, q-1)}} & H_{q-1}(X_{q-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_q) \\
 & \searrow d_q & \parallel & & \\
 H_{q-1}(X_{q-2}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_{q-1}) & \xrightarrow{\pi_{q-1}^{(q-1, q-2)}} & H_{q-1}(X_{q-2}) \\
 & & & \searrow & \\
 & & & & \\
 H_{q-2}(X_{q-3}) & \longrightarrow & H_{q-2}(X_{q-2}) & \xrightarrow{\pi_{q-2}^{(q-2, q-3)}} & H_{q-2}(X_{q-2})
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H_q(X_q) & \longrightarrow & H_q(X_q, X_{q-1}) & \xrightarrow{\partial_q^{(q,q-1)}} & H_{q-1}(X_{q-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_q) \\
& & & & \parallel & & \\
& & H_{q-1}(X_{q-2}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_{q-1}) & \xrightarrow{\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)}} & H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}) & \longrightarrow & H_{q-2}(X_{q-2})
\end{array}$$

Figura 44: Le due righe della successione esatta lunga per l'omologia relativa

e notare che

$$d_{q-1} \circ d_q = \left(\pi_{q-2}^{(q-2,q-3)} \circ \partial_{q-1}^{(q-1,q-2)} \right) \circ \left(\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)} \circ \partial_q^{(q,q-1)} \right)$$

con $\partial_{q-1}^{(q-1,q-2)} \circ \pi_{q-1}^{(q-1,q-2)} = 0$ in quanto mappe successive di una successione esatta. \blacksquare

1426.1 Calcolo esplicito della mappa di bordo

TODO

1427 Omologia Cellulare

Definizione 1. L'*omologia cellulare* di X è l'*omologia del complesso* di catene cellulari:

$$H_q^{cw}(X) := H_q(S_\bullet^{cw}(X)).$$

Proposizione 2. Se X è un CW-complesso, allora per ogni q l'omologia singolare coincide con l'omologia cellulare:

$$H_q(X) \cong H_q^{cw}(X).$$

Dimostrazione. Per definizione, dato questo diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^{(q+1,q)}} & H_q(X_q) & \longrightarrow & H_q(X_{q+1}) & \longrightarrow & H_q(X_{q+1}, X_q) \\
& \searrow d_{q+1} & \parallel & & & & \\
H_q(X_{q-1}) & \longrightarrow & H_q(X_q) & \xrightarrow{\pi_q^{(q,q-1)}} & H_q(X_q, X_{q-1}) & \xrightarrow{\partial_q^{(q,q-1)}} & H_{q-1}(X_{q-1}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_q) \\
& & & & & & \searrow d_q & & \\
& & & & & & \parallel & & \\
& & & & & & & & \\
H_{q-1}(X_{q-2}) & \longrightarrow & H_{q-1}(X_{q-1}) & \xrightarrow{\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)}} & H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}) & & & &
\end{array}$$

si ha che $H_q^{cw}(X) = \frac{\ker d_q}{\text{Im } d_{q+1}}$ [589].

Sostituendo le informazioni sull'omologia singolare e relativa degli scheletri:

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) & \xrightarrow{\partial_{q+1}^{(q+1,q)}} & H_q(X_q) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & 0 \\
 & \searrow d_{q+1} & \parallel & & & & \\
 0 & \longrightarrow & H_q(X_q) & \xrightarrow{\pi_q^{(q,q-1)}} & H_q(X_q, X_{q-1}) & \xrightarrow{\partial_q^{(q,q-1)}} & H_{q-1}(X_{q-1}) \longrightarrow H_{q-1}(X_q) \\
 & & & & \searrow d_q & \parallel & \\
 0 & \longrightarrow & H_{q-1}(X_{q-1}) & \xrightarrow{\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)}} & H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2}) & &
 \end{array}$$

e quindi, dall'alto verso il basso::

1. $H_q(X) \cong \frac{H_q(X_q)}{\text{Im } \partial_{q+1}^{(q+1,q)}};$
2. $\pi_q^{(q,q-1)} : H_q(X_q) \longrightarrow H_q(X_q, X_{q-1})$ è iniettiva;
3. $\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)} : H_{q-1}(X_{q-1}) \longrightarrow H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2})$ è iniettiva.

Siccome $\pi_q^{(q,q-1)}$ è iniettiva, allora da 1. posso arrivare a

$$H_q(X) \cong \frac{H_q(X_q)}{\text{Im } \partial_{q+1}^{(q+1,q)}} \cong \frac{\text{Im } \pi_q^{(q,q-1)}}{\text{Im } (\pi_q^{(q,q-1)} \circ \partial_{q+1}^{q+1,q})} \cong \frac{\ker \partial_q^{(q,q-1)}}{\text{Im } d_{q+1}}$$

dove l'ultimo isomorfismo è dato dal fatto che le righe siano successioni esatte e dalla definizione di d_{q+1} .

Siccome $\pi_{q-1}^{(q-1,q-2)}$ è iniettiva, allora

$$\ker \partial_q^{(q,q-1)} = \ker \pi_{q-1}^{(q-1,q-2)} \circ \partial_q^{(q,q-1)} = \ker d_q$$

e dunque

$$H_q(X) \cong \frac{\ker \partial_q^{(q,q-1)}}{\text{Im } d_{q+1}} \cong \frac{\ker d_q}{\text{Im } d_{q+1}} = H_q^{\text{cw}}(X). \quad \blacksquare$$

1428 LATEX - Gestione TODOs

Esiste il pacchetto `todonotes`.

1429 Rango in una successione di R-moduli finitamente generati

Sia R un PID.

Teorema 1. Se M, N, P sono *R-moduli finitamente generati* tale che la seguente sia una **SEC**

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

allora i loro **ranghi** rispettano:

$$\text{rk}(N) = \text{rk}(M) + \text{rk}(P)$$

Osservazione. È sufficiente che siano finitamente generati M ed N , in quanto:

- P è **immagine** di N tramite un **morfismo** (poiché ultimo termine di una SEC)
- N è finitamente generato, e quindi lo è anche ogni sua immagine tramite morfismo.

Teorema 2. Se M_i è una famiglia di *R-moduli finitamente generati*, tali che

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_k \longrightarrow 0$$

è una sequenza esatta, allora i ranghi rispettano

$$\sum_{i=1}^k (-1)^i \text{rk}(M_i) = 0.$$

1430 Unione finita di compatti è compatta

Sia X uno **spazio topologico**.

Teorema 1. Siano $K_1, \dots, K_n \subseteq X$ un numero finito di **sottinsiemi compatti**. Allora la loro **unione** è compatta:

$$K = \bigcup_{i=1}^n K_i \subseteq X \quad \text{è compatto.}$$

1430.1 Compattezza dell'unione disgiunta

Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di **spazi topologici** e sia

$$X = \coprod_{i \in I} X_i$$

la loro **unione disgiunta**.

Teorema 2. Se ogni spazio X_i è **compatto** e l'insieme I degli indici è finito, allora X è compatto.

1431 L^AT_EX - Ambiente commento

Il seguente codice crea un ambiente **commento**, che funziona come un postit. Pur utilizzando “todonotes”, non compare nella lista dei todo.

```

\usepackage{todonotes}
\usepackage{environ} % Necessario per gestire il corpo dell'ambiente

\NewEnviron{commento}{%
    \todo[inline, color=yellow!50, nolist]{\BODY}%
}

```

1432 L^AT_EX - Gestione Multi-file

Vedi per il pacchetto `subfiles`.

1433 Sistema diretto

Sia \mathcal{C} una categoria, e sia I un insieme ordinato diretto superiormente, ovvero

$$\forall i, j \in I \exists k \in I \quad (i \leq k \wedge j \leq k).$$

Definizione 1. Un *sistema diretto* in \mathcal{C} è una famiglia $\{G_i, \rho_{ij}\}$ tale che:

- $G_i \in \text{Ob}(\mathcal{C})$;
- per ogni $j \geq i$: $\rho_{ij} : G_i \longrightarrow G_j$

e inoltre, per ogni $i \leq j \leq k$ il seguente diagramma commuta:

$$\begin{array}{ccc}
 G_i & \xrightarrow{\rho_{ik}} & G_k \\
 & \searrow \rho_{ij} \quad \nearrow \rho_{jk} & \\
 & G_j &
 \end{array}
 \quad \rho_{jk} \circ \rho_{ij} = \rho_{ik}.$$

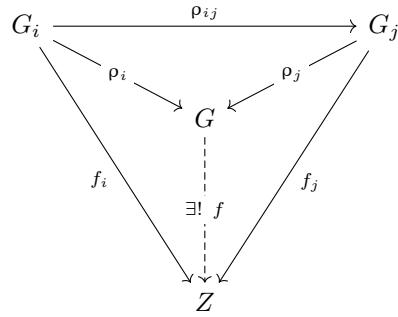
1434 Limite diretto

Definizione 1. Dato $\{G_i, \rho_{ij}\}$ sistema diretto il *limite diretto* dei G_i è

- un oggetto $G = \varinjlim G_i$;
- dotato di morfismi $\rho_j : G_j \rightarrow G$ tali che $\rho_j \circ \rho_{ij} = \rho_i$;

dotato della seguente proprietà universale:

- per ogni $Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ dotato di mappe $f_i : G_i \rightarrow Z$ tali che $f_j \circ \rho_{ij} = f_i$, esiste un unico $f : G \rightarrow Z$ tale che $f \circ \rho_j = f_j$.



Esempio 2. Nella categoria $\mathcal{C} = \mathbf{Top}$ degli spazi topologici, si consideri

$$X_i \subseteq X_j, \quad \rho_{ij} : X_i \hookrightarrow X_j.$$

Allora $\varinjlim X_i = \bigcup X_i$ dotato della “topologia debole”, ovvero

$$C \subseteq \bigcup X_i \text{ chiuso} \iff \forall i \ C \cap X_i \text{ chiuso}$$

1435 Omologia singolare di CW-complessi come limite diretto

Proposizione 1. Supponiamo che $X = \bigcup X_i$ sia uno spazio topologico tale che $X_i \subseteq X_j$ e

$$C \subseteq X \text{ chiuso} \iff \forall i \ C \cap X_i \subseteq X_i \text{ chiuso.}$$

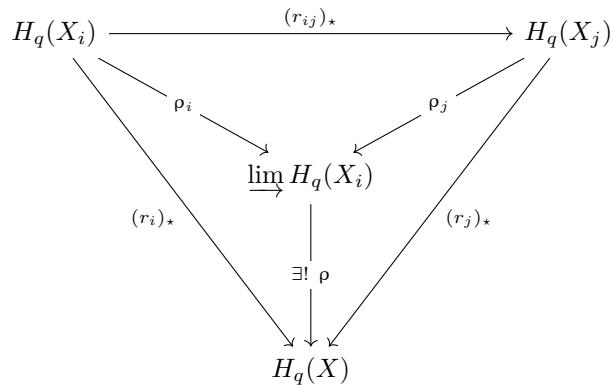
Se per ogni $K \subseteq X$ compatto esiste X_i tale che $K \subseteq X_i$, allora l’omologia singolare di X è il limite diretto delle omologie degli X_i :

$$\forall q : \quad H_q(X) = \varinjlim H_q(X_i).$$

Dimostrazione. Sia $\rho_{ij} : X_i \hookrightarrow X_j$ l’inclusione, $\{X_i, r_{ij}\}$ è sistema diretto, con limite

$$X = \varinjlim X_i, \quad r_i : X_i \longrightarrow X$$

Poiché il funtore di omologia singolare H_q è un funtore covariante, allora $\{H_q(X_i), (r_{ij})_*\}$ è un sistema diretto:



Mostriamo che ρ sia un isomorfismo,

$$\rho : \varinjlim H_q(X_i) \longrightarrow H_q(X).$$

- ρ è suriettiva.

TODO: Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

- ρ è iniettiva.

TODO: Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.. ■

Corollario 2. Siccome i CW-complessi rispettano le ipotesi di cui sopra, allora se X è CW-complesso si ha che

$$\forall q : \quad H_q(X) = \varinjlim H_q(X_i).$$

1436 Calcolo dell'omologia singolare dello spazio proiettivo reale

1437 Teorema di Confronto tra omologia singolare e simpliciale

Sia R un PID fissato.

Teorema 1. Se K è un complesso simpliciale e $|K|$ è il suo supporto, allora vi è il seguente isomorfismo tra omologia simpliciale H_q^{simp} e singolare H_q^{sing} :

$$\forall q : \quad H_q^{\text{simp}}(K) \cong H_q^{\text{sing}}(|K|).$$

TODO sistemare

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio topologico $X := |K|$. Questo spazio ammette una struttura naturale di CW-complesso definita ponendo come q -scheletro l'unione di tutti i simplessi di dimensione minore o uguale a q :

$$X_q := \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ \dim \sigma \leq q}} |\sigma| \subseteq |K|$$

Le q -celle aperte corrispondono esattamente agli interni dei q -simplessi di K . Dobbiamo costruire un isomorfismo di complessi di catene tra il complesso delle catene simpliciali $C_\bullet^\Delta(K)$ e il complesso delle catene cellulari $S_\bullet^{\text{cw}}(X)$.

1. Definizione della mappa tra catene Per ogni q -simplesso $\sigma = [P_0, \dots, P_q] \in K_q$, consideriamo la mappa caratteristica canonica:

$$c_\sigma : \Delta^q \longrightarrow |K|$$

definita come l'unica mappa affine tale che $c_\sigma(e_i) = P_i$, dove $\{e_i\}$ sono i vertici standard del simplexo standard Δ^q . Questa mappa definisce un generatore nel gruppo delle catene cellulari:

$$[c_\sigma] \in H_q(X_q, X_{q-1}) = S_q^{\text{cw}}(X).$$

Definiamo l'omomorfismo $\Psi_q : C_q^\Delta(K) \longrightarrow S_q^{\text{cw}}(X)$ estendendo per linearità l'assegnazione:

$$\Psi_q(\sigma) := [c_\sigma]$$

Poiché le celle di X sono in corrispondenza biunivoca con i simplessi di K , Ψ_q manda una base in una base, ed è dunque un isomorfismo di moduli per ogni q .

2. Commutazione con i bordi Dobbiamo verificare che Ψ sia un morfismo di complessi, ovvero che commuti con gli operatori di bordo: $d_q \circ \Psi_q = \Psi_{q-1} \circ \partial_q^\Delta$.

Ricordiamo che il bordo simpliciale è dato da:

$$\partial_q^\Delta(\sigma) = \sum_{i=0}^q (-1)^i [P_0, \dots, \hat{P}_i, \dots, P_q] = \sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_i$$

Calcoliamo ora il bordo cellulare $d_q[c_\sigma]$. Per definizione, d_q è la composizione nel diagramma della successione esatta lunga della coppia (X_q, X_{q-1}) :

$$H_q(X_q, X_{q-1}) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(X_{q-1}) \xrightarrow{j_{q-1}} H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2})$$

$$[c_\sigma] \longmapsto [\partial c_\sigma] \longmapsto d_q[c_\sigma]$$

Il bordo singolare di c_σ è, per definizione di catena singolare:

$$\partial c_\sigma = \sum_{i=0}^q (-1)^i (c_\sigma \circ \epsilon_i^q)$$

dove $\epsilon_i^q : \Delta^{q-1} \rightarrow \Delta^q$ è l'inclusione della i -esima faccia. Osserviamo che la composizione $c_\sigma \circ \epsilon_i^q$ è esattamente la mappa caratteristica del simplexo $(q-1)$ -dimensionale σ_i ottenuto rimuovendo il vertice i -esimo:

$$c_\sigma \circ \epsilon_i^q = c_{\sigma_i}$$

Quindi, passando alle classi di omologia relativa in $S_{q-1}^{\text{cw}}(X) = H_{q-1}(X_{q-1}, X_{q-2})$:

$$d_q(\Psi_q(\sigma)) = d_q[c_\sigma] = \left[\sum_{i=0}^q (-1)^i c_{\sigma_i} \right] = \sum_{i=0}^q (-1)^i [c_{\sigma_i}] = \sum_{i=0}^q (-1)^i \Psi_{q-1}(\sigma_i)$$

Dall'altro lato:

$$\Psi_{q-1}(\partial_q^\Delta \sigma) = \Psi_{q-1} \left(\sum_{i=0}^q (-1)^i \sigma_i \right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \Psi_{q-1}(\sigma_i)$$

Le due espressioni coincidono.

Conclusione Poiché $\Psi_\bullet : C_\bullet^\Delta(K) \rightarrow S_\bullet^{\text{cw}}(|K|)$ è un isomorfismo di complessi di catene, induce un isomorfismo in omologia:

$$H_q^\Delta(K) \cong H_q^{\text{cw}}(|K|) \cong H_q(|K|).$$

■

1438 Funtore esatto

1439 Prodotto tensoriale di moduli

1440 Funtore prodotto tensoriale

1441 Complesso di catene come modulo graduato

1442 Prodotto tensoriale di complessi di catene

1443 Teorema di Künneth

1444 Teorema dei coefficienti universali

1445 Topologia debole

1446 Funtore covariante applicato ad un sistema diretto

Siano \mathcal{C}, \mathcal{D} due categorie e I un insieme superiormente diretto.

Definizione 1. Sia $\{(X_i, \varphi_{ij})\}_{i \in I}$ un *sistema diretto* in \mathcal{C} e sia $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un *funtore covariante*. L'applicazione del funtore F al sistema definisce un nuovo *sistema diretto* $\{(F(X_i), F(\varphi_{ij}))\}_{i \in I}$ nella categoria \mathcal{D} , dove:

1. Gli oggetti sono $\{F(X_i)\}_{i \in I}$;
2. Per ogni $i \leq j$, i morfismi strutturali sono $F(\varphi_{ij}) : F(X_i) \rightarrow F(X_j)$.

Osservazione. La coerenza del nuovo sistema è garantita dalle proprietà di composizione del funtore. Se $i \leq j \leq k$, nel sistema originale vale $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$. Applicando F :

$$F(\varphi_{ik}) = F(\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}) = F(\varphi_{jk}) \circ F(\varphi_{ij})$$

Visualizzandolo con un diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} F(X_i) & \xrightarrow{F(\varphi_{ij})} & F(X_j) \\ & \searrow F(\varphi_{ik}) & \swarrow F(\varphi_{jk}) \\ & F(X_k) & \end{array}$$

Inoltre, F mappa l'identità in identità: $F(\varphi_{ii}) = F(\text{id}_{X_i}) = \text{id}_{F(X_i)}$.

1447 Homepage

This is the website of [Davide Peccioli](#). Feel free to browse through the following sections:

- [Math graduate degree](#)
- [Scuba Diving](#)

Vedi anche:

- [INBOX - Fleeting Notes](#)

1448 Prova

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Note

1. <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-01195-0>
2. Vedi:
 - [Categoria-Top*](#)
 - [Categoria-Grp](#)
3. Vedi:

- [Categoria-Top](#)
- [Categoria-VectR](#)

4. Vedi “[Funzione Continua](#)”.

5. Vedi:

- Quoziente di Moduli
- [Somma Diretta di moduli](#)
- Intersezione di sottomoduli

6. Vedi [kernel](#) e [immagine](#).

7. Questa definizione ha senso in quanto [intersezione di sottomoduli è sottomodulo](#).

8. Vedi “[Gruppi-Zp](#)”

9. Vedi “[Insieme di Generatori di un Modulo](#)”

10. [Ogni anello ha struttura di modulo su sé stesso](#).

11. Vedi “[Cardinalità](#)”

12. con δ_{ij} si indica la [Delta di Kronecher](#)

13. Vedi “[Somma Diretta](#)”

14. vedi la definizione di [R-modulo](#)

15. Vedi “[Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)” e “[Kernel](#)”

16. Per ogni $\tilde{m} \in M$ si consideri $(r_m)_{m \in M} \in R^{(M)}$:

$$r_m = \begin{cases} 0 & m \neq \tilde{m} \\ 1 & m = \tilde{m} \end{cases}$$

allora $f(r_m)_{m \in M} = \tilde{m}$.

17. Vedi “[Quoziente di Moduli](#)”

18. Vedi “[Sottomodulo](#)”

19. Vedi anche [Ideale-Generato](#)

20. Vedi anche [Anello-dei-polinomi](#) e [Anello dei polinomi ad ideali principali](#)

21. : Vedi [Teorema-della-Base](#) e [Rango di un modulo libero](#)

22. Si noti, infatti, che $\mathbb{P}^1 \supseteq U_0$ e $U_0 = \mathbb{K}$. Dal momento che \mathbb{K} è [Campo Algebricamente Chiuso](#) vale che [K ha infiniti punti](#).

23. Poiché $F \circ \ell(\lambda, \mu)$ è omogeneo di grado $\leq d - 1$, allora $F \circ \ell(1, \xi)$ è un polinomio in una indeterminata di grado uguale a $F \circ \ell(\lambda, \mu)$. A meno di scegliere $P, Q \notin \Gamma$, per ogni $p_i \in \Gamma$ si ha che $\lambda_i, \mu_i \neq 0$. Poiché $F \circ \ell$ è un polinomio omogeneo, posto $\xi_i = \frac{\mu_i}{\lambda_i}$ si ha che

$$\forall i, \quad 0 = F \circ \ell[\lambda_i : \mu_i] = F \circ \ell[1 : \xi_i]$$

e pertanto, $F \circ \ell(1, \xi)$ ha almeno d radici. Dunque, per il [Teorema Fondamentale dell'Algebra](#), siccome \mathbb{K} è un campo algebricamente chiuso, $F \circ \ell(1, \xi) \equiv 0$, e dunque, per omogeneità, lo è pure $F \circ \ell(\lambda, \mu)$.

24. Vedi “[Modulo di un numero complesso](#)”

25. Se per assurdo $f_{N+1} - g \in (f_1, \dots, f_N)$, allora

$$f_{N+1} = (f_{N+1} - g) + g$$

e, siccome gli ideali sono chiusi rispetto alla somma, si ha che $f_{N+1} \in (f_1, \dots, f_N)$. Assurdo.

26. Infatti,

$$\begin{aligned} Y_1 \cup \dots \cup Y_n &= Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s \\ (Y_1 \cup \dots \cup Y_n) \setminus Y_1 &= (Y'_1 \cup \dots \cup Y'_s) \setminus Y'_1 \\ (Y_2 \setminus Y_1) \cup \dots \cup (Y_n \setminus Y_1) &= (Y'_2 \setminus Y'_1) \cup \dots \cup (Y'_s \setminus Y'_1) \\ \overline{(Y_2 \setminus Y_1) \cup \dots \cup (Y_n \setminus Y_1)} &= \overline{(Y'_2 \setminus Y'_1) \cup \dots \cup (Y'_s \setminus Y'_1)} \\ \overline{(Y_2 \setminus Y_1) \cup \dots \cup (Y_n \setminus Y_1)} &= \overline{(Y'_2 \setminus Y'_1)} \cup \dots \cup \overline{(Y'_s \setminus Y'_1)} \end{aligned}$$

(vedi [Chiusura Topologica](#) e [Proprietà Operazioni tra insiemi](#)) Inoltre, per ogni i si ha che

$$Y_i = \overline{Y_i \setminus Y_1}$$

Infatti, è possibile scrivere:

$$Y_i = \overline{Y_i \setminus Y_1} \cup (Y_i \cap Y_1)$$

dove

- $Y_i \cap Y_1 \subseteq Y_i$ è chiuso poiché intersezione di chiusi;
- $\overline{Y_i \setminus Y_1}$ è chiuso, e inoltre $\overline{Y_i \setminus Y_1} \subseteq Y_i$, poiché $Y_i \setminus Y_1 \subseteq Y_i$ e dunque

$$\overline{Y_i \setminus Y_1} \subseteq \overline{Y_i} = Y_i$$

Dunque questi non possono essere chiusi propri.

- Se $Y_i \cap Y_1 = \emptyset$ allora ovviamente $Y_i = Y_i \setminus Y_1$ e si ha la tesi;
- Se $Y_i \cap Y_1 = Y_i$ si ha che $Y_i \subseteq Y_1$, che contraddice l'ipotesi. Assurdo.

27. Infatti, se $p \in Y$ allora $(f_1 f_2)(p) = 0$ e pertanto, siccome \mathbb{K} è un [Dominio di integrità](#) si ha che almeno uno tra $f_1(p)$ e $f_2(p)$ è nullo, e pertanto $p \in V(f_1) \cup V(f_2)$. Viceversa, se $p \in V(f_1) \cup V(f_2)$, supponiamo $p \in V(f_1)$. Allora $f_1(p) = 0$ e quindi $(f_1 f_2)(p) = 0$. Pertanto, siccome

$$Y \subseteq \overline{Y} = V(I(Y))$$

e $p \in V(I(Y))$ si ha la tesi. (vedi [Chiusura Topologica](#) e [Zeri di un ideale di un sottoinsieme affine](#))

28. Sia $f \in I(Y)$. Allora per ogni $p \in Y = Y_1 \cup Y_2$, $f(p) = 0$. In particolare:

- per ogni $p_1 \in Y_1 \subseteq Y_1 \cup Y_2$ si ha che $f(p_1) = 0$ e quindi $f \in I(Y_1)$
- per ogni $p_2 \in Y_2 \subseteq Y_1 \cup Y_2$ si ha che $f(p_2) = 0$ e quindi $f \in I(Y_2)$

Dunque $f \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Viceversa, sia $g \in I(Y_1) \cap I(Y_2)$. Allora, per ogni $p \in Y_1$ si ha che $g(p) = 0$ e per ogni $p \in Y_2$ si ha che $g(p) = 0$. Siccome $Y = Y_1 \cup Y_2$ si ha che per ogni $p \in Y$ vale $g(p) = 0$, e dunque $g \in I(Y)$.

29. Infatti, se U_α è aperto, allora esistono $G_1, \dots, G_k \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tali che

$$U_\alpha^C = V(G_1, \dots, G_k)$$

Ma considerando $G_1, \dots, G_k \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n]$ (vedi [Anello-dei-polinomi](#)) si ha che

$$V(G_1, \dots, G_k) = U_\alpha^C \times \mathbb{P}^m = (U_\alpha \times \mathbb{P}^m)^C$$

(vedi [Prodotti di varietà QP](#)) e dunque

$$W_\alpha^C = V(G_1, \dots, G_k)$$

30. Infatti, se $X \subseteq \mathbb{P}^n$ chiuso, sia $Z \subseteq X \times Y$ chiuso Allora $Z \subseteq X \times Y$ è chiuso e $X \times Y \subseteq \mathbb{P}^n \times Y$ è chiuso, dunque $Z \subseteq \mathbb{P}^m \times Y$ è chiuso.

31. Vedi “[Isomorfismo tra R-Moduli](#)” e “[Somma Diretta](#)”

32. Vedi:

- [Torsione](#)
- [Torsione di moduli su un dominio di integrità è sottomodulo](#)
- [Quoziente di Moduli](#)

33. “|” è la [relazione di divisibilità](#). Vedi anche:

- [Torsione di un modulo](#)
- [Isomorfismo tra R-Moduli](#)
- [Quoziente di Moduli](#)
- [Modulo generato da un insieme](#)
- [Somma Diretta](#)

34. Vedi “[Prodotto cartesiano di moduli](#)”

35. Vedi:

- [Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)
- [Kernel](#)

36. Vedi: “[Isomorfismo tra R-Moduli](#)”

37. Vedi “[Quoziente di Moduli](#)”

38. Si veda:

- [Somma di sottomoduli](#)
- [Sottomoduli in somma diretta](#)
- [Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)
- [Somma Diretta](#)
- [Intersezione](#)

39. Vedi “[Isomorfismo tra R-Moduli](#)” e “[Somma-Diretta](#)”.
40. Vedi “[Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)”
41. Vedi “[Kernel](#)”
42. Vedi “[Range di una funzione](#)”
43. Vedi “[Quoziente di Moduli](#)”
44. Vedi:
- [Modulo di omologia dei complessi di catene](#)
 - [Funtore da ChR e RMod - di omologia](#)
45. Vedi “[Kernel](#)”
46. Con “ H_n ” si intende l’[n-esimo modulo di omologia](#), mentre f_* è la mappa indotta da f
47. Vedi “[Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)” e “[Kernel](#)”
48. Vedi “[Modulo di omologia dei complessi di catene](#)”
49. \mathbf{Ch}_R è la categoria dei complessi di catene di R -moduli
50. H_n è il [funtore di omologia](#).
51. B_n e Z_n sono definiti in “[Modulo di omologia dei complessi di catene](#)”
52. Vedi “[Kernel](#)”
53. Infatti si ha che
- $$\partial_{n+1} \circ \sigma_n \left(\sum a_i e_i \right) = \partial_{n+1} \left(\sum a_i \tilde{e}_i \right) = \sum a_i \partial_{n+1} (\tilde{e}_i) = \sum a_i e_i.$$
54. Ovvero tutti i simplessi di K possono intersecarsi solo sulle loro facce.
55. I σ_i sono [simplessi](#) $\subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.
56. Vedi “[Somma Diretta](#)”
57. Vedi:
- [Somma Diretta](#)
 - [Somma diretta dell’anello è modulo libero](#)
58. Se $\partial_2(r\mathbf{e}_{012}) = 0$, allora
- $$r\mathbf{e}_{12} - r\mathbf{e}_{02} + r\mathbf{e}_{01} = 0$$
- con $\{\mathbf{e}_{01}, \mathbf{e}_{02}, \mathbf{e}_{12}\}$ [base di \$C_1\(K\)\$](#) : quindi $r = 0$.

59. Si hanno:

- $C_q(K)$ è il Modulo delle catene simpliciali
- ∂_q la mappa di bordo

60. K^1 è l'1-scheletro di K .

61. Vedi "Somma Diretta"

62. Vedi "Kernel" e "Immagine e retroimmagine tramite una funzione"

63. Si ha che $R = \text{Im } \tilde{\partial}_0$ (questo è ovvio), e dunque per il primo teorema di isomorfismo

$$\frac{C_0(K)}{\ker \tilde{\partial}_0} \cong \text{Im } \tilde{\partial}_0$$

64. Vedi:

- Modulo
- Somma Diretta

65. Sono:

- i due complessi di catene simpliciali;
- un complesso di catene relative.

66. Vedi "Somma Diretta".

67. K^n è il n -scheletro di K .

68. Questa cosa non è stata dimostrata.

69. Vedi:

- Categoria-Pl
- Categoria-ChR

70. $\overset{\circ}{A}$ indica la parte interna.

71. Questo è definito come la somma diretta $R^{(\Sigma_q(X))}$, dove $\Sigma_q(X)$ è l'insieme dei simplessi singolari.

72. Gli $S_q(X)$ sono i moduli delle catene singolari, e di ∂_q sono le mappe di bordo.

73. Il modulo $S_q(X)$ è la somma diretta $R^{(\Sigma_q(X))}$, dove $\Sigma_q(X)$ è l'insieme dei simplessi singolari.

74. Con Δ_q si indica il q -simplesso standard.

75. Vedi:

- Quoziente di moduli

- Kernel
- Immagine e retroimmagine tramite una funzione

76. Si ha che:

- i $S_q(X)$ sono i moduli delle catene singolari;
- i ∂_q sono le mappe di bordo.

77. Vedi “Somma Diretta”

78. Vedi:

- Isomorfismo tra R-Moduli
- Somma Diretta

79. Con Δ_q si indica il q -Simplesso Standard.

80. Con \coprod si indica l'unione disgiunta di insiemi.

81. $S_q(X)$ è il modulo delle catene singolari, e $R^{(A)}$ è la somma diretta di A -copie di R .

82. Questo è il morfismo di bordo

83. Dove Δ_q è il q -simplesso standard.

84. $S_q(X)$ è il modulo delle catene singolari, ed è la somma diretta $R^{(\Sigma_q)}$, con base proprio Σ_q .

85. I ∂_q sono i morfismi di bordo.

86. $S_q(X)$ è il modulo delle q -catene singolari: siccome $A \subseteq X$, allora $\Sigma_q(A) \subseteq \Sigma_q(X)$, e quindi

$$R^{(\Sigma_q(A))} = S_q(A) \subseteq S_q(X) = R^{(\Sigma_q(X))}$$

sono sottomoduli.

87. $\Sigma_q(X)$ è l'insieme dei simplessi singolari su X , ed è una base della somma diretta $S_q(X) := R^{(\Sigma_q)}$.

88. $S_q(A)$ è il modulo delle q -catene singolari di A , e ∂_q sono le mappe di bordo.

89. Le diverse omologie diventano l'omologia signolare e l'omologia singolare relativa, mentre i morfismi $\iota_{n,*}, \pi_{n,*}$ sono ricavati tramite il funtore di omologia.

90. Questo è il funtore $\#$ dalla categoria **Top** alla categoria **Ch_R**.

91. Vedi:

- C_\bullet : Complesso di catene simpliciali
- $H_n(K)$: Omologia Simpliciale

92. Questa è la [successione esatta dei complessi di catene](#) di una coppia topologica
93. La commutatività del diagramma è data da “[Morfismo tra coppie topologiche induce diagramma commutativo in omologia](#)”. Vedi anche:
- [Omologia Singolare](#)
 - [Omologia Singolare Relativa](#)
94. Ottenute applicando il [funtore di omologia singolare](#).
95. \ker è il [Kernel](#).
96. U è il [funtore](#) dimenticante da spazi topologici puntati a spazi topologici $\mathbf{Top}^* \rightarrow \mathbf{Top}$
97. Con $\mathcal{S}_\bullet^+(X_1, X_2)$ si indica il [Complesso di catene singolare somma](#).
98. Vedi il [quoquoziente di complessi di catene](#)
99. Vedi l'[intersezione di complessi di catene](#)
100. La mappa sd_\bullet è la [mappa di suddivisione](#), applicata m volte.
101. Vedi la [retroimmagine di funzioni](#).
102. ∂ è il [morfismo di bordo per simplessi singolari](#).
103. Forse bisogna richiedere che il [sottogruppo commutatore](#) $[G, G]$ sia contenuto nel [kernel](#):
- $$[G, G] \subseteq \ker \varphi.$$
104. “ \oplus ” indica la [somma diretta](#)
105. Vedi “[Somma Diretta](#)”
106. Con e_i si indicano i [punti base](#) di Δ_q
107. Utilizzando la [nomenclatura per i moduli di omologia](#)
108. Questa è la [somma diretta](#).
109. Queste esistono poiché $\Sigma_q(\Delta_q)$ è [base](#) di $S_q(\Delta_q)$.
110. Vedi “[Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)” e “[Elemento Massimo](#)”.
111. Con e_i si indicano i [punti base](#) di Δ_q
112. Con sd_q^m si indicano m [composizioni](#) della mappa sd_q .
113. Vedi la [somma diretta di morfismi](#).

114. Vedi:

- Somma di complessi di catene
- Somma diretta di complessi di catene
- Intersezione di complessi di catene

115. Vedi la somma diretta di moduli.

116. Qui \sim indica due funzioni omotope.

117. Vedi "Immagine e retroimmagine tramite una funzione"

118. Vedi somma e somma diretta di complessi di catene.

119. Vedi la somma diretta di morfismi

120. **NOTA BENE:** questa mappa altro non è che il cammino standard tra $-p$ e $f(p)$ in \mathbb{R}^{n+1} , rinormalizzato per stare dentro S^n .

121. Con " \models " si intende la Soddisfazione di una formula

122. Vedi: Stringa e Insieme delle funzioni

123. Vedi Classe Unione Generalizzata MK

124. Infatti se $y \in \bigcup \alpha$ allora esiste $\eta \in \alpha$ tale che $y \in \eta$. Ma $\eta \in \alpha \subseteq S(\alpha)$ e dunque $y \in S(\alpha)$ e quindi y in $\bigcup S(\alpha)$.

125. Vedi "Funzione iniettiva"

126. Vedi Sottoclasse MK e Order Type di una classe ben ordinata

127. Vedi "Insieme delle funzioni"

128. Vedi "Equipotenza dell'insieme delle sequenze finite"

129. Vedi:

- Prodotto cartesiano
- Classi equipotenti MK (\asymp)
- Insieme dei numeri naturali
- Insieme delle funzioni
- Classe si inietta (\precsim)
- Insieme delle sequenze finite

130. Intuitivamente, viene prima dichiarata la lunghezza della stringa (tramite una stringa nella forma $\langle x_0, \dots, x_0, x_1 \rangle$), e poi viene presentata la stringa. Questo consente di tornare indietro senza nessun problema.

131. Vedi Sottoclasse MK e Range di una funzione

132. Vedi “[Potenza di una classe](#)”

133. Vedi “[Unione generalizzata](#)”

134. Vedi

- [Ordinale Omega](#)
- [Prodotto cartesiano](#)
- [Successore di un insieme](#)

135. Per l’Axiom of Power set, vedi “[Prodotto cartesiano](#)”

136. Infatti, se $p : m \rightarrow A$ allora $S(n) \in \text{dom } p$ se e solo se $S(n) < m$. Ma $n < S(n) < m$ e dunque $n \in \text{dom } p$, e dunque $(n, p(n)) \in G$. Siccome è funzione, $G(n) = p(n)$

137. Infatti, sia $y \in \text{TC}(X)$. Allora

$$y \in x_0 \in x_1 \in \dots \in x_n \in X \subseteq Y$$

e dunque $x_n \in Y$. Pertanto

$$y \in x_0 \in x_1 \in \dots \in x_n \in Y$$

e per transitività $y \in Y$.

138. Vedi:

- [Coppia ordinata](#)
- [Prodotto cartesiano](#)
- [S\(\$n\$ \): Successore di un numero naturale](#) e [Insieme dei numeri naturali](#)
- [S\(\$n\$ \) \$X\$: Insieme delle funzioni](#)

139. Vedi “[Sottoclasse MK](#)”

140. Vedi “[Prodotto cartesiano](#)”

141. Con “ $|$ ” si intende la [restrizione](#).

142. Vedi “[Unione generalizzata](#)”

143. Vedi “[Sottrazione insiemistica](#)” e “[Insieme vuoto](#)”

144. Vedi:

- [Successore di un insieme](#)
- [Unione](#)

145. Vedi: “[Range di una funzione](#)”

146. Vedi: “[Classe degli ordinali](#)”

147. Vedi: “[Infimum](#)”

148. vedi [Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione](#)

149. Vedi “[Classe degli ordinali](#)”

150. Vedi

- [Successore di un insieme](#) e [Ordinale Successore](#)
- [Ordinale Limite](#)
- [Supremum](#)

151. Si veda:

- [Unione generalizzata](#)
- [Ordinali](#)

152. $\varphi(x)$ indica l'[insieme delle parti](#), e S il [successore](#).

153. Vedi “[Supremum](#)” e “[Unione generalizzata](#)”

154. V è la [classe totale](#).

155. Vedi:

- [Unione generalizzata](#)
- [Insieme delle parti per MK](#)

156. S è il [successore](#).

157. $|\cdot|$ indica la [cardinalità](#)

158. Vedi “[Ordinale Omega](#)”

159. \asymp indica due [insiemi in biiezione](#).

160. Con “ \models ” si intende la [Conseguenza logica](#)

161. Vedi:

- [Successore di un insieme](#)

162. Infatti, se per ogni $y R \bar{x}$ si avesse $\varphi(y)$, per la (1) si avrebbe $\varphi(\bar{x})$, assurdo.

163. Vedi “[Elevamento a potenza di Cardinali](#)”

164. Vedi:

- [Ordinali](#)
- [Cardinali](#)
- [Ordinale omega](#),
- [Elevamento a potenza di Cardinali](#),
- [Infimum e supremum](#)

- Supremum di un insieme di cardinali è un cardinale,
- Ordinale limite
- Aritmetica per gli ordinali

165. Vedi:

- Funzione Aleph
- Elevamento a potenza di cardinali

166. Vedi “Cardinalità dei reali”

167. Vedi:

- Cardinalità

168. Vedi:

- Insieme delle parti per MK
- “ \precsim ”: Classe si inietta
- “ \asymp ”: Classi equipotenti MK

169. Vedi:

- Ordinali
- Aritmetica per gli ordinali
- Funzione Aleph
- Elevamento a potenza di cardinali

170. Vedi:

- Cardinalità

171. Vedi:

- Insieme delle parti per MK
- “ \precsim ”: Classe si inietta
- “ \asymp ”: Classi equipotenti MK

172. Vedi “Insieme delle parti per MK”

173. Con “ \precsim ” si denota l'esistenza di una funzione iniettiva.

174. Vedi:

- A si inietta in B sse B si surietta su A (AC)

175. Vedi:

- AC sse ogni insieme ben ordinabile

176. Vedi:

- [Ordinali](#)
- [Insieme delle parti per MK](#)
- [Classe ben ordinabile MK](#)

177. Vedi “[Axiom of Choice - Insieme](#)”

178. Vedi:

- [MaxHaus](#)
- [Zorn Lemma](#)
- [Weak Zorn Lemma](#)

cfr. 20250210104809-insiemi_ben_ordinabile_implica_maxhaus_che_implica_zorn_che_implica_weak_zorn.org.

179. Vedi “[Ordinali](#)”

180. $\text{AC}(X)$ è una [forma debole di AC](#)

181. Con “ \prec ” si intende la [relazione di equipotenza](#)

182. Con si intende il [Numero di Hartogs](#).

183. Bisogna dimostrare che sia iniettiva

184. wZORN($\wp(X \times X)$) non richiede che l'ordine sia totale, e pertanto si può applicare a \trianglelefteq . Inoltre, ovviamente, un elemento massimale di $\wp(X \times X)$ rispetto a \trianglelefteq è necessariamente in \mathcal{P} , poiché l'ordine è definito solo lì. Bisogna dimostrare che ogni insieme superiormente diretto di \mathcal{P} abbia un estremo superiore. Se $R \subseteq \mathcal{P}$ allora $\bigcup R$ è l'estremo superiore cercato.

185. Infatti \overline{R} è un buon ordine su un sottoinsieme di X . Se inoltre per ogni $x \in X$ esiste $y \in X$ tale che $(x, y) \in R$ oppure $(y, x) \in R$ si ha che questo sia un buon ordine su X poiché è [totale](#).

186. Per dimostrare che $S \in \mathcal{P}$ bisogna dimostrare che S sia [left-narrow](#) e [well-founded](#) e che sia [totale](#) su $\text{fld}(S) \subseteq X$.

- Sia $x \in \text{fld}(S)$. Allora, se $x \neq a$

$$\{y \in X \mid (y, x) \in S\} = \{y \in X \mid (y, x) \in \overline{R}\}$$

che è un insieme poiché \overline{R} è left-narrow siccome buon ordine. Se invece $x = a$ allora

$$\{y \in X \mid (y, x) \in S\} = \text{fld}(\overline{R}) \cup \{a\}$$

che è un insieme poiché $\text{fld}(\overline{R})$ è un insieme e per l'Axiom of Union (vedi [Classe Unione Generalizzata](#))

- Osserviamo che $\text{fld}(S) = \text{fld}(\overline{R}) \cup \{a\}$. Sia dunque $Y \subseteq \text{fld}(S)$. Sia \bar{y} l'elemento \overline{R} -minimale di $Y \setminus \{a\}$ (dunque $\bar{y} \neq a$), e sia $y \in Y$, $y \neq \bar{y}$. Si deve dimostrare che $(y, \bar{y}) \notin S$. Supponiamo per assurdo che $(y, \bar{y}) \in S$. Siccome $\bar{y} \neq a$, si deve avere $(y, \bar{y}) \in \overline{R}$. Ma questo è assurdo. Infatti, se $y = a$ allora $(a, \bar{y}) \notin \overline{R}$ poiché $a \notin \text{fld}(\overline{R})$. Se invece $y \neq a$ allora $(y, \bar{y}) \notin \overline{R}$ per \overline{R} -minimalità di \bar{y} rispetto a $Y \setminus \{a\}$.

Inoltre, sicuramente $\overline{R} = S \cap \text{fld}(\overline{R}) \times \text{fld}(\overline{R})$ in quanto, siccome $a \notin \text{fld}(\overline{R})$. Si ha anche che $\text{fld}(\overline{R}) = \text{pred}(a; S)$, dove

$$\text{pred}(a; S) = \{y \in X \mid (y, a) \in S\}$$

Infatti, se $y_0 \in \text{pred}(a; S)$ allora $(y_0, a) \in S$. Siccome $a \notin \text{fld}(\bar{R})$, si che che

$$(y_0, a) \in \{(y, a) \mid y \in \text{fld}(\bar{R})\} \cup \{(a, a)\}$$

Allora o $y_0 \in \text{fld}(\bar{R})$ oppure $y_0 = a$. ???? Se invece $y_0 \in \text{fld}(\bar{R})$ allora $(y_0, a) \in S$ e dunque $(y_0, a) \in \text{pred}(a; S)$.

187. Infatti la disuguaglianza [sussiste sse](#)

$$\bigtimes_{i \in I} \lambda_i \preceq \bigcup_{i \in I} (\{i\} \times \kappa_i)$$

e vale [AC implica A si inietta in B sse B si surietta su A](#)

188. Vedi [Proprietà della cardinalità](#), [Prodotto di cardinali](#). Vale in particolare perché $I \asymp |I|$ (vedi [Classi equipotenti MK](#)) e dunque

$$|I| \times \sup_{i \in I} \kappa \asymp I \times \sup_{i \in I}$$

Vedi anche [Proprietà degli ordinali](#)

189. Vedi “[Insieme delle parti per MK](#)”

190. Vedi:

- [Elevamento a potenza di cardinali](#)

191. Vedi: [Proprietà di prodotto e somma generalizzata di cardinali](#)

192. Vedi:

- “ \precsim ”: [Classe si inietta](#)
- “ \rightarrow ”: [Classe si surietta](#)

193. vedi [Variabile libera di una formula](#)

194. vedi [Enunciato vero in un modello del prim'ordine](#)

195. Infatti, se la struttura è infinita allora esiste un numero arbitrariamente grande di elementi a due a due distinti.

196. Ovvero tale che $\text{dom } k$ sia un insieme finito.

197. La notazione $\{\wedge\} \Delta$ è presa da “[Chiusura di un insieme di formule rispetto a connettivi logici](#)”.

198. È ovvio che J sia ricorsiva primitiva, [sicché Quoz è una funzione ricorsiva primitiva](#). Ora, si consideri a titolo esplicativo $(\cdot)_0$. $(\xi)_0 = x$ se e solo se $J(x, (\xi)_1) = \xi$, se e solo se $\exists y J(x, y) = \xi$. Infatti: (\Rightarrow) ovvio; (\Leftarrow) se esiste y_0 tale che $J(x, y_0) = \xi$, allora per definizione di funzione inversa

$$J(x, y_0) = \xi = J((\xi)_0, (\xi)_1)$$

Poiché J è biiettiva (quindi iniettiva) allora $x = (\xi)_0$. Pertanto

$$(\xi)_0 = \mu_{x \leq \xi} (\mu_{y \leq \xi} (J(x, y) = \xi)).$$

e quindi è ricorsiva primitiva, poiché questa classe di funzioni è [chiusa per minimizzazioni limitate](#).

199. Vedi [Schema di minimizzazione](#)

200. Questo si può sempre fare, vedi l'osservazione di [Spazio topologico metrizzabile](#)

201. Sarebbe da dimostrare questa continuità

202. Infatti $d(\cdot, F) : Y \rightarrow (0, 1]$ è continua e $\frac{1}{\cdot} : (0, 1] \rightarrow [1, +\infty)$ è continua, e pertanto

$$\frac{1}{d(\cdot, F)} : Y \rightarrow [1, +\infty)$$

è continua e dunque, per ogni $x \in Y$ e $\varepsilon > 0$ esiste $\varepsilon' > 0$ tale che per ogni $y \in Y \cap B_d(x, \varepsilon')$ si ha

$$\left| \frac{1}{d(x, F)} - \frac{1}{d(y, F)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Senza perdita di generalità si può porre $\varepsilon' < \frac{\varepsilon}{2}$.

203. Infatti d' -Cauchy implica d -Cauchy, ma (X, d) è uno [spazio metrico completo](#), e quindi (per definizione) ogni successione di Cauchy è convergente.

204. Dove se $B \neq \emptyset$:

$$\text{diam}(B) := \{\sup d'(x, y) \mid x, y \in B \in \mathbb{R}\}$$

mentre $\text{diam}(\emptyset) = 0$.

205. Successione delle distanze tende a zero implica successioni hanno lo stesso limite

206. Id è la [funzione identità](#)

207. Vedi anche “[Funzione identità](#)”

208. Vedi “[Anello delle funzioni Cinfinito da una varietà ai reali](#)”

209. Vedi:

- [Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)

210. X è dotato della [topologia di Zariski](#).

211. Vedi “[Funzione localmente costante](#)”

212. Vedi “[Funtore](#)”

213. Id_U è la [Funzione identità](#).

214. Vedi:

- Composizione di morfismi di prefasci
- Morfismo identità tra prefasci

215. Vedi “[Forma differenziale](#)”

216. Si trova in “[Esempi di Fasci](#)”

217. Vedi “[Germi di funzioni](#)”
218. Infatti [le spighe hanno struttura di gruppo](#)
219. Il “ \coprod ” è l’[unione disgiunta](#), mentre “ \mathcal{F}_p ” è la [spiga di \$\mathcal{F}\$ in \$p\$](#) .
220. “[f]_q” è il [germe](#) di f in q .
221. **Esercizio:** verificare che \mathcal{F}^+ è un fascio.
222. Vedi “[Kernel](#)”
223. Infatti i morfismi di restrizione sono [morfismi di gruppo](#).
224. Vedi “[Kernel](#)”
225. Vedi “[Range di una funzione](#)”
226. Vedi anche “[Fascio associato ad un sottoprefascio](#)”
227. Vedi:
- [Fascio immagine](#)
 - [Fascio nucleo](#)
228. ??
229. [Classe delle Classi-Funzioni](#) e [Ordinale omega](#)
230. [Classe delle Classi-Funzioni](#) e [Ordinale omega](#)
231. [Successione](#)
232. Vedi [Corpo di un albero](#) e [Sottospazio topologico](#)
233. Vedi “[Sottrazione di classi MK](#)” e “[Unione di classi MK](#)”
234. Vedi Prop. 1.5.9 di LMR “Notes on Descriptive Set Theory”.
235. Esempio 1.5.2 (2) di LMR “Notes on descriptive set theory”
236. Notiamo che è necessario che le g_i siano totali, poiché le funzioni caratteristiche di un insieme devono essere totali: se le g_i non fossero totali, allora $\chi_P(g_1, \dots, g_k)$ non sarebbe una funzione totale, e pertanto non potrebbe rappresentare la funzione caratteristica di un insieme.
237. Vedi gli [Esempi di funzioni primitive ricorsive](#).
238. Infatti possono esistere degli \vec{x} tali che per nessun $y \in \mathbb{N}$ si abbia $P(\vec{x}, y)$.
239. Vedi “[Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione](#)”

240. Vedi "Proprietà di chiusura degli insiemi ricorsivi" e "Biiezione canonica tra \mathbb{N} e prodotti cartesiani di \mathbb{N} "
241. Vedi "Dominio, Range e Campo di una Classe Relazione"
242. Vedi "Sottrazione insiemistica"
243. L'ipotesi di totalità della funzione è dovuta al fatto che se f non fosse totale, allora nella dimostrazione del punto 1. non si sarebbe definita una funzione caratteristica, poiché tutte le funzioni caratteristiche sono totali.
244. Si noti che $\varphi(y)$ è logicamente equivalente ad una formula Π_1
245. Per costruzione, siccome $\varphi(y)$ è Π_1 , allora anche σ_G è Π_1 .
246. Vedi
 - Cardinalità
 - Prodotto cartesiano
 - Unione disgiunta
247. Vedi
 - Massimo e minimo
248. Con ${}^\kappa\lambda$ si intende l'insieme delle funzioni da κ a λ .
249. Vedi anche
 - Automorfismo di una struttura del prim'ordine.
250. Vedi anche
 - Automorfismo di una struttura del prim'ordine.
251. Vedi
 - Insieme delle parti per MK
 - Classi equipotenti MK
252. Vedi
 - Cardinal exponentiation
 - Insieme delle funzioni
253. Approssima in senso L^2 (ovvero minimizza la norma L^2 della differenza).
254. Vedi:
 - Spazio delle matrici
 - Matrice Trasposta
 - Gradiente di una funzione

255. Vedi “[Matrice Trasposta](#)”
256. Vedi: “[Derivata parziale](#)”
257. Con I_n si indica il cubo

$$I_n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] = [0, 1]^n.$$
Si vedano “[Spazi Lp](#)”
258. Vedi “[Limite \(Analisi Matematica\)](#)”
259. Vedi “[Sottrazione insiemistica](#)”
260. \mathcal{S}_c indica una [curva di livello](#).
261. $B_\varepsilon(x^*)$ indica la [palla](#) aperta di raggio ε centrata in x^* .
262. Vedi “[Funzione di classe Ck](#)”
263. Vedi “[Gradiente di una funzione](#)”
264. Vedi “[Derivata direzionale](#)”
265. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”
266. Vedi “[Funzione identità](#)”
267. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”
268. Tale massimo esiste per il [Teorema di Weierstrass](#)
269. Vedi “[Spazi Lp](#)”
270. Vedi “[Proprietà vera quasi ovunque](#)”
271. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”
272. Questa è una [Funzione costante a tratti](#)
273. Con χ_A si intende la [funzione caratteristica](#) di A .
274. Con $\delta(x)$ si intende la [Delta di Dirac](#), e con $\delta_a(x)$ si intende la Delta di Dirac centrata in a .
275. δ è la [Delta di Dirac](#)
276. Vedi [Classe C di una funzione](#)
277. Perché $[a, b]$ è compatto per il [Teorema di Heine-Borel](#).
278. Vedi “[Topologia di Sottospazio](#)”

279. Vedi “[Gradiente di una funzione](#)”

280. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

281. Con I_n si indica il cubo

$$I_n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] = [0, 1]^n.$$

Si vedano “[Spazi Lp](#)”

282. Dove $H(x)$ è la [Funzione di Heaviside](#)

283. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

284. Vedi la [funzione ReLU](#)

285. Dove $\sigma(x)$ è la [Funzione Logistica](#).

286. δ è la [Delta di Dirac](#)

287. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

288. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

289. Questo si vede facilmente seguendo l’Esempio di “[Algebra di funzioni reali](#)”

290. Vedi “[Spazio delle funzioni misurabili come spazio metrico](#)”

291. Vedi “[Spazio delle funzioni misurabili come spazio metrico](#)”

292. Sia $I_n := [0, 1]^n$. Vedi

- “[Classe C di una funzione](#)” e “[One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni continue sul cubo](#)”.
- Si consideri $C(I_n)$ dotato della [topologia indotta dalla metrica](#)

$$d(f, g) := \sup_{x \in I_n} |f(x) - g(x)| = \max_{x \in I_n} |f(x) - g(x)|.$$

- “[Spazi Lp](#)” e
 - “[One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni L1 sul cubo](#)”
 - “[One Hidden Layer Discriminatory Network impara funzioni L2 sul cubo](#)”

293. Vedi “[Spazi Lp](#)”

294. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

295. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

296. Con I_n si indica il cubo

$$I_n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] = [0, 1]^n.$$

Si vedano “[Spazi Lp](#)”

297. Con I_n si indica il cubo

$$I_n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] = [0, 1]^n.$$

Si vedano “[Spazi L_p](#)”

298. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”. Si considera $C(\mathbb{R}^n)$ dotato della [topologia indotta dalla metrica](#)

$$d(f, g) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|.$$

299. Si considera \mathcal{M}^n dotato della [topologia indotta dalla metrica indotta da \$\mu\$](#) .

300. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

301. Vedi “[Spazi L_p](#)”

302. Vedi “[Classe C di una funzione](#)”

303. La funzione $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è la [Funzione di Heaviside](#):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

304. Vedi “[Valore atteso](#)”

305. Ovvero per ogni $i \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{x}_i, y_i) \in D$.

306. Vedi “[Probabilità condizionata](#)”

307. Vedi [Empirical MSE](#)

308. AGGIUNGERE RIFERIMENTO PUNTUALE

309. Con δ_c si indica la [curva di livello](#).

310. Vedi “[Valore atteso](#)”

311. Vedi “[Spazi L_p](#)”

312. Si indica con $\text{Bor}(\mathbb{R})$ l’insieme dei [Boreliani](#) di \mathbb{R} .

313. Con $\sigma(X)$ si intende la [σ-algebra generata da X](#).

314. [Ordinale omega1](#)

315. per [definizione ω1](#) è il numero di Hartogs di ω : $\omega_1 = \omega^+$; per costruzione, quindi, esiste una suriezione $\wp(\omega \times \omega) \rightarrowtail \omega_1$:

$$\mathbb{R} \asymp \wp(\omega) \asymp \wp(\omega \times \omega) \rightarrowtail \omega_1$$

Si veda “[Biiezione canonica tra N e prodotti cartesiani di N](#)” per una scrittura esplicita della funzione: $\omega \asymp \omega \times \omega$.

316. Con “ \precsim ” si indica l’esistenza di una [funzione iniettiva](#).

317. J è una qualsiasi biiezione primitiva ricorsiva $J : \omega^2 \rightarrow \omega$, con inverse ricorsive primitive.

318. <https://webhomes.maths.ed.ac.uk/~viranick/papers/AtiyahMacdonald.pdf>

319. Infatti, siano $f, g \in A[X] \setminus \{0_A\}$

$$\begin{aligned}f &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \\g &= b_m X^m + b_{m-1} X^{m-1} + \cdots + b_0\end{aligned}$$

con $a_i, b_j \in A$ e $a_n, b_m \neq 0$. Se $fg = 0$ allora

$$0 = fg = a_n b_m X^{n+m} + \dots$$

e dunque $a_n b_m = 0$; poiché A è un dominio, allora $a_n = 0$ oppure $b_m = 0$. Assurdo.

320. Con (a, b) si indica il Massimo Comun Divisore tra a e b .

321. Con χ_A si indica la funzione caratteristica di A :

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

322. Questa è l'inversa della proprietà di assorbimento

323. Questo è massimale PERCHÉ ?????

324. Ovvero per ogni i, j si ha $\mathcal{A}_i + \mathcal{A}_j = A$.

325. Ovvero $M/N = \{m + N \mid m \in M\}$.

326. Con δ_{ij} si indica la Delta di Kronecher.

327. Il radicale di Jacobson

328. Se $M = A^{(I)}$ allora ogni funzione $F : I \rightarrow N$ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\tilde{F} : M \rightarrow N$ per linearità.

329. Infatti $\mathcal{A}^e = (1)$ sse $1 \in \mathcal{A}^{ec}$ sse $s \in \mathcal{A}$ per qualche $s \in S$.

330. Esercizio: verificare la buona definizione.

331. Bisogna verificare

$$\begin{aligned}\varphi_{ss} &= \text{Id} \\ \varphi_{tv} \circ \varphi_{st} &= \varphi_{sv} \quad s \geq t \geq v.\end{aligned}$$

332. Altrimenti $f \in \bigcap \mathcal{P}_i = (0)$ (poiché \mathcal{P}_i primi) e dunque $f = 0$, assurdo.

333. Infatti, se $r + I = r' + I$ allora $r - r' \in I \subseteq (M)$ e pertanto per ogni $m \in M$ si ha $(r - r')m = 0$, ovvero $rm = rm'$.

334. Se per assurdo M/N_1 non fosse semplice, allora esiste $N_1 \subseteq L \subset M$ tale che L/N_1 sottomodulo proprio di M/N_1 . Pertanto $L = N_1$ per massimalità.

335. ?? non siamo sicuri di questo numero

336. $(X_{i_1}^{a_1}, \dots, X_{i_l}^{a_l})$ si dice ideale monomiale generato da potenze pure.

337. B ha una naturale struttura di A -modulo indotta da f :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B : \quad a \cdot b := f(a) \cdot b$$

338. Il radicale di Jacobson è l'intersezione di tutti gli ideali massimali: $x \in \text{Jac}(A)$ sse

$$\forall y \in A \quad 1 - xy \in A^\times.$$

339. Questa esiste: spiegare bene il motivo.

340. Il polinomio $m_{\psi, V}$ si chiama polinomio minimo di ψ su V . Scegliendolo monico, è unico.

341. Vedi l'[immagine](#)

342. Per la corrispondenza tra ideali B/q_0 e ideali di B che contengono q_0 .

343. Da Controllare

344. Capire meglio ?

345. Vedi <https://www.desmos.com/3d/bwp5k581ix>

346. Infatti per angoli acuti α, β , si ha

$$\alpha = \beta \iff \tan(\alpha) = \tan(\beta).$$

347. Essere debolmente saturo significa essere universale nella categoria di modelli e morfismi ricchi.

348. Ovvero per ogni $f \in \text{Aut}(\mathcal{U}/A)$, $f[\mathcal{D}] = \mathcal{D}$.

349. Ovvero definibile da $p(x) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{U})$ con insieme di parametri piccolo: $\mathcal{D} = p(\mathcal{U}^x)$.

350. $k : M \xrightarrow{\Delta} N$ mappa parziale si dice Δ -morfismo se per ogni $a \in \text{dom}(k)^x$ e per ogni $\varphi(x) \in \Delta$

$$M \models \varphi(a) \rightarrow N \models \varphi(ka)$$

351. Questa scrittura significa che per ogni $N \models T$ si ha $q(N^x) \subseteq \varphi(N^x)$

352. Se $b = \langle b_i \mid i < |x| \rangle$, $c = \langle c_i \mid i < |x| \rangle$

$$\{\langle b, c \rangle\} := \{\langle b_i, c_i \rangle \mid i < |x|\}.$$

353. Per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}$ esiste $\psi(x) \in \mathcal{L}$ senza quantificatori tale che

$$T \vdash \forall x \varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x)$$

354. Per ogni $\varphi(x) \in \{\exists, \forall, \wedge, \vee\}\Delta$ esiste $\psi(x) \in \{\wedge, \vee\}\Delta$ tale che

$$T \vdash \forall x \varphi(x) \longleftrightarrow \psi(x)$$

355. Si definisce

$$\Delta\text{-Diag}(M) := \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \in \Delta, a \in M^x\}$$

356. Ovvero esiste $c \in M$ tale che $M, c \models p(x)$
357. Quando è chiaro dal contesto, non si dice “non isolato da A ”, ma semplicemente “non isolato”.
358. Ad ogni passo $q_n(y)$ è un insieme finito di formule, quindi posso trattarlo come una formula (la congiunzione di tutti i suoi elementi).
359. Vedi per una dimostrazione.
360. Questo è equivalente a richiedere che $f[M] \subseteq N$.
361. Con questo si intende $A \cup \text{rng}(a)$.
362. Passa per mappe elementari, vedi i suoi appunti
363. Questa nozione è non standard: significa che due modelli di T che contengono A sono isomorfi tramite un isomorfismo che fissa A .
364. $\mathcal{L}_x(A) \subseteq \mathcal{L}(A)$ sono le formule con variabile x .
365. Ovvero per ogni $\varphi(x) \in \mathcal{L}(M)$, $|x| = 1$, $\varphi(A)$ finito o $\neg\varphi(A)$ finito.
366. $p(x) \in S(\Delta)$ sse $p(x) \subseteq \Delta$ consistente e per ogni $\varphi(x) \in \Delta$, se $p(x) \cup \{\varphi(x)\}$ consistente allora $\varphi(x) \in p(x)$.
367. Se per assurdo $q(x)$ non fosse consistente, allora $p_s(x) \rightarrow \bigvee_{i=1}^n \neg\psi_i(x)$ ma ogni $\psi_i(x)$ ha $\leq \omega$ estensioni, quindi assurdo.
368. Ovvero (una delle due seguenti condizioni equivalenti):
- esiste $a \models \varphi(y)$ e $\text{tp}(a/A)$ è isolato
 - è conseguenza di una $\psi(y) \in \mathcal{L}(A)$ completa su A .
369. Si noti che $\mathcal{L}_{x,z}$ è l'insieme delle \mathcal{L} -formule nelle variabili x, z
370. Questa è la teoria dei campi algebricamente chiusi di caratteristica p .
371. Ovvero chiusura rispetto a tutti i connettivi tranne i quantificatori.
372. Ovvero tenendo soltanto le formule con parametri in $A \cup \{a, b\}$.
373. Un progressione aritmetica è una sequenza finita della forma
- $$a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb.$$
374. Ovvero il tipo è completo per $|x| = 1$.
375. Questa è una progressione aritmetica
376. Ovvero se $a \cdot b \in C$ allora $a \in C$ e $b \in C$.

377. Ovvero $\mathbb{C} * N \subseteq N$.

378. è esternamente definibile da ψ se vale una delle seguenti affermazioni equivalenti:

1. esiste ${}^* \succ, {}^* a \in {}^*$ tale che

$$= \psi({}^* a, {}^* z) \cap {}^z$$

2. esiste $p(x) \in S()$ tale che

$$=_{p,\psi} = \{b \in {}^z \mid \psi(x; b) \in p\}$$

379. NOTA: la chiusura algebrica non è necessariamente un modello.

380. Come per le formule??

381. Ricordiamo che

$${}_{p,\varphi} = \{b \in {}^z \mid \varphi(x, b) \in p\}$$

è insieme definibile.

382. Ricordiamo che $p(x)$ è Lascar invariante su A se ${}_{p,\varphi}$ è invariante su ogni modello $M \supseteq A$.

383. $q(x)$ è un tipo completo a parametri in $S(A)$.

384. Con φ^{op} intendiamo

$$\varphi^{\text{op}}(z; x) = \varphi(x; z)$$

385. D'ora in avanti si scriverà $\neg D := X \setminus D$

386. Ovvero, come per G -thick, ogni formula in $\{\wedge\} p$ è G -wide.

387. $S(\mathbb{Z})$ è l'insieme dei tipi finitamente consistenti in $\text{a parametri in } \mathbb{Z}$.

388. Ovvero senza negazioni, solo \wedge e \vee .

389. Basta $q(x) \in S(A)$.

390. Vedi “[Insieme degli automorfismi di una struttura del prim’ordine](#)”

391. Questa scrittura significa che per ogni $N \models T$ si ha $q(N^x) \subseteq \varphi(N^x)$

392. Se $b = \langle b_i \mid i < |x| \rangle$, $c = \langle c_i \mid i < |x| \rangle$

$$\{\langle b, c \rangle\} := \{\langle b_i, c_i \rangle \mid i < |x|\}.$$

393. Con $M^{<\omega}$ si intende l'[Insieme delle sequenze finite](#).

394. p è il [Δ-tipo di \$a, b\$](#) in M

395. DA FINIRE

396. Siccome $\{\exists, \wedge\}\Delta = \{\wedge\} \{\exists\}\Delta$ è sufficiente applicare l'[osservazione che segue la definizione di Δ-morfismo](#).

397. Il verso $cAb \implies (c/A) = (b/A)$ è ovvio, dal momento che $(b/A) = p(x)$, dove $p(x) = (b/A)$. Viceversa WLOG si supponga per assurdo che vi sia $\varphi(x) \in (b/A)$ tale che $\varphi(x) \notin (c/A)$. Allora non vale $\varphi(c)$ e quindi $c \notin (b/A)$. Assurdo poiché $c \in (c/A)$.

398. Oxtoby, John C. - *Measure and category*. ISBN: 0-387-90508-1

399. Questo è l'[insieme definito da \$\varphi\$ in](#)

400. Con questa notazione $(\{\wedge, \vee, \neg\}\Delta)$ si indica la [chiusura di \$\Delta\$](#) rispetto a $\{\wedge, \vee, \neg\}$

401. Vedi anche “[Gruppo degli automorfismi di una struttura del prim'ordine](#)”

402. Ovvero tenendo soltanto le formule con parametri in $A \cup \{a, b\}$.

403. Ovvero per ogni $\varphi(x)$ congiunzione finita di formule di $p(x)$:

$$\varphi(x) \cap M^x \neq \emptyset.$$

404. Con $S()$ si intende l'insieme dei tipi globali (notazione propria del [Modello MOSTRO](#))

405. La relazione è la relazione di indipendenza; vedi “[Tuple indipendenti rispetto ad un modello \(Monster Model\)](#)”

406. La relazione A è quella di [equivalenza sull'insieme di parametri \$A\$](#) .

407. Con $S()$ si intende l'insieme dei tipi globali (notazione propria del [Modello MOSTRO](#))

408. La relazione è la relazione di indipendenza; vedi “[Tuple indipendenti rispetto ad un modello \(Monster Model\)](#)”

409. La relazione A è quella di [equivalenza sull'insieme di parametri \$A\$](#) .

410. Con questa notazione si intende l'[insieme di verità](#) di $\varphi(x; c \upharpoonright i)$ nel modello M .

411. $p(x)$ è l'[estensione di \$q\$ ad un tipo completo](#).

412. Questa definizione è propria del [Modello MOSTRO](#)

413. Se per assurdo $\varphi(x; b_1) \notin p(x)$ allora $\neg\varphi(x; b_1) \in p(x)$ (poiché p tipo completo) e pertanto $\neg\varphi(x; b_1) \in p(x) \upharpoonright A, b_1, b_2$. Quindi vale $\varphi(c; b_1)$ e $\neg\varphi(c; b_1)$. Assurdo.

414. con “ \preceq ” si intende che \mathcal{M} è [Sottostruttura elementare](#) di .

415. Ovvero per ogni $I, J \in \omega^{(n)}$

$$c \upharpoonright IMc \upharpoonright J.$$

416. notazione:

- con “ \models ” si indica la “[Soddisfazione di un tipo](#)”;
- con $_M(c)$ si indica il “[Tipo di un elemento di una struttura](#)”

417. Con “ $S, b \cdot c$ ” si intende “[Tuple elementarmente equivalenti su un insieme di parametri](#)”

418. Infatti sia $\varphi(x; y) \in \mathbb{L}(S)$ tale che $\models \varphi(a' \cdot b, c)$. Allora si ha che

$$\psi(w; z; y) := \varphi(w \cdot z, y) \in \mathbb{L}(S), \quad \models \psi(a', b, c).$$

Pertanto esistono $a'', b' \in S$ tali che $\models \psi(a'', b', c)$, ovvero

$$\models \varphi(a'' \cdot b', c).$$

419. Questo esiste per il [lemma di Zorn](#). Infatti, sia

$$\{\emptyset \neq B_i \subseteq A \mid i < \alpha\}$$

una catena di idempotenti tipo-definibili, $B_i := p_i()$ per qualche [ordinale](#) α . Allora $\bigcap_{i < \alpha} B_i$ è un idempotente tipo-definibile contenuto in ogni B_i e pertanto, per il lemma di Zorn, esiste un elemento \subseteq -minimale.

- $\bigcap_{i < \alpha} B_i$ è tipo definibile, definito da

$$p(x) := \bigcup_{i < \alpha} p_i(x)$$

tipo piccolo.

- $\bigcap_{i < \alpha} B_i \neq \emptyset$ poiché, per saturazione di $p()$, $p() \neq \emptyset$.

- Siano $a_1 \cdot a_2 \in (\bigcap_{i < \alpha} B_i) * (\bigcap_{i < \alpha} B_i)$, $a_1 a_2$. In particolare, per ogni $i < \alpha$:

$$a_1 \in B_i, a_2 \in B_i \implies a_1 \cdot a_2 \in B_i * B_i \subseteq B_i$$

e dunque $a_1 \cdot a_2 \in B_i$ per ogni $i < \alpha$.

420. Se

$$\begin{aligned} p(x) &= xb \subseteq \mathbb{L}(S, b) \\ q(y) &= (b/S) \end{aligned}$$

allora B' è definito da $p(x) \cup q(x \cdot b)$.

421. Vedi “[Formula con parametri](#)” e “[Tipo - Teoria dei Modelli](#)”

422. Vedi “[Soddisfazione di un tipo](#)”

423. <https://ctan.mirror.garr.it/mirrors/ctan/macros/latex/contrib/flashcards/flashcards.pdf>

424. Diremo che il sottosemigruppo è *nice*.

425. Vedi “[Omomorfismo di semigruppi](#)”

426. Con $S_\varphi()$ si intende l’insieme dei φ -tipi globali.

427. Vedi in particolare [Topologia di \$2^X\$](#)

428. con $\varphi(a; z)$ si intende l’insieme definito da $\varphi(a; z)$.

429. Vedi “[Restrizione di un tipo ad un insieme di parametri](#)”

430. Con $S_\psi()$ si intende l’insieme dei ψ -tipi globali.

431. Con $S_\varphi()$ si intende l'insieme dei φ -tipi globali

432. Questo è l'anello delle funzioni C^∞ da una varietà ai reali.

433. Vedi "Kernel di una funzione tra spazi vettoriali" e "Range di una funzione"

434. Vedi "Somma-Diretta"

435. Questo è l'anello delle funzioni C^∞ .

436. Ovviamente \mathbb{R}^n ha una struttura di varietà differenziabile.

437. Dove $T_p N$ è lo spazio tangente a N in p , e $d_F p$ rappresenta il differenziale di F in p .

438. $\Omega^n(N)$ lo spazio delle Forme differenziali su N .

439. \wedge è il Prodotto wedge tra forme differenziali

440. Vedi:

- Range di una funzione
- Kernel di una funzione tra spazi vettoriali

441. Vedi:

- Range di una funzione
- Kernel di una funzione tra spazi vettoriali

442. Nota:

$$H^k(C^\bullet) = \frac{\ker d_C^k}{\text{Im } d_C^{k-1}}$$

Questa è la Coomologia di un complesso di cocatene.

443. Vedi

- Range di una funzione
- Kernel di una funzione tra spazi vettoriali

444. Vedi forme chiuse ed esatte.

445. \mathbb{S}^1 è la sfera 1-dimensionale.

446. Vedi "Coomologia delle unioni disgiunte"

447. Vedi anche "Coomologia di De Rham di R"

448. Vedi "Somma Diretta"

449. Vedi "Caratterizzazione SEC"

450. Vedi “[Restrizione di una forma ad una sottovarietà](#)”

451. d è il [differenziale di una forma](#).

452. Vedi:

- [Pullback di una funzione tra varietà differenziabili](#)
- [Pullback di una funzione tra varietà differenziabili in coomologia](#)

453. Vedi “[Somma Diretta](#)”

454. Vedi:

- [Range di una funzione](#)
- [Sottospazio vettoriale](#)

455. Infatti, se $[\eta] \in H^k(\mathbb{S}^n)_+$, allora

$$[\eta] = a^*[\eta] = [a^*\eta] \implies a^*\eta - \eta = d\beta.$$

Si definisce quindi $\tilde{\eta} := \frac{\eta + a^*\eta}{2}$.

- Dimostro che $[\tilde{\eta}] = [\eta]$:

$$\tilde{\eta} = \frac{\eta + a^*\eta}{2} = \frac{\eta + \eta + d\beta}{2} = \eta + d(\beta/2).$$

- Dimostro che $a^*\tilde{\eta} = \eta$:

$$a^*\tilde{\eta} = \frac{a^*\eta + a^*a^*\eta}{2} = \frac{a^*\eta + \eta}{2} = \tilde{\eta}.$$

Dunque $[\tilde{\eta}] = [\eta]$ e $a^*\tilde{\eta} = \tilde{\eta}$.

456. Vedi “[Coomologia delle sfere](#)”

457. Vedi “[Funzione di classe Cinfinito](#)”

458. Infatti l'integrale della forma volume è sempre positivo.

459. Vedi “[Base di uno spazio vettoriale](#)”

460. Vedi anche “[Gruppo di Coomologia di De Rham](#)”

461. Vedi “[Gruppo di Coomologia di De Rham](#)”

462. Infatti l'integrale di una forma volume è positivo.

463. Vedi “[Integrale di forme su sottovarietà differenziabile](#)”

464. Vedi [Proprietà del pullback di una funzione tra varietà differenziabili](#)

465. All quantification is bounded

466. Vedi “[Insieme definito da una formula](#)”.

467. Vedi anche “[Coomologia di De Rham come algebra graduata](#)”

468. Vedi anche “[Forma differenziale in un punto](#)”

469. Vedi “[Somma Diretta](#)”

470. Vedi anche “[Successione Esatta di Complessi di Cocatene](#)”

471. Vedi “[Somma Diretta](#)”

472. Vedi “[Prodotto wedge tra forme differenziali](#)”

473. Vedi anche “[Coomologia a supporto compatto di R](#)”

474. Questo si ha perché:

- [Varietà differenziabile compatta ha tipo finito](#)
- [Varietà differenziabile di tipo finito ha coomologia di dimensione finita](#)

475. Vedi “[Somma Diretta](#)”

476. Si ha che

$$k(\cdot) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 2 \\ \mathbb{R}^2 & k = 1 \end{cases}$$

477. Si ha che

$$k(\mathbb{R}^2) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ O & k \neq 0 \end{cases}$$

478. Si ha che

$$k(\mathbb{S}^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0, 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases}$$

479. Vedi il Lemma 2

480. Vedi “[Torsione di un modulo](#)”

481. Vedi “[Somma di sottomoduli](#)”

482. Con g' si intende la [derivata](#) di g .

483. φ_p e ψ_p sono i [morfismi indotti](#)

484. Si ha che [ciacuna spiga è un gruppo](#).

485. φ_p è il [morfismo indotto](#) sulle [spighe](#) $\mathcal{F}_p, \mathcal{G}_p$

486. Siccome la [successione di fasci è esatta](#), per definizione di [fascio nucleo](#):

$$\ker \psi_X = (\ker \psi)(X) = (\text{Im } \varphi)(X),$$

e quindi per [definizione di fascio immagine](#) si ha la tesi

487. Vedi “[Range di una funzione](#)”

488. Vedi:

- [Determinante di una matrice](#)
- [Matrice Jacobiana](#)

489. Vedi:

- [Omeomorfismo](#)
- [Toro con g buchi](#)

490. Vedi “[Sfera di Riemann biolomorfa al piano proiettivo complesso](#)”

491. Vedi “[Range di una funzione](#)”

492. Questa cosa non mi è per nulla chiara

493. Infatti [restrizione di mappe aperte ad un aperto sono ancora aperte](#).

494. Con $f^{(k)}$ si intende la [derivata](#) k -esima.

495. Questo vale per il [Principio di identità per funzioni olomorfe](#)

496. Vedi “[Restrizione di una funzione](#)”

497. Questo lo si vede con la [scrittura locale in serie di potenze](#).

498. Vedi “[Ordine di una funzione meromorfa su una superficie di Riemann](#)” e “[Ordine di una funzione meromorfa](#)”

499. Per il [Teorema Fondamentale dell'Algebra](#), con \mathbb{C} campo algebricamente chiuso.

500. Vedi “[Ordine di una funzione olomorfa](#)”

501. Vedi “[Ordine di una funzione meromorfa](#)”

502. Vedi “[Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)” .

503. Perché φ_2 è una biiezione.

504. Vedi “[Sfera di Riemann biolomorfa al piano proiettivo complesso](#)”

505. Siccome f è [meromorfa](#), allora l'insieme delle singolarità e degli zeri di f è [discreto](#), e pertanto è possibile richiedere che dentro ad U_{x_0} non ci siano altri zeri di f .

506. Questo segue dalle proprietà dell'[ordine delle funzioni meromorfe](#).

507. Infatti “[Immagine continua di spazio compatto è compatto](#)”
508. [Compatto in un Hausdorff è chiuso](#)
509. Vedi “[Derivata parziale](#)”
510. Vedi “[Derivata parziale](#)”
511. Vedi “[Anello-dei-polinomi](#)”
512. Questo **non è affatto ovvio**.
513. $\text{ord}_p \varphi$ è l’ordine di φ .
514. Vedi “[Anello-dei-polinomi](#)”
515. Vedi “[Spazio Proiettivo](#)”
516. In questo caso si dice che X è [liscia](#).
517. Vedi “[Spazio proiettivo complesso è una varietà complessa](#)”
518. Questo è un [omeomorfismo](#).
519. Si noti che “[Chiuso in un compatto è compatto](#)”
520. Vedi “[Spazio Proiettivo](#)”
521. Ovvero $F(p) \in U_2$ e $\varphi_2(F(p)) = 0$.
522. Ovvero $p \in U_1$ e $\varphi_1(p) = 0$
523. Questo è l’[ordine di \$T\$ in 0](#).
524. Vedi “[Immagine e retroimmagine tramite una funzione](#)”
525. Si confronti con “[Funzione olomorfa iniettiva è biolomorfismo locale](#)”
526. Vedi “[Molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann](#)”
527. Vedi “[Ordine di una funzione olomorfa](#)”
528. La somma è finita per il [Principio di identità](#) (poiché [sottinsiemi discreti in un compatto sono finiti](#)), mentre $\text{mult}_p F$ è la [molteplicità](#).
529. Ovvero w è definita su un intorno aperto di y_0 , e $w(y_0) = 0$.
530. Si erano poste delle restrizioni sul valore massimo che potesse assumere ε .

531. Vedi "Successione in uno spazio topologico"

532. Vedi

- [Fascio delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann.](#)

533. Vedi

- [Sfera di Riemann](#)
- [Sfera di Riemann biolomorfa al piano proiettivo complesso](#)
- [Spazio proiettivo complesso è una varietà complessa.](#)

Vedi anche

- [Polo \(Analisi Complessa\).](#)

534. Vedi:

- [Molteplicità di una funzione tra superfici di Riemann](#)
- [Forma normale locale per superfici di Riemann](#)

535. Infatti [zeri e molteplicità sono un insieme discreto](#).

536. Vedi

- [Fascio delle funzioni meromorfe su una superficie di Riemann](#)

537. Vedi:

- [Sfera di Riemann](#)
- [Spazio proiettivo complesso è una varietà complessa](#)
- [Sfera di Riemann biolomorfa al piano proiettivo complesso](#)

538. $g(X)$ è il genere topologico di X .

539. Con pF si indica la [molteplicità](#).

540. Ovvero sono [omeomorfi](#).

541. Vedi "Scoposizione della differenza di potenze"

542. [Sistema fondamentale di intorni](#) e [Topologia prodotto](#)

543. T_g è il [Toro con \$g\$ -buchi](#), P_n è la [somma connessa](#) di n copie di $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$ e \mathbb{S}^2 è la [sfera 2-dimensionale](#).

544. $\deg F$ è il [grado di \$F\$](#) .

545. $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ indica il [piano proiettivo complesso](#).

546. A meno di proiettività è sempre vero. Le proiettività sono biolomorfismi.

547. Si noti che $-2 = 2g(\mathbb{P}^1) - 2$, e $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{C}_\infty$, e pertanto $g(\mathbb{P}^1) = 0$. Vedi anche:

- Sfera di Riemann
- Teorema di classificazione delle superfici topologiche
- Grado di un olomorfismo tra superfici di Riemann

548. Per la molteplicità dei punti di una Curva Piana affine liscia complessa.

549. $\deg F$ è il grado di F .

550. Ovvero tale che $f(z) = \gamma z$ per qualche $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

551. $g(X)$ indica il genere topologico, $\deg F$ il grado e mult_p la molteplicità.

552. Ovviamente $(1, \frac{w_2}{w_1})$ e $(1, -\frac{w_2}{w_1})$ generano lo stesso reticolo.

553. A meno di isomorfismo tra superfici di Riemann.

554. $\text{SL}(n, \mathbb{K})$ è il gruppo lineare speciale

555. $\overline{\tau'}$ è il complesso coniugato

556. Infatti, i sottoinsiemi discreti in un compatto sono finiti

557. La funzione \deg indica il grado di un divisore.

558. Con ord_p si indica l'ordine.

559. Con $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ si indica la retta proiettiva complessa, mentre con \mathbb{C}_∞ si indica la sfera di Riemann; queste sono biolomorfe.

560. Con \mathcal{M} si indica il fascio delle funzioni meromorfe.

561. Con \mathcal{O} si indica il fascio delle funzioni olomorfe

562. mult_p è la molteplicità

563. Con \mathcal{M} indichiamo il fascio delle funzioni meromorfe a valori complessi.

564. Con $\text{div } f$ si indica il divisore di f .

565. Con $\text{mult}_p F$ si indica la molteplicità di F in p .

566. Con g si indica il genere topologico, mentre con \deg si indica sia il grado della funzione che del divisore.

567. Alcune note:

- \mathcal{M}_X indica il fascio delle funzioni meromorfe;
- $\text{div } f$ è il divisore di f ;

- “ ≥ 0 ” indica che è un [divisore effettivo](#);
- $\text{ord}_p f$ indica l’[ordine di \$f\$ in \$p\$](#) .

568. Si indica con \mathcal{O}_X il [fascio delle funzioni olomorfe](#).

569. Ovvero D è [effettivo](#)

570. Vedi la [relazione d’ordine tra divisor](#)i.

571. Con \mathcal{M}_X si indica il [fascio delle funzioni meromorfe a valori in \$\mathbb{C}\$](#) .

572. con “ ≥ 0 ” si intende che è un [divisore effettivo](#).

573. Il caso in cui $L(D) \cong L(D - p)$ è ovvio. Inoltre, [siccome](#) $L(D - p) \subseteq L(D)$ è [sottospazio vettoriale](#), ovviamente se $\dim L(D) < +\infty$ allora $\dim L(D - p) < +\infty$. Viceversa, se $L(D)/L(D - p) \cong \mathbb{C}$, e $L(D - p)$ ha dimensione finita, allora necessariamente $L(D)$ ha dimensione finita. [Altrimenti](#), $\dim \mathbb{C} = \infty$, assurdo.

574. Con “ \mathcal{M}_X ” si indica il [fascio delle funzioni meromorfe](#).

575. Vedi anche “[Restrizione di una funzione](#)”

576. Con \mathcal{M}_X si indica il [fascio delle funzioni meromorfe a valori in \$\mathbb{C}\$](#) .

577. Con $\mathbb{C}_{\leq d}[z]$ si indica l’[anello dei polinomi](#) di [grado \$\leq d\$](#) .

578. Infatti, vedi “[Funzioni meromorfe sulla sfera di Riemann](#)”

579. Vedi “[Ordine di una funzione meromorfa](#)”

580. Ovviamente $0 \in \{g(z) \cdot f(z) \mid g \in \mathbb{C}_{\leq d}[z]\}$ per $g(z) := 0$.

581. Poiché div è un morfismo di gruppi e sia $f, h \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}_\infty}(\mathbb{C}_\infty) \setminus \{0\}$.

582. Vedi “[Fascio associato ad un divisore su una superficie di Riemann](#)”

583. Infatti [immagine continua di un compatto è compatto](#).

584. Vedi l’[ideale generato da un elemento](#)

585. Questo segue dal fatto che $H_{k-1}(Y)$ è l’immagine di $H_{k-1}(X)$ tramite morfismo.

586. Vedi “[Somma Diretta di moduli](#)”

587. Ovvero esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $m \geq N$: $X_m = 0$.

588. Questo segue direttamente da:

- [Calcolo dell’omologia singolare del punto](#)
- [Omologia singolare dell’unione disgiunta](#)

589. Vedi “Kernel” e “Immagine e retroimmagine tramite una funzione” e “Quoziente di Moduli”