

地球上の 2 点間の距離の求め方

宮澤 彬

2024 年 9 月 22 日

1 Banach 空間における微分

定義 1.1 X, Y を実 Banach 空間とし, U をその開集合とする. 関数 $f: U \rightarrow Y$ が $x \in U$ において $h \in X$ 方向に微分可能であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $|s| \leq \delta$ ならば

$$\|f(x + sh) - f(x) - sg(x, h)\|_Y \leq \varepsilon |s| \quad (1)$$

となるような $g(x, h)$ が存在することをいう. 任意の $h \in X$ について $g(x, h)$ が存在するとき, f は x において **Gateaux 微分可能** (Gateaux differentiable) であるという. このとき $g(x, \cdot): X \rightarrow Y$ を $f'(x)$ と表し, f の x における **Gateaux 導関数** (Gateaux derivative) という.

Gateaux 導関数は 1 次同次である. すなわち $f'(x)(\lambda h) = \lambda f'(x)(h)$ が成り立つ. これは式 (1) が成り立つとき, $|s\lambda| \leq \delta_0$ となるように s をとれば $\|f(x + s\lambda h) - f(x) - s\lambda g(x, h)\|_Y \leq \varepsilon |\lambda t|$ となることからわかる.

一方で, 通常の微分と異なり, 加法性 $f'(x)(u + v) = f'(x)(u) + f'(x)(v)$ は一般には成り立たない. 例えば $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f: (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } (x_1, x_2) = (0, 0), \\ \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると

$$f'(0, 0)(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

であり, $u = (1, 0), v = (0, 1)$ について

$$\begin{aligned} f'(0, 0)(u + v) &= \frac{(1+0)(0+1)^2}{(0+1)^2 + (1+0)^2} = \frac{1}{2}, \\ f'(0, 0)(u) + f'(0, 0)(v) &= \frac{1 \cdot 0^2}{1^2 + 0^2} + \frac{0 \cdot 1^2}{0^2 + 1^2} = 0 \end{aligned}$$

となることからわかる.

定義 1.2 X, Y を実 Banach 空間とし, U をその開集合とする. 関数 $f: U \rightarrow Y$ が $x \in U$ において **Fréchet 微分可能** (Fréchet differentiable) であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|h\|_X \leq \delta$ ならば

$$\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X \quad (2)$$

となるような連続な線型写像 $Df(x): U \rightarrow Y$ が存在することをいう. この $Df(x)$ を f の x における **Fréchet 導関数** (Fréchet derivative) という.

\mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への写像と同様に, Banach 空間から Banach 空間への写像についても偏微分を定義することができる. $(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \dots, (X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ を Banach 空間とし, X をそれらの直積空間 $(X_1 \times \dots \times X_n, \|\cdot\|_{X_1} + \dots + \|\cdot\|_{X_n})$ とする. $f: X \rightarrow Y$ が $x \in X$ において第 j 成分に関して **偏 Fréchet 微分可能** (partially Fréchet differentiable) あるいは単に偏微分可能であるとは, ある有界線型作用素 $A(x): X_j \rightarrow Y$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $h_j \in X_j$ が $\|h_j\|_{X_j} \leq \delta$ をみたすならば

$$\|f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f(x) - A(x)h_j\|_Y \leq \varepsilon \|h_j\|_{X_j} \quad (3)$$

ことをいう. このとき $A(x)$ を f の第 j 成分に関する **偏 Fréchet 導関数** (partial Fréchet derivative) あるいは偏導関数といい, $D_j f(x)$ と表す. f が X において (Fréchet) 微分可能ならば, 第 j 成分に関して偏微分可能である. このことは次のように確かめられる. 写像 $\iota_j: V_j \rightarrow V_1 \times \dots \times V_n$ を以下で定める.

$$\iota_j: v \mapsto (0, \dots, \underbrace{v}_j, \dots, 0)$$

このとき任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|h_j\|_{X_j} \leq \delta$ ならば

$$\begin{aligned} & |f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f(x) - (Df(x) \circ \iota_j)h_j| \\ & \leq |f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f(x) - Df(x)(0, \dots, h_j, \dots, 0)| \\ & \leq \varepsilon \|(0, \dots, h_j, \dots, 0)\|_X = \varepsilon \|h_j\|_{X_j} \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって各成分に関して偏微分可能であり, 偏導関数はそれぞれ $D_j f(x) = Df(x) \circ \iota_j$ と表すことができる. このことと $Df(x)$ の線型性から

$$Df(x)(h_1, \dots, h_n) = Df(x) \left(\sum_{j=1}^n (0, \dots, h_j, \dots, 0) \right) = \sum_{j=1}^n (Df(x) \circ \iota_j)h_j = \sum_{j=1}^n D_j f(x)h_j$$

が成り立つ.

定理 1.3 U を X の開集合とし, $f: U \rightarrow Y$ とする. f が $x \in U$ において Fréchet 微分可能ならば Gateaux 微分可能である. また $Df(x)h$ が意味をもつ任意の h について $Df(x)h = f'(x)(h)$ が成り立つ.

証明 $h = 0$ のときは成り立つ. 任意の $h \in X \setminus \{0\}$ をとる. f が x で Fréchet 微分可能なので, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|h\|_X \leq \delta$ ならば

$$\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|_X} \|h\|_X$$

が成り立つ。このとき $|s| \leq \delta / \|h\|_X$ ならば

$$\|f(x + sh) - f(x) - sD(x)(h)\|_Y \leq \varepsilon |s| \quad (4)$$

となる。したがって $\|h\| \leq \delta$ ならば $f'(x)(h) = Df(x)h$ が成り立つ。 ■

2 曲線の長さ

(M, g) を Riemann 多様体とする。任意の点 $p \in M$ における方向微分 $(\partial / \partial x_i)|_p$ を $\partial_{x_i}|_p$ や ∂_{x_i} のように略記する。また C^1 級曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の時刻 $t = \tau$ における速度ベクトル $d\gamma((\partial / \partial t)|_\tau)$ を $\dot{\gamma}(\tau)$ と略記する。通常の微積分の意味での t に関する導関数も同様に $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ のように表すことがある。 C^1 級曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の長さを

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} d\tau$$

と表す。

命題 2.1 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を C^1 級曲線とする。 C^1 級狭義単調増加関数 $u: [k, \ell] \rightarrow [a, b]$ について、 $\tilde{\gamma} := \gamma \circ u$ とすると次が成り立つ。

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) \quad (5)$$

証明 曲線上の任意の点 $\gamma(\tau)$ がその近傍の局所座標 $\psi: p \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ によって $(\psi \circ \gamma)(\tau) = (\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_n(\tau))$ と表されているとする。 $\tilde{\gamma} := \gamma \circ u$, $\tau = u(\sigma)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma) &= d(\gamma \circ u)(\sigma) \\ &= d\gamma \left(du \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_\sigma \right) \right) \\ &= d\gamma \left(\frac{du}{ds}(\sigma) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{u(\sigma)} \right) \\ &= \left(\frac{du}{dt}(\tau) \right)^{-1} d\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_\tau \right) \\ &= \frac{1}{\dot{u}(\tau)} \dot{\gamma}(\tau) \end{aligned}$$

このとき

$$g_{\tilde{\gamma}(\sigma)} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma), \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma) \right) = \frac{1}{(\dot{u}(\tau))^2} g_{\gamma(\tau)}(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau)). \quad (6)$$

したがって

$$\int_k^\ell \sqrt{g_{\tilde{\gamma}(\sigma)} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma), \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma) \right)} d\sigma = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} d\tau,$$

すなわち式 (5) が成り立つ。 ■

曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ が正則である、すなわち任意の $\tau \in [a, b]$ で $\dot{\gamma}(\tau) \neq 0$ が成り立つとする。 a から t ま

での γ の長さを表す関数 $\ell: [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ は

$$\ell(t) = \int_a^t \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} d\tau$$

と表される。正則性の仮定より

$$\frac{d\ell}{dt}(\tau) = \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} > 0$$

であるから、 ℓ の逆関数 $u: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ が存在する。式 (6) から

$$g\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma), \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma)\right) = 1 \quad (7)$$

が成り立つ。 $\sqrt{g_p(v, v)}$ をノルム $\|v\|_p$ とみなすと、式 (7) は速度（速度ベクトルの大きさ）が常に 1 であると解釈される。このような弧長を用いた再パラメータ付け (arc length reparametrization, unit speed reparametrization) について次が成り立つ。

命題 2.2 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を C^1 級曲線とする。任意の $t \in [a, b]$ で $\sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} = \text{const.}$ が成り立つならば、長さ $L(\gamma)$ は**エネルギー** (energy)

$$E(\gamma) := \int_a^b \frac{1}{2} g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

に比例する。

証明 L^2 空間における Cauchy–Schwarz の不等式により

$$\int_a^b \sqrt{1} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \leq \sqrt{\int_a^b 1 dt} \sqrt{\int_a^b g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt}. \quad (8)$$

$\sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} = \text{const.}$ より式 (8) は等号で成立する。したがって $L(\gamma) = \sqrt{2(b-a)} \sqrt{E(\gamma)}$ となる。 ■

3 変分法

関数の空間 X から \mathbb{R} への関数を**汎関数** (functional) という。汎関数を最大化あるいは最小化するような関数を求める問題を**変分問題** (variational problem) という。典型的なものとして、最も早く降りられる滑り台の形状を求める問題や、2 点間の距離を最小とするような曲線を求める問題がある。この種の問題をここでは次のように定式化する。 U を \mathbb{R}^n の開集合とし、 $f: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。関数（曲線）の空間として $X = C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ をとる。この空間のノルムは

$$\|\gamma\|_{C^1([a, b], \mathbb{R}^n)} = \sup_{t \in [a, b]} \|\gamma(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t \in [a, b]} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \quad (9)$$

である。 $X_{P, Q} := \{\gamma \in X \mid \gamma(a) = P, \gamma(b) = Q\}$ と表すとき、次を最小化する $\gamma \in X_{P, Q}$ を求めよ。

$$J(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt. \quad (10)$$

$X_0 = \{\gamma \in X \mid \gamma(a) = \gamma(b) = 0\}$ とする。 U が開集合なので、任意の $q \in X_{P, Q}$ と $\eta \in X_0$ について、ある $r > 0$ が存在して、任意の $t \in [a, b]$, $s \in (-r, r)$ で $q(t) + s\eta(t) \in U$ とできる。 $q \in X_{P, Q}$ が問題 10 を

最小化するならば,

$$J(q + s\eta) \geq J(q), \quad J(q + s(-\eta)) \geq J(q),$$

が成り立つ. このとき

$$J'(q)(\eta) \geq 0, \quad -J'(q)(\eta) \geq 0$$

が成り立ち, ゆえに $J'(q) = 0$ となる.

命題 3.1 U を \mathbb{R}^n の開集合とし, 関数 $f: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級とする. 汎関数 $J: X_{P, Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$J(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

と定める. このとき J の q における Gateaux 導関数は

$$J'(q): \eta \mapsto \int_a^b (D_1 f(q(t), \dot{q}(t))\eta(t) + D_2 f(q(t), \dot{q}(t))\dot{\eta}(t)) dt \quad (11)$$

で与えられる.

証明 U が開集合であるから, 任意の $q \in X_{P, Q}$ と $\eta \in X_0 \setminus \{0\}$ について, ある $r > 0$ が存在して, 任意の $t \in [a, b]$, $s \in (-r, r)$ で $q(t) + s\eta(t) \in U$ とできる.

f が微分可能であるから, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $|s| \leq \delta$ ならば

$$|f(x_1 + sh_1, x_2 + sh_2) - f(x_1, x_2) - sD_1 f(x_1, x_2)h_1 - sD_2 f(x_1, x_2)h_2| \leq \frac{\varepsilon|s|}{b-a}$$

が成り立つ. したがって $|s| \in \min\{r, \delta\}$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| J(q + s\eta) - J(q) - s \int_a^b (D_1 f(q(t), \dot{q}(t))\eta(t) + D_2 f(q(t), \dot{q}(t))\dot{\eta}(t)) dt \right| \\ & \leq \int_a^b |f(q(t) + s\eta(t), \dot{q}(t) + s\dot{\eta}(t)) - f(q(t), \dot{q}(t)) - sD_1 f(q(t), \dot{q}(t))\eta(t) - sD_2 f(q(t), \dot{q}(t))\dot{\eta}(t)| dt \\ & \leq \int_a^b \frac{\varepsilon|s|}{b-a} = \varepsilon|s|. \end{aligned}$$

よって式 (11) が成り立つ. ■

補題 3.2 $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, $f: t \mapsto (f_1(t) \cdots f_n(t))^T$ とする. 任意の連続関数 $\eta \in X_0$ について

$$\int_a^b f(t) \cdot \eta(t) dt = 0 \quad (12)$$

が成り立つならば任意の $t \in [a, b]$ で $f(t) = 0$ が成り立つ.

証明 背理法によって示す. ある $j \in \{1, \dots, n\}$ と $t_0 \in [a, b]$ で $f_j(t_0) > 0$ と仮定する. f_j が連続であるから, ある $\varepsilon > 0$ が存在して $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ ならば $f_j(t) > 0$ となる. $\eta: t \mapsto (\eta_1(t) \cdots \eta_n(t))^T$ を

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(t - (t_0 - \varepsilon))(t - (t_0 + \varepsilon))}\right) \mathbb{1}_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}(t) & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

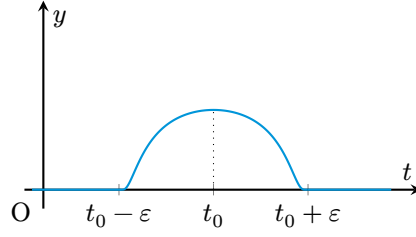


図1 $y = \eta_j(t)$ のグラフ. これは bump function と呼ばれるものの一種である.

と定義する (図1). このとき

$$\int_a^b f(t) \cdot \eta(t) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f_j(t) \eta_j(t) dt > 0$$

となり, 仮定に矛盾する. ■

定理 3.3 $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ とする. 任意の $\eta \in X_0$ について

$$\int_a^b f(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt = 0 \quad (13)$$

が成り立つならば f は定数関数である.

証明 部分積分によって

$$\int_a^b f(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt = [f(t) \cdot \eta(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \dot{f}(t) \cdot \eta(t) dt$$

である. $\eta \in X_0$ より $\eta(a) = \eta(b) = 0$ であるから, 右辺第1項は0である. 仮定13と補題3.2から任意の $t \in [a, b]$ で $\dot{f}(t) = 0$ となる. したがって f は定数関数である. ■

式(11)の $J'(q)$ は部分積分と $\eta(a) = \eta(b) = 0$ によって次をみたすことがわかる.

$$\begin{aligned} J'(q)(\eta) &= \int_a^b D_1 f(q(t), \dot{q}(t)) \eta(t) dt + \int_a^b D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) \dot{\eta}(t) dt \\ &= \left[\left(\int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau \right) \eta(t) \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \left(\int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau \right) \dot{\eta}(\tau) dt \\ &\quad + \int_a^b D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) \dot{\eta}(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\left(- \int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau + D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) \right) \dot{\eta}(t) \right) dt \end{aligned}$$

定理3.3より k_1, \dots, k_n を定数として

$$- \int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau + D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) = (k_1 \quad \dots \quad k_n)$$

が成り立つ. 式(4)を Euler-Lagrange 方程式の積分形という.

4 地球のモデル

地球上の 2 地点 P, Q を最短で結ぶ曲線を求める。地中を掘って進むことは困難なので、それは不可能であるとする。単純化のため地表の構造物や地球が回転楕円体であることは無視し、地球を球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ でモデル化する。

計算をしやすくするため S^2 の各点を球面座標系 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ で表す。動径 ξ_0 は 1 に固定されるため、 ξ_0 を省略して (ξ_1, ξ_2) のように書く。天頂角あるいは余緯度 ξ_1 ($0 < \xi_1 < \pi$) は緯度に応じて

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{90^\circ - \alpha^\circ}{180^\circ} \pi & \text{北緯 } \alpha^\circ \text{ のとき,} \\ \frac{90^\circ + \alpha^\circ}{180^\circ} \pi & \text{南緯 } \alpha^\circ \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。一方、方位角 ξ_2 ($0 \leq \xi_2 < 2\pi$) は

$$\xi_2 = \begin{cases} \frac{\beta^\circ}{180^\circ} \pi & \text{東経 } \beta^\circ \text{ のとき,} \\ \frac{360^\circ - \beta^\circ}{180^\circ} \pi & \text{西経 } \beta^\circ \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。例えば北緯 39° 、東経 141° の地点は $(\xi_1, \xi_2) = (17\pi / 60, 47\pi / 60)$ と表される。北極点 $N = (0, 0, 1)$ と南極点 $S = (0, 0, -1)$ は球面座標系では一意に表されないことに注意する。例えば $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0), (0, \pi)$ はどちらも N を表す。 N と S を含む本初子午線は

$$\Phi_0 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \sqrt{x_1^2 + x_3^2} = 1, x_1 > 0, \text{ and } x_2 = 0 \right\}$$

と表すことができる。 $S^2 \setminus \Phi_0$ の局所座標系として球面座標系 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ をとる。

$$\xi: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (\xi_1, \xi_2) = (\arccos x_3, a(x_1, x_2)),$$

$$a(x_1, x_2) = \begin{cases} \operatorname{atan2}(x_2 / x_1) + \pi & \text{if } x_1 < 0, \\ \operatorname{atan2}(x_2 / x_1) + 2\pi & \text{if } x_1 > 0 \text{ and } x_2 < 0, \\ \operatorname{atan2}(x_2 / x_1) & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\operatorname{atan2}(y, x) = \begin{cases} \pi & \text{if } x_1 < 0 \text{ and } x_2 = 0, \\ 2 \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_1} \right) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

写像 ι を S^2 から \mathbb{R}^3 への包含写像とする。 $S^2 \setminus \Phi_0$ の点 $p = (p_1, p_2)$ については ι を

$$\iota: p \mapsto \begin{pmatrix} \iota_1(p) \\ \iota_2(p) \\ \iota_3(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin p_1 \cos p_2 \\ \sin p_1 \sin p_2 \\ \cos p_1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる。微分 $d\iota$ は方向微分 $\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}$ を次のように写す。

$$d\iota(\partial_{\xi_1}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \iota_i}{\partial \xi_1}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix},$$

$$d\iota(\partial_{\xi_2}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \iota_i}{\partial \xi_2}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

ただし方向微分について、以下のような自然な同一視を行った.

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3}\Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の計量を g_E とし、 ι によって $S^2 \setminus \Phi_0$ に誘導される計量を g_p とする. このとき

$$\begin{aligned} g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) &= g_E(d\iota(\partial_{\xi_1}), d\iota(\partial_{\xi_2})) = \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix} = 1, \\ g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) &= g_E(d\iota(\partial_{\xi_1}), d\iota(\partial_{\xi_2})) = \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) &= g_E(d\iota(\partial_{\xi_2}), d\iota(\partial_{\xi_2})) = \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2 p_1 \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって計量 g_p に対応する行列 G_p は

$$G_p = \begin{pmatrix} g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_1}) & g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) \\ g_p(\partial_{\xi_2}, \partial_{\xi_1}) & g_p(\partial_{\xi_2}, \partial_{\xi_2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 p_1 \end{pmatrix}$$

となる. よって p における速度ベクトル

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1}\Big|_p + v_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2}\Big|_p$$

について

$$\begin{aligned} g_p(v, v) &= v_1^2 g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_1}) + 2v_1 v_2 g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) + v_2^2 g_p(\partial_{\xi_2}, \partial_{\xi_2}) \\ &= (v_1 \ v_2) G_p \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \\ &= v_1^2 + v_2^2 \sin^2 p_1 \end{aligned} \tag{14}$$

となる.

5 地球上の2地点間の距離

記号は前節と同じものを使う. $S^2 \setminus \Phi_0$ の異なる2点 P, Q をとり, P から Q への正則な曲線を $\gamma: [0, T] \rightarrow (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ とし, $q = \xi \circ \gamma$ とする. このとき $q(t) = (\theta(t), \varphi(t))$ と表すことができる. ここで $\theta: [0, T] \rightarrow [0, \pi)$ と $\varphi: [0, T] \rightarrow [0, 2\pi)$ である. 曲線 γ が正則であると仮定したため, 暗に θ, φ は C^1 級であると仮定されていることに注意する. q の速度ベクトルは

$$\dot{q}(t) = \dot{\theta}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_1}\Big|_q + \dot{\varphi}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_2}\Big|_q$$

これは既に弧長による再パラメーター付けがされているものとする. 式 (14) より関数 $f: \xi(S^2 \setminus \Phi_0) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f: (y, u) \mapsto \frac{u_1^2 + u_2^2 \sin^2 y_1}{2}$$

と定義すると、 γ のエネルギーは

$$E(q) = \int_0^T f(q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_0^T \frac{(\dot{\theta}(t))^2 + (\dot{\varphi}(t))^2 \sin^2 \theta(t)}{2} dt \quad (15)$$

と表すことができる。 f の $(q(t), \dot{q}(t))$ における偏導関数は

$$\begin{aligned} D_1 f(q(t), v(t)) &= ((\dot{\varphi}(t))^2 \sin \theta(t) \cos \theta(t) \quad 0), \\ D_2 f(q(t), v(t)) &= (\dot{\theta}(t) \quad \dot{\varphi}(t) \sin^2 \theta(t)) \end{aligned}$$

である。したがってこの問題の Euler-Lagrange 方程式の積分形は

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \int_0^t (\dot{\varphi}(\tau))^2 \sin \theta(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau + k_1 \\ \dot{\varphi}(t) \sin^2 \theta(t) = k_2 \end{cases} \quad (16)$$

$$(17)$$

となる。右辺の形から $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ もまた C^1 級である。したがって両辺を t で微分して次の連立方程式を得る。

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \dot{\varphi}^2(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \\ \ddot{\varphi}(t) = -2 \frac{\dot{\theta}(t)}{\tan \theta(t)} \dot{\varphi}(t) \end{cases} \quad (18)$$

$$(19)$$

エネルギー (式 (15)) は θ と φ の関係のみで定まる。したがって θ を φ の関数とみなす。このとき式 (18) の左辺は

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{d\theta}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right) \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (20)$$

式 (19) について同様に

$$\ddot{\varphi} = -2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\tan \theta} \frac{d\theta}{d\varphi} \quad (21)$$

式 (21) を式 (20) にして

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 - 2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\tan \theta}$$

式 (18) に代入して

$$\left(\frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} - \frac{2}{\tan \theta} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 - \sin \theta \cos \theta \right) \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (22)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{d\varphi} \right) \\ &= 2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d^2 \theta}{d\varphi^2} - \frac{2}{\tan \theta} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

を用いて式 (22) を書き換えると

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \right) \dot{\varphi}^2 = 0.$$

したがって

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = 0 \end{cases} \quad (23)$$

式 (24) は, $y(\varphi) = 1 / \tan \theta(\varphi)$, $D = d / d\varphi$ と置いて微分方程式

$$(D^2 + 1)y = 0 \quad (25)$$

に帰着される. 代数方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ の根が $\lambda = \pm i$ であるから微分方程式 25 の解空間は

$$\text{span}\{\text{Re } e^{i\varphi}, \text{Im } e^{i\varphi}, \text{Re } e^{-i\varphi}, \text{Im } e^{-i\varphi}\} = \text{span}\{\cos \varphi, \sin \varphi\}$$

に等しい. したがって A, B を定数として

$$y(\varphi) = \frac{1}{\tan \theta(\varphi)} = A \cos \varphi + B \sin \varphi$$

と表すことができる. この両辺に $\sin \theta$ をかけると

$$\cos \theta = A \sin \theta \cos \varphi + B \sin \theta \sin \varphi.$$

となる. これは定ベクトル

$$n_{\perp} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix}$$

と曲線 $\iota \circ \gamma$ 上の点が常に直交していること, すなわち γ の像が大円の一部であることを表す. これで目的は達せられたが, せっかくなので A, B を具体的に求めておこう. $P = \iota(\theta(0), \varphi(0)) = (P_1, P_2, P_3)$, $Q = \iota(\theta(T), \varphi(T)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ とすると

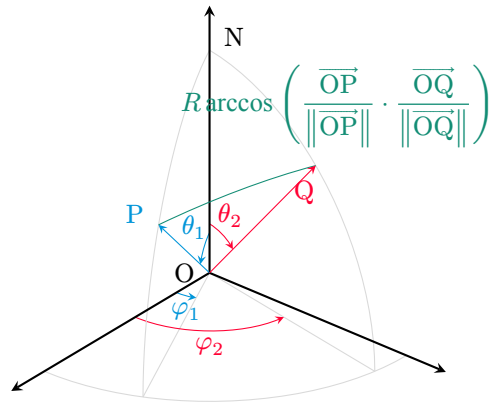
$$\begin{cases} \frac{1}{\tan \theta(0)} = A \cos \varphi(0) + B \sin \varphi(0) \\ \frac{1}{\tan \theta(T)} = A \cos \varphi(T) + B \sin \varphi(T). \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(0) & \sin \varphi(0) \\ \cos \varphi(T) & \sin \varphi(T) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 / \tan \theta(0) \\ 1 / \tan \theta(T) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \theta(0) \sin \theta(T) \sin(\varphi(T) - \varphi(0))} \begin{pmatrix} \sin \varphi(T) & -\sin \varphi(0) \\ -\cos \varphi(T) & \cos \varphi(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta(0) \sin \theta(T) \\ \cos \theta(T) \sin \theta(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{P_x Q_y - P_y Q_x} \begin{pmatrix} P_z Q_y - P_y Q_z \\ P_x Q_z - P_z Q_x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$n_{\perp} \parallel \begin{pmatrix} P_y Q_z - P_z Q_y \\ P_z Q_x - P_x Q_z \\ P_x Q_y - P_y Q_x \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}.$$



半径 R の球面 $S^2(R)$ の 2 点 P, Q の距離は, $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ のなす角に等しい.

$$R \arccos \left(\frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} \cdot \frac{\overrightarrow{OQ}}{\|\overrightarrow{OQ}\|} \right)$$

参考文献

- Şuhubi, Erdoğan (2003) *Functional Analysis*: Springer.
 Jost, Jürgen (2005) *Postmodern Analysis*: Springer, 3rd edition.
 Precup, Radu (2002) *Methods in Nonlinear Integral Equations*: Springer.
 山本義隆・中村孔一 (1998) 『解析力学 I』.
 谷島賢二 (1994) 『物理数学入門』, 東京大学出版会.