

地球上の 2 点間の距離の求め方

宮澤 彬

2024 年 9 月 28 日

1 Banach 空間における微分

定義 1.1 X, Y を Banach 空間とし, U をその開集合とする. 関数 $f: U \rightarrow Y$ が $x \in U$ において $h \in X$ 方向に微分可能であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $|s| \leq \delta$ ならば

$$\|f(x + sh) - f(x) - sg(x, h)\|_Y \leq \varepsilon |s| \quad (1)$$

となるような $g(x, h)$ が存在することをいう. 任意の $h \in X$ について $g(x, h)$ が存在するとき, f は x において **Gateaux^{*1}微分可能** (Gateaux differentiable) であるという. このとき $g(x, \cdot): X \rightarrow Y$ を $f'(x)$ と表し, f の x における **Gateaux 導関数** (Gateaux derivative) という.

Gateaux 導関数を表す記号は著者によって $\delta_G f(x; h)$ [5] や $df(x; h)$ [7] など様々なものが用いられ, 特に広く使われている記号はない. 文献によっては線型性をみたすものに限り Gateaux 導関数と呼ぶ [1] が, ここではそれを要請しない.

線型性を要請しなくても 1 次同次性は常にみたされる. すなわち任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ について $f'(x)(\lambda h) = \lambda f'(x)(h)$ が成り立つ. このことは定義からすぐに確認できる.

一方で加法性 $f'(x)(u + v) = f'(x)(u) + f'(x)(v)$ は一般には成り立たない. 例えば $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f: (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } (x_1, x_2) = (0, 0), \\ \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると

$$f'(0, 0)(h_1, h_2) = \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

であり, $u = (1, 0), v = (0, 1)$ について

$$f'(0, 0)(u + v) = \frac{(1 + 0)(0 + 1)^2}{(0 + 1)^2 + (1 + 0)^2} = \frac{1}{2},$$

$$f'(0, 0)(u) + f'(0, 0)(v) = \frac{1 \cdot 0^2}{1^2 + 0^2} + \frac{0 \cdot 1^2}{0^2 + 1^2} = 0$$

となることからわかる.

^{*1}René Gateaux (1889–1914) fr [ʁəne ɡato] ルネ・ガトー.

定義 1.2 X, Y を実 Banach 空間とし, U をその開集合とする. 関数 $f: U \rightarrow Y$ が $x \in U$ において **Fréchet^{*2} 微分可能** (Fréchet differentiable) あるいは単に微分可能であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|h\|_X \leq \delta$ ならば

$$\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|_Y \leq \varepsilon \|h\|_X \quad (2)$$

となるような連続線型写像 $Df(x): U \rightarrow Y$ が存在することをいう. この $Df(x)$ を f の x における **Fréchet 導関数** (Fréchet derivative) あるいは単に導関数という.

\mathbb{R}^n から \mathbb{R}^m への写像と同様に, Banach 空間から Banach 空間への写像についても偏微分を定義することができる. $(X_1, \|\cdot\|_{X_1}), \dots, (X_n, \|\cdot\|_{X_n})$ を Banach 空間とし, X をそれらの直積空間 $(X_1 \times \dots \times X_n, \|\cdot\|_{X_1} + \dots + \|\cdot\|_{X_n})$ とする. $f: X \rightarrow Y$ が $x \in X$ において第 j 成分に関して **偏 Fréchet 微分可能** (partially Fréchet differentiable) あるいは単に偏微分可能であるとは, ある連続線型作用素 $A(x): X_j \rightarrow Y$ が存在し, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $h_j \in X_j$ が $\|h_j\|_{X_j} \leq \delta$ をみたすならば

$$\|f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f(x) - A(x)h_j\|_Y \leq \varepsilon \|h_j\|_{X_j} \quad (3)$$

ことをいう. このとき $A(x)$ を f の第 j 成分に関する **偏 Fréchet 導関数** (partial Fréchet derivative) あるいは単に偏導関数といい, $D_j f(x)$ と表す. f が X において微分可能ならば, 第 j 成分に関して偏微分可能である. このことは次のように確かめられる. 写像 $\iota_j: V_j \rightarrow V_1 \times \dots \times V_n$ を以下で定める.

$$\iota_j: v \mapsto (0, \dots, \underbrace{v}_j, \dots, 0)$$

このとき任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|h_j\|_{X_j} \leq \delta$ ならば

$$\begin{aligned} & |f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f(x) - (Df(x) \circ \iota_j)h_j| \\ & \leq |f(x_1, \dots, x_j + h_j, \dots, x_n) - f(x) - Df(x)(0, \dots, h_j, \dots, 0)| \\ & \leq \varepsilon \|(0, \dots, h_j, \dots, 0)\|_X = \varepsilon \|h_j\|_{X_j} \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって各成分に関して偏微分可能であり, 偏導関数はそれぞれ $D_j f(x) = Df(x) \circ \iota_j$ と表すことができる. このことと $Df(x)$ の線型性から

$$Df(x)(h_1, \dots, h_n) = Df(x) \left(\sum_{j=1}^n (0, \dots, h_j, \dots, 0) \right) = \sum_{j=1}^n (Df(x) \circ \iota_j)h_j = \sum_{j=1}^n D_j f(x)h_j$$

が成り立つ.

定理 1.3 U を X の開集合とし, $f: U \rightarrow Y$ とする. f が $x \in U$ において Fréchet 微分可能ならば Gateaux 微分可能である. また $Df(x)h$ が意味をもつような任意の h について $Df(x)h = f'(x)(h)$ が成り立つ.

証明 $h = 0$ のときは成り立つ. 任意の $h \in X \setminus \{0\}$ をとる. f が x で Fréchet 微分可能なので, 任意の $\varepsilon > 0$ について, ある $\delta > 0$ が存在して, $\|\eta\|_X \leq \delta$ ならば

$$\|f(x+\eta) - f(x) - Df(x)(\eta)\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{\|h\|_X} \|\eta\|_X$$

^{*2}Maurice Fréchet (1878–1973) fr [mɔʁis fʁɛʃɛ] モリス・フレシェ.

が成り立つ。このとき $|s| \leq \delta / \|h\|_X$ ならば

$$\|f(x+sh) - f(x) - sD(x)(h)\|_Y \leq \varepsilon|s| \quad (4)$$

となる。したがって $\|h\|_X \leq \delta$ ならば $f'(x)(h) = Df(x)h$ が成り立つ。 ■

2 曲線の長さ

(M, g) を Riemann 多様体とする。任意の点 $p \in M$ における方向微分 $(\partial / \partial x_i)|_p$ を $\partial_{x_i}|_p$ や ∂_{x_i} のように略記する。また C^1 級曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の時刻 $t = \tau$ における速度ベクトル $d\gamma((\partial / \partial t)|_\tau)$ を $\dot{\gamma}(\tau)$ と略記する。通常の微積分の意味での t に関する導関数も同様に $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ のように表すことがある。 C^1 級曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ の長さを

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} d\tau$$

と表す。

命題 2.1 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を C^1 級曲線とする。 C^1 級狭義単調増加関数 $u: [k, \ell] \rightarrow [a, b]$ について、 $\tilde{\gamma} := \gamma \circ u$ とすると次が成り立つ。

$$L(\tilde{\gamma}) = L(\gamma) \quad (5)$$

証明 曲線上の任意の点 $\gamma(\tau)$ がその近傍の局所座標 $\psi: p \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ によって $(\psi \circ \gamma)(\tau) = (\gamma_1(\tau), \dots, \gamma_n(\tau))$ と表されているとする。 $\tilde{\gamma} := \gamma \circ u$, $\tau = u(\sigma)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma) &= d(\gamma \circ u)(\sigma) \\ &= d\gamma \left(du \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_\sigma \right) \right) \\ &= d\gamma \left(\frac{du}{ds}(\sigma) \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{u(\sigma)} \right) \\ &= \left(\frac{du}{dt}(\tau) \right)^{-1} d\gamma \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_\tau \right) \\ &= \frac{1}{\dot{u}(\tau)} \dot{\gamma}(\tau) \end{aligned}$$

このとき

$$g_{\tilde{\gamma}(\sigma)} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma), \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma) \right) = \frac{1}{(\dot{u}(\tau))^2} g_{\gamma(\tau)}(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau)). \quad (6)$$

したがって

$$\int_k^\ell \sqrt{g_{\tilde{\gamma}(\sigma)} \left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma), \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma) \right)} d\sigma = \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} d\tau,$$

すなわち式 (5) が成り立つ。 ■

曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ が正則である、すなわち任意の $\tau \in [a, b]$ で $\dot{\gamma}(\tau) \neq 0$ が成り立つとする。 a から t ま

での γ の長さを表す関数 $\ell: [a, b] \rightarrow [0, L(\gamma)]$ は

$$\ell(t) = \int_a^t \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} d\tau$$

と表される。正則性の仮定より

$$\frac{d\ell}{dt}(\tau) = \sqrt{g(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))} > 0$$

であるから、 ℓ の逆関数 $u: [0, L(\gamma)] \rightarrow [a, b]$ が存在する。式 (6) から

$$g\left(\frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma), \frac{d\tilde{\gamma}}{ds}(\sigma)\right) = 1 \quad (7)$$

が成り立つ。 $\sqrt{g_p(v, v)}$ をノルム $\|v\|_p$ とみなすと、式 (7) は速度（速度ベクトルの大きさ）が常に 1 であると解釈される。このような弧長を用いた再パラメータ付け (arc length reparametrization, unit speed reparametrization) について次が成り立つ。

命題 2.2 $\gamma: [a, b] \rightarrow M$ を C^1 級曲線とする。任意の $t \in [a, b]$ で $\sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} = \text{const.}$ が成り立つならば、長さ $L(\gamma)$ は**エネルギー** (energy)

$$E(\gamma) := \int_a^b \frac{1}{2} g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

に比例する。

証明 L^2 空間における Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\int_a^b \sqrt{1} \sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \leq \sqrt{\int_a^b 1 dt} \sqrt{\int_a^b g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt}. \quad (8)$$

$\sqrt{g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} = \text{const.}$ より式 (8) は等号で成立する。したがって $L(\gamma) = \sqrt{2(b-a)} \sqrt{E(\gamma)}$ となる。 ■

3 変分法

関数の空間 X から \mathbb{R} への関数を**汎関数** (functional) という。汎関数を最大化あるいは最小化するような関数を求める問題を**変分問題** (variational problem) という。典型的なものとして、最も早く降りられる滑り台の形状を求める問題や、2 点間の距離を最小とするような曲線を求める問題がある。この種の問題をここでは次のように定式化する。 U を \mathbb{R}^n の開集合とし、 $f: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする。関数（曲線）の空間として $X = C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ をとる。この空間のノルムとしては

$$\|\gamma\|_{C^1([a, b], \mathbb{R}^n)} = \sup_{t \in [a, b]} \|\gamma(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \sup_{t \in [a, b]} \|\dot{\gamma}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \quad (9)$$

をとる^{*3}。 $X_{P, Q} := \{\gamma \in X \mid \gamma(a) = P, \gamma(b) = Q\}$ と表すとき、次を最小化する $\gamma \in X_{P, Q}$ を求めよ。

$$J(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt. \quad (10)$$

$X_0 = \{\gamma \in X \mid \gamma(a) = \gamma(b) = 0\}$ とする。 U が開集合なので、任意の $q \in X_{P, Q}$ と $\eta \in X_0$ について、あ

^{*3}このノルムによって X は Banach 空間となる。

る $r > 0$ が存在して、任意の $t \in [a, b]$, $s \in (-r, r)$ で $q(t) + s\eta(t) \in U$ とできる. $q \in X_{P, Q}$ が問題 10 を最小化するならば,

$$J(q + s\eta) \geq J(q), \quad J(q + s(-\eta)) \geq J(q),$$

が成り立つ. このとき

$$J'(q)(\eta) \geq 0, \quad -J'(q)(\eta) \geq 0$$

が成り立ち、ゆえに $J'(q) = 0$ となる.

命題 3.1 U を \mathbb{R}^n の開集合とし、関数 $f: U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級とする. 汎関数 $J: X_{P, Q} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$J(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt$$

と定める. このとき J の q における Gateaux 導関数は

$$J'(q): \eta \mapsto \int_a^b (D_1 f(q(t), \dot{q}(t))\eta(t) + D_2 f(q(t), \dot{q}(t))\dot{\eta}(t)) dt \quad (11)$$

で与えられる.

証明 U が開集合であるから、任意の $q \in X_{P, Q}$ と $\eta \in X_0 \setminus \{0\}$ について、ある $r > 0$ が存在して、任意の $t \in [a, b]$, $s \in (-r, r)$ で $q(t) + s\eta(t) \in U$ とできる.

f が微分可能であるから、任意の $\varepsilon > 0$ について、ある $\delta > 0$ が存在して、 $|s| \leq \delta$ ならば

$$|f(x_1 + sh_1, x_2 + sh_2) - f(x_1, x_2) - sD_1 f(x_1, x_2)h_1 - sD_2 f(x_1, x_2)h_2| \leq \frac{\varepsilon|s|}{b-a}$$

が成り立つ. したがって $|s| \in \min\{r, \delta\}$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| J(q + s\eta) - J(q) - s \int_a^b (D_1 f(q(t), \dot{q}(t))\eta(t) + D_2 f(q(t), \dot{q}(t))\dot{\eta}(t)) dt \right| \\ & \leq \int_a^b |f(q(t) + s\eta(t), \dot{q}(t) + s\dot{\eta}(t)) - f(q(t), \dot{q}(t)) - sD_1 f(q(t), \dot{q}(t))\eta(t) - sD_2 f(q(t), \dot{q}(t))\dot{\eta}(t)| dt \\ & \leq \int_a^b \frac{\varepsilon|s|}{b-a} = \varepsilon|s|. \end{aligned}$$

よって式 (11) が成り立つ. ■

補題 3.2 $f \in C([a, b], \mathbb{R}^n)$, $f: t \mapsto (f_1(t) \cdots f_n(t))^T$ とする. 任意の連続関数 $\eta \in X_0$ について

$$\int_a^b f(t) \cdot \eta(t) dt = 0 \quad (12)$$

が成り立つならば任意の $t \in [a, b]$ で $f(t) = 0$ が成り立つ.

証明 背理法によって示す. ある $j \in \{1, \dots, n\}$ と $t_0 \in [a, b]$ で $f_j(t_0) > 0$ と仮定する. f_j が連続であるから、ある $\varepsilon > 0$ が存在して $t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ ならば $f_j(t) > 0$ となる. $\eta: t \mapsto (\eta_1(t) \cdots \eta_n(t))^T$ を

$$\eta_i(t) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{(t - (t_0 - \varepsilon))(t - (t_0 + \varepsilon))}\right) \mathbb{1}_{[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]}(t) & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

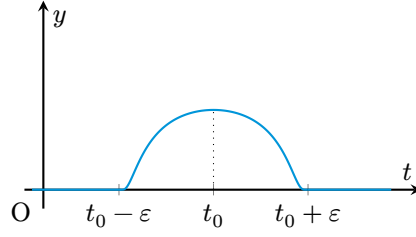


図1 $y = \eta_j(t)$ のグラフ. これは bump function と呼ばれるものの一種である.

と定義する (図1). このとき

$$\int_a^b f(t) \cdot \eta(t) dt = \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} f_j(t) \eta_j(t) dt > 0$$

となり, 仮定に矛盾する. ■

定理 3.3 $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$ とする. 任意の $\eta \in X_0$ について

$$\int_a^b f(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt = 0 \quad (13)$$

が成り立つならば f は定数関数である.

証明 部分積分によって

$$\int_a^b f(t) \cdot \dot{\eta}(t) dt = [f(t) \cdot \eta(t)]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \dot{f}(t) \cdot \eta(t) dt$$

である. $\eta \in X_0$ より $\eta(a) = \eta(b) = 0$ であるから, 右辺第1項は0である. 仮定13と補題3.2から任意の $t \in [a, b]$ で $\dot{f}(t) = 0$ となる. したがって f は定数関数である. ■

式(11)の $J'(q)$ は部分積分と $\eta(a) = \eta(b) = 0$ によって次をみたすことがわかる.

$$\begin{aligned} J'(q)(\eta) &= \int_a^b D_1 f(q(t), \dot{q}(t)) \eta(t) dt + \int_a^b D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) \dot{\eta}(t) dt \\ &= \left[\left(\int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau \right) \eta(t) \right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \left(\int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau \right) \dot{\eta}(\tau) dt \\ &\quad + \int_a^b D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) \dot{\eta}(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\left(- \int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau + D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) \right) \dot{\eta}(t) \right) dt \end{aligned}$$

定理3.3より k_1, \dots, k_n を定数として

$$- \int_a^t D_1 f(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau + D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) = (k_1 \quad \dots \quad k_n)$$

が成り立つ. 式(4)を Euler-Lagrange 方程式の積分形という.

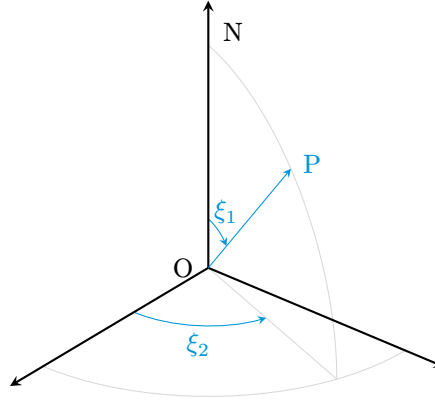


図2 動径を固定した球面座標系.

4 地球のモデル

地球上の2地点 P, Q を最短で結ぶ曲線を求める. 地中を掘って進むことは困難なので, それは不可能であるとする. 単純化のため地表の構造物や地球が回転楕円体であることは無視し, 地球を球面 $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ でモデル化する.

計算をしやすいように S^2 の各点を球面座標系 $\xi = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$ で表す (図2). 動径 ξ_0 は1に固定されるため, ξ_0 を省略して (ξ_1, ξ_2) のように書く. 天頂角あるいは余緯度 ξ_1 ($0 < \xi_1 < \pi$) は緯度に応じて

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{90^\circ - \alpha^\circ}{180^\circ} \pi & \text{北緯 } \alpha^\circ \text{ のとき,} \\ \frac{90^\circ + \alpha^\circ}{180^\circ} \pi & \text{南緯 } \alpha^\circ \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. 一方, 方位角 ξ_2 ($0 \leq \xi_2 < 2\pi$) は

$$\xi_2 = \begin{cases} \frac{\beta^\circ}{180^\circ} \pi & \text{東経 } \beta^\circ \text{ のとき,} \\ \frac{360^\circ - \beta^\circ}{180^\circ} \pi & \text{西経 } \beta^\circ \text{ のとき} \end{cases}$$

となる. 例えば北緯 39° , 東経 141° の地点は $(\xi_1, \xi_2) = (17\pi/60, 47\pi/60)$ と表される. 北極点 $N = (0, 0, 1)$ と南極点 $S = (0, 0, -1)$ は球面座標系では一意に表されないことに注意する. 例えば $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0), (0, \pi)$ はどちらも N を表す. N と S を含む本初子午線は

$$\Phi_0 = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \mid \sqrt{x_1^2 + x_3^2} = 1, x_1 > 0, \text{ and } x_2 = 0 \right\}$$

と表すことができる. $S^2 \setminus \Phi_0$ の局所座標系として球面座標系 $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ をとる.

$$\begin{aligned} \xi: (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (\xi_1, \xi_2) = (\arccos x_3, a(x_1, x_2)), \\ a(x_1, x_2) &= \begin{cases} \operatorname{atan2}(x_2 / x_1) + \pi & \text{if } x_1 < 0, \\ \operatorname{atan2}(x_2 / x_1) + 2\pi & \text{if } x_1 > 0 \text{ and } x_2 < 0, \\ \operatorname{atan2}(x_2 / x_1) & \text{otherwise,} \end{cases} \\ \operatorname{atan2}(y, x) &= \begin{cases} \pi & \text{if } x_1 < 0 \text{ and } x_2 = 0, \\ 2 \arctan \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_1}} \right) & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

写像 ι を S^2 から \mathbb{R}^3 への包含写像とする. $S^2 \setminus \Phi_0$ の点 $p = (p_1, p_2)$ については ι を

$$\iota: p \mapsto \begin{pmatrix} \iota_1(p) \\ \iota_2(p) \\ \iota_3(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin p_1 \cos p_2 \\ \sin p_1 \sin p_2 \\ \cos p_1 \end{pmatrix}$$

と表すことができる. 微分 $d\iota$ は方向微分 $\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}$ を次のように写す.

$$\begin{aligned} d\iota(\partial_{\xi_1}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \iota_i}{\partial \xi_1}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix}, \\ d\iota(\partial_{\xi_2}) &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \iota_i}{\partial \xi_2}(p) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし方向微分について, 以下のような自然な同一視を行った.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \Big|_{\iota(p)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の計量を g_E とし, ι によって $S^2 \setminus \Phi_0$ に誘導される計量を g_p とする. このとき

$$\begin{aligned} g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) &= g_E(d\iota(\partial_{\xi_1}), d\iota(\partial_{\xi_2})) = \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix} = 1, \\ g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) &= g_E(d\iota(\partial_{\xi_1}), d\iota(\partial_{\xi_2})) = \begin{pmatrix} \cos p_1 \cos p_2 \\ \cos p_1 \sin p_2 \\ -\sin p_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) &= g_E(d\iota(\partial_{\xi_2}), d\iota(\partial_{\xi_2})) = \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin p_1 \sin p_2 \\ \sin p_1 \cos p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin^2 p_1 \end{aligned}$$

が成り立つ. よって p における速度ベクトル

$$v = v_1 \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Big|_p + v_2 \frac{\partial}{\partial \xi_2} \Big|_p$$

について

$$g_p(v, v) = v_1^2 g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_1}) + 2v_1 v_2 g_p(\partial_{\xi_1}, \partial_{\xi_2}) + v_2^2 g_p(\partial_{\xi_2}, \partial_{\xi_2}) = v_1^2 + v_2^2 \sin^2 p_1 \quad (14)$$

となる.

5 地球上の2地点間の距離

記号は前節と同じものを使う． $S^2 \setminus \Phi_0$ の異なる2点 P, Q をとり， P から Q への正則な曲線を $\gamma: [0, T] \rightarrow (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ とし， $q = \xi \circ \gamma$ とする．このとき $q(t) = (\theta(t), \varphi(t))$ と表すことができる．ここで $\theta: [0, T] \rightarrow [0, \pi)$ と $\varphi: [0, T] \rightarrow [0, 2\pi)$ である．曲線 γ が正則であると仮定したため，暗に θ, φ は C^1 級であると仮定されていることに注意する． q の速度ベクトルは

$$\dot{q}(t) = \dot{\theta}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_1} \Big|_q + \dot{\varphi}(t) \frac{\partial}{\partial \xi_2} \Big|_q$$

これは既に弧長による再パラメーター付けがされているものとする．式 (14) より関数 $f: \xi(S^2 \setminus \Phi_0) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(y, u) \mapsto \frac{u_1^2 + u_2^2 \sin^2 y_1}{2}$$

と定義すると， γ のエネルギーは

$$E(q) = \int_0^T f(q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_0^T \frac{(\dot{\theta}(t))^2 + (\dot{\varphi}(t))^2 \sin^2 \theta(t)}{2} dt$$

と表すことができる． f の $(q(t), \dot{q}(t))$ における偏導関数は

$$\begin{aligned} D_1 f(q(t), \dot{q}(t)) &= ((\dot{\varphi}(t))^2 \sin \theta(t) \cos \theta(t) \quad 0), \\ D_2 f(q(t), \dot{q}(t)) &= (\dot{\theta}(t) \quad \dot{\varphi}(t) \sin^2 \theta(t)) \end{aligned}$$

である．したがってこの問題の Euler-Lagrange 方程式の積分形は

$$\begin{cases} \dot{\theta}(t) = \int_0^t (\dot{\varphi}(\tau))^2 \sin \theta(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau + k_1 \\ \dot{\varphi}(t) \sin^2 \theta(t) = k_2 \end{cases}$$

となる．右辺の形から $\dot{\theta}, \dot{\varphi}$ もまた C^1 級である．したがって両辺を t で微分して次の連立方程式を得る．

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \dot{\varphi}^2(t) \sin \theta(t) \cos \theta(t) \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}(t) = -2 \frac{\dot{\theta}(t)}{\tan \theta(t)} \dot{\varphi}(t) \end{cases} \quad (16)$$

エネルギーは θ と φ の関係のみで定まるため， θ を φ の関数とみなす．このとき式 (15) の左辺は

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) \\ &= \left(\frac{d}{dt} \frac{d\theta}{d\varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ &= \left(\frac{d}{d\varphi} \frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right) \frac{d^2\varphi}{dt^2} \\ &= \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 + \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right) \ddot{\varphi}. \end{aligned} \quad (17)$$

式 (16) について同様に

$$\ddot{\varphi} = -2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\tan \theta} \frac{d\theta}{d\varphi} \quad (18)$$

式 (18) を式 (17) にして

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \dot{\varphi}^2 - 2 \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \frac{\dot{\varphi}^2}{\tan \theta}$$

式 (15) に代入して

$$\left(\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - \frac{2}{\tan \theta} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 - \sin \theta \cos \theta \right) \dot{\varphi}^2 = 0. \quad (19)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{d}{d\varphi} \left(-\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d\theta}{d\varphi} \right) \\ &= 2 \frac{\cos \theta}{\sin^3 \theta} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} - \frac{2}{\tan \theta} \left(\frac{d\theta}{d\varphi} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

を用いて式 (19) を書き換えると

$$\left(\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta} \right) \dot{\varphi}^2 = 0.$$

したがって

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{1}{\tan \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = 0. \quad (21)$$

式 (20) は方位角が一定であることを表す。これは P, Q が同一の子午線上にある場合であり、その子午線の P と Q の間の部分が最短の経路である。

式 (21) は、 $y(\varphi) = 1 / \tan \theta(\varphi)$, $D = d / d\varphi$ と置いて微分方程式

$$(D^2 + 1)y = 0 \quad (22)$$

に帰着される。代数方程式 $\lambda^2 + 1 = 0$ の根が $\lambda = \pm i$ であるから微分方程式 (22) の解空間は

$$\text{span}\{\text{Re } e^{i\varphi}, \text{Im } e^{i\varphi}, \text{Re } e^{-i\varphi}, \text{Im } e^{-i\varphi}\} = \text{span}\{\cos \varphi, \sin \varphi\}$$

に等しい。したがって A, B を定数として

$$y(\varphi) = \frac{1}{\tan \theta(\varphi)} = A \cos \varphi + B \sin \varphi$$

と表すことができる。この両辺に $\sin \theta$ をかけると

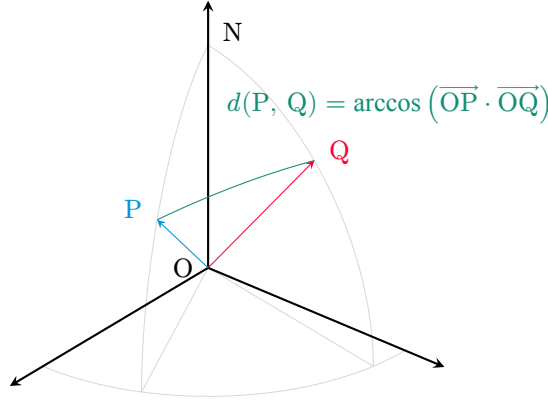
$$\cos \theta = A \sin \theta \cos \varphi + B \sin \theta \sin \varphi.$$

となる。これは定ベクトル

$$n_{\perp} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ -1 \end{pmatrix}$$

と P, Q を結ぶ曲線が直交していることを表す。したがって求める曲線 (の像) は球面 S^2 を中心 O を通る平面で切ったときにできる円の P, Q の間の範囲である。これは局所座標を適当にとりかえることで S^2 の任意の点で成り立つ。

ベクトル n_{\perp} は OP, OQ と直交するので $n_{\perp} \parallel \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}$ である。実際に A, B を求めてそれを確認でき



る. $P = \iota(\theta(0), \varphi(0)) = (P_1, P_2, P_3)$, $Q = \iota(\theta(T), \varphi(T)) = (Q_1, Q_2, Q_3)$ とすると

$$\begin{cases} \frac{1}{\tan \theta(0)} = A \cos \varphi(0) + B \sin \varphi(0) \\ \frac{1}{\tan \theta(T)} = A \cos \varphi(T) + B \sin \varphi(T). \end{cases}$$

これを解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \varphi(0) & \sin \varphi(0) \\ \cos \varphi(T) & \sin \varphi(T) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 / \tan \theta(0) \\ 1 / \tan \theta(T) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin \theta(0) \sin \theta(T) \sin(\varphi(T) - \varphi(0))} \begin{pmatrix} \sin \varphi(T) & -\sin \varphi(0) \\ -\cos \varphi(T) & \cos \varphi(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta(0) \sin \theta(T) \\ \cos \theta(T) \sin \theta(0) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{P_1 Q_2 - P_y Q_x} \begin{pmatrix} P_3 Q_2 - P_2 Q_3 \\ P_1 Q_3 - P_3 Q_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって

$$n_{\perp} \parallel \begin{pmatrix} P_y Q_3 - P_3 Q_2 \\ P_3 Q_1 - P_1 Q_3 \\ P_1 Q_2 - P_2 Q_1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}.$$

一般に球面を中心を通る平面で切ったときにできる円は**大円** (great circle) と呼ばれる. 最短の曲線が大円のうち P, Q の間の部分なので, その長さは $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ のなす角に等しい. ゆえに S^2 の 2 点の距離 $d: S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ は

$$d: (P, Q) \mapsto \arccos(\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})$$

と表すことができる. 地球を半径 R の球面 $S^2(R)$ としてモデル化した場合は

$$d: (P, Q) \mapsto R \arccos\left(\frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} \cdot \frac{\overrightarrow{OQ}}{\|\overrightarrow{OQ}\|}\right)$$

となる.

参考文献

- [1] Atkinson, Kendall and Weimin Han (2009) *Theoretical Numerical Analysis*: Springer, 3rd edition.
- [2] Şuhubi, Erdoğan (2003) *Functional Analysis*: Springer.
- [3] Jost, Jürgen (2005) *Postmodern Analysis*: Springer, 3rd edition.

- [4] Precup, Radu (2002) *Methods in Nonlinear Integral Equations*: Springer.
- [5] 山田功 (2009)『工学のための関数解析』, 数理工学社.
- [6] 山本義隆・中村孔一 (1998)『解析力学 I』, 朝倉書店.
- [7] 増田久弥 (1985)『非線型数学』, 朝倉書店.
- [8] 谷島賢二 (1994)『物理数学入門』, 東京大学出版会.