
TP2.2 - GENERADORES DE NÚMEROS PSEUDOALEATORIOS DE DISTINTAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD.

Pecoraro Lucio

Universidad Tecnológica Nacional - FRRO
Zeballos 1341, S2000, Argentina
Legajo 50239
luciopecoraro2002@gmail.com

Berto Leandro

Universidad Tecnológica Nacional - FRRO
Zeballos 1341, S2000, Argentina
Legajo 45368
leandroberto2010@gmail.com

Capiglioni Rodrigo

Universidad Tecnológica Nacional - FRRO
Zeballos 1341, S2000, Argentina
Legajo 47298
RodrigoCapiglioni@gmail.com

Broda Tomás

Universidad Tecnológica Nacional - FRRO
Zeballos 1341, S2000, Argentina
Legajo 47299
tomasbroda13@gmail.com

May 20, 2025

ABSTRACT

Este trabajo tiene como propósito analizar diversas distribuciones de probabilidad, detallando sus principales características. Se abordará el desarrollo conceptual de cada una, se empleará tecnología para ilustrar su comportamiento y, finalmente, se evaluará la generación de valores a través de pruebas específicas

1 Introducción

Se busca analizar cómo se generan distintos tipos de distribuciones mediante la producción de números pseudoaleatorios. Se trabajará con distribuciones tanto continuas como discretas, utilizando generadores específicos para cada caso. Tras llevar a cabo las simulaciones, se aplicará la prueba de bondad de ajuste Chi-Cuadrado en algunos de los conjuntos de datos obtenidos para evaluar sus resultados.

2 Distribuciones de Probabilidad

En teoría de la probabilidad y estadística, la distribución de probabilidad de una variable aleatoria es una función que asigna a cada suceso definido sobre la variable aleatoria, la probabilidad de que dicho suceso ocurra. La distribución de probabilidad está definida sobre el conjunto de todos el rango de valores de la variable aleatoria.

La distribución de probabilidad está completamente especificada por la función de distribución, cuyo valor en cada x real es la probabilidad de que la variable aleatoria sea menor o igual que x . Los tipos de variables existentes son:

- **Variable aleatoria:** Es aquella cuyo valor es el resultado de un evento aleatorio. Lo que quiere decir que son los resultados que se presentan al azar en cualquier evento o experimento.
- **Variable aleatoria discreta:** Es aquella que solo toma ciertos valores (frecuentemente enteros) y que resulta principalmente del conteo realizado.
- **Variable aleatoria continua:** Es aquella que resulta generalmente de la medición y puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado.

A continuación se desarrollarán distintos generadores de valores de variables aleatorias a partir de las distribuciones probabilidad, las cuales están clasificadas según el tipo de variable.

2.1 Distribuciones Continuas de Probabilidad

Una distribución continua describe las probabilidades de los posibles valores de una variable aleatoria continua. Una variable aleatoria continua es una variable aleatoria con un conjunto de valores posibles (conocido como el rango) que es infinito y no se puede contar.

2.1.1 Distribución Uniforme

Se distingue por su constancia dentro de un intervalo definido entre (a) y (b), excluyendo el valor cero. Su origen radica en el análisis de los errores de redondeo al registrar mediciones con un determinado nivel de precisión. Se destaca frente a otros métodos de simulación debido a su simplicidad y versatilidad, ya que permite modelar variables aleatorias basadas en prácticamente cualquier distribución de probabilidad.

Función de Densidad

Describe una variable aleatoria continua en la que todos los valores dentro de un intervalo tienen la misma probabilidad de ocurrir

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Función Acumulada

Representa la probabilidad acumulada desde el valor mínimo hasta el valor dado

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

En esta ecuación X es una variable aleatoria definida en (a, b). El valor esperado y la varianza de una variable aleatoria uniformemente distribuida, se puede representar por:

$$EX = \frac{b+a}{2} \quad (1)$$

$$VX = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (2)$$

Método de la transformación inversa

Para simular una distribución uniforme sobre cierto intervalo conocido (a,b) deberemos, en primer lugar, obtener la transformación inversa para la distribución uniforme acumulativa:

$$F(x) = \int_0^a \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a} \quad 0 \leq F(x) \leq 1. \quad (3)$$

Lo cual podemos deducir como su función inversa a:

$$x = a + (b-a)r \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (4)$$

En seguida, generamos un conjunto de números aleatorios correspondientes al rango de las probabilidades acumulativas, es decir, los valores de variables aleatorias uniformes definidas sobre el rango 0 a 1. Cada número aleatorio r determina, de manera única, un valor de la variable x uniformemente distribuida.

Código en Python

```

1 import random
2 import math
3
4 def distr_uniforme(a, b, size):
5     x=[]
6     for _ in range(size):
7         x.append(a+(b-a)*random.random())
8     return x
9
10 def uniforme_rechazo(a,b):
11     while True:
12         r1 = random.uniform(0,1)
13         X = a + (b - a) * r1
14         c = 1 / (b - a)
15         r2 = random.uniform(0,1)
16         if r2 <= c:
17             return X

```

Se ingresa como parámetro a y b que son valores que expresan los límites de las distribuciones uniformes.

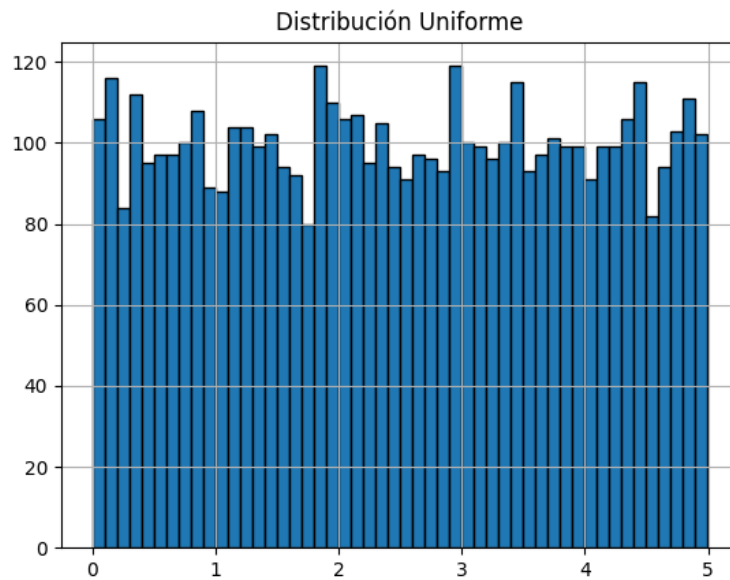
Gráfico

Figure 1: Histograma para la distribución uniforme continua $U(5, 15)$.

2.1.2 Distribución Exponencial

Si un evento ocurre dentro de intervalos cortos de manera independiente de otros eventos, el tiempo transcurrido entre sucesos sigue una distribución exponencial.

Función de Densidad

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Función Acumulada

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

y la media junto con la variancia de X se pueden expresar como

$$EX = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} \quad (5)$$

$$VX = \int_0^{\infty} (x - \frac{1}{\lambda})^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2} = (EX)^2 \quad (6)$$

Método de la transformación inversa

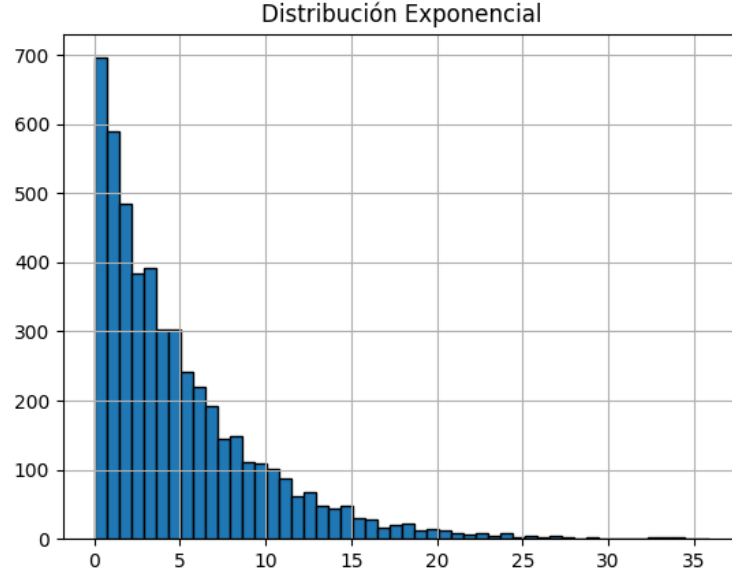
Existen muchas maneras para lograr la generación de valores de variables aleatorias exponenciales. Puesto que la distribución acumulativa existe explícitamente (vista en la ecuación (8)), la técnica de la transformación inversa nos permite desarrollar métodos directos para dicha generación. Debido a la simetría que existe entre la distribución uniforme sigue que la intercambiabilidad de $F(x)$ y $1 - F(x)$. Por lo tanto:

$$r = e^{-\lambda x} \quad (7)$$

y consecuentemente

$$x = -\frac{1}{\lambda} \log r = -EX \log r \quad (8)$$

Por consiguiente, para cada valor del número pseudoaleatorio r , se determina un único valor para x . Los valores de x toman tan sólo magnitudes no negativas, debido a que $\log(r) \leq 0$ para $0 \leq r \leq 1$, y además se ajustan a la función de densidad exponencial con un valor esperado x . Es importante notar que, pese a que esta técnica parece en principio muy simple, es preciso recordar que en una computadora digital el cálculo logarítmico natural involucra una expansión en serie de potencias para cada valor de la variable aleatoria que se debe generar.

GráficoFigure 2: Histograma para la distribución uniforme continua $U(5, 15)$.**2.1.3 Distribución Gamma**

Si un determinado proceso está compuesto por k eventos que ocurren de manera sucesiva, y si el tiempo total del proceso puede modelarse como la suma de k variables aleatorias independientes, donde cada una sigue una distribución exponencial con el mismo parámetro, entonces la variable que representa el tiempo total sigue una distribución gamma con parámetros a y k .

Función de Densidad

La función gamma está descrita mediante la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \frac{a^k x^{(k-1)} e^{-ax}}{(k-1)!} \quad (9)$$

donde $a > 0, k > 9$ y x se considera no negativo. Respecto a la media y la variancia de esta distribución, sus correspondientes expresiones están formuladas como sigue:

$$EX = \frac{k}{a} \quad (10)$$

$$VX = \frac{k}{a^2} \quad (11)$$

Gráfico

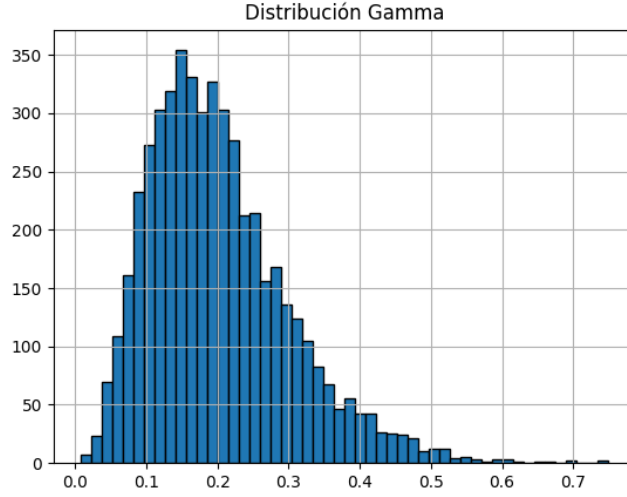


Figure 3: Frecuencias absolutas de valores generados.

2.1.4 Distribución Normal

La distribución normal basa su utilidad en el teorema del límite central. Este postula que la distribución de probabilidad de la suma de N valores de una variable aleatoria x , independientes pero idénticamente distribuidos, con medias respectivas μ y varianzas σ^2 , se aproxima asintóticamente a una distribución normal a medida que N se hace muy grande.

En consecuencia, el teorema del límite central permite el empleo de distribuciones normales para representar medidas globales operadas sobre los efectos de causas (errores) aditivas distribuidas en forma independiente sin importar la distribución de probabilidad a que obedezcan las mediciones de causas individuales.

Función de Densidad

Si la variable aleatoria X tiene una función de densidad $f(x)$ dada como:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

El valor esperado y la variancia de la distribución normal están dados por:

$$EX = \mu_x \quad (13)$$

$$EX = \sigma_x^2 \quad (14)$$

Método de la transformación inversa

El procedimiento para simular valores normales utilizando computadoras requiere el uso de la suma de K valores de variables aleatorias distribuidos uniformemente; esto es la suma de r_1, r_2, \dots, r_K con cada r_i definida en el intervalo $0 < r_i < 1$. Aplicando la convención notacional de la forma matemática del teorema central del límite, encontramos que:

$$\theta = \frac{a+b}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}, \quad (15)$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}}, \quad (16)$$

$$z = \frac{\sum_{i=1}^K r_i - K/2}{\sqrt{K/12}} \quad (17)$$

Pero por definición, z es un valor de variable aleatoria con distribución normal estándar. Por lo tanto:

$$x = \sigma_x \left(\frac{12}{K} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^K r_i - \frac{K}{2} \right) + \mu_x \quad (18)$$

Por lo tanto, con la ecuación anterior, podemos proporcionar una formulación muy simple para generar valores de variable aleatoria normalmente distribuidos. Para generar un solo valor x bastará con sumar K números aleatorios definidos en el intervalo de 0 a 1. Este procedimiento se puede repetir tantas veces como valores de variables aleatorias normalmente distribuidos se quieran

Código en Python

```

1  import random
2  import math
3
4  def distr_normal(ex, stdx, size):
5      x=[]
6      for _ in range(size):
7          sum=0
8          for _ in range(12):
9              sum=sum+random.random()
10             x.append(stdx*(sum-6)+ex)
11     return x
12
13 def normal_rechazo(mu, sigma):
14     while True:
15         r1 = random.uniform(0,1)
16         r2 = random.uniform(0,1)
17         Z = math.sqrt(-2*math.log(r1))* math.cos(2*math.pi*r2)
18         X = Z * sigma + mu
19         c = math.exp(-0.5*((X-mu)/sigma)**2)/(sigma*math.sqrt(2*math.pi))
20         r = random.uniform(0,1)
21         if r <= c:
22             return X

```

Se puede observar que se ingresa como parámetro la media μ y la desviación estándar que es σ .

Gráfico

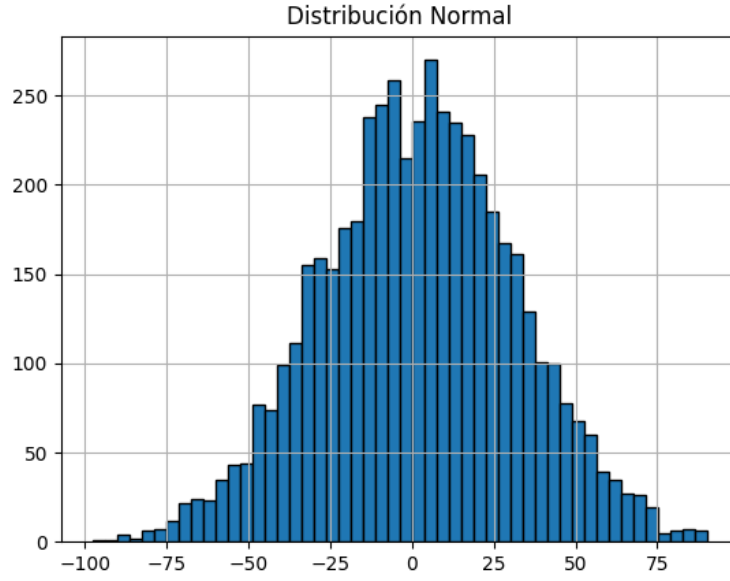


Figure 4: Histograma para la distribución normal.

2.2 Distribuciones Discretas de Probabilidad

Se encuentra definido un número muy significativo de distribuciones de probabilidad para variables aleatorias que solamente toman valores discretos, esto es, enteros no negativos. La distribución acumulativa de probabilidad para una variable aleatoria discreta X se define de manera muy similar a la de la ecuación

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x=0}^x f(x) \quad (19)$$

Donde $f(x)$ es la frecuencia o función de probabilidad de X definida por valores enteros que:

$$F(x) = P(X = x) \quad (20)$$

Para $x=0,1,2,\dots$. Las distribuciones discretas de probabilidad son muy útiles cuando se las emplea como modelos estocásticos para ciertos procesos de conteo, ya sea sobre muestras finitas o no finitas, donde la presencia o ausencia de un atributo dicotómico está gobernada por el azar.

Las secciones siguientes contienen la descripción de técnicas para la generación de valores de variables estocásticas a partir de la mayoría de las distribuciones discretas de p

2.2.1 Distribución de Pascal

La variable aleatoria de Pascal es una extensión de la variable aleatoria geométrica. Describe el número de ensayos hasta el tiempo entre llegadas de un proceso de Bernoulli. La distribución de Pascal también se denomina distribución binomial negativa.

Función de Probabilidad

Sea X_k una variable aleatoria de Pascal de orden k :

$$P(X = x) = \left(\frac{k+x-1}{x} \right) p^k q^x \quad x = 0, 1, 2, \dots, \quad (21)$$

donde k es el número total de éxitos en una sucesión de $k+x$ ensayos, con x el número de fallas que ocurren antes de obtener k éxitos.

El valor esperado y la variancia de X se representa con:

$$EX = \frac{kq}{p} \quad (22)$$

$$VX = \frac{kq}{p^2} \quad (23)$$

Gráfico

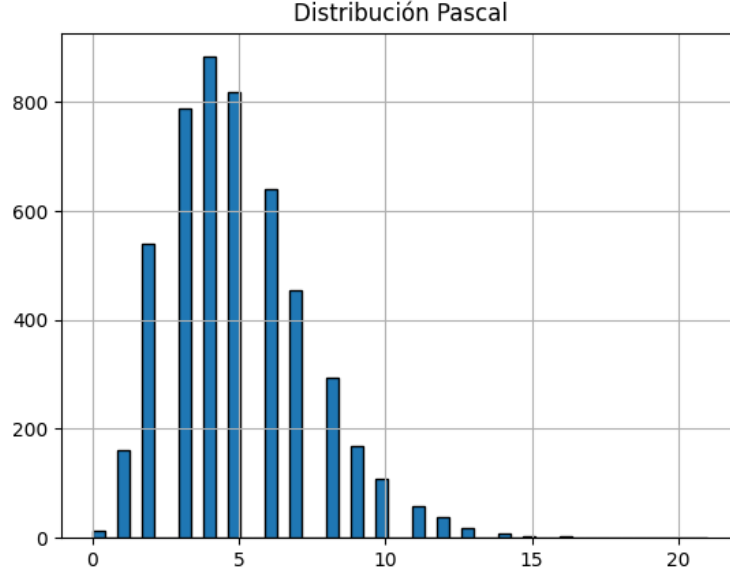


Figure 5: Histograma para la distribución pascal.

2.2.2 Distribución Binomial

La distribución binomial modela la probabilidad de obtener exactamente x éxitos en n ensayos de Bernoulli independientes, donde cada ensayo tiene una probabilidad de éxito p .

Funcion de Probabilidad

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

- n : número de ensayos.
- x : número de éxitos.
- p : probabilidad de éxito en cada ensayo.
- $\binom{n}{x}$: coeficiente binomial (combinaciones de n elementos tomados de x).

La esperanza y la variancia se definen de la siguiente manera:

$$\mathbb{E}[X] = np, \quad \text{Var}(X) = np(1 - p)$$

Gráfico

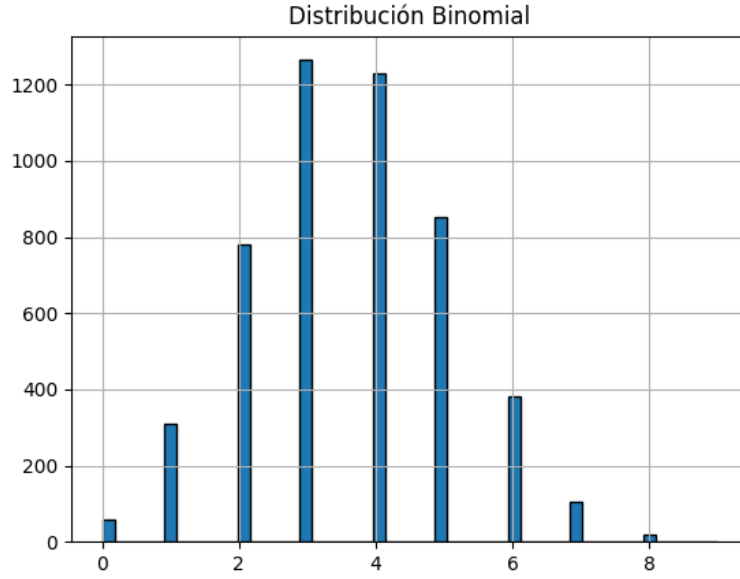


Figure 6: Histograma para la distribución binomial.

2.2.3 Distribución Hipergeométrica

Modela la cantidad de éxitos al extraer una muestra sin reemplazo de tamaño n desde una población de tamaño N , que contiene K elementos exitosos.

La función de probabilidad de una variable aleatoria con distribución hipergeométrica puede deducirse a través de razonamientos combinatorios y es igual a:

$$f(x) = \frac{\binom{N_p}{x} \binom{N_q}{n-x}}{\binom{N}{n}} \quad (24)$$

con $0 \leq x \leq Np$, y $0 \leq n - x \leq Nq$. Donde x, n y N son enteros. El valor esperado y la variancia se caracterizan como sigue:

$$EX = np \quad (25)$$

$$VX = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right) \quad (26)$$

La generación de valores hipergeométricos involucra, substancialmente, la simulación de experimentos de muestreo sin reemplazo.

2.2.4 Distribución Poisson

Modela la cantidad de eventos que ocurren en un intervalo de tiempo o espacio bajo una tasa de ocurrencia constante λ . Si tomamos una serie de n ensayos independientes de Bernoulli, en cada uno de los cuales se tenga una probabilidad p muy pequeña relativa a la ocurrencia de un cierto evento, a medida que n tiende al infinito, la probabilidad de x ocurrencias está dada por la distribución de Poisson

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (27)$$

Esto sucede siempre y cuando permitamos que p se aproxime a cero de manera que se satisfaga la relación $\lambda = np$.

Gráfico

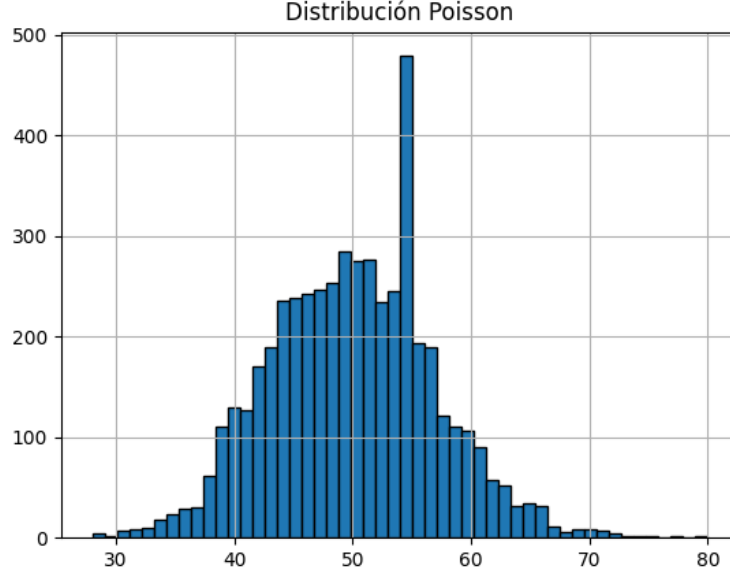


Figure 7: Histograma para la distribución Poisson obtenida.

2.2.5 Distribución Empírica Discreta

Sea X una variable aleatoria discreta tal que $P(X = b_i) = p_i$. Una forma directa de generar esta variable en una computadora consiste en utilizar un número aleatorio r , uniformemente distribuido en el intervalo $(0, 1)$, y asignar a X el valor b_i si se cumple la siguiente condición:

$$p_1 + \dots + p_{i-1} < r \leq p_1 + \dots + p_i \quad (28)$$

Este enfoque es la base de muchos métodos de generación de variables aleatorias discretas. Sin embargo, la mayoría de las técnicas que lo emplean requieren programas relativamente complejos y un tiempo de cómputo considerable.

Uno de los métodos más rápidos fue desarrollado por G. Marsaglia. Este procedimiento parte del supuesto de que se dispone de una computadora decimal cuyas palabras de memoria pueden ser accedidas mediante números, una característica común en la mayoría de los equipos actuales. Si bien este método es extremadamente veloz, requiere al menos 1000 posiciones de memoria.

Marsaglia también propuso una variante que reduce significativamente el uso de memoria, aunque a costa de un pequeño aumento en el tiempo de cómputo.

Se utilizó para la generación de valores en esta distribución, las siguientes probabilidades:

Valor	Probabilidad
0	0.273
1	0.037
2	0.195
3	0.009
4	0.124
5	0.058
6	0.062
7	0.151
8	0.047
9	0.044

Table 1: Probabilidades utilizadas para la generación de valores en la distribución empírica discreta.

Gráfico

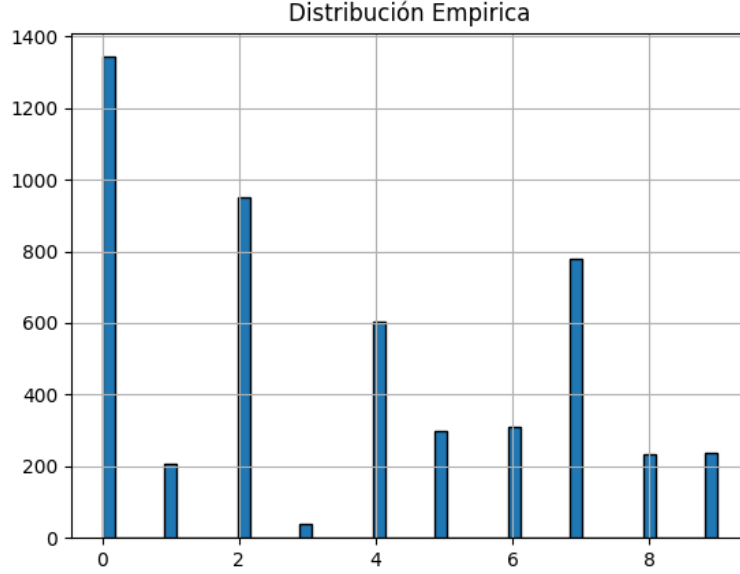


Figure 8: Histograma para la distribución empírica discreta obtenida.

3 Método de Rechazo

El método de rechazo es una técnica general para generar números aleatorios cuando la función de densidad de probabilidad (PDF) de la variable deseada no es fácil de muestrear directamente. Se basa en el uso de una distribución auxiliar más simple, que acota superiormente la función objetivo. El proceso se describe en los siguientes pasos:

1. **Normalización del rango:** Se define un factor de escala c tal que:

$$c \cdot f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

Esto asegura que la función de densidad $f(x)$ se encuentre acotada dentro del rango de interés.

2. **Definición del valor candidato:** Se genera una variable aleatoria $r_1 \sim U(0, 1)$ y se construye un valor candidato x a partir de:

$$x = a + (b - a) \cdot r_1$$

3. **Generación de valor de comparación:** Se genera otro número aleatorio $r_2 \sim U(0, 1)$.
4. **Condición de aceptación:** Se acepta x si:

$$r_2 \leq c \cdot f(x)$$

Si la condición no se cumple, se descarta el valor x y se vuelve al paso 2.

Este método garantiza que los valores aceptados siguen la distribución objetivo $f(x)$, aunque puede ser ineficiente si c es muy grande o si la región de aceptación es pequeña.

Generalmente, se toma la función propuesta como:

$$g(x) = c \cdot f(a + (b - a) \cdot r_1)$$

En este trabajo se aplicó este método para algunas distribuciones continuas y discretas, y se analizaron los resultados obtenidos mediante histogramas y pruebas de bondad de ajuste.

Distribución Normal - Método de Rechazo (Marsaglia)

Para la distribución normal se implementó el método de Marsaglia, también conocido como método polar. Este método utiliza dos variables uniformes independientes en el rango $[-1, 1]$ y aplica una transformación que genera valores normalmente distribuidos.

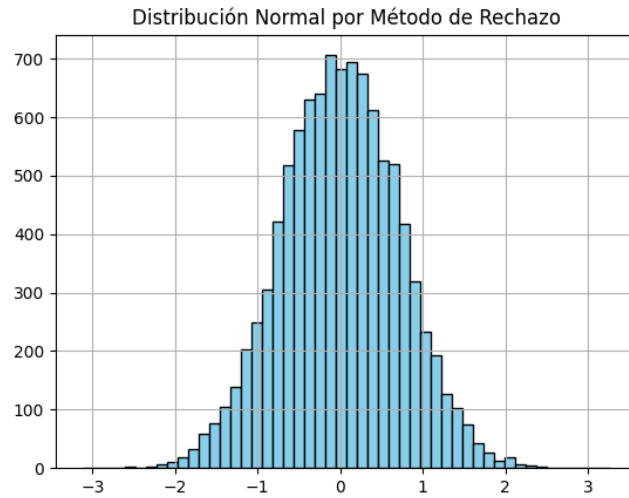


Figure 9: Histograma de la distribución Normal generada con el método de rechazo (Marsaglia)

El resultado de la prueba de bondad de ajuste para esta muestra fue satisfactorio:

- $\chi^2 = 6.14$
- $p\text{-valor} = 0.726$
- Grados de libertad = 7
- Resultado: **No se rechaza la hipótesis nula**

Esto indica que el generador por rechazo de la distribución normal es válido y genera muestras acordes a la distribución teórica.

Distribución Gamma - Método de Rechazo (Ahrens & Dieter)

Para la distribución gamma se implementó el método de Ahrens y Dieter. Si bien es un método teóricamente correcto, los resultados obtenidos con nuestra implementación no fueron satisfactorios.

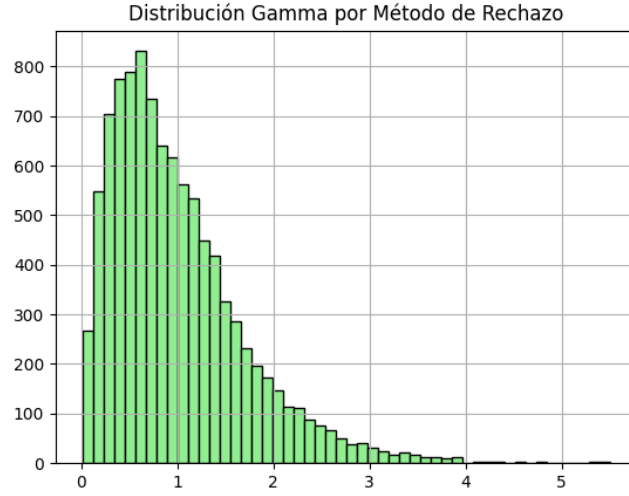


Figure 10: Histograma de la distribución Gamma generada con el método de rechazo (Ahrens & Dieter)

Los resultados del test estadístico muestran una diferencia significativa con la distribución esperada:

- $\chi^2 = 437549.62$
- $p\text{-valor} = 0.0$
- Grados de libertad = 7
- Resultado: **Se rechaza la hipótesis nula**

Por lo tanto, se concluye que esta implementación del método de rechazo para la distribución gamma **no genera una muestra representativa** y debe considerarse como no válida.

4 Conclusiones

Este trabajo presentó la implementación completa de generadores de números pseudoaleatorios para un conjunto amplio de distribuciones de probabilidad—uniforme, exponencial, gamma, normal, binomial, Pascal, hipergeométrica, Poisson y empírica discreta—y la verificación de su validez mediante pruebas de bondad de ajuste.

- **Generadores directos e inversiones de CDF.**
Las distribuciones uniforme y exponencial se generaron por métodos directos (función inversa) con resultados satisfactorios ($p\text{-valor} > 0.05$ en las pruebas χ^2).
- **Métodos compuestos y transformaciones.**
Para la normal clásica se empleó la *regla de los 12* (suma de uniformes) y, adicionalmente, se implementó el **método de rechazo de Marsaglia**, obteniéndose un ajuste excelente ($p\text{-valor} \approx 0.73$).
- **Distribuciones discretas.**
La binomial, la Pascal (binomial negativa) y la hipergeométrica se generaron mediante simulaciones de Bernoulli o extracción sin reposición. La binomial no superó la prueba χ^2 para el tamaño de muestra elegido, lo que sugiere revisar los parámetros o aumentar la muestra; la hipergeométrica y la Pascal sí resultaron consistentes con la teoría.
- **Método de rechazo.**
 - *Normal (Marsaglia)*: histograma y test χ^2 confirman la adecuación del generador (Fig. ??).
 - *Gamma (Ahrens–Dieter)*: la implementación no fue satisfactoria ($p\text{-valor} = 0$), por lo que se recomienda emplear otro algoritmo (por ejemplo, el método de aceptación–rechazo con parámetros ajustados o el algoritmo de Marsaglia & Tsang) si se requiere esta distribución con alta fidelidad estadística.

- **Comparación global.**

El cuadro resumen de las pruebas χ^2 muestra que la mayoría de los generadores cumplen los criterios de aceptación al nivel de significancia $\alpha = 0.05$, salvo los casos puntuales mencionados (binomial y gamma-rechazo), que quedan como líneas de mejora futura.

Conclusión general. Contar con generadores confiables para distintas distribuciones es un pilar fundamental en simulación. Los resultados obtenidos validan la mayor parte de las implementaciones y resaltan la importancia de (i) elegir el método adecuado para cada distribución, (ii) calibrar correctamente los parámetros y (iii) respaldar siempre la implementación con pruebas de bondad de ajuste. De cara a trabajos futuros se propone:

1. Optimizar la generación gamma mediante algoritmos más robustos.
2. Analizar la eficiencia (tiempo de cómputo vs. tasa de rechazo) de los distintos métodos implementados.
3. Extender la batería de pruebas a Kolmogórov–Smirnov y Anderson–Darling para distribuciones continuas, y a la prueba exacta de Fisher para casos discretos con frecuencias bajas.

Estos pasos garantizarán una base estadística sólida para los experimentos de simulación que dependen de distribuciones no uniformes.

References

- [1] T. H. Naylor, J. L. Balintfy, D. S. Burton y K. Young, *Técnicas de simulación en computadoras*. McGraw-Hill, 2.^a ed. (traducción al español), 1982.
- [2] G. Marsaglia, “The Polar Method for Generating Random Normal Variates,” *Journal of the ACM*, vol. 13, núm. 4, pp. 508-517, 1966. (Disponible en castellano en múltiples compilaciones de artículos sobre métodos Monte Carlo).
- [3] J. H. Ahrens y U. Dieter, “Computer Methods for Sampling from Gamma, Beta, Poisson and Binomial Distributions,” *Computing*, vol. 12, pp. 223-246, 1974.
- [4] L. Devroye, *Non-Uniform Random Variate Generation*. Springer-Verlag, 1986. (Existe edición digital liberada; capítulos 2 y 9 cubren método de rechazo).
- [5] J. E. Gentle, *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer, 2.^a ed., 2003. Cap. 6 (Método de aceptación-rechazo).
- [6] F. Barsan, “Métodos de generación de variables aleatorias para simulación”, *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial RIAI*, vol. 10, núm. 4, pp. 425-436, 2013.
- [7] D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 2: Seminumerical Algorithms, 3.^a ed. (traducción al español: “Algoritmos Seminumerarios”). Addison-Wesley, 1998. Sección 3.4 (Generación de números aleatorios no uniformes).
- [8] J. Banks, J. S. Carson, B. L. Nelson y D. M. Nicol, *Discrete-Event System Simulation*. Prentice-Hall, 5.^a ed., 2010. Cap. 7 (Pruebas de bondad de ajuste).
- [9] R. F. Casal, “Método de Aceptación-Rechazo”. Apuntes en línea, capítulo del libro interactivo *Simulación: Generación de Números Aleatorios y Variables Aleatorias*, 2023. <https://rubenfcasal.github.io/simbook/AR.html> (Consultado el 29 abr 2025).