

HW3 - 評比績效指標

第 7 組 – 林正雄 R05323045 沈沛瑄 R07525056 張家郡 R07944036

本組採用的績效評比指標為 economic performance measure(EPM)，EPM 為 Aumann and Serrano(2008)所提出之 riskiness 之延伸，EPM 擁有 riskiness 良好的經濟、數學性質，再結合由 1990 年諾貝爾經濟學獎得主 William Sharpe 於 1964 年所提出的 Sharpe Ratio，將 riskiness 帶入至績效評比的應用面，也解決 Sharpe Ratio 的部分缺點。

1. 指標的由來：

Sharpe Ratio 自上世紀 60 年代被提出以來，便一直被使用至今，是目前評估基金績效表現中非常常見的指標，其簡單的計算與容易理解的衡量邏輯讓其歷久不衰，與 Treynor index 和 Jensen's alpha 為衡量投資風險之經典指標，如同 Treynor index 被批評只考量系統性風險一般，Sharpe Ratio 也有許多地方為人詬病，比如其假設投資報酬率為常態分配、將正報酬率與負報酬率的波動一視同仁等等，故有許多研究致力於改善 Sharpe Ratio，如 Sortino and Price 在 1994 年提出的 Sortino Ratio，便將 Sharpe Ratio 做調整，只考慮投資報酬率低於無風險利率時的波動，將投資人較在意資產價格下跌時的波動之因素考量進去，解決 Sharpe Ratio 將好壞的波動都視為相同的缺點。

自 Aumann and Serrano 在 2008 年提出 riskiness 後，Sharpe Ratio 的改良又可以再進一步，Ulrich Homma 與 Christian Pigorsch 於 2012 年的 *Beyond the Sharpe ratio: An application of the Aumann-Serrano index to performance measurement* 提出 economic performance measure（以下簡稱為 EPM），使用 Aumann and Serrano (2008) 所提出之 riskiness 替代 Sharp Ratio 的標準差，解決 Sharpe Ratio 未考量報酬率分配的偏態、峰度等高階動差的缺點，並擁有一階與二階隨機優越(Stochastic Dominance)的性質，使用 EPM 讓 Sharpe Ratio 衡量風險的概念也能良好地應用在非常態分佈的現實世界。

2. 指標的計算與內涵：

EPM 使用 Aumann and Serrano (2008) 所提出之 riskiness 替代 Sharp Ratio 的標準差，公式如下：

$$Sharpe\ Ratio = \frac{E(r)}{\sigma(\tilde{r})} = \frac{E(\tilde{r} - r^f)}{\sigma(\tilde{r})}$$

$$EPM = \frac{E(r)}{AS(r)} = \frac{E(\tilde{r} - r^f)}{AS(\tilde{r} - r^f)}$$

此處以 $AS(r)$ 代表 Aumann and Serrano (2008) 所提出之 riskiness，而上式的 r 為超額報酬

以下以 $AS(r)$ 代表 Aumann and Serrano (2008) 所提出之 riskiness，實務上計算 EPM 與計算 $AS(r)$ 相同，計算出 $AS(r)$ 後 EPM 也呼之欲出，計算 $AS(r)$ 採用 Method of Moments 做無母數估計：

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e^{-\frac{r_i}{AS(r)}} - 1 = 0$$

計算出 $AS(r)$ 後再套入至 EPM 公式：

$$EPM = \frac{E(r)}{AS(r)}$$

3. 指標的依據：

因 $AS(r)$ 擁有一階與二階隨機優越的性質，故替換掉 Sharpe Ratio 的標準差後，EPM 也同樣擁有此優良性質。

同時，在投資報酬符合常態分配時，EPM 也有其優美性質：

根據 $AS(r)$ 的計算方式：

$$E\left(e^{-\frac{r}{AS(r)}}\right) = 1$$

我們可以知道當 r 服從於常態分配時， $AS(r)$ 可以得到一個漂亮的結果：

當超額報酬 r 為隨機變數且

$$r \sim N(\mu, \sigma^2)$$

由常態分配之特徵函數(characteristic function)

$$E(e^{tr}) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

替換 t 為 $-\frac{1}{AS(r)}$ ，我們可以得到

$$E\left(e^{-\frac{r}{AS(r)}}\right) = e^{-\frac{\mu}{AS(r)} + \frac{\sigma^2}{2 \times AS(r)^2}} = 1$$

故我們可以得到

$$AS(r) = \frac{\sigma^2}{2\mu}$$

推廣至 EPM，我們可以得到當超額報酬服從常態分配時：

$$EPM = \frac{\mu}{\frac{\sigma^2}{2\mu}} = 2 \frac{\mu^2}{\sigma^2} = 2 \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 = 2 \times SR(r)^2$$

此處以 $SR(r)$ 代表 Sharpe Ratio

故我們得知，當報酬呈現常態分配時，EPM 會是兩倍 Sharpe Ratio 之平方。除了在常態分配時吻合 Sharpe Ratio 之假設，EPM 考慮到不止一階二階動差之平均數與標準差，還可以解釋投資人所關心的三階與四階之偏態與峰態，一般來說，投資人較喜歡正偏態與低峰態，因其左尾極端風險較低。

4. 指標的應用面：

因 Aumann and Serrano (2008) 所提出之 riskiness 與其延伸的 EPM 為近十年之研究，其應用層面與投資人可接受度還有待時間驗證，目前無著名機構採用。

雖還未被廣大投資機構採用，但 riskiness 與本組所採用的 EPM 近幾年已開始有許多實證研究，提出此績效指標之作者 Ulrich Homma 與 Christian Pigorsch，亦在其提出 EPM 的同篇論文 *Beyond the Sharpe ratio: An application of the Aumann-Serrano index to performance measurement* 進行了實證研究，Ulrich Homma 與 Christian Pigorsch 使用 1991-2010 年的資料，針對 25 檔大型成長基金及 25 檔避險基金對 Sharpe Ratio 及新的績效指標 EPM 做實證，將 Sharpe Ratio、EPM、偏態與峰態係數進行排名，發現 EPM 較能解釋實際情況，尤其在風險較高的避險基金，其 Sharpe Ratio 與 EPM 之差異較大，作者指出，不同於 Sharpe Ratio，EPM 對於擁有負偏態與較高的峰態之投資標的具有懲罰效果，若投資人在意投資標的之高階動差，使用 EPM 作為績效衡量指標，將是一個較具有經濟意義的衡量方法。

參考資料：

Aumann and Serrano(2008), An Economic Index of Riskiness

Ulrich Homm and Christian Pigorsch(2012), Beyond the Sharpe ratio: An application of the AumannSerrano index to performance measurement

Cuizhen Niu(2017), Theory and application of an economic performance measure of risk

Wikipedia – Sharpe-ratio