Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Introduction

Motivation

- Garanties à la compilation
- Preuves logiques

Objectif

- Système de type simple
- Système de type dépendant
- $2 + 2 = 4$

Le λ-calcul non typé

Présentation formelle

Un programme

$$\texttt{(}\lambda\ \texttt{x (}\lambda\ \texttt{y (x y))}$$

Syntaxe

$$\begin{array}{llll} t & ::= & & (\lambda\text{-terme}) \\ & \mid & x & (\text{variable}) \\ & \mid & \lambda x\, t & (\text{abstraction}) \\ & \mid & (t\ t) & (\text{application}) \end{array}$$

Le λ-calcul non typé

Réduction et évaluation

Évaluation

evaluation ((lambda x (lambda y (x y))) t u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (t y) y u)
$\rightarrow$ (t u)

Le λ-calcul non typé

Extensions

Addition

x + y = (λ x (λ y (iter x (λ n (succ n)) y)))

Les booléens

- true
- false
- ifte c t u

Les entiers

- zero
- succ
- iter n f a

Le λ-calcul simplement typé

Motivations

exemple de fonction

$$\texttt{f = } (\lambda\ \texttt{x}\ (\lambda\ \texttt{y}\ (\lambda\ \texttt{fu (ifte x (fu y) y)))))}$$

$\texttt{f true 3} \rightarrow 4$

$\texttt{f 3 true} \not\rightarrow$

Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\;x\;\;(fu\;y)\;\;y)))}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; (fu\; y)\; y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; (fu\; y)\; y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; (fu\; y)\; y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte}\,\text{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\dfrac{\Gamma \vdash \text{int} \to (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\text{ifte}\,\text{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}{\varnothing \vdash \text{bool} \to \text{int} \to (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\text{ifte}\,\text{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int},\ fu : \text{int} \to \text{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni \mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$
\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}
$$

$$
\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\ fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathrm{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni \mathrm{ifte}\ \mathrm{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathrm{ifte}\ \mathrm{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathrm{ifte}\ \mathrm{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\ fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathit{fu} \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (\mathit{fu}\ y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda \mathit{fu}\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y))}
  }
}{
  \varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda \mathit{fu}\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y)))
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ \mathit{fu} : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\cfrac{
  \cfrac{
    \cfrac{
      \cfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
    }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \cfrac{
      \cfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
    \quad
    \cfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{
    \cfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\ (\lambda fu\ (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
  }
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\ (\lambda y\ (\lambda fu\ (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
  }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
  \quad
  \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{
  \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}
  {\dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
  {\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}}
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}}
    }{\Delta \vdash \text{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{fu : (\text{int} \to \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \to \text{int})}
      \quad
      \dfrac{\dfrac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x\ \ (fu\ y)\ \ y}{\Gamma \vdash \text{int} \to (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\text{ifte int } x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
  }
}{\varnothing \vdash \text{bool} \to \text{int} \to (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\text{ifte int } x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int},\ fu : \text{int} \to \text{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathrm{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathrm{int} \to \mathrm{int})} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathrm{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathrm{int}}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\; y)} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathrm{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathrm{int}}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni \mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\,x\ \ (fu\; y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\,x\ \ (fu\; y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\,x\ \ (fu\; y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\ fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Les limites

exemple de fonction

```
      and : List Bool →
List Bool → List Bool
      and xs = (Fold (List Bool) Bool xs
                (f (pas finis))
                (Nil alpha))
```

Peut-on garantir la taille des listes à la compilation ?

Les types dépendants

Les vecteurs

Parler de l'exemple précéndent avec les types dépendants

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\frac{}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2)\ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

$$\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+1)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+1)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\dfrac{\overline{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \overline{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

$$\dfrac{\overline{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \overline{\varnothing \vdash (2+1) \not\equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+1) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
$\text{sym} = ?$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id}\ A\ a\ \ b)(\text{id}\ A\ b\ \ a)))$
$\text{sym} = (\text{lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (?\ \ ))}$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\;\; b)(\text{id } A\, b\;\; a)))$
sym $=$ (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (?1) (?2) (?3) (?4) (?5)))))

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\;\; b)(\text{id } A\, b\;\; a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (lambda (a b c) (id A b a)) (?2) (?3) (?4) (?5)))))

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\ \ b)(\text{id } A\, b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (lambda (a b c) (id A b a)) a (?3) (?4) (?5)))))

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\ \ b)(\text{id } A\, b\ \ a)))$
sym $=$ (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (lambda (a b c) (id A b a)) a b (?4) (?5)))))

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\ \ b)(\text{id } A\, b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (lambda (a b c) (id A b a)) a b q (?5)))))

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\ \ b)(\text{id } A\, b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (lambda (a b c) (id A b a)) a b q (lambda a (refl))))))

Conclusion

Résumé

- λ-calcul
- Système de type
- Automatisations de démonstration de preuves

Extensions

- Slow.fast typechecker
- Tactics
- Proofs & complexity
- Untyped reduction : Krivine machine
- Rational bidirectionalisation