

# Implémentation de la théorie des types dépendants

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

# Introduction

## Pourquoi les types dépendants ?

- Langages de programmation (IDRIS, ATS...)
- Assistants de preuve (Coq, Agda...)

## Pourquoi implémenter une nouvelle théorie des types ?

- Typage bidirectionnel
- Aspect pédagogique

## Approche

- Difficulté d'implémenter les types dépendants
- Le  $\lambda$ -calcul non typé
- Le  $\lambda$ -calcul simplement typé
- Les types dépendants

# Le $\lambda$ -calcul non typé

## Présentation formelle

### Un programme

$$(\lambda x (\lambda y (x y)))$$

### Syntaxe

$t ::=$		( $\lambda$ -terme)
	$x$	(variable)
	$\lambda x t$	(abstraction)
	$(t t)$	(application)

# Le $\lambda$ -calcul non typé

Evaluation appel par nom

## Exemple de rédex

$((\text{lambda } x \ x) \ t)$

## Évaluation

evaluation  $((\text{lambda } x \ (\text{lambda } y \ (x \ y))) \ t \ u)$   
→ evaluation (substitution  $(\text{lambda } y \ (x \ y) \ u) \ x \ t)$   
→ evaluation  $((\text{lambda } y \ (t \ y)) \ u)$   
→ evaluation (substitution  $(t \ y) \ y \ u)$   
→ evaluation  $(t \ u)$   
→  $(t \ u)$

# Le $\lambda$ -calcul non typé

Evaluation appel par nom

## Exemple de rédex

$$((\text{lambda } x \ x) \ t) \rightarrow t$$

## Évaluation

evaluation  $((\text{lambda } x \ (\text{lambda } y \ (x \ y))) \ t \ u)$   
→ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)  
→ evaluation  $((\text{lambda } y \ (t \ y)) \ u)$   
→ evaluation (substitution (t y) y u)  
→ evaluation (t u)  
→ (t u)

# Le $\lambda$ -calcul non typé

## Extensions

### Addition

$$x + y = (\lambda x (\lambda y (\text{iter } x (\lambda n (\text{succ } n)) y)))$$

### Les booléens

- true
- false
- ifte  $c \ t \ u$

### Les entiers

- zero
- succ
- iter  $n \ f \ a$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Motivations

### Exemple de fonction

```
f = (λ x (λ y (λ fu (ifte x (fu y) y))))
```

f true 3 succ  $\rightarrow$  4

f 3 true succ  $\nrightarrow$

*Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?*

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Règles de typage

$$\begin{array}{c} (\text{VAR}) \\ x : T \in \Gamma \\ \hline \Gamma \vdash x : T \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{ABS}) \\ \Gamma, x : A \vdash t : B \\ \hline \Gamma \vdash \lambda x t : A \rightarrow B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{APP}) \\ \Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash s : A \\ \hline \Gamma \vdash f s : B \end{array}$$



# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Règles de typage

$$\begin{array}{c} (\text{VAR}) \\ x : T \in \Gamma \\ \hline \Gamma \vdash x : T \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{ABS}) \\ \Gamma, x : A \vdash t : B \\ \hline \Gamma \vdash \lambda x t : A \rightarrow B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{APP}) \\ \Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash s : A \\ \hline \Gamma \vdash f s : B \end{array}$$

## Ambiguïté

$$\frac{\frac{\Gamma, x : ?_A \vdash \text{true} : \text{bool}}{\Gamma \vdash (\lambda x \text{true}) : ?_A \rightarrow \text{bool}} \quad \Gamma \vdash \lambda y y : ?_A}{\Gamma \vdash (\lambda x \text{true}) (\lambda y y) : \text{bool}}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

Système de type bidirectionnel

## Syntaxe des termes bidirectionnels

$ex$	$::=$	(termes synthétisables)
	$(ex\ in)$	(application)
	$x$	(variable)
	$(in : T)$	(annotation)
$in$	$::=$	(termes vérifiables)
	$\lambda x\ in$	(abstraction)
	$inv(ex)$	(inversion)

## Fonctions de typage

- $\Gamma \vdash T \ni in$
- $\Gamma \vdash ex \in T$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

---

$$\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x (fu y) y)))$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x (fu y) y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x (fu y) y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y \in}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \text{ (fu } y) \text{ } y \in}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \text{ (fu } y) \text{ } y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \text{ (fu } y) \text{ } y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{\Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y)}{\Delta \vdash \text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y \in}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y\ (\lambda fu\ (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x\ (\lambda y\ (\lambda fu\ (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y \in}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$



# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{}{\Delta \vdash fu \in}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y} \frac{}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y \in} \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y))} \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta \quad fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in} \\ \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in}} \quad \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y} \quad \frac{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \quad \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in \text{int}}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \quad \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

# Les types dépendants

## Première approche

### Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\begin{aligned} \forall A : * (\forall m : \text{int} \\ & (\forall xs : (\text{vec } A \ m) \\ & (\forall n : \text{int} \\ & (\forall ys : (\text{vec } A \ m)(\text{vec } A \ (m + n)))))) \end{aligned}$$

# Les types dépendants

## Première approche

### Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\forall A : * (\forall m : \text{int} \\ (\forall xs : (\text{vec } A \ m) \\ (\forall n : \text{int} \\ (\forall ys : (\text{vec } A \ m)(\text{vec } A \ (m + n))))))$$

Terme =

$$\lambda A (\lambda m (\lambda xs (\lambda n (\lambda ys \\ \text{fold}(A(\lambda mp \ \lambda np \ \text{vec } A \ (mp + n)) \ mxs \\ (\lambda nf \ \lambda vecun \ \lambda a \ \lambda xsf \ \text{cons } a \ xsf) \ ys))))))$$



# Les types dépendants

Equivalence entre les termes et les types

## Nouveaux constructeurs

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *} \text{(Star)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S. T} \text{(Pi)}$$

## Fonction identité

$$\forall \alpha : * (\forall x : \text{alpha}(\text{alpha})) \ni \lambda \alpha \lambda x x$$

# Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P”  $\equiv$  “t est de type P (t :P) “

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P”  $\equiv$  “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\frac{}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P”  $\equiv$  “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 2) \equiv 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P”  $\equiv$  “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 2) \equiv 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P”  $\equiv$  “t est de type P (t :P) “

$$2 + 2 = 4$$

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 2) \equiv 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

$$2 + 1 \neq 4$$

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 1) \neq 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 1) \ 4 \ni \text{refl}}$$

# Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$   
 $\text{sym} = ?$

Réponses du vérificateur de type

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$   
 $\text{sym} = (\text{lambda } A (\text{lambda } a (\text{lambda } b (\text{lambda } q (\text{? }))))$

Réponses du vérificateur de type



# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A ( ?1) ( ?2) ( ?3) ( ?4) ( ?5)))) ))
```

### Réponses du vérificateur de type

```
?1 : Pi a,b :A(Pi i :id A a b (*))
```

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A P (?2) (?3) (?4) (?5))))))
```

```
P = (lambda (a b c) (id A b a))
```

### Réponses du vérificateur de type

```
?1 : Pi a,b :A(Pi i :id A a b (*))      ?2 : A
```

# Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A P a ( ?3) ( ?4) ( ?5)))) ))
```

```
P = (lambda (a b c) (id A b a))
```

Réponses du vérificateur de type

```
?2 : A      ?3 : A
```

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A P a b ( ?4) ( ?5)))) ))
```

```
P = (lambda (a b c) (id A b a))
```

### Réponses du vérificateur de type

```
?3 : A      ?4 : id A a b
```

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$   
 $\text{sym} = (\text{lambda } A \ (\text{lambda } a \ (\text{lambda } b \ (\text{lambda } q \ ($   
 $\quad (\text{trans } A \ P \ a \ b \ q \ ( ?5)))) \ ))$

$P = (\text{lambda } (a \ b \ c) (\text{id } A \ b \ a))$

## Réponses du vérificateur de type

?4 :  $\text{id } A \ a \ b$                       ?5 :  $\Pi a : A \ (P(a, a, \text{relf}))$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$   
 $\text{sym} = (\text{lambda } A \ (\text{lambda } a \ (\text{lambda } b \ (\text{lambda } q \ ($   
 $\quad (\text{trans } A \ P \ a \ b \ q \ (\text{lambda } a \ (\text{refl})))))) \ ))$

$P = (\text{lambda } (a \ b \ c) \ (\text{id } A \ b \ a))$

## Réponses du vérificateur de type

?5 :  $\Pi a : A \ (P(a, a, \text{refl}))$

# Conclusion

## Résumé

- $\lambda$ -calcul
- Système de type
- Assistant de démonstration de preuves

## Extensions

- Amélioration du logiciel
- Tactiques
- Prouver ce système et analyser sa complexité
- Rationaliser la bidirectionalisation