Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Introduction

Motivation

- A
- B
- C

Objectif

- A
- $2 + 2 = 4$
- C

Le λ-calcul non typé

Présentation formelle

Un programme

$$\texttt{(}\lambda\ \texttt{x}\ \texttt{(}\lambda\ \texttt{y}\ \texttt{(x y))}$$

Syntaxe

$$\begin{array}{lcll} t & ::= & & (\lambda\text{-terme}) \\ & \mid & x & (\text{variable}) \\ & \mid & \lambda x\, t & (\text{abstraction}) \\ & \mid & (t\ t) & (\text{application}) \end{array}$$

Évaluation

evaluation ((lambda x (lambda y (x y))) t u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (t y) y u)
$\rightarrow$ (t u)

Le λ-calcul non typé

Extensions

Addition

$$\texttt{x + y = (}\lambda\texttt{ x (}\lambda\texttt{ y (iter x (}\lambda\texttt{ n (succ n)) y)))}$$

Les booléens

- true
- false
- ifte c t u

Les entiers

- zero
- succ
- iter n f a

Le λ-calcul simplement typé

Motivations

exemple de fonction

$$\texttt{f = (}\lambda\texttt{ x (}\lambda\texttt{ y (}\lambda\texttt{ fu (ifte x (fu y) y))))}$$

$\texttt{f true 3} \rightarrow 4$

$\texttt{f 3 true} \not\rightarrow$

Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \overline{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)} \quad \overline{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\; (fu\; y)\; y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\; (fu\; y)\; y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\; (fu\; y)\; y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; \ (fu\; y)\ \ y}
  }{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; \ (fu\; y)\ \ y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; \ (fu\; y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (\mathit{fu}\ y)}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y}
  }{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda \mathit{fu}\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda \mathit{fu}\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ \mathit{fu} : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash fu \in}}{\Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \text{int} \to (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\text{ifte int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \text{bool} \to \text{int} \to (\text{int} \to \text{int}) \to \text{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\text{ifte int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int},\ fu : \text{int} \to \text{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x : \mathrm{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathrm{bool}}
      }{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x}
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{fu : (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathrm{int} \to \mathrm{int})}
        \quad
        \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}
      }{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\ y)}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni \mathrm{ifte}\ \mathrm{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}
  }{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte}\ \mathrm{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte}\ \mathrm{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\ fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
      }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
        \quad
        \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
      }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\;\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y}
  }{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\;\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\;\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\, y)} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte\,int}\; x\ \ (fu\, y)\ \ y}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte\,int}\; x\ \ (fu\, y)\ \ y))}}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte\,int}\; x\ \ (fu\, y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Les limites

Slide avec exemple du "et" logique entre deux vecteurs dans un stystème de type simple

Peut-on garantir la taille des listes à la compilation ?

Parler de l'exemple avec maintenant les types dépendants

Les types dépendants

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$$\frac{}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y\ \text{ifte}\ x\ \text{succ}\ y\ \ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y \ \text{ifte} \ x \ \text{succ} \ y \ \ y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A \, (id \ A \ a \ b \to id \ A \ b \ a)) \ni \lambda x \ \lambda y \ \text{ifte} \ x \ \text{succ} \ y \ \ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte}\, x\, \text{succ}\, y\;\; y}}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y\, \text{ifte}\, x\, \text{succ}\, y\;\; y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\, (id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\, \lambda y\, \text{ifte}\, x\, \text{succ}\, y\;\; y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$$
\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\; y \in \mathsf{int}}}{\dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\; x\; \mathsf{succ}\; y\;\; y}{\dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda y\; \mathsf{ifte}\; x\; \mathsf{succ}\; y\;\; y}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\; A\; a\; b \rightarrow id\; A\; b\; a)) \ni \lambda x\; \lambda y\; \mathsf{ifte}\; x\; \mathsf{succ}\; y\;\; y}}}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \; \dfrac{}{\Delta \vdash \text{succ}\; y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte}\; x\; \text{succ}\; y\;\; y}}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y\; \text{ifte}\; x\; \text{succ}\; y\;\; y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\, (id\; A\; a\; b \to id\; A\; b\; a)) \ni \lambda x\; \lambda y\; \text{ifte}\; x\; \text{succ}\; y\;\; y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\; y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\; x\; \mathsf{succ}\; y\;\; y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\; \mathsf{ifte}\; x\; \mathsf{succ}\; y\;\; y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\, (id\; A\; a\; b \to id\; A\; b\; a)) \ni \lambda x\; \lambda y\; \mathsf{ifte}\; x\; \mathsf{succ}\; y\;\; y}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Conclusion

Résumé

- A
- B
- C

Extensions

- A
- B
- C
- Slow.fast typechecker
- Tactics
- Proofs & complexity
- Untyped reduction : Krivine machine
- Rational bidirectionalisation

Autre titre

```
let test = foo
```

Foo.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x\, \lambda y\, x\, y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$
$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$\dfrac{\overline{\Delta \vdash \lambda y\, x\, y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\, \lambda y\, x\, y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$
$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$\cfrac{\cfrac{\overline{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{E \vdash x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}} \qquad \overline{E \vdash y : \mathsf{int}}}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \\
E &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}
\end{aligned}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool} \in E}{E \vdash x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}} \qquad \dfrac{}{E \vdash y : \mathrm{int}}}{E \vdash x\ y : \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathrm{int} \to \mathrm{bool}) \to \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}
$$

$$
\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}
$$

$$
E \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}, y : \mathrm{int}
$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool} \in E}{E \vdash x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}} \qquad \cfrac{y : \mathrm{int} \in E}{E \vdash y : \mathrm{int}}}{E \vdash x\ y : \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathrm{int} \to \mathrm{bool}) \to \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}$$
$$E \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}, y : \mathrm{int}$$

(Backup slides)

...