

Implémentation de la théorie des types dépendants

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Introduction

Pourquoi les types dépendants ?

- Langages de programmation (IDRIS, ATS...)
- Assistants de preuve (Coq, Agda...)

Pourquoi implémenter une nouvelle théorie des types ?

- Typage bidirectionnel
- Aspect pédagogique

Approche

- Difficulté d'implémenter les types dépendants
- Le λ -calcul non typé
- Le λ -calcul simplement typé
- Les types dépendants

Le λ -calcul non typé

Présentation formelle

Un programme

$$(\lambda x (\lambda y (x y)))$$

Syntaxe

$t ::=$		(λ -terme)
	x	(variable)
	$\lambda x t$	(abstraction)
	$(t t)$	(application)

Le λ -calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

$((\text{lambda } x \ x) \ t)$

Le λ -calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

$$((\text{lambda } x \ x) \ t) \rightarrow t$$

Le λ -calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

$$((\text{lambda } x \ x) \ t) \rightarrow t$$

Évaluation

evaluation $((\text{lambda } x \ (\text{lambda } y \ (x \ y))) \ t \ u)$
→ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
→ evaluation $((\text{lambda } y \ (t \ y)) \ u)$
→ evaluation (substitution (t y) y u)
→ evaluation (t u)
→ (t u)

Le λ -calcul non typé

Extensions

Addition

$$x + y = (\lambda x (\lambda y (\text{iter } x (\lambda n (\text{succ } n)) y)))$$

Les booléens

- true
- false
- ifte $c \ t \ u$

Les entiers

- zero
- succ
- iter $n \ f \ a$

Le λ -calcul simplement typé

Motivations

Exemple de fonction

```
f = (λ x (λ y (λ fu (ifte x (fu y) y))))
```

f true 3 succ \rightarrow 4

f 3 true succ \nrightarrow

Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?

Le λ -calcul simplement typé

Règles de typage

$$\begin{array}{c} (\text{VAR}) \\ x : T \in \Gamma \\ \hline \Gamma \vdash x : T \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{ABS}) \\ \Gamma, x : A \vdash t : B \\ \hline \Gamma \vdash \lambda x t : A \rightarrow B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{APP}) \\ \Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash s : A \\ \hline \Gamma \vdash f s : B \end{array}$$

Le λ -calcul simplement typé

Règles de typage

$$\begin{array}{c} (\text{VAR}) \\ x : T \in \Gamma \\ \hline \Gamma \vdash x : T \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{ABS}) \\ \Gamma, x : A \vdash t : B \\ \hline \Gamma \vdash \lambda x t : A \rightarrow B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{APP}) \\ \Gamma \vdash f : A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash s : A \\ \hline \Gamma \vdash f s : B \end{array}$$

Ambiguïté

$$\frac{\frac{\Gamma, x : ?_A \vdash \text{true} : \text{bool}}{\Gamma \vdash (\lambda x \text{true}) : ?_A \rightarrow \text{bool}} \quad \Gamma \vdash \lambda y y : ?_A}{\Gamma \vdash (\lambda x \text{true}) (\lambda y y) : \text{bool}}$$

Le λ -calcul simplement typé

Système de type bidirectionnel

Syntaxe des termes bidirectionnels

ex	$::=$	(termes synthétisables)
	$(ex\ in)$	(application)
	x	(variable)
	$(in : T)$	(annotation)
in	$::=$	(termes vérifiables)
	$\lambda x\ in$	(abstraction)
	$inv(ex)$	(inversion)

Fonctions de typage

- Vérification : $\Gamma \vdash T \ni in$
- Synthèse : $\Gamma \vdash ex \in T$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x (fu y) y)))$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x (fu y) y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x (fu y) y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in}$$

$$\frac{}{\Delta \vdash \text{int } \ni \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}$$

$$\frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \text{ (fu y) } y \in}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x \text{ (fu y) } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda \text{fu} (\text{ifte int } x \text{ (fu y) } y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda \text{fu} (\text{ifte int } x \text{ (fu y) } y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, \text{fu} : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{\Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y)}{\Delta \vdash \text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y \in}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y} \quad \frac{\Delta \vdash \text{int} \ni y}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y))}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y}{\Delta \vdash \text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y \in}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y} \\ \frac{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y))} \\ \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x\ (fu\ y)\ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{}{\Delta \vdash fu \in}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni (fu\ y)} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y \in} \\ \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y} \\ \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y))} \\ \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu\ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta \quad fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in} \\ \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y} \\ \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \\ \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta \quad fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y)} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \quad \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in}} \quad \frac{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \quad \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y) \quad \Delta \vdash \text{int} \ni y} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \quad \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x (\lambda y (\lambda fu (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \text{bool}} \quad \frac{fu : (\text{int} \rightarrow \text{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\text{int} \rightarrow \text{int})} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash \text{int} \ni (fu \ y)} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in \text{int}} \\ \frac{\Delta \vdash \text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y \in \text{int}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))} \\ \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y))}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow (\text{int} \rightarrow \text{int}) \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \ (\lambda y \ (\lambda fu \ (\text{ifte int } x \ (fu \ y) \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}, fu : \text{int} \rightarrow \text{int}$$

Les types dépendants

Première approche

Fonction identité

$\text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. x$

Les types dépendants

Première approche

Fonction identité

$\text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x x$

$\text{bool} \rightarrow \text{bool} \ni \lambda x x$

.....

Les types dépendants

Première approche

Fonction identité

$\text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x x$

$\text{bool} \rightarrow \text{bool} \ni \lambda x x$

.....

$\forall \alpha : * (\forall x : \alpha (\alpha)) \ni \lambda \alpha \lambda x x$

Les types dépendants

Première approche

Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\begin{aligned} \forall A : * & (\forall m : \text{int} \\ & (\forall xs : (\text{vec } A \ m) \\ & (\forall n : \text{int} \\ & (\forall ys : (\text{vec } A \ n) (\text{vec } A \ (m + n)))))) \end{aligned}$$

Les types dépendants

Première approche

Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\forall A : * (\forall m : \text{int} \\ (\forall xs : (\text{vec } A \ m) \\ (\forall n : \text{int} \\ (\forall ys : (\text{vec } A \ n) (\text{vec } A \ (m + n))))))$$

Terme =

$$\lambda A (\lambda m (\lambda xs (\lambda n (\lambda ys \\ \text{fold}(A(\lambda mp \ \lambda vp \ \text{vec } A \ (mp + n)) mxs \\ (\lambda nf \ \lambda vecun \ \lambda a \ \lambda xsf \ \text{cons } a \ xsf) ys))))))$$

Les types dépendants

Equivalence entre les termes et les types

Nouveaux constructeurs

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *} \text{(Star)}$$
$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S. T} \text{(Pi)}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” \equiv “t est de type P (t :P) “

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” \equiv “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\frac{}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” \equiv “t est de type P (t :P) “

2 + 2 = 4

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 2) \equiv 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” \equiv “t est de type P (t :P) “

2 + 2 = 4

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 2) \equiv 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” \equiv “t est de type P (t :P) “

$$2 + 2 = 4$$

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 2) \equiv 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 2) \ 4 \ni \text{refl}}$$

$$2 + 1 \neq 4$$

$$\frac{\overline{\emptyset \vdash (2 + 1) \neq 4}}{\emptyset \vdash \text{id int } (2 + 1) \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    ? ))
```

Réponses du vérificateur de type

```
? : id A b a
```

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$
 $\text{sym} = (\text{lambda } A \ (\text{lambda } a \ (\text{lambda } b \ (\text{lambda } q \ ($
 $\quad (\text{trans } A \ (?1) \ (?2) \ (?3) \ (?4) \ (?5))) \))$

Réponses du vérificateur de type

$?1 : \Pi a, b : A (\Pi i : \text{id } A \ a \ b \ (*))$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A P ( ?2) ( ?3) ( ?4) ( ?5))))))
```

```
P = (lambda (a b c) (id A b a))
```

Réponses du vérificateur de type

```
?1 : Pi a,b :A(Pi i :id A a b (*))      ?2 : A
```

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A P a ( ?3) ( ?4) ( ?5)))) ))
```

```
P = (lambda (a b c) (id A b a))
```

Réponses du vérificateur de type

```
?2 : A      ?3 : A
```

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

```
sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))  
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (  
    (trans A P a b ( ?4) ( ?5)))) ))
```

```
P = (lambda (a b c) (id A b a))
```

Réponses du vérificateur de type

```
?3 : A      ?4 : id A a b
```


Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$
 $\text{sym} = (\text{lambda } A \ (\text{lambda } a \ (\text{lambda } b \ (\text{lambda } q \ ($
 $\quad (\text{trans } A \ P \ a \ b \ q \ (?5))))))$

$P = (\text{lambda } (a \ b \ c) (\text{id } A \ b \ a))$

Réponses du vérificateur de type

?4 : $\text{id } A \ a \ b$?5 : $\Pi a : A \ (P(a, a, \text{relf}))$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \Pi A : * (\Pi a, b : A (\Pi q : (\text{Id } A \ a \ b) (\text{Id } A \ b \ a)))$
 $\text{sym} = (\text{lambda } A \ (\text{lambda } a \ (\text{lambda } b \ (\text{lambda } q \ ($
 $\quad (\text{trans } A \ P \ a \ b \ q \ (\text{lambda } a \ (\text{refl})))))) \))$

$P = (\text{lambda } (a \ b \ c) \ (\text{id } A \ b \ a))$

Réponses du vérificateur de type

?5 : $\Pi a : A \ (P(a, a, \text{refl}))$

Conclusion

Résumé

- λ -calcul
- Système de type
- Assistant de démonstration de preuves

Extensions

- Amélioration du logiciel
- Tactiques
- Prouver ce système et analyser sa complexité
- Rationaliser la bidirectionalisation