Implémentation de la théorie des types dépendants

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Introduction

Pourquoi les types dépendants ?

- Langages de programmation (IDRIS, ATS...)
- Assistants de preuve (Coq, Agda...)

Pourquoi implémenter une nouvelle théorie des types ?

- Typage bidirectionnel
- Aspect pédagogique

Approche

- Difficulté d'implémenter les types dépendants
- Le λ-calcul non typé
- Le λ-calcul simplement typé
- Les types dépendants

Le λ-calcul non typé

Présentation formelle

Un programme

$$\texttt{(}\lambda\texttt{ x (}\lambda\texttt{ y (x y))}$$

Syntaxe

$$
\begin{array}{lclr}
t & ::= & & (\lambda\text{-terme}) \\
 & | & x & (\text{variable}) \\
 & | & \lambda x\, t & (\text{abstraction}) \\
 & | & (t\ t) & (\text{application})
\end{array}
$$

Le λ-calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

((lambda x x) t)

Le λ-calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

$$((\text{lambda x x) t}) \rightarrow \text{t}$$

Le λ-calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

((lambda x x) t) $\rightarrow$t

Évaluation

evaluation ((lambda x (lambda y (x y))) t u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
$\rightarrow$ evaluation ((lambda y (t y)) u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (t y) y u)
$\rightarrow$ evaluation (t u)
$\rightarrow$ (t u)

Le λ-calcul non typé

Extensions

Addition

`x + y = (`λ` x (`λ` y (iter x (`λ` n (succ n)) y)))`

Les booléens

- true
- false
- ifte c t u

Les entiers

- zero
- succ
- iter n f a

Le λ-calcul simplement typé

Motivations

Exemple de fonction

$$\texttt{f = (}\lambda\texttt{ x (}\lambda\texttt{ y (}\lambda\texttt{ fu (ifte x (fu y) y))))}$$

$\texttt{f true 3 succ} \rightarrow 4$

$\texttt{f 3 true succ} \not\rightarrow$

Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?

Le λ-calcul simplement typé

Règles de typage

(VAR)

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

(ABS)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t \;:\; A \to B}$$

(APP)

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\, s : B}$$

Le λ-calcul simplement typé

Règles de typage

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}\ (\textsc{Var})$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t\ :\ A \rightarrow B}\ (\textsc{Abs}) \qquad \frac{\Gamma \vdash f : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\ s : B}\ (\textsc{App})$$

Ambiguïté

$$\frac{\dfrac{\Gamma, x :?_A \vdash \text{true} : \text{bool}}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true}) :?_A \rightarrow \text{bool}} \quad \Gamma \vdash \lambda y\ y :?_A}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true})\ (\lambda y\ y) : \text{bool}}$$

Le λ-calcul simplement typé

Système de type bidirectionnel

Syntaxe des termes bidirectionnels

$$
\begin{array}{lcll}
ex & ::= & & \text{(termes synthétisables)} \\
 & | & (ex\ in) & \text{(application)} \\
 & | & x & \text{(variable)} \\
 & | & (in\ :\ T) & \text{(annotation)} \\
in & ::= & & \text{(termes vérifiables)} \\
 & | & \lambda x\ in & \text{(abstraction)} \\
 & | & \mathrm{inv}(ex) & \text{(inversion)}
\end{array}
$$

Fonctions de typage

- Vérification : $\Gamma \vdash T \ni in$
- Synthèse : $\Gamma \vdash ex \in T$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y)))}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \rightarrow (\mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int}) \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \rightarrow \mathsf{int} \rightarrow (\mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int}) \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\ \ (fu\; y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\ \ (fu\; y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\ \ (fu\; y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x \qquad \Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y) \qquad \Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
      }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \qquad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
      \qquad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}
  }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}
}{
  \dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathit{fu} \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (\mathit{fu}\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda \mathit{fu}\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda \mathit{fu}\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (\mathit{fu}\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ \mathit{fu} : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathrm{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathrm{int} \to \mathrm{int})}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\; y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y \in}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni \mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y}}{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y))}}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\; fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
\quad
\dfrac{
\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
\quad
\dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
\quad
\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}
}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathrm{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathrm{int} \to \mathrm{int})} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathrm{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathrm{int}}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\, y)} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathrm{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathrm{int}}}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}}{\dfrac{\Delta \vdash \mathrm{ifte\,int}\, x\ (fu\, y)\ y \in}{\dfrac{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni \mathrm{ifte\,int}\, x\ (fu\, y)\ y}{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte\,int}\, x\ (fu\, y)\ y))}}}}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathrm{ifte\,int}\, x\ (fu\, y)\ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\ fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
\quad
\dfrac{
\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
\quad
\dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)}
\quad
\dfrac{
\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y \in \mathsf{int}}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y}
}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\;\; (fu\; y)\;\; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Les types dépendants

Première approche

Fonction identité

$\text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x\, x$

Les types dépendants

Première approche

Fonction identité

$\text{int} \to \text{int} \ni \lambda x\, x$

$\text{bool} \to \text{bool} \ni \lambda x\, x$

……

Les types dépendants

Première approche

Fonction identité

$\text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x\, x$

$\text{bool} \rightarrow \text{bool} \ni \lambda x\, x$

......

$\forall \alpha : * \,(\forall x : \alpha\,(\alpha)) \ni \lambda \alpha\, \lambda x\, x$

Les types dépendants

Première approche

Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\forall A : *(\forall m : \text{int}$$
$$(\forall xs : (\text{vec } A\ m)$$
$$(\forall n : \text{int}$$
$$(\forall ys : (\text{vec } A\ n)(\text{vec } A\ (m+n)))))$$

Les types dépendants

Première approche

Exemple de fonction dépendante

$$\begin{aligned}
&\text{Type de la concaténation } : \\
&\forall A : *(\forall m : \text{int} \\
&\qquad (\forall xs : (\text{vec}\ A\ m) \\
&\qquad\quad (\forall n : \text{int} \\
&\qquad\qquad (\forall ys : (\text{vec}\ A\ n)(\text{vec}\ A\ (m + n))))) \\
&\text{Terme} = \\
&\lambda A\ (\lambda m\ (\lambda xs\ (\lambda n\ (\lambda ys \\
&\qquad \text{fold}(A(\lambda mp\ \lambda vp\ \text{vec}\ A\ (mp + n))mxs \\
&\qquad\quad (\lambda nf\ \ \lambda vecun\ \lambda a\ \lambda xsf\ \text{cons}\ a\ xsf\,)ys))))
\end{aligned}$$

Les types dépendants

Equivalence entre les termes et les types

Nouveaux constructeurs

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *}(\text{Star})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S.T}(\text{Pi})$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$2 + 2 = 4$

$$\frac{}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2)\ \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\cfrac{\cfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathrm{id\ int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathrm{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$2 + 2 = 4$

$$\dfrac{\overline{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2)\ \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$2 + 2 = 4$

$$\frac{\overline{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

$2 + 1 \neq 4$

$$\frac{\overline{\varnothing \vdash (2+1) \not\equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+1) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
?))

Réponses du vérificateur de type

? : id A b a

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
(trans A (?1) (?2) (?3) (?4) (?5)))))

Réponses du vérificateur de type

?1 : Pi a,b :A(Pi i :id *A a b* (*))

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
        (trans A P (?2) (?3) (?4) (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?1 : Pi a,b :A(Pi i :id $A\ a\ \ b$ (*))   ?2 : A

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
(trans A P a (?3) (?4) (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?2 : A ?3 : A

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
(trans A P a b (?4) (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?3 : A ?4 : id $A\ a\ \ b$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
(trans A P a b q (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?4 : id A a b ?5 : Pi a :A (P(a,a,relf))

sym : Pi A : *(Pi a,b :A(Pi q :(Id A a b) (Id A b a)))
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (
    (trans A P a b q (lambda a (refl))))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?5 : Pi a :A (P(a,a,relf))

Conclusion

Résumé

- λ-calcul
- Système de type
- Assistant de démonstration de preuves

Extensions

- Amélioration du logiciel
- Tactiques
- Prouver ce système et analyser sa compléxité
- Rationaliser la bidirectionalisation