

Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Le λ -calcul non typé

Présentation formelle

Les λ -termes

- x variable
- $\lambda x. t$ abstraction
- $t \ u$

Exemple

$\lambda x. (\lambda y. (x \ y)) \equiv (\textit{lambda } x \ (\textit{lambda } y \ (x \ y)))$

Le λ -calcul non typé

Réduction et évaluation

Réduction

$$\lambda x. x \ t \rightsquigarrow x[x := t] \rightsquigarrow t$$

évaluation

Tracedelexecutiondelevaluationdansleprogrammeaveccommandetracedansutop

Le λ -calcul non typé

Extensions

Les booléens

- true
- false
- if c then t else u

Les entiers

- zero
- succ
- iter $n f a$

$(+ 1 1) \equiv \lambda x. \lambda y. \text{iter } x (\lambda n. \text{succ } n) y$

Le λ -calcul simplement typé

Motivations

$f = (\text{lambda } x \ (\text{lambda } y \ (\text{ifte } x \ (\text{succ } y) \ y)))$

- $f \ 3 \ \text{true} \rightarrow \text{exemption}$
- $f \ \text{true} \ 3 \rightarrow 4$

Il nous faut un moyen de pouvoir vérifier nos termes avant de les exécuter

Le λ -calcul simplement typé

Motivations

$$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$$

$$\begin{array}{c} (\text{VAR}) \\ x : T \in \Gamma \\ \hline \Gamma \vdash x \in T \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{ABS}) \\ T = A \rightarrow B \quad \Gamma, x : A \vdash B \ni t \\ \hline \Gamma \vdash T \ni \lambda x. t \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{APP}) \\ \Gamma \vdash f \in A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A \ni s \\ \hline \Gamma \vdash f s \in B \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{INV}) \\ \Gamma \vdash t \in T' \quad T = T' \\ \hline \Gamma \vdash T \ni \text{inv}(t) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\text{ANN}) \\ \Gamma \vdash T \ni t \\ \hline \Gamma \vdash (t : T) \in T \end{array}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{\overline{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \overline{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \overline{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \quad \frac{}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ -calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{\frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x. \lambda y. \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Autre titre

```
let test = foo
```

Foo.

$$\overline{\Gamma \vdash \lambda x. \lambda y. x \ y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\frac{\Delta \vdash \lambda y. x \ y : \text{int} \rightarrow \text{bool}}{\Gamma \vdash \lambda x. \lambda y. x \ y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\frac{\frac{E \vdash x y : \text{bool}}{\Delta \vdash \lambda y. x y : \text{int} \rightarrow \text{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x. \lambda y. x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\frac{\frac{\frac{}{E \vdash x : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{}{E \vdash y : \text{int}}}{E \vdash x y : \text{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y. x y : \text{int} \rightarrow \text{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x. \lambda y. x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\begin{array}{c}
x : \text{int} \rightarrow \text{bool} \in E \\
\hline
E \vdash x : \text{int} \rightarrow \text{bool} \qquad \overline{E \vdash y : \text{int}} \\
\hline
E \vdash x y : \text{bool} \\
\hline
\Delta \vdash \lambda y. x y : \text{int} \rightarrow \text{bool} \\
\hline
\Gamma \vdash \lambda x. \lambda y. x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}
\end{array}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{x : \text{int} \rightarrow \text{bool} \in E}{E \vdash x : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{y : \text{int} \in E}{E \vdash y : \text{int}} \\
\hline
E \vdash x y : \text{bool} \\
\hline
\Delta \vdash \lambda y. x y : \text{int} \rightarrow \text{bool} \\
\hline
\Gamma \vdash \lambda x. \lambda y. x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}
\end{array}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

(Backup slides)

...