Implémentation de la théorie des types dépendants

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Introduction

Pourquoi les types dépendants ?

- Langages de programmation (IDRIS, ATS...)
- Assistants de preuve (Coq, Agda...)

Pourquoi implémenter une nouvelle théorie des types ?

- Typage bidirectionnel
- Aspect pédagogique

Approche

- Difficulté d'implémenter les types dépendants
- Le λ-calcul non typé
- Le λ-calcul simplement typé
- Les types dépendants

Le λ-calcul non typé

Présentation formelle

Un programme

```
(λ x (λ y (x y)))
```

Syntaxe

$$
\begin{array}{rcll}
t & ::= & & (\lambda\text{-terme}) \\
 & | & x & (\text{variable}) \\
 & | & \lambda x\, t & (\text{abstraction}) \\
 & | & (t\ t) & (\text{application})
\end{array}
$$

Le λ-calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

((lambda x x) t)

Évaluation

evaluation ((lambda x (lambda y (x y))) t u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
$\rightarrow$ evaluation ((lambda y (t y)) u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (t y) y u)
$\rightarrow$ evaluation (t u)
$\rightarrow$ (t u)

Le λ-calcul non typé

Evaluation appel par nom

Exemple de rédex

((lambda x x) t) $\rightarrow$t

Évaluation

evaluation ((lambda x (lambda y (x y))) t u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
$\rightarrow$ evaluation ((lambda y (t y)) u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (t y) y u)
$\rightarrow$ evaluation (t u)
$\rightarrow$ (t u)

Le λ-calcul non typé

Extensions

Addition

```
x + y = (λ x (λ y (iter x (λ n (succ n)) y)))
```

Les booléens

- true
- false
- ifte c t u

Les entiers

- zero
- succ
- iter n f a

Le λ-calcul simplement typé

Motivations

Exemple de fonction

$$\texttt{f = (}\lambda\texttt{ x (}\lambda\texttt{ y (}\lambda\texttt{ fu (ifte x (fu y) y))))}$$

$\texttt{f true 3 succ} \to 4$

$\texttt{f 3 true succ} \not\to$

Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?

Le λ-calcul simplement typé

Règles de typage

(Var)

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

(Abs)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t : A \to B}$$

(App)

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\, s : B}$$

Le λ-calcul simplement typé

Règles de typage

(Var)
$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

(Abs)
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t \ :\ A \to B}$$

(App)
$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\ s : B}$$

Ambiguïté

$$\frac{\dfrac{\Gamma, x :?_A \vdash \text{true} : \text{bool}}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true}) :?_A \to \text{bool}} \quad \Gamma \vdash \lambda y\ y :?_A}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true})\ (\lambda y\ y) : \text{bool}}$$

Le λ-calcul simplement typé

Système de type bidirectionnel

Syntaxe des termes bidirectionnels

$$
\begin{array}{llll}
ex & ::= & & \text{(termes synthétisables)} \\
 & | & (ex\ in) & \text{(application)} \\
 & | & x & \text{(variable)} \\
 & | & (in\ :\ T) & \text{(annotation)} \\
in & ::= & & \text{(termes vérifiables)} \\
 & | & \lambda x\ in & \text{(abstraction)} \\
 & | & \mathrm{inv}(ex) & \text{(inversion)}
\end{array}
$$

Fonctions de typage

- $\Gamma \vdash T \ni in$
- $\Gamma \vdash ex \in T$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\;x\;\;(fu\;y)\;\;y)))}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ (fu\ y)\ y \in}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ (fu\ y)\ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ (fu\ y)\ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{x : \mathrm{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathrm{bool}}
    }{\Delta \vdash \mathrm{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni (fu\ y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathrm{int} \ni y}
  }{\Delta \vdash \mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}
}{
  \dfrac{\Gamma \vdash \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y))}{\varnothing \vdash \mathrm{bool} \to \mathrm{int} \to (\mathrm{int} \to \mathrm{int}) \to \mathrm{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathrm{ifte}\,\mathrm{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathrm{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathrm{int},\ fu : \mathrm{int} \to \mathrm{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
    }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Delta \vdash fu \in}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
  }
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\; \mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y \in}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\; \mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\; \mathsf{int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
    }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\, y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y \in}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y))}
  }
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
\quad
\dfrac{
\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
\quad
\dfrac{
\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\, y)}
\quad
\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y \in}
}{
\dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y))}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\, y)\ \ y)))}
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{
      \dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
      \quad
      \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
    \quad
    \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y \in}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
  }
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y \in \mathsf{int}}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

Les types dépendants

Première approche

Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\forall A : *(\forall m : \mathrm{int}$$
$$(\forall xs : (\mathrm{vec}\ A\ m)$$
$$(\forall n : \mathrm{int}$$
$$(\forall ys : (\mathrm{vec}\ A\ m)(\mathrm{vec}\ A\ (m + n)))))$$

Les types dépendants

Première approche

Exemple de fonction dépendante

Type de la concaténation :

$$\forall A : *(\forall m : \mathrm{int}$$
$$(\forall xs : (\mathrm{vec}\ A\ m)$$
$$(\forall n : \mathrm{int}$$
$$(\forall ys : (\mathrm{vec}\ A\ m)(\mathrm{vec}\ A\ (m+n)))))$$

Terme =

$$\lambda A\ (\lambda m\ (\lambda xs\ (\lambda n\ (\lambda ys$$
$$\mathrm{fold}(A(\lambda mp\ \lambda vp\ \mathrm{vec}\ A\ (mp+n))mxs$$
$$(\lambda nf\ \lambda vecun\ \lambda a\ \lambda xsf\ \mathrm{cons}\ a\ xsf)ys))))$$

Les types dépendants

Equivalence entre les termes et les types

Nouveaux constructeurs

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *}(\text{Star})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S.T}(\text{Pi})$$

Fonction identité

$\forall x : * \; x \ni \lambda x \; x$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\frac{}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2)\ \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

Les types dépendants
Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$2 + 2 = 4$

$$\frac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

$2 + 1 \neq 4$

$$\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+1) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$2 + 2 = 4$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

$2 + 1 \neq 4$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+1) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$2 + 2 = 4$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2)\ \ 4 \ni \text{refl}}$$

$2 + 1 \neq 4$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+1) \not\equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+1)\ \ 4 \ni \text{refl}}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

$\text{sym} : \forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id}\ A\ a\ \ b)(\text{id}\ A\ b\ \ a)))$
$\text{sym} = ?$

Réponses du vérificateur de type

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\;\; b)(\text{id } A\, b\;\; a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q (?))

Réponses du vérificateur de type

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A (?1) (?2) (?3) (?4) (?5)))))

Réponses du vérificateur de type

?1 : $\forall a, b : A(\forall i : \text{id } A\ a\ \ b\ \ (*))$

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\ \, b)(\text{id } A\, b\ \, a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A P (?2) (?3) (?4) (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?1 : $\forall a, b : A(\forall i : \text{id } A\, a\ \, b\ \, (*))$?2 : A

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A P a (?3) (?4) (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?2 : A ?3 : A

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym $=$ (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A P a b (?4) (?5)))))

P $=$ (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?3 : A ?4 : id $A\ a\ \ b$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A P a b q (?5)))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?4 : id $A\ a\ \ b$?5 : $\forall a : A$ (P(a,a,relf))

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ((trans A P a b q (lambda a (refl))))))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

Réponses du vérificateur de type

?5 : $\forall a : A\,$(P(a,a,relf))

Conclusion

Résumé

- λ-calcul
- Système de type
- Automatisations de démonstration de preuves

Extensions

- Amélioration du logiciel
- Tactiques
- Prouver ce système et analyser sa compléxité
- Rationaliser la bidirectionalisation