Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Le λ-calcul non typé

Présentation formelle

Les λ-termes

- x variable
- $\lambda x.t$ abstraction
- $t\ u$ application

Exemple

$\lambda x.(\lambda y.(x\ y)) \equiv (lambda\ x\ (lambda\ y\ (x\ y)))$

Le λ-calcul non typé

Réduction et évaluation

Reduction

$\lambda x.x\ t \rightsquigarrow x[x := t] \rightsquigarrow t$

évaluation

$Tracedelexecutiondelevaluationdansleprogrammeaveccommandetracedansutop$

Le λ-calcul non typé

Extensions

Les booléens

- true
- false
- if c then t else u

Les entiers

- zero
- succ
- iter $n\ f\ a$

$(+\,1\,1) \equiv \lambda x.\lambda y.\text{iter}\ x\ (\lambda n.\text{succ}\ n)\ y$

Le λ-calcul simplement typé

Motivations

f = (lambda x (lambda y (ifte x (succ y) y)))

- f 3 true $\rightarrow$ exeption
- f true 3 $\rightarrow$ 4

Il nous faut un système permettant de vérifier la réduction des termes avant éxecution.

Le λ-calcul simplement typé

Règles de typage bidirectionnelles

$$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$$

(Var)
$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \in T}$$

(Abs)
$$\frac{T = A \to B \qquad \Gamma, x : A \vdash B \ni t}{\Gamma \vdash T \ni \lambda x.t}$$

(App)
$$\frac{\Gamma \vdash f \in A \to B \quad \Gamma \vdash A \ni s}{\Gamma \vdash f\ s \in B}$$

(Inv)
$$\frac{\Gamma \vdash t \in T' \quad T = T'}{\Gamma \vdash T \ni \mathrm{inv}(t)}$$

(Ann)
$$\frac{\Gamma \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash (t\ :\ T) \in T}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \rightarrow \mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \overline{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \overline{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \text{int}}\ \dfrac{}{\Delta \vdash \text{succ}\ y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y.\text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\varnothing \vdash \text{bool} \to \text{int} \to \text{int} \ni \lambda x.\lambda y.\text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \qquad
      \dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
      \;
      \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}
  }{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Slide avec exemple du “et” logique entre deux vecteurs dans un stystème de type simple

Les types dépendants

Règles de typage bi-directionnel

$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$

$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \in T}(\text{Var})$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \in T' \quad T = T'}{\Gamma \vdash T \ni inv(t)}(\text{Inv})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni T \quad \Gamma \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash (t : T) \in T}(\text{Ann})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *}(\text{Star})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S.T}(\text{Pi})$$

$$\frac{\Gamma, x : S \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash \forall x : S.T \ni \lambda x.t}(\text{Abs})$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \in \forall x : S.T \quad \Gamma \vdash S \ni s}{\Gamma \vdash f\ s \in T[s := x]}(\text{App})$$

Les types dépendants

Les vecteurs

Parler de l'exemple avec maintenant les types dépendants "t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

Egalité

$$\text{(Id)}\quad \frac{\Gamma \vdash * \ni A \quad \Gamma \vdash A \ni a \quad \Gamma \vdash A \ni b}{\Gamma \vdash * \ni Id\ A\ a\ b} \qquad \text{(Refl)}\quad \frac{\Gamma \vdash A \ni a}{\Gamma \vdash Id\ A\ a\ a \ni refl\ a}$$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

Egalité

(Id)

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni A \quad \Gamma \vdash A \ni a \quad \Gamma \vdash A \ni b}{\Gamma \vdash * \ni Id\ A\ a\ b}$$

(Refl)

$$\frac{\Gamma \vdash A \ni a}{\Gamma \vdash Id\ A\ a\ a \ni refl\ a}$$

$2 + 2 =_N 4$

$Id(Nat, 2 + 2, 4)$

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

Egalité

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni A \quad \Gamma \vdash A \ni a \quad \Gamma \vdash A \ni b}{\Gamma \vdash * \ni Id\ A\ a\ b}\ (\textsc{Id}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \ni a}{\Gamma \vdash Id\ A\ a\ a \ni refl\ a}\ (\textsc{Refl})$$

$2 + 2 =_N 4$

$Id(Nat, 2 + 2, 4)$

$refl$ 4

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\frac{}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \rightarrow id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x.\lambda y.\text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y.\text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x.\lambda y.\text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\cfrac{\cfrac{\overline{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \qquad
      \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
      \;
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}
    }{
      \Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y
    }
  }{
    \Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y
  }
}{
  \varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \qquad
    \dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
    \;
    \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}
  }
}{
  \varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x.\lambda y.\mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Autre titre

```
let test = foo
```

Foo.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.x\ y : (\mathrm{int} \to \mathrm{bool}) \to \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}$$
$$E \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}, y : \mathrm{int}$$

$$\dfrac{\overline{\Delta \vdash \lambda y.x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$\dfrac{\dfrac{\overline{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y.x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$
$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{E \vdash x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}} \qquad \overline{E \vdash y : \mathsf{int}}}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y.x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \\
E &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}
\end{aligned}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \in E}{E \vdash x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}} \qquad \dfrac{}{E \vdash y : \mathsf{int}}}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y.x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \\
E &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}
\end{aligned}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \in E}{E \vdash x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}} \qquad \dfrac{y : \mathsf{int} \in E}{E \vdash y : \mathsf{int}}}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y.x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x.\lambda y.x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}
$$

$$
\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}
$$

$$
E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}
$$

(Backup slides)

. . .