# Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

# Introduction

## Pourquoi les types dépendants

- Languages de programmation (IDRIS, ATS...)
- Assistants de preuve (Coq, Agda...)

## Pourquoi implémenter une nouvelle théorie des types

- Typage bidirectionnel
- Aspect pédagogique

## Approche

- Difficulté d'implémenter les types dépendants
- Le $\lambda$-calcul non typé
- Le $\lambda$-calcul simplement typé
- Les types dépendants

# Le $\lambda$-calcul non typé

## Présentation formelle

### Un programme

$$\texttt{(}\lambda\ \texttt{x}\ \texttt{(}\lambda\ \texttt{y}\ \texttt{(x y))}$$

### Syntaxe

$$\begin{array}{rcll}
t & ::= & & (\lambda\text{-terme}) \\
 & \mid & x & (\text{variable}) \\
 & \mid & \lambda x\, t & (\text{abstraction}) \\
 & \mid & (t\ t) & (\text{application})
\end{array}$$

### Évaluation

evaluation ((lambda x (lambda y (x y))) t u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (lambda y (x y) u) x t)
$\rightarrow$ evaluation ((lambda y (t y)) u)
$\rightarrow$ evaluation (substitution (t y) y u)
$\rightarrow$ evaluation (t u)
$\rightarrow$ (t u)

# Le $\lambda$-calcul non typé

## Extensions

### Addition

```
x + y = (λ x (λ y (iter x (λ n (succ n)) y)))
```

### Les booléens

- true
- false
- ifte $c$ $t$ $u$

### Les entiers

- zero
- succ
- iter $n$ $f$ $a$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Motivations

### exemple de fonction

$$\texttt{f = (}\lambda\texttt{ x (}\lambda\texttt{ y (}\lambda\texttt{ fu (ifte x (fu y) y))))}$$

$\texttt{f true 3} \rightarrow 4$

$\texttt{f 3 true} \not\rightarrow$

*Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?*

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## règles de typage

$$(\textsc{Var})\ \frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

$$(\textsc{Abs})\ \frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t\ :\ A \to B} \qquad (\textsc{App})\ \frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\ s : B}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## règles de typage

(Var)

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

(Abs)

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t \;:\; A \to B}$$

(App)

$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\, s : B}$$

## Ambiguité

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true})\, (\lambda y\, y) : \text{bool}}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## règles de typage

(Var)
$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : T}$$

(Abs)
$$\frac{\Gamma, x : A \vdash t : B}{\Gamma \vdash \lambda x\, t \;:\; A \to B}$$

(App)
$$\frac{\Gamma \vdash f : A \to B \qquad \Gamma \vdash s : A}{\Gamma \vdash f\ s : B}$$

## Ambiguité

$$\frac{\dfrac{\Gamma, x :?_A \vdash \text{true} : \text{bool}}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true}) :?_A \to \text{bool}} \quad \Gamma \vdash \lambda y\, y :?_A}{\Gamma \vdash (\lambda x\, \text{true})\, (\lambda y\, y) : \text{bool}}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Système de type bidirectionnel

### syntaxe des termes bidirectionnels

$$
\begin{array}{lcll}
ex & ::= & & \text{(termes synthétisables)} \\
 & | & ex\ in & \text{(application)} \\
 & | & x & \text{(variable)} \\
 & | & (in\ :\ T) & \text{(annotation)} \\
in & ::= & & \text{(termes vérifiables)} \\
 & | & \lambda x\ in & \text{(abstraction)} \\
 & | & \mathrm{inv}(ex) & \text{(inversion)}
\end{array}
$$

### Fonctions de typage

- $\Gamma \vdash T \ni in$
- $\Gamma \vdash ex \in T$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y)))}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\,y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\ \mathsf{int}\ x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \overline{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)} \quad \overline{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte\,int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte\,int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte\,int}\; x\;\; (fu\; y)\;\; y)))}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash x \in}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\ \ (fu\ y)\ \ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\ \ (fu\ y)\ \ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$
\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}
$$

$$
\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}
$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
    }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (\mathit{fu}\, y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (\mathit{fu}\, y)\ \ y}
}{
  \dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda \mathit{fu}\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (\mathit{fu}\, y)\ \ y))}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda \mathit{fu}\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ \ (\mathit{fu}\, y)\ \ y)))}
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ \mathit{fu} : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
      }{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
      \quad
      \dfrac{
        \dfrac{}{\Delta \vdash fu \in}
      }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\ y)}
      \quad
      \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
    }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y}
  }{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\,(\lambda y\,(\lambda fu\,(\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\,x\ \ (fu\ y)\ \ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \quad
    \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)}
    \quad
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; (fu\; y)\; y}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; (fu\; y)\; y))}
  }
}{
  \varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\; x\; (fu\; y)\; y)))
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
\quad
\dfrac{
\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
\quad
\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)}
\quad
\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\; \mathsf{int}\; x\; \; (fu\; y)\; \; y}
}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\; \mathsf{int}\; x\; \; (fu\; y)\; \; y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\; \mathsf{int}\; x\; \; (fu\; y)\; \; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \quad \dfrac{\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})} \quad \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\, y)} \quad \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ (fu\, y)\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ (fu\, y)\ y))}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\,\mathsf{int}\, x\ (fu\, y)\ y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\ fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Le $\lambda$-calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash x \in \mathsf{bool}}
}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
\quad
\dfrac{
\dfrac{fu : (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \in \Delta}{\Delta \vdash fu \in (\mathsf{int} \to \mathsf{int})}
\quad
\dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni (fu\; y)}
\quad
\dfrac{
\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni y}
}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\; (fu\; y)\; y}
}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\; (fu\; y)\; y))}
}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to (\mathsf{int} \to \mathsf{int}) \to \mathsf{int} \ni \lambda x\, (\lambda y\, (\lambda fu\, (\mathsf{ifte}\, \mathsf{int}\, x\; (fu\; y)\; y)))}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int},\; fu : \mathsf{int} \to \mathsf{int}$$

# Les types dépendants

## Première approche

### exemple de fonction dépendante

Type de la concatenation :

$\forall A : *(\forall m : \mathrm{int}(\forall xs : (\mathrm{vec}\ A\ m)(\forall n : \mathrm{int}(\forall ys : (\mathrm{vec}\ A\ m)(\mathrm{vec}\ A\ (m + n))))))$

# Les types dépendants

## Première approche

### exemple de fonction dépendante

Type de la concatenation :
$\forall A : *(\forall m : \text{int}(\forall xs : (\text{vec}\ A\ m)(\forall n : \text{int}(\forall ys : (\text{vec}\ A\ m)(\text{vec}\ A\ (m+n))))))$

Terme =
$\lambda A\ (\lambda m\ (\lambda xs\ (\lambda n\ (\lambda ys\ (\text{fold}\ A\ (\lambda mp\ \lambda vp\ \text{vec}\ A\ (mp + n))\ m\ xs\ (\lambda nf\ \ \lambda vecun\ \lambda a\ \lambda xsf\ \text{cons}\ a\ xsf\ )\ ys)))))$

# Les types dépendants

## Equivalence entre les termes et les types

### nouveaux constructeurs

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *}(\text{Star})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S.T}(\text{Pi})$$

### Fonction identité

$\forall x : * \; x \ni \lambda x \; x$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\frac{}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2)\ 4 \ni \text{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

“t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

$$\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+1)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\frac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+2)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

$$\frac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \mathsf{int} \ni 4}}{\varnothing \vdash \mathsf{id}\ \mathsf{int}\ (2+1)\ \ 4 \ni \mathsf{refl}}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+2) \equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+2) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\varnothing \vdash \text{int} \ni 4} \quad \dfrac{}{\varnothing \vdash (2+1) \not\equiv 4}}{\varnothing \vdash \text{id int } (2+1) \;\; 4 \ni \text{refl}}$$

$\text{sym} : \forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id}\ A\ a\ \ b)(\text{id}\ A\ b\ \ a)))$
$\text{sym} = ?$

### Réponses du vérificateur de type

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id}\ A\ a\ \ b)(\text{id}\ A\ b\ \ a)))$
sym $=$ (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( ?  ))

### Réponses du vérificateur de type

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\ \ b)(\text{id } A\, b\ \ a)))$
sym $=$ (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( (trans A ( ?1) ( ?2) ( ?3) ( ?4) ( ?5))) ))

### Réponses du vérificateur de type

?1 : $\forall a, b : A(\forall i : \text{id } A\, a\ \ b\ \ (*))$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\, a\;\; b)(\text{id } A\, b\;\; a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( (trans A P ( ?2) ( ?3) ( ?4) ( ?5))) ))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

### Réponses du vérificateur de type

?1 : $\forall a, b : A(\forall i : \text{id } A\, a\;\; b\;\; (*))$ ?2 : A

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( (trans A P a ( ?3) ( ?4) ( ?5))) ))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

**Réponses du vérificateur de type**

?2 : A ?3 : A

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\; a\;\; b)(\text{id } A\; b\;\; a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( (trans A P a b ( ?4) ( ?5))) ))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

**Réponses du vérificateur de type**

?3 : A ?4 : id $A\; a\;\; b$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( (trans A P a b q ( ?5))) ))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

**Réponses du vérificateur de type**

?4 : id $A\ a\ \ b$ ?5 : $\forall a : A$ (P(a,a,relf))

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

sym : $\forall A : *(\forall a, b : A(\forall q : (\text{id } A\ a\ \ b)(\text{id } A\ b\ \ a)))$
sym = (lambda A (lambda a (lambda b (lambda q ( (trans A P a b q (lambda a (refl)))) ))

P = (lambda (a b c) (id A b a))

**Réponses du vérificateur de type**

?5 : $\forall a : A\,$(P(a,a,relf))

# Conclusion

## Résumé

- $\lambda$-calcul
- Système de type
- Automatisations de démonstration de preuves

## Extensions

- Amélioration du logiciel
- Tactics
- Prouver ce système et analyser sa compléxité
- Rational bidirectionalisation