

Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

# Introduction

## Motivation

- A
- B
- C

## Objectif

- E
- F
- G

# Le $\lambda$ -calcul non typé

## Présentation formelle

### Un programme

$$(\lambda x (\lambda y (x y)))$$

### Syntaxe

$t ::=$		( $\lambda$ -terme)
	$x$	(variable)
	$\lambda x t$	(abstraction)
	$(t t)$	(application)

# Le $\lambda$ -calcul non typé

## Réduction et évaluation

### Réduction

$$\lambda x. x \ t \rightsquigarrow x[x := t] \rightsquigarrow t$$

### Évaluation

*Tracedelexecutiondelevaluationdansleprogrammeaveccommandetracedansutop*

# Le $\lambda$ -calcul non typé

## Extensions

### Addition

$$x + y = (\lambda x (\lambda y (\text{iter } x (\lambda n (\text{succ } n)) y)))$$

### Les booléens

- true
- false
- if  $c$  then  $t$  else  $u$

### Les entiers

- zero
- succ
- iter  $n f a$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Motivations

```
f = (lambda x (lambda y (ifte x (succ y) y)))
```

f true 3  $\rightarrow$  4

f 3 true  $\nrightarrow$

*Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?*

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Règles de typage bidirectionnelles

$$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$$

(VAR)

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \in T}$$

(ABS)

$$\frac{T = A \rightarrow B \quad \Gamma, x : A \vdash B \ni t}{\Gamma \vdash T \ni \lambda x t}$$

(APP)

$$\frac{\Gamma \vdash f \in A \rightarrow B \quad \Gamma \vdash A \ni s}{\Gamma \vdash f s \in B}$$

(INV)

$$\frac{\Gamma \vdash t \in T' \quad T = T'}{\Gamma \vdash T \ni \text{inv}(t)}$$

(ANN)

$$\frac{\Gamma \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash (t : T) \in T}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

---

$$\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y$$



# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \quad \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Exemple de dérivation de typage

$$\frac{\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{\frac{y : \text{int} \in \Delta}{\text{int} \ni y}}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \quad \Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}{\emptyset \vdash \text{bool} \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Le $\lambda$ -calcul simplement typé

## Les limites

Slide avec exemple du “et” logique entre deux vecteurs dans un système de type simple

*Peut-on garantir la taille des listes à la compilation ?*

# Les types dépendants

## Règles de typage bi-directionnel

$$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$$

$$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \in T' \quad T = T'}{\Gamma \vdash T \ni inv(t)} (Inv)$$

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \in T} (Var)$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni T \quad \Gamma \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash (t : T) \in T} (Ann)$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *} (Star)$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S. T} (Pi)$$

$$\frac{\Gamma, x : S \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash \forall x : S. T \ni \lambda x. t} (Abs)$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \in \forall x : S. T \quad \Gamma \vdash S \ni s}{\Gamma \vdash f s \in T[s := x]} (App)$$

# Les types dépendants

## Les vecteurs

Parler de l'exemple avec maintenant les types dépendants



# Les types dépendants

# Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

---

$$\emptyset \vdash \forall A : * (\forall a, b : A (id\ A\ a\ b \rightarrow id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y\ \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y$$
$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$
$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$$\frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}{\emptyset \vdash \forall A : * (\forall a, b : A (id\ A\ a\ b \rightarrow id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$$\frac{\frac{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \forall A : * (\forall a, b : A (id \ A \ a \ b \rightarrow id \ A \ b \ a)) \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$$\frac{\frac{\frac{}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\emptyset \vdash \forall A : * (\forall a, b : A (id \ A \ a \ b \rightarrow id \ A \ b \ a)) \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$$\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \\ \frac{}{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \\ \frac{}{\emptyset \vdash \forall A : * (\forall a, b : A (id \ A \ a \ b \rightarrow id \ A \ b \ a)) \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Les types dépendants

## Correspondance de Curry Howard

$$\frac{\frac{x : \text{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \text{bool} \ni x} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \text{int}} \quad \frac{y : \text{int} \in \Delta}{\text{int} \ni y}}{\Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}} \\ \frac{\Delta \vdash \text{bool} \ni x \quad \Delta \vdash y \in \text{int} \quad \Delta \vdash \text{succ } y \in \text{int}}{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y} \\ \frac{\Gamma \vdash \text{int} \rightarrow \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}{\emptyset \vdash \forall A : * (\forall a, b : A (\text{id } A \ a \ b \rightarrow \text{id } A \ b \ a)) \ni \lambda x \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

# Conclusion

## Résumé

- A
- B
- C

## Extensions

- A
- B
- C
- Slow.fast typechecker
- Tactics
- Proofs & complexity
- Untyped reduction : Krivine machine
- Rational bidirectionalisation



## Autre titre

```
let test = foo
```

Foo.

$$\overline{\Gamma \vdash \lambda x \lambda y x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\frac{\Delta \vdash \lambda y x y : \text{int} \rightarrow \text{bool}}{\Gamma \vdash \lambda x \lambda y x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\frac{\frac{E \vdash x y : \text{bool}}{\Delta \vdash \lambda y x y : \text{int} \rightarrow \text{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x \lambda y x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\overline{E \vdash x : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \quad \overline{E \vdash y : \text{int}}}{E \vdash x y : \text{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y x y : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \\
\hline
\Gamma \vdash \lambda x \lambda y x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}
\end{array}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\begin{array}{c}
x : \text{int} \rightarrow \text{bool} \in E \\
\hline
E \vdash x : \text{int} \rightarrow \text{bool} \qquad \overline{E \vdash y : \text{int}} \\
\hline
E \vdash x y : \text{bool} \\
\hline
\Delta \vdash \lambda y x y : \text{int} \rightarrow \text{bool} \\
\hline
\Gamma \vdash \lambda x \lambda y x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}
\end{array}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

$$\begin{array}{c}
\frac{x : \text{int} \rightarrow \text{bool} \in E}{E \vdash x : \text{int} \rightarrow \text{bool}} \quad \frac{y : \text{int} \in E}{E \vdash y : \text{int}} \\
\hline
E \vdash x y : \text{bool} \\
\hline
\Delta \vdash \lambda y x y : \text{int} \rightarrow \text{bool} \\
\hline
\Gamma \vdash \lambda x \lambda y x y : (\text{int} \rightarrow \text{bool}) \rightarrow \text{int} \rightarrow \text{bool}
\end{array}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \text{int} \rightarrow \text{bool}, y : \text{int}$$

(Backup slides)



...