Titre

Roman Delgado

Université Pierre et Marie Curie

04/05/2016

Introduction

Motivation

- A
- B
- C

Objectif

- E
- F
- G

Le λ-calcul non typé

Présentation formelle

Un programme

$$(\lambda\ x\ (\lambda\ y\ (x\ y))$$

Syntaxe

$$\begin{array}{rcll} t & ::= & & (\lambda\text{-terme}) \\ & | & x & (\text{variable}) \\ & | & \lambda x\ t & (\text{abstraction}) \\ & | & (t\ t) & (\text{application}) \end{array}$$

Réduction

$\lambda x\, x\, t \rightsquigarrow x[x := t] \rightsquigarrow t$

Évaluation

$Tracedelexecutiondelevaluationdansleprogrammeaveccommandetracedansutop$

Le λ-calcul non typé

Extensions

Addition

`x + y = (`λ` x (`λ` y (iter x (`λ` n (succ n)) y)))`

Les booléens

- true
- false
- if *c* then *t* else *u*

Les entiers

- zero
- succ
- iter *n f a*

Le λ-calcul simplement typé

Motivations

f = (lambda x (lambda y (ifte x (succ y) y)))

`f true 3` $\rightarrow$ `4`

`f 3 true` $\not\rightarrow$

Peut-on rejeter ce programme à la compilation ?

Le λ-calcul simplement typé

Règles de typage bidirectionnelles

$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$

$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$

(Var)
$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \in T}$$

(Abs)
$$\frac{T = A \to B \qquad \Gamma, x : A \vdash B \ni t}{\Gamma \vdash T \ni \lambda x\, t}$$

(App)
$$\frac{\Gamma \vdash f \in A \to B \quad \Gamma \vdash A \ni s}{\Gamma \vdash f\ s \in B}$$

(Inv)
$$\frac{\Gamma \vdash t \in T' \;\; T = T'}{\Gamma \vdash T \ni \mathrm{inv}(t)}$$

(Ann)
$$\frac{\Gamma \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash (t\ :\ T) \in T}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\frac{}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \rightarrow \mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y \ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Delta \vdash \text{int} \ni \text{if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\varnothing \vdash \text{bool} \to \text{int} \to \text{int} \ni \lambda x\, \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \overline{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}\ \overline{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \qquad
    \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
    \;
    \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\; y \in \mathsf{int}}
  }{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\; x \;\mathsf{then\; succ}\; y \;\mathsf{else}\; y}
}{
  \dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\; \mathsf{if}\; x \;\mathsf{then\; succ}\; y \;\mathsf{else}\; y}{\varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x\; \lambda y\; \mathsf{if}\; x \;\mathsf{then\; succ}\; y \;\mathsf{else}\; y}
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Exemple de dérivation de typage

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x}
    \qquad
    \dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}}
    \;
    \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}
  }{
    \dfrac{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}
  }
}{
  \varnothing \vdash \mathsf{bool} \to \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y
}
$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Le λ-calcul simplement typé

Les limites

Slide avec exemple du “et” logique entre deux vecteurs dans un stystème de type simple

Peut-on garantir la taille des listes à la compilation ?

Les types dépendants

Règles de typage bi-directionnel

$\boxed{\Gamma \vdash T \ni in}$

$\boxed{\Gamma \vdash ex \in T}$

$$\frac{x : T \in \Gamma}{\Gamma \vdash x \in T}(\text{Var})$$

$$\frac{\Gamma \vdash t \in T' \quad T = T'}{\Gamma \vdash T \ni inv(t)}(\text{Inv})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni T \quad \Gamma \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash (t : T) \in T}(\text{Ann})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash * \ni *}(\text{Star})$$

$$\frac{\Gamma \vdash * \ni S \quad \Gamma, x : S \vdash * \ni T}{\Gamma \vdash * \ni \forall x : S.T}(\text{Pi})$$

$$\frac{\Gamma, x : S \vdash T \ni t}{\Gamma \vdash \forall x : S.T \ni \lambda x.t}(\text{Abs})$$

$$\frac{\Gamma \vdash f \in \forall x : S.T \quad \Gamma \vdash S \ni s}{\Gamma \vdash f\ s \in T[s := x]}(\text{App})$$

Les types dépendants

Les vecteurs

Parler de l'exemple avec maintenant les types dépendants “t est une preuve de P” $\equiv$ “t est de type P (t :P) “

Egalité

$$\text{(Id)}\quad \frac{\Gamma \vdash * \ni A \quad \Gamma \vdash A \ni a \quad \Gamma \vdash A \ni b}{\Gamma \vdash * \ni Id\ A\ a\ b} \qquad \text{(Refl)}\quad \frac{\Gamma \vdash A \ni a}{\Gamma \vdash Id\ A\ a\ a \ni refl\ a}$$

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

Egalité

$$\textsc{(Id)}\ \frac{\Gamma \vdash * \ni A \quad \Gamma \vdash A \ni a \quad \Gamma \vdash A \ni b}{\Gamma \vdash * \ni Id\ A\ a\ b} \qquad \textsc{(Refl)}\ \frac{\Gamma \vdash A \ni a}{\Gamma \vdash Id\ A\ a\ a \ni refl\ a}$$

$2 + 2 =_N 4$

$Id(Nat, 2 + 2, 4)$

Les types dépendants

Correspondance de Curry Howard

"t est une preuve de P" $\equiv$ "t est de type P (t :P) "

Egalité

$$\textsc{(Id)}\quad \frac{\Gamma \vdash * \ni A \quad \Gamma \vdash A \ni a \quad \Gamma \vdash A \ni b}{\Gamma \vdash * \ni Id\ A\ a\ b} \qquad \textsc{(Refl)}\quad \frac{\Gamma \vdash A \ni a}{\Gamma \vdash Id\ A\ a\ a \ni refl\ a}$$

$2 + 2 =_N 4$

$Id(Nat, 2 + 2, 4)$

$refl\ 4$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\frac{}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \text{int} \to \text{int} \ni \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y \text{ if } x \text{ then succ } y \text{ else } y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \text{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \text{int}$$

Les types dépendants

Symétrie de l'égalité

$$\dfrac{\dfrac{\overline{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \rightarrow \mathsf{int} \ni \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \rightarrow id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then\ succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

$$
\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \dfrac{}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}
$$

$$
\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}
$$

$$
\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}
$$

Les types dépendants

Synmétrie de l'égalité

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{bool} \in \Delta}{\Delta \vdash \mathsf{bool} \ni x} \qquad \dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\Delta \vdash y \in \mathsf{int}} \; \dfrac{\dfrac{y : \mathsf{int} \in \Delta}{\mathsf{int} \ni y}}{\Delta \vdash \mathsf{succ}\ y \in \mathsf{int}}}{\Delta \vdash \mathsf{int} \ni \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}{\dfrac{\Gamma \vdash \mathsf{int} \to \mathsf{int} \ni \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}{\varnothing \vdash \forall A : *(\forall a, b : A\,(id\ A\ a\ b \to id\ A\ b\ a)) \ni \lambda x\ \lambda y\ \mathsf{if}\ x\ \mathsf{then}\ \mathsf{succ}\ y\ \mathsf{else}\ y}}$$

$$\Gamma \triangleq x : \mathsf{bool}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, y : \mathsf{int}$$

Autre titre

```
let test = foo
```

Foo.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \lambda x\, \lambda y\, x\, y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$\dfrac{\overline{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$
$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{E \vdash x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}} \qquad \overline{E \vdash y : \mathsf{int}}}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \\
E &\triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}
\end{aligned}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool} \in E}{E \vdash x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}} \qquad \dfrac{}{E \vdash y : \mathrm{int}}}{E \vdash x\ y : \mathrm{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathrm{int} \to \mathrm{bool}) \to \mathrm{int} \to \mathrm{bool}}
$$

$$
\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}
$$

$$
E \triangleq \Gamma, x : \mathrm{int} \to \mathrm{bool}, y : \mathrm{int}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool} \in E}{E \vdash x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}} \qquad \dfrac{y : \mathsf{int} \in E}{E \vdash y : \mathsf{int}}}{E \vdash x\ y : \mathsf{bool}}}{\Delta \vdash \lambda y\ x\ y : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}}{\Gamma \vdash \lambda x\ \lambda y\ x\ y : (\mathsf{int} \to \mathsf{bool}) \to \mathsf{int} \to \mathsf{bool}}$$

$$\Delta \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}$$

$$E \triangleq \Gamma, x : \mathsf{int} \to \mathsf{bool}, y : \mathsf{int}$$

(Backup slides)

...