On pourra utiliser dans les exercices 1 et 5 la formule d'intégration par parties pour des fonctions continument dérivables f et g sur un intervalle de bornes a et b :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exercice 1. *(5 points)* (Concours 2017)

Partie A : Étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^2}$.

1. (a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.
   (c) Étudier les variations de g. On montrera en particulier que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, cette solution sera notée m.
2. (a) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$ et montrer que $f(m) = \frac{1}{2m^2}$.
   (b) Dresser le tableau de variation de f.

Partie B : Étude d'une fonction intégrale

Dans cette partie la fonction F est définie par

$$\forall x > 0,\ F(x) = \int_1^x f(t)dt = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$$

1. (a) Déterminer le signe de F sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (b) Justifier la continuité et la dérivabilité de F sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   (c) Calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
2. Montrer que $\forall x > 0,\ F(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. (a) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$\forall x > 0,\ \varphi(x) = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

(b) Montrer avec une intégration par partie, que $\forall x > 0$, $F(x) = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x \varphi(t)dt$.

(c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0.
La nouvelle fonction ainsi obtenue sera encore notée F.
Que peut-on dire de F au voisinage de $+\infty$?

Partie C : Recherche d'une valeur approchée

Dans cette partie, on cherche à calculer une valeur approchée de $F(0)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, par intégration par partie, calculer $I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)dt$.
   Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0,\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
2. En déduire, pour $x \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$ la majoration suivante :
$$\left|F(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq I_{2n+2}(x).$$
3. On pose pour $n \in \mathbb{N}$ $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$, montrer que $|F(0) - u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$.
4. Donner une méthode pour obtenir une valeur approchée de $F(0)$ à 10^{-2} près.