

VII) covariance de 2 v.a.d :

* déf: $\text{cov}(X; Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$

* prop: ① $\text{cov}(X; Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ **À UTILISER** Δ

② $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2 \text{cov}(X; Y)$

dém: ① $\text{cov}(X; Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY - XE[Y] - YE[X] - E[X]E[Y]]$

$$= E[XY] - E[XE[Y]] - E[YE[X]] - E[E[X]E[Y]]$$

$$= E[XY] - E[Y]E[X] - E[X]E[Y] - E[X]E[Y]$$

$$= \underline{E[XY] - E[X]E[Y]}$$

② $V[X+Y] = E[(X+Y - E[X+Y])^2] = E[(X+Y)^2 - 2(X+Y)E[X+Y] + E[X+Y]^2]$

$$= E[X^2 + 2XY + Y^2 - 2X(E[X] + E[Y]) - 2Y(E[X] + E[Y]) + (E[X] + E[Y])^2]$$

$$= E[X^2] + 2E[XY] + E[Y^2] - 2E[X]^2 - 2E[X]E[Y] - 2E[Y]E[X] - 2E[Y]^2 + E[X]^2 + 2E[X]E[Y] + E[Y]^2$$

$$= E[X^2] + E[Y^2] - E[X]^2 - E[Y]^2 - 2E[X]E[Y] + 2E[XY]$$

$$= \underline{V[X] + V[Y] + 2 \text{cov}(X; Y)}$$

IX) coefficient de corrélation de 2 v.a.d :

* déf: $\text{corr}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

X) indépendance de 2 v.a.d :

* déf: Soient X et Y , 2 v.a.d à valeurs respectives dans E et F

Elles sont indépendantesssi: $\forall x \in E, \forall y \in F, P[X=x, Y=y] = P[X=x] \cdot P[Y=y]$

* interprétation: le résultat de l'expérience aléatoire de l'une n'influence pas le résultat de l'expérience aléatoire de l'autre.

* prop: ① si X et Y sont indépendantes alors: $\text{cov}(X; Y) = 0$

② si X et Y sont indépendantes alors: $V[X+Y] = V[X] + V[Y]$

dém: ① $E[XY] = \sum_{(x,y) \in E \times F} xy P[X=x, Y=y] = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} xy P[X=x] P[Y=y]$

$$= \sum_{x \in E} x P[X=x] \cdot \sum_{y \in F} y P[Y=y] = \underline{E[X] \cdot E[Y]}$$

I) déf:

$X: \Omega \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{R}^n$ est 1 vecteur aléatoire discret

ssi: $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, X_i$ est 1 v.a.d de Ω sur E_i

II) Loi de probabilité de X :

\mathcal{P} est l'application: $\mathcal{P}_X: \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \longrightarrow [0, 1]$

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \longmapsto \mathcal{P}_X(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$

* prop: \mathcal{P}_X est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$

III) Loi marginale de X_i :

* def: $\mathcal{P}_{X_i}: \mathcal{P}(E_i) \longrightarrow [0, 1]$

$$x_i \longmapsto \mathbb{P}(X_i = x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \in E_{i-1} \\ x_{i+1} \in E_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \in E_n}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

* conséquence: connaître la loi du vecteur aléatoire X nous permet de connaître la loi de n'importe laquelle de ses composantes.

IV) Loi conditionnelle de X sachant $Y=y$:

* def: Soit X et Y , 2 v.a.d. de Ω dans E et F et $y \in F$

On appelle loi conditionnelle de X sachant que $Y=y$ est l'application:

$$\mathcal{P}_{X|Y=y}: \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, 1]$$

$$x \longmapsto \mathbb{P}[X=x|Y=y] = \frac{\mathbb{P}[X=x, Y=y]}{\mathbb{P}[Y=y]} \quad \Delta \mathbb{P}[Y=y] \neq 0 \text{ par définition de la probabilité conditionnelle}$$

* remarque: ① connaître la loi du vecteur aléatoire (X, Y) nous permet de connaître la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{Y=y\}$

* prop: $\mathcal{P}_{X|Y=y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

dém: ① $\mathbb{P}_{X|Y=y}(\emptyset) = \frac{\mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) \in \emptyset\}, \{w \in \Omega / Y(w) = y\})}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}(\emptyset)}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{0}{\mathbb{P}[Y=y]} = 0$

car $\mathbb{P}_{X,Y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

② Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ 1 famille d'événements 2 à 2 disjoints

$$\begin{aligned}
 P_{X|Y=y} \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right) &= \frac{P[\{X \in \bigcup_{n \geq 0} A_n\} \cap \{Y=y\}]}{P[Y=y]} = \frac{P[\{w \in \Omega / (X(w); Y(w)) \in \bigcup_{n \geq 0} A_n \times \{y\}\}]}{P[Y=y]} \\
 &= \frac{P[\bigcup_{n \geq 0} \{w \in \Omega / (X(w); Y(w)) \in A_n \times \{y\}\}]}{P[Y=y]} \\
 &= \frac{P[\bigcup_{n \geq 0} (X, Y) \in A_n \times \{y\}]}{P[Y=y]} = \\
 &= \frac{P_{(X,Y)}[\bigcup_{n \geq 0} A_n \times \{y\}]}{P[Y=y]} = \frac{\sum_{n \geq 0} P_{(X,Y)}[A_n \times \{y\}]}{P[Y=y]}
 \end{aligned}$$

car $P_{(X,Y)}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(b)$
 et que les événements $A_n \times \{y\}$ sont 2 à 2 disjoints

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{P[X \in A_n, Y=y]}{P[Y=y]} = \sum_{n \geq 0} P[X \in A_n | Y=y] \\
 &= \sum_{n \geq 0} P_{X|Y=y}[A_n]
 \end{aligned}$$

V) Espérance conditionnelle de X sachant l'événement B:

* déf: $E[X|B] = \sum_{x \in E} x \cdot P[X|B] = \sum_{x \in E} x \frac{P[X \cap B]}{P[B]}$

En particulier, $E[X|Y=y] = \sum_{x \in E} x \cdot P_{X|Y=y}[x]$

* prop: formule des espérances totales: Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ 1 partition de Ω
 alors: $E[X] = \sum_{n \geq 0} P[B_n] \cdot E[X|B_n]$

dém: $E[X] = \sum_{x \in E} x P[X=x] = \sum_{x \in E} x \sum_{n \geq 0} P[X=x | B_n] P[B_n]$ d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{x \in E} x P[X=x | B_n] \right) \cdot P[B_n] \\
 &= \sum_{n \geq 0} P[B_n] \cdot E[X|B_n]
 \end{aligned}$$

I) Loi de Bernoulli, de paramètre $p \in [0, 1]$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\{0, 1\}) \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto \begin{cases} p & \text{si } x=1 \\ 1-p & \text{si } x=0 \end{cases}$$

* interprétation: C'est la v.a.d. associée au résultat d'une épreuve aléatoire qui n'admet que 2 issues (échec ou succès)

* ex: le tirage à pile ou face. Dans ce cas, $p = \frac{1}{2}$

II) Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0, 1]$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\llbracket 0, n \rrbracket) \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

* interprétation: L'on répète n fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p alors X est la v.a.d. associée au nombre de succès obtenus.

Autrement dit: Soient $(X_i)_{i=1, \dots, n}$, n v.a.d. de loi de Bernoulli de paramètre p

mutuellement indépendantes: $\forall i \neq j, P(X_i=a, X_j=b) = P(X_i=a)P(X_j=b)$

avec $(a, b) \in \{0, 1\}^2$

alors on a: $X = \sum_{i=1}^n X_i$

III) Loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ avec $P_X: \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket) \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto \frac{1}{n}$$

* interprétation: les résultats $(1, 2, \dots, n)$ sont équiprobables

* ex: le résultat du lancer d'un dé suit 1 loi uniforme sur $\llbracket 1, 6 \rrbracket$

IV) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0, 1]$

$$x \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

* ex: C'est le nombre d'événements se produisant dans 1 intervalle de temps (file d'attente à 1 guichet)

V) Loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$:

* def: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ avec: $\mathbb{P}_X: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$
 $n \mapsto (1-p)^{n-1} \cdot p$

* interprétation: La répétition plusieurs fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir 1 succès alors X représente le nombre de tentatives réussies

* ex: nombre de lancers d'une pièce équilibrée pour faire pile
 $\mathbb{P}(X=n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$