

Problème 2

①

1) p_1, \dots, p_6 sont les 6 premiers termes d'une suite arithmétique

$$(I) \begin{cases} p_2 = p_1 + r \\ p_3 = p_1 + 2r \\ p_4 = p_1 + 3r \\ p_5 = p_1 + 4r \\ p_6 = p_1 + 5r \end{cases}$$

p_1, p_3 et p_6 sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique :

$$(II) \begin{cases} p_3 = q \cdot p_1 \\ p_6 = q^2 \cdot p_1 \end{cases}$$

* valeur de q ?

On a donc :

$$\begin{cases} q \cdot p_1 = p_1 + 2r = p_3 \\ \text{et } q^2 \cdot p_1 = p_1 + 5r = p_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (q-1)p_1 = 2r \\ (q^2-1)p_1 = 5r \end{cases}$$

donc :

$$\frac{q^2-1}{q-1} = \frac{5r}{2r} \Leftrightarrow q+1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \underline{q = \frac{3}{2}}$$

* valeur de r ?

en remplaçant dans (II), on a :

$$\begin{cases} p_3 = \frac{3}{2} p_1 \\ p_6 = \frac{9}{4} p_1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \frac{3}{2} p_1 = p_1 + 2r \\ \frac{9}{4} p_1 = p_1 + 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p_1}{2} = 2r \\ \frac{5p_1}{4} = 5r \end{cases}$$

donc :

$$\underline{r = \frac{p_1}{4}}$$

* valeur de p_1 ?

$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ [la somme des probabilités vaut 1]

$$p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r + p_1 + 4r + p_1 + 5r = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 + p_1 + \frac{p_1}{4} + p_1 + \frac{p_1}{2} + p_1 + \frac{3p_1}{4} + p_1 + p_1 + p_1 + \frac{5p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{39p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow \underline{p_1 = \frac{4}{39}}$$

En remplaçant dans (I), on obtient :

$$\begin{cases} p_1 = \frac{4}{39} \\ p_2 = \frac{5}{39} \\ p_3 = \frac{6}{39} \\ p_4 = \frac{7}{39} \\ p_5 = \frac{8}{39} \\ p_6 = \frac{9}{39} \end{cases}$$

On a bien : $p_k = \frac{3+k}{39}$ pour $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$

2)

a) $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}$

$P(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$

$P(C) = p_3 + p_4 = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$

b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{p_4 + p_6}{p_2 + p_4 + p_6} = \frac{\frac{16}{39}}{\frac{21}{39}} = \frac{16}{21}$

c) $* P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{16}{21} \cdot \frac{21}{39} = \frac{16}{39}$

$P(A) = \frac{7}{13}$

$P(B) = \frac{10}{13}$

donc : $P(A) \cdot P(B) = \frac{70}{169} \neq P(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

$* P(A \cap C) = p_4 = \frac{7}{39}$

on : $P(A) = \frac{7}{13}$

et : $P(C) = \frac{1}{39}$

donc : $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ donc A et C sont indépendants

(3)

3) Soit X_i , la v.a.d. qui correspond au gain du i^{e} lancer pour $i \in \llbracket 1; 60 \rrbracket$

$X_i: \Omega \rightarrow \{-1; 1\}$ [elle n'est pas à valeur dans $\{0; 1\}$ donc elle n'est pas 1 la de Bernoulli !]

avec: $P[X_i = -1] = P[B] = 1 - P[A] = \frac{6}{13}$

et: $P[X_i = 1] = P[A] = \frac{7}{13}$

Soit $X = \sum_{i=1}^{60} X_i$, la v.a.d. correspondant au gain

$$E[X] = \sum_{i=1}^{60} E[X_i]$$

a: $E[X_i] = -1 \cdot P[X_i = -1] + 1 \cdot P[X_i = 1] = -1 \cdot (1 - P[A]) + 1 \cdot P[A] = -1 + 2 \cdot P[A] = \frac{1}{13}$

donc: $E[X] = \frac{60}{13}$

4) gain? $23 - 21 = 2$

* estimer $P[A]$?

$$E[X_1] = -1 + 2 P[A]$$

$$\Leftrightarrow P[A] = \frac{E[X_1] + 1}{2}$$

rapel du cours: Etant donné qu'on répète l'expérience 1 grand nombre de fois (60) on peut estimer l'espérance par la moyenne des résultats

En notant x_i le gain obtenu au i^{e} lancer, $E[X_1]$ a pour estimation: $\frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} = \frac{\text{gain}}{60} = \frac{1}{30}$

donc: $P[A]$ a pour estimation: $\frac{\frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} + 1}{2} = \frac{\frac{31}{30} + 1}{2} = \frac{31}{60}$

mit $x \in X(\Omega)$, $a \leq x \leq b$

$$\Rightarrow a \cdot \mathbb{P}(X=x) \leq x \cdot \mathbb{P}(X=x) \leq b \cdot \mathbb{P}(X=x)$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} a \cdot \mathbb{P}(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} b \cdot \mathbb{P}(X=x)$$

$$\Rightarrow a \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) \leq \mathbb{E}[X] \leq b \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$$

$$\Rightarrow \underline{a \leq \mathbb{E}[X] \leq b}$$

P6.3

$$1) \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \in \{-1, 0, 1\}} x \cdot \mathbb{P}(X=x) = a - b$$

$$2) Y = X^2$$

$$(a) Y: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\underline{\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X^2=0) = \mathbb{P}(X=0) = 1 - (a+b)}$$

$$\underline{\mathbb{P}(Y=1) = 1 - \mathbb{P}(Y=0) = a+b}$$

$$(b) \underline{\mathbb{E}[Y]} = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{y=0}^1 y \cdot \mathbb{P}(X^2=y) = \mathbb{P}(X^2=1) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-1) = \underline{a+b}$$

$$(c) \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - (a+b)^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y] = a+b$$

$$\text{denn: } \underline{\mathbb{V}[X] = a+b - (a+b)^2}$$

$$(d) \mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - (a+b)^2$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2 \cdot \mathbb{P}[Y=y] = \sum_{y=0}^1 y^2 \cdot \mathbb{P}[Y=y] = \mathbb{P}[Y=1] = a+b$$

$$\underline{\mathbb{V}[Y] = a+b - (a+b)^2}$$

$$e) P = \frac{X+Y}{2} = \frac{X+X^2}{2}$$

$$P: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$\begin{aligned} P(P=1) &= P\left(\frac{X+X^2}{2} = 1\right) = P(X^2+X=2) = P(X^2+X-2=0) = P((X-1)(X+2)=0) \\ &= P(\{X=1\} \cup \{X=-2\}) = P(X=1) + P(X=-2) \\ &= P(X=1) = a \end{aligned}$$

$$P(P=0) = 1 - P(P=1) = 1 - a$$

$$f) M = \frac{Y-X}{2} = \frac{X^2-X}{2} = \frac{X(1-X)}{2}$$

$$M: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$$

$$P(M=0) = P(X(1-X)=0) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = P(X=0) + P(X=1) = 1 - b$$

$$P(M=1) = 1 - P(M=0) = b$$

3)

$$(a) P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, X^2=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, X=-1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{a}{a+b}$$

$$(b) P(Y=1|X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)} = 1$$

$$(c) P(P=M) = P\left(\frac{Y+X}{2} = \frac{Y-X}{2}\right) = P(X+Y=Y-X) = P(2X=0) = P(X=0) = 1 - (a+b)$$

$$\begin{aligned} (d) P(PM=0) &= P\left(\frac{Y^2-X^2}{4}=0\right) = P(X^4-X^2=0) = P(X^2(X-1)(X+1)=0) \\ &= P(X=0 \cup X=-1 \cup X=1) \\ &= P(X=0) + P(X=-1) + P(X=1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(6)

4)

$$(a) P(X=1|Y=1) = P(X=0|P=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|Y+X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|X^2+X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|X(X+1)=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{P(X=0)}{P(X=0) + P(X=-1)}$$

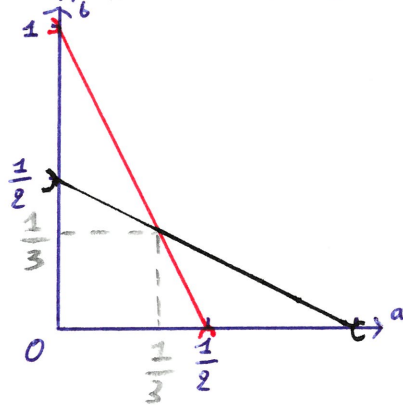
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{1-(a+b)}{1-a}$$

$$\Leftrightarrow a(1-a) = (1-a-b)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a - a^2 = a + b - a^2 - ab - ab - b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = b - 2ab - b^2$$

$$\Leftrightarrow b(1-2a-b) = 0 \Leftrightarrow b=0 \text{ ou } b=1-2a \Leftrightarrow \underline{b=1-2a}$$



$$(b) P(X=-1|Y=1) = P(X=0|M=0)$$

$$\Leftrightarrow P(X=-1|Y=1) = P(X=0|X^2-X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X=-1)}{P(Y=1)} = P(X=0|X(X-1)=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{P(X=0)}{P(X=0) + P(X=1)} = \frac{1-a-b}{1-b}$$

$$\Leftrightarrow 1-a-b(a+b) = b(1-b)$$

$$\Leftrightarrow a+b-a^2-ab-ab-b^2 = b-b^2$$

$$\Leftrightarrow a-2ab-a^2=0 \Leftrightarrow a(1-2b-a)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } a=1-2b \Leftrightarrow \underline{a=1-2b}$$

$$(c) (4a) \text{ et } (4b) \text{ sont simultanément vérifiées si : } a=b=\frac{1}{3}$$