Partie B :

1)

a) signe de F sur $\mathbb{R}^{+*}$?

soit $x > 0$, $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$

Étant donné que : f est continue

car dérivable sur $[\min(1;x) ; \max(1;x)] \subset]0;+\infty[$

et que : $\forall t \in [\min(1;x) ; \max(1;x)]$, $f(t) \geq 0$

alors : $\int_1^x f(t)\,dt \geq 0$

b) soit $x > 0$,

f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

la fonction $F : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$

$x \longmapsto \int_1^x f(t)\,dt$

est 1 primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$

- En tant que primitive de f sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc continue sur cet intervalle.

2) Soit $x > 0$,

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$$

On fait 1 changement de variable à partir $u : [1;x] \to [1;\frac{1}{x}]$

$t \longmapsto \frac{1}{t}$

on a : $\frac{du}{dt} = \frac{-1}{t^2} \Leftrightarrow dt = -du \times \frac{1}{u^2}$

donc : $$\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_{\underset{=u(1)}{1}}^{\overset{=u(x)}{\frac{1}{x}}} \frac{\overset{=\ln(t)}{-\ln(u)}}{\underbrace{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2}_{1+t^2}} \cdot \underbrace{\frac{-du}{u^2}}_{=dt} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln(u)}{u^2+1} \cdot du = F\left(\frac{1}{x}\right)$$

3)

(a) $\varphi : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{\arctan(x)}{x}$

* lim de φ en 0?

arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}, (\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

or : pour $|x|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)}$

donc : $\displaystyle\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$

d'où : $\displaystyle\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ [car : x^{2n} a pour primitive $\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$]

$\displaystyle\Rightarrow \frac{\arctan(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$

donc, $\quad 1 \leq \dfrac{\arctan(x)}{x} \leq 1 - \dfrac{x^2}{3}$

d'où : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$ d'après le th des gendarmes

(b) soit $x>0$,

$\displaystyle F(x) = \int_1^x \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$ on intègre par parties en posant : $u' = \dfrac{1}{1+t^2} \Rightarrow u = \arctan(t)$

$v = \ln(t) \Rightarrow v' = \dfrac{1}{t}$

$\displaystyle = \Big[\ln(t)\arctan(t)\Big]_1^x - \int_1^x \frac{\arctan(t)}{t}\,dt = \arctan(x)\ln(x) - \int_1^x \varphi(t)\,dt$

(c) * $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x)$?

$\dfrac{\arctan(x)}{x} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ donc : $\operatorname{Arctan}(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \arctan(x)\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0^-$

De plus φ est continue sur $]0;1]$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \varphi(x)$ existe alors : $\displaystyle\int_1^0 \varphi(t)\,dt$ converge

d'où : $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\int_1^0 \varphi(t)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$

donc F est prolongeable par continuité en 0.

* $\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{u \to 0^+} F(u) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt$

Partie C:

1) * soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x > 0$

$I_k(x) = \int_1^x t^k \ln(t)\,dt$ on intègre par parties en posant : $u' = t^k \Rightarrow u = \frac{t^{k+1}}{k+1}$

$v = \ln(t) \Rightarrow v' = \frac{1}{t}$

$$I_k(x) = \left[\frac{t^{k+1}\ln t}{k+1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^k}{k+1}\,dt = \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{1}{k+1}\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{x^{k+1}\ln x}{k+1} - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2}$$

* soit $n \in \mathbb{N}$, soit $x > 0$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}$$

donc : $$\frac{1}{1+x^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k x^{2k} = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{2k}}$$

$$= (-1)^{n+1} x^{2n+2} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

2) soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0;1[$

Soit $t \in]x;1[$

$$\frac{1}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} = (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln t}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \ln t = (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2} \ln t}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} \ln t\right) dt = \int_1^x (-1)^{n+1} \frac{t^{2n+2} \ln t}{1+t^2}\,dt$$

$$\Rightarrow F(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k I_{2k}(x) = (-1)^{n+1} \cdot \int_1^x \frac{t^{2n+2} \ln t}{1+t^2}\,dt$$

$$\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| = \left|\int_1^x \frac{t^{2n+2}\ln(t)}{1+t^2}\,dt\right| \leq \int_1^x \left|\frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\right| dt$$

$$t>0 \Rightarrow 1+t^2>1 \Rightarrow \frac{1}{1+t^2}<1$$

d'où : $\forall t\in[x;1]$, $\left|\frac{t^{2n+2}\ln t}{1+t^2}\right| < t^{2n+2}\ln t$

donc : $\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq \int_1^x t^{2n+2}\ln t\,dt = I_{2n+2}(x)$

3) Soit $k\in[\![0;n]\!]$, $I_{2k}(x) = \frac{x^{2k+1}\ln x}{2k+1} - \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{1}{(2k+1)^2}$ donc $\lim_{x\to 0^+} I_{2k}(x) = \frac{1}{(2k+1)^2}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| = \left|F(0)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)^2}\right| = |F(0)-u_n|$$

et : $I_{2n+2}(x) = \frac{x^{2n+3}\ln x}{2n+3} - \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)^2} + \frac{1}{(2n+3)^2}$

donc : $\lim_{x\to 0^+} I_{2n+2}(x) = \frac{1}{(2n+3)^2}$

Etant donné que : $\forall x\in]0;1[$, $\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq I_{2n+2}(x)$

et que les 2 termes de l'inégalité admettent 1 limite finie en 0

on a : $\lim_{x\to 0^+}\left|F(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k I_{2k}(x)\right| \leq \lim_{x\to 0^+} I_{2n+2}(x)$

$$\Leftrightarrow \quad |F(0)-u_n| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$$

4) On veut que : $|F(0)-u_n| < \frac{1}{10^2}$

il suffit d'avoir : $\frac{1}{(2n+3)^2} < \frac{1}{10^2} \Leftrightarrow (2n+3)^2 > 10^2 \Leftrightarrow 2n+3 > 10$

$\Leftrightarrow 2n > 7 \Leftrightarrow n > \frac{7}{2}$

il suffit de calculer $u_4 = \sum_{k=0}^{4}(-1)^k \cdot \frac{1}{(2k+1)^2}$