Exercices sur les V.A.C.

ex 1 :

1)

(a) $X_i \sim \mathcal{U}([0;a])$

$$\mathbb{E}[X_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X_i}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{a} \mathbb{1}_{[0;a]}(x)\,dx = \int_0^a \frac{x}{a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2a}\right]_0^a = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

$$\mathbb{V}[X_i] = \mathbb{E}[X_i^2] - (\mathbb{E}[X_i])^2 = \mathbb{E}[X_i^2] - \frac{a^2}{4}$$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{X_i}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{a} \mathbb{1}_{[0;a]}(x)\,dx = \int_0^a \frac{x^2}{a}\,dx = \left[\frac{a^3}{3a}\right]_0^a = \frac{a^3}{3a} = \frac{a^2}{3}$$

donc : $\mathbb{V}[X_i] = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{12}$

(b) $\mathbb{E}[A_n] = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{2}{n}\, n\, \mathbb{E}[X_i] = a$

$$\mathbb{V}[A_n] = \mathbb{V}\left[\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{4}{n^2} \mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right]$$

$= \frac{4}{n^2} \sum \mathbb{V}[X_i]$ car les $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ sont ind

$= \frac{4}{n^2} \cdot n\, \mathbb{V}[X_1]$ car les $(X_i)_{i=1,\dots,n}$ sont de même loi

$= \frac{4}{n} \cdot \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3n}$

Biais $[A_n] = \mathbb{E}[A_n] - a = a - a = 0$ c'est 1 estimateur sans biais de a.

2) $B_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$F_{X_i}(t) = \mathbb{P}(X_i \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f_{X_i}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{a} \mathbb{1}_{[0;a]}(x)\,dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[0;a]}(x)\,dx$$

1 si $t \leq 0$, $F_{X_i}(t) = 0$

2 si $t > 0$, $F_{X_i}(t) = \frac{1}{a} \int_0^t \mathbb{1}_{[0;a]}(x)\,dx$

2-1 si $t \geq a$, $F_{X_i}(t) = \int_0^a \frac{1}{a}\,dx = \left[\frac{x}{a}\right]_0^a = 1$

2-2 si $t \in]0;a[$, $F_{X_i}(t) = \frac{1}{a} \int_0^t dx = \frac{1}{a}[x]_0^t = \frac{t}{a}$

$*\ \mathbb{P}(B_n \leq t) = \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t, \dots, X_n \leq t)$

$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t)$ car les (X_i) sont indépendantes

$= \mathbb{P}(X_1 \leq t)^n$ car les (X_i) sont de même loi

$= F_{X_1}(t)^n$

Si $t \in]0;a[$, $\mathbb{P}(B_n \leq t) = \dfrac{t^n}{a^n}$

Si $t \geq a$, $\mathbb{P}(B_n \leq t) = 1^n = 1$

(b) $\forall t \in]0;a[$, $F_{B_n}(t) = \mathbb{P}(B_n \leq t) = \dfrac{t^n}{a^n}$

Soit $t \in]0;a[$, $f_{B_n}(t) = \left(F_{B_n}(t)\right)' = n.\dfrac{t^{n-1}}{a^n}$

On admet que : la densité de B_n est : $f_{B_n}(t) = n\dfrac{t^{n-1}}{a^n}\mathbb{1}_{]0;a[}(t)$

(c) $*\ \mathbb{E}[B_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x . f_{B_n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, n\dfrac{x^{n-1}}{a^n}\mathbb{1}_{]0;a[}(x)\,dx = \int_0^a x\, n\dfrac{x^{n-1}}{a^n}\,dx$

$= \int_0^a n.\dfrac{x^n}{a^n}\,dx = \dfrac{n}{a^n}.\left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^a = \dfrac{n}{a^n}.\dfrac{a^{n+1}}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}.a$

Biais $(B_n) = \mathbb{E}[B_n] - a = \dfrac{n}{n+1}.a - \dfrac{n+1}{n+1}a = \dfrac{-a}{n+1}$

$*$ On pose : $B_n^* = \dfrac{n+1}{n}.B_n$

on a alors : $\mathbb{E}[B_n^*] = \dfrac{n+1}{n}.\mathbb{E}[B_n] = \dfrac{n+1}{n}.\dfrac{n}{n+1}.a = a$

et : Biais $[B_n^*] = \mathbb{E}[B_n^*] - a = a - a = 0$

(d) $\mathbb{V}[B_n^*] = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\mathbb{V}[B_n] = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\left(\mathbb{E}[B_n^2] - \mathbb{E}[B_n]^2\right) = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2.\left(\mathbb{E}[B_n^2] - \left(\dfrac{n a}{n+1}\right)^2\right)$

$= \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2\mathbb{E}[B_n] - a^2$

$\mathbb{E}[B_n^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_{B_n}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\dfrac{n}{a^n}x^{n-1}\mathbb{1}_{]0;a[}(x)\,dx = \int_0^a \dfrac{n x^{n+1}}{a^n}\,dx$

$= \dfrac{n}{a^n}\left[\dfrac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^a$

$= \dfrac{n}{a^n}\dfrac{a^{n+2}}{n+2} = \dfrac{a^2 n}{n+2}$

$$\mathbb{V}[B_n^*] = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{a^2 n}{n+2} - a^2 = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} a^2 - 1 = a^2 \left[\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n} - \frac{n^2+2n}{n^2+2n}\right]$$

$$= a^2 \cdot \frac{1}{n^2+2n} = \frac{a^2}{n(n+2)}$$

3) $\mathbb{E}[B_n^*] = \mathbb{E}[A_n] = a$

néanmoins,

$n^2+2n-3n = n^2-n = n(n-1) > 0$ pour n suffisamment grand

donc : $n^2+2n > 3n \Rightarrow \frac{1}{n^2+2n} < \frac{1}{3n} \Rightarrow \frac{a^2}{n^2+2n} < \frac{a^2}{3n} \Rightarrow \mathbb{V}[B_n^*] < \mathbb{V}[A_n]$

On conseillerait d'utiliser B_n^* car ses valeurs sont moins dispersées que celles de A_n.

4)

* pour A_n : $\hat{a} = \frac{2}{n}(x_1 + \dots + x_n)$ [les $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ sont les valeurs réellement observées]

$= \frac{2}{20} \cdot 120 = 12$

$$\widehat{\mathbb{V}[A_n]} = \frac{(\hat{a})^2}{3n} = \frac{12 \times 12}{3 \cdot 20} = \frac{4 \times 6}{10} = \frac{12}{5} = 2{,}4$$

* pour B_n^* : $\hat{a} = \frac{n+1}{n} \cdot \max(x_1, \dots, x_n) = \frac{21}{20} \cdot 11 = 11{,}55 \simeq 12$

$$\widehat{\mathbb{V}[B_n]} = \frac{(\hat{a})^2}{n \cdot (n+2)} = \frac{21 \cdot 21 \cdot 11 \cdot 11}{20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 22} = \frac{21^2 \cdot 11}{20^3 \cdot 2} = 0{,}30$$

Les 2 estimateurs donnent la même estimation du temps d'attente (12 minutes) et la variance du premier est plus grande que celle du second.

---

ex 2 : $Y = 2X+1$

1) soit $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(2X+1 \leq y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{y-1}{2}\right)$

2) soit $z \in \mathbb{R}$, $F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \mathbb{P}(Z \leq z, X < -2) + \mathbb{P}(Z \leq z, X \in [-2;2]) + \mathbb{P}(Z \leq z, X > 2)$

$= \mathbb{P}(X+2 \leq z, X < -2) + \mathbb{P}(0 \leq z, X \in [-2;2]) + \mathbb{P}(X-2 \leq z, X > 2)$

1) si $z < 0$, $F_Z(z) = \mathbb{P}(X+2 \leq z, X+2 < 0) + \underbrace{\mathbb{P}(0 \leq z, X \in [-2;2])}_{0} + \underbrace{\mathbb{P}(X-2 \leq z, X-2 > 0)}_{0}$

$= \mathbb{P}(X+2 \leq z) + 0 + 0$

$= \mathbb{P}(X \leq z-2) = F_X(z-2)$

② si $z \geq 0$; $F_Z(z) = \mathbb{P}(X+2 \leq z, X+2 < 0) + \mathbb{P}(X \in [-2;2]) + \mathbb{P}(X-2 \leq z, X-2 > 0)$

$= \mathbb{P}(X+2 < 0) + \mathbb{P}(X \in [-2;2]) + \mathbb{P}(0 < X-2 \leq z)$

$= \mathbb{P}(X < -2) + \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X \leq -2) + \mathbb{P}(2 < X \leq z+2)$

$= \mathbb{P}(X \leq -2) + \mathbb{P}(X \leq 2) - \mathbb{P}(X \leq -2) + \mathbb{P}(X \leq z+2) - \mathbb{P}(X \leq 2)$

$= F_X(-2) + F_X(2) - F_X(-2) + F_X(z+2) - F_X(2)$

$= F_X(z+2)$

---

ex 3 : $X \sim \mathcal{U}([-1;1])$ [pour plus de précision pour savoir dans quel intervalle intégrer, voir le Cours/integration.pdf]

1) $Y = X^2$

soit $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X^2 \leq y)$

① si $y \leq 0$, $F_Y(y) = 0$ [le carré est toujours positif]

② si $y > 0$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx$

(2-1) si $y \geq 1$ alors : $F_Y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

(2-2) si $y \in]0;1[$ alors : $F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{2} \cdot dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} = \frac{2\sqrt{y}}{2} = \sqrt{y}$

2) $Y = 2 - X$

soit $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(2 - X \leq y) = \mathbb{P}(X \geq 2-y)$

$= \int_{2-y}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx$

① si $2-y \geq 1 \iff y \leq 1$

alors : $F_Y(y) = 0$

② si $2-y \leq -1 \iff y \geq 3$

alors : $F_Y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

③ si $y \in]1;3[\iff -1 \leq 2-y \leq 1$

alors : $F_Y(y) = \int_{2-y}^{+\infty} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx = \int_{2-y}^{1} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{2-y}^{1} = \frac{1-2+y}{2} = \frac{y-1}{2}$

3) $Y = e^X$

soit $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(e^X \leq y)$

(1) si $y \leq 0$ alors $F_Y(y) = 0$

(2) si $y > 0$ alors : $F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq \ln(y)) = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx$

(2-1) si $\ln y \leq -1 \Leftrightarrow y \leq \frac{1}{e}$

$F_Y(y) = 0$

(2-2) si $\ln y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq e$

alors : $F_Y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

(2-3) si $y \in \left]\frac{1}{e}; e\right[\Leftrightarrow -1 < \ln y < 1$

alors : $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx = \int_{-1}^{\ln y} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^{\ln y} = \frac{\ln y + 1}{2}$

4) $Y = \ln|X|$

soit $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(\ln|X| \leq y) = \mathbb{P}(|X| \leq e^y) = \mathbb{P}(-e^y \leq X \leq e^y)$

$= \int_{-e^y}^{e^y} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x)\,dx$

(1) si $e^y \geq 1 \Leftrightarrow y \geq 0$

alors : $F_Y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$

(2) si $e^y < 1 \Leftrightarrow y < 0$

alors : $F_Y(y) = \int_{-e^y}^{e^y} \frac{1}{2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\right]_{-e^y}^{e^y} = e^y$

---

ex 4 :

$\xi : \Omega \to \{-1;1\}$ avec $\mathbb{P}(\xi = -1) = \mathbb{P}(\xi = 1) = \frac{1}{2}$

X et ξ sont indépendantes [penser : $\mathbb{P}(X \in [a;b], \xi = -1) = \mathbb{P}(X \in [a;b]) \cdot \mathbb{P}(\xi = -1)$] et $Y = X + \xi$

1) soit $y \in \mathbb{R}$,

$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(X + \xi \leq y) = \mathbb{P}(X + \xi \leq y, \xi = -1) + \mathbb{P}(X + \xi \leq y, \xi = 1)$

$= \mathbb{P}(X - 1 \leq y, \xi = -1) + \mathbb{P}(X + 1 \leq y, \xi = 1)$

$= \mathbb{P}(X \leq y+1) \cdot \mathbb{P}(\xi = -1) + \mathbb{P}(X \leq y-1) \cdot \mathbb{P}(\xi = 1)$ car X et ξ sont indépendantes

$= \mathbb{P}(X \leq y+1) \cdot \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X \leq y-1) \cdot \frac{1}{2}$

$= \left(F_X(y+1) + F_X(y-1)\right) \cdot \frac{1}{2}$

2) $f_Y(y) = (F_Y(y))' = \frac{1}{2}\left[f_X(y+1) + f_X(y-1)\right], \forall y \in \mathbb{R}$

ex5 :

$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

donc : $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$x \mapsto \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) dx$

Soient t et $s \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X > t+s \mid X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t+s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t+s)}{\mathbb{P}(X > s)}$$

Soit $u \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(X > u) = \int_u^{+\infty} f_X(x) dx = \int_u^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) dx = \int_u^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_u^{+\infty}$$

$$\left[\left(e^{-\lambda x}\right)' = -\lambda e^{-\lambda x}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{e^{\lambda x}} + e^{-\lambda u}$$

$$= e^{-\lambda u}$$

donc : $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > s) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t)$

Problème :

$X \sim \mathcal{LP}(\alpha; x_0)$

$\alpha, x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^{\alpha+1}} & \text{si } x \in [x_0; +\infty[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie A :

1)

(a) * $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{x_0}^{x} \frac{k}{t^{\alpha+1}}\,dt = k\int_{x_0}^{x} t^{-\alpha-1}\,dt = k\left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_{x_0}^{x} = \frac{k}{\alpha}\left[x_0^{-\alpha} - x^{-\alpha}\right] = \frac{k}{\alpha}\left[\frac{1}{x_0^{\alpha}} - \frac{1}{x^{\alpha}}\right]$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{k}{\alpha}\left[\frac{1}{x_0^{\alpha}} - \frac{1}{x^{\alpha}}\right] = \frac{k}{\alpha x_0^{\alpha}}$

* f est-elle une densité ?

f est 1 fonction positive, elle est continue sur $\mathbb{R}$ privé de x_0

Pour qu'elle soit 1 densité, elle doit vérifier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$$

or : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{k}{\alpha x_0^{\alpha}}$

donc k doit vérifier : $\dfrac{k}{\alpha x_0^{\alpha}} = 1 \Leftrightarrow k = \alpha x_0^{\alpha}$

(b) soit $x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$

① si $x \in]-\infty; x_0[$, $F(x) = 0$

② si $x \in [x_0; +\infty[$, $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{k}{t^{\alpha+1}}\,dt = \frac{\alpha x_0^{\alpha}}{\alpha}\left[\frac{1}{x_0^{\alpha}} - \frac{1}{x^{\alpha}}\right] = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$

(c) soit $x \geq x_0$, $F(x) = 1 - \left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}$

$\ln(1 - F(x)) = \ln\left(\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha}\right) = \alpha\left[\ln(x_0) - \ln(x)\right]$

(d) Me, la médiane de la distribution vérifie :

$F(Me) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(1 - F(Me)) = -\ln 2 \Leftrightarrow \alpha\left[\ln(x_0) - \ln(Me)\right] = -\ln 2$

$\Leftrightarrow \left[\ln(x_0) - \ln(Me)\right] = -\dfrac{\ln 2}{\alpha} = -\ln\left(2^{\frac{1}{\alpha}}\right)$

$\Leftrightarrow \ln(Me) = \ln(x_0) + \ln\left(2^{\frac{1}{\alpha}}\right) \Leftrightarrow Me = x_0\, 2^{\frac{1}{\alpha}}$

2)

(a) soit $x \geq x_0$,

$$M_x = \int_{x_0}^{x} t f(t)\, dt = \int_{x_0}^{x} \frac{\alpha x_0^\alpha}{t^\alpha}\, dt = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{x} t^{-\alpha}\, dt$$

1 si $\alpha = 1$, $M_x = \alpha x_0^\alpha \int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\, dt = \alpha x_0^\alpha \left[\ln(x) - \ln(x_0)\right]$

2 si $\alpha \neq 1$, $M_x = \alpha x_0^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{x_0}^{x} = \alpha x_0^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{-\alpha+1}\right]$

1 si $\alpha = 1$, $\lim_{x \to +\infty} M_x = \lim_{x \to +\infty} \alpha x_0^\alpha \left[\ln(x) - \ln(x_0)\right] = +\infty$

2 si $\alpha < 1$, $\lim_{x \to +\infty} M_x = \lim_{x \to +\infty} \alpha x_0^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = +\infty$

3 si $\alpha > 1$, $\lim_{x \to +\infty} M_x = \lim_{x \to +\infty} \alpha x_0^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \alpha x_0^\alpha \left[\frac{-x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \alpha \frac{x_0}{\alpha - 1}$

(b) $M_\alpha = \lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} t f(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, dt = \mathbb{E}[X]$

3) $Y = \ln\left(\frac{X}{x_0}\right)$; on note $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y)$ la fonction de répartition de Y

soit $y \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{X}{x_0}\right) \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{x_0} \leq e^y\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x_0 e^y\right)$$

1 si $x_0 e^y < x_0 \Leftrightarrow y < 0$

alors: $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$

2 si $x_0 e^y \geq x_0 \Rightarrow y \geq 0$

alors: $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1 - \left(\frac{x_0}{x_0 e^y}\right)^\alpha = 1 - e^{-\alpha y}$

* si on note f_Y la densité de Y

on a: $f_Y(y) = \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$

1 si $y \leq 0$, $f_Y(y) = 0$

2 si $y \geq 0$, $f_Y(y) = -(-\alpha) e^{-\alpha y} = \alpha e^{-\alpha y}$

* Y suit 1 loi exponentielle de paramètre α.

4)

soit $x_1 \in \mathbb{R}$ tel que : $x_1 > x_0 > 0$

(a) soit $z \geq x_1$,

$$\mathbb{P}(X > z \mid X > x_1) = \frac{\mathbb{P}(X > z, X > x_1)}{\mathbb{P}(X > x_1)} = \frac{\mathbb{P}(X > z)}{\mathbb{P}(X > x_1)} = \frac{1 - \mathbb{P}(X \leq z)}{1 - \mathbb{P}(X \leq x_1)} = \frac{\left(\frac{x_0}{z}\right)^\alpha}{\left(\frac{x_0}{x_1}\right)^\alpha} = \left(\frac{x_1}{z}\right)^\alpha$$

(b)

si $z < x_1$, $H(z) = 0$

si $z \geq x_1$, $H(z) = 1 - \left(\frac{x_1}{z}\right)^\alpha$

* H est croissante sur $\mathbb{R}$, elle est à valeur dans $[0;1]$

et $\lim\limits_{z \to -\infty} H(z) = 0$ et $\lim\limits_{z \to +\infty} H(z) = 1$

H est donc une fonction de répartition.

(c) C'est la fonction de répartition d'une loi de Pareto de paramètres α et x_1.

Partie B :

X est la v.a qui représente le revenu d'1 individu de la population

$X \sim \mathcal{LP}(\alpha, x_0)$ avec $\alpha > 1$

1) $$Q(x) = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} \int_{x_0}^{x} t\, f(t)\, dt = \frac{M_x}{\mathbb{E}[X]} = \frac{M_x}{M_\alpha} = \frac{\alpha x_0^\alpha \left[\frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]}{\frac{\alpha x_0}{\alpha - 1}}$$

$$= (\alpha - 1) x_0^{\alpha - 1} \left[\frac{x^{1-\alpha} - x_0^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = x_0^{\alpha-1}\left[x_0^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}\right] = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{1-\alpha} = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha - 1}$$

2) $F : [x_0 ; +\infty[\to [0;1[$

$x \mapsto 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\alpha$

* F est-elle 1 bijection de $[x_0 ; +\infty[$ dans $[0;1[$?