Recherche d'extremum : Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

I) Extremums locaux et globaux :

1) déf d'1 extremum global :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$

* $x_0 \in D$ est 1 minimum global de f si : $\forall x \in D$, $f(x_0) \leq f(x)$

* $x_0 \in D$ est 1 maximum global de f si : $\forall x \in D$, $f(x_0) \geq f(x)$

2) déf d'1 extremum local :

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ avec $D \subset \mathbb{R}$

* minimum local : f admet 1 minimum local en x_0 sur l'intervalle $I \subset D$

si : 1 $x_0 \in I$

2 $\forall x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$

* maximum local : f admet 1 maximum local en x_0 sur l'intervalle $I \subset D$

si : 1 $x_0 \in I$

2 $\forall x \in I$, $f(x_0) \geq f(x)$.

3) recherche d'extremum et annulation de la dérivée :

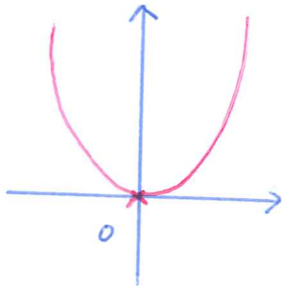
Th : Soit f 1 fonction dérivable sur 1 intervalle ouvert I $\left( ]-\infty ; a[,]a ; b[,]b ; +\infty[\text{ ou } \mathbb{R} \right)$

Si f admet 1 extremum local en $x_0 \in I$ alors $f'(x_0) = 0$

ex : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2$

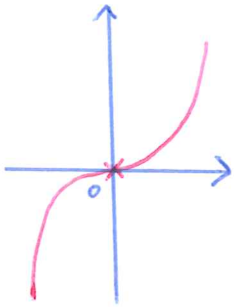
$f'(0) = 0$ et 0 est 1 minimum global de f $\left(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0 \right)$



Contre-ex de la réciproque :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^3$

$f'(0) = 0$ mais 0 n'est ni minimum ni maximum local de f



Th : Soit f, 1 fonction dérivable sur 1 intervalle ouvert I et $x_0 \in I$
Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe alors $f(x_0)$ est 1 extremum local de f sur I.

ex : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 99$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$

tableau de variation :

signe de x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{301}{3}$	$\searrow$	99	$\nearrow$	$+\infty$

f' s'annule en 1 et en 3 en changeant de signe donc $\frac{301}{3}$ et 99 sont des extremums locaux de f sur $\mathbb{R}$.
$\frac{301}{3}$ est 1 maximum local et 99 est 1 minimum local.

Sont-ils des extremums globaux ?

Etant donné que : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, 99 n'est pas 1 minimum global.

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\frac{301}{3}$ n'est pas 1 maximum global.