Partie II :

1) * $cov(X_1, X_2) = \mathbb{E}\left((X_1 - \mathbb{E}(X_1))(X_2 - \mathbb{E}(X_2)) \right)$

$= \mathbb{E}\left(X_1 X_2 - X_1 \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1) X_2 + \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) \right)$

$= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$ car l'espérance est 1 opération linéaire

$= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2)$

* $cov(X_2, X_1) = \mathbb{E}(X_2 X_1) - \mathbb{E}(X_2)\mathbb{E}(X_1)$

$= \mathbb{E}(X_1 X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = cov(X_1, X_2)$

2) $cov(aX_1 + X_1', X_2) = \mathbb{E}\left((aX_1 + X_1') X_2 \right) - \mathbb{E}(aX_1 + X_1') . \mathbb{E}(X_2)$

$= \mathbb{E}(aX_1X_2 + X_1'X_2) - (a\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_1')) . \mathbb{E}(X_2)$

$= a\,\mathbb{E}(X_1X_2) + \mathbb{E}(X_1'X_2) - a\,\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_1')\mathbb{E}(X_2)$

$= a\,\mathbb{E}(X_1X_2) - a\,\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_1'X_2) - \mathbb{E}(X_1')\mathbb{E}(X_2)$

$= a\,cov(X_1, X_2) + cov(X_1', X_2)$

3)

(a) Si X_1 et X_2 sont indépendantes alors $cov(X_1, X_2) = 0$

(b)

i) $\mathbb{E}(Z) = \sum_{i \in Z(\omega)} i\,\mathbb{P}(Z = i) = \sum_{i \in \{-1;1\}} i\,\mathbb{P}(Z=i) = 0$

ii) $cov(X_1, X_2) = cov(X_1, X_1 Z) = \mathbb{E}(X_1^2 Z) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_1 Z)$

or : X_1 et Z sont indépendantes donc : $cov(X_1, Z) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_1 Z) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X_1 Z) = 0$

de même X_1^2 et Z sont indépendantes donc : $cov(X_1^2 Z) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(X_1^2 Z) = \mathbb{E}(X_1^2)\mathbb{E}(Z) = 0$

donc : $cov(X_1, X_2) = 0 - \mathbb{E}(X_1) . 0 = 0$

iii) $X_1 : \Omega \to [\![-2; 2]\!]$

$X_2 : \Omega \to [\![-2; 2]\!]$

$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{5}$; $\mathbb{P}(X_2 = -2) = \mathbb{P}(X_1 = -2, Z = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2, Z = -1)$

$= \mathbb{P}(X_1 = -2)\mathbb{P}(Z = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2) . \mathbb{P}(Z = -1)$ car X_1 et Z sont indépendantes

$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

$$\mathbb{P}(X_1=0, X_2=-2) = \mathbb{P}(\underbrace{X_1=0, X_1=-2}_{\emptyset}, Z=1) + \mathbb{P}(\underbrace{X_1=0, X_1=2}_{\emptyset}, Z=-1)$$

$$= 0 + 0$$

$$\neq \mathbb{P}(X_1=0)\cdot\mathbb{P}(X_2=-2)$$

Partie III :

1)

(a) $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{3} u_i \, \mathbb{E}(X_i) = 0$

(b) $\mathbb{V}(Y) = \text{cov}(Y, Y) = \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{3} u_i X_i, \sum_{j=1}^{3} u_j X_j\right)$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} u_i u_j \text{cov}(X_i, X_j) = u_1^2 \text{cov}(X_1,X_1) + u_2^2 \text{cov}(X_2,X_2) + u_3^2 \text{cov}(X_3,X_3)$$

$$+ 2u_1u_2 \text{cov}(X_1,X_2) + 2u_1u_3\text{cov}(X_1,X_3) + 2u_2u_3\text{cov}(X_2,X_3)$$

(c) $$\Sigma_X u = \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1,X_1)u_1 + \text{cov}(X_1,X_2)u_2 + \text{cov}(X_1,X_3)u_3 \\ \text{cov}(X_2,X_1)u_1 + \text{cov}(X_2,X_2)u_2 + \text{cov}(X_2,X_3)u_3 \\ \text{cov}(X_3,X_1)u_1 + \text{cov}(X_3,X_2)u_2 + \text{cov}(X_3,X_3)u_3 \end{pmatrix}$$

$$^t u \, \Sigma_X u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{cov}(X_1,X_1)u_1 + \text{cov}(X_1,X_2)u_2 + \text{cov}(X_1,X_3)u_3 \\ \text{cov}(X_2,X_1)u_1 + \text{cov}(X_2,X_2)u_2 + \text{cov}(X_2,X_3)u_3 \\ \text{cov}(X_3,X_1)u_1 + \text{cov}(X_3,X_2)u_2 + \text{cov}(X_3,X_3)u_3 \end{pmatrix}$$

$$= u_1^2 \text{cov}(X_1,X_1) + 2u_1u_2\text{cov}(X_1,X_2) + 2u_1u_3\text{cov}(X_1,X_3) + 2u_1u_2\text{cov}(X_1,X_2)$$

$$+ u_2\text{cov}(X_2,X_2) + u_3^2\text{cov}(X_3,X_3)$$

$$= \mathbb{V}(Y)$$

Σ_X est 1 matrice symétrique comme M.

$\forall u \in \mathbb{R}^3, \; ^t u M u \geq 0$

et : $\forall u \in \mathbb{R}^3, \; ^t u \Sigma_X u = \mathbb{V}(Y) \geq 0$ car la variance est positive.

2)

(a) $\mathbb{V}(Y) = {}^t u M u = {}^t u \, 0_{\mathbb{R}^3} = 0$

(b) $\mathbb{V}(Y) = 0$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(Y)^2$

or: $\mathbb{E}(Y) = 0$ donc: $\mathbb{E}(Y^2) = 0$

(c) $Y = \sum_{i=1}^{3} u_i X_i = X_2 - X_3$ avec $X_2(\omega) = X_3(\omega) = \{0; 1; 2\}$

donc: $Y : \Omega \to \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

et $Y^2 : \Omega \to \{0, 1, 4\}$

(d) * on sait que: $\mathbb{E}(Y) = 0$

donc: $1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + 4 \cdot \mathbb{P}(Y = 4) = 0$

or: $\mathbb{P}(Y = 1) \geqslant 0$ et $\mathbb{P}(Y = 4) \geqslant 0$

donc: $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 4) = 0$

or: $\mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 4) = 1$

donc: $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$

* De plus: $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow Y^2(\omega) = 0$

donc: $\{\omega \in \Omega \,/\, Y(\omega) = 0\} = \{\omega \in \Omega \,/\, Y^2(\omega) = 0\}$

d'où: $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Y^2 = 0)$

(e) $\mathbb{P}(X \in H) = \mathbb{P}\left(\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right) = \mathbb{P}\left(X_2 - X_3 = 0 \right) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1$