DEVOIR - MAISON

ex 6.13 :

1) Pour $i \in [\![1;5]\!]$, soit X_i la v.a.d. qui vaut : $\begin{cases} 1 & \text{si le } i^{è} \text{ lancer de la pièce donne "pile"} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

on a : $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$. De plus, les lancers sont indépendants donc les $(X_i)_{i=1,\dots,5}$ sont indépendantes

Par conséquent : $X = \sum_{i=1}^{5} X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(5; \frac{2}{3}\right)$

donc : $\mathbb{P}[X=2] = C_2^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^{5-2} = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{27} = \frac{5.2.4}{9.27} = 0{,}165$

ex 6.14 :

1) Pour $i \in \mathbb{N}^*$, soit X_i la v.a.d. qui vaut : $\begin{cases} 1 & \text{si le } i^{è} \text{ lancer du dé donne 5} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{6}\right)$. De plus, les lancers du dé sont indépendants donc les $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

Si X représente le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir un "5" alors : $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$

$\mathbb{P}[E_n] = \mathbb{P}[X=n] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}$

2) $\mathbb{P}[A \cap E_n] = \mathbb{P}[A \mid E_n] \cdot \mathbb{P}[E_n]$

or : $A \mid E_n$ est l'évènement "le 2 apparaît après le 5 sachant que le premier 5 est au rang n"

donc c'est l'évènement "le premier 2 apparaît après le rang n"

Si Y représente le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir un "2" alors : $Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$

$$*\mathbb{P}[A \mid E_n] = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}[Y=k] = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^k}_{\text{Somme des termes d'1 suite géométrique}}$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{6}}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$\mathbb{P}[A \cap E_n] = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{6}$$

3) $\mathbb{P}[A] = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}[A \cap E_n] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{-1} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{36} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{25}{36}\right)^{n}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{36} \cdot \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{5}{36} \cdot \frac{36}{11} = \underline{\frac{5}{11}}$$

[si on somme des puissances penser aux 2 formules : $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ pour $|q| < 1$]

pour $q \neq 1$