ex 3 : $X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$ et : $(X;Y) : \Omega \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

(a) $$\sum_{x \in \mathbb{N}} \sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X=x, Y=y] = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{y=0}^{+\infty} C \frac{\lambda^{x+y}}{x!\,y!} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x+y}}{x!\,y!} = \frac{1}{C}$$

or : $$\sum_{x=0}^{+\infty} \sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{x+y}}{x!\,y!} = \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \underbrace{\sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{y!}}$$
$$= \underbrace{\sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!}} \cdot e^{\lambda}$$
$$= e^{\lambda} \cdot e^{\lambda} = e^{2\lambda}$$

donc : $C = e^{-2\lambda}$

(b) Soit $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[X=x] = \sum_{y \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{y=0}^{+\infty} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{x+y}}{x!\,y!}$$
$$= e^{-2\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\sum_{y=0}^{+\infty} \frac{\lambda^y}{y!}}$$
$$= e^{-2\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \cdot e^{\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

[X suit 1 loi de Poisson de paramètre λ]

(c) Soit $y \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}[Y=y] = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{-2\lambda} \frac{\lambda^{x+y}}{x!\,y!} = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-2\lambda} \frac{\lambda^y}{y!} e^{\lambda} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^y}{y!}$$

on a bien : $\forall (x;y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \mathbb{P}[X=x, Y=y] = e^{-2\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot \frac{\lambda^y}{y!} = \mathbb{P}[X=x] \cdot \mathbb{P}[Y=y]$

donc X et Y sont indépendantes.

(d) HORS PROGRAMME

ex2:

1) $A_1 : \Omega \to \{0;2\}$

$\mathbb{P}[A_1=0] = \mathbb{P}[D_1=1] = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}[A_1=2] = 1 - \mathbb{P}[A_1=0] = \frac{5}{6}$

$\mathbb{E}[A_1] = \frac{5}{3}$

[A_1 prend 2 valeurs MAIS: elle ne prend pas les valeurs $\{0;1\}$, elle ne suit donc pas 1 loi de Bernoulli]

2)

(a) $A_1=0 \to A_2=1$ [quel que soit le chiffre du 2^e lancer, on déplacera 1 boule de l'urne B vers l'urne A]

$A_1=2 \to A_2=3$ [on déplace 1 boule de B vers A]

$ \to A_2=1$ [on déplace 1 boule de A vers B]

donc: $(A_1, A_2) : \Omega \to \{(0;1);(2;3);(2;1)\}$

(b)

$\{(A_1;A_2)=(0;1)\} = \{A_1=0, A_2=1\} = \{D_1=1\} \cap \{D_2 \in [\![1;6]\!]\} = \{D_1=1\}$

$\{(A_1;A_2)=(2;3)\} = \{A_1=2, A_2=3\} = \{D_1 \in [\![2;6]\!]\} \cap \underbrace{\{D_2 \notin \{1;D_1\}\}}_{\text{le 2}^e\text{ lancer a donné 1 chiffre ne correspondant pas à une boule de l'urne A}}$

$\{(A_1;A_2)=(2;1)\} = \{A_1=2, A_2=1\} = \{D_1 \in [\![2;6]\!]\} \cap \underbrace{\{D_2=1 \cup D_2=D_1\}}_{\text{le 2}^e\text{ lancer a donné "1" OU la valeur du 1}^{er}\text{ lancer}}$

$= \left(\{D_1 \in [\![2;6]\!]\} \cap \{D_2=1\}\right) \cup \left(\{D_1 \in [\![2;6]\!]\} \cap \{D_2=D_1\}\right)$

(c)

loi de (A_1, A_2) ?

$$\mathbb{P}[A_1 = 0, A_2 = 1] = \mathbb{P}[D_1 = 1] = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[A_1 = 2, A_2 = 1] = \underbrace{\mathbb{P}[\{D_1 \in [\![2;6]\!]\} \cap \{D_2 = 1\}]}_{= \text{ car les lancers de dés sont indépendants [même si ce n'est pas dans l'énoncé]}} + \mathbb{P}[\{D_1 \in [\![2;6]\!]\} \cap \{D_2 = D_1\}]$$

$$= \mathbb{P}[D_1 \in [\![2;6]\!]] \cdot \mathbb{P}[D_2 = 1] + \mathbb{P}[D_1 \in [\![2;6]\!] \cap D_2 = D_1]$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \sum_{d_1=2}^{6} \mathbb{P}[D_1 = d_1, D_2 = d_1]$$

$$= \frac{5}{36} + \sum_{d_1=2}^{6} \mathbb{P}[D_1 = d_1] \cdot \mathbb{P}[D_2 = d_1]$$

$$= \frac{5}{36} + \sum_{d_1=2}^{6} \frac{1}{36}$$

$$= \frac{5}{36} + \frac{5}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$\mathbb{P}[A_1 = 2, A_2 = 3] = \underbrace{1 - \mathbb{P}[A_1 = 0, A_2 = 1] - \mathbb{P}[A_1 = 2, A_2 = 1]}_{\text{+ rapide à calculer}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

loi marginale de A_2 :

$A_2 : \Omega \to \{1;3\}$

$$\mathbb{P}[A_2 = 1] = \mathbb{P}[A_1 = 0, A_2 = 1] + \mathbb{P}[A_1 = 2, A_2 = 1] = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9}$$

et : $\mathbb{P}[A_2 = 3] = 1 - \mathbb{P}[A_2 = 1] = \frac{5}{9}$

(d) $\mathbb{P}[A_1 = 0, A_2 = 1] = \frac{1}{6}$ [

or : $\mathbb{P}[A_1 = 0] = \frac{1}{6}$ et $\mathbb{P}[A_2 = 1] = \frac{4}{9}$ donc : $\mathbb{P}[A_1 = 0] \cdot \mathbb{P}[A_2 = 1] = \frac{2}{27} \neq \mathbb{P}[A_1 = 0, A_2 = 1]$

donc : A_1 et A_2 ne sont pas indépendantes