Problème 2

1) $p_1, \dots, p_6$ sont les 6 premiers termes d'1 suite arithmétique

$$(I)\begin{cases} p_2 = p_1 + r \\ p_3 = p_1 + 2r \\ p_4 = p_1 + 3r \\ p_5 = p_1 + 4r \\ p_6 = p_1 + 5r \end{cases}$$

p_1, p_3 et p_6 sont 3 termes consécutifs d'1 suite géométrique :

$$(II)\begin{cases} p_3 = q \cdot p_1 \\ p_6 = q^2 \cdot p_1 \end{cases}$$

* valeur de q ?

On a donc : $\begin{cases} q \cdot p_1 = p_1 + 2r = p_3 \\ \text{et } q^2 \cdot p_1 = p_1 + 5r = p_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (q-1)\, p_1 = 2r \\ (q^2-1)\, p_1 = 5r \end{cases}$

donc : $\dfrac{q^2-1}{q-1} = \dfrac{5r}{2r} \Leftrightarrow q+1 = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow q = \dfrac{3}{2}$

* valeur de r ?

en remplaçant dans (II), on a : $\begin{cases} p_3 = \dfrac{3}{2} p_1 \\ p_6 = \dfrac{9}{4} p_1 \end{cases}$

On a donc : $\begin{cases} \dfrac{3}{2} p_1 = p_1 + 2r \\ \dfrac{9}{4} p_1 = p_1 + 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{p_1}{2} = 2r \\ \dfrac{5p_1}{4} = 5r \end{cases}$

donc : $r = \dfrac{p_1}{4}$

* valeur de p_1 ? $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ [la somme des probabilités vaut 1]

$p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r + p_1 + 4r + p_1 + 5r = 1$

$\Leftrightarrow p_1 + p_1 + \dfrac{p_1}{4} + p_1 + \dfrac{p_1}{2} + p_1 + \dfrac{3p_1}{2} + p_1 + p_1 + p_1 + \dfrac{5p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{39 p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow p_1 = \dfrac{4}{39}$

En remplaçant dans (I), on obtient : $\begin{cases} p_1 = \frac{4}{39} \\ p_2 = \frac{5}{39} \\ p_3 = \frac{6}{39} \\ p_4 = \frac{7}{39} \\ p_5 = \frac{8}{39} \\ p_6 = \frac{9}{39} \end{cases}$

On a bien : $p_k = \frac{3+k}{39}$ pour $k \in [\![1;6]\!]$

2)

a) $\mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}$

$\mathbb{P}(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$

$\mathbb{P}(C) = p_3 + p_4 = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$

b) $\mathbb{P}(B\backslash A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{p_4+p_6}{p_2+p_4+p_6} = \frac{\frac{16}{39}}{\frac{21}{39}} = \frac{16}{21}$

c) * $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B\backslash A).\mathbb{P}(A) = \frac{16}{21}.\frac{21}{39} = \frac{16}{39}$

$\mathbb{P}(A) = \frac{7}{13}$

$\mathbb{P}(B) = \frac{10}{13}$

donc : $\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B) = \frac{70}{169} \neq \mathbb{P}(A\cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

* $\mathbb{P}(A\cap C) = p_4 = \frac{7}{39}$

or : $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{13}$

et : $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{39}$

donc : $\mathbb{P}(A\cap C) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(C)$ donc A et C sont indépendants

3) Soit X_i, la v.a.d. qui correspond au gain du i^e lancer pour $i \in [\![1;60]\!]$ ③

$X_i : \Omega \to \{-1;1\}$ [elle n'est pas à valeurs dans $\{0;1\}$ donc elle ne suit pas 1 loi de Bernoulli !]

avec : $\mathbb{P}[X_i = -1] = \mathbb{P}[B] = 1 - \mathbb{P}[A] = \frac{6}{13}$

et : $\mathbb{P}[X_i = 1] = \mathbb{P}[A] = \frac{7}{13}$

Soit $X = \sum_{i=1}^{60} X_i$, la v.a.d correspondant au gain

$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{60} \mathbb{E}[X_i]$

or : $\mathbb{E}[X_i] = -1.\mathbb{P}[X_i=-1] + 1.\mathbb{P}[X_i=1] = -1.(1-\mathbb{P}[A]) + 1.\mathbb{P}[A] = -1 + 2.\mathbb{P}[A] = \frac{1}{13}$

donc : $\mathbb{E}[X] = \frac{60}{13}$

4) * gain ? $23 - 21 = 2$

* estimer $\mathbb{P}[A]$?

$\mathbb{E}[X_1] = -1 + 2.\mathbb{P}[A]$

$\Leftrightarrow \quad \mathbb{P}[A] = \frac{\mathbb{E}[X_1] + 1}{2}$

rappel du cours : Etant donné qu'on répète l'expérience 1 grand nombre de fois (60) on peut estimer l'espérance par la moyenne des résultats

En notant x_i le gain obtenu au i^e lancer, $\mathbb{E}[X_1]$ a pour estimation : $\frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} = \frac{\text{gain}}{60} = \frac{1}{30}$

donc : $\mathbb{P}[A]$ a pour estimation : $\frac{\frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} + 1}{2} = \frac{\frac{31}{30}}{2} = \frac{31}{60}$

Exercice

soit $x \in X(\Omega)$, $a \leq x \leq b$

$$\Rightarrow a.\mathbb{P}(X=x) \leq x.\mathbb{P}(X=x) \leq b.\mathbb{P}(X=x)$$

$$\Rightarrow \sum_{x\in X(\Omega)} a.\mathbb{P}(X=x) \leq \sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbb{P}(X=x) \leq \sum_{x\in X(\Omega)} b.\mathbb{P}(X=x)$$

$$\Rightarrow a.\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x) \leq \mathbb{E}[X] \leq b.\sum_{x\in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=x)$$

$$\Rightarrow a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$$

Pb 3

1) $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in X(\Omega)} x.\mathbb{P}(X=x) = \sum_{x\in\{-1;0;1\}} x.\mathbb{P}(X=x) = a-b$

2) $Y = X^2$

(a) $Y : \Omega \to \{0;1\}$

$\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(X^2=0) = \mathbb{P}(X=0) = 1-(a+b)$

$\mathbb{P}(Y=1) = 1-\mathbb{P}(Y=0) = a+b$

(b) $\mathbb{E}[Y] = \sum_{y\in Y(\Omega)} y.\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{y=0}^{1} y.\mathbb{P}(X^2=y) = \mathbb{P}(X^2=1) = \mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(X=-1) = a+b$

(c) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}(X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - (a+b)^2$

$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y] = a+b$

donc : $\mathbb{V}[X] = a+b-(a+b)^2$

(d) $\mathbb{V}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - (a+b)^2$

$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{y\in Y(\Omega)} y^2\,\mathbb{P}[Y=y] = \sum_{y=0}^{1} y^2\,\mathbb{P}[Y=y] = \mathbb{P}[Y=1] = a+b$

$\mathbb{V}[Y] = a+b-(a+b)^2$

e) $P = \frac{X+Y}{2} = \frac{X+X^2}{2}$

$P: \Omega \to \{0;1\}$

$\mathbb{P}(P=1) = \mathbb{P}\left(\frac{X+X^2}{2}=1\right) = \mathbb{P}(X^2+X=2) = \mathbb{P}(X^2+X-2=0) = \mathbb{P}((X-1)(X+2)=0)$

$= \mathbb{P}(\{X=1\} \cup \{X=-2\}) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=-2)$

$= \mathbb{P}(X=1) = a$

$\mathbb{P}(P=0) = 1 - \mathbb{P}(P=1) = 1-a$

(f) $M = \frac{Y-X}{2} = \frac{X^2-X}{2} = \frac{X(1-X)}{2}$

$M: \Omega \to \{0;1\}$

$\mathbb{P}(M=0) = \mathbb{P}(X(1-X)=0) = \mathbb{P}(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) = 1-b$

$\mathbb{P}(M=1) = 1 - \mathbb{P}(M=0) = b$

3)

(a) $\mathbb{P}(X=1 | Y=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{P}(X=1, X^2=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{P}(X=1, X=-1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(Y=1)} = \frac{a}{a+b}$

(b) $\mathbb{P}(Y=1 | X=1) = \frac{\mathbb{P}(X=1, Y=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = \frac{\mathbb{P}(X=1)}{\mathbb{P}(X=1)} = 1$

(c) $\mathbb{P}(P=M) = \mathbb{P}\left(\frac{Y+X}{2} = \frac{Y-X}{2}\right) = \mathbb{P}(X+Y = Y-X) = \mathbb{P}(2X=0) = \mathbb{P}(X=0) = 1-(a+b)$

(d) $\mathbb{P}(PM=0) = \mathbb{P}\left(\frac{Y^2-X^2}{4}=0\right) = \mathbb{P}(X^4-X^2=0) = \mathbb{P}(X^2(X-1)(X+1)=0)$

$= \mathbb{P}(X=0 \cup X=-1 \cup X=1)$

$= \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=-1) + \mathbb{P}(X=1)$

$= 1$