Convexité d'1 Fonction réelle

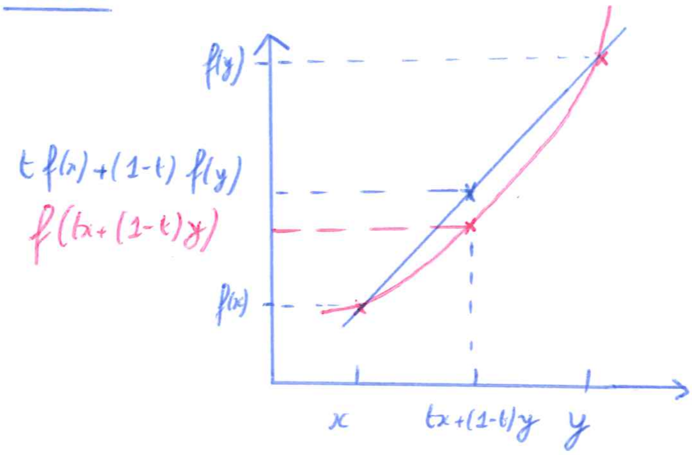
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ avec I intervalle de $\mathbb{R}$

1) déf :

f est convexe sur I si :
(strictement)

$\forall (x;y) \in I^2, \forall t \in [0;1], \ f(tx+(1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$
$(<)$

schéma :



2) prop :

Si f est convexe sur I et $(x_1, \dots, x_n)$ sont des points de I et $(t_1, \dots, t_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ tels que : $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$

alors $f\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i)$

3) dérivabilité et convexité :

prop 1 : si f est dérivable sur I

f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'$ est croissante sur I

prop 2 : si f est 2 fois dérivable sur I

f est convexe $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in I$

ex : ① $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = e^x \geq 0$

donc e^x est convexe sur $\mathbb{R}$

② $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -\ln x$ est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f'(x) = \frac{-1}{x}$

et $f''(x) = \frac{1}{x^2} \geq 0$

donc : $-\ln$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on dit aussi que $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$)

4) convexité et recherche d'extremum :

rq : Si f est convexe sur I et dérivable sur I
et si $x_0 \in I$, $f'(x_0) = 0$ alors : x_0 est 1 minimum global de $f_{|I}$ (f restreinte à I)

autrement dit : $\forall x \in I$, $f(x) \geq f(x_0)$

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$

on a : f qui est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x) = 2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
donc f est convexe et dérivable sur $\mathbb{R}$
or : $f'(0) = 0$ donc 0 est 1 minimum global de f.