Correction exercices Matrices

ex 1 :

1°) pour montrer que $A(\theta)$ est inversible, il suffit de montrer que : $\det(A(\theta)) \neq 0$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\det(A(\theta)) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0$

2°) on va, dans un premier temps, calculer $A^0(\theta)$, $A^1(\theta)$ et $A^2(\theta)$

$$A^0(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = A(0.\theta)$$

$$A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = A(1.\theta)$$

$$A^2(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta + \cos^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = A(2\theta)$$

On veut montrer la propriété $(P_n) : (A(\theta))^n = A(n\theta)$

① $(A(\theta))^0 = A(0) = I_2$ donc : (P_0) est vraie

② On suppose (P_n) vraie, a-t-on (P_{n+1}) vraie ?

$$(A(\theta))^{n+1} = (A(\theta))^n A(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ d'après } (P_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos\theta - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(n\theta)\cos(\theta) \\ \sin(n\theta)\cos\theta + \cos(n\theta)\sin(\theta) & -\sin(n\theta)\sin\theta + \cos(n\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos((n+1)\theta) & -\sin((n+1)\theta) \\ \sin((n+1)\theta) & \cos((n+1)\theta) \end{pmatrix} = A((n+1)\theta)$$

donc (P_{n+1}) est vraie

On a montré (P_n) par récurrence

3) $$(A(\theta))^{-1} = \frac{1}{\det(A(\theta))} \cdot \operatorname{com}(A(\theta))^{t}$$

$$\det(A(\theta)) = 1$$

$$\operatorname{com}(A(\theta)) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ +\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{com}(A(\theta))^{t} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(A(\theta))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = A(-\theta)$$

exo 2 :

pour montrer que : $A = B$, il faut montrer que : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{ij} = b_{ij}$

l'énoncé nous dit : $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $tr(AX) = tr(BX)$

On peut poser $E_{ij} = \begin{array}{c c} & j \\ & \\ i \rightarrow & \end{array}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \end{pmatrix}$ qui est la matrice nulle sauf le coefficient e_{ij} qui vaut 1

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (k,l) \in [\![1;n]\!]^2$, $x_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \text{ et } l = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$tr(AX) = \sum_{k=1}^{n} (AX)_{kk}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, x_{kl} \right)$$ formule de multiplication de 2 matrices
$$= a_{ij} \cdot 1 = a_{ij}$$

de même : $tr(BX) = b_{ij}$

on a donc : $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$

ex 3:

$$tr(A^tA) = \sum_{l=1}^{n} (A^tA)_{ll}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{lk}\, a_{lk}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{lk}^{\ 2}$$

donc : $tr(A^tA)=0 \Rightarrow \forall (l,k) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{lk}^{\ 2} = 0$

$$\Rightarrow \forall (l,k) \in [\![1;n]\!]^2,\ a_{lk} = 0$$

ex 4:

1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

$A^3 - A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 I_3$

2) $\frac{1}{4} A (A^2 - I_3) = I_3$

$\Leftrightarrow A \cdot \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$

donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}\left[\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

ex 5:

$X : \Omega \to \{-1;0;1\}$ X et Y sont indépendantes

$Y : \Omega \to \{-1;0;1\}$

$(X,Y) : \Omega \to \{(-1;-1), (-1;0), (-1;1), (0;-1), (0;0), (0;1), (1;-1), (1;0); (1;1)\} = E$

$\forall (x,y) \in E,\ \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y) = \frac{1}{9}$

$A : \Omega \to \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\dim \operatorname{Ker}(A) : \Omega \to \{0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0\}$

$\underline{\mathbb{P}(\dim \operatorname{Ker}(A) = 0)} = \mathbb{P}(X=-1, Y=-1) + \mathbb{P}(X=-1, Y=0) + \mathbb{P}(X=0, Y=-1) + \mathbb{P}(X=0, Y=1) + \mathbb{P}(X=1, Y=0) + \mathbb{P}(X=1, Y=1)$

$= \frac{6}{9} = \underline{\frac{2}{3}}$

$\underline{\mathbb{P}(\dim \operatorname{Ker}(A) = 1)} = 1 - \mathbb{P}(\dim \operatorname{Ker}(A) = 0) = \underline{\frac{1}{3}}$

Cet exercice nous montre l'importance de calculer le support avant de déterminer la loi de probabilité

<u>exo 6:</u>

<u>précision concernant l'énoncé :</u>

E_n est l'espace vectoriel engendré par les fonctions e_i

c'est à dire que tout élément f de E_n s'écrit : $f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i e_i$

1) les $(e_i)_{i=0,..,n}$ constituent 1 famille génératrice de E_n

pour montrer qu'elles constituent 1 base de E_n, il suffit de montrer qu'elles sont linéairement indépendantes.

Soient $(\lambda_0, .., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i(x) = 0$$

$$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i = 0$$

5

2) * E_n stable par Δ_n ?

Soit $i \in [\![0;n]\!]$, $\Delta_n(e_i) = \begin{cases} i.e_{i-1} & \text{si } i>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

donc : $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $\Delta_n(e_i) \in E_n$ donc E_n est stable par Δ_n

* E_n stable par I_n ?

Soit $i \in [\![0;n]\!]$,

soit $x \in \mathbb{R}$, $I_n(e_i)(x) = e_i(x+1) - e_i(x) = (x+1)^i - x^i = \sum_{k=0}^{i} C_i^k x^k - x^i$

donc : $\forall i \in [\![0;n]\!]$, $I_n(e_i) = \sum_{k=0}^{i} C_i^k e_k - e_i \in E_n$

$\Rightarrow$ E_n est stable par I_n

3) * I_n est 1 application linéaire ?

Soient f_1 et f_2, deux fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$I_n(f_1+\lambda f_2)(x) = (f_1+\lambda f_2)(x+1) - (f_1+\lambda f_2)(x) = f_1(x+1) + \lambda f_2(x+1) - f_1(x) - \lambda f_2(x)$$
$$= f_1(x+1) - f_1(x) + \lambda.(f_2(x+1) - f_2(x))$$
$$= I_n(f_1)(x) + \lambda. I_n(f_2)(x)$$

* E_n est 1 application linéaire ?

Soient f_1 et f_2, deux fonctions de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Delta_n(f_1+\lambda f_2) = \Delta_n(f_1) + \lambda. \Delta_n(f_2)$ car la dérivation est 1 opération linéaire

4) $I_3(e_0) = 0$

$I_3(e_1) = e_0$

$I_3(e_2) = 2e_1 + e_0$

$I_3(e_3) = 3e_2 + 3e_1 + e_0$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} I_3(e_0) & I_3(e_1) & I_3(e_2) & I_3(e_3) \end{array} \end{array}$$

[ici, nous avons : $I_3 : E_3 \to E_3$ et (e_0, e_1, e_2, e_3) qui est 1 base de E_3]

$\Delta_3(e_0) = 0$

$\Delta_3(e_1) = e_0$

$\Delta_3(e_2) = 2e_1$

$\Delta_3(e_3) = 3e_2$

$$F = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \Delta_3(e_0) & & & \Delta_3(e_3) \end{array} \end{array}$$

[de même, $\Delta_3 : E_3 \to E_3$ et (e_0, e_1, e_2, e_3) qui est 1 base de E_3]

5)

$*$ $\mathrm{Ker}(I_3) = \{ f \in E_3 \mid I_3(f) = 0_{E_3} \}$

Soit $f = x e_0 + y e_1 + z e_2 + t e_3 \in E_3$

$f \in \mathrm{Ker}(I_3) \iff I_3(f) = 0_{E_3} \longrightarrow$ qui est la fonction nulle

$$\iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y + z + t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \\ 3t = 0 \\ x = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y + z + t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \\ 3t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y + z + t = 0 \\ 2z + 3t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x \\ y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y + z = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

donc : $f = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x e_0$

donc : $\underline{\mathrm{Ker}(I_3) = \mathrm{Vect}\{e_0\}}$

$*$ $\underline{\mathrm{Im}(I_3)\ ?}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc : $\underline{\mathrm{Im}(I_3)} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\{e_0 ; e_0 + 2e_1 ; e_0 + 3e_1 + 3e$

$\underline{= \mathrm{Vect}\{e_0, e_1, e_2\}}$

<u>remarques (rappels)</u> : $*$ <u>on retrouve le théorème du rang</u> : $\dim(\mathrm{Ker}(I_3)) + \dim(\mathrm{Im}(I_3)) = 4$ $(= \dim(E_3))$

$*$ $\mathrm{Ker}(I_3) \neq 0_{E_3}$ donc <u>I_3 n'est pas 1 bijection</u>

$*$ $e_0 \in \mathrm{Ker}(I_3)$ et $e_0 \in \mathrm{Im}(I_3)$

donc : $\mathrm{Ker}(I_3) \cap \mathrm{Im}(I_3) \neq 0_{E_3}$

$\ast$ $\mathrm{Ker}(\Delta_3)$?

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\Delta_3) \iff \begin{cases} y = 0 \\ 2z = 0 \\ 3t = 0 \\ x = x \end{cases} \iff \begin{cases} x = x \\ y = 0 \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}(\Delta_3) = \mathrm{Vect}\{e_0\}$$

$\ast$ $\mathrm{Im}(\Delta_3)$?

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Im}(\Delta_3) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \mathrm{Vect}\{e_0, e_1, e_2\}$$

remarques (rappels) :

la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathrm{Im}(M) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ car $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des 3 autres vecteurs

6) $\ast$ $I_n(e_0) = 0$

$$I_n(e_i) = \sum_{k=0}^{i} C_i^k e_k - e_i = \sum_{k=0}^{i-1} C_i^k e_k \quad \text{pour } i \in [\![1;n]\!]$$

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & C_0^n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & C_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & 3 & 6 & \cdots & C_2^n \\ & & & 0 & 4 & & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & & n \\ & & & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & 0 & 3 & 6 & \cdots & \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ & & & 0 & 4 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow i^{\text{e}} \text{ ligne}$$

$\ast$ $\Delta_n(e_0) = 0$

$$\Delta_n(e_i) = i\, e_{i-1} \quad \text{pour } i \in [\![1;n]\!]$$

$$\Delta_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

remarque (rappels) : E_n est de dimension $n+1$ donc les 2 matrices sont dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$

7)

$\ast$ $\ker(I_n)$?

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(I_n) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

donc $\ker(I_n) = \text{Vect}\{e_0\}$

$\ast$ $\text{Im}(I_n)$?

$\text{Im}(I_n) = \text{Vect}\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$

$\ast$ $\ker(\Delta_n)$?

$\ker(\Delta_n) = \text{Vect}\{e_0\}$

$\ast$ $\text{Im}(\Delta_n)$?

$\text{Im}(\Delta_n) = \text{Vect}\{e_0, e_1, \dots, e_{n-1}\}$

ex 7 :

$$f : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$
$$M \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} M$$

1) $\ker f = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / f(M) = 0_{M_2(\mathbb{R})}\}$

soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \ker f$

$$AM = 0_{M_2(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{11} + 4m_{21} & 2m_{12} + 4m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} + 2m_{21} = 0 \\ m_{12} + 2m_{22} = 0 \\ 2m_{11} + 4m_{21} = 0 \\ 2m_{12} + 4m_{22} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} + 2m_{21} = 0 \\ m_{12} + 2m_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} = -2m_{21} \\ m_{12} = -2m_{22} \\ m_{21} = m_{21} \\ m_{22} = m_{22} \end{cases} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} -2m_{21} & -2m_{22} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M = m_{21} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_{22} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc : $\underline{\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}}$

2) * f est-elle surjective ?

$\dim\left(M_2(\mathbb{R})\right) = 4$

or d'après le théorème du rang : $\dim\left(M_2(\mathbb{R})\right) = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$

$$\Leftrightarrow \quad 4 = 2 + \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

$$\Leftrightarrow \quad \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2 \neq 4$$

donc f n'est pas surjective

3) Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$f(M) = \begin{pmatrix} m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{11} + 4m_{21} & 2m_{12} + 4m_{22} \end{pmatrix} = m_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + m_{21} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ m_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + m_{22} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

donc : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

$$= \underline{\mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}}$$

On a donc 2 matrices génératrices de $\mathrm{Im}\, f$

c'est donc 1 base de $\mathrm{Im}\, f$

4) On a : $\dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim(\mathcal{L}_2(\mathbb{R}))$

et $\dim(\ker f \cap \operatorname{Im} f) = 0$ car $\ker f \cap \operatorname{Im} f = O_{M_2(\mathbb{R})}$

donc : $\underline{\mathcal{L}_2(\mathbb{R}) = \ker f \oplus \operatorname{Im} f}$

$\Rightarrow$ toute matrice de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'un unique élément de $\ker f$ et d'un unique élément de $\operatorname{Im} f$.

5)

a) Soit λ, valeur propre de A

$\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$, $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$$

[On remarque que : $f(M) = AM = \begin{pmatrix} m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{11} + 4m_{21} & 2m_{12} + 4m_{22} \end{pmatrix}$]

posons $M = \begin{pmatrix} x & x \\ y & y \end{pmatrix} \neq O_{M_2(\mathbb{R})}$

on a : $f(M) = AM = \begin{pmatrix} x + 2y & x + 2y \\ 2x + 4y & 2x + 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x & \lambda x \\ \lambda y & \lambda y \end{pmatrix} = \lambda M$

donc λ est aussi valeur propre de M.

b) $\underline{*\text{ valeurs propres de } A ?}$

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = -5\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 5)$$

0 et 5 sont valeurs propres de A.

<u>remarque</u> : A est diagonalisable car P_A est scindé et toutes ses racines sont simples

$\underline{*\text{ valeurs propres de } M ?}$

0 et 5 étant valeurs propres de A, elles sont valeurs propres de M.

$\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\operatorname{Ker}\left(f - 5 Id_{M_2(\mathbb{R})}\right) = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) \;/\; f(M) = 5M \right\}$

Soit $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(f - 5 Id_{M_2(\mathbb{R})}\right)$

$$AM = 5M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{11} + 4m_{21} & 2m_{12} + 4m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m_{11} & 5m_{12} \\ 5m_{21} & 5m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4m_{11} + 2m_{21} & -4m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{11} - m_{21} & 2m_{12} - m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4m_{11} + 2m_{21} = 0 \\ -4m_{12} + 2m_{22} = 0 \\ 2m_{11} - m_{21} = 0 \\ 2m_{12} - m_{22} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m_{11} - m_{21} = 0 \\ 2m_{12} - m_{22} = 0 \\ m_{21} = m_{21} \\ m_{22} = m_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{11} = \frac{1}{2} m_{21} \\ m_{12} = \frac{1}{2} m_{22} \\ m_{21} = m_{21} \\ m_{22} = m_{22} \end{cases}$$

$$M = m_{21} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker}\left(f - 5 Id_{M_2(\mathbb{R})}\right) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

donc : $\dim \operatorname{Ker}\left(f - 5 Id_{M_2(\mathbb{R})}\right) = 2$

et $\dim \operatorname{Ker}(f) = 2$

Étant donné que : $\dim\left(M_2(\mathbb{R})\right) = 4$

il ne peut exister d'autres valeurs propres donc 0 et 5 sont les seules valeurs propres de f.