

déf: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé

et (E, \mathcal{E}) avec 1 ensemble réel et \mathcal{E} , 1 tribu sur E

$X: \Omega \rightarrow E$ est 1 variable aléatoire de Ω sur E si:

$$\forall A \in \mathcal{E}, \quad X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}$$

Les Variables aléatoires discrètes

I) déf:

$X: \Omega \rightarrow E$ est 1 variable aléatoire discrète de Ω sur E si \mathcal{E} est fini ou infini dénombrable,

* ex: Soit X représentant le résultat du lancer d'1 dé.

et: ② $\forall A \in \mathcal{P}(E), X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

ou: $X: \Omega \rightarrow \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = E$ avec E qui est fini

* remarque: $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ est 1 tribu sur E

II) Li (ou distribution) d'1 v.a.d:

* déf: c'est l'application $\mathbb{P}_X: \mathcal{E} = \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, 1]$

$$A \mapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\underbrace{\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A\}}_{\in \mathcal{A}})$$

* prop: \mathbb{P}_X est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

démo: (i) $\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in \emptyset\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car \mathbb{P} est 1 probabilité sur (Ω, \mathcal{A})

(ii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ sont des événements 2 à 2 disjoints de \mathcal{E}

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} X^{-1}(A_n)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A_n\}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega / X(\omega) \in A_n\}) \text{ car les } (A_n)_{n \geq 0} \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n)) \text{ car } \mathbb{P} \text{ est 1 probabilité sur } (\Omega, \mathcal{A}) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_X(A_n) \end{aligned}$$

* remarque: Étant donné que E est fini ou infini dénombrable, la li de X est donnée à partir de chaque élément de E :
soit $k \in E$, $\mathbb{P}(X=k) = \dots$

* ex: $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}$
défini la li de X à partir de tous les éléments de $E = \llbracket 1; 6 \rrbracket$

III) fonction de répartition d'un v.a.d:

②

* déf: c'est l'application $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$
 $x \mapsto P(X \leq x)$

* prop: ① F_X est croissante

② F_X est continue à droite

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

④ soit $y > x$, $F_X(y) - F_X(x) = P_X([x, y]) = P(X^{-1}([x, y]))$

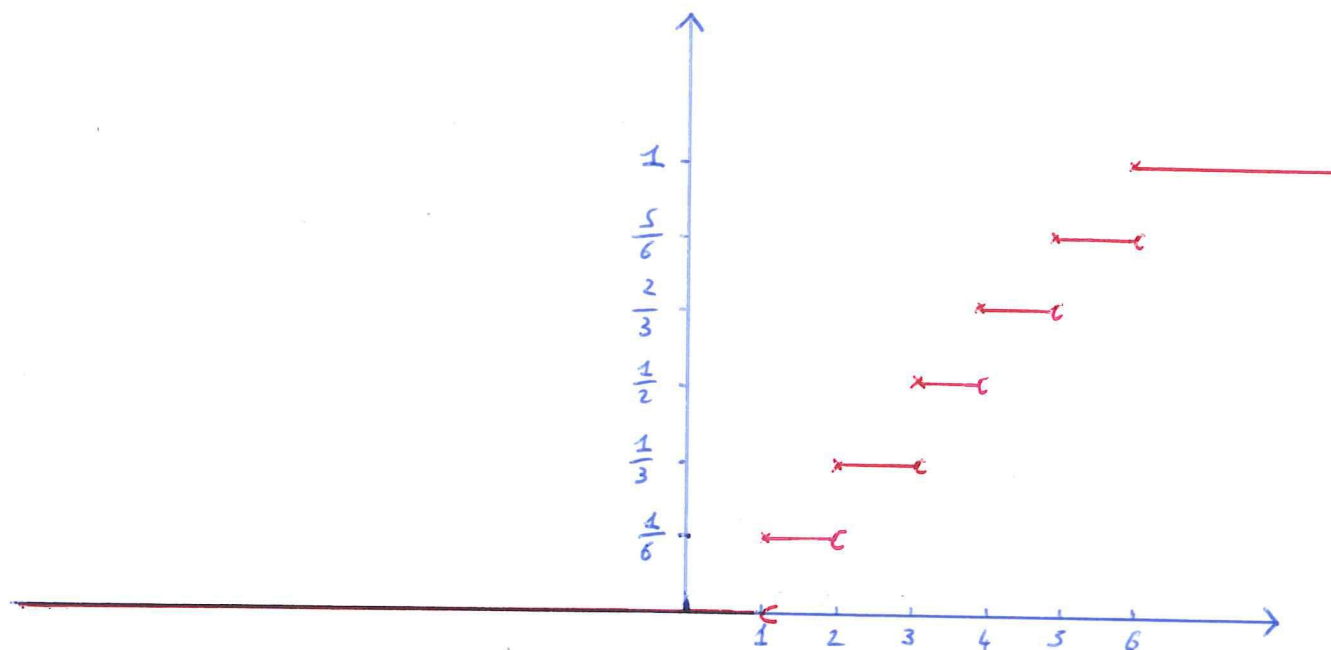
dém: ① soit x et y tels que: $y > x$, on a: $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$

$$\text{dnc: } P(\{X \leq x\}) \leq P(\{X \leq y\})$$

$$\Rightarrow F_X(x) \leq F_X(y)$$

* ex: $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x \in [1; 2[\\ \frac{2}{6} & \text{si } x \in [2; 3[\\ \frac{3}{6} & \text{si } x \in [3; 4[\\ \frac{4}{6} & \text{si } x \in [4; 5[\\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [5; 6[\\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



IV) espérance d'1 v.a.d.:

* déf: $E[X] = \sum_{x \in E} x \cdot P(X=x)$

* interprétation: E c'est la valeur qu'on s'attend à trouver si on répète 1 nombre important de fois l'expérience et que l'on calcule la moyenne des résultats.

* prop: l'espérance est 1 opération linéaire: Soient X et Y , 2 v.a.d et $a \in \mathbb{R}$

$$E[aX+Y] = a \cdot E[X] + E[Y]$$

dém: $X: \Omega \rightarrow E$ avec E et F finis ou infinis dénombrables
 $Y: \Omega \rightarrow F$

$$\begin{aligned} E[aX+Y] &= \sum_{(x,y) \in E \times F} (ax+y) P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} (ax+y) P(X=x, Y=y) = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} [ax P(X=x, Y=y) + y P(X=x, Y=y)] \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} ax P(X=x, Y=y) + \sum_{y \in F} \sum_{x \in E} y P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{x \in E} ax P(X=x) + \sum_{y \in F} y P(Y=y) = a \cdot E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

* ex: $E[X] = \sum_{x \in \llbracket 1,6 \rrbracket} x P[X=x] = \frac{1}{6} \sum_{x \in \llbracket 1,6 \rrbracket} x = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = \underline{3,5}$

V) variance d'1 v.a.d.:

* déf: $V[X] = E[(X - E[X])^2]$

* prop: ① formule de König: $V[X] = E[X^2] - E[X]^2$ **À UTILISER!**

② $V[aX] = a^2 V[X]$ pour $a \in \mathbb{R}$

dém: ① $V[X] = E[X^2 - 2X E[X] + E[X]^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$

② $V[aX] = E[(aX)^2] - E[aX]^2 = E[a^2 X^2] - (a E[X])^2 = a^2 E[X^2] - a^2 E[X]^2 = a^2 V[X]$

* ex: $E[X^2] = \sum_{x \in \llbracket 1,6 \rrbracket} x^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 91 = \underline{15,67} \Rightarrow V[X] = 15,67 + (3,5)^2 = 3,42$

* autre définition: l'écart-type: $\sigma_X = \sqrt{V[X]}$; dans notre exemple: $\sigma_X = \underline{1,85}$

* interprétation si $\sigma_X < \sigma_Y$

Les valeurs prise par X sont moins dispersées (on peut dire aussi plus homogènes) que celles prise par Y .

VI) fonction d'1 v.a.d :

* prop: Soit X 1 v.a.d. de Ω sur E et f , 1 application définie sur E à valeur dans F , \mathcal{Z} ensemble fin ou infini dénombrable
alors $Y = f(X)$ est 1 v.a.d. de Ω sur F

démo: Soit $A \in \mathcal{P}(F)$, $Y^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / Y(\omega) \in A\} = \{\omega \in \Omega / f(X(\omega)) \in A\}$

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $B = \{y \in E / f(y) \in A\}$

on a donc : $Y^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$

or : $B \in \mathcal{P}(E)$ et X est mesurable de Ω sur E

donc : $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

donc : Y est mesurable de Ω sur F

Cx + problème 3 + problème 2