ex 1

Partie A:

1)

(a) $\ln x$ et $1+x^2$ sont dérivables sur $]0;+\infty[$

et $1+x^2$ ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$

alors: $\dfrac{\ln x}{1+x^2}$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

(b) $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1+x^2) - \ln x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)^2}\left(1+x^2-2x^2\ln x\right)$

$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{1}{x(1+x^2)^2} > 0$ alors $f'(x)$ est du signe de $1+x^2-2x\ln x$

(c) $g(x) = 1+x^2-2x^2\ln x$

$g'(x) = 2x - 2\left(2x\ln x + \dfrac{x^2}{x}\right) = 2x - 4x\ln x - 2x = -4x\ln x$

signe de x	0		1		$+\infty$
$-4x$		$-$		$-$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$*$ résoudre $g(x)=0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$?

Etant donné que g est continue et croissante sur $]0;1]$, $g(]0;1]) =]1;2]$

décroissante sur $]1;+\infty[$, $g(]1;+\infty[) =]-\infty;2[$

donc l'équation $g(x)=0$ admet 1 ou plusieurs solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ et elles sont dans l'intervalle $]1;+\infty[$.

- g est continue strictement décroissante sur $]1;+\infty[$ donc elle définit 1 bijection de cet intervalle sur l'intervalle $]-\infty;2[$

donc la solution de l'équation $g(x)=0$ est unique.

2)

a) $*\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{1+x^2}\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ $\quad *\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2} = 0^+$

②

$* \; g(m) = 0 \iff 1 + m^2 - 2m^2 \ln(m) = 0 \iff \ln(m) = \dfrac{1+m^2}{2m^2}$

$$f(m) = \frac{\ln m}{1+m^2} = \frac{1}{2m^2}$$

(b) variation de

x	0		m		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2m^2}$	$\searrow$	0