Epreuve Orale d'Attaché Interne - Exercices de MATHS

Les matrices sont toujours des matrices 3×3

ex 1 :

Soit A 1 matrice (ne sait plus laquelle)

1) Montrer que : $A^3 - 3A + 2I_3 = 0$

2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}

3) Soit $B_n = A^n - 2A + I$

a) montrer que : $A^{n+2} - 2A^{n+1} = A^{n+1} - 2A^n$

b) montrer que : $A^{n+1} = 2A^n + \cdots$

c) montrer que : $B^{n+2} = 2B_n$

d) exprimer A^n en fonction de A et de I

ex 2 :

Etude de la fonction : $f_n(x) = (\ln x)^{n-x}$

ex 3 : A matrice 3x3 représentative de f

1) Montrer que : $(f + 4Id) \circ (f \circ f + 3f + 3Id) = 0$

2) Montrer que f est bijective. Est-elle diagonalisable ?

ex 4 :

calculer $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x^2+3x+1} - x$

ex 5 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1) calculer le polynôme caractéristique de A

2) A est-elle diagonalisable ?

ex 6 : Soit $f : [0;1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$

1) calculer $f'(x)$.

Question :

Donner la fonction de densité d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, son espérance et sa variance. Comment calcule-t-on l'espérance et la variance ?
(Question oral : connaissez-vous une utilisation concrète de cette loi ?)

Problème :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

① ⓐ Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x,y)| \leq |x| \cdot |y|$.

ⓑ Montrer que f est continue en $(0,0)$.
(Remarque : question orale : donner la définition de la limite et conclure la question ⓑ)

② ⓐ Pour $(x,y) \neq (0,0)$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

ⓑ Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

ⓒ Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq |3y|$. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est-elle continue en $(0,0)$?

③ f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Question supplémentaire 1 :

1) Donner les valeurs propres de $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ? \\ 0 & 1 & ? \\ 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$. J est-elle diagonalisable ?
(Remarque on doit trouver $Sp(J) = \{0; -1; 2\}$.

2) On pose pour $a \in \mathbb{R}$, $M = \begin{pmatrix} -a^3 & 1 & ? \\ 0 & 1-a^3 & ? \\ 0 & 0 & ?-a^3 \end{pmatrix}$. A quelle condition M est-elle inversible

Question supplémentaire 2 :

Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x}$?

Question :

- Définition fonction convexe
- un exemple
- Si en x_1 et x_2 f atteint son minimum. Que peut-on dire ?

Exercice : $p+q=1$, p et $q \in [0;1]$ et $\lambda, \mu > 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} p\lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ q\mu e^{\mu x} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1) f est-elle une densité de probabilité ?

2) X = v.a.d dont la densité est f.

a) Calculer Espérance de X.

b) A quelle condition sur p, λ et μ a-t-on :

$$\forall x \geqslant 0 \quad P(X > x) = P(X < -x).$$

3) On conserve les valeurs de λ, μ et p trouvées en 2/b.

a) Soit $Y = |X|$.
Déterminer la loi de probabilité de Y.

b) Soit deux réels positifs s et t tels que $t \geqslant s$.

A-t-on : $P_{[Y>s]}[Y>t] = P[Y>t-s]$

Comment appelle-t-on cette propriété ?

Question complémentaire hors préparation :

Résoudre $X^2 = A$ avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

A était donnée et diagonalisable

Question.

Donner la définition d'une loi géométrique. Donner un exemple concret de variable aléatoire suivant une telle loi. Donner l'espérance d'une telle variable aléatoire.

Exercice.

Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Soit l'application linéaire $f \in L(M_2(\mathbb{R}))$ telle que pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ on a : $f(M)=AM$.

1. Déterminez une base de Ker(f).
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminez une base de Im(f).
4. Peut-on écrire toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ comme la somme d'un unique élément de Ker(f) et d'un unique élément de Im(f).
5.
   a. Montrez que toute valeur propre de A est une valeur propre de f.
   b. Déterminez les valeurs propres de f. f est-elle diagonalisable ?

Après avoir terminé, il restait quelques minutes, et les examinateurs ont posé les questions supplémentaires suivantes :

On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que : $f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$. Est-elle continue en 0 ?
Est-elle dérivable en 0 ?
Est-elle continûment dérivable en 0 ?

ex :

Développement limité au voisinage de 0 de $\ln\left(x+\sqrt{1+x}\right)$

Oraux ASI : retour d'expérience

Jean-Yves Degos

June 11, 2018

Résumé

On trouvera ici quelques commentaires sur les sujets des épreuves orales du concours ASI passées par l'auteur.

1 Épreuve d'exposé

L'article servant de support à l'épreuve était un article d'Annick Steta intitulé "Le revenu universel : histoire d'une tentation", tiré de la revue *Le Débat*, voir :

http://www.gallimard.fr/Catalogue/GALLIMARD/Revue-Le-Debat/Le-Debat199 .

2 Épreuve d'anglais

L'article servant de support à l'épreuve était un article tiré du *Guardian*, intitulé "The Guardian view on high street woes: time for a fairer deal", voir :

https://www.theguardian.com/commentisfree/2018/may/29/the-guardian-view-on-high-street-woes-time-for-a-fairer-deal .

3 Épreuve de mathématiques-statistiques

L'épreuve comportait une question, un exercice et des exercices supplémentaires.

3.1 Question : loi uniforme

Donner la densité de la loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. Quelle est l'espérance ? Quelle est la variance ? Comment peut-on les calculer ?
Le calcul explicite n'a été demandé que pour l'espérance.

3.2 Exercice : une équation différentielle

On considère E l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables tels que $f'' - 2f' - 3f = 0$.
1) Soit $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto e^{3x}$ et $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto e^{-x}$.
(a) Montrer que $f_1 \in E$ et $f_2 \in E$.
(b) Montrer que (f_1, f_2) est libre.
2) Soit $\phi : E \to \mathbb{R}^2\,;\, f \mapsto (f(0), f'(0))$.
(a) Montrer que ϕ est linéaire.
(b) Calculer $\phi(f_1)$ et $\phi(f_2)$. En déduire que ϕ est surjective.
3) Soient $g_1 : x \mapsto e^{-3x}(f(x) + f'(x))$ et $g_2 : x \mapsto e^{x}(f'(x) - 3f(x))$ définies sur $\mathbb{R}$.
(a) Montrer que g_1 et g_2 sont constantes.
(b) Montrer que $\ker \phi$ est réduit à $\{0\}$.
(c) Déterminer la dimension de E et donner une description de E.

3.3 Exercices supplémentaires

3.3.1 Exercice 1 : somme de deux lois normales

X suit la loi normale de paramètres (m, σ^2) et Y suit la loi normale de paramètres (m', σ'^2). Si X et Y sont indépendantes, quelle est la loi de $Z = X + Y$, et quels sont ses paramètres ?
J'ai admis que Z suivait la loi normale. Les paramètres sont alors $m + m'$ et $\sigma^2 + \sigma'^2$, ce qu'il a été demandé d'établir.

3.3.2 Exercice 2 : suite de variables aléatoires

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On considère la suite, avec $\theta > 0$ donné :

$$\begin{cases} Y_0 &= X_0 \\ Y_n &= \theta Y_{n-1} + X_n \text{ pour } n \geq 1\,. \end{cases}$$

Quelle est la loi de Y_n ? Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$. Que vaut $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+h})$ avec $n \geq 0$ et $h \geq 1$.

3.3.3 Exercice 3 : une équation matricielle

Soit $A \in GL_2(\mathbb{R})$. NB : *A était une matrice de taille 2×2 à coefficients entiers, dont le polynôme caractéristique était $X^2 - 3X + 2$, et dont j'ai oublié précisément le détail des coefficients.*
Résoudre l'équation $X^2 = A$.
Il faut commencer par réduire A pour se ramener à l'équation plus simple $Y^2 = D$, où D est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 1 et 2 ; on trouve alors 4 matrices solutions.