C1992 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson

94230 CACHAN

Concours d'admission en **1ère année**

Economie et Gestion

Session 2009

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte 6 pages et 4 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

On étudie la série chronologique des volumes des ventes d'une boisson (millions de litres) :

Année / Trimestre	1	2
1	10	19
2	14	22
3	21	29
4	15	22

1) Représenter graphiquement sur le papier milimétré cette série chronologique. On numérotera les trimestres de 1 jusqu'à 8.

2) Donner les formules permettant de déterminer les coefficients a et b de la droite de régression linéaire $y = at + b$ par la méthode des moindres carrés. La variable explicative est le numéro t du trimestre, la variable expliquée, le volume y des ventes.

3) Déterminer la série chronologique obtenue à l'aide de la méthode des moyennes mobiles centrées de longueur 4. Représenter cette série sur votre graphique.

4) Dans la pratique, on admet que la tendance est donnée par la droite $y = 2t + 10$. Représenter cette droite sur votre graphique.

5) On admet que la série suit un modèle additif. Calculer le coefficient saisonnier du troisième trimestre.
En déduire une évaluation de la consommation en volume de cette boisson au troisième trimestre de l'année 4.

Problème 2

On notera e^x la fonction exponentielle. On rappelle que $e = e^1$ vaut environ 2,7.

1) Déterminer sur $\mathbb{R}$ le tableau de variation de la fonction :

$$f_1(x) = e^x - x - 1$$

En déduire que pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.

2) On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{xu} du$.

a) Justifier que la fonction est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que g est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que si $x \geq 0$, $1 \leq g(x) \leq e^x$.

d) Montrer que si $x \leq 0$, $e^x \leq g(x) \leq 1$.

e) En déduire que g est continue en 0.

3) Montrer que

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x = 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } \; x \in \mathbb{R}^* = \left]-\infty, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[. \end{cases}$$

En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

4) Déterminer sur $[-1, 1]$ le tableau de variation de la fonction :

$$f_2(x) = e^x - x^2 - x - 1$$

En déduire que pour tout x de $[-1, 1]$, $e^x \leq 1 + x + x^2$.

5) a) Montrer que si x est non nul, la fonction g est dérivable au point x et calculer sa dérivée.

b) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$1 + \frac{1}{2}x \leq g(x) \leq 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2.$$

En déduire que g est dérivable au point 0 et que $g'(0) = \frac{1}{2}$.

6) On considère la fonction H de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$H(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \; x = y, \\ \dfrac{e^{(x-y)} - 1}{x - y} & \text{si } \; x \neq y. \end{cases}$$

a) Montrer que H est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Déterminer après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial x}(1,0), \quad \frac{\partial H}{\partial y}(1,0)$$

c) Déterminer après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial x}(0,0), \quad \frac{\partial H}{\partial y}(0,0)$$

Problème 3

Une course est organisée chaque année pour une population d'adultes et d'enfants.

1) En 2000, 45% des enfants seulement ont terminé la course tandis que 85% des adultes sont parvenus à son terme. Les trois-quarts des coureurs étaient des adultes. Quel est le pourcentage des partants qui ont passé la ligne d'arrivée ?

Quel est le pourcentage d'enfants parmi les personnes qui ont passé la ligne d'arrivée ?

2) Entre 2000 et 2005, les méthodes d'entraînement ont permis d'améliorer les performances. En 2005, 50% des enfants ont terminé la course, 90% des adultes sont parvenus à son terme et on constate que 71% des partants ont passé la ligne d'arrivée. Comment expliquez-vous ce résultat ?

Problème 4

On considère l'espace E des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels. Si A et B sont deux éléments de E, on dira que A est semblable à B s'il existe une matrice P dans E inversible, telle que $A = P^{-1}BP$. On notera I_2 la matrice identité de taille 2.

1) Montrer que la relation "être semblable à" est une relation d'équivalence sur E. Déterminer la classe d'équivalence (pour cette relation) de la matrice nulle.

Pour toute matrice $A \in E$, on désigne par $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace qui est la somme des éléments diagonaux.

$$\mathrm{Tr}(A) = a_{11} + a_{22} \quad \text{si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

2) Soit A, B, C dans E, montrer que :

$$\mathrm{Tr}(AB) \;=\; \mathrm{Tr}(BA) \quad \text{et} \quad \mathrm{Tr}(ABC) \;=\; \mathrm{Tr}(BCA) \;=\; \mathrm{Tr}(CAB)$$

3) En déduire que si A est semblable à B alors A et B ont même trace. Montrer que si A est semblable à B alors A et B ont même déterminant.

4) On considère les matrices suivantes A et B

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'elles ont même trace et même déterminant mais qu'elles ne sont pas semblables.

5) Soient A et B des matrices de E, et $a \in \mathbb{R}$. Montrer les matrices A et B sont semblables si et seulement si les matrices $A - aI_2$ et $B - aI_2$ sont semblables.

6) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que pour un nombre réel b bien choisi, la matrice M est semblable à $\begin{pmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

7) Soients $A, B \in E$ vérifiant : $\mathrm{Tr}(AC) = \mathrm{Tr}(BC)$ pour tout $C \in E$. Montrer que $A = B$.