Exercices de Révision

Etude de fonction :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1)

a) montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$

b) est-elle continue en 0 ?

2)

a) montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$

b) f est-elle dérivable en 0 ?

c) sa dérivée est-elle continue en 0 ?

Diagonalisation :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

1) A est-elle diagonalisable ?

2) déterminer $\mathrm{Ker}(A)$

Suites récurrentes :

Soit $F : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto px^2 + px + (1-2p)$ avec $p \in \left]0;\frac{1}{3}\right[$

et $(U_n)_n$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) & \text{pour } n > 0 \end{cases}$

1) Dresser le tableau de variation de f sur $[0;1]$

2) montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [0;1]$

3) montrer que $(U_n)_n$ est monotone. Quel est son sens de variation ?

4) en déduire que $(U_n)_n$ converge

5) déterminer la limite de $(U_n)_n$ en fonction de p