

# Les variables aléatoires à densité de probabilité

## I) Déf:

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et continue sur  $\mathbb{R}$  telle que:  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$   
 et  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une variable aléatoire non discrète.

→ Comment définir sa loi?

c'est l'application  $P_X: \{[a;b] / (a;b) \in \mathbb{R}^2\} \rightarrow [0;1]$

$$[a;b] \mapsto P(X \in [a;b])$$

par convention:  $P(X = a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$  **CONTRAIREMENT À 1 v.a.d.**

→ par définition:  $X$  admet  $f$  comme densité de probabilité

$$\text{si: } \forall (a;b) \in \mathbb{R}^2, P(X \in [a;b]) = \int_a^b f(x) dx$$

II) Fonction de répartition d'un v.a. à densité:

\* déf: c'est l'application:  $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$

$$x \mapsto P(X \leq x) = P(X \in ]-\infty; x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

\* prg: ①  $F_X$  est croissante

②  $F_X$  est continue à droite

③  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

$$④ \text{soit } y > x, F_X(y) - F_X(x) = P(X \in ]x;y]) = \int_x^y f(t) dt$$

III) espérance d'un v.a. à densité:

\* déf:  $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

\* interprétation: C'est la valeur qu'on s'attend à trouver si on répète 1 nombre important de fois l'expérience et que l'on calcule la moyenne des résultats.

$$* \text{tg: } E[aX + b] = a \cdot E[X] + b$$

IV) Variance d'un v.a. à densité:

$$* \text{def: } V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx$$

$$* \text{prg: } ① \text{Formule de Huyghens-König: } V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E[X]^2$$

$$② \forall a \in \mathbb{R}, V[aX] = a^2 \cdot V[X]$$

LA VARIANCE EST UN INDICATEUR DE DISPERSION

II) fonctions simples d'une à deux variables

1)  $Y = cX + d$ :

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{P}(Y \in [a; b]) = \mathbb{P}(cX + d \in [a; b]) = \mathbb{P}(cX \in [a-d; b-d])$

$$\text{* si } c > 0, \mathbb{P}(Y \in [a; b]) = \mathbb{P}\left(X \in \left[\frac{a-d}{c}; \frac{b-d}{c}\right]\right) = \frac{a-d}{c} \int_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x) dx$$

$$\text{* si } c < 0, \mathbb{P}(Y \in [a; b]) = \frac{b-d}{c} \int_{\frac{b-d}{c}}^{\frac{a-d}{c}} f(x) dx$$

$$\text{* si } c = 0, Y = d \text{ donc: } \mathbb{P}(Y \in [a; b]) = \begin{cases} 1 & \text{si } d \in [a; b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2)  $Y = X^2$ :

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{P}(Y \in [a; b]) = \mathbb{P}(X^2 \in [a; b])$

\* si  $[a; b] \subset [-\infty; 0]$ :  $\mathbb{P}(X^2 \in [a; b]) = 0$

\* sinon:  $\mathbb{P}(X^2 \in [a; b]) = \mathbb{P}(X^2 \in [a; b] \cap \mathbb{R}^+) = \mathbb{P}(X^2 \in [\max(0; a); b])$

$$\text{* si } a > 0: \mathbb{P}(X^2 \in [a; b]) = \mathbb{P}(X \in [\sqrt{a}; \sqrt{b}]) + \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{b}; -\sqrt{a}]) \\ = \sqrt{a} \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} f(x) dx + \int_{-\sqrt{a}}^{-\sqrt{b}} f(x) dx$$

$$\text{* si } a \leq 0: \mathbb{P}(X^2 \in [a; b]) = \mathbb{P}(X^2 \in [0; b]) = \mathbb{P}(X \in [-\sqrt{b}; \sqrt{b}]) = \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} f(x) dx$$

3)  $Y = e^X$ :

Soit  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{P}(Y \in [a; b]) = \mathbb{P}(e^X \in [a; b])$

\* si  $[a; b] \subset [-\infty; 0]$ :  $\mathbb{P}(e^X \in [a; b]) = 0$

\* sinon:  $\mathbb{P}(e^X \in [a; b]) = \mathbb{P}(e^X \in [a; b] \cap \mathbb{R}^+) = \mathbb{P}(e^X \in [\max(0; a); b])$

$$\text{* si } a > 0: \mathbb{P}(e^X \in [a; b]) = \mathbb{P}(X \in [\ln a; \ln b]) = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x) dx$$

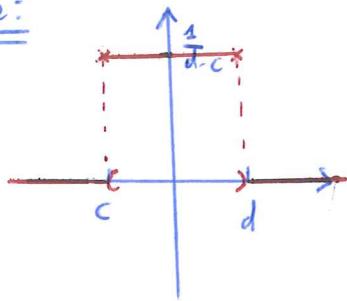
$$\text{* si } a \leq 0: \mathbb{P}(e^X \in [a; b]) = \mathbb{P}(e^X \in [0; b]) = \mathbb{P}(e^X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq \ln b) = \int_{-\infty}^{\ln b} f(x) dx$$

## VII) les densités usuelles:

1) la loi uniforme sur l'intervalle  $[c; d]$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & \text{pour } x \in [c; d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

\* graph:



\* espérance:  $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_c^d \frac{x}{d-c} dx = \frac{1}{d-c} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_c^d = \frac{d^2 - c^2}{2(d-c)} = \frac{d+c}{2}$

\* Variance:  $\mathbb{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mathbb{E}[X]^2$

$$\begin{aligned} &= \int_c^d \frac{x^2}{d-c} dx - \frac{(d+c)^2}{4} = \frac{1}{d-c} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_c^d - \frac{(d+c)^2}{4} = \frac{d^3 - c^3}{3(d-c)} - \frac{(d+c)^2}{4} \\ &= \frac{d^2 + cd + c^2}{3} - \frac{d^2 + 2cd + c^2}{4} = \frac{4d^2 + 4cd + 4c^2 - 3d^2 - 6cd - 3c^2}{12} \\ &= \frac{d^2 - 2cd + c^2}{12} = \frac{(d-c)^2}{12} \end{aligned}$$

\* médiane  $m$ : C'est la valeur  $m$  telle que:  $\mathbb{P}[X \leq m] = \frac{1}{2}$  donc:  $m \in [c; d]$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^m f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_c^m \frac{1}{d-c} dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d-c} \left[ x \right]_c^m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m-c}{d-c} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow m-c = \frac{d}{2} - \frac{c}{2} \Leftrightarrow m = \frac{d+c}{2}$$

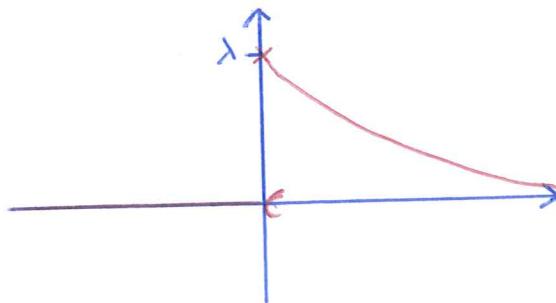
\* fonction de répartition:  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0 \text{ si } x \in ]-\infty; c] \cup [d; +\infty[$

$$= \int_c^x \frac{1}{d-c} dt = \frac{1}{d-c} \cdot x - c \text{ si } x \in ]c; d[$$

2) loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

\* graph:



\* espérance:  $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx =$

On intègre par parties:

$$u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x} \quad [\text{il est facile de trouver la primitive d'une exponentielle}]$$

$$v = x \Rightarrow v' = 1$$

$$= \left[ -x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} + \left[ \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} \underbrace{\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}}_{\rightarrow 0} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{car } \frac{x}{e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$$

$x \rightarrow +\infty$

\* Variance:  $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$

$$\text{d'où: } E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$$

On intègre par parties:

$$u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$$

$$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$$

$$= \left[ -x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \cdot E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

On déduit que:  $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

\* médiane: on vérifie:  $\mathbb{P}[X \leq m] = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \int_0^m f(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[ -e^{-\lambda x} \right]_0^m = -e^{-\lambda m} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = -e^{-\lambda m} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda m} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda m \Leftrightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

\* fonction de répartition:  $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x] = 0 \text{ si } x \leq 0$

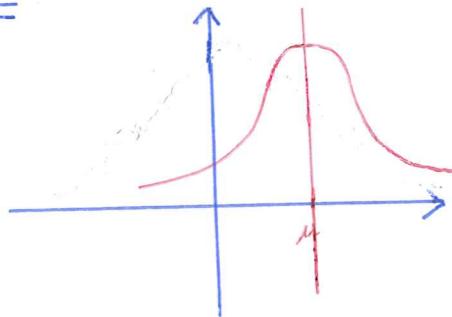
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[ -e^{-\lambda t} \right]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 \text{ si } x > 0$$

3) loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

densité de probabilité de  $X$ ; On note  $X \sim N(\mu; \sigma^2)$

\* graph:



fonction symétrique par rapport à la date  $x = \mu$

\* espérance:  $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$