

ex 4:

1) $E = [R_2[X]]$

Soit $P(X) \in E$, $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2$

$$f(P(X)) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + (a_1 + 2a_2)X - a_0X^2$$

$$= (a_0 + a_2)X^2 + (2a_1 + 2a_2)X + a_0$$

donc: $M \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ 2a_1 + 2a_2 \\ a_0 + a_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y - z \\ x + 2y - 3z \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

ex 7:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on va montrer $(P_n): \forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ par récurrence

 (P_1) est vraie:On suppose (P_n) vraie a-t-a (P_{n+2}) vraie

$$A^{n+2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3n+3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2n+2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc: (P_{n+2}) est vérifiéeOn conclut (P_n) par récurrence.

ex 9: $\alpha \in \mathbb{R}, n \geq 3$

* calculer $\dim \ker(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha+2 & \alpha+3 & \dots & \alpha+n+1 \\ \alpha+3 & \alpha+4 & \dots & \alpha+n+2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha+n+1 & \dots & \dots & \alpha+2n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+2)x_1 + (\alpha+3)x_2 + \dots + (\alpha+n+1)x_n = 0 \quad (L_1) \\ (\alpha+3)x_1 + (\alpha+4)x_2 + \dots + (\alpha+n+2)x_n = 0 \quad (L_2) \\ \vdots \\ (\alpha+n+1)x_1 + (\alpha+n+2)x_2 + \dots + (\alpha+2n)x_n = 0 \quad (L_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+2)x_1 + (\alpha+3)x_2 + \dots + (\alpha+n+1)x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad (L_2) - (L_1) \\ 2x_1 + 2x_2 + \dots + 2x_n = 0 \quad L_3 - L_2 \\ \vdots \\ (n-1)x_1 + (n-1)x_2 + \dots + (n-1)x_n = 0 \quad L_n - L_{n-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha+2)x_1 + (\alpha+3)x_2 + \dots + (\alpha+n+1)x_n = 0 \quad (L_1) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + 2x_3 + \dots + (n-1)x_n = 0 \quad (L_1) - (\alpha+2)L_2 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2x_3 - \dots - (n-1)x_n \\ x_1 = -x_2 - x_3 - \dots - x_n = x_3 + 2x_4 + \dots + (n-2)x_n \end{cases}$$

donc: $\dim(\ker A) = n-2$

donc $\text{rg}(A) = 2$

ex 11:

1) on pose: $d_n = \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & x \end{pmatrix}$ sur le matrice de taille $n \times n$

$$d_n = x d_{n-1} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & x & 1 \end{vmatrix} = x d_{n-1} - 1$$

$$\text{on: } d_2 = \begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = (x^2 - 1)$$

$$\begin{aligned} \text{donc: } d_3 &= x(x^2 - 1) - 1 = x^3 - x - 1 \\ d_4 &= x^2(x^2 - 1) - x - 1 = x^4 - x^2 - x - 1 \\ d_5 &= x^5 - x^3 - x^2 - x - 1 \end{aligned}$$

on a déduit:

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_n = x^n - \sum_{k=0}^{n-2} x^k$$

2) on obtient: $d_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \\ -1 & x & & 0 \\ & \diagdown & \diagup & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix} =$

$$d_n = a_0 \begin{vmatrix} x & & 0 \\ -1 & & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & x & & 0 \\ & \diagdown & \diagup & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix} = a_0 x^{n-1} + d_{n-1}$$

avec: $d_{n-1} = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ -1 & x & \\ & \diagdown & \diagup & \\ 0 & & -1 & x \end{vmatrix}$

on en déduit que: $d_n = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + \begin{vmatrix} a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

$$= a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n$$

$$= \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$$

5) $\det \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2-L_1) \\ \vdots \\ (L_n-L_1) \end{matrix}$

* si $\exists (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, tels que: $j \neq j'$ et $b_j = b_{j'}$

alors: la matrice a 2 colonnes identiques donc son rang s'est pas n donc son déterminant est nul.

* si les $(b_j)_{j=1, \dots, n}$ sont tous différents

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2-a_1 & a_2-a_1 & \dots & a_2-a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & a_n-a_1 & \dots & a_n-a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_2-b_1 & & b_n-b_1 \\ a_2-a_1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n-a_1 & 0 & & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} (C_1) \\ (C_2-C_1) \\ \vdots \\ (C_n-C_1) \end{matrix} = \underline{0}$$

ex 10:

(4)

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 3-m & 2 & 1 \\ 2 & 3-m & 2 \\ 1 & 1 & 3-m \end{vmatrix} &= (3-m) \begin{vmatrix} 3-m & 2 \\ 1 & 3-m \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3-m \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3-m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (3-m) [(3-m)^2 - 2] - 2 [6 - 2m - 2] + [2 + m - 3] \\
 &= (3-m) [9 - 6m + m^2 - 2] - 2 [4 - 2m] - 1 + m \\
 &= (3-m) (7 - 6m + m^2) - 8 + 4m - 1 + m = 21 - 18m + 3m^2 - 7m + 6m^2 - m^3 - 8 + 4m - 1 + m \\
 &= -m^3 + 9m^2 - 20m + 12 \quad [1 \text{ est racine évidente}] \\
 &= (m-1) (-m^2 + 8m - 12) \quad [2 \text{ est racine évidente}] \\
 &= \underline{(m-1) (m-2) (-m+6)}
 \end{aligned}$$

Le déterminant s'annule pour $m=1$, $m=2$ et $m=6$.

ex 13:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3-\lambda \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= (3-\lambda) [(3-\lambda)(-3-\lambda) - 1] - 2 [3 + \lambda - 2] + 4 [1 + 2(3-\lambda)] \\
 &= (3-\lambda) [-9 - 3\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 1] - 2 [\lambda + 1] + 4 [-2\lambda + 7] \\
 &= (3-\lambda) [\lambda^2 - 10] - 2\lambda - 2 - 8\lambda + 28 \\
 &= 3\lambda^2 - 30 - \lambda^3 + 10\lambda - 10\lambda + 26 \\
 &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 \quad [-1 \text{ est racine évidente}] \\
 &= (\lambda+1) (-\lambda^2 + 4\lambda - 4) \\
 &= -(\lambda+1) (\lambda^2 - 4\lambda + 4) \quad [2 \text{ est racine évidente}] \\
 &= -(\lambda+1) (\lambda-2)^2
 \end{aligned}$$

* $E_1 = \text{Ker}(f + Id)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y + 4z = 0 \\ -x + 4y - z = 0 \\ -2x - y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4y + z = 0 \\ -9y = 0 \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y = 0 \\ z = z \end{cases}$$

donc: $E_1 = \text{Vect} \{(-1; 0; 1)\}$

* $E_2 = \text{Ker}(f - 2Id)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ -x + y - z = 0 \\ -2x - y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \\ 3y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}$$

donc: $E_2 = \text{Vect} \{(-2; -1; 1)\}$

* Étant donné que $\dim(E_2) \neq 2$, A n'est pas diagonalisable

* Lien ppe: $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$ev_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

on a: (v_1, v_2, v_3) qui est 1 base de \mathbb{R}^3

On note P la matrice de passage de la base canonique vers la base (v_1, v_2, v_3)

on a: $A = PTP^{-1}$ avec T matrice triangulaire

dnc: $T = P^{-1}AP$

$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} -1 & +1 & 1 \\ +0 & 0 & -1 \\ -2 & +1 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & +2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$

ex 15:

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(A) = 1$
 $\dim(\text{Im}(A)) = 1$ donc $\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1$

① Montrer que: A diagonalisable $\Rightarrow \text{tr}(A) \neq 0$

Pi A est diagonalisable alors la dimension de chaque sous-espace propre est égal au degré de multiplicité de la valeur propre associée et tant que racine du polynôme caractéristique.

$\dim(\text{Ker}(A)) > 0$ donc $\lambda_1 = 0$ est valeur propre de A

$\dim(\text{Ker}(A)) = n - 1$ donc: le degré de multiplicité de est $n - 1$

ce qui signifie que $P_A(\lambda)$ a une seconde racine nulle notée λ_2

(6)

$$n: \text{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 \neq 0$$

② Montrer que: $\text{rg}(A) \neq 0 \Rightarrow A$ diagonalisable:

on sait que: $\dim(\text{Ker}(A)) = n-1 \neq 0$

donc: $\lambda_1 = 0$ est valeur propre de A et le sous-espace propre associé est de dimension $n-1$.

$$\text{rg}(A) \neq 0 \text{ d'où: } \text{rg}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{ avec } (\lambda_i)_{i=1, \dots, n} \text{ valeurs propres de } A$$

donc il existe 1 valeur propre de A notée λ_2 non nulle

son sous-espace propre est donc au moins de dimension 1.

$$\text{on a donc: } \dim(E_0) = n-1$$

$$\dim(E_{\lambda_2}) = 1$$

$$\text{donc: } n = \dim(E_{\lambda_1}) + \dim(E_{\lambda_2})$$

$\Rightarrow A$ est diagonalisable

ex 16:

$$f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$$

$$M \mapsto M^t$$

1) f est 1 endomorphisme?

$$M \in \text{Ker } f \Leftrightarrow M^t = O_{M_n(\mathbb{R})} \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, M_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow M = O_{M_n(\mathbb{R})}$$

$$\text{donc: } \text{Ker } f = \{O_{M_n(\mathbb{R})}\}$$

donc: f est 1 endomorphisme.

ex 17:

Première partie:

$$1) \det(A - I) = \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

donc 1 est valeur propre de A

$$* \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f - \text{Id}) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}$$

$$\text{donc: } \text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}\{(1, 1)\}$$

$$F_1 \text{ est de dimension 1 et on pose } E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2) P_A(3) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \text{ donc } 3 \text{ est valeur propre de } f.$$

$$* F_3 = \text{Ker}(f - 3\text{Id})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - 3I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = y \end{cases}$$

$$\underline{F_3 = \text{Vect} \{ (2; 1) \}} \text{ donc } \underline{E_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$3) f(E_1) = E_1 \text{ et } f(E_3) = E_3$$

$$\text{donc la matrice de } f \text{ dans la base } \mathcal{B}_E \text{ est: } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4) \text{ Soit } P \text{ la matrice de passage de la base canonique vers la base } \mathcal{B}_E$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Valeur } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{on a: } A = PDP^{-1}$$

$$5) D = P^{-1}AP$$

$$\text{donc: } D^n = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \dots (P^{-1}AP) = P^{-1}APP^{-1}AP \dots P^{-1}AP \\ = P^{-1}A^n P$$

$$\text{d'où: } A^n = P D^n P^{-1}$$

$$6) A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3^n & -3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \cdot 3^n & 2-2 \cdot 3^n \\ -1+3^n & 2-3^n \end{pmatrix} \\ = 3^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

deuxième partie:

1) $M^2 = D$

* Montrer que: $MD = DM$?

$DM = (M^2)M = M^3 = M(M^2) = MD$

* Et déduire que M est diagonale:

on pose: $M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$

on a: $MD = DM \Leftrightarrow \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} M_{11} & 3M_{12} \\ M_{21} & 3M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ 3M_{21} & 3M_{22} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3M_{12} = M_{12} \\ M_{21} = 3M_{21} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{12} = 0 \\ M_{21} = 0 \end{cases}$

donc: M est diagonale.

* $M^2 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} M_{11}^2 & 0 \\ 0 & M_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{11}^2 = 1 \\ M_{22}^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{11} = 1 \text{ ou } M_{11} = -1 \\ M_{22} = \sqrt{3} \text{ ou } M_{22} = -\sqrt{3} \end{cases}$

on pose: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) $X^2 = A \Leftrightarrow X^2 = PDP^{-1} \Leftrightarrow P^{-1}X^2P =$

$\Leftrightarrow P^{-1}XPP^{-1}XP = \Leftrightarrow M^2 = D$

donc: $\begin{cases} P^{-1}XP = M_1 \\ P^{-1}XP = M_2 \\ P^{-1}XP = M_3 \\ P^{-1}XP = M_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \underline{PM_1P^{-1}} \\ X = \underline{PM_2P^{-1}} \\ X = \underline{PM_3P^{-1}} \\ X = \underline{PM_4P^{-1}} \end{cases}$

3) $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2\sqrt{3} & 2-2\sqrt{3} \\ -1+\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\sqrt{3} & -2-2\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} & -2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2\sqrt{3} & 2+2\sqrt{3} \\ -1-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$X_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2\sqrt{3} & -2+2\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(9)

$$\underline{S} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\Pi} &= X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 = P M_1 P^{-1} P M_2 P^{-1} P M_3 P^{-1} P M_4 P^{-1} \\ &= P M_1 M_2 M_3 M_4 P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 17 & -16 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$