Vecteurs aléatoires discrets

I) déf :

$X : \Omega \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{R}^n$ est 1 vecteur aléatoire discret

ssi : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, X_i est 1 v.a.d de Ω sur E_i

II) Loi de probabilité de X :

C'est l'application : $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \longrightarrow [0;1]$

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \longmapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$

*** pp :** $\mathbb{P}_X$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$

III) Loi marginale de X_i :

*** déf :** $\mathbb{P}_{X_i} : \mathcal{P}(E_i) \longrightarrow [0;1]$

$$x_i \longmapsto \mathbb{P}(X_i = x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \in E_{i-1} \\ x_{i+1} \in E_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \in E_n}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

*** conséquence :** connaître la loi du vecteur aléatoire X nous permet de connaître la loi de n'importe laquelle de ses composantes.

IV) Loi conditionnelle de X sachant Y = y :

*** déf :** Soit X et Y, 2 v.a.d. de Ω dans E et F et $y \in F$

On appelle loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est l'application :

$\mathbb{P}_{X|Y=y} : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto \mathbb{P}[X = x | Y = y] = \frac{\mathbb{P}[X = x, Y = y]}{\mathbb{P}[Y = y]}$$

⚠ $\mathbb{P}[Y = y] \neq 0$ par définition de la probabilité conditionnelle

*** remarque :** ① connaître la loi du vecteur aléatoire (X,Y) nous permet de connaître la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{Y = y\}$

*** pp :** $\mathbb{P}_{X|Y=y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

dém : ① $\mathbb{P}_{X|Y=y}(\emptyset) = \dfrac{\mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) \in \emptyset\}, \{w \in \Omega / Y(w) = y\})}{\mathbb{P}[Y = y]} = \dfrac{\mathbb{P}_{(X,Y)}(\emptyset)}{\mathbb{P}[Y = y]} = \dfrac{0}{\mathbb{P}[Y = y]} = 0$

car $\mathbb{P}_{X,Y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

2) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ 1 famille d'événements 2 à 2 disjoints

$$\mathbb{P}_{X|Y=y}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left[\{X\in \bigcup_{n\geq 0} A_n\}\cap\{Y=y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\mathbb{P}\left[\{w\in\Omega / (X(w);Y(w))\in \bigcup_{n\geq 0} A_n\times\{y\}\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\geq 0}\{w\in\Omega / (X(w);Y(w))\in A_n\times\{y\}\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\geq 0} (X,Y)\in A_n\times\{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}\left[\bigcup_{n\geq 0} A_n\times\{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_{(X,Y)}\left[A_n\times\{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]}$$

car $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(y)$

et que les événements $A_n\times\{y\}$ sont 2 à 2 disjoints

$$= \sum_{n\geq 0}\frac{\mathbb{P}[X\in A_n, Y=y]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[X\in A_n | Y=y]$$

$$= \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}_{X|Y=y}[A_n]$$

V) Espérance conditionnelle de X sachant l'"événement" B :

*** déf :** $\mathbb{E}[X|B] = \sum_{x\in E} x.\mathbb{P}[X|B] = \sum_{x\in E} x\,\frac{P[X\cap B]}{P[B]}$

En particulier, $\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_{x\in E} x.\mathbb{P}_{X|Y=y}[x]$

*** prop :** formule des espérances totales : Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ 1 partition de Ω

alors : $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[B_n].\mathbb{E}[X|B_n]$

démo : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} x\,\mathbb{P}[X=x] = \sum_{x\in E} x.\sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[X=x|B_n]\,\mathbb{P}[B_n]$ d'après la formule des probabilités totales

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{x\in E} x\,\mathbb{P}[X=x|B_n]\right).\mathbb{P}(B_n)$$

$$= \sum_{n\geq 0}\mathbb{P}[B_n].\mathbb{E}[X|B_n]$$