

# Optimisation des fonctions de plusieurs variables

Hervé Hocquard

Université de Bordeaux, France

8 avril 2013

## Définition

On étudie le comportement d'une fonction de plusieurs variables à valeurs réelles. Une telle fonction peut avoir des valeurs extrémiales : des minima (des valeurs les plus petites) ou des maxima (des valeurs les plus grandes) sur tout le domaine de définition ou bien sur une certaine partie.  
On les appelle des extrema.

## Définition

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une partie  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

## Définition

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une partie  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- 1 On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) global au point  $A \in D$  si pour tout  $X \in D$  on a  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si  $f(X) < f(A)$  (resp.  $f(X) > f(A)$ ).

## Définition

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une partie  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- ① On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) global au point  $A \in D$  si pour tout  $X \in D$  on a  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si  $f(X) < f(A)$  (resp.  $f(X) > f(A)$ ).
- ② On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local au point  $A \in D$  si on peut trouver un nombre  $r > 0$  tel que  $X \in D$  et  $\|X - A\| < r$  entraîne  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ).

## Définition

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur une partie  $D \subset \mathbb{R}^n$ .

- ① On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) global au point  $A \in D$  si pour tout  $X \in D$  on a  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ). Le maximum (resp. minimum) est appelé strict si  $f(X) < f(A)$  (resp.  $f(X) > f(A)$ ).
- ② On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local au point  $A \in D$  si on peut trouver un nombre  $r > 0$  tel que  $X \in D$  et  $\|X - A\| < r$  entraîne  $f(X) \leq f(A)$  (resp.  $f(X) \geq f(A)$ ).

Les extrema globaux sont appelés aussi extrema absolus.

# Théorème des extrema sur un compact

## Théorème

Soit  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$   
(compact=fermé+borné).

Alors  $f$  admet un maximum global et un minimum global sur  $K$ .

# Théorème des extrema sur un compact

## Théorème

Soit  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur un compact  $K \subset \mathbb{R}^n$  (compact=fermé+borné).

Alors  $f$  admet un maximum global et un minimum global sur  $K$ .

## Remarque

En dimension  $n = 1$  la fonction a des points extrémaux sur un intervalle. Soit ils sont à l'intérieur de l'intervalle, auquel cas ils vérifient  $f'(x) = 0$ , soit ils sont au bord de l'intervalle (sur le bord, la condition  $f'(x) = 0$  n'est pas forcément satisfaite).

Donc pour trouver les extrema on cherche d'abord des points critiques (où la dérivée s'annule), puis on compare la valeur des points critiques avec les valeurs sur le bord de l'intervalle. Les valeurs max et min se trouvent parmi ces valeurs-là.

## Définition

Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur une partie  $D$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $A \in D$  est un point critique de  $f$  si toutes les dérivées partielles s'annulent en  $A$  (équivalent à dire que le gradient de  $f$  est nul en  $A$ , équivalent à dire aussi que la différentielle de  $f$  est nulle en  $A$ ).

## Théorème

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  admettant un maximum ou un minimum local au point  $A \in U$ . Alors  $A$  est un point critique de  $f$ .

## Théorème

Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^2$  définie sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  admettant un maximum ou un minimum local au point  $A \in U$ . Alors  $A$  est un point critique de  $f$ .



Attention

La réciproque est fausse!!!

## Preuve du Théorème

Reprendons la formule de Taylor à l'ordre 2 en dimension 2.  
La preuve se généralise sans problème aux dimensions supérieures.

## Preuve du Théorème

Reprendons la formule de Taylor à l'ordre 2 en dimension 2.  
La preuve se généralise sans problème aux dimensions supérieures.

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &+ \frac{1}{2} \left( h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right) \\ &+ o(\|(h, k)\|^2) \end{aligned}$$

## Preuve du Théorème

Si on a un maximum local en  $A$ , alors  $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$  pour tout  $(h, k)$  suffisamment petit. La valeur de la fonction linéaire de deux variables  $h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , si elle n'est pas 0, est grande par rapport aux termes suivants. Donc cette valeur, si elle n'est pas égale à 0, doit être négative.

## Preuve du Théorème

Si on a un maximum local en  $A$ , alors  $f(a+h, b+k) - f(a, b) \leq 0$  pour tout  $(h, k)$  suffisamment petit. La valeur de la fonction linéaire de deux variables  $h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ , si elle n'est pas 0, est grande par rapport aux termes suivants. Donc cette valeur, si elle n'est pas égale à 0, doit être négative.

Pourtant pour  $h, k$  positifs il faut que les constantes

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) \leq 0$ ,  $i = 1, 2$  et pour  $h, k$  négatifs il faut que les mêmes

valeurs  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a, b) \geq 0$ ,  $i = 1, 2$ , d'où  $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ .

On peut refaire le même raisonnement pour un min local.

# Extremum local : cas pratique

## Exemple

Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$ , définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Montrer que  $f$  admet un minimum local en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

# Extremum local : cas pratique

## Exemple

Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$ , définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Montrer que  $f$  admet un minimum local en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

## Exemple

Si  $f$  admet un extremum local en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ ou encore } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}.$$

On trouve alors après calculs que  $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  est l'unique point critique de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

# Extremum local : cas pratique

## Exemple

Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 - 2x + xy + y^2$ , définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Montrer que  $f$  admet un minimum local en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ .

## Exemple

Si  $f$  admet un extremum local en  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ ou encore } \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + 2y = 0 \end{cases}.$$

On trouve alors après calculs que  $(x, y) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  est l'unique point critique de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Est-il vraiment un extremum local ?

# Extremum local : cas pratique

## Exemple

Il faut comparer  $f(x, y)$  et  $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  pour  $(x, y)$  voisin de  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ . Ce qui revient à étudier le signe de  $f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right)$  pour  $(h, k)$  voisin de  $(0, 0)$

# Extremum local : cas pratique

## Exemple

Il faut comparer  $f(x, y)$  et  $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  pour  $(x, y)$  voisin de  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ . Ce qui revient à étudier le signe de

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) \text{ pour } (h, k) \text{ voisin de } (0, 0)$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre 2, on a pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}$$

# Extremum local : cas pratique

## Exemple

Il faut comparer  $f(x, y)$  et  $f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  pour  $(x, y)$  voisin de  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ . Ce qui revient à étudier le signe de

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) \text{ pour } (h, k) \text{ voisin de } (0, 0)$$

D'après la formule de Taylor à l'ordre 2, on a pour tout  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{3k^2}{4}$$

$$f\left(\frac{4}{3} + h, -\frac{2}{3} + k\right) - f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \geq 0$$

## Extremum local : cas pratique

$f$  admet un minimum local en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  qui vaut

$$f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

# Extremum local : cas pratique

$f$  admet un minimum local en  $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$  qui vaut

$$f\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}.$$

## Remarque

Tout ceci est long et fastidieux il faut étudier des conditions du second ordre en se servant de la matrice Hessienne.

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_0 \in D$ .

## Rappels

Quand  $n = 1$ , pour savoir si un point critique  $X_0$  est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si  $f''(X_0) > 0$ , alors  $f(X_0)$  est un minimum local,
- si  $f''(X_0) < 0$ , alors  $f(X_0)$  est un maximum local,
- si  $f''(X_0) = 0$ , il faut faire des calculs supplémentaires de dérivées supérieures - ce peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum.

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_0 \in D$ .

## Rappels

Quand  $n = 1$ , pour savoir si un point critique  $X_0$  est un maximum local ou un minimum local, on étudie la dérivée seconde (quand elle existe) :

- si  $f''(X_0) > 0$ , alors  $f(X_0)$  est un minimum local,
- si  $f''(X_0) < 0$ , alors  $f(X_0)$  est un maximum local,
- si  $f''(X_0) = 0$ , il faut faire des calculs supplémentaires de dérivées supérieures - ce peut être un point d'inflexion, un maximum ou un minimum.

Dans le cas des fonctions de plusieurs variables, à la place de  $f''$ , on étudie la Hessienne.

## Théorème

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_0 \in D$  un point critique de  $f$ .

On suppose que la Hessienne  $H_f(X_0)$  existe. Alors

- si  $H_f(X_0)$  est définie positive ( ${}^t X H_f(X_0) X > 0$ , pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$ ) alors  $f(X_0)$  est un minimum local,
- si  $H_f(X_0)$  est définie négative ( ${}^t X H_f(X_0) X < 0$ , pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  et  $X \neq O_{\mathbb{R}^n}$ ) alors  $f(X_0)$  est un maximum local,
- si  $H_f(X_0)$  est indéfinie alors  $X_0$  n'est ni un maximum local ni un minimum local :  $X_0$  est un point selle,
- sinon il faut étudier des termes d'ordre supérieur dans la décomposition de Taylor en  $X_0$ ...

## Théorème

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_0 \in D$  un point critique de  $f$ .

On suppose que la Hessienne  $H_f(X_0)$  existe. Alors

- si  $H_f(X_0)$  est définie positive (ssi tous ses  $n$  mineurs diagonaux principaux sont strictement positifs) alors  $f(X_0)$  est un minimum local,
- si  $H_f(X_0)$  est définie négative (ssi tous ses  $n$  mineurs diagonaux principaux d'ordre  $k$  ( $k = 1, \dots, n$ )  $M_k$  vérifient :  $(-1)^k M_k > 0$ ) alors  $f(X_0)$  est un maximum local,
- si l'un des mineurs diagonaux principaux est non nul et ne vérifie pas l'une des deux règles de signes ci-dessus, alors  $X_0$  est un point selle (comme selle de cheval) ou point col (comme dans les montagnes),
- sinon on ne peut pas conclure.

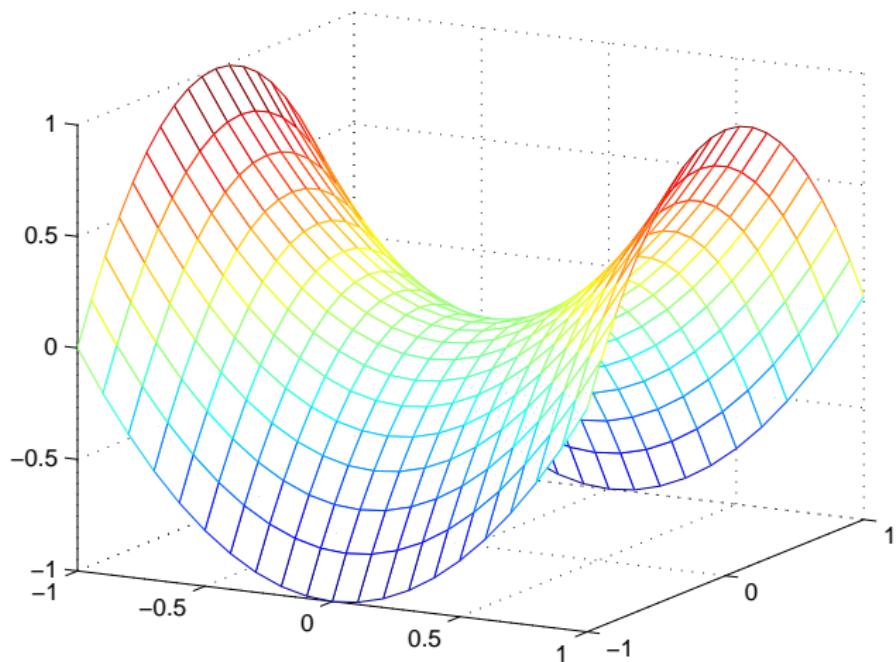
## Théorème

Soit  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $X_0 \in D$  un point critique de  $f$ .

On suppose que la Hessienne  $H_f(X_0)$  existe. Alors

- si  $\det(H_f(X_0)) > 0$ ,  $f$  admet un extremum local en  $X_0$ 
  - si  $\text{tr}(H_f(X_0)) > 0$  alors  $f(X_0)$  est un minimum local,
  - si  $\text{tr}(H_f(X_0)) < 0$  alors  $f(X_0)$  est un maximum local,
- si  $\det(H_f(X_0)) < 0$  alors  $X_0$  est un point selle (comme selle de cheval) ou point col (comme dans les montagnes)
- si  $\det(H_f(X_0)) = 0$  alors on ne peut pas conclure, on doit regarder la formule de Taylor à l'ordre supérieur (à l'ordre 3 et parfois plus)...

# Recherche des extrema : fonctions de deux variables



$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

(0;0) point selle

## Exemple

- Déterminer des points où  $f$  n'est pas de classe  $C^1$  et regarder les valeurs de  $f$  en ces points. Par exemple, la fonction  $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  admet un maximum à l'origine mais on ne le trouve pas parmi les points critiques.
- Rechercher les points critiques.
- Etudier les points critiques.

## Exemple

Extrema locaux et globaux de  $f(x,y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

Points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(y+1) = 0 \\ x^2 + y = 0 \end{cases}$$

On trouve alors trois points critiques  $(0,0)$ ,  $(-1,-1)$  et  $(1,-1)$ .

# Recherche des extrema : fonctions de deux variables

## Exemple

Points critiques	(0,0)	(-1,-1)	(1,-1)
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4y + 4$	4	0	0
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 4x$	0	-4	4
$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$	2	2	2
$\det(H_f(X_0))$	8	-16	-16
Signe de $\text{tr}(H_f(X_0))$	> 0		
Nature du point critique :	min	point selle	point selle

## Exemple

Pour les extrema globaux on voit que :

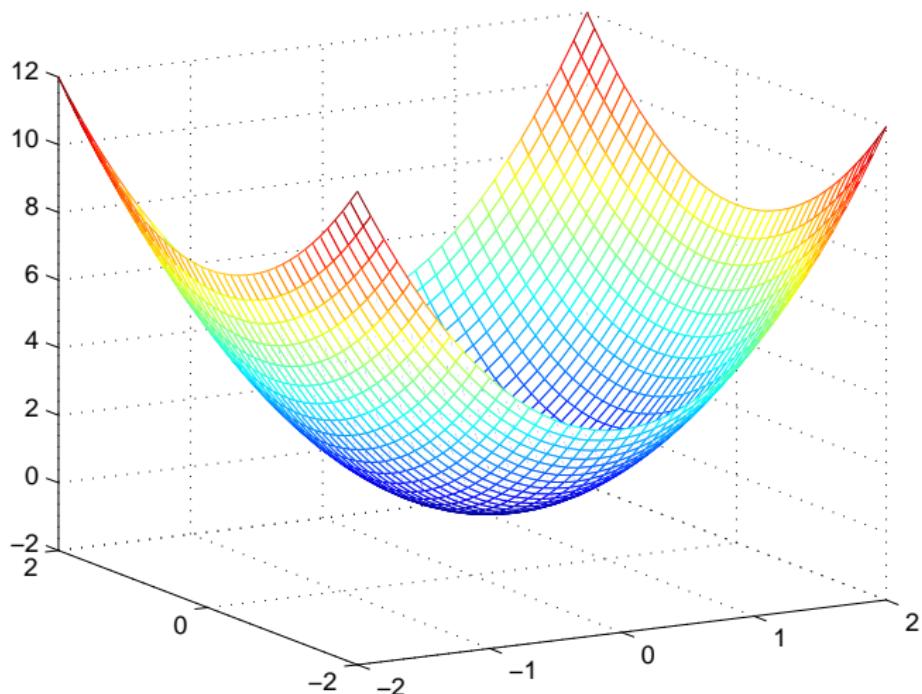
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2x^2 = +\infty$$

donc pas de maximum global.

Pas de minimum global non plus car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x, -2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2x^2 + 4 = -\infty$$

# Recherche des extrema : fonctions de deux variables



$$f(x, y) = 2x^2y + 2x^2 + y^2$$

## Théorème

Soit  $f$  une fonction convexe sur un ouvert convexe  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ .

- Si  $f$  admet en  $X_0 \in \Omega$  un minimum local, alors  $f$  admet en  $X_0$  un minimum global.
- Si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . Alors si  $\text{grad } f(X_0) = 0$ ,  $f$  admet en  $X_0$  un minimum global sur  $\Omega$ .

On a des énoncés équivalents en remplaçant convexe par concave et minimum par maximum.

# Résumons la situation : cas pratique

## Introduction

Il s'agit d'optimiser une fonction  $f$  sur un domaine fermé borné  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  délimité par des inégalités que doivent vérifier les variables ; en microéconomie elles seront du type  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$  et  $ax + by \leq c$  avec  $a, b, c$  constantes positives. La fonction  $f$  étant continue elle admet sur  $\Delta$  un maximum (global) et un minimum (global).

# Résumons la situation : cas pratique

## Marche à suivre

- On recherche les éventuels points critiques de  $f$  à l'intérieur de  $\Delta$  et on examine en ces points la condition du second ordre : on a ainsi optimisé la fonction à l'intérieur de  $\Delta$ .
- On étudie localement la fonction sur le bord de  $\Delta$  (en se ramenant à une fonction d'une variable à étudier sur un segment).
- On conclut en regroupant tous les points critiques à l'intérieur et sur le bord de  $\Delta$ .

# Résumons la situation : cas pratique

## Exercice

Optimiser la fonction  $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x - y + 2$  sur l'ensemble  $\Delta = \{x \geq 0 \text{ et } y \geq 0 \text{ et } x + y \leq 3\}$ .