C1192 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson

94230 CACHAN

Concours d'admission en **1ère année**

Economie et Gestion

Session 2011

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte 5 pages et 4 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{(1/x)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité à droite de f en 0. Etudier la continuité à gauche de f en 0. Déterminer si la fonction f est continue en 0.
2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 1 + e^t + te^t$. Déterminer à l'aide du tableau de variations de φ le signe de $\varphi(x)$ en fonction de la valeur du nombre réel x.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Donner le signe de f'.
4. Calculer (si elles existent) les dérivées à gauche et à droite en 0. Que peut-on en conclure ?
5. Tracer le tableau de variations de f.
6. Donner l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de l'origine, on précisera en particulier les éventuelles demi-tangentes en 0.
7. Montrer que la fonction admet une asymptote oblique (d'équation $y = ax + b$) au voisinage de $+\infty$. Déterminer les paramètres a et b.

Problème 2

La communauté d'agglomération "Sud de Seine", rassemble les villes de Bagneux, Clamart, Fontenay-aux-Roses et Malakoff. Elle est dirigée par un conseil composé de 4 élus de Bagneux, 4 de Clamart, 4 de Fontenay et 4 de Malakoff. Ce conseil doit choisir 6 de ses membres pour former un comité le représentant. Pour chaque question, il importe d'expliquer la démarche de dénombrement.

a) Calculer le nombre de comités possibles si chaque ville doit être représentée et si Clamart doit avoir 3 représentants .

b) Calculer le nombre de comités possibles si chaque ville doit être représentée et si Clamart et Fontenay doivent avoir chacun 2 représentants.

c) Calculer le nombre de comités possibles si chaque ville doit être représentée.

d) Calculer le nombre de comités possibles si aucune ville ne peut avoir plus de 2 représentants.

Problème 3

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leq k \leq 6$). Ce dé a été pipé de telle sorte que : les six faces ne sont pas équiprobables, les nombres p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique, les nombres p_1, p_3, p_6 dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que $p_k = (3 + k)/39$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
   A : « le nombre obtenu est pair » ;
   B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 » ;
   C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».
   a) Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.
   b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.
   c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
3. On va lancer 60 fois ce dé, et l'on vous propose de parier : vous gagnez un euro si le tirage est pair, vous perdez un euro sinon. Calculez l'espérance de gain.
4. On lance donc le dé 60 fois, et pour chaque valeur possible, i = 1, ...,6, on note le nombre de fois n_i que cette valeur i a été obtenue. On obtient les résultats suivants

i	1	2	3	4	5	6
n_i	6	6	9	11	12	16

   Quel est votre gain ? Proposez une estimation ponctuelle de la probabilité de A.

Problème 4

On considère l'espace $E = \mathbb{R}^p$. On dit qu'une application $f : E \to \mathbb{R}$ est affine si pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in]0, 1[$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

1. a) Montrer que toute application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ est affine.
   b) Montrer que toute application constante de E dans $\mathbb{R}$ est affine.
   c) Soit u une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ et une constante $b \in \mathbb{R}$, on pose pour tout x de E, $g(x) = u(x) + b$, montrer que g est affine.

Dans la suite du problème, on suppose que $f : E \to \mathbb{R}$ est affine.

2. a) Montrer que pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

   b) On fixe $(x, y) \in E^2$ et un réel $\mu > 1$. On pose $z = \mu x + (1 - \mu)y$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = \lambda z + (1 - \lambda)y$. En déduire que

$$f(\mu x + (1 - \mu)y) = \mu f(x) + (1 - \mu)f(y).$$

   c) On fixe $(x, y) \in E^2$ et un réel $\mu < 0$. On pose $z = \mu x + (1 - \mu)y$. Montrer qu'il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $y = \lambda z + (1 - \lambda)x$. En déduire que

$$f(\mu x + (1 - \mu)y) = \mu f(x) + (1 - \mu)f(y).$$

   d) En déduire qu'une application $g : E \to \mathbb{R}$ est affine si et seulement si pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

3. a) Montrer que pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$ et pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

   b) Montrer par récurrence sur l'entier $k \geq 2$ que pour tout $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1 \Rightarrow f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_k f(x_k).$$

   c) En déduire qu'une application $g : E \to \mathbb{R}$ est affine si et seulement si pour tout entier $k \geq 2$, pour tout $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k$ et pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_k = 1 \Rightarrow g(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k) = \lambda_1 g(x_1) + \ldots + \lambda_k g(x_k). \qquad (1)$$

4. On définit l'application $h : E \to \mathbb{R}$, par $h(x) = f(x) - f(0)$. A l'aide de la propriété (1), montrer que
   a) Pour tout x de E, pour tout y de E, $h(x + y) = h(x) + h(y)$.
   b) Pour tout x de E, pour tout α de $\mathbb{R}$, $h(\alpha x) = \alpha h(x)$.
   c) En déduire qu'une application $g : E \to \mathbb{R}$ est affine si et seulement si il existe une application linéaire $u : E \to \mathbb{R}$ et une constante $b \in \mathbb{R}$ telles que pour tout x de E, $g(x) = u(x) + b$.

5. a) Soit $(u_n)_n$ une suite arithmético-géométrique définie par sa valeur initiale u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout entier $n \geq 0$. On suppose que $a \neq 1$, montrer que pour tout entier $n \geq 0$,

$$u_n = a^n u_0 + a^{n-1}b + \ldots + ab + b = a^n u_0 + b\left(\frac{1 - a^n}{1 - a}\right).$$

b) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, l'application définie par $f(x) = Ax + B$, où A est la matrice carrée $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, et B un élément de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la matrice $Id_2 - A$ est inversible (où Id_2 désigne la matrice identité de taille 2).

c) On considère la suite $(U_n)_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par sa valeur initiale U_0 et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$.
Déterminer, par analogie avec la question a), une formule permettant de calculer rapidement U_n en fonction de A, B et de U_0.