Loi normale

I) Définition :

$X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ signifie que sa densité $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ avec $\sigma > 0$

*1 cas particulier : $\mu = 0$ et $\sigma^2 = 1$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On parle de loi normale centrée réduite.

II) ppq :

*ppq 1 : $\mathbb{E}[X] = \mu$ et $\mathbb{V}[X] = \sigma^2$

démo :

$$\mathbb{E}[X] - \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx - \mu$$

astuce 1 : f_X est 1 densité de loi de probabilité donc : $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)\, f_X(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

$$= \sigma \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\sigma}\, dx$$

astuce 2 : on utilise le changement de variable "à l'envers"

avec : $\varphi :]-\infty;+\infty[\to]-\infty;+\infty[$ bijection, dérivable et de dérivée continue sur $]-\infty;+\infty[$

$$x \longmapsto \frac{x-\mu}{\sigma}$$

on remarque que : $\mathbb{E}[X] - \mu = \sigma \cdot \left[\int_{\varphi^{-1}(-\infty)}^{\varphi^{-1}(+\infty)} \varphi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{[\varphi(x)]^2}{2}} \cdot \varphi'(x)\, dx\right]$

donc : $\mathbb{E}[X] - \mu = \sigma \cdot \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx\right]$

astuce 3 : $x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est 1 fonction impaire donc il faut séparer les valeurs des positives des valeurs de x négatives

②

$$\mathbb{E}[X]-\mu = \sigma \cdot \left[\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]$$

On pose : $\varphi : [0;+\infty[\ \to \ ]-\infty;0]$ bijective, dérivable et de dérivée continue sur $[0;+\infty[$

$x \mapsto -x$

on a donc : $$\int_{-\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\varphi^{-1}(-\infty)}^{\varphi^{-1}(0)} \varphi(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi(x)^2}{2}} \cdot \varphi'(x)\, dx$$

$$= \int_{+\infty}^{0} -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot (-1)\, dx$$

$$= \int_{+\infty}^{0} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

astuce 4 : quand on inverse les bornes d'1 intégrale, elle change de signe

$$= -\int_{0}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

donc : $$\mathbb{E}[X]-\mu = \sigma \cdot \underbrace{\left[-\int_{0}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \int_{0}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]}_{0}$$

$= \sigma \cdot$

$= \underline{0}$

*prop 2 : Si $X \sim \mathcal{N}(0;1)$ alors : $\sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, $\forall (\mu,\sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$
[Par exemple : $-3X+2 \sim \mathcal{N}(2;9)$]

démo : $Y = \sigma X + \mu$

soit $y \in \mathbb{R}$, $F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(\sigma X + \mu \leq y) = \mathbb{P}(\sigma X \leq y - \mu)$

[Normalement, on devrait isoler ① $\sigma > 0$; ② $\sigma < 0$ mais je ne vais faire la démonstration que pour $\sigma > 0$]

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Si on pose : $\varphi :]-\infty; y] \longrightarrow]-\infty; \frac{y-\mu}{\sigma}]$

$x \longmapsto \frac{x-\mu}{\sigma}$

c'est 1 fonction bijective sur $]-\infty;y]$, dérivable et de dérivée continue sur d'après le théorème de changement de variable de l'intégrale:

$$\int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\varphi^{-1}(-\infty)}^{\varphi^{-1}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\varphi(x))^2}{2}} \varphi'(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x-\mu}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sigma} dx$$

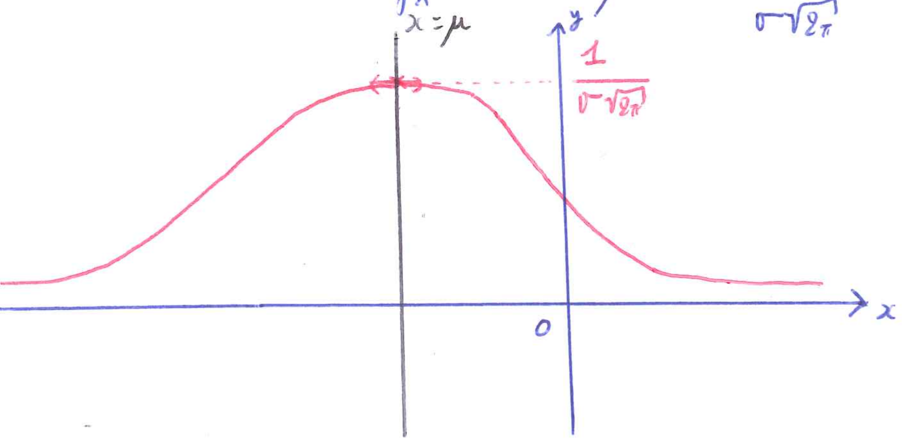
F_Y est bien la fonction de répartition de la loi uniforme de paramètres μ et σ.

***rq 3:** Si $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

alors : $\forall(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha X + \beta \sim \mathcal{N}(\alpha\mu+\beta;\alpha^2\sigma^2)$

***rq 4:** - la densité de $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$ est symétrique par rapport à la droite $x=\mu$

- le maximum de f_X est atteint en μ et vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$



***rq 5:** Si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1;\sigma_1^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2;\sigma_2^2)$

et X_1 et X_2 indépendantes

alors : $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_1+\mu_2;\sigma_1^2+\sigma_2^2)$