CORRECTION DE L'EXAMEN BLANC

ex 1:

1) pour $n \geqslant 1$, A_n est l'événement "le jour n est 1 jour non fumé."

cette personne ne fume effectivement pas le jour 1 $\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_1) = 1$

si elle ne fume pas un certain jour, elle ne fume pas le lendemain avec une probabilité p_1

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1}) = p_1$

si elle fume un certain jour, la probabilité pour qu'elle ne fume pas le lendemain est p_2

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1}^c) = p_2$

p_1, p_2 sont des réels compris entre 0 et 1.

2) soit $n \geqslant 2$,

$$\underline{\mathbb{P}(A_n)} = \mathbb{P}(A_n, A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n, A_{n-1}^c)$$

$$= \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1}).\mathbb{P}(A_{n-1}) + \mathbb{P}(A_n \mid A_{n-1}^c)\,\mathbb{P}(A_{n-1}^c)$$

$$= p_1 . \mathbb{P}(A_{n-1}) + p_2\,\mathbb{P}(A_{n-1}^c) = p_1 . \mathbb{P}(A_{n-1}) + p_2\,(1 - \mathbb{P}(A_{n-1}))$$

$$= \underline{(p_1 - p_2).\mathbb{P}(A_{n-1}) + p_2}$$

$\mathbb{P}(A_1) = 1$

[toujours considérer la probabilité d'1 événement A_n par rapport au résultat de A_{n-1}]

3) [pour exprimer $\mathbb{P}(A_n)$ en fonction de n, on écrit les $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_3)$, $\mathbb{P}(A_4)$, ...]

$$\mathbb{P}(A_2) = (p_1 - p_2) . 1 + p_2$$

$$\mathbb{P}(A_3) = (p_1 - p_2).\mathbb{P}(A_2) + p_2 = (p_1 - p_2)^2 . 1 + (p_1 - p_2) . p_2 + p_2$$

$$\mathbb{P}(A_4) = (p_1 - p_2) . \mathbb{P}(A_3) + p_2 = (p_1 - p_2)^3 . 1 + (p_1 - p_2)^2 . p_2 + (p_1 - p_2) p_2 + p_2$$

On "aurait": $\mathbb{P}(A_n) = (p_1 - p_2)^{n-1} + (p_1 - p_2)^{n-2} . p_2 + (p_1 - p_2)^{n-3} . p_2 + \dots + p_2$

$$= (p_1 - p_2)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} (p_1 - p_2)^k p_2$$

$$= (p_1 - p_2)^{n-1} + \frac{1 - (p_1 - p_2)^{n-1}}{1 - (p_1 - p_2)} . p_2$$]

Nous allons montrer par récurrence la propriété $(\mathcal{P}_n)$: $\forall n \geqslant 2$, $\mathbb{P}(A_n) = (p_1 - p_2)^{n-1} + \dfrac{1 - (p_1 - p_2)^{n-1}}{1 - (p_1 - p_2)} . p_2$

$(\mathcal{P}_2)$ est-elle vraie ?

* $(p_1-p_2)^{2-1} + \dfrac{1-(p_1-p_2)^1}{1-(p_1-p_2)} p_2 = (p_1-p_2)+p_2 = \mathbb{P}(A_2)$

donc la propriété est vraie à l'ordre 2

* On suppose $(\mathcal{P}_n)$ vraie, $\mathcal{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = (p_1-p_2)\,\mathbb{P}(A_n) + p_2$$

$$= (p_1-p_2)\cdot\left[(p_1-p_2)^{n-1} + \frac{1-(p_1-p_2)^{n-1}}{1-(p_1-p_2)}\cdot p_2\right] + p_2 \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= (p_1-p_2)^n + \frac{(p_1-p_2)-(p_1-p_2)^n}{1-(p_1-p_2)} p_2 + p_2$$

$$= (p_1-p_2)^n + \left[\frac{(p_1-p_2)-(p_1-p_2)^n}{1-(p_1-p_2)} + 1\right]\cdot p_2$$

$$= (p_1-p_2)^n + \left[\frac{(p_1-p_2)-(p_1-p_2)^n + 1-(p_1-p_2)}{1-(p_1-p_2)}\right]\cdot p_2$$

$$= (p_1-p_2)^n + \frac{1-(p_1-p_2)^n}{1-(p_1-p_2)}\cdot p_2$$

donc : $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie

* déterminer ℓ :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} (p_1-p_2)^{n-1} + \frac{1-(p_1-p_2)^{n-1}}{1-(p_1-p_2)}\cdot p_2 = \frac{p_2}{1-p_1+p_2}$$

car : $(p_1-p_2)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ car $|p_1-p_2| < 1$

4) $\dfrac{p_2}{1-p_1+p_2}$ est la probabilité que cette personne s'arrête de fumer au bout d'un très grand nombre de jours.

ex2 :

Un jeu oppose 2 personnes A et B

Le jeu se présente sous la forme de parties indépendantes $\Leftrightarrow$ les $(Y_i)_i$ sont indépendantes

A l'issue de chaque partie, A gagne avec 1 probabilité p et gagne 1 unité de mise

A perd avec 1 probabilité $1-p$ et perd 1 unité de mise

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(Y_i = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1-p$

On note Y_i le gain (positif ou négatif) du joueur A à la partie i

1) * loi de Y_i : $Y_i : \Omega \to \{-1;1\}$

avec : $\mathbb{P}(Y_i = -1) = 1-p$

$\mathbb{P}(Y_i = 1) = p$

* loi de Z_n : $Z_n = \dfrac{S_n + n}{2} = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n + n}{2} = \dfrac{(Y_1+1) + (Y_2+1) + \dots + (Y_n+1)}{2}$

$= \sum_{i=1}^{n} Z_i$

avec : $Z_i : \Omega \to \{0; \}$

$w \mapsto \dfrac{Y_i(w)+1}{2}$

et $\mathbb{P}(Z_i = 0) = \mathbb{P}\left(\dfrac{Y_i+1}{2} = 0\right) = \mathbb{P}(Y_i = -1) = 1-p$

et $\mathbb{P}(Z_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z_i = 0) = p$

donc les $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ sont n variables aléatoires indépendantes qui suivent 1 loi de Bernoulli de paramètre p.

donc : $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ suit 1 loi binomiale de paramètres n et p.

* $\mathbb{E}[Z_n] = np \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[\dfrac{S_n+n}{2}\right] = np \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n] + \frac{n}{2} = np \Leftrightarrow \frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n] = np - \frac{n}{2}$

$\Leftrightarrow \underline{\mathbb{E}[S_n] = 2np - n}$

* $\mathbb{V}[Z_n] = np(1-p) \Leftrightarrow \mathbb{V}\left[\dfrac{S_n+n}{2}\right] = np(1-p) \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \cdot \mathbb{V}[S_n] = np(1-p)$

$\Leftrightarrow \underline{\mathbb{V}[S_n] = 4np(1-p)}$

[l'énoncé nous donnant la loi de $\dfrac{S_n+n}{2}$, on pouvait donc en déduire son espérance et sa variance]

2)

(a) [on remarque que : $F_n = L_n \cup G_n$ donc l'événement F_n se produit si l'événement L_n ou l'événement G_n se produit. donc on commence par L_n puis par G_n]

* $L_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{w \in \Omega / S_k(w) = -a\}$

$= \{w\in\Omega / S_1(w) = -a\} \cup \{w\in\Omega / S_2(w) = -a\} \cup \dots \cup \{w\in\Omega / S_n(w) = -a\}$

soit $k \in [\![1;n]\!]$, $\{S_k = -a\}$ signifie que A a perdu le jeu au bout de k parties

donc : $L_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{S_k = -a\}$ signifie que A a perdu le jeu au bout d'au plus n parties.

* ${}_n = \{w\in\Omega / S_1(w) = b\} \cup \{w\in\Omega / S_2(w) = b\} \cup \dots \cup \{w\in\Omega / S_n(w) = b\}$

soit $k \in [\![1;n]\!]$, $\{S_k = b\}$ signifie que B a perdu le jeu au bout de k parties

donc : ${}_n = \bigcup_{k=1}^{n} \{S_k = b\}$ signifie que B a perdu le jeu au bout d'au plus n parties.

* $F_n = G_n \cup L_n$ signifie qu'un des joueurs (A ou B) a perdu le jeu au bout d'au plus n parties.

donc que le jeu a un gagnant au bout d'au plus n parties.

(b) $\gamma_n = 1 - \mathbb{P}(F_n)$

* Montrer que $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ admet 1 limite donc que $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ converge ?

On pose : $u_n = \mathbb{P}(F_n)$

- montrer que : $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante ? $u_{n+1} - u_n = \mathbb{P}(F_{n+1}) - \mathbb{P}(F_n)$

or : $F_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} \{S_k \in \{-a,b\}\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{S_k \in \{-a;b\}\} \cup \{S_{n+1} \in \{-a;b\}\}$

$= F_n \cup \{S_{n+1} \in \{-a;b\}\}$

donc : $F_n \subset F_{n+1}$

donc : $\mathbb{P}(F_n) \leq \mathbb{P}(F_{n+1}) \Rightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante

- Etant donné que : $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée par 1, on en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ converge

[si une suite est croissante [ou décroissante] et majorée [ou minorée] alors elle converge]

- $\gamma_n = 1 - u_n$ donc $(\gamma_n)_{n\geq 0}$ converge car u_n converge

* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

donc ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = (1 - u_n) \in [0;1]$

Etant donné que γ_n est convergente alors sa limite est dans $[0;1]$

[Si $(u_n)_{n\geq 0}$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]a;b[$ ouvert alors sa limite est dans $[a;b]$ fermé] ex3 :

on lance 2n fois 1 pièce
A gagne ⟺ le nb de pile > nb de face
B gagne ⟺ le nb de pile < nb de face
partie nulle ⟺ nb de pile = nb de face
$\mathbb{P}(\text{"pile"}) = p < \frac{1}{2}$
$X_k = 1$ si le k^e lancer tombe sur "pile"
0 " " "face"

(a) soit $n \in \mathbb{N}$, $p_n = \mathbb{P}(T_n \geq n+1) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \dots + X_{2n} \geq n+1)$

$= \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{2n} = n+1) + \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{2n} = n+2) + \dots$

p_n est la probabilité que le nombre de pile soit strictement supérieur au nombre de face.
donc c'est la probabilité que A gagne.

(b)
* loi de T_m : $T_m = X_1 + X_2 + \dots + X_{2m}$
soit $i \in [\![1; 2m]\!]$, $X_i : \Omega \to \{0;1\}$
avec : $\mathbb{P}(X_i = 1) = p \Rightarrow X_i \sim \mathcal{B}(p)$

donc T_m est la somme de $2m$ variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p
donc T_m suit 1 loi binomiale de paramètres $2m$ et p.

* $\mathbb{E}[T_m] = 2mp$
* $\mathbb{V}[T_m] = 2mp(1-p)$
car $T_m \sim \mathcal{B}(2m; p)$

* loi de Y_m : $Y_m = X_{2m+1} + X_{2m+2}$

donc : Y_m est la somme de 2 variables aléatoires indépendantes qui suivent 1 loi de Bernoulli de paramètre p
donc : Y_m suit 1 loi binomiale de paramètres 2 et p.

* $\mathbb{E}[Y_m] = 2p$
* $\mathbb{V}[Y_m] = 2p(1-p)$
car $Y_m \sim \mathcal{B}(2; p)$

* $\frac{u_m}{v_m} = \frac{\mathbb{P}[T_m = m]}{\mathbb{P}[T_m = m+1]} = \frac{C_m^{2m} p^m (1-p)^{2m-m}}{C_{m+1}^{2m} p^{m+1} (1-p)^{2m-(m+1)}}$ car $T_m \sim \mathcal{B}(2m, p)$

$= \frac{\frac{\cancel{(2m)!}}{m!(2m-m)!} p^m (1-p)^m}{\frac{\cancel{(2m)!}}{(m+1)!(2m-(m+1))!} \cdot p^{m+1} (1-p)^{m-1}} = \frac{(m+1)!(m-1)!}{m!\,m!} \frac{(1-p)}{p} = \frac{(m+1).(1-p)}{m.p}$

(c) montrer que : $\{w\in\Omega / T_n(w)\geqslant n+1\} \subset \{w\in\Omega / T_n(w)-\mathbb{E}[T_n]\geqslant n(1-2p)+1\}$

Soit w tel que : $T_n(w)\geqslant n+1$

$$\Rightarrow T_n(w)-\mathbb{E}[T_n]\geqslant n+1-\mathbb{E}[T_n]$$

$$\Rightarrow T_n(w)-\mathbb{E}[T_n]\geqslant n+1-2np$$

$$\Rightarrow T_n(w)-\mathbb{E}[T_n]\geqslant n(1-2p)+1$$

(d) soit $i\in[\![0;2]\!]$,

$$\{w\in\Omega / Y_n(w)=i,\ T_{n+1}(w)\geqslant n+2\} = \{w\in\Omega / Y_n(w)=i,\ X_1(w)+\dots+X_{2n}(w)+X_{2n+1}(w)+X_{2n+2}(w)\geqslant n+2\}$$

$$= \{w\in\Omega / X_{2n+1}(w)+X_{2n+2}(w)=i,\ X_1(w)+\dots+X_{2n}(w)+X_{2n+1}(w)+X_{2n+2}(w)\geqslant n+2\}$$

$$= \{w\in\Omega / X_{2n+1}(w)+X_{2n+2}(w)=i,\ X_1(w)+\dots+X_{2n}(w)+i\geqslant n+2\}$$

$$= \{w\in\Omega / Y_{n+1}(w)=i,\ T_n(w)\geqslant n+2-i\}$$

(e) $p_{n+1}=\mathbb{P}(T_{n+1}\geqslant n+2)=\mathbb{P}(T_{n+1}\geqslant n+2,\ Y_n=0)+\mathbb{P}(T_{n+1}\geqslant n+2,\ Y_n=1)+\mathbb{P}(T_{n+1}\geqslant n+2,\ Y_n=2)$

$$=\mathbb{P}(Y_n=0,\ T_{n+1}\geqslant n+2-0)+\mathbb{P}(Y_n=1,\ T_{n+1}\geqslant n+2-1)+\mathbb{P}(Y_n=2,\ T_{n+1}\geqslant n+2-2)$$

$$=\mathbb{P}(Y_n=0,\ T_n\geqslant n+2)+\mathbb{P}(Y_n=1,\ T_n\geqslant n+1)+\mathbb{P}(Y_n=2,\ T_n\geqslant n)$$

$$=\mathbb{P}(Y_n=0).\mathbb{P}(T_n\geqslant n+2)+\mathbb{P}(Y_n=1).\mathbb{P}(T_n\geqslant n+1)+\mathbb{P}(Y_n=2).\mathbb{P}(T_n\geqslant n)$$

car (X_{2n+1},X_{2n+2}) est indépendant de $(X_1,\dots,X_n)$

$$=(1-p^2)^2.\mathbb{P}(T_n\geqslant n+2)+2p(1-p).\mathbb{P}(T_n\geqslant n+1)+p^2.\mathbb{P}(T_n\geqslant n)$$

$$=(1-p)^2.[\mathbb{P}(T_n\geqslant n+1)-\mathbb{P}(T_n=n+1)]+2p(1-p).p_n+p^2.[\mathbb{P}(T_n=n)+\mathbb{P}(T_n\geqslant n+1)]$$

$$=(1-p)^2.[p_n-v_n]+2p(1-p).p_n+p^2.[u_n+p_n]$$

$$=(1-p)^2.p_n-(1-p)^2v_n+2p(1-p)p_n+p^2u_n+p^2p_n$$

$$=-(1-p)^2v_n+p^2u_n+p_n[(1-p)^2+2p(1-p)+p^2]$$

$$=-(1-p)^2v_n+p^2u_n+p_n[1-2p+p^2+2p-2p^2+p^2]$$

$$=-(1-p)^2v_n+p^2u_n+p_n.1$$