# Etude de Fonctions



1 fonction définie sur 1 ensemble est 1 relation entre cet ensemble et 1 autre.
qui à tout élément de l'ensemble de départ associe 1 unique élément (son image) dans l'ensemble d'arrivée.

ex 1 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto x^2$

ex 2 : $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ (n'est pas définie en 0)

## I) La continuité d'1 fonction :

→ soit $a \in \mathcal{D}f$

f est continue en a $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $f(a)$

→ prolongement par continuité de f en $a \notin \mathcal{D}f$ :

f n'est pas définie en a mais $\lim_{x \to a} f(x)$ existe et vaut $l$

Dans ce cas, on peut définir une nouvelle fonction $g : \mathcal{D}f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}f \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

g est appelée le prolongement par continuité de f en a.

ex : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$

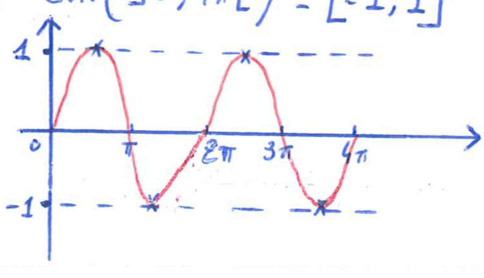
f n'est pas définie en 0 mais $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

On peut donc prolonger f par continuité en 0, on obtient la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

→ Th des valeurs intermédiaires : l'image d'1 intervalle par une fonction continue est 1 intervalle

ex : $\sin(]0 ; 4\pi[) = [-1 ; 1]$



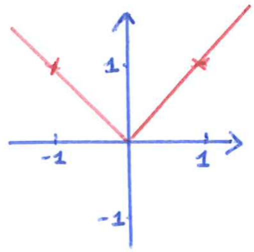
## II) La dérivabilité d'1 fonction :

Soit $a \in \mathcal{D}f$

→ $f$ est dérivable en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et vaut $f'(a)$

→ rq : $f$ dérivable en $a \Rightarrow f$ est continue en $a$

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$




$f$ est continue en $0$ et on a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'existe pas car : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1$

et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{-x}{x} = -1$

donc $f$ n'est pas dérivable en $0$.

→ Th : Soient $f$ et $g$ 2 fonctions définies et dérivables en $a$
alors : (1) $\lambda f$ est dérivable en $a$ et $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$
(2) $f+g$ et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
(3) $fg$ et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$
(4) si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $a$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$

→ Th : Soient $f$ et $g$ 2 fonctions avec : $f : I \to f(I)$ et $g : f(I) \to \mathbb{R}$
Soit $a \in I$, tel que : $f$ est dérivable en $a$ et $g$ est dérivable en $f(a)$
alors : $g \circ f$ est dérivable en $a$

et : $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$

ex : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
$x \mapsto \dfrac{-x^2}{2}$
et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$
$x \longmapsto e^x$

on a $(g \circ f)(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $(g \circ f)'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot -x$

Th : Soit $f : I \to f(I)$ bijective et $f^{-1}$ son inverse

soit $a \in I$, $f^{-1}$ est dérivable en $f(a)$ si : $f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) \neq 0$

on a alors : $\left(f^{-1}\right)'(f(a)) = \dfrac{1}{f'(a)}$

## Dérivées des fonctions usuelles

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 0$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto kx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = k$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = n x^{n-1}$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = \dfrac{n}{x^{n+1}}$

→ $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\frac{1}{n}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $f'(x) = \dfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \dfrac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}}$

→ $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

→ $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et : $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$, $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = e^x$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\sin x$

→ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x$

→ $f : \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $f'(x) = \dfrac{-1}{\cos^2 x}$

→ $f : \mathbb{R} \to [0; 2\pi[$, $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\operatorname{Arctan})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

## III) Lien entre continuité, dérivabilité et sens de variation de $f$ :

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

→ $f$ est croissante sur $I \Leftrightarrow \forall (x;y) \in I^2, y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

$f$ est décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall (x;y) \in I^2, y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

$f$ est strictement croissante sur $I \Leftrightarrow \forall (x;y) \in I^2, y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$

$f$ est strictement décroissante sur $I \Leftrightarrow \forall (x;y) \in I^2, y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

→ pp :

$\forall x \in I, f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $I$

$\forall x \in I, f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $I$

$\forall x \in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $I$

$\forall x \in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $I$

ex : $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{array}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0

→ pp :

si $f$ est continue et croissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [f(a);f(b)]$

si $f$ est continue et décroissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [f(b);f(a)]$

remarque : la pp est aussi vraie pour $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$

[cette propriété est 1 conséquence du th des valeurs intermédiaires pas re pas dire sa seule utilisation]

→ Th de la bijection :

si $f$ est continue et strictement monotone sur $[a;b]$

alors elle définit 1 bijection de $[a;b]$ sur $f([a;b])$

remarque : le th est aussi vrai pour $]a;b[$, $]a;b]$, $[a;b[$

⚠ très utilisé en concours

## IV) Th usuels :

→ **Th des accroissements finis** : si $f$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a;b[$
alors : $\exists c \in ]a;b[$, $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

→ **Th de Rolle** : si $f$ est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(b)=f(a)$
alors : $\exists c \in ]a;b[$, $f'(c)=0$.

→ **formule de Taylor** : $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f$ dérivable en $a \in I$ jusqu'à l'ordre n alors :

$$\forall x \in I,\ f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f^{(2)}(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + f^{(3)}(a)\frac{(x-a)^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\mathcal{E}(x-a)$$

avec $\mathcal{E}(x-a) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$

<u>ex</u> : $f : \mathbb{R} \to [-1;1]$, $x \mapsto \sin x$

$f$ est dérivable en 0 jusqu'à l'ordre 1 alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sin(x) = \sin(0) + \cos(0)\frac{x}{1!} + (x-0)\mathcal{E}(x-0) = x + x\mathcal{E}(x) \text{ avec } \mathcal{E}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

donc : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 + \mathcal{E}(x) = \underline{1}$

## V) Les fonctions convexes :

Cette fois, $I$ est 1 intervalle de $\mathbb{R}$

→ $f$ est convexe sur $I \iff \forall (x;y) \in I^2, \forall \lambda \in [0;1],\ f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

<u>ex</u> : $e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$

→ **prop** : Si $f$ est convexe sur $I$ et $(\lambda_i)_{i=1,\dots,n} \in [0;1]^n$ avec $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$
alors : $\forall (x_i)_{i=1,\dots,n} \in I^n,\ f\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$

→ **Th** : Si $f$ est 2 fois dérivable sur $I$
alors $f$ convexe $\iff \forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$

<u>ex</u> : $e^x$ est convexe sur $\mathbb{R}$
$-\ln x$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$