

LES VARIABLES ALÉATOIRES

déf: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et (E, \mathcal{E}) avec E ensemble réel et \mathcal{E} un tribu sur E

$X: \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire de Ω sur E si:

$$\forall A \in \mathcal{E}, X^{-1}(A) = \{w \in \Omega / X(w) \in A\} \in \mathcal{A}$$

Les Variables aléatoires discrètes

I) Déf.

$X: \Omega \rightarrow E$ est une variable aléatoire discrète de Ω sur E si E est fini ou infini dénombrable.

*ex: Soit X représentant le résultat du lancer d'un dé. et: $\forall A \in \mathcal{P}(E), X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

mais: $X: \Omega \rightarrow \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = E$ avec E qui est fini

*remarque: $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ est un tribu sur E

II) Loi (ou distribution) d'une v.a.d.

*déf: c'est l'application $P_X: \mathcal{E} = \mathcal{P}(E) \rightarrow [0; 1]$

$$A \mapsto P_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\{w \in \Omega / X(w) \in A\}}_{E \in \mathcal{A}}\right)$$

*prop: P_X est une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

démonstration: (i) $P_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}\left(\{w \in \Omega / X(w) = \emptyset\}\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car \mathbb{P} est une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) .

(ii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ sont des événements 2 à 2 disjoints de E

$$\begin{aligned} P_X\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} X^{-1}(A_n)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} \{w \in \Omega / X(w) \in A_n\}\right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}\left(\{w \in \Omega / X(w) \in A_n\}\right) \text{ car les } (A_n)_{n \geq 0} \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n)) \text{ car } \mathbb{P} \text{ est une probabilité sur } (\Omega, \mathcal{A}) \\ &= \sum_{n \geq 0} P_X(A_n) \end{aligned}$$

*remarque: Étant donné que E est fini ou infini dénombrable, la loi de X est donnée à partir de chaque élément de E :

Soit $k \in E$, $P(X=k) = \dots$

*ex: $P(X=1) = P(X=2) = P(X=3) = P(X=4) = P(X=5) = P(X=6) = \frac{1}{6}$

défini la loi de X à partir de tous les éléments de $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

III) Fonction de répartition d'un v.a.d.

* déf: c'est l'application $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$
 $x \mapsto P(X \leq x)$

* prop: ① F_X est croissante

$$\text{④ soit } y > x, F_X(y) - F_X(x) = P_X([x; y]) = P(X^{-1}([x; y]))$$

② F_X est continue à droite

$$\text{③ } \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$$

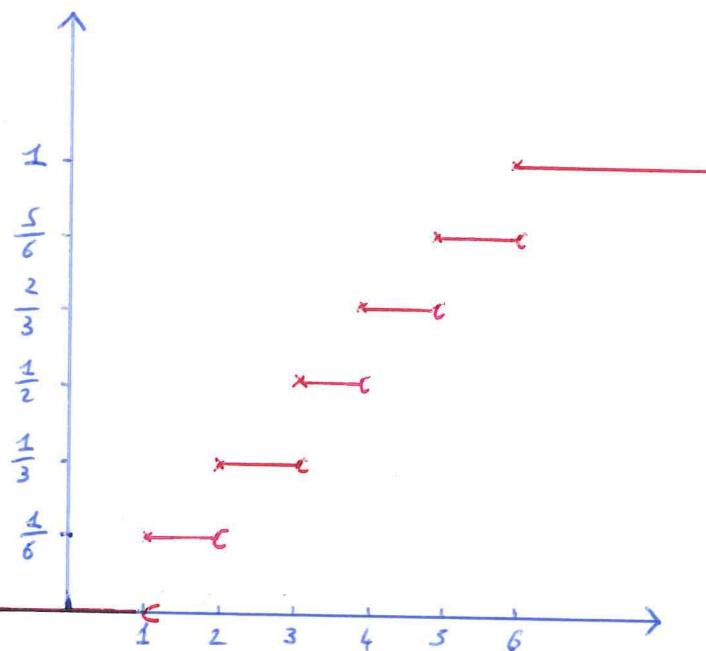
démon: ① soit x et y tels que: $y > x$, on a: $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$

$$\text{donc: } P(\{X \leq x\}) \leq P(\{X \leq y\})$$

$$\Rightarrow F_X(x) \leq F_Y(y)$$

* exc: $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & \text{si } x \in [1; 2[\\ \frac{1}{3} & \text{si } x \in [2; 3[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [3; 4[\\ \frac{2}{3} & \text{si } x \in [4; 5[\\ \frac{5}{6} & \text{si } x \in [5; 6[\\ 1 & \text{si } x \geq 6 \end{cases}$$



IV) espérance d'une v.a.d:

* déf: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}(X=x)$

* interprétation: C'est la valeur qu'on attend à trouver si on répète 1 nombre important de fois l'expérience et que l'on calcule la moyenne des résultats.

* prop: l'espérance est une opération linéaire: Soient X et Y , 2 v.a.d et $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[aX+Y] = a \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

démon: $X: \Omega \rightarrow E$ avec E et F finis ou infinis dénombrables
 $Y: \Omega \rightarrow F$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[aX+Y] &= \sum_{(x,y) \in E \times F} (ax+y) \mathbb{P}(aX+Y=ax+y) \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} (ax+y) \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} [ax \mathbb{P}(X=x, Y=y) + y \mathbb{P}(X=x, Y=y)] \\ &= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} ax \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{y \in F} \sum_{x \in E} y \mathbb{P}(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{x \in E} ax \mathbb{P}(X=x) + \sum_{y \in F} y \mathbb{P}(Y=y) = a \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

* ex: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \llbracket 1;6 \rrbracket} x \cdot \mathbb{P}[X=x] = \frac{1}{6} \sum_{x \in \llbracket 1;6 \rrbracket} x = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

V) variance d'une v.a.d.:

* déf: $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

* prop: ① formule de König: $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ à UTILISER!

② $\mathbb{V}[aX] = a^2 \mathbb{V}[X]$ pour $a \in \mathbb{R}$

démon: ① $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2 - 2X \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$
 $= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

② $\mathbb{V}[aX] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2$
 $= \mathbb{E}[a^2 X^2] - (a \mathbb{E}[X])^2 = a^2 \mathbb{E}[X^2] - a^2 \mathbb{E}[X]^2 = a^2 \mathbb{V}[X]$

* ex: $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in \llbracket 1;6 \rrbracket} x^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 91 = 15,67 \Rightarrow \mathbb{V}[X] = 15,67 + (3,5)^2 = 3,42$

* autre définition: l'écart-type: $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$; Dans notre exemple: $\sigma_X = 3,85$

* interprétation: si $\sigma_x < \sigma_y$

Les valeurs prises par X sont moins dispersées (on peut dire aussi plus homogènes) que celles prises par Y .

VII) fraction d'1 v.a.d.:

* prop: Soit X 1 v.a.d. de \mathcal{R} sur E et f , 1 application définie sur E à valeur dans F , 2 ensembles finis ou infinis dénombrables alors $Y = f(X)$ est 1 v.a.d. de \mathcal{R} sur F

démo: Soit $A \in \mathcal{P}(F)$, $Y^{-1}(A) = \{w \in \mathcal{R} / Y(w) \in A\} = \{w \in \mathcal{R} / f(X(w)) \in A\}$

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que: $B = \{y \in E / f(y) \in A\}$

on a donc: $Y^{-1}(A) = \{w \in \mathcal{R} / X(w) \in B\} = X^{-1}(B)$

or: $B \in \mathcal{P}(E)$ et X est mesurable de \mathcal{R} sur E

donc: $X^{-1}(B) \in \mathcal{R}$

donc: Y est mesurable de \mathcal{R} sur F

Ex + problème 3 + problème 2