

INTEGRALES DE RIEMANN

I) Les fonctions étudiées :

On calcule l'intégrale de Riemann que pour les fonctions continues ou continues par morceaux.

* déf d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle $[a; b]$:

f est continue par morceaux sur $[a; b]$ si il existe n pts (x_1, \dots, x_n) t.q.:

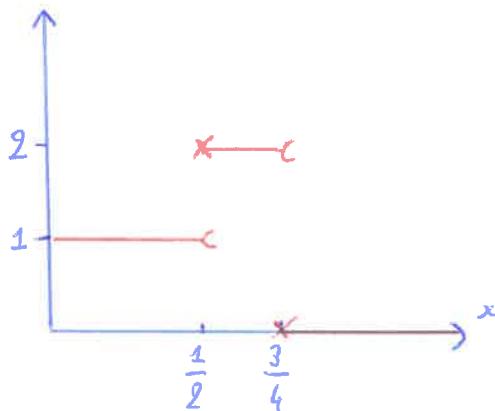
$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in [a; b]$$

$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, la fonction f est continue sur $[x_i; x_{i+1}]$

et admet 1 limite à droite en x_i et 1 limite à gauche en x_{i+1}

ex: $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & [0; \frac{1}{2}[\\ 2 & [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}[\end{cases}$$

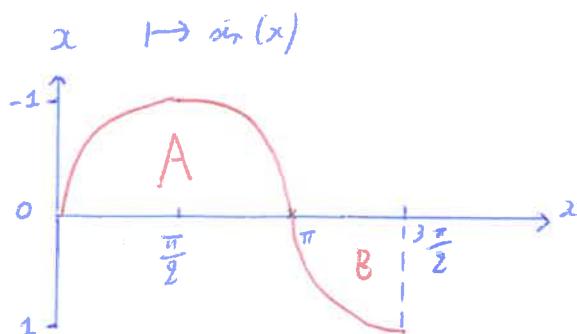


II) Objectif: calculer l'aire algébrique:

l'intégrale de Riemann de f sur $[a; b]$, notée $\int_a^b f(t) dt$

est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

ex: $f: [0; \frac{3\pi}{2}] \rightarrow [-1; 1]$



$$\text{aire} = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t) dt = A - B$$

III) propriétés des intégrales:

① linéarité: Si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a; b]$

$$\text{alors } \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

② relation de Charles: Si f est continue (par morceaux) sur $[a; b]$

$$\text{alors: } \forall c \in]a; b[, \int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

(3) inégalités et intégrales:

* Th: Si f est continue (par morceaux) sur $[a; b]$

$$\text{et } \forall x \in [a; b], f(x) \geq 0 \text{ alors } \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

* Th: Si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a; b]$

$$\text{et } \forall x \in [a; b], f(x) \leq g(x) \text{ alors: } \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

* Th: Si f est continue sur $[a; b]$

$$\textcircled{1} \text{ si } \forall x \in [a; b], f(x) > 0 \text{ alors } \int_a^b f(t) dt > 0$$

$$\textcircled{2} \text{ si } \forall x \in [a; b], f(x) \geq 0 \text{ et } \int_a^b f(t) dt = 0 \text{ alors: } \forall x \in [a; b], f(x) = 0$$

* Th: Si f est continue (par morceaux) sur $[a; b]$

$$\text{alors: } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

* inégalité de Cauchy-Schwarz: Si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a; b]$

$$\text{alors: } \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(3)

IV) Valeurs de l'intégrale

Soit I , un intervalle de \mathbb{R} et f une fonction continue (par morceaux) sur I

① si $I = [a; b]$ alors: $\int_a^b f(t) dt$ converge

② si $I =]a; b]$ et f a 1 limite finie en a

alors: $\int_a^b f(t) dt$ converge

*ex: $I =]0; 1]$ et $f:]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$$

or a: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

donc: $\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}} dx$ converge

③ si $I = [a; b[$ et f a 1 limite finie en b

alors: $\int_a^b f(t) dt$ converge

*ex: $I = [0; +\infty[$ et $f: [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{-x}$$

or a: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$

donc: $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge

④ si $I =]a; b[$ et f admet 1 limite en a et en b alors: $\int_a^b f(t) dt$ converge

*ex: $I =]-\infty; +\infty[$ et $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

or a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

donc: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge

renoncés: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x$

n'a pas de limite finie en $-\infty$ et en $+\infty$

néanmoins: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dx$ converge.

V) Primitives:

① déf: Soit f une fonction définie sur un intervalle I

F est une primitive de f sur I si ① F est dérivable sur I

$$\textcircled{2} \forall x \in I, F'(x) = f(x)$$

② Comment calculer une primitive?

* Th: Soit f une fonction continue sur un intervalle I

1) f admet au moins une primitive sur I

2) $\forall a \in I$, la fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I

$$x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

3) toute primitive de f s'écrit $F(x) + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

4) En particulier, F est la seule primitive de f qui s'annule en a .

③ Th fondamental de l'analyse:

Si $f \in \mathcal{C}([a; b])$ et F est une primitive de f

$$\text{alors: } \int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

④ la liste des primitives usuelles est donnée en annexe

III) intégration par parties:

Th: Si u et v sont $\Psi^1([a; b])$

$$\text{alors: } \int_a^b u'(x)v(x)dx = [uv]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

* Ex: $\int_0^1 xe^x dx$

on intègre par parties en posant:

$$u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$$

$$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$$

$$\text{on obtient: } \int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_{x=0}^{x=1} = e - (e-1) = 1$$

IV) changement de variable:

Th: Soit $y \in \Psi^1([a; b])$ et f continue sur $\mathcal{G}([a; b])$

$$\text{alors: } \int_a^b f(y(t)) y'(t) dt$$

* Ex: $\int_0^X \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int_0^X \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} dx \quad [X \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0]$

on pose le changement de variable: $t = \frac{x}{a}$ donc: $x = at$ et $dx = adt$

quand x varie de 0 à X , t varie de 0 à $\frac{X}{a}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} \int_0^X \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1} dx &= \frac{1}{a^2} \int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{t^2+1} \cdot a dt = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= \frac{1}{a} \left[\arctan(t) \right]_{t=0}^{t=\frac{X}{a}} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{X}{a}\right) \end{aligned}$$

Ex particulier $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{1}{x^2+a^2} dx = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{X}{a}\right)$

$$= \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{2}$$