# Exercices Matrices



## ex 1 :

pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1°) montrer que $A(\theta)$ est inversible

2) calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) Calculer $(A(\theta))^{-1}$

## ex 2 :

Soient $A$ et $B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(AX) = tr(BX)$

Montrer que $A = B$

## ex 3 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

On suppose $tr(A^tA) = 0$.

Montrer que $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

## ex 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^3 - A$

2) En déduire que $A$ est inversible et déterminer $A^{-1}$

## ex 5 : (oral 2019)

Soit $X$ 1 v.a. de loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$

$Y$ 1 v.a. de même loi que $X$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}$

Déterminer la loi de $Z = \dim(\operatorname{Ker} A)$

ex 6 : (oral 2019)

Soit $E$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables

$E_n$ l'espace des fonctions $e_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$ avec $i \in [\![0;n]\!]$

Soient : $I_n : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$f \longmapsto g$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x+1) - f(x)$

et $\Delta_n : E \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$f \longmapsto f'$

1) Montrer que $(e_i)_{i=0,\dots,n}$ est 1 base de $E_n$

2) Montrer que $E_n$ est stable par $I_n$ et $\Delta_n$

3) Montrer que $I_n$ et $\Delta_n$ sont des applications linéaires

4) Déterminer $A$ la matrice représentative de $I_3$ dans la base $(e_i)_{i=0,\dots,3}$

" $F$ " $\Delta_3$ "

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(I_3)$, $\mathrm{Im}(I_3)$, $\mathrm{Ker}(\Delta_3)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_3)$

6) Déterminer $A_n$ la matrice représentative de $I_n$ dans la base $(e_i)_{i=0,\dots,n}$

" $F_n$ " $\Delta_n$ "

7) Déterminer $\mathrm{Ker}(I_n)$, $\mathrm{Im}(I_n)$, $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_n)$

ex 7 : (oral 2018)

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(M) = AM$

1) Donner 1 base de $\mathrm{Ker} f$

2) $f$ est-elle surjective ?

3) Donner 1 base de $\mathrm{Im} f$

4) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, peut on l'écrire comme la somme d'1 unique élément de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'1 unique élément de $\mathrm{Im}(f)$

5)

a) Montrer que toute valeur propre de $A$ est valeur propre de $f$

b) Calculer les valeurs propres de $f$.