MATRICES

I) Les matrices :

1) Qu'est-ce que c'est ?

- c'est 1 tableau de m lignes et n colonnes

$$
\begin{array}{cc}
 & n \\
m & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}
\end{array}
$$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ coefficients de A

⚠ ils seront toujours notés a_{ij} et pas A_{ij}

- on note $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de m lignes et n colonnes dont les coefficients sont réels.
- si $m=n$ alors on parle de matrices carrées de taille n et on note $M_n(\mathbb{R})$

2) A quoi ça sert ?

- c'est 1 autre manière de représenter 1 application linéaire.

ex (concret) : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

On dit que A est la matrice représentative de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ muni de la base $(e_j)_{j=1,2,3}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(v_i)_{i=1,2}$

espaces vectoriels

si $\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{e_j}$, $f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}_{v_i} = \underline{(x_1 + 2x_2 + 3x_3)v_1} + \underline{(4x_1 + 5x_2 + 6x_3)v_2}$

$$\boxed{f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i}$$ (voir multiplication d'1 vecteur par une matrice)

1 les colonnes correspondent aux images par f des vecteurs $(e_j)_{j=1,2,3}$ dans la base $(v_i)_{i=1,2}$

$f(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}_{v_i} = v_1 + 4v_2$

$f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}_{v_i} = 2v_1 + 5v_2$

$f(e_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}_{v_i} = 3v_1 + 6v_2$

$$\boxed{\forall j \in [\![1;n]\!],\ f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i}$$

2) En général les bases $(e_i)_{i=1,2,3}$ et $(v_i)_{i=1,2}$ sont les bases canoniques

$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$; $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Néanmoins, si je prends B comme matrice représentative de f de $\mathbb{R}^3$ muni de la base $(e'_j)_{j=1,2,3}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(v_i)_{i=1,2}$

avec $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_2$, $e'_3 = -e_3$

alors $B = \begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\4 & 5 & -6\end{pmatrix}$ (v matrices de changement de base)

$f(e'_1)$ $f(e'_2)$ $f(e'_3)$

La matrice dépend donc des bases choisies.

3) rappels concernant l'application linéaire f :

a) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(2;5);(1;4);(3;6)\}$

- les 3 vecteurs forment 1 famille génératrice de Im f
- Néanmoins, ils ne constituent pas 1 base de Im f

car : $\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ donc ils ne sont pas linéairement indépendants.

- Les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ sont libres et générateurs de Im f

Ils constituent donc 1 base de Im f

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{(1;4);(3;6)\}$

Etant donné que $\dim(\operatorname{Im} f) = 2$ et $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ on en déduit : $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$ donc f est surjective

b) $\operatorname{Ker} f = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 0\}$

soit $x \in \operatorname{Ker} f$, $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0\\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0\\ 3x_2 + 6x_3 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0\\ x_2 = \frac{-6}{3}x_3 = -2x_3\\ x_3 = x_3\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(-5x - 2x_3 - 6x_3)\\ x_2 = -2x_3\\ x_3 = x_3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}(4x_3) = x_3\\ x_2 = -2x_3\\ x_3 = x_3\end{cases}$

donc : $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}\{(1;-2;1)\} \neq (0;0;0)$ ou $O_{\mathbb{R}^3}$

donc : f n'est pas injective

II) Opération sur les matrices :

1) addition / soustraction :

- Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$,
  alors $C = A \pm B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

  et $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ avec $i \in [\![1;m]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$

- Si A est la matrice représentative de f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

  et B ... g

  alors $A \pm B$ ... $f \pm g$

2) multiplication par un scalaire :

- Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $C = \lambda A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$

  et : $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ avec $i \in [\![1;m]\!]$ et $j \in [\![1;n]\!]$

- λA est la matrice représentative de λf de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$

prop : $M_{m,n}(\mathbb{R})$ est 1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m \times n$

3) transposition d'1 matrice :

Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$.

alors $A^t \in M_{n,m}(\mathbb{R})$

et $\forall i \in [\![1;m]\!], \forall j \in [\![1;n]\!], \ ({}^tA)_{ji} = a_{ij}$

ex :

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

4) multiplication d'un vecteur par une matrice :

- Soit $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $x \in \mathbb{R}^n$

on pose : $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Ax \in \mathbb{R}^m$

$$\text{et : } Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) v_i$$

- ex :

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_2 + 3x_3)\, v_1 + (4x_1 + 5x_2 + 6x_3)\, v_2$$

- $\boxed{Ax = f(x) \text{ c'est l'image par } f \text{ du vecteur } x.}$ $\Rightarrow A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y)$

5) multiplication de 2 matrices :

- Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

alors $C = AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$

et $\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix}}_{A_{i\cdot}} \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}}_{B_{\cdot j}}$$

- signification : Si A est la matrice représentative de l'application linéaire f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ et B, la matrice représentative de g application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ munis de la base canonique.

alors $C = AB$ est la matrice de l'application linéaire $f \circ g$ de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

$$\underbrace{\mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m}_{\xrightarrow[f \circ g]{}}$$

- ex : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a pour matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donc : $f \circ g : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a pour matrice $C = AB$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 13 & 12 & 22 \end{pmatrix}$$

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4,\ f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 \\ 4x_1 + 13x_2 + 12x_3 + 22x_4 \end{pmatrix}$$

prop:

* $A(B+C) = AB + AC$
* $(A+B)C = AC + BC$
* $AB \neq BA$ ⚠

ex: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

* $\forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$

6) déterminant d'1 matrice :

* déf : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, 1 matrice carrée

⓪ si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$

① si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

② si $n \geq 3$, le déterminant peut se calculer de plusieurs manières.

→ suivant la ligne $i \in [\![1;n]\!]$, $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik})$

→ suivant la colonne $j \in [\![1;n]\!]$, $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{kj} \det(A_{kj})$

A_{ij} est la matrice A privée de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne, c'est 1 matrice carrée de $(n-1)$ lignes et $(n-1)$ colonnes

*ex 1 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ matrice triangulaire supérieure

$\det(A) = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 5 \times (8 \times 10 - 0) = 400$

(suivant la colonne 1) suivant la colonne 2

→ remarques :

- c'est le produit des éléments diagonaux
- si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ alors $\det(B) = \det(A)$

Ex 2 :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2.(-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1.(-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\,(6+3) + (-2+2) = 2\times 9 = 18$$

prop du déterminant :

* Si 2 lignes (ou 2 colonnes) de la matrice sont identiques alors le déterminant est nul
* On peut ajouter à 1 ligne (ou 1 colonne) 1 multiple d'1 autre ligne (ou d'1 autre colonne) sans changer la valeur du déterminant

ex : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \; (L_3 - L_1) \quad = 12$$

* Si on multiplie tous les termes d'1 ligne (ou d'1 colonne) par k, le déterminant est multiplié par k.
* Si 1 ligne (ou 1 colonne) de la matrice est nulle alors le déterminant est nul.
* $\det(A) = \det(A) \cdot \det(B)$
* $\det(A^t) = \det(A)$
* $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

7) inversion d'1 matrice :

déf : $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible $\Leftrightarrow \exists B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que : $AB = BA = I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

B est alors notée A^{-1}

prop : A est inversible

$\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ l'endomorphisme f associé à A est inversible

$\Leftrightarrow f^{-1}$ a pour matrice A^{-1}

$\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Im} f) = n \Leftrightarrow f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \Leftrightarrow f$ est surjective

$\Leftrightarrow$ les colonnes de A sont linéairement indépendantes

$\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow f$ est injective

$\Leftrightarrow Ax = 0$ a pour solution $0_{\mathbb{R}^n}$

prop : Si A est inversible alors : $(A^{-1})^{-1} = A$

Si A et B sont inversibles alors : (AB) est inversible et : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

*** rq:** $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (\text{com } A)^t$

avec $(\text{com } A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$

*** ex:**

pr $n=2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 4 - 6 = -2$

$$A^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} (-1)^2 . 4 & (-1)^3 . 3 \\ (-1)^3 . 2 & (-1)^4 . 1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

pour $n=3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & F \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = (-1)^2 . a . \begin{vmatrix} e & F \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^3 . b \begin{vmatrix} d & F \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^4 . c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$= a(ei - hF) - b(di - Fg) + c(dh - eg) = aei - ahF - bdi + bFg + cdh - ceg$$

$$A^{-1} = \frac{1}{aei - ahF - bdi + bFg + cdh - ceg} \begin{pmatrix} ei - hF & -(di - Fg) & dh - eg \\ -(bi - ch) & ai - cg & -(ah - bg) \\ bF - ce & -(aF - cd) & ae - bd \end{pmatrix}^t =$$

$$= \frac{1}{aei - ahF - bdi + bFg + cdh - ceg} \begin{pmatrix} ei - hF & ch - bi & bF - ce \\ Fg - di & ai - cg & cd - aF \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

III) Les systèmes d'équation linéaire :

déf : soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$, on veut résoudre le système de m équations à n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = y_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = y_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = y_m \end{cases}$$

1) si $m = n$, on parle de système de Cramer :

le système peut s'écrire $y = Ax$

- si A est inversible alors on a 1 solution unique $x = A^{-1}y$

rq : formule de Cramer :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$ avec A_i est la matrice A où on a remplacé la colonne $A_{\cdot i}$ par le vecteur y

- si A n'est pas inversible alors on applique la méthode du pivot de Gauss.

2) si $m \neq n$: on applique la méthode du pivot de Gauss :

IV) Le changement de base :

pb : Soit f 1 endomorphisme sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice associée dans la base canonique est : A

On pose : pour $j \in [\![1;n]\!]$, $v_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, e_i$

de sorte que $(v_1, \dots, v_n)$ soit 1 autre base de $\mathbb{R}^n$

On souhaite connaître D la matrice associée à f dans la base $(v_i)_{i=1,\dots,n}$

solution : On pose
$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & & p_{nn} \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & & v_n \end{array}$$
qui est la matrice de changement de base de $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$ à $\mathcal{B}' = (v_i)_{i=1,\dots,n}$

rq : P^{-1} est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$

$D = P^{-1}AP$ est la matrice associée à f dans la base $(v_i)_{i=1,\dots,n}$

* Ex :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Montrer que A est inversible et calculer son inverse.

2) Montrer que $\mathcal{B}' = \{(1;0;-\sqrt{2}-1), (0;1;0), (1,0,\sqrt{2}-1)\}$ est 1 base de $\mathbb{R}^3$

3) calculer D la matrice associée à l'endomorphisme de A dans la base $\mathcal{B}'$.

V) Les matrices particulières :

*** matrice symétrique :** $A \in M_n(\mathbb{R})$ est symétrique si : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $a_{ij} = a_{ji}$

ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

*** matrice positive :** $A \in M_n(\mathbb{R})$ et symétrique est positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, ${}^t x A x \geqslant 0$

ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ soit $x \in \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$

$= (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2$

*** matrice définie positive :** $A \in M_n(\mathbb{R})$ et symétrique est définie positive si : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, ${}^t x A x > 0$