

Ex 1:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$a: \frac{-1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc d'après th des gendarmes: } \frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$a: \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{donc: } e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e$$

$$d'apr: \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n^n} \leq \frac{n^{n-2} \cdot 2}{n^n}$$

$$\text{donc: } 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$$

$$a: \frac{2}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc: } \frac{n!}{n^n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N}, n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \ln(n)}$$

$$a: \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc: } e^{\frac{2 \ln n}{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$$

$$5) \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\text{donc: } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$6) \forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$a: \frac{-1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc: } \frac{(-1)^n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{d'après le théorème des gendarmes}$$

ex 3:

2

① On pose: $U_n = \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=2}^n A_k \right)$

soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+2} = \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=2}^{n+2} A_k \right) \supseteq \mathbb{P} \left(\bigcup_{k=2}^n A_k \right)$ car: $\bigcup_{k=2}^{n+2} A_k \supset \bigcup_{k=2}^n A_k$

donc: $U_{n+2} \geq U_n$

$\Rightarrow (U_n)_n$ est 1 suite croissante

or: $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq 1$

donc: $(U_n)_n$ est croissante et majorée alors elle converge par 1

② Soit $v_n = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right)$

soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^{n+2} A_k \right) \leq \mathbb{P} \left(\bigcap_{k=1}^n A_k \right)$ car: $\bigcap_{k=1}^{n+2} A_k \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$

donc: $v_{n+2} \leq v_n$

$\Rightarrow (v_n)_n$ est 1 suite décroissante

or: $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geq 0$

donc: $(v_n)_n$ est décroissante et minorée donc: elle converge par 0

ex 4:

1) Si $(u_n)_n$ est bornée

alors: $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n \leq M$

soit $n \in \mathbb{N}$,
 $(n+1)m \leq u_0 + u_1 + \dots + u_n \leq (n+1)M$

$\Rightarrow m \leq \frac{\sum_{k=0}^n u_k}{n+1} \leq M$

$\Rightarrow m \leq v_n \leq M$

donc: $(v_n)_n$ est bornée.

2)
 * Si $(u_n)_n$ est bornée alors elle est majorée.

Étant donné que $(u_n)_n$ est croissante et majorée alors elle converge.

* $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} - v_n = \frac{u_0 + \dots + u_{n+2}}{n+2} - \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1} = \frac{(n+1)(u_0 + \dots + u_{n+2}) - (n+2)(u_0 + \dots + u_n)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[(n+1)u_{n+2} - u_0 - \dots - u_n \right] = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[\underbrace{(u_{n+2} - u_0)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{n+2} - u_1)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(u_{n+2} - u_n)}_{\geq 0} \right]$$

≥ 0 car $(u_n)_n$ croissante

$$\geq 0$$

donc $(v_n)_n$ est croissante

* Étant donné que $(u_n)_n$ est bornée alors $(v_n)_n$ est bornée et majorée

* $(v_n)_n$ est croissante et majorée donc elle converge.