(c)

1) Le résultat du lancer du dé (X) n'influence pas la consommation de drogues illicites du lanceur (Z).
De même, la consommation de drogue n'influence pas le résultat du lancer du dé.
donc aucune des 2 variables aléatoires discrètes n'influence l'autre.

on en déduit que X et Z sont indépendantes.

2) $\mathbb{P}[Y=1, Z=1] = \mathbb{P}[Z=1, X\leq 4] = \mathbb{P}[Z=1]\cdot\mathbb{P}[X\leq 4] = p\cdot\frac{4}{6} = \frac{2p}{3}$

car X et Z sont indépendantes

3) $\mathbb{P}[Y=0, Z=0] = \mathbb{P}[Z=0, X\leq 4] = \mathbb{P}[Z=0]\cdot\mathbb{P}[X\leq 4] = (1-p)\cdot\frac{4}{6} = \frac{2(1-p)}{3} = \frac{2-2p}{3}$

(d)

1) $\mathbb{P}[Y=0, Z=1] = \mathbb{P}[Z=1, X>4] = \mathbb{P}[Z=1]\cdot\mathbb{P}[X>4] = p\cdot\frac{2}{6} = \frac{p}{3}$

2) $\mathbb{P}[Y=0] = \mathbb{P}[Y=0, Z=1] + \mathbb{P}[Y=0, Z=0] = \frac{2-p}{3}$

$\mathbb{P}[Y=1] = 1 - \mathbb{P}[Y=0] = 1 - \frac{2-p}{3} = \frac{1+p}{3}$

Y suit donc 1 loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1+p}{3}$

(e) On pose N, le nb de personnes sur lesquelles l'étude a été réalisée et : $(y_i)_{i=1,\dots,N}$ leurs réponses à la question sur leur consommation de drogues.
Étant donné que l'étude est réalisée sur 1 grand nombre de personnes, on peut estimer $\mathbb{E}[Y]$ par la moyenne des y_i observés.
or : $\mathbb{E}[Y] = \frac{1+p}{3}$

donc : $\frac{\sum_{i=1}^{N} y_i}{N}$ est 1 estimation de $\frac{1+p}{3}$

(c)

1) $\begin{cases} r_1 = \lambda + \mu(p-1) \\ r_2 = \lambda + \mu(p-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \lambda + \mu(p-1) \quad (L_1) \\ p^2 - p + 1 = \lambda + \mu(p-1)^2 \,(L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu(p-1)^2 = p^2 - p + 1 \quad (L_2) \\ \mu\left[(p-1)^2 - (p-1)\right] = p^2 - 2p + 1 \,(L_2 - L_1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu(p-1)^2 = p^2 - p + 1 \\ \mu(p-1)\left[(p-1) - 1\right] = (p-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu(p-1)^2 = p^2 - p + 1 \\ \mu = \dfrac{p-1}{p-2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = p^2 - p + 1 - \mu(p-1)^2 \\ \mu = \dfrac{p-1}{p-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = p^2 - p + 1 - \dfrac{(p-1)^3}{p-2} = \dfrac{(p-2)(p^2-p+1) - (p-1)^3}{p-2} = \dfrac{p^3 - 3p^2 + 3p - 2 - (p^3 - 3p^2 + 3p - 1)}{p-2} \\ \mu = \dfrac{p-1}{p-2} \end{cases}$

on en déduit $\lambda = \dfrac{-1}{p-2}$

donc : $r_n = \dfrac{-1}{p-2} + \dfrac{p-1}{p-2}(p-1)^n = \dfrac{1}{2-p} + \dfrac{(1-p)^{n+1}}{2-p} = \dfrac{1 + (1-p)^{n+1}}{2-p}$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = \dfrac{1}{2-p}$ car $(1-p)^{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ avec $|1-p| < 1$

d'où : $r_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\mathbb{E}[T_1]}$

---

ex 7 :

$Z : \Omega \to \{0;1\}$ avec $\mathbb{P}[Z=1] = p$

$X : \Omega \to [\![1;6]\!]$

$Y : \Omega \to \{0;1\}$

(a) * Le dé n'étant pas truqué, les résultats possibles du lancer sont équiprobables.

on en déduit : que X suit 1 loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$

* Z suit 1 loi de Bernoulli de paramètre p.

(b) On veut montrer que : $\{Y=1, Z=1\} = \{Z=1, X \leq 4\}$

* montrer que : $\{Y=1, Z=1\} \subset \{Z=1, X \leq 4\}$ ① et $\{Z=1, X \leq 4\} \subset \{Y=1, Z=1\}$ ②

① Si 1 personne consomme des drogues et qu'elle répond "oui", sa réponse est vraie, ce qui implique que le résultat du lancer est ≤ 4.

② Si 1 personne consomme des drogues et que le résultat du lancer est ≤ 4, elle dit la vérité donc elle répondra "oui".

ex 9 : $I = 20$ cartouches

N jours d'utilisation.

pour $i \in [\![1;20]\!]$, $T_i : \Omega \to \{1;2\}$

avec $\mathbb{P}[T_i = 1] = p$

et : $\mathbb{P}[T_i = 2] = 1-p$

soit $n \in [\![1;N]\!]$, $R_{i,n} = 1$ si i est remplacée le jour n

0 sinon

(a)

1) $\mathbb{E}[T_i] = 1 \cdot \mathbb{P}[T_i = 1] + 2 \cdot \mathbb{P}[T_i = 2] = 2 - p$

2) $r_1 = \mathbb{E}[R_{i,1}] = 1 \cdot \mathbb{P}[R_{i,1} = 1] = \mathbb{P}[T_i = 1] = p$

$r_2 = \mathbb{E}[R_{i,2}] = \mathbb{P}[R_{i,2} = 1] = \mathbb{P}[R_{i,2} = 1, R_{i,1} = 1] + \mathbb{P}[R_{i,2} = 1, R_{i,1} = 0]$

$= \mathbb{P}[R_{i,2} = 1 \setminus R_{i,1} = 1] \cdot \mathbb{P}[R_{i,1} = 1] + \mathbb{P}[R_{i,2} = 1 \setminus R_{i,1} = 0] \cdot \mathbb{P}[R_{i,1} = 0]$

$= \mathbb{P}[T_i = 1] \cdot p + 1 \cdot (1-p)$

$= p^2 + 1 - p$

(b) soit $n \in [\![1;N]\!]$

1) $\mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1] = \mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1, R_{i,n+1} = 1] + \mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1, R_{i,n+1} = 0]$

$= \mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1 \setminus R_{i,n+1} = 1] \cdot \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 1] + \underbrace{\mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1 \setminus R_{i,n+1} = 0]}_{1} \cdot \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0]$

$= \mathbb{P}[T_i = 1] \cdot \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 1] + 1 \cdot \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0]$

$= p \cdot \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 1] + \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0]$

or : $\mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0] = \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0, R_{i,n} = 1] + \underbrace{\mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0, R_{i,n} = 0]}_{0}$

$= \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 0 \setminus R_{i,n} = 1] \cdot \mathbb{P}[R_{i,n} = 1] + 0$

$= \mathbb{P}[T_i = 2] \cdot \mathbb{P}[R_{i,n} = 1] = (1-p)\, \mathbb{P}[R_{i,n} = 1]$

donc : $\mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1] = p \cdot \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 1] + (1-p) \cdot \mathbb{P}[R_{i,n} = 1]$

2) $r_{n+2} = \mathbb{E}[R_{i,n+2}] = \mathbb{P}[R_{i,n+2} = 1]$

$r_{n+1} = \mathbb{E}[R_{i,n+1}] = \mathbb{P}[R_{i,n+1} = 1]$

$r_n = \mathbb{E}[R_{i,n}] = \mathbb{P}[R_{i,n} = 1]$

on a déduit : $r_{n+2} = p \cdot r_{n+1} + (1-p)\, r_n$

$\mathbb{P}[A=k, B=l] = \mathbb{P}\left[\sum_{i=1}^{12} X_i = k\right] \cdot \mathbb{P}\left[\sum_{i=13}^{24} X_i = l\right] = \mathbb{P}[A=k] \times \mathbb{P}[B=l]$

(d) $\mathbb{P}[A=5 \mid J=5] = \dfrac{\mathbb{P}[A=5, J=5]}{\mathbb{P}[J=5]} = \dfrac{\mathbb{P}[A=5, A+B=5]}{\mathbb{P}[J=5]} = \dfrac{\mathbb{P}[A=5, B=0]}{\mathbb{P}[J=5]} = \dfrac{\mathbb{P}[A=5] \cdot \mathbb{P}[B=0]}{\mathbb{P}[J=5]}$

$$= \frac{\cancel{e^{-12\ln 2}} \frac{(12\ln 2)^5}{\cancel{5!}} \cdot \cancel{e^{-12\ln 2}}}{\cancel{e^{-24\ln 2}} \frac{(24\ln 2)^5}{\cancel{5!}}}$$

$$= \frac{1}{2^5}$$

(e) $Z : \Omega \longrightarrow [\![1;25]\!]$

1) soit $k \in [\![1;24]\!]$, $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[X_1 = 0, \dots, X_{k-1} = 0, X_k > 0] = \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}[X_i = 0] \cdot \mathbb{P}[X_k > 0]$

$$= \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \mathbb{P}[X_k = 0]\right)$$

$$= \frac{1}{2^k}$$

2) $\mathbb{P}[Z=25] = \mathbb{P}[X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_{24} = 0] = \prod_{i=1}^{24} \mathbb{P}[X_i = 0] = \dfrac{1}{2^{24}}$

(F) pour $i \in [\![1;24]\!]$

on pose : $Y_i = \mathbb{1}_{X_i = 0}$, elle suit 1 loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$

Soit Y, la variable aléatoire discrète correspondant au nombre total de fermes sans micro-cargue.

$$Y = \sum_{i=1}^{24} Y_i$$

étant donné que chaque Y_i est fonction de X_i et que les $(X_i)_{i=1,\dots,24}$ sont indépendantes, les $(Y_i)_{i=1-24}$ sont indépendantes.

Y suit 1 loi binomiale de paramètres 24 et $\frac{1}{2}$.

ex 5 :

(a) X et Y 2 v.a.d. indépendantes de loi de Poisson de paramètre λ

$X : \Omega \to \mathbb{N}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}$

$X+Y : \Omega \to \mathbb{N}$

soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[X+Y=n] = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}[X=l, Y=n-l] = \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}[X=l] \cdot \mathbb{P}[Y=n-l]$

$$= \sum_{l=0}^{n} e^{-\lambda} \frac{\lambda^l}{l!} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n-l}}{(n-l)!} = e^{-2\lambda} \sum_{l=0}^{n} \frac{\lambda^n}{l!(n-l)!}$$

$$= e^{-2\lambda} \lambda^n \cdot \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!(n-l)!}$$

or : formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!} a^l b^{n-l}$

pour $a=b=1$, on a : $2^n = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!(n-l)!} \Leftrightarrow \frac{2^n}{n!} = \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!(n-l)!}$

donc : $\mathbb{P}[X+Y=n] = e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^n}{n!}$

$X+Y \sim \mathcal{P}(2\lambda)$.

(b) $J = \sum_{i=1}^{24} X_i$ or $\forall i \in [\![1;24]\!]$, $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$

et les $(X_i)_{i=1,\dots,24}$ sont indépendants

on a déduit : $J \sim \mathcal{P}(24 \ln 2)$

(c) $A = \sum_{i=1}^{12} X_i$ avec $\forall i \in [\![1,12]\!]$, $X_i \sim \mathcal{P}(\ln 2)$ et $(X_i)_{i=1,\dots,12}$ indépendantes donc : $A \sim \mathcal{P}(12 \ln 2)$

$B = \sum_{i=13}^{24} X_i$ avec : $\forall i \in [\![13;24]\!]$, $X_i \sim \mathcal{P}(\ln 2)$ et $(X_i)_{i=13,\dots,24}$ indépendantes, donc : $B \sim \mathcal{P}(12 \ln 2)$

* A et B indépendantes ? $A : \Omega \to \mathbb{N}$, $B : \Omega \to \mathbb{N}$

$A+B : \Omega \to \mathbb{N}$

Soit $(k;l) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbb{P}[A=k, B=l] = \sum_{\substack{x_1+\dots+x_{12}=k \\ x_{13}+\dots+x_{24}=l}} \mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_{12} = x_{12}, X_{13} = x_{13}, \dots, X_{24} = x_{24}]$

$$= \sum_{\substack{x_1+\dots+x_{12}=k \\ x_{13}+\dots+x_{24}=l}} \mathbb{P}[X_1 = x_1] \times \dots \times \mathbb{P}[X_{12} = x_{12}] \times \mathbb{P}[X_{13} = x_{13}] \times \dots \times \mathbb{P}[X_{24} = x_{24}]$$

$$= \left(\sum_{x_1+\dots+x_{12}=k} \mathbb{P}[X_1 = x_1] \times \dots \times \mathbb{P}[X_{12} = x_{12}] \right) \cdot \left(\sum_{x_{13}+\dots+x_{24}=l} \mathbb{P}[X_{13} = x_{13}] \times \dots \times \mathbb{P}[X_{24} = x_{24}] \right)$$

4) On pose : $v_n = \mathbb{E}[A_n] - 3$ pour $n \geq 1$

on a donc : $\mathbb{E}[A_n] = v_n + 3$

or : $\mathbb{E}[A_{n+1}] - \frac{2}{3}\mathbb{E}[A_n] = 1 \iff v_{n+1} + 3 - \frac{2}{3}(v_n + 3) = 1$

$$\iff v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$$

$(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc 1 suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

donc : $v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{E}[A_n] = 3$

---

ex 4 :

(a) $X : \Omega \to \mathbb{N}^*$ et $Y : \Omega \to \mathbb{N}^*$

$X + Y : \Omega \to [\![2 ; +\infty[\![$

soit $n \geq 2$, $\mathbb{P}[X+Y=n] = \sum_{\ell=1}^{n-1} \underbrace{\mathbb{P}[X=\ell, Y=n-\ell]}_{\text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}}$

$$= \sum_{\ell=1}^{n-1} \mathbb{P}[X=\ell] \cdot \mathbb{P}[Y=n-\ell] = \sum_{\ell=1}^{n-1} p(1-p)^{\ell-1} \cdot p(1-p)^{n-\ell-1}$$

$$= p^2 (1-p)^{-2} \sum_{\ell=1}^{n-1} (1-p)^n = (n-1) \cdot p^2 \cdot (1-p)^{n-2}$$

(b) $\operatorname{corr}(X, X+Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X, X+Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\ \mathbb{V}[X+Y]}} = \dfrac{\mathbb{E}[X(X+Y)] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[X+Y]}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\ \mathbb{V}[X+Y]}}$

$$= \frac{\mathbb{E}[X^2 + XY] - \mathbb{E}[X] \cdot (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}(Y])}{\sqrt{\mathbb{V}(X]\ \mathbb{V}[X+Y]}}$$

$$= \frac{\mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\ \mathbb{V}[X+Y]}} = \frac{\mathbb{V}[X] + \operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]\ \mathbb{V}[X+Y]}}$$

$$= \left(\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{V}[X+Y]}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathbb{V}[X]}{\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\operatorname{cov}(X,Y)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathbb{V}[X]}{2\,\mathbb{V}[X]}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\operatorname{cov}(X,Y) = 0$ car X et Y sont indépendantes.

(d) $\mathbb{E}[A_{n+1}] = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \mathbb{P}[A_{n+1}=k] = \sum_{k=1}^{5} k \, \mathbb{P}[A_{n+1}=k] + 6 \cdot \mathbb{P}[A_{n+1}=6]$

$$= \mathbb{P}[A_n=5] + \sum_{k=1}^{5} k \, \frac{7-k}{6} \cdot \mathbb{P}[A_n=k-1] + \sum_{k=1}^{5} k \, \frac{k+1}{6} \cdot \mathbb{P}[A_n=k+1]$$

$$= \mathbb{P}[A_n=5] + \mathbb{P}[A_n=0] + 2 \cdot \frac{5}{6} \mathbb{P}[A_n=1] + 3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \mathbb{P}[A_n=2] + 4 \cdot \frac{3}{6} \cdot \mathbb{P}[A_n=3] + 5 \cdot \frac{2}{6} \mathbb{P}[A_n=4]$$

$$+ \frac{2}{6} \cdot \mathbb{P}[A_n=2] + 2 \cdot \frac{3}{6} \mathbb{P}[A_n=3] + 3 \cdot \frac{4}{6} \cdot \mathbb{P}[A_n=4] + 4 \cdot \frac{5}{6} \mathbb{P}[A_n=5] + 5 \cdot \mathbb{P}[A_n=6]$$

$$= \mathbb{P}[A_n=0] + \frac{5}{3} \mathbb{P}[A_n=1] + \frac{7}{3} \mathbb{P}[A_n=2] + 3 \, \mathbb{P}[A_n=3] + \frac{11}{3} \mathbb{P}[A_n=4] + \frac{13}{3} \mathbb{P}[A_n=5]$$
$$+ 5 \, \mathbb{P}[A_n=6]$$

et: $\frac{-2}{3} \mathbb{E}[A_n] = \frac{-2}{3} \sum_{k=1}^{6} k \, \mathbb{P}[A_n=k] = \frac{-2}{3} \mathbb{P}[A_n=1] - \frac{4}{3} \mathbb{P}[A_n=2] - \frac{6}{3} \cdot \mathbb{P}[A_n=3] - \frac{8}{3} \mathbb{P}[A_n=4]$

$$- \frac{10}{3} \mathbb{P}[A_n=5] - \frac{12}{3} \mathbb{P}[A_n=6]$$

donc: $\underline{\mathbb{E}[A_{n+1}] - \frac{2}{3} \mathbb{E}[A_n]} = \mathbb{P}[A_n=0] + \mathbb{P}[A_n=1] + \mathbb{P}[A_n=2] + \mathbb{P}[A_n=3] + \mathbb{P}[A_n=4] + \mathbb{P}[A_n=5]$

$$+ \mathbb{P}[A_n=6]$$

$$\underline{= 1}$$

ex 1 : ①

(a) Soit : U la v.a.d. correspondant à l'urne choisie

Bb au nombre de boules blanches tirées.

$Bb : \Omega \to \{0;1;2\}$

* loi de Bb :

$\mathbb{P}[Bb=0] = \mathbb{P}[Bb=0, U=1] + \mathbb{P}[Bb=0, U=2]$

$= \mathbb{P}[Bb=0 \backslash U=1].\mathbb{P}[U=1] + \mathbb{P}[Bb=0 \backslash U=2].\mathbb{P}[U=2]$

$= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$

$\mathbb{P}[Bb=2] = \mathbb{P}[Bb=2, U=1] + \mathbb{P}[Bb=2, U=2]$

$= \mathbb{P}[Bb=2 \backslash U=1].\mathbb{P}[U=1] + \mathbb{P}[Bb=2 \backslash U=2].\mathbb{P}[U=2]$

$= \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13}{32}$

$\mathbb{P}[Bb=1] = 1 - \mathbb{P}[Bb=0] - \mathbb{P}[Bb=2] = \frac{14}{32}$

(b) $\mathbb{P}[U=1 \backslash Bb=2] = \frac{\mathbb{P}[U=1, Bb=2]}{\mathbb{P}[Bb=2]} = \frac{\mathbb{P}[Bb=2 \backslash U=1].\mathbb{P}[U=1]}{\mathbb{P}[Bb=2]} = \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{32}} = \frac{4}{13}$

$\mathbb{P}[U=2 \backslash Bb=2] = \frac{\mathbb{P}[U=2, Bb=2]}{\mathbb{P}[Bb=2]} = \frac{\mathbb{P}[Bb=2 \backslash U=2].\mathbb{P}[U=2]}{\mathbb{P}[Bb=2]} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{32}} = \frac{9}{13}$

---

ex2 :

3) soit $n \geq 1$,

(a) $\mathbb{P}[A_{n+1}=0, \bigcup_{i=1}^{6} A_n=i] = \mathbb{P}[A_{n+1}=0, A_n=1] = \mathbb{P}[A_{n+1}=0 \backslash A_n=1].\mathbb{P}[A_n=1]$

$= \frac{1}{6} . \mathbb{P}[A_n=1]$

(b) $\mathbb{P}[A_{n+1}=6] = \mathbb{P}[A_{n+1}=6, \bigcup_{i=1}^{6} A_n=i] = \mathbb{P}[A_{n+1}=6, A_n=5] = \mathbb{P}[A_{n+1}=6 \backslash A_n=5].\mathbb{P}[A_n=5]$

$= \frac{1}{6} . \mathbb{P}[A_n=5]$

(c) $\mathbb{P}[A_{n+1}=k] = \mathbb{P}[A_{n+1}=k, \bigcup_{i=1}^{6} A_n=i] = \mathbb{P}[A_{n+1}=k, A_n=k-1] + \mathbb{P}[A_{n+1}=k, A_n=k+1]$

$= \mathbb{P}[A_{n+1}=k \backslash A_n=k-1].\mathbb{P}[A_n=k-1] + \mathbb{P}[A_{n+1}=k \backslash A_n=k+1].\mathbb{P}[A_n=k+1]$

$= \frac{6-(k-1)}{6} . \mathbb{P}[A_n=k-1] + \frac{k+1}{6} . \mathbb{P}[A_n=k+1]$