Exercice III (concours 2019) .... 5 pts

On s'intéresse à un bandit manchot (machine à sous) qui fonctionne de la manière suivante : il présente 3 écrans A, B et C. Lorsqu'on lance une partie, chacun des 3 écrans fait apparaître un symbole ($\star$,$\circ$, $\square$), au hasard. Les résultats des 3 écrans sont indépendants. La partie est gagnée si les 3 symboles obtenus sont les mêmes. On donne deux exemples de parties ci-dessous :

écran	A	B	C
	$\ast$	$\circ$	$\circ$

Une partie perdue

écran	A	B	C
	$\square$	$\square$	$\square$

Une partie gagnée

On définit les évènements G : "la partie est gagnée" et E : "la partie est perdue".

Partie A

1. Calculer la probabilité des événements G et E.
2. Gain du casino
   On suppose qu'un joueur doit payer 3 euros à chaque fois qu'il veut jouer. En cas de partie gagnée il remporte 15 euros.
   On suppose que le bandit manchot est utilisé 5000 fois dans une journée.
   (a) On note M_i la variable aléatoire qui représente le gain du casino à la i-ième partie, pour i entre 1 et 5000. Donner la loi des variables aléatoires M_i ainsi que leur espérance.
   (b) Quel est le gain moyen du casino sur une journée ?
3. Première partie gagnée
   Un joueur décide de miser jusqu'à gagner une partie. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties jouées pour gagner la première fois (y compris la première partie gagnée).
   (a) Donner la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, montrer que la probabilité que le joueur joue au plus i parties avant de gagner pour la première fois (toujours y compris la partie gagnée) est $1-\left(\frac{8}{9}\right)^i$.
   (c) Donner l'espérance et la variance de X (on ne demande pas de démonstration).

Partie B

On souhaite dorénavant prendre en compte dans le calcul des probabilités la possibilité que le bandit dysfonctionne. Lorsque c'est le cas, les écrans A et C affichent toujours le symbole $\star$, l'écran B continuant à afficher des résultats au hasard. On note D : "la machine dysfonctionne", et on pose $p = P(D)$. Le cas où le bandit manchot fonctionne normalement est donc décrit dans la partie A.

1. Calculer la probabilité conditionnelle des événements E et G sachant D : $P_D(E)$ et $P_D(G)$.
2. En déduire que la probabilité de E est $\frac{8-2p}{9}$.
3. Soit R la variable aléatoire égale au gain du casino lors d'une partie jouée. Déterminer la valeur maximale de p pour que l'espérance de gain soit positive.
4. Un joueur joue une partie, on suppose qu'il gagne. Quelle est la probabilité, en fonction de p, que le bandit manchot ait dysfonctionné lors de la partie ?

Exercice 5 (Oral 2019) .... **3 points**

Soit p dans] 0 ; 1/2 [
Sur la planète SATURNE, un individu lambda ne peut avoir que 0,1 ou 2 enfants avec des probabilités respectives de 1-2p, p et p.

On pose X_1 la variable aléatoire discrète correspondant au nombre d'enfants qu'il aura.

X_2 la variable aléatoire discrète correspondant au nombre de petits-enfants qu'il aura.

...

X_n la variable aléatoire discrète correspondant au nombre de descendants qu'il aura à la $n^{\text{ième}}$ génération.

2°)

(a) Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance.
(b) Déterminer le support puis la loi de X_2
(c) Pour tout entier n, quel est le support de X_n ?
(d) En posant $p_n = P(X_n = 0)$, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n, de p et des $P(X_n = i)$
(e) En déduire que p_n converge.