

II) La géométrique de paramètre $p \in [0; 1]$:

* déf: $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\Omega)$ —> $[0; 1]$
 $n \longmapsto (1-p)^{n-1} \cdot p$

* interprétation: La règle plusieurs fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir 1 succès
alors X représente le nombre de tentatives nécessaires

* Ex: nombre de lancers d'une pièce nécessaires pour faire pile

$$P(X=n) = (1 - \frac{1}{2})^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$

Les v.a.d. usuelles

I) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\{0; 1\}) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \begin{cases} p & \text{si } x=0 \\ 1-p & \text{si } x=1 \end{cases}$$

* interprétation: C'est la v.a.d. associée au résultat d'une épreuve aléatoire qui n'admet que 2 issues (échec ou succès)

* ex: le tirage à pile ou face. Dans ce cas, $p = \frac{1}{2}$

II) Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \llbracket 0; n \rrbracket$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\llbracket 0; n \rrbracket) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

* interprétation: On répète n fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p
alors X est la v.a.d. associée au nombre de succès obtenus.

Autrement dit: Soient (X_i)

$i=1, \dots, n$, n v.a.d. de loi de Bernoulli de paramètre p
mutuellement indépendantes: $\forall i \neq j$, $P(X_i=a, X_j=b) = P(X_i=a) P(X_j=b)$
avec $(a, b) \in \{0; 1\}^2$

alors: $X = \sum_{i=1}^n X_i$

III) Loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $P_X: \mathcal{P}(\llbracket 1; n \rrbracket) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \frac{1}{n}$$

* interprétation: les résultats $(1, 2, \dots, n)$ sont équivalables

* ex: le résultat du lancer d'un dé suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$

IV) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ avec: $P_X: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

* ex: C'est le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (file d'attente à 1 guichet)

② Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une famille d'événements 2 à 2 disjoints

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{X|Y=y} \left(\bigcup_{n \geq 0} A_n \right) &= \frac{\mathbb{P}\left[\left\{X \in \bigcup_{n \geq 0} A_n\right\} \cap \{Y=y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\mathbb{P}\left[\left\{w \in \Omega / (X(w), Y(w)) \in \bigcup_{n \geq 0} A_n \times \{y\}\right\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n \geq 0} \left\{w \in \Omega / (X(w), Y(w)) \in A_n \times \{y\}\right\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} \\ &= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n \geq 0} (X, Y) \in A_n \times \{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \\ &= \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)} \left[\bigcup_{n \geq 0} A_n \times \{y\} \right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_{(X,Y)} [A_n \times \{y\}]}{\mathbb{P}[Y=y]} \end{aligned}$$

car $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est une mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(B)$

et que les événements $A_n \times \{y\}$ sont 2 à 2 disjoints

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{P}[X \in A_n, Y=y]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[X \in A_n | Y=y] \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_{X|Y=y} [A_n] \end{aligned}$$

IV) Espérance conditionnelle de X sachant l'événement B :

* déf: $\mathbb{E}[X|B] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X|B] = \sum_{x \in E} x \cdot \frac{\mathbb{P}[X \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$

En particulier, $\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}_{X|Y=y} [x]$

* rapp: formule des probabilités totales: Soit $(B_n)_{n \geq 0}$ une partition de Ω

alors: $\mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[B_n] \cdot \mathbb{E}[X|B_n]$

dém: $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X=x] = \sum_{x \in E} x \cdot \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[X=x | B_n] \cdot \mathbb{P}[B_n]$ d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X=x | B_n] \right) \cdot \mathbb{P}[B_n] \\ &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[B_n] \cdot \mathbb{E}[X|B_n] \end{aligned}$$

Vecteurs aléatoires discrets

I) déf:

$X: \Omega \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{R}^n$ est 1 vecteur aléatoire discret

ssi: $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, X_i est 1 v.n.d de Ω sur E_i

II) Loi de probabilité de X :

* P' est l'application: $P_X: \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \rightarrow [0; 1]$

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \mapsto P_X(A) = P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$

* $\text{ppq: } P_X$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$

III) Loi marginale de X_i :

*déf: $P_{X_i}: \mathcal{P}(E_i) \rightarrow [0; 1]$

$$x_i \mapsto P(X_i = x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \in E_{i-1} \\ x_{i+1} \in E_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \in E_n}} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

*consequence: connaître la loi du vecteur aléatoire X nous permet de connaître la loi de n'importe laquelle de ses composantes.

IV) Loi conditionnelle de X sachant $Y=y$:

*déf: Soit X et Y 2 v.n.d. de Ω dans E et F et $y \in F$

Chaque loi conditionnelle de X sachant que $Y=y$ est l'application:

$$P_{X|Y=y}: \mathcal{P}(E) \rightarrow [0; 1] \quad x \mapsto P[X=x | Y=y] = \frac{P[X=x, Y=y]}{P[Y=y]} \quad \Delta P[Y=y] \neq 0 \text{ par définition de la probabilité conditionnelle}$$

*remarque: ① connaître la loi du vecteur aléatoire (X, Y) nous permet de connaître la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{Y=y\}$

*ppq: $P_{X|Y=y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

$$\text{dém: } ① P_{X|Y=y}(\emptyset) = \frac{P(\{w \in \Omega / X(w) \in \emptyset\}, \{w \in \Omega / Y(w)=y\})}{P[Y=y]} = \frac{P_{(X,Y)}(\emptyset)}{P[Y=y]} = \frac{0}{P[Y=y]} = 0$$

car $P_{X,Y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

VII) covariance de 2 v.a.d:

* déf: $\text{cov}(X; Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

* prop: ① $\text{cov}(X; Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ À UTILISER A
 ② $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{cov}(X; Y)$

$$\begin{aligned}\text{dém: } ① \text{cov}(X; Y) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}② \mathbb{V}[X+Y] &= \mathbb{E}[(X+Y - \mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}[(X+Y)^2 - 2(X+Y)\mathbb{E}[X+Y] + \mathbb{E}[X+Y]^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2 - 2X(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) - 2Y(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) + (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - 2\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - 2\mathbb{E}[Y]^2 \\ &\quad + \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + 2\mathbb{E}[XY] \\ &= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{cov}(X; Y)\end{aligned}$$

VIII) coefficient de corrélation de 2 v.a.d:

* déf: $\text{corr}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

IX) indépendance de 2 v.a.d:

* déf: Soient X et Y , 2 v.a.d à valeur respectives dans E et F

Elles sont indépendantes si: $\forall x \in E, \forall y \in F, \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \mathbb{P}[X=x] \cdot \mathbb{P}[Y=y]$

* interprétation: le résultat de l'expériene aléatoire de l'une n'influence pas le résultat de l'expériene aléatoire de l'autre.

* prop: ① si X et Y sont indépendantes alors: $\text{cov}(X; Y) = 0$

② si X et Y sont indépendantes alors: $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

$$\begin{aligned}\text{dém: } ① \mathbb{E}[XY] &= \sum_{(x,y) \in E \times F} xy \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} xy \mathbb{P}[X=x] \mathbb{P}[Y=y] \\ &= \sum_{x \in E} x \mathbb{P}[X=x] \cdot \sum_{y \in F} y \mathbb{P}[Y=y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$