

I) Déf:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 1 fonction définie sur \mathbb{R} et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$
 et $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 1 variable aléatoire non discrète.

→ Comment définir sa loi?

c'est l'application $\mathbb{P}_X: \{[a,b] / (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \rightarrow [0,1]$
 $[a,b] \mapsto \mathbb{P}(X \in [a,b])$

par convention: $\mathbb{P}(X=a) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$ **CONTRAIREMENT À 1 v.a.d.**

→ par définition: X admet f comme densité de probabilité

$$\text{si: } \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}(X \in [a,b]) = \int_a^b f(x) dx$$

II) Fonction de répartition d'un v.a. à densité:

* déf: c'est l'application: $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$$x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty; x]) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

* prop: ① F_X est croissante

② F_X est continue à droite

③ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$

④ soit $y > x$, $F_X(y) - F_X(x) = \mathbb{P}(X \in]x,y]) = \int_x^y f(t) dt$

III) Espérance d'un v.a. à densité:

* déf: $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$

* interprétation: c'est la valeur qu'on s'attend à trouver si on répète 1 nombre important de fois l'expérience et que l'on calcule la moyenne des résultats.

* prop: $\mathbb{E}[aX + Y] = a \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

IV) Variance d'un v.a. à densité:

* déf: $V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x) dx$

* prop: ① Formule de Huygens-König: $V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mathbb{E}[X]^2$

② $\forall a \in \mathbb{R}, V[aX] = a^2 \cdot V[X]$

LA VARIANCE EST UN INDICATEUR DE DISPERSION

V) fonctions simples d'1 v.a. à densité:

(2)

① $Y = cX + d$:

$\forall a, b \in \mathbb{R}, P(Y \in [a, b]) = P(cX + d \in [a, b]) = P(cX \in [a-d; b-d])$

* si $c > 0$, $P(Y \in [a, b]) = P(X \in [\frac{a-d}{c}; \frac{b-d}{c}]) = \frac{a-d}{c} \int_{\frac{b-d}{c}} f(x) dx$

* si $c < 0$, $P(Y \in [a, b]) = \frac{b-d}{c} \int_{\frac{a-d}{c}} f(x) dx$

* si $c = 0$, $Y = d$ donc: $P(Y \in [a, b]) = 1$ si $d \in [a, b]$
 $= 0$ sinon

② $Y = X^2$:

$\forall a, b \in \mathbb{R}, P(Y \in [a, b]) = P(X^2 \in [a, b])$

* si $[a, b] \subset]-\infty; 0]$: $P(X^2 \in [a, b]) = 0$

* sinon: $P(X^2 \in [a, b]) = P(X^2 \in [a, b] \cap \mathbb{R}^+) = P(X^2 \in [\max(0, a); b])$

* si $a > 0$: $P(X^2 \in [a, b]) = P(X \in [\sqrt{a}; \sqrt{b}]) + P(X \in [-\sqrt{b}; -\sqrt{a}])$
 $= \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} f(x) dx + \int_{-\sqrt{b}}^{-\sqrt{a}} f(x) dx$

* si $a \leq 0$: $P(X^2 \in [a, b]) = P(X^2 \in [0, b]) = P(X \in [-\sqrt{b}; \sqrt{b}]) = \int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}} f(x) dx$

③ $Y = e^X$

$\forall a, b \in \mathbb{R}, P(Y \in [a, b]) = P(e^X \in [a, b])$

* si $[a, b] \subset]-\infty; 0]$: $P(e^X \in [a, b]) = 0$

* sinon: $P(e^X \in [a, b]) = P(e^X \in [a, b] \cap \mathbb{R}^+) = P(e^X \in [\max(0, a); b])$

* si $a > 0$: $P(e^X \in [a, b]) = P(X \in [\ln a; \ln b]) = \int_{\ln a}^{\ln b} f(x) dx$

* si $a \leq 0$: $P(e^X \in [a, b]) = P(e^X \in [0, b]) = P(e^X \leq b) = P(X \leq \ln b) = \int_{-\infty}^{\ln b} f(x) dx$

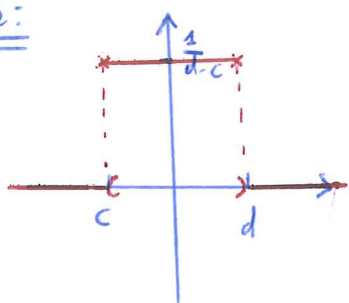
VI) les densités usuelles:

(3)

1) la loi uniforme sur l'intervalle $[c; d]$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & \text{pour } x \in [c; d] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

* graphe:



* espérance: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_c^d \frac{x}{d-c} dx = \frac{1}{d-c} \left[\frac{x^2}{2} \right]_c^d = \frac{d^2 - c^2}{2(d-c)} = \underline{\underline{\frac{d+c}{2}}}$

* Variance: $V[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - E[X]^2$

$$= \int_c^d \frac{x^2}{d-c} dx - \frac{(d+c)^2}{4} = \frac{1}{d-c} \left[\frac{x^3}{3} \right]_c^d - \frac{(d+c)^2}{4} = \frac{d^3 - c^3}{3(d-c)} - \frac{(d+c)^2}{4}$$
$$= \frac{d^2 + cd + c^2}{3} - \frac{d^2 + 2cd + c^2}{4} = \frac{4d^2 + 4cd + 4c^2 - 3d^2 - 6cd - 3c^2}{12}$$
$$= \frac{d^2 - 2cd + c^2}{12} = \underline{\underline{\frac{(d-c)^2}{12}}}$$

* médiane m: C'est la valeur m telle que: $P[X \leq m] = \frac{1}{2}$ donc: $m \in [c; d]$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^m f(x) dx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \int_c^m \frac{1}{d-c} dx = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{d-c} [x]_c^m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{m-c}{d-c} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow m-c = \frac{d}{2} - \frac{c}{2} \Leftrightarrow \underline{\underline{m = \frac{d+c}{2}}}$$

* fonction de répartition: $F(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^x f(t) dt = 0 \text{ si } x \in]-\infty; c] \cup [d; +\infty[$

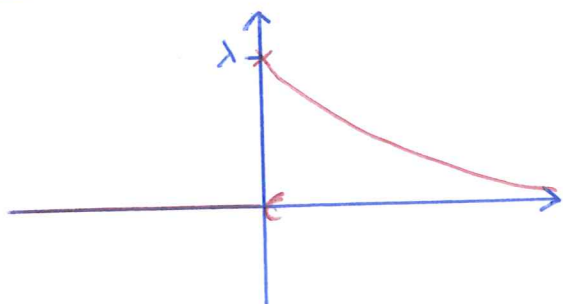
$$= \int_c^x \frac{1}{d-c} dt = \frac{1}{d-c} \cdot x - c \text{ si } x \in]c; d[$$

2) la exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

(4)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

* graphe:



* espérance: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx =$

On intègre par parties:

$$u = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u' = -\lambda e^{-\lambda x} \quad [\text{il est facile de trouver 1 primitive d'une exponentielle}]$$

$$v = x \Rightarrow v' = 1$$

$$= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\lambda} \frac{\lambda x}{e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

car $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ \downarrow 0

* Variance: $V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$

on: $E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$

On intègre par parties:

$$u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$$

$$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$$

$$= \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \cdot E[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

on a déduit que: $V[X] = \frac{1}{\lambda^2}$

* médiane: on vérifie: $P[X \leq m] = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} = \int_0^m f(x) dx \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^m = -e^{-\lambda m} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2} = -e^{-\lambda m} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda m} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda m \Leftrightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

* fonction de répartition: $F(x) = P[X \leq x] = 0$ si $x \leq 0$

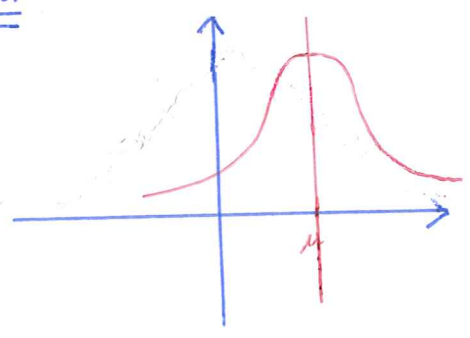
$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = [-e^{-\lambda t}]_0^x = -e^{-\lambda x} + 1 \text{ si } x > 0$$

3) la normale de paramètres μ et σ :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

densité de probabilité de X ; On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

* graph:



fonction symétrique par rapport à la droite $x = \mu$

* espérance: $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$