Chapitre 1

Fonctions de plusieurs variables. Limites dans $\mathbb{R}^n$.

Le but principal de ce cours est d'étudier les fonctions de plusieurs variables. En première année vous avez vu les fonctions d'une seule variable, où un paramètre réel (qui physiquement peut représenter une température, une pression, une densité massique, volumique, etc.) dépend d'un autre paramètre, également réel (le temps, une abscisse, etc).

Ici on va donc s'intéresser à des fonctions de plusieurs paramètres réels. Par exemple on peut vouloir étudier la température, la pression ou la densité volumique en fonction de la position dans l'espace (3 dimensions), de la position et de la vitesse (par exemple quelle est la densité de particules qui se trouve à cet endroit et qui va dans cette direction, ce qui fait 6 dimensions), on peut s'intéresser en plus à la dépendance par rapport au temps (une dimension supplémentaire). La quantité étudiée peut dépendre de la position de N objets, auquel cas on doit travailler avec $3N$ dimensions. Bref, les exemples ne manquent pas...

Notre exemple favori dans ce cours sera celui d'une altitude dépendant de deux paramètres (latitude et longitude ou, de façon plus abstraite, x et y). Il s'agit donc d'une fonction sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'intérêt est que le graphe de cette fonction correspond exactement à la montagne que l'on est en train d'escalader.

Mathématiquement, on devra donc étudier des fonctions qui ne sont plus définies sur un intervalle (ou une partie quelconque) de $\mathbb{R}$, mais sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. L'espace d'arrivée pourra être $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{R}^p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, si la quantité qui nous intéresse est elle-même multi-dimensionnelle. On verra que le fait d'avoir plusieurs dimensions à l'arrivée n'est pas très gênant, alors que le fait d'avoir plusieurs dimensions au départ va poser un certain nombre de difficultés par rapport à ce que vous connaissez.

Les principales propriétés des fonctions de plusieurs variables auxquelles on va s'intéresser sont les questions de régularité (continuité, dérivabilité, ...) et leurs conséquences (comportement local d'une fonction, étude des extrema, ...), d'intégration, et enfin le lien entre les deux.

1.1 Fonctions de plusieurs variables

On considère une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$, ainsi qu'une fonction f de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$. A tout point

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$$

on associe un point $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^p$. On notera parfois

$$f(x) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_p(x_1, \ldots, x_n)),$$

où $f_1, \ldots, f_p$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie. Si λ est une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ alors $\lambda f : x \mapsto \lambda(x)f(x)$ définit encore une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$. Si g est une fonction d'une partie $\mathcal{D}'$ de $\mathbb{R}^p$ contenant l'image de f à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, alors la composée $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.1. On appelle graphe de f l'ensemble

$$\{(x, f(x)), x \in \mathcal{D}\} \subset \mathcal{D} \times \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{n+p}.$$

On observe que le graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est un objet à n dimensions (en un sens qui sera précisé plus tard) dans l'espace à $(n+p)$ dimensions. Concrètement on dessine sur une page en 2 dimensions. Tant qu'on considère des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, tout va bien (un graphe est alors une courbe, objet de dimension 1, dans le plan). Quand $n = 2$ et $p = 1$, il faut dessiner en trois dimension, ce qui est déjà moins parlant (voir tout de même la figure 1.1), et au-delà c'est essentiellement impossible. Dans tout le cours les dimensions seront quelconques, mais c'est souvent une bonne idée d'avoir en tête des exemples le cas où $n = 2$ et $p = 1$.

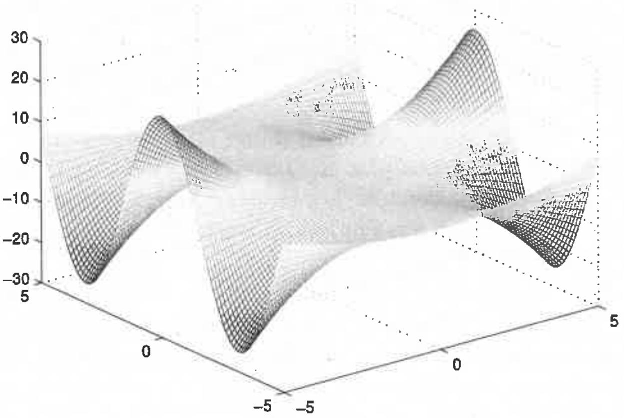

FIGURE 1.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto x^2 \cos(y)$.

Une autre façon de visualiser une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ est de dessiner ses lignes de niveau :

Définition 1.2. On suppose que f est à valeurs réelles ($p = 1$). On appelle lignes de niveau de f les ensembles

$$\{x \in \mathcal{D} \,|\, f(x) = \lambda\} \subset \mathcal{D}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

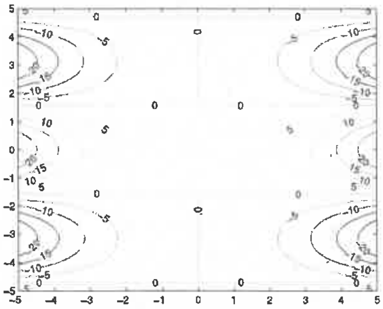
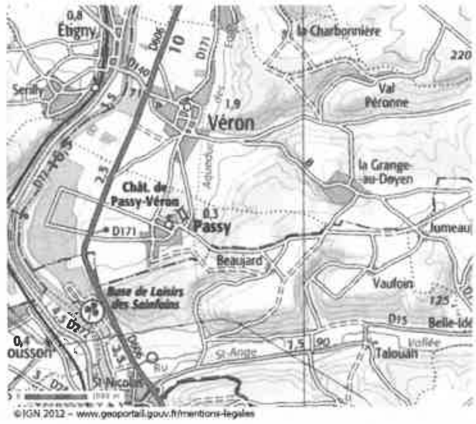

FIGURE 1.2 – Lignes de niveau pour l'application $(x, y) \mapsto x^2\cos(y)$ et carte IGN avec lignes de niveau pour l'altitude.

1.2 Normes

Notre objectif est maintenant d'étudier la régularité des fonctions de plusieurs variables. La notion de limite, sur laquelle reposent en particulier les notions de continuité et de dérivabilité, s'appuie elle-même sur la notion de proximité entre deux points. Pour une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$ si $f(x)$ est « proche » de l dès lors que x est « assez proche » de a. Intuitivement, deux réels x et y sont proches si la valeur absolue (quantité positive) $|x - y|$ est petite, en un sens à préciser.

Avant de parler de limite pour des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$, il faut donc donner un sens précis à l'assertion « x est proche de y » lorsque x et y sont des points de $\mathbb{R}^n$.

En fait, on sait déjà mesurer la distance entre deux points de $\mathbb{R}^n$. Par exemple pour deux points $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$ dans $\mathbb{R}^2$, la longueur du segment $[x, y]$ est donnée par

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Cette quantité sera appelée distance euclidienne entre x et y. Mais ce n'est pas toujours la bonne façon de mesurer la distance entre deux points, comme le montrent les exemples suivants. Considérons un piéton dans une ville organisée par blocs (voir figure 1.3), chaque bloc faisant 500m de côté. Il devra parcourir ______m pour aller du point A au point B et ______m pour aller du point A au point C, alors que les distances euclidiennes (à vol d'oiseau) entre A et B et entre A et C sont respectivement de ______m et ______m. Marseille


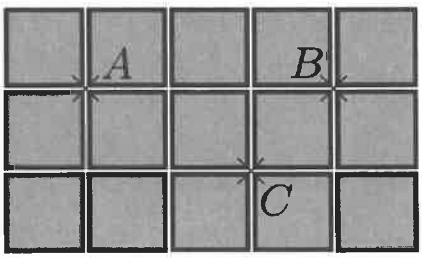

FIGURE 1.3 – Les villes américaines et les déplacements en norme l^1.

est plus proche de Paris que de Toulouse si on regarde le temps de parcours par le train, alors que c'est quasiment deux fois plus loin en termes de kilomètres par la route. Ainsi il y a différentes façons de mesurer la distance entre deux points, et il n'y en a pas de bonnes ou de mauvaises : chacune est plus ou moins bien adaptée à chaque contexte.

Définition 1.3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $N : E \to \mathbb{R}_+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in E$, $N(x) = 0 \iff x = 0$ (séparation),

(ii) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (homogénéité),

(iii) $\forall (x,y) \in E^2$, $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire).

Étant donnée une norme N sur E, on appelle distance associée à N l'application

$$d_N : \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ (x,y) & \mapsto & N(x-y) \end{array} \right.$$

On note que toutes les distances ne sont pas obtenues de cettes façons, mais on ne s'attardera pas sur ces questions dans ce cours (voir tout de même les exercices 14 et 15, plus de détails seront donnés dans le cours d'approfondissements mathématiques).

***Exercice* 1.** Montrer que la valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1.4. *Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note*

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}.$$

Alors l'application $x \mapsto \|x\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Les propriétés de séparation et d'homogénéité sont faciles et laissées en exercice. Pour montrer l'inégalité triangulaire, on considère deux points $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Si $x + y = 0$ alors le résultat est clair. Sinon on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \|x+y\|_2^2 &= \sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j(x_j+y_j) + \sum_{j=1}^n y_j(x_j+y_j) \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j+y_j)^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n y_j^2}\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j+y_j)^2} \\ &\leqslant \left(\|x\|_2 + \|y\|_2\right) \|x+y\|_2 \, . \end{aligned}$$

On obtient l'inégalité triangulaire en divisant par $\|x+y\|_2 \neq 0$. □

***Exercice* 2.** Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on note

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| \, .$$

Montrer que les applications $x \mapsto \|x\|_1$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

1.3 Limites

Maintenant qu'on a introduit les normes, qui jouent dans $\mathbb{R}^n$ le rôle que joue la valeur absolue dans $\mathbb{R}$, on peut définir la convergence d'une suite exactement de la même façon dans $\mathbb{R}^n$ que dans $\mathbb{R}$, en remplaçant simplement la valeur absolue par une norme.

Définition 1.5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E et $l \in E$. On dit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers l et on note

$$x_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} l$$

si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall m \geqslant N, \quad \|x_m - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit x_m tend vers l si la quantité réelle $\|x_m - l\|$ tend vers 0 au sens usuel.

Sans surprise, on retrouve les même propriétés de base que pour la limite d'une suite réelle :

Proposition 1.6. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.*

(i) Unicité de la limite. *Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, $l_1 \in E$ et $l_2 \in E$. Si $x_m \to l_1$ et $x_m \to l_2$ quand m tend vers $+\infty$, alors $l_1 = l_2$.*

(ii) Linéarité de la limite. *Soient $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ et $(y_m)_{m\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E. Soient $l_1, l_2 \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si*

$$x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} l_1 \quad \text{et} \quad y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} l_2,$$

alors

$$\lambda x_m + \mu y_m \xrightarrow[m\to\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2.$$

***Exercice* 3.** Démontrer la proposition 1.6 (la démonstration est la même que pour les limites dans $\mathbb{R}$).

Définition 1.7. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient N_1, N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que pour tout $x \in E$ on a

$$N_1(x) \leqslant CN_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leqslant CN_1(x).$$

L'intérêt de cette nouvelle définition est illustré par l'exercice 4. La difficulté avec la définition 1.5 est qu'elle dépend a priori de la norme dont l'espace E est muni. Ainsi, une suite peut converger vers une certaine limite pour une norme, ne pas être convergente pour une autre norme, ou encore converger vers une limite différente pour une troisième norme. Ce n'est pas très agréable.

Lorsque deux normes sont équivalentes, il est facile de voir qu'une suite converge vers une certaine limite pour l'une des deux normes si et seulement c'est aussi le cas pour l'autre. C'est bien mieux.

***Exercice* 4. 1.** Montrer que les trois normes $x \mapsto \|x\|_1$, $x \mapsto \|x\|_2$ et $x \mapsto \|x\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.
2. Soit $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ et $l \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\|x_m - l\|_1 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \iff \|x_m - l\|_2 \xrightarrow[m\to\infty]{} 0 \iff \|x_m - l\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

La vraie bonne nouvelle est qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. Comme on travaillera en dimension finie dans tout ce cours, cela signifie qu'on pourra parler de limite sans préciser la norme avec laquelle on travaille. Dans la suite, lorsqu'on parlera d'une norme sur $\mathbb{R}^n$, on ne précisera donc la norme utilisée que quand ce sera nécessaire. Sinon cela signifiera que le résultat énoncé ne dépend pas du choix de la norme.

Attention tout de même à bien garder en tête cette subtilité, car tous les espaces ne sont pas de dimension finie, loin de là...

Proposition 1.8. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. La démonstration de ce résultat sera admise pour ce cours. Elle sera donnée dans le cours d'approfondissements mathématiques. □

On munit maintenant $\mathbb{R}^n$ d'une norme quelconque, notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.9. On dit que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall j, k \geqslant N, \quad \|x_j - x_k\| \leqslant \varepsilon.$$

Proposition 1.10. $\mathbb{R}^n$ *est complet. Cela signifie que toute suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}^n$ *est convergente.*

Démonstration. Voir le cours d'approfondissements mathématiques. □

1.4 Ouverts et fermés.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\|\cdot\|$ une norme sur E.

Définition 1.11. Pour $x \in E$ et $r > 0$ on note

$$B(x,r) = \{y \in E \mid \|x - y\| < r\}$$

la boule ouverte de centre x et de rayon r,

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leqslant r\}$$

la boule fermée de centre x et de rayon r, et enfin

$$S(x,r) = \{y \in E \mid \|x - y\| = r\}$$

la sphère de centre x et de rayon r.

Définition 1.12. Soit Ω une partie de E. On dit que Ω est ouvert si pour tout $x \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset \Omega$. On dit que Ω est fermé si son complémentaire $E \setminus \Omega$ est ouvert.

Exemple 1.13. Dans $E = \mathbb{R}$, muni de la valeur absolue :
- Un intervalle de la forme $]a,b[$ avec $a < b$ est ouvert,
- un intervalle de la forme $[a,b]$ avec $a \leqslant b$ est fermé,
- un intervalle de la forme $[a,b[$ ou $]a,b]$ avec $a < b$ n'est ni ouvert ni fermé,
- $\mathbb{R}$ et l'ensemble vide $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Exemple 1.14. • Une boule ouverte est un ensemble ouvert de E,
- une boule fermée ou une sphère sont des ensembles fermés de E.

Démonstration. On montre la première assertion de l'exemple 1.14. Soit $x \in E$ et $r > 0$. On considère $y \in B(x,r)$ et on note $\rho = r - \|y - x\| > 0$. Alors on a $B(y,\rho) \subset B(x,r)$. En effet pour tout $z \in B(y,\rho)$ on a par l'inégalité triangulaire

$$\|z - x\| \leqslant \|(z - y) + (y - x)\| \leqslant \|z - y\| + \|y - x\| < \rho + (r - \rho) = r.$$

Cela prouve que $B(x,r)$ est une partie ouverte de E. □

***Exercice* 5.** Démontrer les autres assertions des exemples 1.13 et 1.14.

Définition 1.15. Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{V}$ une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \mathcal{V}$.

Remarque 1.16. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenant a est un voisinage de a, mais tous les voisinages de a ne sont pas des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Par la suite on dira qu'une propriété est vraie au voisinage de a s'il existe une voisinage de a sur lequel elle est vraie. Par exemple l'assertion « $f \geqslant 0$ au voisinage de a » signifie qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in B(a,r)$ on a $f(x) \geqslant 0$.

1.5 Exercices

***Exercice* 6.** Déterminer et représenter le domaine de définition maximal des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{\sqrt{-y + x^2}}{\sqrt{y}} \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto \ln(x + y) \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto \frac{\ln(y)}{\sqrt{x - y}}.$$

***Exercice* 7.** Déterminer et représenter les lignes de niveau des fonctions de deux variables suivantes :

$$f_1 : (x, y) \mapsto x \quad ; \quad f_2 : (x, y) \mapsto y \quad ; \quad f_3 : (x, y) \mapsto 1$$

$$f_4 : (x, y) \mapsto x + y + 1 \quad ; \quad f_5 : (x, y) \mapsto e^{y - x^2} \quad ; \quad f_6 : (x, y) \mapsto y - \cos(x).$$

***Exercice* 8.** Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on note

$$f_1(x, y) = \sin(x) - \sin(y), \qquad f_2(x, y) = \sin(xy), \quad f_3(x, y) = \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\left(1 - \frac{y^2}{9}\right),$$

$$f_4(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}, \qquad f_5(x, y) = \cos(x)e^{\frac{y}{5}}, \quad f_6(x, y) = \sin(x - y).$$

Associer à chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 son graphe (voir Figure 1.4) et ses lignes de niveau (voir Figure 1.5).

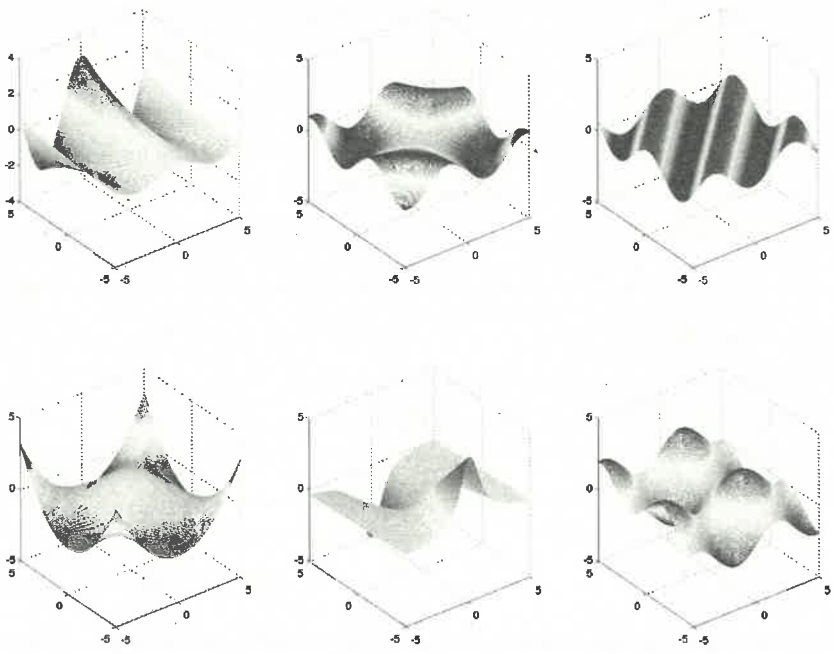

FIGURE 1.4 – Graphes pour l'exercice 8.

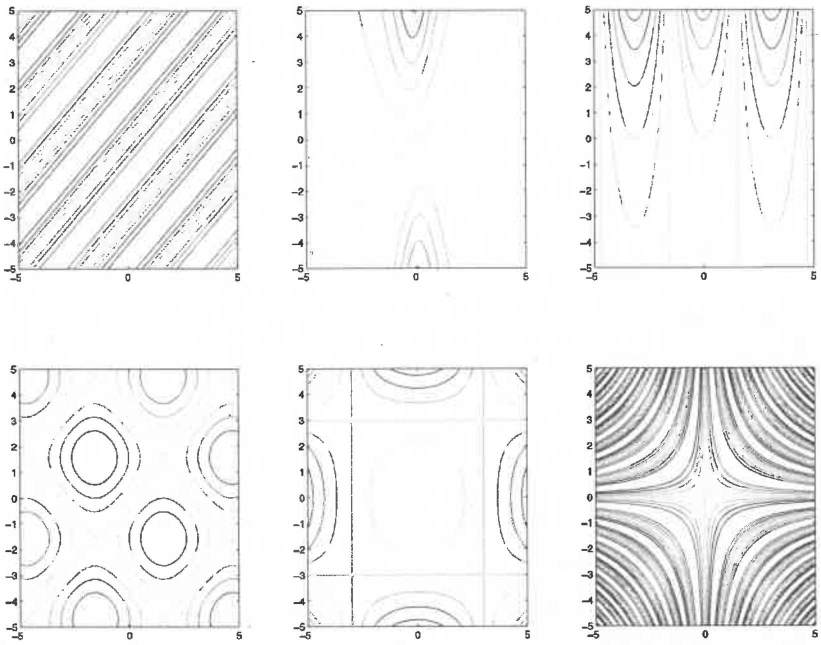

FIGURE 1.5 – Lignes de niveau pour l'exercice 8.

***Exercice* 9.** Dessiner dans $\mathbb{R}^2$ la boule de rayon 1 et de centre 0 pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$

***Exercice* 10.** Pour $m \in \mathbb{N}$ on pose

$$x_m = \left(\frac{1}{1+m}, 1 + e^{-m}\right)$$

1. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Étudier la convergence de la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$.

Pour aller plus loin

***Exercice* 11.** On note E l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ on note

$$\|u\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty = \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

(la somme est une somme finie).
1. Vérifier que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension infinie.
2. Montrer que les applications $u \mapsto \|u\|_1$ et $u \mapsto \|u\|_\infty$ sont des normes sur E.
3. Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

***Exercice* 12.** Soit F une partie de $\mathbb{R}^n$. Montrer que F est fermée si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers un certain $l \in \mathbb{R}^n$ on a $l \in F$.

***Exercice* 13.** On appelle distance sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E une application $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tous $x, y, z \in E$ on a
- $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
- $d(x, y) = d(y, x)$,
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur E alors l'application $d : (x, y) \mapsto \|x - y\|$ est une distance sur E.

***Exercice* 14.** Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$ on note

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^n$.
2. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

***Exercice* 15.** On note $\|\cdot\|_2$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$. On note $O = (0, 0)$ l'origine de $\mathbb{R}^2$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^2$ on note

$$d(x,y) = \begin{cases} \|x-y\|_2 & \text{si les points } x,\ y \text{ et } O \text{ sont alignés,} \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule fermée de centre $x_0 = (0, 2)$ et de rayon 3, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^2$ tels que $d(x, x_0) \leqslant 3$.
3. On considère la suite $x_m = \left(1, \frac{1}{m+1}\right)$ de points de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $x = (1, 0)$ pour la norme $\|\cdot\|_2$, mais que $d(x_m, x)$ ne tend pas vers 0 quand m tend vers $+\infty$.
4. Existe-t-il une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $d(x, y) = \|x - y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$.

***Exercice* 16.** On a déjà défini les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Plus généralement pour $p \in [1, +\infty[$ et $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ *(L'inégalité triangulaire pour cette norme est l'inégalité de Minkowski, qui repose elle-même sur l'inégalité de Hölder).*
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\|x\|_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \|x\|_\infty .$$

Chapitre 2

Continuité d'une fonction de plusieurs variables

Maintenant qu'on a défini la notion de limite pour des suites dans $\mathbb{R}^n$, la notion de continuité s'étend sans problème à des fonctions de plusieurs variables. En outre, bon nombre des propriétés des fonctions continues connues pour les fonctions d'une variable seront encore valables ici.

2.1 Fonctions continues

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.1. Soit $a \in \mathcal{D}$ et $l \in \mathbb{R}^p$. On dit que f tend vers l en a et on note

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}, \quad \|x - a\| \leqslant \delta \implies \|f(x) - l\| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 2.2. De même que pour la limite d'une suite, la limite d'une fonction en un point ne dépend pas du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et sur $\mathbb{R}^p$, qui sont des espaces de dimensions finies.

Les définitions suivantes sont sans surprise :

Définition 2.3. Soit $a \in \mathcal{D}$.

(i) On dit que f est continue en a si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

(ii) On dit que f est continue sur $\mathcal{D}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$.

***Exercice* 1.** **1.** Montrer qu'une fonction constante est continue.
2. Montrer que l'application $(x_1, x_2) \mapsto x_1$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que toute norme sur $\mathbb{R}^n$ définit une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4. *Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions continues de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit h une fonction continue de $\mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^m$.*

- *La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $\mathcal{D}$ (l'ensemble des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^p$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).*
- *Si $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}$, alors fg est continue sur $\mathcal{D}$. Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, alors f/g est continue.*
- *Si $\mathcal{D}'$ contient l'image de g, alors la fonction $h \circ g$ est continue de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^m$.*

***Exercice* 2.** Montrer la proposition 2.4.

On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ une application qui s'écrit comme une somme de termes qui sont eux-mêmes des produits de fonctions coordonnées. En langage mathématiques, c'est une fonction de la forme

$$f : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|\leqslant N} c_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

avec $N \in \mathbb{N}$. Par exemples les fonctions suivantes sont polynômiales : $(x, y) \mapsto xy^4 + x^3y^2$, $(x, y, z) \mapsto x + xyz + y^2z^2$.

Une fraction rationnelle est une fonction qui s'écrit comme le quotient de deux fonctions polynômiales.

Corollaire 2.5. *Toute fonction polynômiale sur $\mathbb{R}^n$ est continue. Plus généralement toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est bien définie et continue sur ce domaine.*

On énonce maintenant le critère séquentiel pour la continuité en un point :

Proposition 2.6. *Soit f une fonction de $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a la suite $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(a)$.*

Comme pour une fonction d'une variable réelle, cette propriété sert souvent à montrer qu'une fonction n'est pas continue.

Exemple 2.7. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(voir figure 2.1). La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. D'autre part on a

$$f(x, 0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0 = f(0, 0) \quad \text{et} \quad f(0, y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0 = f(0, 0),$$

et pourtant f n'est pas continue en (0,0). En effet si on note $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors u_n tend vers $(0, 0)$ mais $f(u_n)$ ne tend pas vers $f(0, 0)$ quand n tend vers $+\infty$.

Plutôt que d'utiliser des suites et la proposition 2.6, on peut préférer utiliser la composition de fonctions continues pour aboutir à la même conclusion : l'application $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto (t, t) \in \mathbb{R}^2$ est continue en 0, donc si f est continue en $(0, 0) = \varphi(0)$ l'application $f \circ \varphi$ est continue en 0. Or $f(\varphi(0)) = 0$ et $f(\varphi(t)) = \frac{1}{2}$ pour tout $t \neq 0$, ce qui donne une contradiction et prouve par l'absurde que f n'est pas continue en (0,0).

⚠ C'est une erreur trop fréquente que de se contenter de vérifier la continuité des fonctions $x \mapsto f(x, y)$ et $y \mapsto f(x, y)$ pour prouver la continuité de f. On voit bien sur cet exemple que ce n'est malheureusement pas suffisant...

La proposition qui suit permet elle de montrer efficacement la continuité d'une fonction en un point de $\mathbb{R}^2$:

Proposition 2.8. *Soit f une fonction de $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{D}$. Alors f est continue en a si et seulement si il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui tend vers 0 en 0 et telle que pour tous $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a*

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r).$$

Démonstration. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$. Pour $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$\|(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - (a_1, a_2)\|_2 = r.$$

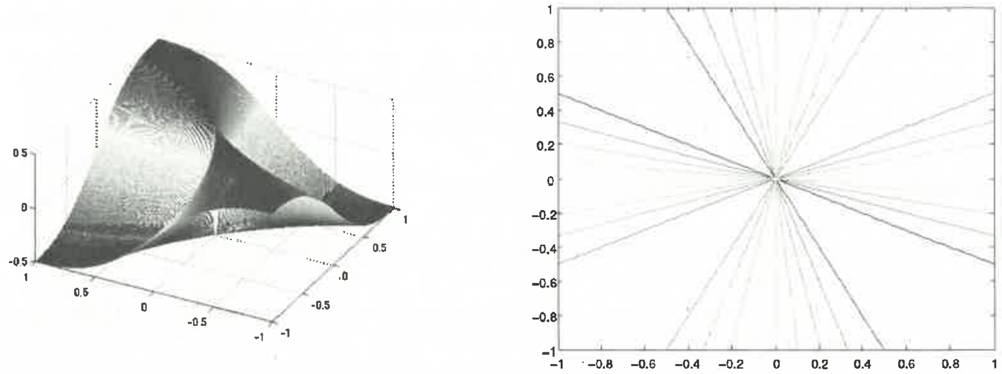

FIGURE 2.1 – Graphe et lignes de niveau pour le contre-exemple 2.7 : autour de (0,0) on trouve toutes les valeurs entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$; en particulier f n'est pas continue.

On suppose que f est continue en a. Pour $r \geqslant 0$ on note

$$\varepsilon(r) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \geqslant 0$$

Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ si $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$, donc $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Cela prouve que $\varepsilon(r) \to 0$ quand $r \to 0$. Inversement, supposons qu'une telle fonction ε existe. Soit $\varepsilon_0 > 0$. Il existe $\delta > 0$ tel que $\varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0$ si $r \leqslant \delta$. Soit alors $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|x - a\|_2 \leqslant \delta$. Alors il existe $r \in [0, \delta]$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $x = (a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin(\theta))$. On a alors

$$|f(a_1 + r\cos(\theta), a_2 + r\sin\theta) - f(a_1, a_2)| \leqslant \varepsilon(r) \leqslant \varepsilon_0.$$

Cela prouve que f est continue en a. □

Exemple 2.9. On considère sur $\mathbb{R}^2$ l'application f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ comme fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas. On étudie maintenant la continuité en (0,0). Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on a

$$|f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))| = \frac{r^4 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2}{r^2} \leqslant r^2 \xrightarrow[r \to 0]{} 0.$$

Cela prouve que f est continue en (0,0).

2.2 Encore un peu de topologie

Définition 2.10. On dit d'une partie de $\mathbb{R}^n$ qu'elle est compacte si elle est fermée et bornée.

Attention, cette définition est propre à la dimension finie. Il y a d'autres définitions équivalentes de la compacité qui elles sont encore valables en dimension infinie. Mais on ne s'attardera pas sur la notion de compacité dans ce cours (là encore, ce sera fait dans le cours d'approfondissements mathématiques).

La proposition suivante généralise le théorème qui dit qu'une fonction continue sur un segment est continue et atteint ses bornes :

Proposition 2.11. *L'image d'un compact par une fonction continue est compacte.*

Corollaire 2.12. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue de K dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes.*

2.3 Fonctions contractantes - théorème du point fixe

Soit f une fonction d'un domaine $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Définition 2.13. Soit $K \geqslant 0$. On dit que f est K-lipschitzienne si

$$\forall x, y \in \mathcal{D}, \quad \|f(x) - f(y)\| \leqslant K \|x - y\| .$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \geqslant 0$.

Remarque 2.14. Attention, la constante de Lipschitz K dépend du choix des normes sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Par contre, par équivalence des normes, le fait qu'une fonction soit lipschitzienne ou non ne dépend pas des normes choisies.

Proposition 2.15. *Une fonction lipschitzienne est continue.*

***Exercice* 3.** Démontrer la proposition 2.15.

Définition 2.16. On dit que f est contractante si elle est K-lipschitzienne pour un certain $K \in [0, 1[$.

On montre maintenant un résultat qui nous sera utile au chapitre 6 pour montrer les théorèmes de l'inversion locale et des fonctions implicites. C'est un théorème qui est également très utile par ailleurs. Par exemple, c'est aussi sur le théorème du point fixe que repose le théorème de Cauchy-Lipschitz, point de départ de la théorie des équations différentielles.

Théorème 2.17 (Théorème du point fixe)**.** *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction contractante de Ω dans Ω. Alors f admet un unique point fixe a (solution de l'équation $f(a) = a$) dans Ω. En outre si on se donne $x_0 \in \Omega$ et si on définit par récurrence $x_{m+1} = f(x_m)$, alors x_m tend vers cet unique point fixe quand m tend vers l'infini. Plus précisément on a*

$$\|x_m - a\| \leqslant \frac{K^m}{1-K} \|x_1 - x_0\| .$$

***Exercice* 4.** Dans chacun des cas suivants, montrer que la conclusion du théorème du point fixe n'est pas vérifiée, puis expliciter l'hypothèse qui n'est pas satisfaite :

(i) $\Omega =]0, 1[$ et $f : x \mapsto x/2$,
(ii) $\Omega = [0, 1]$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
(iii) $\Omega = \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$,
(iv) $\Omega = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $f : x \mapsto \sin(x)$.

Démonstration. On suppose que x et y sont deux points fixes de f. Alors on a

$$\|x - y\| = \|f(x) - f(y)\| \leqslant K \|x - y\| ,$$

ce qui implique que $\|x - y\| = 0$ et donc que $x = y$. Cela prouve l'unicité d'un éventuel point fixe pour f. Soit maintenant $x_0 \in \Omega$. Comme Ω est stable par f, on peut poser par récurrence $x_m = f(x_{m-1})$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ on a alors

$$\|x_{m+1} - x_m\| = \|f(x_m) - f(x_{m-1})\| \leqslant K \|x_m - x_{m-1}\| ,$$

et donc on obtient par récurrence sur $m \in \mathbb{N}$ que

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leqslant K^m \|x_1 - x_0\| .$$

Pour tous $m \in \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\|x_{m+l} - x_m\| \leqslant \sum_{i=0}^{l-1} \|x_{m+i+1} - x_{m+i}\| \leqslant \|x_1 - x_0\| \sum_{i=0}^{l-1} K^{i+m} \leqslant K^m \frac{\|x_1 - x_0\|}{1-K} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Cela prouve que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Puisque $\mathbb{R}^n$ est complet, elle converge vers une limite x. Comme Ω est fermé, cette limite appartient à Ω. Enfin pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a

$$x_{m+1} = f(x_m).$$

Comme f est contractante elle est continue sur Ω, donc par passage à la limite ($m \to \infty$) on obtient

$$x = f(x).$$

D'où l'existence d'un point fixe et la propriété d'approximation par des suites. □

En fait on aura besoin d'une version à paramètre de ce théorème du point fixe. On peut éventuellement omettre cette version rafinée en première lecture :

Théorème 2.18 (Théorème du point fixe à paramètre). *Soit Ω une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ et Λ une partie de $\mathbb{R}^m$. Soit f une fonction continue de $\Omega \times \Lambda \subset \mathbb{R}^{n+m}$ dans Ω. On suppose que f est uniformément contractante : il existe $K \in [0,1[$ tel que pour tous $x, y \in \Omega$ et $\lambda \in \Lambda$ on a*

$$\|f(x,\lambda) - f(y,\lambda)\| \leqslant K\,\|x-y\|\,.$$

Alors pour tout $\lambda \in \Lambda$ l'application $x \mapsto f(x,\lambda)$ admet un unique point fixe a_λ (solution de l'équation $f(a_\lambda,\lambda) = a_\lambda$) dans Ω. En outre l'application $\lambda \mapsto a_\lambda$ est continue de Λ dans Ω.

Démonstration. L'existence et l'unicité du point fixe a_λ résultent pour chaque $\lambda \in \Lambda$ du théorème 2.17. Il suffit de montrer la continuité. Soient $\lambda, \lambda_0 \in \Lambda$. Par l'inégalité triangulaire on a

$$\begin{aligned}
\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| &= \|f(a_\lambda,\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| \\
&\leqslant \|f(a_\lambda,\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda)\| + \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\| \\
&\leqslant K\,\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| + \|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\|\,.
\end{aligned}$$

On obtient

$$\|a_\lambda - a_{\lambda_0}\| \leqslant \frac{1}{1-K}\,\|f(a_{\lambda_0},\lambda) - f(a_{\lambda_0},\lambda_0)\|\,,$$

et donc la continuité de $\lambda \mapsto a_\lambda$ en λ_0 est conséquence de la continuité de f au point $(a_{\lambda_0},\lambda_0)$. □

2.4 Dérivabilité pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$.

On considère dans ce paragraphe une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$:

$$f : \left\{ \begin{array}{lcc} I & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(t) = (f_1(t),\dots,f_p(t)) \end{array} \right.$$

où $f_1,\dots,f_p$ sont des fonctions de I dans $\mathbb{R}$.

***Exercice* 5.** Montrer que f est continue sur I si et seulement si les fonctions $f_1,\dots,f_p$ le sont.

On anticipe maintenant sur le prochain chapitre en commençant à parler de dérivabilité. La dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle est définie de la même façon quand elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ que quand elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$:

Définition 2.19. • Soit $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si le quotient

$$\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \tag{2.1}$$

admet une limite dans $\mathbb{R}^p$ quand t tend vers t_0. Dans ce cas on note $f'(t_0)$ cette limite.

- On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas on appelle fonction dérivée l'application $f' : t_0 \mapsto f'(t_0)$.

***Exercice* 6.** Montrer que f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_p$ le sont, et que dans ce cas on a pour tout $t \in I$:

$$f'(t) = (f_1'(t), \dots, f_p'(t)).$$

A la lumière des exercices 5 et 6 on voit que l'étude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$ ne pose pas vraiment de difficulté nouvelle. Il suffit de travailler coordonnées par coordonnées. Ainsi on retrouve sans problèmes les propriétés de base de la dérivée (linéarité, dérivation du produit entre une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, dérivée de la composée $f \circ g$ où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$, etc.)

Il faut tout de même faire attention à quelques subtilités. Par exemple le théorème de Rolle et ses conséquences ne sont plus valables pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

Exemple 2.20. On considère l'application

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array} \right.$$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f(0) = f(2\pi)$, et pourtant la dérivée f' ne s'annule jamais.

La semaine prochaine...

Dans ce chapitre on a vu comment généraliser la notion de continuité pour des fonctions de plusieurs variables. On a également vu que la notion de dérivabilité ne pose pas de réel problème pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^p$. Par contre on se doute que les soucis vont arriver lorsqu'on voudra dériver des fonctions de plusieurs variables, puisque si t et t_0 sont des points de $\mathbb{R}^n$ le quotient (2.1) n'a pas de sens.

On cherchera dans le chapitre suivant à généraliser la notions de dérivabilité. Pour cela

- bien revoir la notion de dérivabilité pour une fonction d'une variable, et surtout bien se rappeler pourquoi c'est une notion intéressante, voir parmis les applications lesquelles pourraient être généralisées à des fonctions de plusieures variables,
- voir pourquoi la définition utilisée en dimension 1 ne peut pas être transposée brutalement en dimension supérieure,
- essayer de proposer une définition de dérivée en dimension supérieure qui permet de retrouver autant que possible les bonnes propriétés de la dimension 1,
- ...

2.5 Exercices

***Exercice* 7.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur de la limite en (0,0) pour les fonctions définies (sur le plus grand domaine de $\mathbb{R}^2$ possible) par

$$f_1(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_2(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \frac{xy}{x+y},$$

$$f_4(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad f_5(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad f_6(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

$$f_7(x,y) = \frac{1+x^2+y^2}{y}\sin(y), \qquad f_8(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \qquad f_9(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

***Exercice* 8.** Les limites suivantes existent-elles :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y} \quad ; \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} \quad ?$$

***Exercice* 9.** Donner le domaine de définition des fonctions suivantes, puis déterminer si elles sont prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_1 : (x,y) \mapsto \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}.$$

***Exercice* 10.** Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que le théorème des valeurs intermédiaires est vérifié : si les réels a et b sont dans l'image de f alors tous les réels entre a et b le sont également. Autrement dit, l'image de f est un intervalle de f. Question subsidiaire (dont la réponse sera donnée dans le cours d'approfondissement mathématiques) : dans quelle mesure ce résultat se généralise au cas où f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et son domaine n'est pas nécessairement $\mathbb{R}^n$ tout entier ?

Chapitre 3

Dérivées partielles, différentielle, fonctions de classe C^1

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de dérivée pour une fonction f de plusieurs variables. L'objectif est évidemment de donner une définition qui permet de retrouver autant que possible toutes les bonnes propriétés de la dérivation d'une fonction d'une variable :

- En tout point x_0 où la fonction est dérivable, la dérivée doit permettre de définir une fonction simple qui approche bien f au moins pour des points proches de x_0, comme c'est le cas pour l'application $x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$ en dimension 1.
- En particulier on attend d'une fonction dérivable qu'elle soit continue.
- La dérivée doit permettre d'étudier les variations de f, localiser et étudier les extréma.
- ...

Pour tout ce chapitre, on se donne un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, une fonction f de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

3.1 Dérivées partielles

Définition 3.1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.

- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe au point a si l'application
$$t \mapsto f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$
(définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$) est dérivable en 0. Dans ce cas on note
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad \text{ou} \quad \partial_k f(a)$$
cette dérivée.
- On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de f existe sur $\mathcal{U}$ si elle existe en tout point de $\mathcal{U}$.

Les dérivées partielles ne sont finalement rien de plus que des dérivées au sens usuel. Pour dériver par rapport à une variable on considère que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous intéresse comme on a l'habitude.

Remarque 3.2. Souvent, on note (x, y) et (x, y, z) plutôt que (x_1, x_2) et (x_1, x_2, x_3) les points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ respectivement. Dans ce cas on notera par exemple $\frac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ la dérivée partielle par rapport à la première variable. C'est une habitude à laquelle on peut se fier. Mais les choses peuvent devenir ambiguës quand d'autres variables entrent en jeu, typiquement lorsqu'on change de coordonnées. Il faudra donc être vigilant en lisant et en écrivant des calculs faisant intervenir des dérivées partielles...

***Exercice* 1.** 1 On considère sur $\mathbb{R}^2$ les fonctions

$$f_1 : (x,y) \mapsto x \in \mathbb{R}, \quad f_2 : (x,y) \mapsto y \in \mathbb{R}, \quad f_3 : (x,y) \mapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer les que f_1, f_2, f_3 admettent en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles par rapport à x et à y, et les expliciter.

***Exercice* 2.** Étudier l'existence et éventuellement la valeur des dérivées partielles en tout point des fonctions définies par

$$f_1(x,y) = e^x \cos(y), \quad f_2(x,y) = \sqrt{1 + x^2y^2}, \quad f_3(x,y) = x^y \quad (\text{pour } x > 0).$$

L'exemple suivant montre que l'étude des dérivées partielles ne répond pas à toutes nos attentes puisqu'une fonction peut avoir des dérivées partielles bien définies en tout point sans nécessairement être continue :

Remarque 3.3. L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

admet en tout point de $\mathbb{R}^2$ des dérivées partielles selon x et selon y mais n'est pas continue en (0,0) (voir l'exemple 2.7)

L'existence des dérivées partielles en (0,0) pour une fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ assure que f « paraît continue » tant qu'on se déplace le long des axes des abscisses ou des ordonnées. Dans l'exemple précédent, le problème vient du fait que ce n'est plus du tout le cas si on approche du point (0,0) en suivant par exemple la droite d'équation $x = y$.

Ce problème peut être évité si au lieu de ne considérer que les dérivées partielles, c'est-à-dire les dérivées selon les directions données par les axes, on considère les dérivées selon toutes les directions possibles :

Définition 3.4. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On dit que f admet une dérivée en a suivant v si l'application $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en 0. La dérivée $\varphi'(0)$ est alors appelée dérivée de f en a suivant v.

Remarque 3.5. Si elle existe, la k-ième dérivée partielle de f au point a n'est autre que la dérivée de f en a suivant e_k.

***Exercice* 3.** Calculer la dérivée de l'application $f : (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ au point $a = (1,2)$ suivant le vecteur $v = (3,5)$.

Remarque 3.6. Malheureusement cette nouvelle définition ne résoud pas notre problème, puisqu'une fonction peut admettre des dérivées selon tout vecteur en un point sans pour autant être continue en ce point. Considérons par exemple l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors f admet des dérivées selon tout vecteur en tout point mais n'est pas continue (voir exercice 13).

3.2 Fonctions différentiables

3.2.1 Différentielle

Définition 3.7. On dit que f est différentiable en a s'il existe une application linéaire d_af de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que

$$f(a+h) = f(a) + d_af(h) + \underset{h\to 0}{o}(\|h\|).$$

Autrement dit il existe une application ε_a définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\varepsilon_a(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h).$$

Remarque 3.8. On écrira parfois $df(a)$ au lieu de $d_a f$.

Remarque 3.9. On rappelle (sinon ce sera vu en approfondissements mathématiques) qu'en dimension finie toutes les applications linéaires sont continues. Cela signifie en particulier que

$$|||d_a(f)||| := \sup_{h\neq 0} \frac{\|d_a f(h)\|}{\|h\|}$$

est bien défini.

Proposition 3.10. *Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Avec les notations de la définition 3.7 on a $h \in \mathbb{R}^n$

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \|d_a f(h)\| + \|h\| \, \|\varepsilon_a(h)\| \leqslant \|h\| \left(|||d_a(f)||| + \|\varepsilon_a(h)\| \right) \xrightarrow[h\to 0]{} 0. \qquad \square$$

Proposition 3.11. *Si f est différentiable en a, alors elle est dérivable en a suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $d_a f(v)$.*

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a+tv) = f(a) + d_a f(tv) + \|tv\| \, \varepsilon_a(tv) = f(a) + t d_a f(v) + \underset{t\to 0}{o}(t).$$

Cela prouve que $t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0 de dérivée $d_a f(v)$. $\square$

Exemples 3.12. • Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si elle est dérivable en a et dans ce cas $d_a f$ est l'application $h \mapsto hf'(a)$.

• Une application constante est différentiable en tout point de différentielle nulle.

• Soit L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Pour tous $a \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}^n$ on a

$$L(a+h) = L(a) + L(h)$$

Ainsi L est différentiable en a de différentielle $d_a L = L$.

Proposition 3.13. *On suppose que f est différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles de f existent au point a et pour tout $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(v) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a).$$

Autrement dit :

$$d_a f = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) e_k^*,$$

où $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est la base duale de la base canonique.

Démonstration. Le fait que les dérivées partielles de f existent au point a résulte de la proposition 3.11 appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $d_a f$ on a

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{k=1}^n v_k e_k \right) = \sum_{k=1}^n v_k d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^n v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a). \qquad \square$$

3.2.2 Plan tangent

On suppose que f est différentiable en a. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$g(x) = f(a) + d_a f(x-a)$$

(on note que cette définition a un sens même si f n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}^n$). Alors g est une application affine (une constante + une application linéaire) telle que

$$f(x) - g(x) = \underset{x \to a}{o}\left(\|x-a\| \right)$$

g est en fait la seule application affine à avoir cette propriété. L'image de $\mathbb{R}^n$ par l'application g est appelée plan tangent au graphe de f au point a.

Supposons que $n = 2$ et $p = 1$. Alors le graphe de f est une « surface » de $\mathbb{R}^3$, et le plan tangent au graphe de f est véritablement un plan de $\mathbb{R}^3$. C'est le plan qui est proche du graphe de f quand on « zoome » sur le point $(a, f(a))$ (voir figure 3.1).

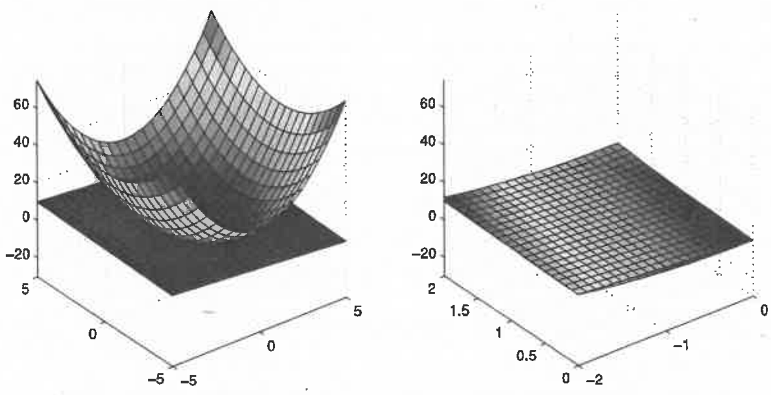

FIGURE 3.1 – Graphe de l'application $(x, y) \mapsto 2x^2 + y^2$ et son plan tangent au point (-1,1). *Si on zoome autour du point $(-1, 1, f(-1, 1))$, le graphe et le plan tangent paraissent quasiment confondus.*

3.2.3 Vecteur gradient

On suppose dans ce paragraphe que $p = 1$, c'est-à-dire que f est à valeurs réelles.

Définition 3.14. Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle gradient de f en a le vecteur

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Proposition 3.15. *Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle ,$$

où pour deux vecteurs $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a noté $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire usuel $\sum_{j=1}^{k} u_j v_j$.

Démonstration. C'est clair d'après la proposition 3.13. □

Le vecteur gradient indique en chaque point la direction de plus grande pente. Dans la montagne, si vous voulez prendre la pente la plus dure, il faut suivre le gradient de la fonction altitude. Si vous voulez descendre le plus possible, il faut au contraire suivre la direction opposée. Et si vous voulez garder la même altitude, c'est-à-dire rester sur votre ligne de niveau, il faut alors suivre une direction orthogonale. En particulier le vecteur gradient est en tout point orthogonal aux lignes de niveau (en un sens à préciser...).

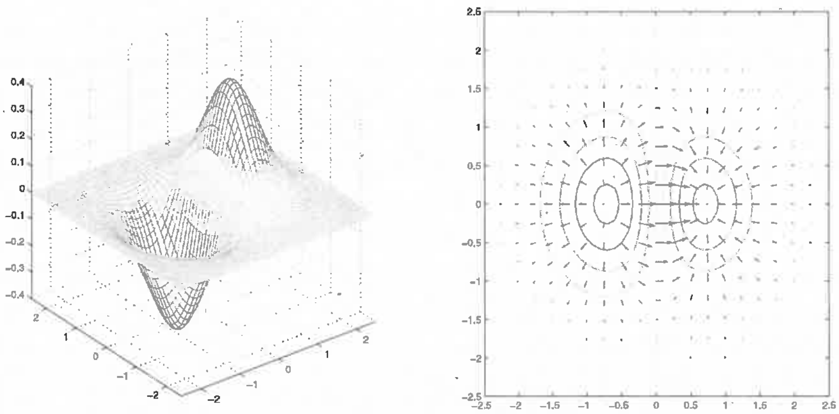

FIGURE 3.2 – Le graphe, les lignes de niveau, et le gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

***Exercice* 4.** Déterminer en tout point de $\mathbb{R}^2$ le vecteur gradient de l'application $f : (x, y) \mapsto xe^{-(x^2+y^2)}$.

3.2.4 Matrice jacobienne

On revient au cas général où f peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}^*$.

On introduit maintenant la matrice jacobienne d'une application différentiable. Il n'y a pas de concept nouveau, on donne simplement un nom à la matrice de la différentielle :

Définition 3.16. Si f est différentiable en a, alors on appelle matrice jacobienne de f en a et on note $\mathrm{Jac}_a f$ la matrice de $d_a f$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$:

$$\mathrm{Jac}_a f = \mathrm{Jac}\, f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{p,n}(\mathbb{R}).$$

Exemple 3.17. Coordonnées polaires : on considère sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ l'application $\psi : (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. Alors ψ est différentiable et sa matrice jacobienne au point (r, θ) est

$$\mathrm{Jac}\, \psi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Le fait que ψ est partout différentiable sera une conséquence du théorème 3.21.

***Exercice* 5.** Écrire la matrice jacobienne de l'application $(x, y, z) \mapsto (xyz, x^2y + y)$ en tout point de $\mathbb{R}^3$.

3.2.5 Addition et composition de fonctions différentiables

On termine cette section par la linéarité de la différentielle, puis par la composition de fonctions différentiables :

Proposition 3.18. *On suppose que f et g sont deux fonctions de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en a. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g.$$

La propriété suivante généralise la propriété de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle. Il n'y a pas particulièrement de difficulté nouvelle par rapport à la dimension 1, mais il faut être vigilant car les notations commencent à devenir un peu lourdes...

Proposition 3.19. *On suppose que $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\mathcal{U})$ et $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $f(a)$. Alors l'application $g \circ f$ est différentiable en a de différentielle*

$$d_a(g \circ f) = d_{f(a)} g \circ d_a f.$$

En termes matriciels on obtient

$$\mathrm{Jac}_a(g \circ f) = \mathrm{Jac}_{f(a)}\, g\, \mathrm{Jac}_a\, f.$$

Si on note $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $y_1, \dots, y_p$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^p$ cela donne

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

***Exercice* 6.** Démontrer les propositions 3.18 et 3.19. *Pour la proposition 3.19, la première égalité se montre exactement comme pour la dérivée d'une composition de fonction d'une variable, la deuxième égalité est une simple ré-écriture de la première en termes matriciels, et la troisième explicite pour chaque $j \in [\![1, n]\!]$ la $j^{\text{ième}}$ colonne de cette matrice $\mathrm{Jac}_a(g \circ f)$.*

La dernière formule de la proposition 3.19 n'est pas très sympathique à priori, mais une fois passée la (légitime) petite appréhension elle permet de calculer concrètement les dérivées partielles d'une fonction composée. Un petit exemple est sans doute utile ici :

Exemple 3.20. On considère une application différentiable f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Pour $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ on note

$$g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Alors g est différentiable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \times \frac{\partial (r\cos(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) \times \frac{\partial (r\sin(\theta))}{\partial r}\\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big).\end{aligned}$$

***Exercice* 7.** Avec les notations de l'exemple précédent, calculer $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en tout point de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

***Exercice* 8.** Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on note $\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On considère une fonction différentiable f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, puis on note $\tilde{f} = f \circ \psi$.

1. Montrer que $\tilde{f}$ est une fonction différentiable de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. On note $(x, y) = \psi(r, \theta)$, $\overrightarrow{u_r} = (\cos(\theta), \sin(\theta)$ et $\overrightarrow{u_\theta} = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$. Faire un dessin.

3. Montrer que $\partial_r \tilde{f}(r, \theta)$ est égale à la dérivée de f au point (x, y) et dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, tandis que $\partial_\theta \tilde{f}(r, \theta)$ vaut r fois la dérivée de f au point (x, y) et dans la direction $\overrightarrow{u_\theta}$.

⚠ Bien souvent pour « simplifier » les notations on écrit $f(r,\theta)$ au lieu de $\tilde{f}(r,\theta)$, et donc les dérivées partielles $\partial_r f$ et $\partial_\theta f$ désignent les dérivées partielles de la composée $\tilde{f} = f \circ \psi$. Cet abus de notation peut éventuellement être pratique pour celui qui a bien l'habitude, mais il est aussi très dangereux. Car si les fonctions f et $\tilde{f}$ désignent la même quantité physique en coordonnées cartésiennes ou polaires, ce sont bel et bien des fonctions différentes.

3.3 Fonctions de classe C^1

Dans ce chapitre, on a commencé par définir les dérivées partielles. Puis on a dit que ce n'était pas une notion de dérivée satisfaisante, en particulier parce que l'existence des dérivées partielles n'implique même pas la continuité. On a ensuite défini la notion de différentiabilité, qui elle est satisfaisante. C'est une notion plus forte, puisque l'existence de la différentielle implique en particulier l'existence des dérivées partielles. Malheureusement c'est aussi une notion plus compliquée, alors que les dérivées partielles ne sont finalement que des dérivées usuelles.

Le but de ce paragraphe est maintenant d'introduire les fonctions de classe C^1. Cela généralise la notion connue en dimension 1. Mais le véritable intérêt est que c'est une notion plus forte que la différentiabilité, et pourtant plus simple à vérifier. Ainsi, bien souvent, pour montrer qu'une fonction est différentiable, on montrera plutôt qu'elle est de classe C^1 (tout en gardant à l'esprit que ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas C^1 qu'elle n'est pas différentiable...)

Théorème 3.21. *On suppose que toutes les dérivées partielles de f sont définies et continues au voisinage de $a \in \mathcal{U}$. Alors f est différentiable en a.*

Démonstration. Pour alléger les notations on suppose que $n = 2$. Le cas général se montre exactement de la même manière. Pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ avec h_1 et h_2 assez petits on peut définir

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a).$$

On a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2 + h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + t, a_2 + h_2)\,dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + t)\,dt \\ &= h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2)\,ds + h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2)\,ds, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} r(h) = h_1 &\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) ds \\ + h_2 &\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) ds \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les dérivées partielles de f sont continues en a, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in [-\delta, \delta]$ et $s \in [0,1]$ on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + sh_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2 + sh_2) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon.$$

Cela prouve que $|r(h)| \leqslant \varepsilon \max(|h_1|, |h_2|)$, et finalement $r(h) = \underset{h\to 0}{o}(\|h\|)$. D'où le résultat. $\square$

Définition 3.22. On dit que f est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$ si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.

Définition 3.23. Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ si f est une bijection de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$, est de classe C^1 sur $\mathcal{U}$, et si sa réciproque f^{-1} est C^1 sur $\mathcal{V}$.

Remarque 3.24. Si f est un C^1-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ est ouvert, alors $f(\mathcal{W})$ est ouvert comme image réciproque de $\mathcal{W}$ par l'application continue f^{-1}.

3.4 Inégalité des accroissements finis

On a déjà dit que le théorème de Rolle et ses applications (en particulier le théorème des accroissements finis) n'étaient plus valables pour des fonctions de plusieurs variables. Sous une condition de type convexité, on va tout de même pouvoir montrer un analogue à l'inégalité des accroissements finis.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe C^1.

Théorème 3.25 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tels que*

$$[a;b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0,1]\} \subset \mathcal{U}.$$

Alors on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \|b-a\| \sup_{x\in[a,b]} |||d_x f|||.$$

Démonstration. On considère l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^p \\ t & \mapsto & f(a+t(b-a)) \end{array} \right.$$

Par composition de fonctions de classe C^1 on obtient que g est de classe C^1 sur $[0,1]$ et

$$\forall t \in [0,1], \quad g'(t) = d_{a+t(b-a)} f(b-a).$$

Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a alors

$$\|g'(t)\| \leqslant |||d_{a+t(b-a)} f||| \, \|b-a\| \leqslant \|b-a\| \sup_{x\in[a,b]} |||d_x f|||.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle on a

$$\|f(b)-f(a)\| = \|g(1)-g(0)\| \leqslant |1-0| \, \|b-a\| \sup_{x\in[a,b]} |||d_x f||| \leqslant \|b-a\| \sup_{x\in[a,b]} |||d_x f|||.$$

D'où le résultat. $\square$

Corollaire 3.26. *On suppose que $\mathcal{U}$ est convexe. Si toutes les dérivées partielles de f sont nulles sur $\mathcal{U}$ alors f est constante sur $\mathcal{U}$.*

Remarque 3.27. Revenons sur le théorème 2.17. En général, pour montrer qu'une application est contractante, on utilise l'inégalité de la moyenne : si f est différentiable sur le convexe Ω et s'il existe $K \in [0,1[$ tel que $\|df(x)\| \leqslant K$ pour tout $x \in \Omega$, alors f est K-contractante sur Ω.

3.5 Équations aux dérivées partielles

On appelle équation aux dérivées partielles une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir les dérivées partielles de cette inconnue.

L'étude des équations aux dérivées partielles (EDP pour les intimes) est une branche importante de la recherche en mathématiques et ses applications sont très nombreuses en physique. La théorie « générale » des EDP dépasse largement le cadre de ce cours, mais on est tout de même capables de discuter les cas les plus simples.

En guise d'exemple, on considère le problème de transport suivant :

Exemple 3.28. Étant donnés $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, déterminer l'ensemble des fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \tag{3.1}$$

et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{3.2}$$

On connait la fonction u à l'instant initial $t = 0$, on cherche à déterminer ce qu'elle deviendra dans le futur, à partir d'une égalité faisant intervenir sa dérivée par rapport au temps t.

On commence par supposer que u est solution et on considère la fonction $\tilde{u}$ qui à $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ associe $\tilde{u}(t,y) = u(t, y + ct)$. $\tilde{u}$ est alors une fonction de classe C^1 (comme composée des fonctions u et $(t,y) \mapsto (t, y+ct)$). En outre pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, y+ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, y+ct) = 0.$$

Cela prouve que pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'application $t \mapsto \tilde{u}(t,y)$ est constante, et donc pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\tilde{u}(t,y) = \tilde{u}(0,y) = u_0(y).$$

Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$u(t,x) = \tilde{u}(t, x - ct) = u_0(x - ct). \tag{3.3}$$

Cela prouve que s'il existe une solution, c'est forcément cette fonction là. Inversement on vérifie la fonction u ainsi définie est bien solution. Il s'agit encore de calculer les dérivées partielles d'une fonction composée : pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ on a bien $u(0,x) = u_0(x)$ et de plus

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -cu_0'(x-ct) + cu_0'(x-ct) = 0.$$

Cela prouve que u est solution. Finalement le problème (3.1)-(3.2) admet une unique solution, c'est la fonction u donnée par (3.3).

3.6 Exercices

***Exercice* 9.** Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on pose

$$f(x) = \langle u(x), x \rangle,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$. Étudier la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^n$.

***Exercice* 10.** Montrer que l'application $x \mapsto \|x\|$ (où $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$) n'est pas différentiable en 0.

***Exercice* 11.** Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x)| \leqslant \|x\|_2^2.$$

1. Montrer que f est différentiable en 0 et donner sa différentielle.
2. Interpréter ce résultat géométriquement.
3. Mêmes questions en remplaçant $\|x\|_2^2$ par $\|x\|_1^2$ et $\|x\|_\infty^2$.

***Exercice* 12.** Si une mole de gaz parfait occupe le volume V à la température T et à la pression P alors on a $PV = RT$, où R est une constante. Montrer qu'on a

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1 \quad \text{et} \quad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Attention, s'il n'y a pas de difficulté calculatoire dans cet exercice, il faut faire attention à l'utilisation des notations « physiques ».

***Exercice* 13** (Existence des dérivées directionnelles n'implique pas continuité)**.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet en (0,0) une dérivée selon tout vecteur et la calculer.
2. Montrer que f n'est pas continue en 0.

***Exercice* 14.** Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs jacobiennes :

$$f_1 : (x,y,z) \mapsto \left(\frac{x^2-z^2}{2}, \sin(x)\sin(y)\right), \quad f_2 : (x,y) \mapsto \left(xy, \frac{x^2}{2}+y^2, \ln\left(1+x^2\right)\right).$$

***Exercice* 15.** Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Après en avoir vérifié l'existence, exprimer en fonction de f' les dérivées partielles des fonctions

$$g : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad \text{et} \quad h : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \mapsto & f(z\sin(x)) \end{cases}$$

***Exercice* 16.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ on pose

$$g_1(x) = f(x,-x), \quad g_2(x,y) = f(y,x), \quad g_3(x) = f(x, f(x,x)), \quad g_4(x,y) = f(y, f(x,x)).$$

Montrer que ces fonctions sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, et calculer leurs dérivées (partielles) en fonction des dérivées partielles de f.

***Exercice* 17.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 18.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^4+y^2}. & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 19.** On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \inf(x^2, y^2)$. Déterminer en quels points la fonction f est continue, admet des dérivées partielles, est différentiable. Déterminer le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est C^1.

***Exercice* 20** (Coordonnées polaires)**.** On note $D = \mathbb{R}_- \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$. Pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ on note $\psi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. On admet que ψ réalise un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus D$ et $g = f \circ \psi$.
1. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[$.
2. Exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
3. Sans chercher à expliciter ψ^{-1}, exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g.
On pourra montrer que ψ est bien un difféomorphisme en utilisant le théorème de l'inversion globale. Ici on aurait pu le faire directement en explicitant ψ^{-1}.

***Exercice* 21.** Pour $(x, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on pose $\psi(x, \theta) = (x, x\tan(\theta))$.
1. Montrer que ψ est un difféomorphisme de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $g = f \circ \psi$.
  a. Montrer que g est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
  b. Calculer $\partial_x g$ en fonction des dérivées partielles de f.
  c. Interpréter « géométriquement » la différence entre $\partial_x g$ et $\partial_x f$.

***Exercice* 22.** Soit $k \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = kf(x,y).$$

Indication : on pourra effectuer le changement de variables $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$.

***Exercice* 23.** Déterminer l'ensemble des fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

***Exercice* 24** (Équation d'Euler)**.** Soient $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(tx) = t^\alpha f(x)$$

(f est positivement homogène de degré α) si et seulement si

$$\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \cdots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x).$$