Exercice 1

On note $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $M_3(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille 3. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base $\mathcal{C}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 13 & -21 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le noyau $\ker(f)$ de f. On note u le vecteur de $\ker(f)$ dont la 1ère coordonnée dans la base $\mathcal{C}$ est -1.
2. La matrice A est-elle inversible ? Quelle est la dimension de l'image de A ?
3. Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ tel que $f(v) = u$ et tel que la 1ère coordonnée de v dans la base $\mathcal{C}$ soit 2.
4. Soit $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Calculer les coordonnées de $f(w)$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire la matrice N de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. (a) On note P la matrice dont les colonnes sont u, v, w. Calculer P^{-1}.
   (b) Calculer PNP^{-1}.
   (c) Quelles sont les valeurs propres de A ? La matrice est-elle trigonalisable ? Diagonalisable ?
   (d) Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. *(4 points)*

Le but de ce problème est de déterminer toutes les matrices $X \in M_2(\mathbb{R})$ solutions de l'équation $X^2 = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ associée à la matrice A dans la base canonique. Id désignera l'application linéaire identité de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Partie A : Puissances de A

1. Montrer que $F_1 = \ker(f - Id)$ est un sous-espace propre de f de dimension 1. Donner un vecteur ε_1 non nul de F_1.
2. Montrer que 3 est une valeur propre de f et donner un vecteur ε_3 associé.
3. Donner, sans calculs, la matrice de l'application linéaire f dans la base $B_\varepsilon = (\varepsilon_1; \varepsilon_3)$.
4. En déduire qu'il existe une matrice D, diagonale, et P, inversible tel que $A = PDP^{-1}$ (on précisera P et P^{-1}).
   On rappelle que P ainsi définie est la matrice de l'application Id de $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base $(\varepsilon_1; \varepsilon_3)$.
5. Expliciter D^n et montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. Montrer que $A^n = 3^nB + C$ avec $B \in M_2(\mathbb{R})$ et $C \in M_2(\mathbb{R})$ deux matrices que l'on explicitera.

Partie B : Résolution de l'équation

1. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = D$.
   Montrer que $MD = DM$ et en déduire que M est diagonale.
   Expliciter les différentes solutions que l'on notera M_1, M_2 ...
2. Soit $X \in M_2(\mathbb{R})$. En étudiant $M = P^{-1}XP$, déterminer une écriture des matrices X solutions de l'équation $X^2 = A$ (on demande d'exprimer ces solutions à l'aide des matrices M_i, P et P^{-1}).
3. On note $X_1, \dots X_m$ les solutions de l'équation $X^2 = A$.
   Sans calculer explicitement les m solutions, déterminer leur somme $S = X_1 + \dots + X_m$ et leur produit $\Pi = X_1X_2 \dots X_m$.

Exercice III .... 5 pts

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est notée M. On suppose que f est diagonalisable. On rappelle que $f^2 = f \circ f$.
   (a) Montrer que f^2 est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f^2 en fonction de celles de f.
2. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer la matrice A^2 puis montrer que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (b) Analyse du spectre de g
      i. Donner une base (u) de $\ker(g - Id)$.
      ii. Déterminer $\ker(g + Id)$. Donner la dimension de cet espace. La valeur -1 est-elle valeur propre de A ?
      iii. En déduire que g n'est pas diagonalisable.
   (c) Analyse du spectre de g^2
      i. Résoudre $A^2X = -X$ où X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base (v, w) de $\ker(g^2 + Id)$.
      ii. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iii. Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w).
3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que f^2 soit diagonalisable. A-t-on nécessairement f diagonalisable ?

Exercice 4 (Oral 2018)

Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A, B et C. À l'instant $t = 0$, il se trouve au point A. Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre un autre point d'eau. L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note A_n l'évènement « l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet »,
B_n l'évènement « l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet »,
C_n l'évènement « l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet ».

On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

   (b) Exprimer de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable.

   (b) Prouver que $-\frac{1}{2}$ est une valeur propre de A et déterminer le sous-espace propre associé.

   (c) Déterminer une matrice P inversible et une matrice D diadonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $D = P^{-1}AP$. *On ne demande pas de calculer P^{-1} explicitement !*

3. Montrer comment les résultats de la question 2 peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n. *On ne demande pas de calculer explicitement a_n, b_n et c_n.*

Exercice 5 : (oral 2018)

résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$