

Exercice

Soit X , 1 variable aléatoire discrète dont les n valeurs x_1, x_2, \dots, x_n sont comprises dans un intervalle $[a ; b]$.

Montrer que son espérance appartient à l'intervalle $[a ; b]$.

Problème 3 ♥♥

Soit $(a, b) \in]0; 1[^2$ vérifiant $a + b < 1$. Soit X une variable aléatoire discrète dont la distribution est donnée par :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{avec probabilité } a \\ 0, & \text{avec probabilité } 1 - (a + b) \\ -1, & \text{avec probabilité } b \end{cases}$$

1. Calculez l'espérance de X .
2. On pose $Y = X^2$.
 - (a) Quelle est la loi de Y ?
 - (b) Calculez l'espérance de Y .
 - (c) Combien vaut la variance de X ?
 - (d) Calculez la variance de Y .
 - (e) Quelle est la loi de $P = \frac{Y+X}{2}$?
 - (f) Quelle est la loi de $M = \frac{Y-X}{2}$?
3. Calculez
 - (a) $\mathbb{P}(X = 1/Y = 1)$,
 - (b) $\mathbb{P}(Y = 1/X = 1)$,
 - (c) $\mathbb{P}(P = M)$,
 - (d) $\mathbb{P}(PM = 0)$.
4. (a) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbb{P}(X = 1/Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0/P = 0) ? \quad (4a)$$

Représentez l'ensemble des solutions dans un plan cartésien.

- (b) Pour quelles valeurs de a et b a-t-on l'égalité

$$\mathbb{P}(X = -1/Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0/M = 0) ? \quad (4b)$$

Représentez l'ensemble des solutions sur le graphique précédent.

- (c) Les deux équations (4a) et (4b) peuvent-elles être simultanément vérifiées ?

Problème 2 ♥

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k ($1 \leq k \leq 6$).

Ce dé a été pipé de telle sorte que les 6 faces ne sont pas équiprobables :

les nombres $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, dans cet ordre, sont les 6 premiers termes d'une suite arithmétique

et les nombres p_1, p_3 et p_6 , dans cet ordre, sont 3 termes consécutifs d'une suite géométrique.

1) Démontrer que $p_k = (3+k)/39$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 6$

2) On lance ce dé une fois et on considère les événements suivants :

A : « Le nombre obtenu est pair »

B : « Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »

C : « Le nombre obtenu est 3 ou 4 »

2.1) Calculer la probabilité de chacun de ces événements

2.2) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3 sachant qu'il est pair

2.3) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?

3) On va lancer 60 fois ce dé et l'on vous propose de parier :

vous gagnez un euro si le tirage est pair

et vous perdez un euro sinon.

Calculer votre espérance de gain.

4) On lance le dé 60 fois et pour chaque valeur possible $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, on note le nombre de fois n_i que cette valeur i a été obtenue.

On obtient les résultats suivants :

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|
| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| n_i | 6 | 6 | 9 | 11 | 12 | 16 |

4.1) Quel est votre gain ?

4.2) Proposez une estimation de la probabilité de l'événement A