

Problème 2

1)  $p_1, \dots, p_6$  sont les 6 premiers termes d'une suite arithmétique

$$(I) \begin{cases} p_2 = p_1 + r \\ p_3 = p_1 + 2r \\ p_4 = p_1 + 3r \\ p_5 = p_1 + 4r \\ p_6 = p_1 + 5r \end{cases}$$

$p_1, p_3$  et  $p_6$  sont 3 termes consécutifs d'une géométrique :

$$(II) \begin{cases} p_3 = q \cdot p_1 \\ p_6 = q^2 \cdot p_1 \end{cases}$$

\* valeur de  $q$  ?

On a donc :  $\begin{cases} q \cdot p_1 = p_1 + 2r = p_3 \\ q^2 \cdot p_1 = p_1 + 5r = p_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (q-1)p_1 = 2r \\ (q^2-1)p_1 = 5r \end{cases}$

donc :  $\frac{q^2-1}{q-1} = \frac{5r}{2r} \Leftrightarrow q+1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q = \frac{3}{2}$

\* valeur de  $r$  ?

en remplaçant dans (II), on a :  $\begin{cases} p_3 = \frac{3}{2} p_1 \\ p_6 = \frac{9}{4} p_1 \end{cases}$

On a donc :  $\begin{cases} \frac{3}{2} p_1 = p_1 + 2r \\ \frac{9}{4} p_1 = p_1 + 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p_1}{2} = 2r \\ \frac{5p_1}{4} = 5r \end{cases}$

donc :  $r = \frac{p_1}{4}$

\* valeur de  $p_1$  ?  $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$  [la somme des probabilités vaut 1]

$$p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r + p_1 + 4r + p_1 + 5r = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 + p_1 + \frac{p_1}{4} + p_1 + \frac{p_1}{2} + p_1 + \frac{3p_1}{2} + p_1 + p_1 + p_1 + \frac{5p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{39p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{4}{39}$$

En remplaçant dans (I), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{4}{39} \\ p_2 = \frac{5}{39} \\ p_3 = \frac{6}{39} \\ p_4 = \frac{7}{39} \\ p_5 = \frac{8}{39} \\ p_6 = \frac{9}{39}. \end{array} \right.$$

On a bien:  $p_k = \frac{3+k}{39}$  pour  $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$

2)

a)  $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}$

$P(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$

$P(C) = p_3 + p_4 = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$

b)  $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{p_4 + p_6}{p_2 + p_4 + p_6} = \frac{\frac{16}{39}}{\frac{21}{39}} = \frac{16}{21}$

c)  $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{16}{21} \cdot \frac{21}{39} = \frac{16}{39}$

$P(A) = \frac{7}{13}$

$P(B) = \frac{10}{13}$

donc:  $P(A) \cdot P(B) = \frac{70}{169} \neq P(A \cap B)$  donc A et B ne sont pas indépendants.

\*  $P(A \cap C) = p_4 = \frac{7}{39}$

et:  $P(A) = \frac{7}{13}$

et:  $P(C) = \frac{1}{3}$

donc:  $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$  donc A et C sont indépendants

(3)

3) Soit  $X_i$ , la v.a.d. qui correspond au gain du  $i^{\text{e}}$  lancer pour  $i \in [1; 60]$  $X_i : \Omega \rightarrow \{-1; 1\}$  [elle n'est pas à valeur dans  $\{0; 1\}$  donc elle n'a pas la loi de Bernoulli.]

avec:  $P[X_i = -1] = P[B] = 1 - P[A] = \frac{6}{13}$

et:  $P[X_i = 1] = P[A] = \frac{7}{13}$

Soit  $X = \sum_{i=1}^{60} X_i$ , la v.a.d. correspondant au gain

$E[X] = \sum_{i=1}^{60} E[X_i]$

d:  $E[X_i] = -1 \cdot P[X_i = -1] + 1 \cdot P[X_i = 1] = -1 \cdot (1 - P[A]) + 1 \cdot P[A] = -1 + 2 \cdot P[A] = \frac{1}{13}$

donc:  $E[X] = \frac{60}{13}$

4) gain?  $23 - 21 = 2$

\* estimer  $P[A]$ ?

$E[X_1] = -1 + 2 \cdot P[A]$

$\Leftrightarrow P[A] = \frac{E[X_1] + 1}{2}$

Rappel du cours: Etant donné qu'on répète l'expérience 1 grand nombre de fois (60)  
on peut estimer l'espérance par la moyenne des résultats

En notant  $x_i$  le gain obtenu au  $i^{\text{e}}$  lancer,  $E[X_1]$  a pour estimation:  $\frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} = \frac{\text{gain}}{60} = \frac{1}{30}$

donc:  $P[A]$  a pour estimation:  $\frac{\frac{\sum_{i=1}^{60} x_i}{60} + 1}{2} = \frac{\frac{31}{30}}{2} = \frac{31}{60}$

Exercisesat  $x \in X(\Omega)$ ,  $a \leq x \leq b$ 

$$\Rightarrow a \cdot P(X=x) \leq x \cdot P(X=x) \leq b \cdot P(X=x)$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X(\Omega)} a \cdot P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} b \cdot P(X=x)$$

$$\Rightarrow a \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x) \leq E[X] \leq b \cdot \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)$$

$$\Rightarrow a \leq \underline{E[X]} \leq b$$

P6.3

$$1) E[X] = \sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) = \sum_{x \in \{-1; 0; 1\}} x \cdot P(X=x) = a - b$$

$$2) Y = X^2$$

$$(a) Y: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$$

$$P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = 1 - (a+b)$$

$$P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = a+b$$

$$(b) E[Y] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y \cdot P(Y=y) = \sum_{y=0}^1 y \cdot P(X^2=y) = P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = a+b$$

$$(c) V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - (a+b)^2$$

$$E[X^2] = E[Y] = a+b$$

$$\text{dann: } V[X] = a+b - (a+b)^2$$

$$(d) V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2 = E[Y^2] - (a+b)^2$$

$$E[Y^2] = \sum_{y \in Y(\Omega)} y^2 P(Y=y) = \sum_{y=0}^1 y^2 P(Y=y) = P(Y=1) = a+b$$

$$\underline{V[Y]} = a+b - (a+b)^2$$

(5)

$$e) P = \frac{X+Y}{2} = \frac{X+X^2}{2}$$

$P: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$

$$\begin{aligned} P(P=1) &= P\left(\frac{X+X^2}{2} = 1\right) = P(X^2 + X - 2 = 0) = P((X-1)(X+2) = 0) \\ &= P(\{X=1\} \cup \{X=-2\}) = P(X=1) + P(X=-2) \\ &= P(X=1) = a \end{aligned}$$

$$P(P=0) = 1 - P(P=1) = 1 - a$$

$$(F) M = \frac{Y-X}{2} = \frac{X^2-X}{2} = \frac{X(1-X)}{2}$$

$M: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$

$$P(M=0) = P(X(1-X)=0) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = P(X=0) + P(X=1) = 1 - b$$

$$P(M=1) = 1 - P(M=0) = b$$

3)

$$(a) P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, X^2=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, X=-1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{a}{a+b}$$

$$(b) P(X=1|X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)} = 1$$

$$(c) P(P=M) = P\left(\frac{Y+X}{2} = \frac{Y-X}{2}\right) = P(X+Y=Y-X) = P(2X=0) = P(X=0) = 1 - (a+b)$$

$$\begin{aligned} (d) P(PM=0) &= P\left(\frac{Y^2-X^2}{4}=0\right) = P(X^4-X^2=0) = P(X^2(X-1)(X+1)=0) \\ &= P(X=0 \cup X=-1 \cup X=1) \\ &= P(X=0) + P(X=-1) + P(X=1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(6)

4)

$$(a) P(X=1|Y=1) = P(X=0|P=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|Y+X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|X^2+X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|X(X+1)=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{P(X=0)}{P(X=0) + P(X=-1)}$$

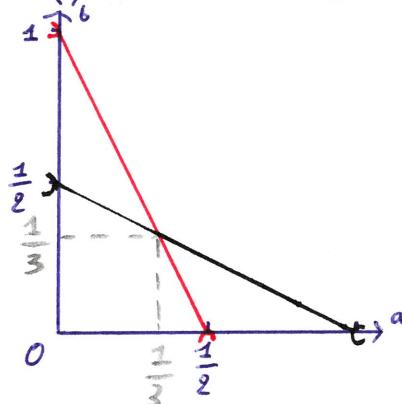
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{1-(a+b)}{1-a}$$

$$\Leftrightarrow a(1-a) = (1-a-b)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a - a^2 = a + b - a^2 - ab - ab - b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = b - 2ab - b^2$$

$$\Leftrightarrow b(1-2a-b) = 0 \Leftrightarrow b=0 \text{ OU } b=1-2a \Leftrightarrow \underline{b=1-2a}$$



$$(b) P(X=-1|Y=1) = P(X=0|M=0)$$

$$\Leftrightarrow P(X=-1|Y=1) = P(X=0|X^2-X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X=-1)}{P(Y=1)} = P(X=0|X(X-1)=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{P(X=0)}{P(X=0) + P(X=1)} = \frac{1-a-b}{1-b}$$

$$\Leftrightarrow 1-a-b(a+b) = b(1-b)$$

$$\Leftrightarrow a+b-a^2-ab-ab^2 = b-b^2$$

$$\Leftrightarrow a-2ab-a^2=0 \Leftrightarrow a(1-2b-a)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ OU } a=1-2b \Leftrightarrow \underline{a=1-2b}$$

$$(c) (4a) \text{ et } (4b) \text{ sont simultanément vérifiés si: } a=b=\frac{1}{3}$$