INTEGRALES DE RIEMANN

I) Les fonctions étudiées :

On ne calcule l'intégrale de Riemann que pour les fonctions continues ou continues par morceaux.

* déf d'1 fonction continue par morceaux sur 1 intervalle $[a;b]$:

f est continue par morceaux sur $[a;b]$ si il existe n points $(x_1, \dots, x_n)$ tq :

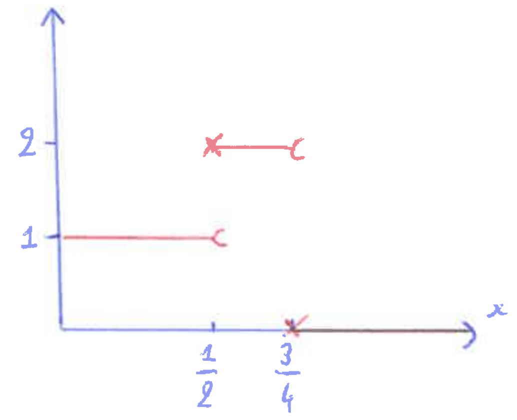
$\forall i \in [\![1;n]\!]$, $x_i \in [a;b]$

$\forall i \in [\![1;n-1]\!]$, la fonction f est continue sur $]x_i\,;\,x_{i+1}[$

et admet 1 limite à droite en x_i et 1 limite à gauche en x_{i+1}

ex : $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto \mathbb{1}_{[0;\frac{1}{2}[}(x) + 2 . \mathbb{1}_{[\frac{1}{2};\frac{3}{4}[}(x)$



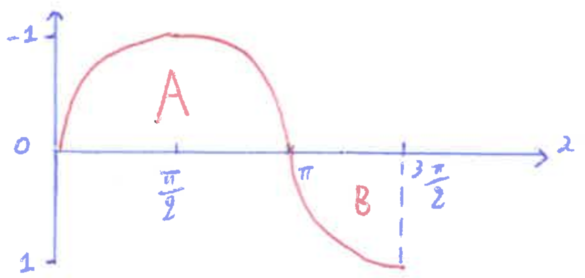
II) objectif : calculer 1 aire algébrique :

l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$, notée $\int_a^b f(t)\,dt$

est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

ex : $f : [0;\frac{3\pi}{2}] \to [-1;1]$

$x \mapsto \sin(x)$



on a : $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sin(t)\,dt = A - B$

III) propriété des intégrales :

① linéarité : si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a;b]$

alors $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\int_a^b (\lambda f(t)+\mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt$

② relation de Chasles : si f est continue (par morceaux) sur $[a;b]$

alors : $\forall c \in]a;b[$, $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

③ inégalités et intégrales :

* Th : si f est continue (par morceaux) sur $[a;b]$
  et $\forall x \in [a;b]$, $f(x)\geqslant 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$

* Th : si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a;b]$
  et $\forall x \in [a;b]$, $f(x)\leqslant g(x)$ alors : $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

* Th : si f est continue sur $[a;b]$

① si $\forall x \in [a;b]$, $f(x) > 0$ alors $\int_a^b f(t)\,dt > 0$

② si $\forall x \in [a;b]$, $f(x)\geqslant 0$ et $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ alors : $\forall x \in [a;b]$, $f(x)=0$

* Th : si f est continue (par morceaux) sur $[a;b]$
  alors : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$

* inégalité de Cauchy-Schwartz : si f et g sont continues (par morceaux) sur $[a;b]$

alors : $\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_a^b f(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$

IV) valeur de l'intégrale :

Soit I, 1 intervalle de $\mathbb{R}$ et f 1 fonction continue (par morceaux) sur I

1) si $I = [a;b]$ alors : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

2) si $I =]a;b]$ et f a 1 limite finie en a

alors : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

ex : $I =]0;1]$ et $f :]0;1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$

on a : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$

donc : $\int_0^1 e^{-\frac{1}{x}}\,dx$ converge

3) si $I = [a;b[$ et f a 1 limite finie en b

alors : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

ex : $I = [0;+\infty[$ et $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \longmapsto e^{-x}$

on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$

donc : $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ converge

4) si $I =]a;b[$ et f admet 1 limite en a et en b alors : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

ex : $I =]-\infty;+\infty[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} e^{x} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) $f \in \mathcal{C}(]-\infty;0[)$ car e^{x} est continue sur $\mathbb{R}^{-*}$

$f \in \mathcal{C}([0;+\infty[)$ car e^{-x} est continue sur $\mathbb{R}^{+}$

f est continue en 0 car $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^{x} = 1 = f(0)$

donc f est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

Remarques : f est dérivable sur $]-\infty;0[$ ($[0;+\infty[$) car e^x (e^{-x}) est dérivable sur cet intervalle.

est-elle dérivable en 0 ?

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{x} = 1 \text{ car } e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1+x \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x}{x} = -1 \text{ car } e^{-x} \underset{x\to 0}{\sim} 1-x\end{array}\right\} f \text{ n'est pas dérivable en } 0$$

V) Primitives :

1 déf : Soit f 1 fonction définie sur 1 intervalle I

F est 1 primitive de f sur I si 1 F est dérivable sur I

2 $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

2 Comment calculer 1 primitive ?

* Th : Soit f 1 fonction continue sur 1 intervalle I

1) f admet au - 1 primitive sur I

2) $\forall a \in I$, la fonction $F : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est 1 primitive de f sur I

3) toute primitive de f s'écrit $F(x)+C$ avec $C \in \mathbb{R}$

4) en particulier, F est la seule primitive de f qui s'annule en a.

3 Th fondamental de l'analyse :

Si $f \in \mathcal{C}([a;b])$ et F est 1 primitive de f

alors : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$

4 La liste des primitives usuelles est donnée en supplément

IV) intégration par parties :

Th : Si u et v sont $\mathcal{C}^1([a,b])$

alors : $$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

*** Ex :** $\displaystyle\int_0^1 x e^x\,dx$.

on intègre par parties en posant :

$u'(x) = e^x \Rightarrow u(x) = e^x$

$v(x) = x \Rightarrow v'(x) = 1$

on obtient : $$\int_0^1 x e^x\,dx = \Big[x e^x\Big]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - \Big[e^x\Big]_{x=0}^{x=1} = e - (e-1) = 1$$

V) changement de variable :

Th : Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1([a;b])$ et f continue sur $\varphi([a;b])$

alors : $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

*** Ex :** $$\int_0^X \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^X \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx \qquad [X \in \mathbb{R} \text{ et } a > 1]$$

on pose le changement de variable : $t = \dfrac{x}{a}$ donc : $x = at$ et $dx = a\,dt$

quand x varie de 0 à X, t varie de 0 à $\dfrac{X}{a}$

$$\frac{1}{a^2}\int_0^X \frac{1}{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{t^2+1}\,.a\,dt = \frac{1}{a}\int_0^{\frac{X}{a}} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\Big[\operatorname{Arctan}(t)\Big]_{t=0}^{t=\frac{X}{a}} = \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{X}{a}\right)$$

En particulier $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\left(\frac{X}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$$