DIAGONALISATION

ex 1 :

1) soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(f)$

$f(v) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow A\,v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 13 & -21 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 2z = 0 \\ 5x + 13y - 21z = 0 \\ 3x + 8y - 13z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 0 \\ 3x + 8y - 13z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

on applique la méthode du pivot de Gauss : (L_1) est la ligne-pivot

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 0 & (L_1) \\ \frac{1}{5} y - \frac{2}{5} z = 0 & (L_2 - \frac{3}{5} \times L_1) \\ y - 2z = 0 & (L_3) \end{cases}$

(L_2) et (L_3) sont équivalentes donc on n'en garde qu'une seule ligne

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = -13y + 21z = -26z + 21z = -5z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases}$

donc : $v = z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où : $\ker(f) = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) * $\ker(f) \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ donc f n'est pas injective donc f n'est pas bijective donc : A n'est pas inversible

* d'après le théorème du rang : $3 = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(f)) = 3 - 1 = 2$

3) on pose $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$$f(v) = u \iff Av = u \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 13 & -21 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} y - 2z = -1 \\ 5x + 13y - 21z = 2 \\ 3x + 8y - 13z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 2 \\ 3x + 8y - 13z = 1 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

on applique la méthode du pivot de Gauss

$$\iff \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 2 & (L_1) \\ \frac{1}{5} y - \frac{2}{5} z = \frac{-1}{5} & (L_2 - \frac{3}{5} \cdot L_1) \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

(L_2) et (L_3) sont des lignes équivalentes

$$\iff \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 2 \\ y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x + 13y - 21z = 2 \\ y = -1 + 2z \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} 5x = 2 + 21z - 13y = 2 + 21z + 13 - 26z = 15 - 5z \\ y = -1 + 2z \\ z = z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3 - z \\ y = -1 + 2z \\ z = z \end{cases}$$

donc $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

pour $z = 1$, on a : $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) * on va montrer que : $(u; v; w)$ sont linéairement indépendants

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que : $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Leftrightarrow \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 & (L_1) \\ -\beta - \gamma = 0 & (L_2 - 2L_1) \\ 3\beta - 2\gamma = 0 & (L_3 + L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 & (L_1) \\ -\beta - \gamma = 0 & (L_2) \\ -5\gamma = 0 & (L_3 + 3L_2) \end{cases}$$

donc : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

(u, v, w) sont linéairement indépendants.

u, v et w étant 3 vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^3$, ils forment 1 base de $\mathbb{R}^3$.

5) $$f(w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 13 & -21 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = u + v$$

$$N = \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ f(u) \quad f(v) \quad f(w) \end{array}$$

6)

(a) $$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \cdot \operatorname{com}(P)^t$$

$$\det(P) = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -(-2+3) - 2(-4+3) = -1+2 = 1$$

$$\mathrm{com}(P) = \begin{pmatrix} 1 & +1 & 1 \\ +4 & 2 & +3 \\ -6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

donc : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

(b) $PNP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 13 & -21 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix} = A$$

(c) * valeurs propres de A ?

$$\mathcal{P}_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -2 \\ 5 & 13-\lambda & -21 \\ 3 & 8 & -13-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 13-\lambda & -21 \\ 8 & -13-\lambda \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -21 \\ 3 & -13-\lambda \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 13-\lambda \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-169 - 13\lambda + 13\lambda + \lambda^2 + 168) - (-65 - 5\lambda + 63) - 2(40 - 39 + 3\lambda)$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-5\lambda - 2) - 2(1 + 3\lambda)$$

$$= -\lambda^3 + \lambda + 5\lambda + 2 - 2 - 6\lambda$$

$$= -\lambda^3$$

A n'a qu'une seule valeur propre qui est 0.

* $\dim \mathrm{Ker}(A) = 1 \neq 3$ donc A n'est pas diagonalisable
* Par contre, A est trigonalisable dans la base (u, v, w)

Dans cette base, la matrice de l'application associée à A est : $N = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $A^k = P N^k P^{-1}$

or : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et : $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

donc : $A^0 = I_3$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 5 & 13 & -21 \\ 3 & 8 & -13 \end{pmatrix}$

$A^2 = P N^2 P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

$A^3 = P^{-1} N^3 P = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

pour $k > 3$, $A^k = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$

ex 2

partie A :

1) $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f - Id)$

$\Leftrightarrow (A - I_2)\, v = 0_{\mathbb{R}^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 4y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = y \end{cases}$

donc : $v = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d'où : $\operatorname{Ker}(f - Id) = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ donc 1 est valeur propre de f et $\operatorname{Ker}(f - Id)$ est le sous-espace propre associé

$\dim \operatorname{Ker}(f - Id) = 1$

on peut poser : $\mathcal{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) * $P_A(3) = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$ donc : 3 est valeur propre de f.

* $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f - 3Id)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ y = y \end{cases}$

donc : $v = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

on peut poser : $\mathcal{E}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3) $f(\mathcal{E}_1) = \mathcal{E}_1$
$f(\mathcal{E}_3) = 3\mathcal{E}_3$ donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$

4) Soit on pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_3)$

et $P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

on a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = P^{-1}AP$

donc : on pose $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

on a : $A = PDP^{-1}$

5) * $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

* on va montrer (P_n) : $A^n = PD^nP^{-1}$

(P_1) est vraie : $A = PDP^{-1}$

On suppose (P_n) vraie a-t-on P_{n+1} vraie

$$A^{n+1} = A \cdot A^n$$
$$= A \cdot PD^nP^{-1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence}$$
$$= PD\underbrace{P^{-1} \cdot P}D^nP^{-1}$$
$$= PDI_2D^nP^{-1}$$
$$= PD^{n+1}P^{-1}$$

donc : (P_{n+1}) est vraie

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

6) $$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3^n & -3^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1+2.3^n & 2-2.3^n \\ -1+3^n & 2-3^n \end{pmatrix} = 3^n \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

partie B :

1) * $MD = M \cdot M^2 = M^3$

$DM = M^2 \cdot M = M^3$

donc : $MD = DM$

* $$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$MD = DM \iff \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} m_{11} & 3m_{12} \\ m_{21} & 3m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ 3m_{21} & 3m_{22} \end{pmatrix} \iff \begin{cases} m_{11} = m_{11} \\ 3m_{12} = m_{12} \\ m_{21} = 3m_{21} \\ 3m_{22} = 3m_{22} \end{cases} \iff \begin{cases} 2m_{12} = 0 \\ 2m_{22} = 0 \end{cases}$$

donc : $m_{12} = m_{22} = 0$

donc : M est diagonale

* $M^2 = D$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} m_{11}^2 & 0 \\ 0 & m_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{11}^2 = 1 \\ m_{22}^2 = 3 \end{cases}$$

donc il existe 4 solutions : $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$; $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$; $M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

2) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$M = P^{-1}XP \Leftrightarrow X = PMP^{-1}$

$$X^2 = A \Leftrightarrow (PMP^{-1})^2 = A \Leftrightarrow PMP^{-1}PMP^{-1} = A$$
$$\Leftrightarrow PM^2P^{-1} = A$$
$$\Leftrightarrow M^2 = P^{-1}AP = D$$

donc il existe 4 solutions : $X_i = PM_iP^{-1}$ pour $i \in [\![1;4]\!]$

3) $S = \sum_{i=1}^{4} X_i = \sum_{i=1}^{4} PM_iP^{-1} = P\left(\sum_{i=1}^{4} M_i\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Pi = \prod_{i=1}^{4} X_i = \prod_{i=1}^{4} PM_iP^{-1} = P\prod_{i=1}^{4} M_iP^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}P^{-1} = PD^2P^{-1} = A^2$

$$= \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

ex 4

1)

(a) soit $n \geqslant 0$,

$$a_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_{n+1}, A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}, B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}, C_n)$$

$$= 0 + \mathbb{P}(A_{n+1}, B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}, C_n)$$

$$= \mathbb{P}(A_{n+1} \backslash B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1} \backslash C_n)\mathbb{P}(C_n)$$

$$= \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} c_n$$

(b) De même, on obtient :

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} c_n$$

et : $c_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{2} b_n$

2) (a) A est symétrique donc elle est diagonalisable.

(b) * $\det(A + \frac{1}{2} I) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$ car c'est 1 matrice de rang 1 donc non inversible

$\frac{-1}{2}$ est donc 1 racine du polynôme caractéristique de A donc c'est 1 valeur propre de A.

* $E_{-\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \backslash A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-\frac{1}{2}} \iff \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y = y \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y - z \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

donc : $E_{-\frac{1}{2}} = \mathrm{Vect}\{(-1; 1; 0); (-1; 0; 1)\}$

(c)

* $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}(\frac{-\lambda}{2} - \frac{1}{4}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{2})$

$$P_A(\lambda) = -\lambda^3 + \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{4} = -(\lambda-1)\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2$$

$\lambda = 1$ est valeur propre de A

* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \iff \begin{cases} -x + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} - y + \frac{z}{2} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 3y - 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z - y = z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$

$E_1 = \mathrm{Vect}\{(1;1;1)\}$

* Si on note P la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

on a : $A = PDP^{-1}$

avec : $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) soit $n \geq 1$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= P D^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

* $\det(P) = -1.(-1) - 1.(-2) = 3$

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ +2 & -1 & +1 \\ -1 & +2 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P D^n \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n}{2^n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1)^n}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} P \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \\ 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \end{pmatrix}$

exc 5 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

remarque : les matrices diagonales ont 1 double avantage : - on peut calculer les puissance $n^{\text{èmes}}$ $D^n = \begin{pmatrix} d_1^n & & 0 \\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$

- on peut aussi calculer les racines $n^{\text{èmes}}$

$M^2 = A$

① diagonalisation de A :

$$* \ \mathcal{P}_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$$

Th : le polynôme est scindé et à racines simples donc A est diagonalisable

$* \ E_1 = \operatorname{Ker}(A - I_2)$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_1 \iff A - I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 8y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = x \end{cases}$$

donc : $v = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc : $E_1 = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$* \ E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I_2)$

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E_2 \iff A - 2I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x + 8y = 0 \\ y = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 8y \\ y = y \end{cases}$$

donc : $v = y \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

donc : $E_2 = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$*$ Notons P la matrice de passage de la base canonique vers la base de vecteurs propres

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = PDP^{-1} \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) réécrire l'équation à résoudre :

$$M^2 = A \iff M^2 = PDP^{-1} \iff P^{-1}M^2P = D$$
$$\iff (P^{-1}MP)(P^{-1}MP) = D$$
$$\iff (P^{-1}MP)^2 = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4 solutions possibles :

1) $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$

2) $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$

3) $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$

4) $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \iff M = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$