Problème 1 (ENS Cachan)..4 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{(1/x)}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Etudier la continuité à droite de f en 0. Etudier la continuité à gauche de f en 0. Déterminer si la fonction f est continue en 0.
2. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto 1 + e^t + te^t$. Déterminer à l'aide du tableau de variations de φ le signe de $\varphi(x)$ en fonction de la valeur du nombre réel x.
3. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^*$. Donner le signe de f'.
4. Calculer (si elles existent) les dérivées à gauche et à droite en 0. Que peut-on en conclure ?
5. Tracer le tableau de variations de f.
6. Donner l'allure de la courbe représentative de f au voisinage de l'origine, on précisera en particulier les éventuelles demi-tangentes en 0.
7. Montrer que la fonction admet une asymptote oblique (d'équation $y = ax + b$) au voisinage de $+\infty$. Déterminer les paramètres a et b.

Exercice 2 (concours 2019)..5 points

1. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice associée dans la base canonique est notée M. On suppose que f est diagonalisable. On rappelle que $f^2 = f \circ f$.
   (a) Montrer que f^2 est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f^2 en fonction de celles de f.
2. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
   On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer la matrice A^2 puis montrer que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (b) Analyse du spectre de g
      i. Donner une base (u) de $\ker(g - Id)$.
      ii. Déterminer $\ker(g + Id)$. Donner la dimension de cet espace. La valeur -1 est-elle valeur propre de A ?
      iii. En déduire que g n'est pas diagonalisable.
   (c) Analyse du spectre de g^2
      i. Résoudre $A^2X = -X$ où X est un vecteur de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base (v, w) de $\ker(g^2 + Id)$.
      ii. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
      iii. Écrire la matrice de g^2 dans la base (u, v, w).
3. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que f^2 soit diagonalisable. A-t-on nécessairement f diagonalisable ?

Problème 4 (ENS Cachan).. 3 points

Soit u un réel quelconque et f_u la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_u(x) = \dfrac{(x-u)^2}{x^2+u^2}$

1. Que vaut f_0 ?
2. (a) Pour $u \neq 0$, montrez que f_u est continue et dérivable.
   (b) Calculez sa dérivée f'_u.
   (c) Donnez la limite de f_u lorsque x tend vers $+\infty$.
3. (a) On suppose $u > 0$. Dressez le tableau des variations de f_u.
   (b) Mêmes questions pour $u < 0$.
   (c) Soit u un réel non nul quelconque.
      i. Montrez que f_u admet un maximum global unique et donnez sa valeur.
      ii. Montrez que f_u admet un minimum global unique et donnez sa valeur.
   (d) Représentez graphiquement f_1 sur $[-5; 5]$.

Exercice 5 **(Oral 2019)** .... **5 points**

Soit $F : [\,0\,;\,1\,] \rightarrow R$
telle que $f(x) = px^2 + px + (1-2p)$

et (U_n) la suite définie par $U_0 = 0$
et $U_{n+1} = F(U_n)$ pour $n > 0$

1°)

(a) Dresser le tableau de variation de F sur $[\,0\,;\,1\,]$
(b) Montrer que pour tout entier n, U_n est dans $[\,0\,;\,1]$
(c) Montrer que (U_n) est monotone. Quel est son sens de variation ?
(d) En déduire que (U_n) converge
(e) Déterminer la limite de (U_n) en fonction de p