LES VARIABLES ALEATOIRES

déf: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé
et $(E, \mathcal{E})$ avec 1 ensemble réel et $\mathcal{E}$, 1 tribu sur E
$X : \Omega \to E$ est 1 variable aléatoire de Ω sur E si :

$$\forall A \in \mathcal{E},\ X^{-1}(A) = \{w \in \Omega / X(w) \in A\} \in \mathcal{A}$$

Les Variables aléatoires discrètes

I) déf:

$X : \Omega \to E$ est 1 variable aléatoire discrète de Ω sur E si ① E est fini ou infini dénombrable,
et : ② $\forall A \in \mathcal{P}(E),\ X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

*ex: Soit X représentant le résultat du lancer d'1 dé.
on a : $X : \Omega \to \{1;2;3;4;5;6\} = E$ avec E qui est fini

*remarque: $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ est 1 tribu sur E

II) Loi (ou distribution) d'1 v.a.d :

*déf: c'est l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{E} = \mathcal{P}(E) \to [0;1]$

$$A \mapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}(\underbrace{\{w \in \Omega / X(w) \in A\}}_{\in \mathcal{A}})$$

*prop: $\mathbb{P}_X$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

démo: (i) $\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) = \emptyset\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car $\mathbb{P}$ est 1 probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

(ii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ sont des évènements 2 à 2 disjoints de $\mathcal{E}$

$$\mathbb{P}_X\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} X^{-1}(A_n)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 0} \{w \in \Omega / X(w) \in A_n\}\right)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) \in A_n\})$$ car les $(A_n)_{n \geq 0}$ sont 2 à 2 disjoints

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n))$$ car $\mathbb{P}$ est 1 probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_X(A_n)$$

*remarque: Etant donné que E est fini ou infini dénombrable, la loi de X est donnée à partir de chaque élément de E :
soit $k \in E$, $\mathbb{P}(X = k) = \ldots$

*ex: $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(X=6) = \frac{1}{6}$
défini la loi de X à partir de tous les éléments de $E = [\![1;6]\!]$

III) fonction de répartition d'1 v.a.d :

déf : c'est l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$
$$x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

pq : ① F_X est croissante

② F_X est continue à droite

③ $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

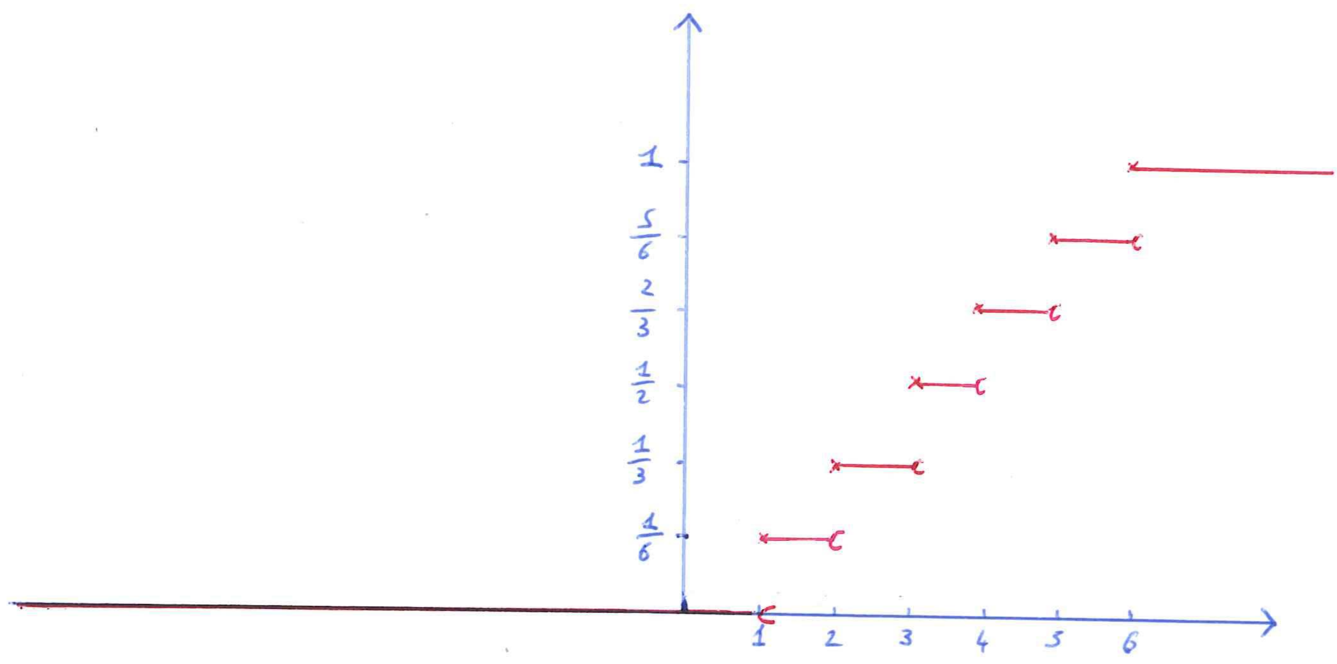
④ soit $y > x$, $F_X(y) - F_X(x) = \mathbb{P}_X(]x;y]) = \mathbb{P}(X^{-1}(]x;y]))$

démo : ① soit x et y tels que : $y > x$, on a : $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$

donc : $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$

$\Rightarrow F_X(x) \leq F(y)$

ex : $F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{6} \text{ si } x \in [1;2[\\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in [2;3[\\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in [3;4[\\ \frac{2}{3} \text{ si } x \in [4;5[\\ \frac{5}{6} \text{ si } x \in [5;6[\\ 1 \text{ si } x \geq 6 \end{cases}$$



IV) espérance d'1 v.a.d :

*** déf :** $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x . \mathbb{P}(X=x)$

*** interprétation :** C'est la valeur qu'on s'attend à trouver si on répète 1 nombre important de fois l'expérience et que l'on calcule la moyenne des résultats.

*** prop :** l'espérance est 1 opération linéaire : Soient X et Y, 2 v.a.d et $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[aX+Y] = a . \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

démo : $X : \Omega \to E$ avec E et F finis ou infinis dénombrables
$Y : \Omega \to F$

$$\mathbb{E}[a.X+Y] = \sum_{(x;y) \in E \times F} (ax+y) \mathbb{P}(aX+Y = ax+y)$$

$$= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} (ax+y) \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} \left[ax \mathbb{P}(X=x, Y=y) + y \mathbb{P}(X=x, Y=y)\right]$$

$$= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} ax \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{y \in F} \sum_{x \in E} y \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x \in E} ax \mathbb{P}(X=x) + \sum_{y \in F} y \mathbb{P}(Y=y) = a . \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

*** ex :** $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in [\![1;6]\!]} x \, \mathbb{P}[X=x] = \frac{1}{6} \sum_{x \in [\![1;6]\!]} x = \frac{1}{6} . \frac{6.7}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

V) variance d'1 v.a.d. :

*** déf :** $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

*** prop :** ① formule de König : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ À UTILISER ⚠

② $\mathbb{V}[aX] = a^2 \mathbb{V}[X]$ pour $a \in \mathbb{R}$

démo : ① $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

② $\mathbb{V}[aX] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2$

$$= \mathbb{E}[a^2X^2] - (a\mathbb{E}[X])^2 = a^2\mathbb{E}[X^2] - a^2\mathbb{E}[X]^2 = a^2 \mathbb{V}[X]$$

*** ex :** $\mathbb{V}[X] = \sum_{x \in [\![1;6]\!]} x^2 . \frac{1}{6} = \frac{1}{6} . 91 = 15,67$

*** autre définition :** l'écart-type : $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$; Dans notre exemple : $\sigma_X = 3,89$

* interprétation : si $\sigma_X < \sigma_Y$

Les valeurs prise par X sont moins dispersées (on peut dire aussi plus homogènes) que celles prise par Y.

VI) fonction d'1 v.a.d :

* prop : Soit X 1 v.a.d. de Ω sur E et f, 1 application définie sur E à valeur dans F, 2 ensembles finis ou infinis dénombrables alors $Y = f(X)$ est 1 v.a.d. de Ω sur F

démo : Soit $A \in \mathcal{P}(F)$, $Y^{-1}(A) = \{w \in \Omega / Y(w) \in A\} = \{w \in \Omega / f(X(w)) \in A\}$

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $B = \{y \in E / f(y) \in A\}$

on a donc : $Y^{-1}(A) = \{w \in \Omega / X(w) \in B\} = X^{-1}(B)$

or : $B \in \mathcal{P}(E)$ et X est mesurable de Ω sur E

donc : $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

donc : Y est mesurable de Ω sur F

Ex + problème 3 + problème 2