DIAGONALISATION

Soit E, 1 espace vectoriel et f un endomorphisme de E dont la matrice représentative dans la base canonique sera notée A.

I) Valeurs, vecteurs et sous-espaces propres :

1) valeur propre et vecteur(s) propre(s) associé(s) :

$\lambda \in \mathbb{R}$ est 1 valeur propre de f si : $\exists v \neq 0_E \in E$ tel que : $f(x) = \lambda x$

v est le vecteur propre associé à λ

remarque : * v n'est pas forcement unique

* Si f n'est pas injective alors $\ker f \neq \{0_E\}$ donc 0 est valeur propre de f

2) sous-espace propre associé à la valeur propre λ :

On appelle sous-espace propre associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs propres associés à λ.

autrement dit : $E_\lambda = \ker(f - \lambda Id)$

II) Comment déterminer les valeurs propres ?

Th : λ est valeur propre de $f \iff f - \lambda Id_E$ est inversible $\iff \det(A - \lambda I) = 0$

déf : On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) l'application : $P_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\lambda \mapsto P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

conséquence : * λ est valeur propre de $f \iff P_A(\lambda) = 0$

* $P_A(0) = \det(A)$

ex : déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

ppg:

Soit λ 1 valeur propre et m_λ son degré de multiplicité en tant que racine de $P_A(\lambda)$

on a : $1 \leq \dim(E\lambda) \leq m_\lambda$

III) La diagonalisation:

déf: φ est diagonalisable si il existe 1 base de E (notée $(v_i)_{i=1,\dots,n}$) dans laquelle la matrice de φ est diagonale.

à quoi ça sert ?

① Si on note P la matrice de passage de la base canonique

à $\mathcal{B}' = (v_i)_{i=1,\dots,n}$

alors $D = P^{-1}AP$ est la matrice associée à φ dans la base $(v_i)_{i=1,\dots,n}$

et c'est 1 matrice diagonale. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

② Je veux calculer $\varphi^n(x)$?

$\varphi^n(x)$ a pour matrice $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^n \end{pmatrix}$ dans la base $(v_i)_{i=1,\dots,n}$

or $A = PDP^{-1}$

donc : $A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1} \cdot PDP^{-1} \cdots PDP^{-1}$

$= P \quad D^n \quad P^{-1}$

qui est plus simple à calculer.

IV) Sous quelle condition A est-elle diagonalisable ?

Th : Les propositions suivantes sont équivalentes

⓪ φ est diagonalisable

① $E = E\lambda_1 \oplus E\lambda_2 \oplus \cdots \oplus E\lambda_p$

② $n = \dim(E\lambda_1) + \dim(E\lambda_2) + \dots + \dim(E\lambda_p)$

③ $\forall i \in [\![1;p]\!]$, $\dim(E\lambda_i) = m_{\lambda_i}$

prop : Si $P_A(\lambda)$ est scindé et que toutes ses racines sont simples alors A est diagonalisable.