Exercices - Produit Scalaire

ex 1 : (Oral 2019)

Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$(A, B) \mapsto tr(A^t B)$$

1) Montrer que φ est 1 produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Montrer que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi)$ est 1 espace euclidien.

ex 2 : (Oral 2018)

Soit $\varphi : \mathcal{C}^1([0;1]) \times \mathcal{C}^1([0;1]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt$$

1) Montrer que φ est 1 produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([0;1])$

2) déterminer l'orthogonale de la fonction $Id : x \mapsto x$

ex 3 : (Oral 2018) [on se limite aux variables aléatoires discrètes mais les résultats sont vrais pour les v.a. à densité

1) Montrer que la covariance est 1 forme bilinéaire symétrique

2) Est-elle 1 produit scalaire ?

3) Quel est le lien entre variance et covariance pour 2 variables aléatoires ?

Exercice 4 *(3 points)* (Concours 2017)

L'objectif de ce problème est de proposer une méthode pour calculer :

$$m = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt.$$

On note $E = C([-1,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

$\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n. On note $p_0(x) = 1$ et $p_1(x) = x$. On note $exp(x) = e^x$ la fonction exponentielle définie sur $[-1;1]$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
   On notera $\|f\| = \sqrt{\varphi(f,f)}$ la norme associée.
2. Montrer que (p_0, p_1) forme une base φ-orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Calculer a et b tel que $\varphi(exp - ap_1 - bp_0, p_0) = 0$ et $\varphi(exp - ap_1 - bp_0, p_1) = 0$ (on pourra utiliser une intégration par partie).
   On note $p(exp) = ap_1 + bp_0$ et $u = exp - p(exp)$ avec a et b les solutions déterminées précédemment.
4. Que dire de u et $p(exp)$ par rapport à $\mathbb{R}_1[X]$?
5. Montrer que $\forall p \in \mathbb{R}_1[X]$, $\|u - p\|^2 = \|u\|^2 + \|p\|^2$.
6. Déterminer m. Justifier votre réponse.