

### VII) covariance de 2 v.a.d :

\* déf:  $\text{cov}(X; Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$

\* prg: ①  $\text{cov}(X; Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$  À UTILISER A  
 ②  $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{cov}(X; Y)$

dém: ①  $\text{cov}(X; Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]]$   
 $= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$   
 $= \underline{\mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]}$

②  $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{E}[(X+Y - \mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}[(X+Y)^2 - 2(X+Y)\mathbb{E}[X+Y] + \mathbb{E}[X+Y]^2]$   
 $= \mathbb{E}[X^2 + 2XY + Y^2 - 2X(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) - 2Y(\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) + (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])^2]$   
 $= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - 2\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - 2\mathbb{E}[Y]^2$   
 $+ \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$   
 $= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + 2\mathbb{E}[XY]$   
 $= \underline{\mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\text{cov}(X; Y)}$

### VIII) coefficient de corrélation de 2 v.a.d:

\* déf:  $\text{corr}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

### IX) indépendance de 2 v.a.d:

\* déf: Soient  $X$  et  $Y$ , 2 v.a.d à même répartition dans  $E$  et  $F$

Elles sont indépendantes si:  $\forall x \in E, \forall y \in F, \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \mathbb{P}[X=x] \cdot \mathbb{P}[Y=y]$

\* interprétation: le résultat de l'expérience aléatoire de l'une n'influence pas le résultat de l'expérience aléatoire de l'autre.

\* prg: ① si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors:  $\text{cov}(X; Y) = 0$

② si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors:  $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

dém: ④  $\mathbb{E}[XY] = \sum_{(x,y) \in E \times F} xy \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} xy \mathbb{P}[X=x] \mathbb{P}[Y=y]$

$= \sum_{x \in E} x \mathbb{P}[X=x] \cdot \sum_{y \in F} y \mathbb{P}[Y=y] = \underline{\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]}$

# Vecteurs aléatoires discrets

## I) déf:

$X: \Omega \rightarrow E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{R}^n$  est 1 vecteur aléatoire discret

soit:  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $X_i$  est 1 v.a.d de  $\Omega$  sur  $E_i$

## II) Loi de probabilité de $X$ :

$\varphi'$  est l'application:  $\varphi_X: \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \longrightarrow [0; 1]$

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \longmapsto \varphi_X(A) = P(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$

\* p.p:  $\varphi_X$  est 1 mesure de probabilité sur  $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$

## III) Loi marginale de $X_i$ :

\* déf:  $\varphi_{X_i}: \mathcal{P}(E_i) \longrightarrow [0; 1]$

$$x_i \longmapsto \varphi_{X_i}(x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \in E_{i-1} \\ x_{i+1} \in E_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \in E_n}} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

\* conséquence: connaître la loi du vecteur aléatoire  $X$  nous permet de connaître la loi de n'importe laquelle de ses composantes.

## IV) Loi conditionnelle de $X$ sachant $Y=y$ :

\* déf: Soit  $X$  et  $Y$  2 v.a.d. de  $\Omega$  dans  $E$  et  $F$  et  $y \in F$

Chaque loi conditionnelle de  $X$  sachant que  $Y=y$  est l'application:

$$\varphi_{X|Y=y}: \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0; 1] \quad x \longmapsto \varphi_{X|Y=y}(x) = \frac{P[X=x, Y=y]}{P[Y=y]} \quad \Delta P[Y=y] \neq 0 \text{ par définition de la probabilité conditionnelle}$$

\* Remarque: ② Connaître la loi du vecteur aléatoire  $(X, Y)$  nous permet de connaître la loi de  $Y$  et la loi conditionnelle de  $X$  sachant l'événement  $\{Y=y\}$

\* p.p:  $\varphi_{X|Y=y}$  est 1 mesure de probabilité sur  $\mathcal{P}(E)$

$$\text{dém: } ① \varphi_{X|Y=y}(\emptyset) = \frac{P(\{w \in \Omega / X(w) \in \emptyset\}, \{w \in \Omega / Y(w)=y\})}{P[Y=y]} = \frac{\varphi_{(X,Y)}(\emptyset)}{P[Y=y]} = \frac{0}{P[Y=y]} = 0$$

car  $\varphi_{(X,Y)}$  est 1 mesure de probabilité sur  $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

(7)

② Soit  $(A_n)_{n \geq 0}$  une famille d'événements 2 à 2 disjoints

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_{X|Y=y}(\bigcup_{n \geq 0} A_n) &= \frac{\mathbb{P}\left[\left\{X \in \bigcup_{n \geq 0} A_n\right\} \cap \{Y=y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\mathbb{P}\left[\left\{w \in \Omega / (X(w), Y(w)) \in \bigcup_{n \geq 0} A_n \times \{y\}\right\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} \\
 &= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n \geq 0} \left\{w \in \Omega / (X(w), Y(w)) \in A_n \times \{y\}\right\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} \\
 &= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n \geq 0} (X, Y) \in A_n \times \{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \\
 &= \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}\left[\bigcup_{n \geq 0} A_n \times \{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_{(X,Y)}[A_n \times \{y\}]}{\mathbb{P}[Y=y]} \\
 &\text{car } \mathbb{P}_{(X,Y)} \text{ est une mesure de probabilité sur } \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(B) \\
 &\text{et que les événements } A_n \times \{y\} \text{ sont 2 à 2 disjoints} \\
 &= \sum_{n \geq 0} \frac{\mathbb{P}[X \in A_n, Y=y]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[X \in A_n | Y=y] \\
 &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_{X|Y=y}[A_n]
 \end{aligned}$$

II) Espérance conditionnelle de  $X$  sachant l'événement  $B$ :

$$\text{* déf: } \mathbb{E}[X|B] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X|B] = \sum_{x \in E} x \cdot \frac{\mathbb{P}[X \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\text{En particulier, } \mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}_{X|Y=y}[x]$$

\* prop: formule des espérances totales: Soit  $(B_n)_{n \geq 0}$  une partition de  $\Omega$

$$\text{alors: } \mathbb{E}[X] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[B_n] \cdot \mathbb{E}[X|B_n]$$

$$\text{dém: } \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X=x] = \sum_{x \in E} x \cdot \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[X=x | B_n] \cdot \mathbb{P}[B_n] \text{ d'après la formule des probabilités totales}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}[X=x | B_n] \right) \cdot \mathbb{P}[B_n] \\
 &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[B_n] \cdot \mathbb{E}[X|B_n]
 \end{aligned}$$

# Les v.a.d. usuelles

## I) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$ :

\* déf:  $X: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$  avec:  $P_X: \mathcal{P}(\{0, 1\}) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \begin{cases} p & \text{si } x = 1 \\ 1-p & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

\* interprétation: C'est la v.a.d. associée au résultat d'une épreuve aléatoire qui n'admet que 2 issues (échec ou succès)

\* ex: le tirage à pile ou face. Dans ce cas,  $p = \frac{1}{2}$

## II) Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$ :

\* déf:  $X: \Omega \rightarrow [\![0; n]\!]$  avec:  $P_X: \mathcal{P}([\![0; n]\!]) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

\* interprétation: On répète  $n$  fois de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$   
alors  $X$  est la v.a.d. associée au nombre de succès obtenus.

Autrement dit: Soient  $(X_i)$

$i=1, \dots, n$ ,  $n$  v.a.d. de loi de Bernoulli de paramètre  $p$

mutuellement indépendantes:  $\forall i \neq j$ ,  $P(X_i=a, X_j=b) = P(X_i=a)P(X_j=b)$

$$\text{avec } (a, b) \in \{0, 1\}^2$$

$$\text{alors: } X = \sum_{i=1}^n X_i$$

## III) Loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$ :

\* déf:  $X: \Omega \rightarrow [\![1; n]\!]$  avec  $P_X: \mathcal{P}([\![1; n]\!]) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto \frac{1}{n}$$

\* interprétation: les résultats  $(1, 2, \dots, n)$  sont équivalables

\* ex: le résultat du lancer d'un dé suit la loi uniforme sur  $[\![1; 6]\!]$

## IV) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ :

\* déf:  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  avec:  $P_X: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

\* ex: C'est le nombre d'événements se produisant dans un intervalle de temps (file d'attente à 1 guichet)

II) La géométrique de paramètre  $p \in [0;1]$ :

\* déf:  $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  avec:  $P_X: \mathcal{P}(\Omega)$  —>  $[0;1]$   
 $n \longmapsto (1-p)^{n-1} \cdot p$

\* interprétation: On répète plusieurs fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  jusqu'à obtenir 1 succès  
alors  $X$  représente le nombre de tentatives nécessaires

\* Ex: nombre de lancers d'une pièce nécessaires pour faire pile

$$P(X=n) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$