Les Suites de nombres réels

I) Déf d'1 suite :

① $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = f(n)$

② u_0 fixé

$\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = f(U_n)$

II) Limite d'1 suite :

* $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \Leftrightarrow$ plus n est grand, plus U_n se rapproche de l

prop : Si l existe alors l est unique

déf : * Si l est finie alors on dit que $(U_n)_n$ converge

ex : $U_n = \frac{1}{n}$; $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$ donc $(U_n)_n$ converge vers 0

* Si l est infinie alors on dit que $(U_n)_n$ diverge

ex : $U_n = n$; $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$ donc $(U_n)_n$ diverge

* Si l n'existe pas alors on dit aussi que $(U_n)_n$ diverge

ex : $U_n = (-1)^n$; $(U_n)_n$ n'a pas de limite donc $(U_n)_n$ diverge

Th : Si $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in]a;b[$ et $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$ alors : $l \in [a;b]$

Th des gendarmes : si $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n \leq u_n \leq w_n$

et : $v_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$ et $w_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$

alors : $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} l$

III) Sens de variation d'1 suite :

* déf : suite croissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \geq U_n$

* déf : suite décroissante : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \leq U_n$

* **déf** : suite majorée : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$

* **déf** : suite minorée : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \geq m$

* **prop** : si $(U_n)_n$ est croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée)
alors $(U_n)_n$ converge.

* **Th des suites adjacentes** : si $(U_n)_n$ est croissante et $(v_n)_n$ décroissante
et $u_n - v_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$
alors : $(U_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers 1 même limite finie.

IV) Sous-suite ou suite extraite :

* **déf** : Soit $(U_n)_n$ 1 suite de nombres réels
$(v_n)_n$ est 1 suite extraite de $(U_n)_n$ si il existe 1 application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante
telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$

* **prop** : Soit 1 suite $(U_n)_n$ qui converge vers l
et $(v_n)_n$ 1 suite extraite de $(U_n)_n$
alors : $(v_n)_n$ converge vers l

V) Suites particulières :

1) suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q :

2 définitions : $\begin{cases} U_n = u_0 q^n \\ U_{n+1} = q U_n \end{cases}$

* sa limite ?

① si $|q| < 1$ alors : $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} 0$

② si $q = 1$ alors : $U_n = u_0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

③ si $q < -1$ alors : U_n n'a pas de limite

④ si $q > 1$ alors : $U_n \underset{n \to +\infty}{\to} +\infty$

⑤ si $q = -1$ alors : $U_n = u_0 (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ donc si $u_0 \neq 0$ alors : $(U_n)_n$ n'a pas de limite

* rq :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{pour } q \neq 1$$

2) suite arithmétique de 1er terme u_0 et de raison r :

* déf : (1) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = u_0 + nr$

(2) $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n + r$

* sa limite ?

(1) si $r > 0$ alors : $U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

(2) si $r < 0$ alors : $U_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$

(3) si $r = 0$ alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = u_0$

* rq :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{2}(U_0 + U_n) = \frac{1}{2}(2U_0 + nr)$$

VI) Suite définie par $U_{n+1} = f(U_n)$:

rq : Soit I, 1 intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$ et f croissante sur I alors la suite $(U_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

est monotone.

rq : Soit I, 1 intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset I$

On pose $(U_n)_n$ 1 suite définie par : $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

Si f est continue sur I et si $(U_n)_n$ converge vers ℓ alors : $f(\ell) = \ell$