Exercice 1.

Un fumeur (ou une fumeuse) entreprend d'arrêter de fumer par la seule force de sa volonté.

Le jour où cette décision est prise est le jour 1, et cette personne ne fume effectivement pas le jour 1. Mais l'expérience s'avère difficile à tenir : si elle ne fume pas un certain jour, elle ne fume pas le lendemain avec une probabilité p_1 ; en revanche, si elle fume un certain jour, la probabilité pour qu'elle ne fume pas le lendemain est p_2, p_1 et p_2 désignant des réels compris entre 0 et 1.

Pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement "le jour n est un jour non fumé".

1. Ecrire les informations contenues dans l'énoncé en termes de probabilités et probabilités conditionnelles.
2. Montrer que $P(A_n) = (p_1 - p_2)P(A_{n-1}) + p_2$.
3. En déduire la valeur de $P(A_n)$, et montrer que $P(A_n)$ tend, quand n tend vers l'infini, vers une limite l à déterminer.
4. Peut-on interpréter l comme la probabilité que, finalement, cette personne réussisse à s'arrêter de fumer ?

Exercice 2.

Un jeu oppose deux personnes A et B. Ce jeu se présente sous la forme de parties indépendantes. A l'issue de chaque partie, A gagne avec une probabilité p, et dans ce cas gagne une unité de mise, et perd avec la probabilité $1-p$, auquel cas il perd une unité de mise. La situation est évidemment symétrique pour B. Initialement, le joueur A possède un capital de a unités, et le joueur B un capital de b unités. Le jeu se termine lorsqu'un des joueurs est ruiné, c'est-à-dire quand son capital devient nul. On note Y_i le gain (positif ou négatif) du joueur A à la partie i, $i \geq 1$, et $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ son gain cumulé en n parties.

1. Donner la loi de la v.a. Y_i, et en déduire que $(S_n + n)/2$ est de loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. (a) Interpréter les événements

$$\begin{aligned} F_n &= \bigcup_{1 \leq k \leq n} [S_k \in \{-a, b\}] \\ L_n &= \bigcup_{1 \leq k \leq n} [S_k = -a] \\ G_n &= \bigcup_{1 \leq k \leq n} [S_k = b] \end{aligned}$$

dans le contexte de l'énoncé.

(b) On note $\gamma_n = 1 - P(F_n)$. Montrer que la suite $(\gamma_n)_{n \geq 0}$ admet une limite dans $[0, 1]$.

Exercice 3.

Deux joueurs A et B disputent un jeu dont la règle est la suivante : on lance $2n$ fois une pièce : si le nombre de "pile" obtenus est strictement supérieur au nombre de "face", A gagne ; si le nombre de "face" obtenus est strictement supérieur au nombre de "pile", B gagne ; en cas d'égalité, la partie est nulle.

La pièce utilisée est truquée, et la probabilité pour qu'elle donne "pile" est $p < 1/2$. Le jeu est donc défavorable au joueur A, et on s'intéresse au contrôle possible de n afin que ce désavantage soit le plus faible possible. On suppose avoir construit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui modélise correctement le problème.

On note X_k la v.a. égale à 1 si le k-ième lancer tombe sur "pile", et à 0 si le k-ième lancer tombe sur "face". On note également, pour m entier positif,

$$\begin{aligned} T_m &= X_1 + X_2 + \cdots X_{2m} \\ Y_m &= X_{2m+1} + X_{2m+2} \\ u_m &= P(T_m = m) \\ v_m &= P(T_m = m+1) \\ p_m &= P(T_m \geq m+1) \end{aligned}$$

(a) Interpréter p_n dans le contexte de l'énoncé.

(b) Donner les lois, espérances et variances de T_m et Y_m, ainsi qu'une expression simplifiée de u_m/v_m.

(c) Montrer l'inclusion

$$[T_n \geq n+1] \subset [T_n - E(T_n) \geq n(1-2p) + 1]$$

et en déduire que p_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

(d) Pour $0 \leq i \leq 2$, prouver l'égalité

$$[Y_n = i] \cap [T_{n+1} \geq n+2] = [Y_n = i] \cap [T_n \geq n+2-i].$$

(e) En déduire la relation

$$p_{n+1} = p_n + p^2 u_n - (1-p)^2 v_n$$

(f) On suppose que p s'écrit sous la forme

$$p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2l+1}\right)$$

pour un certain entier l strictement positif. Quelle est la valeur de n minimisant le désavantage du joueur A ?