VII) covariance de 2 v.a.d :

*** déf :** $cov(X;Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big]$

*** prop :** ① $cov(X;Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ À UTILISER ⚠

② $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,cov(X;Y)$

dém : ① $cov(X;Y) = \mathbb{E}\big[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])\big] = \mathbb{E}\big[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\big]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y]] - \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X]] - \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]\big]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

② $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{E}\Big[\big(X+Y-\mathbb{E}[X+Y]\big)^2\Big] = \mathbb{E}\Big[(X+Y)^2 - 2(X+Y)\mathbb{E}[X+Y] + \mathbb{E}[X+Y]^2\Big]$

$= \mathbb{E}\Big[X^2 + 2XY + Y^2 - 2X\big(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]\big) - 2Y\big(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]\big) + \big(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]\big)^2$

$= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\,\mathbb{E}[X]^2 - 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - 2\,\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - 2\,\mathbb{E}[Y]^2$

$+ \mathbb{E}[X]^2 + 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\,\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + 2\,\mathbb{E}[XY]$

$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,cov(X;Y)$

IX) coefficient de corrélation de 2 v.a.d :

*** déf :** $cor(X;Y) = \dfrac{cov(X;Y)}{\sigma_X\,\sigma_Y}$

X) indépendance de 2 v.a.d :

*** déf :** Soient X et Y, 2 v.a.d à valeurs respectivement dans E et F

Elles sont indépendantes ssi : $\forall x \in E, \forall y \in F, \quad \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \mathbb{P}[X=x].\,\mathbb{P}[Y=y]$

*** interprétation :** le résultat de l'expérience aléatoire de l'une n'influence pas le résultat de l'expérience aléatoire de l'autre.

*** prop :** ① si X et Y sont indépendantes alors : $cov(X;Y) = 0$

② si X et Y sont indépendantes alors : $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

dém : ① $\mathbb{E}[XY] = \sum_{(x,y)\in E\times F} xy\,\mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{x\in E}\sum_{y\in F} xy\,\mathbb{P}[X=x]\,\mathbb{P}[Y=y]$

$= \sum_{x\in E} x\,\mathbb{P}[X=x]\,.\sum_{y\in F} y\,\mathbb{P}[Y=y] = \mathbb{E}[X]\,.\,\mathbb{E}[Y]$

Vecteurs aléatoires discrets

I) déf :

$X : \Omega \to E_1 \times \dots \times E_n \subset \mathbb{R}^n$ est 1 vecteur aléatoire discret

ssi : $\forall i \in [\![1;n]\!]$, X_i est 1 v.a.d de Ω sur E_i

II) Loi de probabilité de X :

C'est l'application : $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n) \longrightarrow [0;1]$

$$A = A_1 \times \dots \times A_n \longmapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n)$$

*** ppt :** $\mathbb{P}_X$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E_1) \times \dots \times \mathcal{P}(E_n)$

III) Loi marginale de X_i :

*** déf :** $\mathbb{P}_{X_i} : \mathcal{P}(E_i) \longrightarrow [0;1]$

$$x_i \longmapsto \mathbb{P}(X_i = x_i) = \sum_{\substack{x_1 \in E_1 \\ \vdots \\ x_{i-1} \in E_{i-1} \\ x_{i+1} \in E_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \in E_n}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

*** conséquence :** connaître la loi du vecteur aléatoire X nous permet de connaître la loi de n'importe laquelle de ses composantes.

IV) Loi conditionnelle de X sachant Y = y :

*** déf :** Soit X et Y, 2 v.a.d. de Ω dans E et F et $y \in F$

On appelle loi conditionnelle de X sachant que $Y = y$ est l'application :

$\mathbb{P}_{X|Y=y} : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto \mathbb{P}[X = x | Y = y] = \frac{\mathbb{P}[X = x, Y = y]}{\mathbb{P}[Y = y]}$$

⚠ $\mathbb{P}[Y=y] \neq 0$ par définition de la probabilité conditionnelle

*** remarque :** ① connaître la loi du vecteur aléatoire (X, Y) nous permet de connaître la loi de Y et la loi conditionnelle de X sachant l'événement $\{Y = y\}$

*** ppt :** $\mathbb{P}_{X|Y=y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

dém : ① $\mathbb{P}_{X|Y=y}(\emptyset) = \dfrac{\mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) \in \emptyset\}, \{w \in \Omega / Y(w) = y\})}{\mathbb{P}[Y = y]} = \dfrac{\mathbb{P}_{(X,Y)}(\emptyset)}{\mathbb{P}[Y = y]} = \dfrac{0}{\mathbb{P}[Y = y]} = 0$

car $\mathbb{P}_{X,Y}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

2) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ 1 famille d'événements 2 à 2 disjoints

$$\mathbb{P}_{X|Y=y}\left(\bigcup_{n\geq 0} A_n\right) = \frac{\mathbb{P}\left[\{X \in \bigcup_{n\geq 0} A_n\} \cap \{Y=y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\mathbb{P}\left[\{w \in \Omega / (X(w);Y(w)) \in \bigcup_{n\geq 0} A_n \times \{y\}\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\geq 0} \{w \in \Omega / (X(w);Y(w)) \in A_n \times \{y\}\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{n\geq 0} (X,Y) \in A_n \times \{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} =$$

$$= \frac{\mathbb{P}_{(X,Y)}\left[\bigcup_{n\geq 0} A_n \times \{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \frac{\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_{(X,Y)}\left[A_n \times \{y\}\right]}{\mathbb{P}[Y=y]}$$

car $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$

et que les événements $A_n \times \{y\}$ sont 2 à 2 disjoints

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\mathbb{P}[X \in A_n, Y=y]}{\mathbb{P}[Y=y]} = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[X \in A_n | Y=y]$$

$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_{X|Y=y}[A_n]$$

V) Espérance conditionnelle de X sachant l'événement B :

*** déf :** $\mathbb{E}[X|B] = \sum_{x\in E} x . \mathbb{P}[X|B] = \sum_{x \in E} x \dfrac{P[X \cap B]}{P[B]}$

En particulier, $\mathbb{E}[X|Y=y] = \sum_{x\in E} x . \mathbb{P}_{X|Y=y}[x]$

*** prop :** formule des espérances totales : Soit $(B_n)_{n\geq 0}$ 1 partition de Ω

alors : $\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[B_n] . \mathbb{E}[X|B_n]$

démo : $\mathbb{E}[X] = \sum_{x\in E} x \, \mathbb{P}[X=x] = \sum_{x\in E} x . \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[X=x|B_n] \, \mathbb{P}[B_n]$ d'après la formule des probabilités totales

$$= \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{x\in E} x \, \mathbb{P}[X=x|B_n]\right) . \mathbb{P}(B_n)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[B_n] . \mathbb{E}[X|B_n]$$

Les v.a.d. usuelles

I) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0;1]$:

*** déf :** $X : \Omega \longrightarrow \{0;1\}$ avec : $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\{0;1\}) \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto \begin{cases} p & \text{si } x=0 \\ 1-p & \text{si } x=1 \end{cases}$$

*** interprétation :** C'est la v.a.d. associée au résultat d'1 épreuve aléatoire qui n'admet que 2 issues (échec ou succès)

*** ex :** le tirage à pile ou face. Dans ce cas, $p=\frac{1}{2}$

II) Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$:

*** déf :** $X : \Omega \longrightarrow [\![0;n]\!]$ avec : $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}([\![0;n]\!]) \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

*** interprétation :** Si on répète n fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p alors X est la v.a.d. associée au nombre de succès obtenus.

Autrement dit : Soient $(X_i)_{i=1,\dots,n}$, n v.a.d. de loi de Bernoulli de paramètre p mutuellement indépendantes : $\forall i \neq j$, $\mathbb{P}(X_i=a, X_j=b) = \mathbb{P}(X_i=a)\,\mathbb{P}(X_j=b)$ avec $(a;b) \in \{0;1\}^2$

alors on a : $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

III) Loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$:

*** déf :** $X : \Omega \longrightarrow [\![1;n]\!]$ avec $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}([\![1;n]\!]) \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto \frac{1}{n}$$

*** interprétation :** les résultats (1, 2, … ou n) sont équiprobables

*** ex :** le résultat du lancer d'1 dé suit 1 loi uniforme sur $[\![1;6]\!]$

IV) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

*** déf :** $X : \Omega \to \mathbb{N}$ avec : $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

*** ex :** C'est le nombre d'évènements se produisant dans 1 intervalle de temps (file d'attente à 1 guichet)

V) Loi géométrique de paramètre $p \in [0;1]$:

*** déf :** $X : \Omega \to \mathbb{N}$ avec : $\mathbb{P}_X : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0;1]$

$$n \longmapsto (1-p)^{n-1} \cdot p$$

*** interprétation :** Si on répète plusieurs fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir 1 succès alors X représente le nombre de tentatives nécessaires

*** ex :** nombre de lancers d'1 pièce nécessaires pour faire pile

$$\mathbb{P}(X=n) = \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$$