

I) Exercices sur les variables aléatoires discrètes:ex1:

1) $X \sim G(p)$

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

2)

* ex1: On lance 1 pièce jusqu'à ce qu'elle tombe sur pile. X qui représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile soit 1 loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$

* ex2: On lance 1 dé jusqu'à faire le chiffre "6" Y qui représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le chiffre "6" soit 1 loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}$

$$\begin{aligned} 3) \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p \\ &= p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \end{aligned}$$

On sait que: $\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)}$ pour $|1-p| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{p}$$

Si on dérive par rapport à p , on obtient: $\left(\frac{1}{p}\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} ((1-p)^k)'$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{p^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}$$

d'où: $\mathbb{E}[X] = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

ex 5:1) Soit X et Y , 2 variables aléatoires

$$\text{cov}(X; Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

2) $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] - 2\text{cov}(X; Y)$

3) $\text{cor}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]} \sqrt{\mathbb{V}[Y]}}$

4) $\text{cor}(X; Y) \in [-1; 1]$

[La corrélation entre 2 variables aléatoires est l'intensité de la relation entre les 2 variables]

- L'efficace de corrélation de Pearson mesure le degré de dépendance linéaire entre ces 2 variables.

- Si $\text{cor}(X; Y)$ proche de -1, Y peut s'exprimer comme une fonction affine décroissante de X

[et X peut aussi s'exprimer comme une fonction affine avec $a < 0$

- Si $\text{cor}(X; Y)$ proche de 1, Y peut s'exprimer comme une fonction affine croissante de X puisque: $X = \frac{1}{a} \cdot Y + \frac{b}{a}$ avec $\frac{1}{a} > 0$

$$Y = aX + b \text{ avec } a > 0$$

[et X peut aussi s'exprimer comme une fonction affine croissante de Y puisque: $X = \frac{1}{a} \cdot Y + \frac{b}{a}$ avec $\frac{1}{a} > 0$]

5) Si X et Y sont indépendantes alors: $\text{cov}(X; Y) = 0$

- Si $\text{cov}(X; Y) = 0$, on peut justifier que: $\text{cor}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]} \sqrt{\mathbb{V}[Y]}} = 0$

donc qu'il n'existe pas de dépendance linéaire entre les 2 variables

mais on ne peut pas en déduire qu'elles sont indépendantes

ex 6: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = p (1-p)^k$$

$$U = \max(X; Y) \text{ et } V = \min(X; Y)$$

1) * loi de $(U; V)$: $(U; V): \Omega \rightarrow \{(u; v) \in \mathbb{N}^2 / u \geq v\}$

$$\begin{aligned} \text{Pbit } k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(U=k, V=k) &= \mathbb{P}(\max(X; Y)=k, \min(X; Y)=k) = \mathbb{P}(X=k, Y=k) \\ &= \mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Y=k) \text{ car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\ &= p^2 (1-p)^{2k} \end{aligned}$$

2) Soit $k, l \in \mathbb{N}, k > l$

$$\mathbb{P}(U=k, V=l) = \mathbb{P}(\max(X; Y)=k, \min(X; Y)=l) = \mathbb{P}(X=k, Y=l) + \mathbb{P}(Y=k, X=l)$$

(3)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V=k, V=l) &= \mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Y=l) + \mathbb{P}(Y=k, X=l) \\ &= p^2 (1-p)^{k+l} + p^2 (1-p)^{k+l} = 2p^2 (1-p)^{k+l} \end{aligned}$$

2) la loi marginale de V:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(V=k) = \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(V=k, V=l) = \sum_{l=0}^{k-1} \mathbb{P}(V=k, V=l) + \mathbb{P}(V=k, V=k)$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} 2p^2 (1-p)^{k+l} + p^2 (1-p)^{2k}$$

$$= 2p^2 (1-p)^k \sum_{l=0}^{k-1} (1-p)^l + p^2 (1-p)^{2k}$$

$$= 2p^2 (1-p)^k \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} + p^2 (1-p)^{2k}$$

$$= 2p^2 (1-p)^k \frac{1 - (1-p)^k}{p} + p^2 (1-p)^{2k}$$

$$= 2p (1-p)^k [1 - (1-p)^k] + p^2 (1-p)^{2k}$$

$$= 2p (1-p)^k - 2p (1-p)^{2k} + p^2 (1-p)^{2k}$$

$$= (1-p)^k [2p - 2p (1-p)^k + p^2 (1-p)^k]$$

$$= p (1-p)^k [2 - 2 (1-p)^k + p (1-p)^k] = p (1-p)^k [2 + (1-p)^k (p - 2)]$$

$$3) \mathbb{P}(V=n) = p (1-p)^{2n} (2-p)$$

* $W = V+1$ suit la loi géométrique. $W: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \text{soit } n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(W=n) &= \mathbb{P}(V+1=n) = \mathbb{P}(V=n-1) = p (1-p)^{2(n-1)} (2-p) \\ &= [(1-p)^2]^{n-1} \cdot p (2-p) \\ &= [(1-p)^2]^{n-1} \cdot (2p - p^2) \\ &= [(1-p)^2]^{n-1} \cdot [1 - (1-p)^2] \end{aligned}$$

$$\text{donc: } W \sim \mathcal{G}(1 - (1-p^2)) = \mathcal{G}(2p - p^2) = \mathcal{G}(p(2-p))$$

* Calculer l'espérance de V:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{p(2-p)} \quad (\Rightarrow) \quad \mathbb{E}[V+1] = \frac{1}{p(2-p)} \quad (\Rightarrow) \quad \mathbb{E}[V] + 1 = \frac{1}{p(2-p)}$$

(4)

$$\Leftrightarrow \underline{\mathbb{E}[V]} = \frac{1}{p(2-p)} - 1 = \frac{1-2p+p^2}{p(2-p)} = \frac{(p-1)^2}{p(2-p)}$$

4) $\mathbb{P}(U=0, V=0) = p^2$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{P}(U=0) = p[2+p-2] = p^2 \\ \mathbb{P}(V=0) = p(2-p) = 2p-p^2 \end{array} \right\} \mathbb{P}(U=0) \cdot \mathbb{P}(V=0) = 2p^3 - p^4$$

$\forall U$ et V étant indépendantes, on aurait: $\mathbb{P}(U=0, V=0) = \mathbb{P}(U=0) \cdot \mathbb{P}(V=0)$

$$\Leftrightarrow p^2 = 2p^3 - p^4$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p^3 + p^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 (1-2p+p^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 (p-2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p=0 \text{ ou } p=2$$

donc U et V ne sont pas indépendantes.

ex 7:

1) 2 événements A et B sont indépendants
si: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

2) 2 événements sont disjoints

$$\text{si: } A \cap B = \emptyset$$

* sont-ils indépendants ?

\forall événement A et B , 2 événements disjoints

$$\text{on a: } \mathbb{P}(A \cap B) = 0$$

\forall $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

donc: \forall $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors A et B ne sont pas indépendants

3) $\forall X$ et Y sont indépendants, alors:

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x) \cdot \mathbb{P}(Y=y)$$

donc, dans ce cas, connaître les loi marginales de X et de Y permet de connaître la loi de (X, Y) .

ex 8:

$$h(X) = - \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) \cdot \frac{\ln(P(X=k))}{\ln(2)} = - \sum_{k \in X(\Omega)} \frac{P(X=k) \cdot \ln(P(X=k))}{\ln 2}$$

1) * loi de X : $X: \Omega \rightarrow \{\text{Bleu; Rouge; verte; jaune}\}$

$$P(X=\text{Rouge}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(P(X=\text{Rouge})) = -\ln 2$$

$$P(X=\text{Bleu}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ln(P(X=\text{Bleu})) = -\ln 4 = -2\ln 2$$

$$P(X=\text{verte}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \ln(P(X=\text{Verte})) = -\ln 8 = -3\ln 2$$

$$P(X=\text{jaune}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \ln(P(X=\text{Jaune})) = -3\ln 2$$

$$\begin{aligned} * h(X) &= - \frac{\frac{1}{2} \cdot -\ln 2 + \frac{1}{4} \cdot -2\ln 2 + \frac{1}{8} \cdot -3\ln 2 + \frac{1}{8} \cdot -3\ln 2}{\ln 2} = -\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4} = \underline{1,75} \end{aligned}$$

3)

* loi de M : $M: \Omega \rightarrow \{1; 2; 3\}$

$$P(M=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(M=2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(M=3) = 1 - P(M=1) - P(M=2) = \frac{1}{2}$$

$$* E[M] = \sum_{k=1}^3 k \cdot P(M=k) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = \underline{2,25}$$

[Pour réussir l'expérience 1 grand rond de fois, il faudra en moyenne 2,25 questions à 1 enfant pour trouver la couleur de la balle.]

* loi de N : $N: \Omega \rightarrow \{1; 2; 3\}$

$$P(N=1) = P(N=1, M=1) + P(N=1, M=2) + P(N=1, M=3)$$

On pose R_3 l'événement "la réponse à la 3^e question a été 'OUI'"

$$= P(N=1, M=1) + P(N=1, M=2) + P(N=1, R_3)$$

$$= P(N=1|M=1) \cdot P(M=1) + P(N=1|M=2) \cdot P(M=2) + P(N=1|R_3) \cdot P(R_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 P(N=2) &= P(N=2, M=1) + P(N=2, M=2) + P(N=2, M=3) \\
 &= P(N=2 | n=2) \cdot P(M=1) + P(N=2 | n=2) \cdot P(M=2) + P(N=2 | R_3) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + P(N=2 | R_3) \cdot P(R_3) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$P(N=3) = 1 - P(N=1) - P(N=2) = \frac{1}{2}$$

* N est de même loi que M donc ; $E[N] = E[M] = \frac{9}{4} = 2,25$

3) $E[M] = E[N] > k(X)$

car $k(X)$ calcule le nombre moyen de questions nécessaires pour deviner la couleur de la balle en partant du principe que l'enfant sait qu'il y a une majorité de balles rouges.

Par exemple, la première question que il posera sera "Est-ce une balle rouge" et la deuxième sera "Est-ce une balle bleue" ce qui augmentera les chances de trouver plus rapidement la couleur de la balle.

[Dans le contexte de l'énoncé, l'enfant ne connaît pas la répartition des balles, il sait juste qu'elles ont de 4 couleurs différentes.]

ex 13:

$$X \sim B(n; p) \Leftrightarrow X : \mathbb{N} \rightarrow [\![0, n]\!]$$

$$\forall k \in [\![0, n]\!], P(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{k \in X(\mathbb{N})} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}
 \end{aligned}$$

[On pose $\ell = k-1$]

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{n!}{\ell! (n-\ell-1)!} p^{\ell+1} (1-p)^{n-\ell-1} \\
 &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-\ell)}{\ell! ((n-1)-\ell)!} p \cdot p^\ell (1-p)^{(n-1)-\ell} \\
 &= np \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ell! ((n-1)-\ell)!} p^\ell (1-p)^{(n-1)-\ell} \\
 &= np \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} C_\ell^{n-1} p^\ell (1-p)^{(n-1)-\ell} = np \cdot (p + (1-p))^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

On a utilisé la formule du binôme de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}$

$$\Rightarrow (a+b)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n-2} C_k^{n-2} a^k b^{(n-2)-k}$$

II) Exercices sur les variables aléatoires continues:

ex 1:

$$X \sim N(0; 1)$$

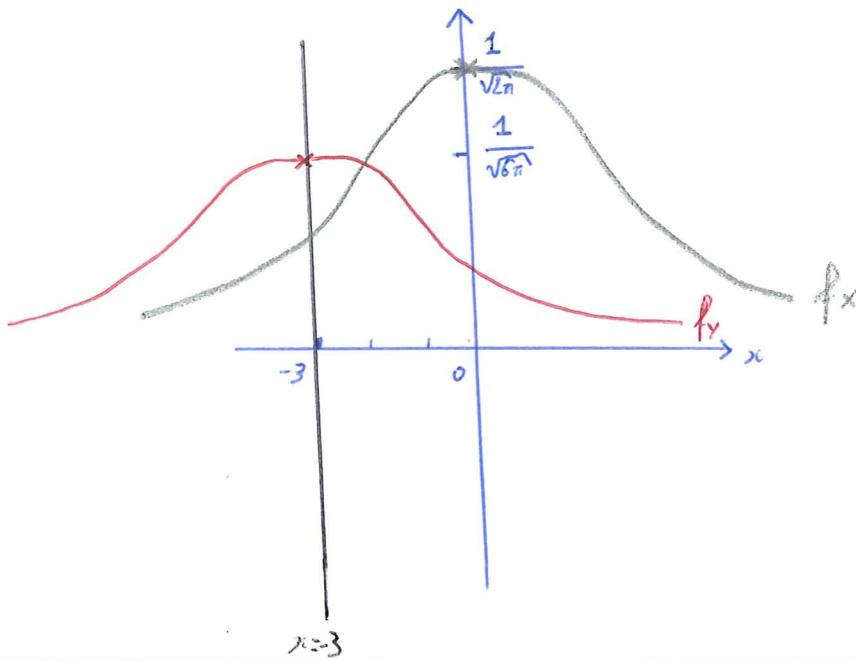
$$Y \sim N(-3; 10)$$

1) $aY+b \sim N(-3a+b; 10a^2)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$$aY+b \sim N(0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=0 \\ 10a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ a^2=\frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ et } b=\frac{1}{3\sqrt{10}} \\ a=-\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ et } b=\frac{-1}{3\sqrt{10}} \end{cases}$$

$$S = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-1}{3\sqrt{10}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{3\sqrt{10}} \right) \right\}$$

2)



$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$f_y(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(x+3)^2}{2}}$$

ex 3:

1) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$$f_x(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0;+\infty]}(x)$$

2) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0;+\infty]}(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \quad [\text{Irr}]$

(On intègre par parties: $u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$
 $v = x \Rightarrow v' = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \left[-xe^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

$$3) \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{I}_{[0;+\infty)}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

On integrate par parties: $u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$

$$\mathbb{E}[X^2] = \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \quad v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

$$\text{done: } \mathbb{V}[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Ex 10:

$$1) X \sim U([a; b])$$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a;b]}(x)$$

$$2) \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a;b]}(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$3) \mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = \mathbb{E}[X^2] - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \mathbb{I}_{[a;b]}(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{done: } \mathbb{V}[X] &= \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(b+a)^2}{12} = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} = \frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$

ex 11:

$$X_2 \sim N(m_0; \sigma_0^2) \text{ et } Y_2 \sim N(m_1; \sigma_1^2)$$

* Si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y$ suit la loi normale de paramètres $m_0 + m_1$ et $\sigma_0^2 + \sigma_1^2$

$$f_Z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad e^{-\frac{(x-m_0-m_1)^2}{2}}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}}$$

ex 12:

Les $(X_n)_n$ sont mutuellement indépendantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim N(0; 1)$$

$$\text{On définit } Y_0 = X_0$$

$$Y_n = \theta^n Y_{n-1} + X_n$$

1) loi de Y_n ?

$$Y_0 = X_0$$

$$Y_1 = \theta Y_0 + X_1 = \theta X_0 + X_1$$

$$Y_2 = \theta Y_1 + X_2 = \theta(\theta X_0 + X_1) + X_2 = \theta^2 X_0 + \theta X_1 + X_2$$

$$Y_3 = \theta Y_2 + X_3 = \theta(\theta^2 X_0 + \theta X_1 + X_2) + X_3 = \theta^3 X_0 + \theta^2 X_1 + \theta X_2 + X_3$$

On va montrer par récurrence que: $Y_n = \theta^n X_0 + \theta^{n-1} X_1 + \dots + \theta X_{n-1} + X_n, \forall n \in \mathbb{N}$: (P_n)

$$\textcircled{1} P_0 \text{ est vraie: } Y_0 = \theta^0 X_0$$

\textcircled{2} On suppose (P_n) vraie?

$$\begin{aligned} \text{dans ce cas: } Y_{n+1} &= \theta Y_n + X_{n+1} = \theta (\theta^n X_0 + \theta^{n-1} X_1 + \dots + \theta X_{n-1} + X_n) + X_{n+1} \text{ d'après l'hypothèse} \\ &= \theta^{n+1} X_0 + \theta^n X_1 + \dots + \theta^2 X_{n-2} + \theta X_n + X_{n+1} \text{ récurrence} \end{aligned}$$

donc (P_{n+1}) est vraie

$$\text{On a donc démontré que: } \forall n \in \mathbb{N}, Y_n = \theta^n X_0 + \theta^{n-1} X_1 + \dots + \theta X_{n-1} + X_n = \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i$$

Y_n est une combinaison linéaire de v.a. mutuellement indépendantes qui suivent toutes une loi normale
donc: Y_n suit une loi normale.

2) paramètres de la loi de Y_n ?

$$*\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i\right] = \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{aligned}
 * \mathbb{V}[X_n] &= \mathbb{V}\left[\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i\right] = \sum_{i=0}^n \mathbb{V}[\theta^{n-i} X_i] \text{ car } (X_i)_{i=0, \dots, n} \text{ sont mutuellement indépendantes} \\
 &= \sum_{i=0}^n (\theta^{n-i})^2 \mathbb{V}[X_i] = \sum_{i=0}^n \theta^{2n-2i} = \theta^{2n} \cdot \sum_{i=0}^n \theta^{-2i} \\
 &= \theta^{2n} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^i = \theta^{2n} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\theta^2}} = \theta^{2n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\theta^{2n+2}}}{\theta^2 - 1} \\
 &= \frac{\theta^{2n} - \frac{1}{\theta^2}}{\theta^2 - 1} = \frac{\theta^{2n+2} - 1}{\theta^2 - 1}
 \end{aligned}$$

3) $\forall h \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(Y_n, Y_{n+h}) &= \text{cov}\left(\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i, \sum_{i=0}^{n+h} \theta^{n+h-i} X_i\right) \\
 &= \text{cov}\left(\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i, \sum_{i=0}^h \theta^{n+h-i} X_i\right) + \text{cov}\left(\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i, \sum_{i=n+2}^{n+h} \theta^{n+h-i} X_i\right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \text{cov}(\theta^{n-i} X_i, \theta^{n+h-i} X_i) + 0 \\
 &= \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} \cdot \theta^{n+h-i} \text{cov}(X_i, X_i) \\
 &= \sum_{i=0}^n \theta^{2n+h-2i} \mathbb{V}[X_i] \\
 &= \theta^h \sum_{i=0}^n \theta^{2n-2i} = \theta^h \cdot \frac{\theta^{2n+2} - 1}{\theta^2 - 1}
 \end{aligned}$$

car les $(X_i)_{i=0, \dots, n}$ et les $(X_i)_{i=n+2, \dots, n+h}$
 sont mutuellement indépendantes.

ex 14:

$$1) \text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

$$\begin{aligned}
 [\text{pour 1 v.a. discrète} = \mathbb{E}[XY] = \sum_{\substack{x \in X(n) \\ y \in Y(n)}} xy \cdot P(X=x, Y=y)]
 \end{aligned}$$

2) * symétricité: $\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
 $= \mathbb{E}[YX] - \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[X] = \text{cov}(Y, X)$

* linéarité:

① $\text{cov}(X+Y, Z) = \mathbb{E}[(X+Y)Z] - \mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[Z]$
 $= \mathbb{E}[XZ + YZ] - (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) \cdot \mathbb{E}[Z]$
 $= \mathbb{E}[XZ] + \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[Z]$
 $= \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[Z]$
 $= \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$

② $\forall a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\text{cov}(aX, Y) &= \mathbb{E}[aXY] - \mathbb{E}[aX] \cdot \mathbb{E}[Y] \\ &= a \cdot \mathbb{E}[XY] - a \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \\ &= a \cdot \text{cov}(X, Y)\end{aligned}$$

3)

a) $\text{cov}(X_1, X_2) = \text{cov}(\alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 U_3, U_1 + 2U_2 + 3U_3)$
 $= \alpha_1 \text{cov}(U_1, U_1) + 2\alpha_1 \underbrace{\text{cov}(U_1, U_2)}_0 + 3\alpha_1 \underbrace{\text{cov}(U_1, U_3)}_0 + \beta_1 \underbrace{\text{cov}(U_2, U_1)}_0 + 2\beta_1 \text{cov}(U_2, U_2) + 3\beta_1 \text{cov}(U_2, U_3)$
 $+ \underbrace{3\beta_1 \text{cov}(U_2, U_3)}_0 + \underbrace{\gamma_1 \text{cov}(U_3, U_1)}_0 + \underbrace{\gamma_1 2 \text{cov}(U_3, U_2)}_0 + 3\gamma_1 \text{cov}(U_3, U_3)$
 $= \alpha_1 V[U_1] + 2\beta_1 V[U_2] + 3\gamma_1 V[U_3]$
 $= \alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1$

* $\text{cov}(X_2, X_3) = \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3$

* $\text{cov}(X_3, X_3) = \alpha_3^2 + 2\beta_3^2 + 3\gamma_3^2$

* $V[X_1] = \text{cov}(X_1, X_1) = \text{cov}(\alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 U_3, \alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 U_3)$
 $= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$

* $V[X_2] = 1 + 4 + 9 = 14$

* $V[X_3] = \alpha_3 \alpha_3 + \beta_3 \beta_3 + \gamma_3 \gamma_3$

b) $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2 \cdot \text{cov}(X, Y)$

pour Z v.a. continue, on discute

ex 9:

$$f(x) = \frac{2x}{\lambda^2} \text{ si } x \in [0; \lambda]$$

0 sinon

1) * f est-elle une densité?

① $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$

② f est continue sur \mathbb{R} [on sait aussi si elle est continue sur \mathbb{R} sauf en 1 nombre fini de points]

③ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^\lambda \frac{2x}{\lambda^2} dx = \frac{2}{\lambda^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^\lambda = \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = 1$

f est bien 1 densité

2) $F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto P(X \leq x)$$

① si $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$

② si $x \in [0; \lambda]$, $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{2t}{\lambda^2} dt = \frac{2}{\lambda^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{2x^2}{2\lambda^2} = \frac{x^2}{\lambda^2}$

③ si $x > \lambda$, $F_X(x) = \int_0^\lambda \frac{2t}{\lambda^2} dt = 1$

3) $Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ * $F_{Z_n}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$x \mapsto P(Z_n \leq x)$$

soit $x \in \mathbb{R}$, $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \leq x) = P(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x)$

$$= (P(X_1 \leq x))^n \text{ car les } (X_i)_{i=1, \dots, n} \text{ ont la même loi}$$

$$= (F_X(x))^n$$

① si $x \leq 0$, $F_{Z_n}(x) = 0$

② si $x \in [0; \lambda]$, $F_{Z_n}(x) = \frac{x^{2n}}{\lambda^{2n}}$

③ si $x > \lambda$, $F_{Z_n}(x) = 1$

* $f_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx} F_{Z_n}(x)$

① si $x \leq 0$, $f_{Z_n}(x) = 0$

② si $x \in [0; \lambda]$, $f_{Z_n}(x) = 2n \frac{x^{2n-1}}{\lambda^{2n}}$

③ si $x > \lambda$, $f_{Z_n}(x) = 0$

$$4) \mathbb{E}[Z_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Z_n}(x) dx = \int_0^{\lambda} x 2^n \frac{x^{2n-1}}{\lambda^{2n}} = \frac{2n}{\lambda^{2n}} \int_0^{\lambda} x^{2n} dx = \frac{2n}{\lambda^{2n}} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{\lambda}$$

$$= \frac{2n}{\lambda^{2n}} \cdot \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1} = \lambda \cdot \frac{2n}{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \lambda$$
(13)

$$5) M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$\mathbb{E}[M_n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n \mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_1]$$

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\lambda} \frac{2x^2}{\lambda^2} dx = \frac{2}{\lambda^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\lambda} = \frac{2}{3} \lambda = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \lambda$$

6) par n suffisamment grand, $\mathbb{E}[Z_n]$ est plus proche de λ que $\mathbb{E}[M_n]$