I) Exercices sur les variables aléatoires discrètes:

ex2:

1) $X \sim \mathcal{G}(p)$

$X : \Omega \to \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

2)

*ex 1: On lance 1 pièce jusqu'à ce qu'elle tombe sur pile.

X qui représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile suit 1 loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$

*ex 2: On lance 1 dé jusqu'à faire le chiffre "6"

Y qui représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le chiffre "6" suit 1 loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{(k-1)}}{6^k}$

3) $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$= p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}$$

On sait que: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)}$ car $|1-p| < 1$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{p}$$

Si on dérive par rapport à p, on obtient: $\displaystyle\left(\frac{1}{p}\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^k\right)'$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{p^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot -1 \cdot (1-p)^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k\,(1-p)^{k-1}$$

d'où: $\underline{\mathbb{E}[X]} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \underline{\frac{1}{p}}$

ex 5: ②

1) Soient X et Y, 2 variables aléatoires

$cov(X;Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Y]$

2) $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] \quad 2\,cov(X;Y)$

3) $corr(X;Y) = \dfrac{cov(X;Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\,\sqrt{\mathbb{V}[Y]}}$

4) $corr(X;Y) \in [-1;1]$

[La corrélation entre 2 variables aléatoires est l'intensité de la relation entre les 2 variables]

- Le coefficient de corrélation de Pearson mesure le degré de dépendance linéaire entre ces 2 variables.
- Si $corr(X,Y)$ proche de -1, Y peut s'exprimer comme une fonction affine décroissante de X

$Y = aX + b$ avec $a < 0$

[et X peut aussi s'exprimer comme une fonction affine décroissante de Y puisque : $X = \frac{1}{a}.Y + \frac{b}{a}$ avec $\frac{1}{a} < 0$]

- Si $corr(X,Y)$ proche de 1, Y peut s'exprimer comme une fonction affine croissante de X

$Y = aX + b$ avec $a > 0$

[et X peut aussi s'exprimer comme une fonction affine croissante de Y puisque : $X = \frac{1}{a}.Y + \frac{b}{a}$ avec $\frac{1}{a} > 0$]

5) Si X et Y sont indépendantes alors : $cov(X,Y) = 0$

- Si $cov(X,Y) = 0$, on peut juste conclure que : $corr(X;Y) = \dfrac{cov(X;Y)}{\sqrt{\mathbb{V}[X]}\,\sqrt{\mathbb{V}[Y]}} = 0$

donc qu'il n'existe pas de dépendance linéaire entre les 2 variables

mais on ne peut pas en déduire qu'elles sont indépendantes

---

ex 6: $X : \Omega \to \mathbb{N}$

$Y : \Omega \to \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(Y=k) = p(1-p)^k$

$U = \max(X;Y)$ et $V = \min(X;Y)$

1) * loi de $(U;V)$: $(U;V) : \Omega \to \{(u;v) \in \mathbb{N}^2 \,/\, u \geq v\}$

① Soit $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(U=k, V=k) = \mathbb{P}(\max(X;Y)=k, \min(X;Y)=k) = \mathbb{P}(X=k,\ =k)$

$= \mathbb{P}(X=k).\mathbb{P}(\ =k)$ car X et Y sont indépendantes

$= p^2(1-p)^{2k}$

② Soit $k \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$, $k > l$

$\mathbb{P}(U=k, V=l) = \mathbb{P}(\max(X;Y)=k, \min(X;Y)=l) = \mathbb{P}(X=k, Y=l) + \mathbb{P}(Y=k, X=l)$

$\mathbb{P}(U=k, V=\ell) = \mathbb{P}(X=k).\mathbb{P}(Y=\ell) + \mathbb{P}(Y=k, X=\ell)$
$$= p^2(1-p)^{k+\ell} + p^2(1-p)^{k+\ell} = 2p^2(1-p)^{k+\ell}$$

2) Loi marginale de V:

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(V=k) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(U=k, V=\ell) = \sum_{\ell=0}^{k-1} \mathbb{P}(U=k, V=\ell) + \mathbb{P}(U=k, V=k)$

$$= \sum_{\ell=0}^{k-1} 2p^2(1-p)^{k+\ell} + p^2(1-p)^{2k}$$
$$= 2p^2(1-p)^k \sum_{\ell=0}^{k-1}(1-p)^\ell + p^2(1-p)^{2k}$$
$$= 2p^2(1-p)^k \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} + p^2(1-p)^{2k}$$
$$= 2p^2(1-p)^k \frac{1-(1-p)^k}{p} + p^2(1-p)^{2k}$$
$$= 2p(1-p)^k\left[1-(1-p)^k\right] + p^2(1-p)^{2k}$$
$$= 2p(1-p)^k - 2p(1-p)^{2k} + p^2(1-p)^{2k}$$
$$= (1-p)^k\left[2p - 2p(1-p)^k + p^2(1-p)^k\right]$$
$$= p(1-p)^k\left[2 - 2(1-p)^k + p(1-p)^k\right] = p(1-p)^k\left[2 + (1-p)^k(p-2)\right]$$

3) $\mathbb{P}(V=n) = p(1-p)^{2n}(2-p)$

* $W = V+1$ suit 1 loi géométrique:

$W : \Omega \to \mathbb{N}^*$

soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(W=n) = \mathbb{P}(V+1=n) = \mathbb{P}(V=n-1) = p(1-p)^{2(n-1)}(2-p)$
$$= \left[(1-p)^2\right]^{n-1}. p(2-p)$$
$$= \left[(1-p)^2\right]^{n-1}. (2p-p^2)$$
$$= \left[(1-p)^2\right]^{n-1}. \left[1-(1-p)^2\right]$$

donc: $W \sim \mathcal{G}(1-(1-p^2)) = \mathcal{G}(2p-p^2) = \mathcal{G}(p(2-p))$

* On déduire l'espérance de V:

$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{p(2-p)} \iff \mathbb{E}[V+1] = \frac{1}{p(2-p)} \iff \mathbb{E}[V] + 1 = \frac{1}{p(2-p)}$

$\Leftrightarrow \mathbb{E}[V] = \frac{1}{p(2-p)} - 1 = \frac{1-2p+p^2}{p(2-p)} = \frac{(p-1)^2}{p(2-p)}$

4) $\mathbb{P}(U=0, V=0) = p^2$

$\left.\begin{array}{l}\mathbb{P}(U=0) = p\left[2+p-2\right] = p^2 \\ \mathbb{P}(V=0) = p(2-p) = 2p-p^2\end{array}\right\}$ $\mathbb{P}(U=0).\mathbb{P}(V=0) = 2p^3 - p^4$

Si U et V étaient indépendantes, on aurait : $\mathbb{P}(U=0, V=0) = \mathbb{P}(U=0).\mathbb{P}(V=0)$

$$\Leftrightarrow p^2 = 2p^3 - p^4$$
$$\Leftrightarrow p^2 - 2p^3 + p^4 = 0$$
$$\Leftrightarrow p^2(1-2p+p^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow p^2(p-2)^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow p = 0 \text{ ou } p = 2$$

donc U et V ne sont pas indépendantes.

ex 7 :

1) 2 évènements A et B sont indépendants si : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

2) 2 évènements sont disjoints si : $A \cap B = \emptyset$

* sont-ils indépendants ?

Soient A et B, 2 évènements disjoints

on a : $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$

Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

donc : Si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$ alors A et B ne sont pas indépendants

3) Si X et Y sont indépendantes alors :

$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), \mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x).\mathbb{P}(Y=y)$

donc, dans ce cas, connaître les lois marginales de X et de Y permet de connaître la loi de (X,Y).

ex 8 :

$$h(X) = -\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=k) \cdot \frac{\ln(\mathbb{P}(X=k))}{\ln(2)} = -\sum_{k \in X(\Omega)} \frac{\mathbb{P}(X=k) \cdot \ln(\mathbb{P}(X=k))}{\ln 2}$$

1) * loi de X :

$$X : \Omega \rightarrow \{\text{Bleu}; \text{Rouge}; \text{verte}; \text{jaune}\}$$

$$\mathbb{P}(X=\text{Rouge}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(\mathbb{P}(X=\text{Rouge})) = -\ln 2$$

$$\mathbb{P}(X=\text{Bleu}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ln(\mathbb{P}(X=\text{Bleu})) = -\ln 4 = -2\ln 2$$

$$\mathbb{P}(X=\text{verte}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \ln(\mathbb{P}(V=\text{Verte})) = -\ln 8 = -3\ln 2$$

$$\mathbb{P}(X=\text{jaune}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \ln(\mathbb{P}(X=\text{Jaune})) = -3\ln 2$$

$$* \; h(X) = -\frac{\frac{1}{2} \cdot -\ln 2 + \frac{1}{4} \cdot -2\ln 2 + \frac{1}{8} \cdot -3\ln 2 + \frac{1}{8} \cdot -3\ln 2}{\ln 2} = -\left(\frac{-1}{2} - \frac{2}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4} = 1{,}75$$

3)

* loi de M : $M : \Omega \rightarrow \{1;2;3\}$

$$\mathbb{P}(M=1) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(M=2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(M=3) = 1 - \mathbb{P}(M=1) . \mathbb{P}(M=2) = \frac{1}{2}$$

$$* \; \mathbb{E}[M] = \sum_{k=1}^{3} k . \mathbb{P}(M=k) = \frac{1}{4} + 2 . \frac{1}{4} + 3 . \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2{,}25$$

[Si on répète l'expérience 1 grand nombre de fois, il faudra en moyenne 2,25 questions à 1 enfant pour trouver la couleur de la boule.]

* loi de N : $N : \Omega \rightarrow \{1;2;3\}$

$$\mathbb{P}(N=1) = \mathbb{P}(N=1, M=1) + \mathbb{P}(N=1, M=2) + \mathbb{P}(N=1, M=3)$$

On pose R_3 l'évènement "la réponse à la 3è question a été 'OUI'"

$$= \mathbb{P}(N=1, M=1) + \mathbb{P}(N=1, M=2) + \mathbb{P}(N=1, R_3)$$

$$= \mathbb{P}(N=1 | M=1) . \mathbb{P}(M=1) + \mathbb{P}(N=1 | M=2) . \mathbb{P}(M=2) + \mathbb{P}(N=1 | R_3) . \mathbb{P}(R_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(N=2) = \mathbb{P}(N=2, M=1) + \mathbb{P}(N=2, M=2) + \mathbb{P}(N=2, M=3)$$

$$= \mathbb{P}(N=2 | M=1).\mathbb{P}(M=1) + \mathbb{P}(N=2 | M=2).\mathbb{P}(M=2) + \mathbb{P}(N=2, R_3)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \mathbb{P}(N=2 | R_3).\mathbb{P}(R_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(N=3) = 1 - \mathbb{P}(N=1) - \mathbb{P}(N=2) = \frac{1}{2}$$

* N est de même loi que M donc ; $\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[M] = \frac{9}{4} = 2,25$

3) $\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[N] > h(X)$

car $h(X)$ calcule le nombre moyen de questions nécessaires pour deviner la couleur de la boule en partant du principe que l'enfant sait qu'il y a une majorité de boules rouges.
Par conséquent, la première question qu'il posera sera "Est-ce une boule rouge" et la deuxième sera "Est-ce une boule bleue" ce qui augmentera ses chances de trouver plus rapidement la couleur de la boule.
[Dans le contexte de l'énoncé, l'enfant ne connaît pas la répartition des boules, il sait juste qu'elles sont de 4 couleurs différentes]

ex 13 :

$X \sim \mathcal{B}(n;p) \Leftrightarrow X : \Omega \to [\![0;n]\!]$

$$\forall k \in [\![0;n]\!], \mathbb{P}(X=k) = C_k^n \, p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in X(\Omega)} k.\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{n} k.\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k.\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

[On pose $l = k-1$]

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!(n-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{n-l-1}$$

$$= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n.(n-1)!}{l!((n-1)-l)!} p \cdot p^l (1-p)^{(n-1)-l}$$

$$= np . \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l!((n-1)-l)!} p^l (1-p)^{(n-1)-l}$$

$$= np . \sum_{l=0}^{n-1} C_l^{n-1} p^l (1-p)^{(n-1)-l} = np . (p+(1-p))^{n-1} = np . 1^{n-1} = np$$

On a utilisé la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$

$$\Rightarrow (a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{n-1} a^k b^{(n-1)-k}$$

II) Exercices sur les variables aléatoires continues :

ex 1 :

$X \sim \mathcal{N}(0;1)$

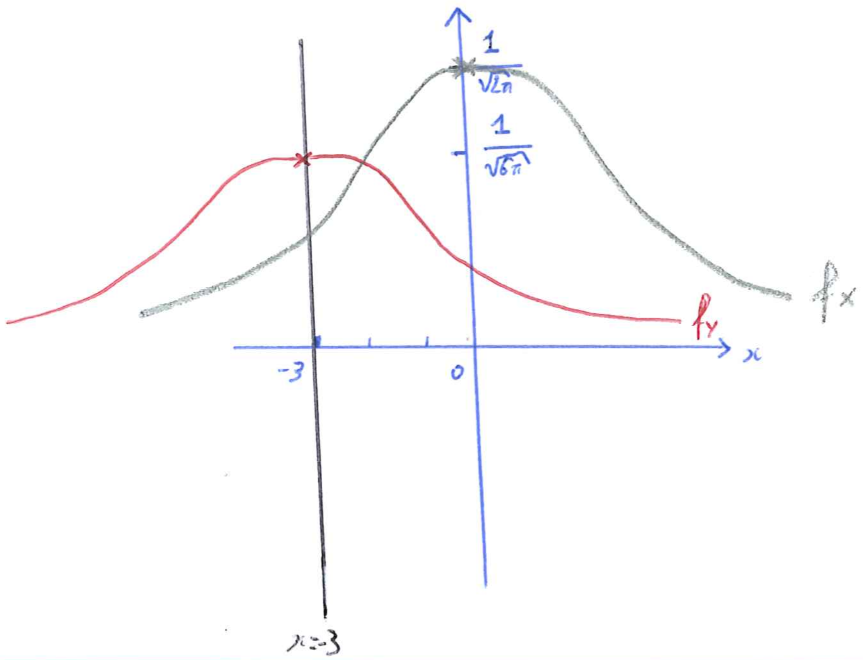
$Y \sim \mathcal{N}(-3;10)$

1) $aY+b \sim \mathcal{N}(-3a+b; 10a^2)$, $\forall (a;b) \in \mathbb{R}^2$

$aY+b \sim \mathcal{N}(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=0 \\ 10a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ a^2=\frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ et } b=\frac{1}{3\sqrt{10}} \\ \text{ou} \\ a=\frac{-1}{\sqrt{10}} \text{ et } b=\frac{-1}{3\sqrt{10}} \end{cases}$

$S = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{3\sqrt{10}}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{3\sqrt{10}}\right) \right\}$

2)



$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x+3)^2}{10}}$

ex 3 :

1) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$

2) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$ [IPP]

On intègre par partie : $u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$

$v = x \Rightarrow v' = 1$

$$\underline{\mathbb{E}[X]} = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \underbrace{\lim_{x \to +\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^{+\infty} = \underbrace{\lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}}}_{0} + \frac{1}{\lambda} = \underline{\frac{1}{\lambda}}$$

3) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)\,dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

On intègre par parties : $u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$

$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

$$\mathbb{E}[X^2] = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \lim_{x \to +\infty} -\frac{x^2}{e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-\lambda x}\,dx = \frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x}\,dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

donc : $\underline{\mathbb{V}[X]} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\frac{1}{\lambda^2}}$

<u>ex 10 :</u>

1) $X \sim \mathcal{U}([a;b])$

$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(x)$

2) $\underline{\mathbb{E}[X]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(x)\,dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)}$

$$= \underline{\frac{b+a}{2}}$$

3) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \mathbb{E}[X^2] - \frac{(b+a)^2}{4}$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a;b]}(x) = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)}$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

donc : $\underline{\mathbb{V}[X]} = \frac{4(b^2+ab+a^2) - 3(b+a)^2}{12} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}$

$$= \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \underline{\frac{(a-b)^2}{12}}$$