Ecole Normale Supérieure de Cachan
61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **1ère année**
Economie et Gestion
Session 2015

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé. L'usage

de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte 4 pages et 4 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

Première partie

Soit la fonction à valeurs réelles $f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4y - 10x + 29$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f_1.
2. Montrer que la fonction f_1 admet un unique point critique $M = (x_0, y_0)$, que vous déterminerez.
3. Montrer que M est un minimum local.
4. La fonction f_1 est-elle convexe ?
5. Montrer que M est un minimum global.
6. Montrer que $f_1(x, y) = d^2\big((x, y), M\big)$ où d est la distance euclidienne.
7. En déduire une seconde démonstration que M est un minimum global.

Deuxième partie

On modifie la fonction précédente en la fonction $f_2(x, y) = x^2 + y^2$ définie pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et l'on cherche le minimum de cette fonction sous la contrainte $4x^2 - y^2 - 16 = 0$.

8. Déterminer le Lagrangien du problème.
9. Déterminer le(s) point(s) critique(s).
10. Ces points critiques sont-ils des minima locaux ?

Problème 2

On observe un échantillon $X_1, X_2, \dots, X_n$ indépendant et identiquement distribué de loi uniforme sur $[0; 2a]$ où a est un réel strictement positif, de densité

$$f_a(x) = \frac{1}{2a} \text{ pour } x \in [0; 2a].$$

Dans ce problème, on étudie deux estimateurs de a.

1. Soit $\hat{a} = \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, la moyenne des observations.
   (a) Calculez l'espérance d'une variable aléatoire de densité f_a.
   (b) Montrez que $\hat{a}$ est un estimateur sans biais de a.
   (c) Calculez la variance de $\hat{a}$.
2. Soit $M = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, l'observation maximale.
   (a) i. Calculez la fonction de répartition d'une variable aléatoire de densité f_a.
       ii. Pour tout $t \geq 0$, calculez $P(M \leq t)$.
       iii. En déduire la densité de M.
   (b) i. Pour tout réel c, calculez l'espérance de cM.
       ii. En déduire un estimateur sans biais de a, que l'on notera $\tilde{a}$.
       iii. Calculez la variance de $\tilde{a}$.
3. Conclure : quel est le meilleur estimateur ?

Problème 3

Soit $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit v un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -10 & -3 & -12 \\ 5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda \boldsymbol{I}$ ne soit pas inversible, où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité.
2. Pour cette valeur de λ, déterminer alors le noyau de l'application linéaire associée à $(A - \lambda \boldsymbol{I})$.
3. Soit $a = (-3, 1, 2)$. Calculer $v(a)$.
4. Déterminer $b = (b_1, b_2, 0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(b) = a - b$.
5. Déterminer $c = (c_1, c_2, 1) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v(c) = b - c$.
6. Montrer que $\mathcal{B}^t = \{a, b, c\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Déterminer T la matrice de v dans la base $\mathcal{B}^t$.
8. Montrer que $(T + \boldsymbol{I})^3 = 0$.
9. En déduire que $(A + \boldsymbol{I})^3 = 0$.
10. Déterminer A^{-1} en fonction de A^2, A et $\boldsymbol{I}$.

Problème 4

On place dans une enveloppe un exemplaire de chacun des billets en euros. On rappelle que les valeurs faciales de ces billets sont 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 500 et on note l'ensemble de ces valeurs B. On va tirer deux billets de valeurs respectives X et Y et analyser le jeu suivant :

- si $X > Y$, le joueur gagne $X - Y$;
- si $Y > X$, le joueur perd $Y - X$;
- si la différence est nulle, il n'y a ni gain ni perte.

On note $G = X - Y$.

Première partie : tirage avec remise

On tire un premier billet dont la valeur est notée X que l'on replace dans l'enveloppe, puis on tire un second billet, de valeur Y.

1. (a) X et Y suivent donc la même loi. Donnez cette loi.
   (b) Calculez le gain espéré $\mathbb{E}[G]$.
   (c) Donnez les probabilités des évènements suivants
      i. nul N : "$X = Y$",
      ii. victoire V : "$X > Y$",
      iii. défaite D : "$X < Y$".
   (d) Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

2. (a) On tire $X = 50$. Conditionnellement à ce tirage, calculez
   i. la probabilité de N,
   ii. la probabilité de V,
   iii. la loi de G,
   iv. l'espérance de G.

   (b) Soit $x \in B$. Conditionnellement à $X = x$, calculez
   i. la probabilité de N,
   ii. la loi de G,
   iii. l'espérance de G.

   (c) On tire X publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelle(s) valeur(s) de X le joueur a-t-il intérêt à se retirer ?

Deuxième partie : tirage sans remise

On tire toujours un premier billet de valeur X, mais cette fois-ci sans le remettre dans l'enveloppe. On tire ensuite un second billet, de valeur Y qui est donc différente de X : $\mathrm{P}(N) = 0$.

3. (a) Quelle est la loi de Y ?
   (b) Quelle est la probabilité de V ?
   (c) Combien vaut le gain espéré ?
   (d) Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

4. (a) On tire $X = 100$.
   i. Quelle est la loi conditionnelle de G ?
   ii. Combien vaut alors l'espérance de G ?

   (b) Soit $x \in B$.
   i. Donnez la loi de G conditionnellement à $X = x$.
   ii. Combien vaut alors l'espérance de G ?

   (c) On tire X publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelle(s) valeur(s) de X le joueur a-t-il intérêt à se retirer ?

Fin de l'épreuve.