C1892 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en **1ère année**

Economie et Gestion Option 1 – économique et de gestion

Session 2008

Épreuve de Mathématiques et Statistiques

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de calculatrice est interdit

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Le sujet comporte 6 pages et 4 problèmes indépendants

Problème 1

Dans ce problème, Ω désigne un ensemble fini. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On définit sur l'ensemble des parties de $\mathcal{P}(\Omega)$ une relation binaire $\lesssim$ comme ceci :

Pour toutes parties X et Y de $\mathcal{P}(\Omega)$, on dit que $X \lesssim Y$ si et seulement si la propriété suivante est vraie :

$$\text{Pour tout } B \in Y, \text{ il existe } A \in X \text{ tel que } B \subset A$$

1) Si Ω est un ensemble qui contient n éléments, rappeler, sans démonstration, quel est le nombre d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2) Dans cette question uniquement, on prend $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$ et on définit $X = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$ et $Y = \{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{d, e\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}\}$. Montrer que $X \lesssim Y$ et que $Y \lesssim X$.

3) On revient au cas général. Montrer que la relation $\lesssim$ est réflexive et transitive. Est-ce que $\lesssim$ est toujours une relation d'ordre ?

4) On définit maintenant $\preceq$ la restriction de $\lesssim$ à l'ensemble des partitions de Ω. Plus précisément, si X est une partition de Ω et si Y est une partition de Ω, on dira que $X \preceq Y$ si et seulement si $X \lesssim Y$.

a) Rappeler la définition d'une partition de Ω.

b) Montrer que $\preceq$ est une relation d'ordre. Est-ce une relation d'ordre total ?

c) Dans le cas où $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$, trouver le plus grand élément de l'ensemble des partitions de Ω pour la relation $\preceq$.

Problème 2

On considère une action boursière sur n périodes : elle sera caractérisée par ses valeurs v_t à chaque date t, c'est-à-dire par les valeurs v_0 à la date $t = 0$, v_1 à la date $t = 1$, $\ldots$, et v_n à la date $t = n$.

On suppose que la valeur de l'action aujourd'hui est $v_0 = 1$, et qu'à chaque période, la valeur de l'action peut être multipliée par un facteur $a > 1$ avec une probabilité $p \in]0, 1[$ (auquel cas la valeur de l'action augmente) ou alors être multipliée par le facteur $\frac{1}{a}$ avec une probabilité $q = 1 - p$ (auquel cas la valeur de l'action diminue).

On suppose que les événements successifs de hausse ou de baisse de l'action sont mutuellement indépendants.

1) Dans cette question 1), on suppose que $n = 2$ et que $a = 2$. Donner à chaque date $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ les valeurs possibles de l'action. Si vous savez que la valeur finale v_2 de l'action est supérieure ou égale à 1, quelle est la probabilité pour qu'il y ait eu une hausse en première période ? On exprimera cette probabilité en fonction de p.
Représenter la fonction de répartition de la variable aléatoire v_2 lorsque $p = \frac{3}{4}$.

2) On revient au cas général. On note Z la variable aléatoire égale au nombre de hausses sur les n périodes. Quelle est la loi de Z ? Donner son espérance et sa variance. Expliciter pour tout entier k entre 0 et n la probabilité $P(Z = k)$ en fonction de k, n et p.

3) Donner la valeur v_n de l'action à la dernière date en fonction de Z, de a et de n.

4) Montrer que $Z = \frac{1}{2}.(\frac{\ln(v_n)}{\ln(a)} + n)$, où $\ln(.)$ désigne la fonction logarithme népérien.

5) Dans cette question, on prend $a = 2$, $n = 7$ et $p = \frac{1}{2}$. En admettant que la loi de Z peut s'approcher par une loi normale de même espérance et variance que Z, donner une valeur approchée de $P(v_n \geq 2)$. On utilisera l'approximation $\frac{1}{\sqrt{7}} = 0,38$ et la table de la loi normale donnée à la fin du sujet.

6) On se place toujours dans le cas $a = 2$, $n = 7$ et $p = \frac{1}{2}$. Montrer par un argument direct que $P(v_n \geq 2) = \frac{1}{2}$. Est-ce que l'on obtient le même résultat qu'à la question 5 ? Pourquoi ?

Problème 3

Dans ce problème, pour tout $a > 0$, a^a est défini par $a^a = e^{a\ln(a)}$, où $\ln(a)$ désigne le logarithme népérien de a. Soit la fonction f définie par

$$f(x, y) = x\ln(x) + y\ln(y)$$

où x et y dont des nombres réels.

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, et montrer que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, ainsi que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

3) On suppose que f présente un extremum local en (x, y). Ecrire les équations satisfaites par x et y. Montrer qu'alors $x = \dfrac{1}{e}$ et $y = \dfrac{1}{e}$.

4) En écrivant la formule de Taylor de f au point $(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e})$, dire si f présente un maximum local ou un minimum local en $(\dfrac{1}{e}, \dfrac{1}{e})$, et expliquer pourquoi.

5) Montrer que la fonction $g(x) = x\ln(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ est convexe, et montrer qu'elle atteint un minimum global en un certain point que l'on précisera.

6) Exprimer f à l'aide de la fonction g. En déduire que f présente un minimum global en un point que l'on précisera.

Problème 4

Le but de ce problème est de déterminer l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+2} = -u_{n+1} + 2u_n$. Dans le problème, on se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant cette condition.

1) Soit A la matrice carrée de taille 2 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, soit X_n la matrice colonne définie par

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, on a $X_{n+1} = AX_n$. En déduire, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 0$ on a $X_n = A^n X_0$.

2) Trouver les valeurs propres et des vecteurs propres de A. Montrer que A est diagonalisable. Trouver une matrice carrée inversible P de taille 2 telle que $P^{-1}AP$ soit une matrice diagonale, que l'on notera D et que l'on explicitera.

3) Calculer PD^nP^{-1}.

4) En déduire A^n en fonction de n.

5) Expliciter u_n pour tout entier $n \geq 2$ en fonction de u_0 et u_1.

Table de la loi normale centrée réduite

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5754
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6627	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7122	0.7156	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7356	0.7389	0.7421	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8079	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8414	0.8438	0.8461	0,8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8622
1.1	0.8643	0.8665	0.8687	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0,8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9083	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9193	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9485	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9895	0.9898	0.9901	0.9903	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9926	0.9928	0.9930	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9944	0.9946	0.9948	0.9949	0,9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9958	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964