Exercice sur la covariance nulle sans indépendance des 2 variables aléatoires

1)

1 étude de X :

*** support :** $X : \Omega \longrightarrow \{0;1\}$

*** loi :** $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(X=1) = \frac{1}{2}$

2 étude de Z :

*** support :** $Z : \Omega \rightarrow \{-1;1\}$

*** loi :** $\mathbb{P}(Z=-1) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2}$

3 étude de $Y = XZ$:

*** support :** $Y(\Omega) = X(\Omega) = \{xz \,/\, x \in \{0,1\} \text{ et } z \in \{-1,1\}\} = \{0;-1;1\}$

*** loi :** $\mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}(XZ=0) = \mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(XZ=1) &= \mathbb{P}(X=1, Z=1)\\ &= \mathbb{P}(X=1).\mathbb{P}(Z=1) \quad \text{car } X \text{ et } Z \text{ sont ind}\\ &= \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y=-1) = 1 - \left[\mathbb{P}(Y=0) + \mathbb{P}(Y=1)\right] = \frac{1}{4}$$

On remarque que : $\mathbb{P}(X=0, Y=1) = \mathbb{P}(\underbrace{X=0, X=1}_{\emptyset}, Z=1) = 0$

or : $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{4}$

donc : $\mathbb{P}(X=0).\mathbb{P}(Y=1) = \frac{1}{8} \neq \mathbb{P}(X=0, Y=1)$

donc : <u>X et Y ne sont pas indépendants.</u>

2) $cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X^2 Z] - \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[XZ]$

$= \mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[XZ]$ car $X^2 = X$

or : on sait que X et Z sont ind dc : $cov(X,Z) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[Z]$

donc : $cov(X,Y) = \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[Z]$

$= \mathbb{E}[X] . \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[X]^2 . \mathbb{E}[Z]$

$= 0$ car $\mathbb{E}[Z] = 1 . \frac{1}{2} - 1 . \frac{1}{2} = 0$

3) $cov(X,Y) = 0$ alors que X et Y ne sont pas indépendantes

Cet exercice ressemble beaucoup à la question 3) de la partie II de l'exercice 4 du sujet de 2020.