Exercices du Cours 1 - Espaces - Probabilisé

ex 6.1 :

1) $A \cap \bar{C}$

2) C'est l'ensemble des couples dont la femme a au plus 40 ans ou est plus jeune que son mari.

Moralité : Mesdames, si vous avez plus de 40 ans, vous ne pouvez pas épouser un homme plus jeune que vous !

3) soit $w \in A \cap \bar{C}$ alors $w \in A$
$w \in \bar{C}$

Cela signifie que l'homme a plus de 40 ans et que la femme a 40 ans au moins

donc cela signifie que la femme est plus jeune que l'homme.

donc $w \in B$

4) $A \cap \bar{C} \cap \bar{B} = \emptyset$ donc c'est 1 événement impossible.

---

ex 6.2 :

1) A

2) $A \cap B \cap \bar{C}$

3) $A \cap B \cap C$

4) $A \cup B \cup C$

5) $\underbrace{(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)}_{\text{2 événements se produisent}} \cup \underbrace{(A \cap B \cap C)}_{\text{3 événements se produisent}} = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$

6) $\underbrace{(A \cap B \cap C)}_{\text{1 événement se produit}} \cup \underbrace{(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C})}_{\text{aucun événement ne se produit}}$

7) $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$

8) $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$

9) $\underbrace{\overline{A \cap B \cap C}}_{\text{3 événements ne se produisent pas en même temps}} = \overline{(A \cap B)} \cup \bar{C} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup \bar{C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

ex 6.3 :

1) * Soit $w \in \Omega$, $\mathbb{1}_\Omega(w) = 1$ donc : $\mathbb{1}_\Omega = 1$

* Soit $w \in \Omega$, $\mathbb{1}_\emptyset(w) = 0$ donc : $\mathbb{1}_\emptyset = 0$

2) * on veut montrer que : $A \subset B \Rightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$?

On suppose que : $A \subset B$
Soit $w \in \Omega$,

(1) si $w \in \bar{B}$ alors : $w \notin A$ et $w \notin B$ donc : $\mathbb{1}_A(w) = \mathbb{1}_B(w) = 0$

(2) si $w \in A \cap B$ alors : $w \in A$ et $w \in B$ donc : $\mathbb{1}_A(w) = \mathbb{1}_B(w) = 1$

(3) si $w \in \bar{A} \cap B$ alors : $w \notin A$ et $w \in B$ donc : $\mathbb{1}_A(w) = 0$ et $\mathbb{1}_B(w) = 1$ donc : $\mathbb{1}_A(w) \leq \mathbb{1}_B(w)$

donc : $\forall w \in \Omega$, $\mathbb{1}_A(w) \leq \mathbb{1}_B(w)$

* on veut montrer que : $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \Rightarrow A \subset B$?

Nous allons raisonner par l'absurde :

On suppose que : $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$ et $A \not\subset B$

Etant donné que : $A \not\subset B$, $\exists w \in A$ tel que $w \notin B$

donc : $\mathbb{1}_A(w) = 1$ et $\mathbb{1}_B(w) = 0$

donc : $\mathbb{1}_A(w) > \mathbb{1}_B(w)$

ce qui est impossible par hypothèse

donc : $\mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B \Rightarrow A \subset B$

3) * $\mathbb{1}_{A \cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$?

Soit $w \in \Omega$,

(1) si $w \in A \cap B$ alors : $\mathbb{1}_{A \cap B}(w) = 1$

De plus, étant donné que : $w \in A$ et $w \in B$, on a : $\mathbb{1}_A(w) = \mathbb{1}_B(w) = 1$

donc : $\mathbb{1}_{A \cap B}(w) = \mathbb{1}_A(w) \times \mathbb{1}_B(w) = 1$

(2) Si $w \notin A \cap B$ alors : $\mathbb{1}_{A \cap B}(w) = 0$

De plus, $w \in \overline{(A \cap B)} \Rightarrow w \in \bar{A} \cup \bar{B} \Rightarrow w \in \bar{A}$ ou $w \in \bar{B}$

2-1 si $w \in \bar{A}$, alors : $\mathbb{1}_A(w) = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_A(w) \times \mathbb{1}_B(w) = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = \mathbb{1}_A(w) \times \mathbb{1}_B(w) = 0$

2-2 si $w \in \bar{B}$ alors : $\mathbb{1}_B(w) = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_A(w) \times \mathbb{1}_B(w) = 0 \Rightarrow \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = \mathbb{1}_A(w) \times \mathbb{1}_B(w) = 0$

donc : $\forall w \in \Omega$, $\mathbb{1}_{A\cap B}(w) = \mathbb{1}_A(w) \times \mathbb{1}_B(w)$

* $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$?

Soit $w \in \Omega$,

1 si $w \in A\cup B$, alors : $\mathbb{1}_{A\cup B}(w) = 1$

De plus, $w \in A\cup B \Rightarrow w \in A$ ou $w \in B$

1-1 si $w \in A\cap B$ alors : $\mathbb{1}_A(w) = 1$, $\mathbb{1}_B(w) = 1$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(w) = 1$

donc : $\mathbb{1}_A(w) + \mathbb{1}_B(w) - \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = 1$

donc : $\mathbb{1}_A(w) + \mathbb{1}_B(w) - \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = \mathbb{1}_{A\cup B}(w) = 1$

1-2 si $w \in \bar{A}\cap B$ alors $\mathbb{1}_A(w) = 0$, $\mathbb{1}_B(w) = 1$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(w) = 0$

donc : $\mathbb{1}_A(w) + \mathbb{1}_B(w) - \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = 1$

donc : $\mathbb{1}_A(w) + \mathbb{1}_B(w) - \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = \mathbb{1}_{A\cup B}(w) = 1$

1-3 si $w \in A\cap \bar{B}$ alors : $\mathbb{1}_A(w) = 1$, $\mathbb{1}_B(w) = 0$ et $\mathbb{1}_{A\cap B}(w) = 0$

donc. $\mathbb{1}_A(w) + \mathbb{1}_B(w) + \mathbb{1}_{A\cap B}(w) = 1 = \mathbb{1}_{A\cup B}(w)$

donc : $\forall w \in \Omega$, $\mathbb{1}_{A\cup B}(w) = \mathbb{1}_A(w) + \mathbb{1}_B(w) + \mathbb{1}_{A\cap B}(w)$

4) * Etant donné que : $\Omega = A \cup \bar{A}$

on a : $\mathbb{1}_\Omega = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\bar{A}} + \mathbb{1}_{A\cap\bar{A}}$ d'après 3)

$\Leftrightarrow 1 = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\bar{A}} + \mathbb{1}_\emptyset$

$\Leftrightarrow 1 = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_{\bar{A}}$

* Etant donné que : $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

$\mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_{A\cap\bar{B}} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_{\bar{B}}$ d'après 3)

$\Rightarrow \mathbb{1}_{A\setminus B} = \mathbb{1}_A \times (1 - \mathbb{1}_B)$ car on a montré plus haut que : $\mathbb{1}_{\bar{B}} = 1 - \mathbb{1}_B$

ex 6.4:

1) $\Omega = \{(P,P);(P,F);(F;P);(F;F)\}$

2) $A = \{(P;P);(P,F)\}$

$B = \{(P,F);(F,F)\}$

3) $A \cup B = \{(P,P);(P,F);(F,F)\}$

$A \cap B = \{(P,F)\}$

[ici, nous travaillons sur 1 espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$

on définit $\mathbb{P}$ comme la probabilité uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

on a donc : $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$

$$E \longmapsto \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(E)}{4}$$

le "cardinal" étant le nombre d'élément de l'événement E

$A \cup B$ et $A \cap B$ sont des éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, on peut donc calculer leurs probabilités]

$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$

---

ex 6.5:

1) * le résultat d'1 lancer de dé est 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

$\Omega = \{(x;y) / x \in [\![1;6]\!] \text{ et } y \in [\![1;6]\!]\}$

$[\ [\![1;6]\!] = \{1;2;3;4;5;6\}\ ]$

$\Omega = [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!]$

* $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ [tout simplement l'ensemble des parties de Ω, autrement dit l'ensemble des sous-ensembles de Ω]

* $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0;1]$

$$E \longmapsto \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(E)}{36}$$

2) $*B = \{(x;y) \in [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!] \setminus x = 1 \text{ ou } y = 1\}$

$= \{1\} \times [\![1;6]\!] \cup [\![1;6]\!] \times \{1\}$

$= \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);(2;1);(3;1);(4;1);(5;1);(6;1)\}$

$* A = \{(x;y) \in [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!] \setminus x+y = 0\ [2]\}$

$= \bigcup_{k=1}^{6} \{(x,y) \in [\![1;6]\!] \times [\![1;6]\!] \setminus x+y = 2k\}$

$= \{(1;2);(1;4);(1;6);(2;1);(2;3);(2;5);(3;2);(3;4);(3;6);(4;1);(4;3);(4;5);(5;2);$
$(5;4);(5;6);(6;1);(6;3);(6;5)\}$

3) $A \cap B$ = "la somme des 2 jets est impaire et 1 est tiré au moins une fois"

$A \cup B$ = "la somme des 2 jets est impaire ou 1 est tiré au moins une fois"

$A \cap \bar{B}$ = "la somme des 2 jets est impaire et 1 n'est jamais tiré"

4) $A \cap B = \{(1,2);(1;4);(1;6);(2;1);(4;1);(6;1)\}$

$* \ \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{\text{card}(A \cap B)}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

$* \ \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

$= \dfrac{18}{36} + \dfrac{11}{36} - \dfrac{6}{36} = \dfrac{23}{36}$

$* \ \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (B \cup \bar{B})) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \dfrac{18}{36} - \dfrac{6}{36} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$

---

ex 6.6 :

1) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}8$

2) $* \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \bar{B})$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}5$

$* \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0{,}2$

$\mathbb{P}((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})) = \mathbb{P}(A\cap\bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A}\cap B)$ car l'union est disjointe

$= 0,7$

3) $\mathbb{P}((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})) = 0,7 + \mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B})$

or: $\bar{A}\cap\bar{B} = \overline{(A\cup B)}$

donc: $\mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(A\cup B) = 0,2$

on en déduit que: $\mathbb{P}((A\cap\bar{B})\cup(B\cap\bar{A})\cup(\bar{A}\cap\bar{B})) = 0,9$

4) $\mathbb{P}(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0,2$

---

ex 6.7:

On veut montrer la propriété $(\mathcal{P}_n)$: $\forall N\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}(A_n)$

par récurrence.

* a-t-on $(\mathcal{P}_1)$ vraie ?

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{1} A_n\right) = \mathbb{P}(A_1) = \sum_{n=1}^{1}\mathbb{P}(A_n)$$

donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

* on suppose $(\mathcal{P}_N)$ vraie, a-t-on $(\mathcal{P}_{N+1})$ vraie ?

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\cup A_{N+1}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) + \mathbb{P}(A_{N+1}) - \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\cap A_{N+1}\right)$$

or, d'après l'hypothèse de récurrence: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N}\mathbb{P}(A_n)$

donc : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{N+1}) - \mathbb{P}\left(A_{N+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\right)$

or : $\mathbb{P}\left(A_{N+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\right) \geqslant 0$

donc : $\mathbb{P}(A_{N+1}) - \mathbb{P}\left(A_{N+1} \cap \left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\right) \leqslant \mathbb{P}(A_{N+1})$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_N) + \mathbb{P}(A_{N+1})$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N+1} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N+1} \mathbb{P}(A_n)$

donc : $(\mathcal{P}_{N+1})$ est vraie

On a montré par récurrence que : $\forall N \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)$