Les variables aléatoires continues

I) Les variables aléatoires continues :

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ est une variable aléatoire qui n'est pas discrète (ses valeurs ne sont pas dénombrables)

- Comment définir sa loi ?
- C'est l'application $\mathbb{P}_X : \{[a;b] \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2\} \longrightarrow [0;1]$

$$[a;b] \longmapsto \mathbb{P}(X \in [a;b])$$

- par convention : $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = 0$ Contrairement à 1 variable aléatoire discrète.

II) Les densités de probabilité :

* **déf :** C'est 1 fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^+$

ET continue sur $\mathbb{R}$ (OU parfois continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 1 nombre fini de points)

ET telle que : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

* X est 1 variable aléatoire qui admet f pour densité : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \mathbb{P}(X \in [a;b]) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

* quelques densités à connaître :

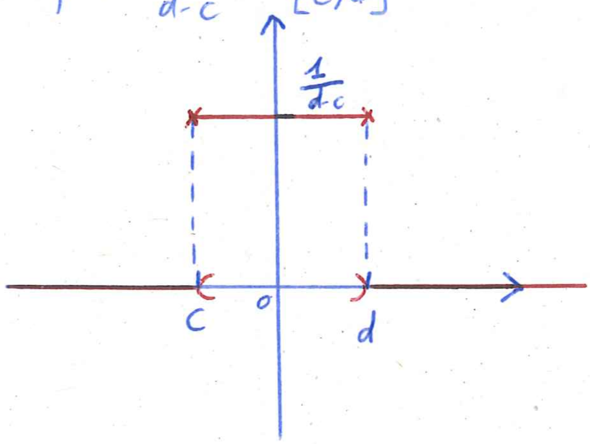
1) la uniforme sur 1 intervalle $[c;d]$:

- densité : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty; c[\cup]d; +\infty[\\ \dfrac{1}{d-c} & \text{si } x \in [c;d] \end{cases}$$

On écrit aussi : $f(x) = \dfrac{1}{d-c}\, \mathbb{1}_{[c;d]}(x)$

- graphe :

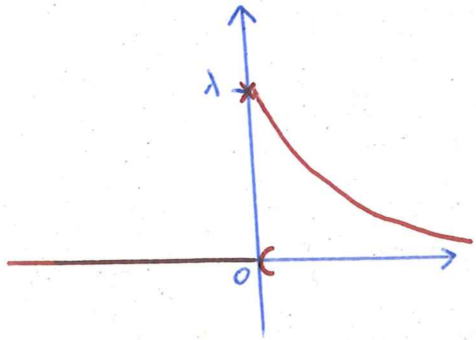


② loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$:

définition : $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in [0;+\infty[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty;0[\end{cases}$

On écrit aussi $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$

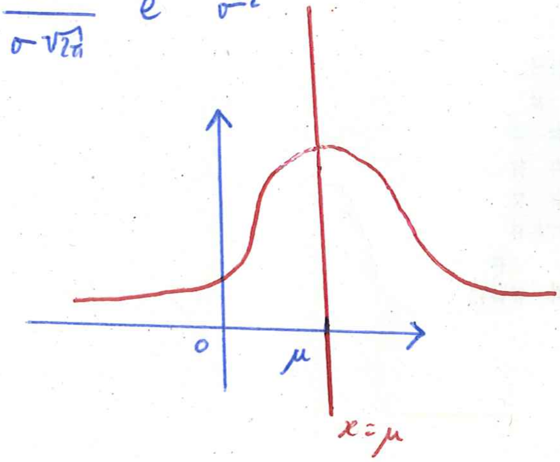
graphe :



③ la normale de paramètres μ et σ^2 :

- densité : $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$

- graphe :



fonction symétrique par rapport à la droite : $x=\mu$

III) Espérance :

* **déf** : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$

* **interprétation** : C'est la valeur que l'on s'attend à trouver si on répète l'expérience aléatoire 1 grand nombre de fois et qu'on calcule la moyenne des résultats.

* **rq** : $\mathbb{E}[a.X+b] = a.\mathbb{E}[X]+b$

① $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_c^d x \cdot \frac{1}{d-c}\, dx = \frac{1}{d-c}\int_c^d x\, dx = \frac{1}{d-c}\left[\frac{x^2}{2}\right]_c^d = \frac{1}{d-c}\cdot\frac{d^2-c^2}{2} = \frac{d+c}{2}$

[Primitive]

② $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{u'}\, dx = \Big[u\, v\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u v'\, dx$

[I.P.P.]

$= \Big[-e^{-\lambda x}\, x\Big]_0^{+\infty} - \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} \cdot 1\, dx$

$= \Big[-x.e^{-\lambda x}\Big]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx$

or : $\left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} -xe^{-\lambda x} - (-0.1) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} -\frac{x}{e^{\lambda x}} = 0$

donc : $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right]_0^{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} - \frac{1}{-\lambda}$

[Primitive]

or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0$

donc : $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

IV) Variance :

* déf : $\mathbb{V}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,dx$

* ppté : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

$\mathbb{V}[a.X+b] = a^2.\mathbb{V}[X]$

$\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,cov(X;Y)$

① $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

il reste à calculer : $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)\,dx = \int_c^d x^2 . \frac{1}{d-c}\,dx = \frac{1}{d-c}\int_c^d x^2\,dx$

[Primitive] $= \frac{1}{d-c}\left[\frac{x^3}{3}\right]_c^d = \frac{1}{d-c}\,\frac{d^3-c^3}{3} = \frac{(d-c)(d^2+cd+c^2)}{(d-c).3}$

$= \frac{d^2+cd+c^2}{3}$

donc : $\mathbb{V}[X] = \frac{d^2+cd+c^2}{3} - \left(\frac{d+c}{2}\right)^2 = \frac{d^2+cd+c^2}{3} - \frac{d^2+2cd+c^2}{4} = \frac{4d^2+4cd+4c^2-3d^2-6cd-3c^2}{12}$

$= \frac{d^2-2cd+c^2}{12}$

$= \frac{(c-d)^2}{12}$

② $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ et on connaît $\mathbb{E}[X]$

il reste à calculer : $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 . f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v}\,\underbrace{\lambda e^{-\lambda x}}_{u'}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\,x^2\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} . 2x\,dx$

[I.P.P.]

$$\left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty} -x^2 e^{-\lambda x} - 0 \cdot -1 = 0 \quad \text{car} \quad \frac{x^2}{e^{\lambda x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc : $\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx = 2 \cdot \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = 2/\lambda \mathbb{E}[X] = 2 \cdot \frac{1}{\lambda^2}$

d'où : $\underline{\mathbb{V}[X]} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\frac{1}{\lambda^2}}$

V) covariance :

*** déf :** $\text{cov}(X;Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

*** autre définition :** $\mathbb{E}[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f_X(x)\, f_Y(y)\, dx\, dy$

*** rq :** Si X et Y sont indépendantes alors : $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

[Si $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, on ne peut pas déduire l'indépendance de X et Y.]

VI) La fonction de répartition :

*** déf :** $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$

$$x \longmapsto \mathbb{P}(X \leqslant x) = \mathbb{P}(X \in]-\infty; x]) = \mathbb{P}_X(]-\infty; x]) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

*** rq :**
1. F_X est croissante
2. F_X est continue à droite
3. $F_X \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F_X \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1$
4. pour $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, $F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(X \in [a;b]) = \int_a^b f(t)\, dt$

*** propriété :** $F_X'(x) = f(x)$ avec f densité de X

On peut donc déduire la densité de la fonction de répartition.