C1092 **Ecole Normale Supérieure de Cachan**

61 avenue du président Wilson

94230 CACHAN

Concours d'admission en **1$^{\text{ère}}$ année**

Economie et Gestion

Session 2010

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES ET STATISTIQUES

Durée : 4 heures

Aucun document n'est autorisé.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Le sujet comporte 7 pages et 4 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Problème 1

Soit $\Omega = \{w_1, ..., w_n\}$ un ensemble fini, où n est un entier strictement positif ; soit P une probabilité sur Ω. On note $p_i = P(\{w_i\})$ pour tout $i = 1, ..., n$. On rappelle qu'un événement est un sous-ensemble de Ω.

Pour toute variable aléatoire X sur Ω à valeurs réelles (c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$), $E(X)$ désigne l'espérance de X par rapport à la probabilité P. Pour tout couple X et Y de variables aléatoires à valeurs réelles, on définit le réel noté $< X, Y >$ par

$$< X, Y >= E(XY),$$

et on note $cov(X, Y)$ la covariance de X et Y.

1) Montrer que l'ensemble des variables aléatoires à valeurs réelles sur Ω est un espace vectoriel, que l'on notera $\mathcal{E}$.

2) Montrer que $< ., >$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$ si et seulement si on a $p_i > 0$ pour tout $i = 1, ..., n$.

3) Dans cette question, on suppose que X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs réelles sur Ω, centrées en 0. Donner une relation entre $< X, Y >$ et entre $cov(X, Y)$.

On suppose dans la suite du problème que l'on a bien $p_i > 0$ pour tout $i = 1, ..., n$.

4) Pour tout sous-ensemble A de Ω, on définit la variable aléatoire à valeurs réelles sur Ω notée 1_A, de la manière suivante : pour tout $w \in \Omega$, $1_A(w) = 0$ si $w \notin A$ et $1_A(w) = 1$ si $w \in A$.

a) Montrer que pour tout sous-ensembles A et B de Ω, on a $1_A.1_B = 1_{A\cap B}$.

b) Pour tout sous-ensemble A de Ω, prouver que $E(1_A) = P(A)$, où $P(A)$ désigne la probabilité de A.

c) Montrer que pour tout sous-ensembles A et B de Ω, les événements A et B sont indépendants si et seulement si $cov(1_A.1_B) = 0$.

Dans la suite, pour tout $X \in \mathcal{E}$, on note $\|X\| = \sqrt{< X, X >}$, et pour tout réel

x, on notera également x la variable aléatoire (dans $\mathcal{E}$) constante égale à x

5) Dans cette question, on cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ vérifiant la condition (C) suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \|X-\lambda\|^2 \leq \|X-x\|^2. \tag{C}$$

a) Montrer que la condition (C) est vérifiée si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - 2xE(X) + 2\lambda E(X) - \lambda^2 \geq 0.$$

b) En étudiant le trinôme du second degré (en x) ci-dessus, montrer que la condition (C) est vérifiée si et seulement si λ vérifie l'équation

$$E^2(X) - 2\lambda E(X) + \lambda^2 = 0$$

c) En déduire finalement que la condition (C) est vérifiée si et seulement si $\lambda = E(X)$.

Problème 2

Soit n un entier strictement positif. Soit $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille n et à coefficients réels. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n$ on définit $C(M) = \{N \in \mathcal{M}_n,\ MN = NM\}$.

1) Trouver $C(I)$, où I désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n$.

2) Prouver que pour tout $M \in \mathcal{M}_n$, $C(M)$ est un espace vectoriel.

3) Dans cette question, on suppose que $n = 2$. Soit $M \in \mathcal{M}_2$ telle que $C(M) = \mathcal{M}_2$. Prouver que M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

pour un certain réel a.

4) On revient au cas où n est un entier strictement positif quelconque. Dans cette question 4, on suppose que M est une matrice de $\mathcal{M}_n$ possédant n valeurs propres distinctes. Pour toute valeur propre λ de M, on note $E_\lambda(M)$ le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

a) Montrer que pour $N \in C(M)$, et pour tout $X \in E_\lambda(M)$ on a $NX \in E_\lambda(M)$.

b) En déduire que pour $N \in C(M)$, tout X non nul dans $E_\lambda(M)$ est vecteur propre de N.

c) Montrer qu'il existe une matrice inversible P dans $\mathcal{M}_n$ tel que $C(M)$ est exactement l'ensemble des matrices de la forme PDP^{-1}, où D varie dans l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n$.

d) Trouver la dimension en tant qu'espace vectoriel de $C(M)$ (on prouvera toute affirmation).

5) Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que 2 est valeur propre de M.

b) Déterminer les autres valeurs propres de M.

c) Expliciter une matrice inversible Q dans $\mathcal{M}_n$ et une matrice diagonale Δ dans $\mathcal{M}_n$ telles que $M = Q\Delta Q^{-1}$.

d) Expliciter $C(M)$, ainsi que sa dimension.

Problème 3

Dans ce problème, pour tout ensemble X et pour toute fonction $f : X \times X \to \mathbb{R}$, on appelle point-selle associé au couple (X, f) tout élément $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times X$ vérifiant les deux conditions suivantes :

$$\forall x \in X,\ f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y})$$

et

$$\forall y \in X,\ f(\bar{x}, y) \geq f(\bar{x}, \bar{y}).$$

A) Etude de trois exemples.

1) Dans cette question, $X = \mathbb{R}$, et $f(x, y) = -x^2 + y^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un unique point-selle (que l'on explicitera) associé à (X, f).

2) Dans cette question, $X = [0, 1]$, et $f(x, y) = (x - y)^2$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il n'existe aucun point-selle associé à (X, f).

3) Dans cette question, $X = [0,1]$, et $f(x,y) = x$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'ensemble (que l'on précisera) des point-selles associés à (X,f) est infini.

B) Un exemple de résolution graphique.

On suppose dans la partie B) que $X = [-2,2]$, et que $f(x,y) = ax + by + cxy$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, où a, b et c sont trois réels fixés.

a) Pour tout $x \in X$, trouver l'ensemble

$$M(x) = \{y \in X,\ \forall y' \in X,\ f(x,y') \geq f(x,y)\}$$

en fonction de x, b et c. Le résultat fera intervenir le signe de $b + cx$.

b) Pour tout $y \in X$, trouver l'ensemble

$$N(y) = \{x \in X,\ \forall x' \in X,\ f(x',y) \leq f(x,y)\}$$

en fonction de y, a, et c.

c) Montrer que $(\bar{x},\bar{y})$ est un point-selle associé à (X,f) si et seulement si $(\bar{x},\bar{y}) \in N(\bar{y}) \times M(\bar{x})$.

d) On suppose dans cette question que $a = b = c = 1$. Représenter graphiquement dans un repère cartésien l'ensemble $E = \{(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2],\ y \in M(x)\}$, puis l'ensemble $F = \{(x,y) \in [-2,2] \times [-2,2],\ x \in N(y)\}$. Montrer que $E \cap F$ est égal à l'ensemble des point-selles associés à (X,f). En déduire, graphiquement, l'ensemble de tels point-selles.

C) Ensembles rectangulaires.

1) Soit X un ensemble et $f : X \times X \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Soient $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ et $(\bar{x}'_1, \bar{x}'_2)$ deux point-selles associés à (X,f). Montrer que $(\bar{x}_1, \bar{x}'_2)$ et $(\bar{x}'_1, \bar{x}_2)$ sont aussi des point-selles associés à (X,f).

2) On appelle ensemble rectangulaire tout ensemble fini $\mathcal{R} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tel que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $(x',y') \in \mathbb{R}^2$, on a

$$[(x,y) \in \mathcal{R} \text{ et } (x',y') \in \mathcal{R}] \;\Rightarrow\; [(x,y') \in \mathcal{R} \text{ et } (x',y) \in \mathcal{R}].$$

a) Montrer que si $\mathcal{R}$ est un ensemble rectangulaire, alors il existe deux sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$, notés $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, tels que $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

b) Montrer, réciproquement, que si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux sous-ensembles finis de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est un ensemble rectangulaire.

c) Soit $\mathcal{R}$ un ensemble rectangulaire. On définit une relation $\sim$ sur $\mathcal{R}$ ainsi : pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$ et pour tout $(x', y') \in \mathcal{R}$, $(x, y) \sim (x', y')$ si et seulement si $x = x'$ ou $y = y'$. Montrer que $\sim$ n'est pas une relation d'équivalence.

d) Soit $\mathcal{R}$ un ensemble rectangulaire. On définit une relation $\preceq$ sur $\mathcal{R}$ ainsi : pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}$ et pour tout $(x', y') \in \mathcal{R}$, $(x, y) \preceq (x', y')$ si et seulement si $x \leq x'$ et $y \leq y'$. Montrer que c'est une relation d'ordre. Est-ce qu'elle est totale ? Montrer que $\mathcal{R}$ admet un unique maximum et un unique minimum pour cette relation d'ordre.

Problème 4

La demande journalière pour un produit est modélisée par une v.a.r. X, de loi de Poisson de paramètre λ. On suppose que la demande un jour donné ne dépend pas des demandes des autres jours.

1) La probabilité pour que la demande soit supérieure ou égale à 7 étant de 0,1107, déterminer l'espérance mathématique et la variance de X.

2) Le magasin recomplète éventuellement son stock chaque jour de manière à disposer de 5 unités du produit à chaque ouverture. Soit Y le nombre de journées avec rupture de stock sur 100 jours. Déterminer la loi de Y.

3) Donner la moyenne et la variance de Y.

Tables des loi de Poisson

k	**Loi de Poisson** Probabilités individuelles $P(X=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$							
	$\lambda=1,0$	$\lambda=1,5$	$\lambda=2,0$	$\lambda=2,5$	$\lambda=3,0$	$\lambda=3,5$	$\lambda=4,0$	$\lambda=4,5$
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111
1	0,3679	0,3347	0,2707	0,2052	0,1494	0,1057	0,0733	0,0500
2	0,1839	0,251	0,2707	0,2565	0,2240	0,1850	0,1465	0,1125
3	0,0613	0,1255	0,1804	0,2138	0,2240	0,2158	0,1954	0,1687
4	0,0153	0,0471	0,0902	0,1336	0,1680	0,1888	0,1954	0,1898
5	0,0031	0,0141	0,0361	0,0668	0,1008	0,1322	0,1563	0,1708
6	0,0005	0,0035	0,0120	0,0278	0,0504	0,0771	0,1042	0,1281
7	0,0001	0,0008	0,0034	0,0099	0,0216	0,0385	0,0595	0,0824
8	0	0,0001	0,0009	0,0031	0,0081	0,0169	0,0298	0,0463
9	0	0	0,0002	0,0009	0,0027	0,0066	0,0132	0,0232
10	0	0	0	0,0002	0,0008	0,0023	0,0053	0,0104
11	0	0	0	0	0,0002	0,0007	0,0019	0,0043
12	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0006	0,0016
13	0	0	0	0	0	0,0001	0,0002	0,0006
14	0	0	0	0	0	0	0,0001	0,0002
15	0	0	0	0	0	0	0	0,0001
16	0	0	0	0	0	0	0	0

c	**Loi de Poisson** Probabilités cumulées $P(X\leq c)=\sum_{k=0}^{k=c} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$							
	$\lambda=1,0$	$\lambda=1,5$	$\lambda=2,0$	$\lambda=2,5$	$\lambda=3,0$	$\lambda=3,5$	$\lambda=4,0$	$\lambda=4,5$
0	0,3679	0,2231	0,1353	0,0821	0,0498	0,0302	0,0183	0,0111
1	0,7358	0,5578	0,4060	0,2873	0,1991	0,1359	0,0916	0,0611
2	0,9197	0,8088	0,6767	0,5438	0,4232	0,3208	0,2381	0,1736
3	0,981	0,9344	0,8571	0,7576	0,6472	0,5366	0,4335	0,3423
4	0,9963	0,9814	0,9473	0,8912	0,8153	0,7254	0,6288	0,5321
5	0,9994	0,9955	0,9834	0,958	0,9161	0,8576	0,7851	0,7029
6	0,9999	0,9991	0,9955	0,9858	0,9665	0,9347	0,8893	0,8311
7	1	0,9998	0,9989	0,9958	0,9881	0,9733	0,9489	0,9134
8	1	1	0,9998	0,9989	0,9962	0,9901	0,9786	0,9597
9	1	1	1	0,9997	0,9989	0,9967	0,9919	0,9829
10	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9990	0,9972	0,9933
11	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9991	0,9976
12	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997	0,9992
13	1	1	1	1	1	1	0,9999	0,9997
14	1	1	1	1	1	1	1	0,9999
15	1	1	1	1	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1