Correction Exercices sur le Produit Scalaire

ex 1 :

1) $M_n(\mathbb{R})$ est 1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ est-elle 1 produit scalaire

* φ est symétrique ? Soient $(A,B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$,

$$(A^t B)^t = B^t (A^t)^t = B^t A$$

donc : A^tB et B^tA ont la même diagonale

donc : $tr(A^tB) = tr(B^tA) \iff \varphi(A,B) = \varphi(B,A)$ donc φ est symétrique

* φ est linéaire à gauche ? Soient $(A,B,C) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(A+\lambda B)^t C = (A^t + \lambda B^t) C = A^t C + \lambda B^t C$$

donc : $tr((A+\lambda B)^t C) = tr(A^tC + \lambda B^tC)$

$= tr(A^tC) + \lambda\, tr(B^tC)$ car la trace est 1 opération linéaire

$\iff \varphi(A+\lambda B, C) = \varphi(A,C) + \lambda \varphi(B,C)$

φ étant linéaire à gauche et symétrique, on en déduit qu'elle est bilinéaire.

* φ est positive ? Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\varphi(A,A) = tr(A^tA) = \sum_{i=1}^{n} (A^tA)_{ii}$$

or pour $i \in [\![1;n]\!]$, $(A^tA)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geqslant 0$

donc : $\varphi(A,A) \geqslant 0$ donc φ est positive

* φ est définie ? Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

$$\varphi(A,A) = 0 \Rightarrow tr(A^tA) = 0 \Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ (A^tA)_{ii} = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\, a_{ki} = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \forall i \in [\![1;n]\!],\ \forall k \in [\![1;n]\!],\ a_{ki} = 0$$

$\Rightarrow A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$ donc φ est définie

φ est bien 1 produit scalaire.

2) $M_n(\mathbb{R})$ est 1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ est 1 produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$

donc $(M_n(\mathbb{R}), \varphi)$ est 1 espace pré-hilbertien réel.

De plus, $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 donc $(M_n(\mathbb{R}), \varphi)$ est 1 espace euclidien.

---

ex 2 :

1) $\mathcal{C}^1([0;1])$ est 1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ est-elle 1 produit scalaire ?

* φ est symétrique ? Soit $(f,g) \in \mathcal{C}^1([0;1]) \times \mathcal{C}^1([0;1])$

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)\,g'(t)\,dt = g(0)f(0) + \int_0^1 g'(t)\,f'(t)\,dt = \varphi(g,f)$$

* φ est linéaire à gauche ? Soit $(f,g,h) \in \mathcal{C}^1([0;1]) \times \mathcal{C}^1([0;1]) \times \mathcal{C}^1([0;1])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f+g, h) &= (\lambda f+g)(0)\,h(0) + \int_0^1 (\lambda f+g)'(t)\,h'(t)\,dt \\
&= (\lambda f(0)+g(0))\,h(0) + \int_0^1 [\lambda f'(t)+g'(t)]\cdot h'(t)\,dt \\
&= \lambda f(0)h(0) + g(0)h(0) + \int_0^1 [\lambda f'(t)h'(t) + g'(t)\,h'(t)]\,dt
\end{aligned}$$

car $f'h'$ et $g'h'$ sont continues sur $[a;b]$

$$\begin{aligned}
&= \lambda f(0)h(0) + g(0)h(0) + \lambda \int_0^1 f'(t)\,h'(t)\,dt + \int_0^1 g'(t)\,h'(t)\,dt \\
&= \lambda \left[f(0)h(0) + \int_0^1 f'(t)\,h'(t)\,dt \right] + g(0)h(0) + \int_0^1 g'(t)\,h'(t)\,dt \\
&= \lambda\, \varphi(f,h) + \varphi(g,h)
\end{aligned}$$

donc φ est linéaire à gauche et, étant donné qu'elle est symétrique, elle est aussi linéaire à droite.

on a déduit que φ est bilinéaire

* φ est positive ? Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1])$

$$\varphi(f,f) = f^2(0) + \int_0^1 [f'(t)]^2\,dt$$

Étant donné que $(f')^2$ est continue sur $[0;1]$

et que $\forall t \in [0;1]$, $[f'(t)]^2 \geq 0$, on a $\int_0^1 [f'(t)]^2\,dt \geq 0$

donc : $\varphi(f,f) \geq 0$

φ est positive

* φ est définie? Soit $f \in \mathcal{C}^1([0;1])$

$\varphi(f,f) = 0 \Leftrightarrow [f(0)]^2 + \int_0^1 [f'(t)]^2 dt = 0$

on en déduit que : $f(0) = 0$

et $\int_0^1 [f'(t)]^2 dt = 0$

or : f' est continue sur $[0;1]$ et positive sur $[0;1]$ et $\int_0^1 [f'(t)]^2 dt = 0$

donc : $f'(t) = 0, \forall t \in [0;1]$

donc, f est constante sur $[0;1]$

$\Rightarrow \forall t \in [0,1], f(t) = f(0) = 0$

φ est définie.

2) $Id \in \mathcal{C}^1([0;1])$

$Id^{\perp} = \{ f \in \mathcal{C}^1([0;1]) / \varphi(Id, f) = 0 \}$

soit $f \in Id^{\perp}$,

$\varphi(Id, f) = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 f'(t)\, dt = 0$

$\Leftrightarrow [f(t)]_0^1 = 0$

$\Leftrightarrow f(1) - f(0) = 0$

$Id^{\perp} = \{ f \in \mathcal{C}^1([0;1]) / f(1) = f(0) \}$

---

exo 3 :

1) Soient X et Y, 2 v.a.

* La covariance est symétrique :

$cov(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Y] = cov(Y,X)$

* La covariance est bilinéaire :

$cov(\lambda X + Y, Z) = \mathbb{E}[(\lambda X + Y).Z] - \mathbb{E}[\lambda X + Y].\mathbb{E}[Z]$

$= \lambda \mathbb{E}[XZ] + \mathbb{E}[YZ] - \lambda \mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[Z]$ car l'espérance est 1 opération linéaire

$= \lambda(\mathbb{E}[XZ] - \mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Z]) + \mathbb{E}[YZ] - \mathbb{E}[Y].\mathbb{E}[Z]$

$= \lambda\, cov(X,Z) + cov(Y,Z)$

On en déduit que la covariance est linéaire à gauche.
Comme elle est symétrique, elle est aussi linéaire à droite.
donc la covariance est bilinéaire.

2) Est-elle 1 produit scalaire ?

* Soit X, 1 v.a.

$cov(X,X) = \mathbb{V}[X] \geqslant 0$ donc la covariance est positive.

* est-elle définie ?

$cov(X,X) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{V}[X] = 0$

posons : $X : \Omega \to \mathbb{N}$

$\omega \mapsto 1$

$\mathbb{E}[X^2] = 1$ et $\mathbb{E}(X) = 1$ donc : $\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 0$

et X n'est pas nulle donc la covariance n'est pas définie.

3) $\mathbb{V}[X+Y] = cov(X+Y, X+Y) = cov(X,X) + 2\, cov(X,Y) + cov(Y,Y)$

$\Leftrightarrow cov(X,Y) = \frac{1}{2} \cdot \left[\mathbb{V}[X+Y] - \mathbb{V}[X] - \mathbb{V}[Y] \right]$