

I) Exercices sur les variables aléatoires discrètes:ex 1:

1) $X \sim \mathcal{G}(p)$

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$

2)

* ex 1: On lance 1 pièce jusqu'à ce qu'elle tombe sur pile. X qui représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir pile suit 1 loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X=k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}$

* ex 2: On lance 1 dé jusqu'à faire le chiffre "6" Y qui représente le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le chiffre "6" suit 1 loi géométrique de paramètre $\frac{1}{6}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(Y=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5^{k-1}}{6^k}$

$$\begin{aligned}
 3) E[X] &= \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p \\
 &= p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}
 \end{aligned}$$

On sait que: $\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)}$ pour $|1-p| < 1$

$\sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k = \frac{1}{p}$

On dérive par rapport à p , on obtient: $\left(\frac{1}{p}\right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^k\right)'$

$\Leftrightarrow \frac{-1}{p^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot -1 \cdot (1-p)^{k-1}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{p^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k (1-p)^{k-1}$

d'où: $E[X] = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

ex 5:

1) Soit X et Y , 2 variables aléatoires

$$\text{cov}(X; Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$$

2) $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2\text{cov}(X; Y)$

3) $\text{cor}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V[X]} \sqrt{V[Y]}}$

4) $\text{cor}(X; Y) \in [-1; 1]$

[La corrélation entre 2 variables aléatoires est l'intensité de la relation entre les 2 variables]

- Le coefficient de corrélation de Pearson mesure le degré de dépendance linéaire entre les 2 variables.

- Si $\text{cor}(X; Y)$ proche de -1 , Y peut s'exprimer comme une fonction affine décroissante de X

[et X peut aussi s'exprimer comme une fonction affine décroissante de Y puisque: $Y = aX + b$ avec $a < 0$

- Si $\text{cor}(X; Y)$ proche de 1 , Y peut s'exprimer comme une fonction affine croissante de X
 $Y = aX + b$ avec $a > 0$

[et X peut aussi s'exprimer comme une fonction affine croissante de Y puisque: $X = \frac{1}{a} \cdot Y + \frac{b}{a}$ avec $\frac{1}{a} > 0$]

5) Si X et Y sont indépendantes alors: $\text{cov}(X; Y) = 0$

- Si $\text{cov}(X; Y) = 0$, on peut justifier conclure que: $\text{cor}(X; Y) = \frac{\text{cov}(X; Y)}{\sqrt{V[X]} \sqrt{V[Y]}} = 0$

donc qu'il n'existe pas de dépendance linéaire entre les 2 variables

mais on ne peut pas en déduire qu'elles sont indépendantes

ex 6: $X: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$Y: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = P(Y=k) = p(1-p)^k$

$U = \max(X; Y)$ et $V = \min(X; Y)$

1) * loi de $(U; V)$: $(U; V): \Omega \rightarrow \{(u; v) \in \mathbb{N}^2 / u \geq v\}$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $\underline{P(U=k, V=k) = P(\max(X; Y)=k, \min(X; Y)=k) = P(X=k, Y=k)}$
 $= P(X=k) \cdot P(Y=k)$ car X et Y sont indépendantes
 $= \underline{p^2 (1-p)^{2k}}$

2) Soit $k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}, k > l$

$P(U=k, V=l) = P(\max(X; Y)=k, \min(X; Y)=l) = P(X=k, Y=l) + P(Y=k, X=l)$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V=k, V=l) &= \mathbb{P}(X=k) \cdot \mathbb{P}(Y=l) + \mathbb{P}(Y=k, X=l) \\ &= p^2 (1-p)^{k+l} + p^2 (1-p)^{k+l} = \underline{2p^2 (1-p)^{k+l}} \end{aligned}$$

2) la marginale de V:

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(V=k) &= \sum_{l=0}^k \mathbb{P}(V=k, V=l) = \sum_{l=0}^{k-1} \mathbb{P}(V=k, V=l) + \mathbb{P}(V=k, V=k) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} 2p^2 (1-p)^{k+l} + p^2 (1-p)^{2k} \\ &= 2p^2 (1-p)^k \sum_{l=0}^{k-1} (1-p)^l + p^2 (1-p)^{2k} \\ &= 2p^2 (1-p)^k \frac{1 - (1-p)^k}{1 - (1-p)} + p^2 (1-p)^{2k} \\ &= 2p^2 (1-p)^k \frac{1 - (1-p)^k}{p} + p^2 (1-p)^{2k} \\ &= 2p (1-p)^k [1 - (1-p)^k] + p^2 (1-p)^{2k} \\ &= 2p (1-p)^k - 2p (1-p)^{2k} + p^2 (1-p)^{2k} \\ &= (1-p)^k [2p - 2p(1-p)^k + p^2 (1-p)^k] \\ &= p (1-p)^k [2 - 2(1-p)^k + p (1-p)^k] = \underline{p (1-p)^k [2 + (1-p)^k (p-2)]} \end{aligned}$$

$$3) \mathbb{P}(V=n) = p (1-p)^{2n} (2-p)$$

* $W = V+1$ suit la géométrie:

$$\begin{aligned} W: \Omega \rightarrow \mathbb{N}^* \\ \text{soit } n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(W=n) &= \mathbb{P}(V+1=n) = \mathbb{P}(V=n-1) = p (1-p)^{2(n-1)} (2-p) \\ &= [(1-p)^2]^{n-1} \cdot p (2-p) \\ &= [(1-p)^2]^{n-1} \cdot (2p - p^2) \\ &= [(1-p)^2]^{n-1} \cdot [1 - (1-p)^2] \end{aligned}$$

$$\text{donc: } W \sim \mathcal{G}(1 - (1-p^2)) = \mathcal{G}(2p - p^2) = \mathcal{G}(p(2-p))$$

* On déduit l'espérance de V:

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{p(2-p)} \Leftrightarrow \mathbb{E}[V+1] = \frac{1}{p(2-p)} \Leftrightarrow \mathbb{E}[V] + 1 = \frac{1}{p(2-p)}$$

$$\Rightarrow \underline{E[V]} = \frac{1}{p(2-p)} - 1 = \frac{1-2p+p^2}{p(2-p)} = \frac{(p-1)^2}{p(2-p)}$$

$$4) P(U=0, V=0) = p^2$$

$$\left. \begin{array}{l} P(U=0) = p[2+p-2] = p^2 \\ P(V=0) = p(2-p) = 2p-p^2 \end{array} \right\} P(U=0) \cdot P(V=0) = 2p^3 - p^4$$

Si U et V étaient indépendantes, on aurait: $P(U=0, V=0) = P(U=0) \cdot P(V=0)$

$$\Leftrightarrow p^2 = 2p^3 - p^4$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2p^3 + p^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 (1 - 2p + p^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow p^2 (p-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow p=0 \text{ ou } p=1$$

donc U et V ne sont pas indépendantes.

ex 7:

1) 2 événements A et B sont indépendants

si: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2) 2 événements sont disjoints

si: $A \cap B = \emptyset$

* sont-ils indépendants?

Soient A et B, 2 événements disjoints

on a: $P(A \cap B) = 0$

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$

donc: Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors A et B ne sont pas indépendants

3) Si X et Y sont indépendants, alors:

$$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X=x, Y=y) = P(X=x) \cdot P(Y=y)$$

donc, dans ce cas, connaître les lois marginales de X et de Y permet de connaître la loi de (X, Y).

ex 8:

$$h(X) = - \sum_{k \in X(\Omega)} P(X=k) \cdot \frac{\ln(P(X=k))}{\ln(2)} = - \sum_{k \in X(\Omega)} \frac{P(X=k) \cdot \ln(P(X=k))}{\ln 2}$$

1) * loi de X:

$$X: \Omega \rightarrow \{\text{Bleu; Rouge; vert; jaune}\}$$

$$P(X = \text{Rouge}) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \Rightarrow \ln(P(X = \text{Rouge})) = -\ln 2$$

$$P(X = \text{Bleu}) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow \ln(P(X = \text{Bleu})) = -\ln 4 = -2\ln 2$$

$$P(X = \text{vert}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \ln(P(X = \text{vert})) = -\ln 8 = -3\ln 2$$

$$P(X = \text{jaune}) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} \Rightarrow \ln(P(X = \text{jaune})) = -3\ln 2$$

$$\begin{aligned} * h(X) &= - \frac{\frac{1}{2} \cdot -\ln 2 + \frac{1}{4} \cdot -2\ln 2 + \frac{1}{8} \cdot -3\ln 2 + \frac{1}{8} \cdot -3\ln 2}{\ln 2} = - \left(\frac{-1}{2} - \frac{2}{4} - \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) = \frac{7}{4} = \underline{1,75} \end{aligned}$$

3)

* loi de M: $M: \Omega \rightarrow \{1; 2; 3\}$

$$P(M=1) = \frac{1}{4}$$

$$P(M=2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$$P(M=3) = 1 - P(M=1) - P(M=2) = \frac{1}{2}$$

$$* E[M] = \sum_{k=1}^3 k \cdot P(M=k) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = \underline{2,25}$$

[Si on répète l'expérience 1. grand nombre de fois, il faudra en moyenne 2,25 questions à 1 enfant pour trouver la couleur de la balle.]

* loi de N: $N: \Omega \rightarrow \{1; 2; 3\}$

$$P(N=1) = P(N=1, M=1) + P(N=1, M=2) + P(N=1, M=3)$$

Où pos R_3 l'événement "la réponse à la 3^è question a été 'OUI'"

$$= P(N=1, M=1) + P(N=1, M=2) + P(N=1, R_3)$$

$$= P(N=1|M=1) \cdot P(M=1) + P(N=1|M=2) \cdot P(M=2) + P(N=1|R_3) \cdot P(R_3)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 P(N=2) &= P(N=2, M=1) + P(N=2, M=2) + P(N=2, M=3) \\
 &= P(N=2|M=1) \cdot P(M=1) + P(N=2|M=2) \cdot P(M=2) + P(N=2, R_3) \\
 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + P(N=2|R_3) \cdot P(R_3) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$P(N=3) = 1 - P(N=1) - P(N=2) = \frac{1}{2}$$

* N est de même loi que M donc : $E[N] = E[M] = \frac{9}{4} = 2,25$

$$3) E[M] = E[N] > h(X)$$

car $h(X)$ calcule le nombre moyen de questions nécessaires pour deviner la couleur de la balle en partant du principe que l'enfant sait qu'il y a une majorité de balles rouges.

En choisissant, la première question qu'il posera sera "Est-ce une balle rouge" et la deuxième sera "Est-ce une balle bleue" ce qui augmentera ses chances de trouver plus rapidement la couleur de la balle.

[Dans le contexte de l'exercice, l'enfant ne connaît pas la répartition des balles, il sait juste qu'elles sont de 4 couleurs différentes]

ex 13:

$$X \sim \mathcal{B}(n, p) \Leftrightarrow X: \Omega \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{aligned}
 E[X] &= \sum_{k \in X(\Omega)} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=0}^n k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \cdot \frac{n!}{k! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{(k-1)! (n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}
 \end{aligned}$$

[On pose $l = k-1$]

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l! (n-l-1)!} p^{l+1} (1-p)^{n-l-1} \\
 &= \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n \cdot (n-1)!}{l! ((n-1)-l)!} p \cdot p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
 &= np \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{l! ((n-1)-l)!} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
 &= np \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{(n-1)-l} = np \cdot (p + (1-p))^{n-1} = np \cdot 1^{n-1} = np
 \end{aligned}$$

On a utilisé la formule du binôme de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

$$\Rightarrow (a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{(n-1)-k}$$

II) Exercices sur les variables aléatoires continues:

ex 1:

$X \sim \mathcal{N}(0; 1)$

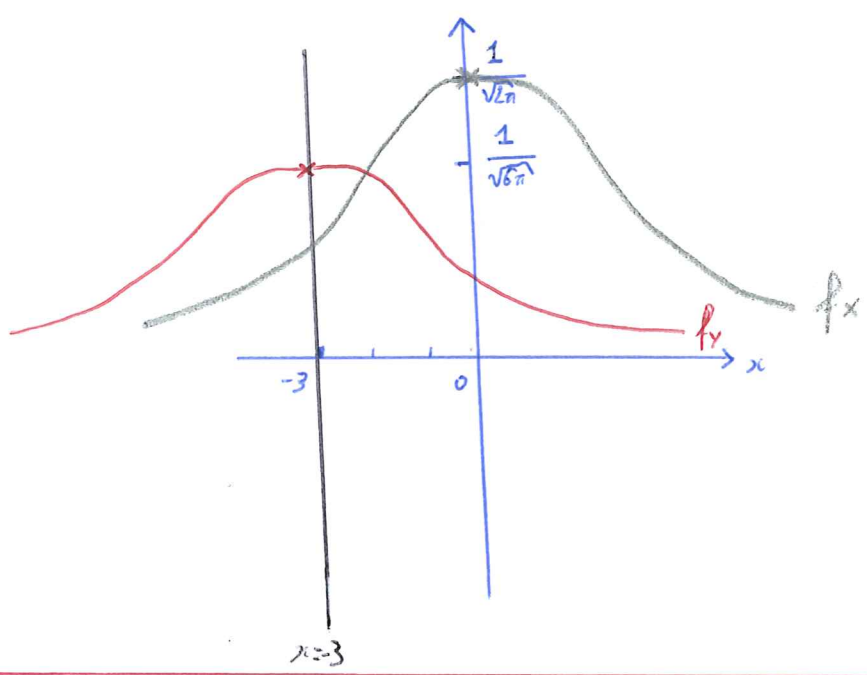
$Y \sim \mathcal{N}(-3; 10)$

1) $aY+b \sim \mathcal{N}(-3a+b; 10a^2)$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$

$aY+b \sim \mathcal{N}(0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+b=0 \\ 10a^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3a \\ a^2=\frac{1}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ et } b=\frac{1}{3\sqrt{10}} \\ \text{ou} \\ a=-\frac{1}{\sqrt{10}} \text{ et } b=-\frac{1}{3\sqrt{10}} \end{cases}$

$S = \left\{ \left(\frac{-1}{\sqrt{10}}; \frac{-1}{3\sqrt{10}} \right); \left(\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{1}{3\sqrt{10}} \right) \right\}$

2)



$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
 $f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \frac{(x+3)^2}{10}}$

ex 3:

1) $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x)$

2) $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$ [Irr]

On intègre par partie: $u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$
 $v = x \Rightarrow v' = 1$

$$\begin{aligned}\underline{E[X]} &= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-\lambda x} dx \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \underbrace{-\frac{x}{e^{\lambda x}}}_0 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^{+\infty} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}}}_0 + \frac{1}{\lambda} = \underline{\frac{1}{\lambda}}\end{aligned}$$

$$3) V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0; +\infty[}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

On intègre par parties: $u' = \lambda e^{-\lambda x} \Rightarrow u = -e^{-\lambda x}$

$v = x^2 \Rightarrow v' = 2x$

$$E[X^2] = \left[-x^2 e^{-\lambda x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{aligned}&= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} -\frac{x^2}{e^{\lambda x}} + \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} 2\lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \cdot E[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

$$\text{donc: } \underline{V[X]} = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \underline{\frac{1}{\lambda^2}}$$

Ex 10:

1) $X \sim \mathcal{U}([a; b])$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(x)$$

$$\begin{aligned}2) \underline{E[X]} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \underline{\frac{b+a}{2}}\end{aligned}$$

$$3) V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = E[X^2] - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 = E[X^2] - \frac{(b+a)^2}{4}$$

$$\begin{aligned}E[X^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \left[\frac{x^3}{3(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc: } \underline{V[X]} &= \frac{4(b^2 + ab + a^2) - 3(b+a)^2}{12} = \frac{4b^2 + 4ab + 4a^2 - 3b^2 - 6ab - 3a^2}{12} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{12} = \underline{\frac{(a-b)^2}{12}}\end{aligned}$$

ex 11:

$$X \sim N(m_0; \sigma_0^2) \text{ et } Y \sim N(m_1; \sigma_1^2)$$

* Si X et Y sont indépendantes alors $X+Y$ ont la même loi normale de paramètres m_0+m_1 et $\sigma_0^2 + \sigma_1^2$

$$* f_Z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-m_0-m_1)^2}{2(\sigma_0^2 + \sigma_1^2)}}$$

ex 12:

Les $(X_n)_n$ sont mutuellement indépendantes.

$$\forall n \in \mathbb{N}, X_n \sim N(0; 1)$$

$$\text{On définit } Y_n: Y_0 = X_0$$

$$Y_n = \theta Y_{n-1} + X_n$$

1) loi de Y_n ?

$$Y_0 = X_0$$

$$Y_1 = \theta Y_0 + X_1 = \theta X_0 + X_1$$

$$Y_2 = \theta Y_1 + X_2 = \theta(\theta X_0 + X_1) + X_2 = \theta^2 X_0 + \theta X_1 + X_2$$

$$Y_3 = \theta Y_2 + X_3 = \theta(\theta^2 X_0 + \theta X_1 + X_2) + X_3 = \theta^3 X_0 + \theta^2 X_1 + \theta X_2 + X_3$$

$$\text{On va montrer par récurrence que: } Y_n = \theta^n X_0 + \theta^{n-1} X_1 + \dots + \theta X_{n-1} + X_n, \forall n \in \mathbb{N} : (P_n)$$

① P_0 est vraie: $Y_0 = \theta^0 X_0$

② on suppose (P_h) vraie?

$$\text{dans ce cas: } Y_{h+1} = \theta Y_h + X_{h+1} = \theta (\theta^h X_0 + \theta^{h-1} X_1 + \dots + \theta X_{h-1} + X_h) + X_{h+1} \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}$$

$$= \theta^{h+1} X_0 + \theta^h X_1 + \dots + \theta^2 X_{h-2} + \theta X_h + X_{h+1}$$

donc (P_{h+1}) est vraie

$$\text{On a donc démontré que: } \forall n \in \mathbb{N}, Y_n = \theta^n X_0 + \theta^{n-1} X_1 + \dots + \theta X_{n-1} + X_n = \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i$$

Y_n est 1 combinaison linéaire de v.a. mutuellement indépendantes qui suivent toutes une loi normale

donc: Y_n suit 1 loi normale.

2) paramètres de la loi de Y_n ?

$$* \underline{E[Y_n]} = E\left[\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i\right] = \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} E[X_i] = \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} \cdot 0 = \underline{0}$$

* $V[X_n] = V\left[\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i\right] = \sum_{i=0}^n V[\theta^{n-i} X_i]$ car $(X_i)_{i=0, \dots, n}$ sont mutuellement indépendantes

$$= \sum_{i=0}^n (\theta^{n-i})^2 V[X_i] = \sum_{i=0}^n \theta^{2n-2i} = \theta^{2n} \cdot \sum_{i=0}^n \theta^{-2i}$$

$$= \theta^{2n} \sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^i = \theta^{2n} \frac{1 - \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\theta^2}} = \theta^{2n} \cdot \frac{1 - \frac{1}{\theta^{2n+2}}}{\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}}$$

$$= \frac{\theta^{2n} - \frac{1}{\theta^2}}{\frac{\theta^2 - 1}{\theta^2}} = \frac{\theta^{2n+2} - 1}{\theta^2 - 1}$$

3) Soit $h \geq 1$,

$$\text{cov}(Y_n, Y_{n+h}) = \text{cov}\left(\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i, \sum_{i=0}^{n+h} \theta^{n+h-i} X_i\right)$$

$$= \text{cov}\left(\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i, \sum_{i=0}^n \theta^{n+h-i} X_i\right) + \underbrace{\text{cov}\left(\sum_{i=0}^n \theta^{n-i} X_i, \sum_{i=n+1}^{n+h} \theta^{n+h-i} X_i\right)}_{= 0}$$

$$= \sum_{i=0}^n \text{cov}(\theta^{n-i} X_i, \theta^{n+h-i} X_i) + 0$$

$$= \sum_{i=0}^n \theta^{n-i} \cdot \theta^{n+h-i} \text{cov}(X_i, X_i)$$

$$= \sum_{i=0}^n \theta^{2n+h-2i} V[X_i]$$

$$= \theta^h \sum_{i=0}^n \theta^{2n-2i} = \theta^h \cdot \frac{\theta^{2n+2} - 1}{\theta^2 - 1}$$

car les $(X_i)_{i=0, \dots, n}$ et les $(X_i)_{i=n+1, \dots, n+h}$ sont mutuellement indépendantes.

ex 14:

1) $\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$

[pour 2 v.a. discrètes = $E[XY] = \sum_{\substack{x \in X(n) \\ y \in Y(n)}} xy \cdot P(X=x, Y=y)$]

2) * symétrie: $\text{cov}(X, Y) = E[XY] - E[X] \cdot E[Y]$
 $= E[YX] - E[Y] \cdot E[X] = \text{cov}(Y, X)$

* linéarité:

① $\text{cov}(X+Y, Z) = E[(X+Y)Z] - E[X+Y] \cdot E[Z]$
 $= E[XZ + YZ] - (E[X] + E[Y]) \cdot E[Z]$
 $= E[XZ] + E[YZ] - E[X] \cdot E[Z] - E[Y] \cdot E[Z]$
 $= E[XZ] - E[X] \cdot E[Z] + E[YZ] - E[Y] \cdot E[Z]$
 $= \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$

② soit $a \in \mathbb{R}$,

$\text{cov}(aX, Y) = E[aXY] - E[aX] \cdot E[Y]$
 $= a \cdot E[XY] - a \cdot E[X] \cdot E[Y]$
 $= a \text{cov}(X, Y)$

3)

a) $\text{cov}(X_1, X_2) = \text{cov}(\alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 U_3, U_1 + 2U_2 + 3U_3)$
 $= \alpha_1 \text{cov}(U_1, U_1) + 2\alpha_1 \text{cov}(U_1, U_2) + 3\alpha_1 \text{cov}(U_1, U_3) + \beta_1 \text{cov}(U_2, U_1) + 2\beta_1 \text{cov}(U_2, U_2) + 3\beta_1 \text{cov}(U_2, U_3)$
 $+ 3\beta_2 \text{cov}(U_1, U_3) + \gamma_1 \text{cov}(U_3, U_2) + \gamma_2 \text{cov}(U_3, U_2) + 3\gamma_1 \text{cov}(U_3, U_3)$
 $= \alpha_1 V[U_1] + 2\beta_1 V[U_2] + 3\gamma_1 V[U_3]$
 $= \alpha_1 + 2\beta_1 + 3\gamma_1$

car U_1, U_2 et U_3 sont mutuellement indépendantes

* $\text{cov}(X_1, X_3) = \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3$

* $\text{cov}(X_2, X_3) = \alpha_2 + 2\beta_3 + 3\gamma_3$

* $V[X_1] = \text{cov}(X_1, X_1) = \text{cov}(\alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 U_3, \alpha_1 U_1 + \beta_1 U_2 + \gamma_1 U_3)$
 $= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$

* $V[X_2] = 1 + 4 + 9 = 14$

* $V[X_3] = \alpha_3 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3$

b) $V[X+Y] = V[X] + V[Y] + 2\text{cov}(X, Y)$
pour 2 v.a. continues ou discrètes

Ex 9:

$$f(x) = \frac{2x}{\lambda^2} \text{ si } x \in]0, \lambda]$$

0 sinon

1) * f est-elle une densité?

$$\textcircled{1} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$\textcircled{2} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ [vraie aussi si elle est continue sur } \mathbb{R} \text{ sauf en 1 nombre fini de points]}$$

$$\textcircled{3} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_0^{\lambda} \frac{2x}{\lambda^2} dx = \frac{2}{\lambda^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\lambda} = \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{\lambda^2}{2} = 1$$

 f est bien 1 densité

$$2) F_X: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

$$\textcircled{1} \text{ si } x \leq 0, F_X(x) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ si } x \in]0, \lambda], F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x \frac{2t}{\lambda^2} dt = \frac{2}{\lambda^2} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x = \frac{2x^2}{2\lambda^2} = \frac{x^2}{\lambda^2}$$

$$\textcircled{3} \text{ si } x > \lambda, F_X(x) = \int_0^{\lambda} \frac{2x}{\lambda^2} dx = 1$$

$$3) Z_n = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$* F_{Z_n}: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \mathbb{P}(Z_n \leq x)$$

$$\begin{aligned} \text{soit } x \in \mathbb{R}, F_{Z_n}(x) &= \mathbb{P}(Z_n \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, \dots, X_n \leq x) \\ &= (\mathbb{P}(X_1 \leq x))^n \text{ car les } (X_i)_{i=1, \dots, n} \text{ ont de même loi} \\ &= (F_X(x))^n \end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \text{ si } x \leq 0, F_{Z_n}(x) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ si } x \in]0, \lambda], F_{Z_n}(x) = \frac{x^{2n}}{\lambda^{2n}}$$

$$\textcircled{3} \text{ si } x > \lambda, F_{Z_n}(x) = 1$$

$$* f_{Z_n}(x) = \frac{d}{dx} F_{Z_n}(x)$$

$$\textcircled{1} \text{ si } x \leq 0, f_{Z_n}(x) = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ si } x \in]0, \lambda], f_{Z_n}(x) = 2n \frac{x^{2n-1}}{\lambda^{2n}}$$

$$\textcircled{3} \text{ si } x > \lambda, f_{Z_n}(x) = 0$$

$$4) \underline{E[Z_n]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Z_n}(x) dx = \int_0^{\lambda} x \frac{2n}{\lambda^{2n}} x^{2n-1} dx = \frac{2n}{\lambda^{2n}} \int_0^{\lambda} x^{2n} dx = \frac{2n}{\lambda^{2n}} \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^{\lambda}$$

$$= \frac{2n}{\lambda^{2n}} \frac{\lambda^{2n+1}}{2n+1} = \lambda \cdot \frac{2n}{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \lambda$$

$$5) M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

$$E[M_n] = \frac{1}{n} E[X_1 + \dots + X_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \cdot n E[X_1] = E[X_1]$$

$$E[X_1] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_0^{\lambda} \frac{2x^2}{\lambda^2} dx = \frac{2}{\lambda^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\lambda} = \frac{2}{3} \lambda = \left(1 - \frac{1}{3} \right) \lambda$$

6) pour n suffisamment grand, $E[Z_i]$ est plus proche de λ que $E[M_n]$