

Problème 2

1) p_1, \dots, p_6 sont les 6 premiers termes d'une suite arithmétique

$$(I) \begin{cases} p_2 = p_1 + r \\ p_3 = p_1 + 2r \\ p_4 = p_1 + 3r \\ p_5 = p_1 + 4r \\ p_6 = p_1 + 5r \end{cases}$$

p_1, p_3 et p_6 sont 3 termes consécutifs d'une géométrique :

$$(II) \begin{cases} p_3 = q \cdot p_1 \\ p_6 = q^2 \cdot p_1 \end{cases}$$

* valeur de q ?

On a donc : $\begin{cases} q \cdot p_1 = p_1 + 2r = p_3 \\ q^2 \cdot p_1 = p_1 + 5r = p_6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (q-1)p_1 = 2r \\ (q^2-1)p_1 = 5r \end{cases}$

donc : $\frac{q^2-1}{q-1} = \frac{5r}{2r} \Leftrightarrow q+1 = \frac{5}{2} \Leftrightarrow q = \frac{3}{2}$

* valeur de r ?

en remplaçant dans (II), on a : $\begin{cases} p_3 = \frac{3}{2} p_1 \\ p_6 = \frac{9}{4} p_1 \end{cases}$

On a donc : $\begin{cases} \frac{3}{2} p_1 = p_1 + 2r \\ \frac{9}{4} p_1 = p_1 + 5r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p_1}{2} = 2r \\ \frac{5p_1}{4} = 5r \end{cases}$

donc : $r = \frac{p_1}{4}$

* valeur de p_1 ? $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$ [la somme des probabilités vaut 1]

$$p_1 + p_1 + r + p_1 + 2r + p_1 + 3r + p_1 + 4r + p_1 + 5r = 1$$

$$\Leftrightarrow p_1 + p_1 + \frac{p_1}{4} + p_1 + \frac{p_1}{2} + p_1 + \frac{3p_1}{2} + p_1 + p_1 + p_1 + \frac{5p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{39p_1}{4} = 1 \Leftrightarrow p_1 = \frac{4}{39}$$

En remplaçant dans (I), on obtient:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{4}{39} \\ p_2 = \frac{5}{39} \\ p_3 = \frac{6}{39} \\ p_4 = \frac{7}{39} \\ p_5 = \frac{8}{39} \\ p_6 = \frac{9}{39}. \end{array} \right.$$

On a bien: $p_k = \frac{3+k}{39}$ pour $k \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$

2)

a) $P(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{21}{39} = \frac{7}{13}$

$P(B) = p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = \frac{30}{39} = \frac{10}{13}$

$P(C) = p_3 + p_4 = \frac{13}{39} = \frac{1}{3}$

b) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{p_4 + p_6}{p_2 + p_4 + p_6} = \frac{\frac{16}{39}}{\frac{21}{39}} = \frac{16}{21}$

c) $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{16}{21} \cdot \frac{21}{39} = \frac{16}{39}$

$P(A) = \frac{7}{13}$

$P(B) = \frac{10}{13}$

donc: $P(A) \cdot P(B) = \frac{70}{169} \neq P(A \cap B)$ donc A et B ne sont pas indépendants.

* $P(A \cap C) = p_4 = \frac{7}{39}$

et: $P(A) = \frac{7}{13}$

et: $P(C) = \frac{1}{3}$

donc: $P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$ donc A et C sont indépendants

(3)

3) Soit X_i , la v.a.d qui correspond au gain du $i^{\text{ème}}$ lancer par $i \in [1; 60]$

$$X_i: \Omega \rightarrow \{-1; 1\}$$

$$\text{avec } \mathbb{P}[X_i=1] = \mathbb{P}[A] = \frac{7}{13}$$

$$\mathbb{P}[X_i=-1] = 1 - \mathbb{P}[A] = \frac{6}{13}$$

Soit X , la v.a.d correspond au gain cumulé des 60 lancers

$$X = \sum_{i=1}^{60} X_i$$

$$\begin{aligned} n: \mathbb{E}[X_i] &= -1 \cdot \mathbb{P}[X_i=-1] + 1 \cdot \mathbb{P}[X_i=1] = -1 \cdot (1 - \mathbb{P}[A]) + 1 \cdot \mathbb{P}[A] \\ &= -1 + 2\mathbb{P}[A] \\ &= \frac{1}{13} \end{aligned}$$

$$\text{donc: } \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{60} X_i\right] = \sum_{i=1}^{60} \mathbb{E}[X_i]$$

$$\begin{aligned} &= 60 \cdot \mathbb{E}[X_1] \text{ car les } (X_i)_{i=1, \dots, 60} \text{ ont la même loi} \\ &= \frac{60}{13} \end{aligned}$$

4)

$$4.1) \underline{\text{gain}} = -6 + 6 - 9 + 11 - 18 + 16 = 6$$

4.2) estimation de $\mathbb{P}[A]$?

$$\text{On sait que: } \mathbb{E}[X_1] = -1 + 2\mathbb{P}[A] \Leftrightarrow \mathbb{P}[A] = \frac{\mathbb{E}[X_1] + 1}{2}$$

Etant donné qu'on répète l'expérience un grand nombre de fois, on peut estimer l'espérance de gain d'un lancer par la moyenne des résultats.

$$\mathbb{E}[X_1] \text{ a pour estimation } \frac{\text{gain}}{60} = \frac{1}{10}$$

$$\text{donc: } \mathbb{P}[A] \text{ a pour estimation } \frac{\frac{1}{10} + 1}{2} = \frac{11}{20} \left(= \frac{33}{60} \right)$$

Exercisesat $x \in X(\mathbb{N})$, $a \leq x \leq b$

$$\Rightarrow a \cdot P(X=x) \leq x \cdot P(X=x) \leq b \cdot P(X=x)$$

$$\Rightarrow \sum_{x \in X(\mathbb{N})} a \cdot P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\mathbb{N})} x \cdot P(X=x) \leq \sum_{x \in X(\mathbb{N})} b \cdot P(X=x)$$

$$\Rightarrow a \cdot \sum_{x \in X(\mathbb{N})} P(X=x) \leq \mathbb{E}[X] \leq b \cdot \sum_{x \in X(\mathbb{N})} P(X=x)$$

$$\Rightarrow a \leq \underline{\mathbb{E}[X]} \leq b$$

P6.3

$$1) \mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\mathbb{N})} x \cdot P(X=x) = \sum_{x \in \{-1; 0; 1\}} x \cdot P(X=x) = a - b$$

$$2) Y = X^2$$

$$(a) Y: \mathbb{N} \rightarrow \{0; 1\}$$

$$\underline{P(Y=0)} = P(X^2=0) = P(X=0) = 1 - (a+b)$$

$$\underline{P(Y=1)} = 1 - P(Y=0) = a+b$$

$$(b) \underline{\mathbb{E}[Y]} = \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} y \cdot P(Y=y) = \sum_{y=0}^1 y \cdot P(X^2=y) = P(X^2=1) = P(X=1) + P(X=-1) = a+b$$

$$(c) \underline{\mathbb{V}[X]} = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[X^2] - (a+b)^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y] = a+b$$

$$\text{dann: } \underline{\mathbb{V}[X]} = a+b - (a+b)^2$$

$$(d) \underline{\mathbb{V}[Y]} = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - (a+b)^2$$

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{y \in Y(\mathbb{N})} y^2 \cdot P(Y=y) = \sum_{y=0}^1 y^2 \cdot P(Y=y) = P(Y=1) = a+b$$

$$\underline{\mathbb{V}[Y]} = a+b - (a+b)^2$$

(5)

$$e) P = \frac{X+Y}{2} = \frac{X+X^2}{2}$$

$P: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$

$$\begin{aligned} P(P=1) &= P\left(\frac{X+X^2}{2}=1\right) = P(X^2+X-2=0) = P((X-1)(X+2)=0) \\ &= P(\{X=1\} \cup \{X=-2\}) = P(X=1) + P(X=-2) \\ &= P(X=1) = a \end{aligned}$$

$$P(P=0) = 1 - P(P=1) = 1-a$$

$$(F) M = \frac{Y-X}{2} = \frac{X^2-X}{2} = \frac{X(1-X)}{2}$$

$M: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$

$$P(M=0) = P(X(1-X)=0) = P(\{X=0\} \cup \{X=1\}) = P(X=0) + P(X=1) = 1-b$$

$$P(M=1) = 1 - P(M=0) = b$$

3)

$$(a) P(X=1|Y=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, X^2=1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1, X=-1)}{P(Y=1)} = \frac{P(X=1)}{P(Y=1)} = \frac{a}{a+b}$$

$$(b) P(X=1|X=1) = \frac{P(X=1, Y=1)}{P(X=1)} = \frac{P(X=1)}{P(X=1)} = 1$$

$$(c) P(P=M) = P\left(\frac{Y+X}{2} = \frac{Y-X}{2}\right) = P(X+Y=Y-X) = P(2X=0) = P(X=0) = 1-(a+b)$$

$$\begin{aligned} (d) P(PM=0) &= P\left(\frac{Y^2-X^2}{4}=0\right) = P(X^4-X^2=0) = P(X^2(X-1)(X+1)=0) \\ &= P(X=0 \cup X=-1 \cup X=1) \\ &= P(X=0) + P(X=-1) + P(X=1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

(6)

4)

$$(a) P(X=1|Y=1) = P(X=0|P=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|Y+X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|X^2+X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = P(X=0|X(X+1)=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{P(X=0)}{P(X=0) + P(X=-1)}$$

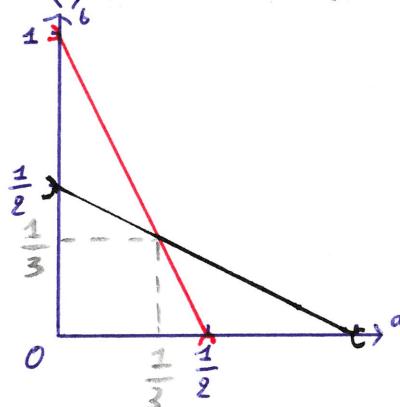
$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{1-(a+b)}{1-a}$$

$$\Leftrightarrow a(1-a) = (1-a-b)(a+b)$$

$$\Leftrightarrow a - a^2 = a + b - a^2 - ab - ab - b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 = b - 2ab - b^2$$

$$\Leftrightarrow b(1-2a-b) = 0 \Leftrightarrow b=0 \text{ OU } b=1-2a \Leftrightarrow \underline{b=1-2a}$$



$$(b) P(X=-1|Y=1) = P(X=0|M=0)$$

$$\Leftrightarrow P(X=-1|Y=1) = P(X=0|X^2-X=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{P(X=-1)}{P(Y=1)} = P(X=0|X(X-1)=0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{P(X=0)}{P(X=0) + P(X=1)} = \frac{1-a-b}{1-b}$$

$$\Leftrightarrow 1-a-b(a+b) = b(1-b)$$

$$\Leftrightarrow a+b-a^2-ab-ab^2 = b-b^2$$

$$\Leftrightarrow a-2ab-a^2=0 \Leftrightarrow a(1-2b-a)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ OU } a=1-2b \Leftrightarrow \underline{a=1-2b}$$

$$(c) (4a) \text{ et } (4b) \text{ sont simultanément vérifiés si: } a=b=\frac{1}{3}$$