

Ecole Normale Supérieure de Cachan

61 avenue du président Wilson
94230 CACHAN

Concours d'admission en 1^{ère} année

Banque d'épreuves :

- **Concours ENS Cachan - Economie Gestion option I**
- **Concours ENSAI – option économie et gestion**

Session 2013

Composition de Mathématiques et Statistiques

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdit

Le sujet comporte 4 pages, 2 exercices et 2 problèmes indépendants.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice 1

On appelle loi $\Gamma(a, p)$, $a, p \in \mathbb{R}_+$, la loi de probabilité de densité par rapport à la mesure de Lebesgue

$$f_{a,p}(x) = K(a, p)e^{-px}x^{a-1}\mathbb{1}_{(x>0)},$$

où $\mathbb{1}_{(x>0)} = 1$ si $x > 0$ et 0 sinon. Par ailleurs, on pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u}u^{a-1}du$.

1. Calculer $K(a, p)$ (en utilisant $\Gamma(a)$).
2. Montrer que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Calculer $\Gamma(1)$, $\Gamma(2)$, $\Gamma(n)$ (pour tout $n > 1$).
3. Trouver les moments (non centrés) d'une variable qui suit une loi $\Gamma(a, p)$. Quelle est sa variance ?
4. Montrer que le carré d'une variable de loi normale centrée, réduite $N(0, 1)$ suit une loi $\Gamma(a, p)$. Que vaut le réel $\Gamma(1/2)$?
5. Soient X et Y , deux variables indépendantes de loi $\Gamma(a, p)$ et loi $\Gamma(b, p)$ respectivement. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 2

Soit $T_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ le sous ensemble des matrices triangulaires supérieures,

$$T \in T_n(\mathbb{R}) \iff T_{i,j} = 0 \forall 1 \leq j < i \leq n.$$

1. Montrer que $T_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?
2. Montrer que $T, S \in T_n(\mathbb{R}) \Rightarrow TS \in T_n(\mathbb{R})$.
3. Soit $T \in T_n(\mathbb{R})$. Montrer que T est inversible (dans $M_n(\mathbb{R})$) si et seulement si $\forall 1 \leq i \leq n, T_{i,i} \neq 0$.

On se donne désormais une matrice triangulaire supérieure $T \in T_n(\mathbb{R})$ **inversible fixée**, et on veut montrer que T^{-1} est également triangulaire supérieure.

4. Montrer que $\begin{cases} \phi : T_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow T_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto TM \end{cases}$ est bien définie et linéaire.
5. Montrer que $\ker \phi = \{\vec{0}_{T_n(\mathbb{R})}\}$. Quelle est la dimension de $\text{Im } \phi$?
6. En déduire qu'il existe $M \in T_n(\mathbb{R})$, $TM = I$ (où I est la matrice identité de taille n) et en conclure que T^{-1} est triangulaire supérieure.

PROBLEME 1

Première partie :

Soit n un entier positif fixé et $p, q \in \mathbb{R}$ fixé. On considère la fonction $B = B_{(n,p,q)}$ de \mathbb{N} dans \mathbb{R} définie par $B(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ pour tout $0 \leq k \leq n$, $B(k) = 0$ si $k > n$, avec $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

1. Pour quelles valeurs des paramètres p et q cette loi est elle une loi de probabilité ?
On considérera désormais que ces conditions sont vérifiées (et donc que B est une loi de probabilité).
2. Décrire (rapidement) une expérience correspondant à cette loi.
3. Comment s'appelle cette loi ?
4. Soit X une variable aléatoire de loi B . Calculer son espérance.

Seconde partie :

Soit $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $B = B_{(n,p,q)}$, où p et q vérifient les conditions nécessaires à l'obtention d'une loi de probabilité. Pour tout $k \geq 1$, on pose $M_k = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$. On suppose que n, p et q sont inconnus (mais fixés) et on se propose de les estimer.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \leq n-1)$.
2. En déduire la probabilité $\mathbb{P}(M_k = n)$.
3. Proposer un estimateur "raisonnable" de n (justifier).
4. En s'aidant de la première partie, proposer un estimateur "raisonnable" de p (justifier).

Troisième partie :

Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires de lois respectives $B_{(n, \frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n})}$.

1. Calculer la limite de $(1 - \frac{1}{n})^n$.
2. Ecrire $\frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{n^k}$ comme un produit de $k-1$ termes < 1 .
3. En déduire la convergence, pour k fixé, $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1}}{k!}$.

PROBLEME 2

Première partie :

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de T et en déduire que T est inversible.
2. Calculer les valeurs propres de T et déterminer une base de \mathbb{R}^3 constituées de vecteurs propres de T .

Seconde partie :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la matrice T_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les seuls termes non nuls sont :

$$\begin{cases} a_{ii} = 2 & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n\} \\ a_{i,i+1} = -1 & \text{pour tout } i \in \{1, \dots, n-1\} \\ a_{i,i-1} = -1 & \text{pour tout } i \in \{2, \dots, n\} \end{cases}$$

1. Écrire T_1, T_2, T_3, T_n .
2. On désigne par $P_n(\lambda)$ le polynôme caractéristique de T_n . Montrer que pour tout $n \geq 3$, $P_n(\lambda)$ vérifie la relation $P_n(\lambda) = (2 - \lambda)P_{n-1}(\lambda) - P_{n-2}(\lambda)$.
3. Montrer que si n est impair, 2 est valeur propre de T_n . Déterminer dans ce cas une base du sous-espace propre associé à la valeur propre 2.
4. Calculer le déterminant de T_n .