Exercices Matrices

ex 1 :

pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $A(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1°) montrer que $A(\theta)$ est inversible

2) calculer $(A(\theta))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$

3) Calculer $(A(\theta))^{-1}$

ex 2 :

Soient A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, $tr(AX) = tr(BX)$

Montrer que $A = B$

ex 3 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$

On suppose $tr(A\,{}^tA) = 0$.

Montrer que $A = 0_{M_n(\mathbb{R})}$

ex 4 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer $A^3 - A$

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}

ex 5 : (oral 2019)

Soit X 1 v.a. de loi uniforme sur $\{-1; 0; 1\}$

Y 1 v.a. de même loi que X

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}$

Déterminer la loi de $Z = \dim(\operatorname{Ker} A)$

exo 6 : (oral 2019)

Soit E l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables

E_n l'espace des fonctions $e_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$ avec $i \in [\![0;n]\!]$

Soient : $I_n : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$

$f \longmapsto g$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x+1) - f(x)$

et $\Delta_n : E \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$f \longmapsto f'$

1) Montrer que $(e_i)_{i=0,\dots,n}$ est 1 base de E_n

2) Montrer que E_n est stable par I_n et Δ_n

3) Montrer que I_n et Δ_n sont des applications linéaires

4) Déterminer A la matrice représentative de I_3 dans la base $(e_i)_{i=0,\dots,3}$

" F " Δ_3 "

5) Déterminer $\mathrm{Ker}(I_3)$, $\mathrm{Im}(I_3)$, $\mathrm{Ker}(\Delta_3)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_3)$

6) Déterminer A_n la matrice représentative de I_n dans la base $(e_i)_{i=0,\dots,n}$

" F_n " Δ_n "

7) Déterminer $\mathrm{Ker}(I_n)$, $\mathrm{Im}(I_n)$, $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_n)$