INTRODUCTION À LA THEORIE DES PROBABILITÉS

Il existe 2 sciences du hasard qui font partie intégrante des mathématiques :

* la statistique : l'étude d'1 phénomène par la collecte de données, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur diffusion afin de rendre ces données accessibles à tous.
* la théorie des probabilités qui étudie des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude.

LES ESPACES PROBABILISÉS

I) étude d'1 expérience aléatoire :

- c'est 1 expérience renouvelable plusieurs fois dans des circonstances identiques.
- cette expérience donne des résultats différents à chaque fois qu'on la répète et, ceci, de manière imprévisible.

ex : lancer d'1 pièce
lancer d'1 dé
temps passé à attendre le bus
nombre de jours d'utilisation d'une cartouche par une imprimante

II) Les espaces probabilisés :

C'est 1 triplet $(\Omega, A, \mathbb{P})$ qui va permettre la modélisation quantitative de l'expérience aléatoire étudiée.

1) Ω :

C'est l'univers des possibles (l'ensemble des résultats possibles de l'expérience)

ex : lancer 1 pièce : $\Omega = \{p ; f\}$
lancer 1 dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ $\mapsto$ dénombrable
temps passé à attendre le bus : $\Omega = [0;a]$ $\mapsto$ non dénombrable
nombre de jours d'utilisation d'une cartouche par une imprimante : $\Omega = \{1;2\}$ $\mapsto$ dénombrable

2) A est 1 tribu d'évènements :

2-1) 1 évènement :

déf : * c'est 1 sous-ensemble de Ω

* c'est donc 1 ensemble dont les éléments sont des résultats possibles de Ω.

ex : lancer d'1 pièce : $A = \{p\}$ évènement "faire pile"

lancer d'1 dé : $A = \{2;4;6\}$ évènement "obtenir 1 résultat pair"

$\emptyset$: évènement impossible

$A \cup B$: l'évènement A ou l'évènement B se produit

$A \cap B$: les évènements A et B se produisent

$\bar{A}$: (complémentaire de A) l'évènement A ne se produit pas

rappel : les règles vues en mathématiques concernant les ensembles s'appliquent aux évènements.

En particulier : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

définition d'1 système complet d'évènements : $(A_i)_{i \geq 1}$ ensemble d'évènements tels que : $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \Omega$

et si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$

c'est 1 partition de Ω.

ex : lancer d'1 pièce : $A_1 = \{p\}$ et $A_2 = \{f\}$ sont 1 système complet d'évènement sur $\{p;f\}$

lancer d'1 dé : $A_i = \{i\}$ pour $i = 1, .., 6$ forment aussi 1 système complet d'évènement sur $\{1, .., 6\}$

2-2) $\mathcal{A}$ est 1 tribu sur Ω :

c'est 1 famille de parties de Ω vérifiant 3 propriétés :

déf : $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est 1 tribu si :

① $\Omega \in \mathcal{A}$

② pour tout suite $(A_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a : $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

③ si $A \in \mathcal{A}$ alors : $\bar{A} \in \mathcal{A}$

ex : * $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \Omega\}$ est toujours 1 tribu sur Ω

* lancer d'1 pièce : $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \{p ; f\} ; \{p\} ; \{f\}\}$

* lancer d'1 dé : $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} ; \{1; 2; 3; 4\} ; \{5; 6\}\}$

---

exercice : Soit $\mathcal{A}$ 1 tribu sur Ω et E, 1 partie de Ω

montrer que : $\mathcal{F} = \{A \cap E \text{ tel que : } A \in \mathcal{A}\}$ est 1 tribu sur E

résolution :

① on veut montrer que : $E \in \mathcal{F}$?

$\mathcal{A}$ étant 1 tribu, $\Omega \in \mathcal{A}$

or : $E = E \cap \Omega$ donc : $E \in \mathcal{F}$

② Soit $(B_n)_{n\geq 1}$, 1 suite d'éléments de $\mathcal{F}$, on veut montrer que : $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{F}$?

soit $n \geq 1$, $B_n \in \mathcal{F}$ donc : $B_n = A_n \cap E$ avec : $A_n \in \mathcal{A}$

d'où : $\bigcup_{n\geq 1} B_n = \bigcup_{n\geq 1} (A_n \cap E)$

$= \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \cap E$ [propriété des ensembles]

or : $(A_n)_{n\geq 1}$ est 1 suite d'éléments de $\mathcal{A}$ donc : $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

si on pose : $C = \bigcup_{n\geq 1} A_n$

$\bigcup_{n\geq 1} B_n = C \cap E$ avec $C \in \mathcal{A}$ donc : $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{F}$

③ Soit $F \in \mathcal{F}$, a-t-on : $\bar{F} \in \mathcal{F}$? [complémentaire dans E]

$F \in \mathcal{F}$ donc : $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que : $F = A \cap E$

$\bar{F} = \overline{A \cap E} = \bar{A} \cup \bar{E} = \{x \in E / x \notin A\} \cup \underbrace{\{x \in E / x \notin E\}}_{}$

$= \{x \in E / x \notin A\} \cup \emptyset$

$= E \cap \bar{A}$

or : $\bar{A} \in \mathcal{A}$

donc : $\bar{F} \in \mathcal{F}$

---

3) $\mathbb{P}$: probabilité sur $(\Omega ; \mathcal{A})$:

On veut calculer la probabilité d'1 évènement de $\mathcal{A}$

déf : 3 propriétés doivent être vérifiées :

① $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0;1]$

② $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

③ Si $(A_n)_{n \geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, 2 à 2 disjoints

alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

ex : * lancer d'1 pièce : $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0;1]$

$A \mapsto \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{card(A)}{2}$ est 1 probabilité sur $(\Omega ; \mathcal{A})$

avec : $\Omega = \{p ; f\}$ et $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \{p ; f\} ; \{p\} ; \{f\}\}$

on a : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$\mathbb{P}(\{p ; f\}) = \frac{card(\{p ; f\})}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$\mathbb{P}(\{p\}) = \frac{card(\{p\})}{2} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{P}(\{f\}) = \frac{card(\{f\})}{2} = \frac{1}{2}$

propriétés:

1. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$

démo: $\Omega = A \cup \bar{A}$

donc: $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A})$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$ [prop ③ de la définition]

or: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ [prop ② de la définition)

donc: $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$

2. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

démo: $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

donc: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$ (1)

or: $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ [union disjointe]

donc: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$ d'où: $\mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$

on remplace dans (1):

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3. soient A et B dans $\mathcal{A}$, si $A \subset B$ alors: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$:

démo: soient A et B dans $\mathcal{A}$ tels que: $A \subset B$

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

donc: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$

d'où: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A}))$ [union disjointe]

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$

or: $\mathbb{P}(B \cap \bar{A})$

donc: $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

4 formule des probabilités totales :

où $(A_i)_{i\geq 1}$ est 1 système complet d'événements de $\mathcal{A}$

alors : $\forall B \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(B) = \sum\limits_{i\geq 1} \mathbb{P}(B\cap A_i)$

démo : Soit $B \in \mathcal{A}$

$$B = B\cap\Omega = B\cap\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right)$$

$$= \bigcup_{i\geq 1}(B\cap A_i)$$

on pose $(B_i)_{i\geq 1} = (B\cap A_i)_{i\geq 1}$

on a : $\begin{cases} \forall i \geq 1,\ B_i \in \mathcal{A} \text{ car : } B\in\mathcal{A} \text{ et } A_i\in\mathcal{A} \\ \text{et : pour } i\neq j,\ B_i\cap B_j = (B\cap A_i)\cap(B\cap A_j) = \emptyset \text{ car : } A_i\cap A_j = \emptyset \end{cases}$

donc : $(B_i)_{i\geq 1}$ est 1 suite d'élément de $\mathcal{A}$, 2 à 2 disjoints

d'où : $\mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{i\geq 1} B_i\right) = \sum\limits_{i\geq 1}\mathbb{P}(B_i) = \sum\limits_{i\geq 1}\mathbb{P}(B\cap A_i)$ [prop 3 de la probabilité]

4) Le concept de probabilité conditionnelle :

C'est la probabilité qu'un événement se produise sachant qu'un autre a déjà eu lieu.

déf : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé
et 2 événements E_1 et E_2 avec $\mathbb{P}(E_2) \neq 0$
on appelle probabilité que E_1 se réalise sachant que E_2 s'est réalisé $\mathbb{P}(E_1 | E_2) = \dfrac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)}$

on dit aussi probabilité de E_1 sachant E_2

on note aussi $\mathbb{P}_{E_2}(E_1)$

ex : Je prend les 4 as d'1 jeu de carte (pique, cœur, carreau, trèfle) auxquel j'ajoute la dame de cœur et je retourne ces cartes sur la table (faces invisibles). Je demande à un participant à la préparation d'en retourner une.

Soient les événements : E_1 : "la carte est la dame de cœur"
E_2 : "la carte est de couleur rouge" (c'est donc l'as de cœur, la dame de cœur ou l'as de carreau)

on a : $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{1}{5}$

$\mathbb{P}(E_2) = \dfrac{3}{5}$

$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) = \dfrac{1}{5}$

$\mathbb{P}(E_1 | E_2) = \dfrac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{3}$ (1 chance sur 3 que la carte soit la dame de cœur sachant qu'elle est rouge)

Th : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé et $F \in \mathcal{A}$ 1 événement de probabilité non nulle, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot \,|\, F) : \mathcal{A} &\to [0;1] \\ E &\mapsto \mathbb{P}(E | F) \end{aligned}$$

est 1 mesure de probabilité

démo :

① Soit $E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(E|F) = \dfrac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)}$

on : $\mathbb{P}(E\cap F) \geq 0$ et $\mathbb{P}(F) > 0$ donc : $\mathbb{P}(E|F) \geq 0$

et : $\mathbb{P}(E\cap F) \leq \mathbb{P}(F) \Rightarrow \dfrac{\mathbb{P}(E\cap F)}{\mathbb{P}(F)} \leq 1$ donc : $\mathbb{P}(E|F) \leq 1$

d'où : $\mathbb{P}(E|F) \in [0;1]$

② $\mathbb{P}(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = 1$

③ Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n \,|\, F\right) = \frac{\mathbb{P}\left(F\cap \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)\right)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}(A_n\cap F)\right)}{\mathbb{P}(F)}$$

Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ tq : $B_n = A_n \cap F$

les $(B_n)_{n\geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints

donc : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} B_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(B_n)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}(A_n\cap F)\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n\cap F)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1}(A_n\cap F)\right)}{\mathbb{P}(F)} = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{P}(A_n\cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n|F)$$

d'où : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n \,|\, F\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n|F)$

$\mathbb{P}(\cdot\,|F)$ est bien 1 mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

* formule des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé et $(F_i)_{i\geq 1}$ 1 système complet d'événements

alors : pour tout événement E de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$$

démo : soit $E \in \mathcal{A}$

$(F_i)_{i \geqslant 1}$ étant 1 système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(E \cap F_i)$$

Soit $i \geqslant 1$, étant donné que $F_i \neq \emptyset$, on a : $\mathbb{P}(F_i) \neq 0$

donc : $\mathbb{P}(E \cap F_i) = \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$

on en déduit que : $\sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(E \cap F_i) = \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$

d'où : $\mathbb{P}(E) = \sum_{i \geqslant 1} \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$

* Th de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé et E et F, 2 événements réalisables de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$$

démo : $\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$

or : $\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$ donc : $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)$

d'où : $\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$

* 2nd th de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé, $F \in \mathcal{A}$ 1 événement réalisable et $(E_i)_{i \geqslant 1} \subset \mathcal{A}$ 1 système complet d'événements

$$\forall i \geqslant 1, \quad \mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\sum_{j \geqslant 1} \mathbb{P}(F|E_j) \times \mathbb{P}(E_j)}$$

démo : Soit $i \geqslant 1$,

$\mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\mathbb{P}(F)}$ d'après le Th de Bayes

$\mathbb{P}(F) = \sum_{j \geqslant 1} \mathbb{P}(F|E_j) \times \mathbb{P}(E_j)$ d'après la formule des probabilités totales

donc : $\mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\sum_{j \geqslant 1} \mathbb{P}(F|E_j) \times \mathbb{P}(E_j)}$

5) l'indépendance :

On dit que 2 événements sont indépendants si la réalisation (ou la non-réalisation) de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

déf: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé, soient E et F 2 événements de $\mathcal{A}$.

E et F sont indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$

Th: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé, soient E et F 2 événements réalisables de $\mathcal{A}$

(i) E et F sont indépendants

(ii) $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)$

(iii) $\mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$

sont 3 propositions équivalentes

démo:

*(i) ⇒ (ii) ?

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)}$$ car E et F sont indépendants d'après (i)

$$= \mathbb{P}(E)$$

donc (ii) est bien vérifiée

*(ii) ⇒ (iii) ?

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E|F) \times \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)}$$ d'ap le th de Bayes

or : $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)$ d'après (ii)

donc : $$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} = \mathbb{P}(F)$$

donc : (iii) est bien vérifiée

*(iii) ⇒ (i) ?

$$\mathbb{P}(F|E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)} \Rightarrow \mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)$$

or d'après (iii), $\mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$

donc : $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(E)$

donc : E et F sont indépendants

* **déf**: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(E_i)_{i=1,..,n}$, n éléments de $\mathcal{A}$

les événements $(E_i)_{i=1,..,n}$ sont indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)$, $\forall I \subset [\![1;n]\!]$

* **ppt**: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 1 espace probabilisé et $(E_i)_{i=1,..,n}$ n événements de $\mathcal{A}$ indépendants alors il sont indépendants 2 à 2

[n'importe quelle paire de ces événements est indépendante]

démo: Soient $k \in [\![1;n]\!]$ et $l \in [\![1;n]\!]$ avec $k \neq l$

on a : $\{k;l\} \subset [\![1;n]\!]$

donc : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\{k;l\}} E_i\right) = \prod_{i\in\{k;l\}} \mathbb{P}(E_i)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E_k \cap E_l) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}(E_l)$

donc E_k et E_l sont indépendants

[rappel : $[\![1;n]\!] = \{1;2;...;n\}$]

* **contre-exemple** : On lance 2 fois 1 pièce et on considère le résultat du lancer (pile ou face)

les événements : P_1 = "j'obtient pile au 1er lancer"

P_2 = "j'obtient pile au 2e lancer"

et : I = "le résultat des 2 lancers est identique"

sont indépendants 2 à 2 mais pas indépendants.

Si on pose $\Omega = \{(P;P); (P;F); (F;P); (F;F)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme

on a : $P_1 = \{(P;P); (P;F)\}$

$P_2 = \{(P;P); (F;P)\}$

$I = \{(P;P); (F;F)\}$

$P_1 \cap P_2 = \{(P;P)\}$

$P_1 \cap I = \{(P;P)\}$

$P_2 \cap I = \{(P;P)\}$

$P_1 \cap P_2 \cap I = \{(P;P)\}$

$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$ mais $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap I) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(I)$

$\mathbb{P}(P_1 \cap I) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(I)$

$\mathbb{P}(P_2 \cap I) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(I)$