INTRODUCTION À LA THEORIE DES PROBABILITÉS

Il existe 2 sciences du hasard qui font partie intégrante des mathématiques :

* la statistique : l'étude d'1 phénomène par la collecte de données, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur diffusion afin de rendre ces données accessibles à tous.

* la théorie des probabilités qui étudie des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude.

LES ESPACES PROBABILISÉS

I) étude d'1 expérience aléatoire :

- c'est 1 expérience renouvelable plusieurs fois dans des circonstances identiques.
- cette expérience donne des résultats différents à chaque fois qu'on la répète et, ceci, de manière imprévisible.

ex : lancer d'1 pièce

lancer d'1 dé

temps passé à attendre le bus

nombre de jours d'utilisation d'une cartouche par une imprimante

II) Les espaces probabilisés :

C'est 1 triplet $(\Omega, A, \mathbb{P})$ qui va permettre la modélisation quantitative de l'expérience aléatoire étudiée.

1) Ω :

C'est l'univers des possibles (l'ensemble des résultats possibles de l'expérience)

ex : lancer 1 pièce : $\Omega = \{p ; f\}$

lancer 1 dé : $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$ ↦ dénombrable

temps passé à attendre le bus : $\Omega = [0;a]$ ↦ non dénombrable

nombre de jours d'utilisation d'une cartouche par une imprimante : $\Omega = \{1;2\}$ ↦ dénombrable

2) A est 1 tribu d'événements :

2-1) 1 événement :

déf : * c'est 1 sous-ensemble de Ω

* c'est donc 1 ensemble dont les éléments sont des résultats possibles de Ω.

ex : lancer d'1 pièce : $A = \{p\}$ événement "faire pile"

lancer d'1 dé : $A = \{2; 4; 6\}$ événement "obtenir 1 résultat pair"

$\emptyset$: événement impossible

$A \cup B$: l'événement A ou l'événement B se produit

$A \cap B$: les événements A et B se produisent

$\bar{A}$: (complémentaire de A) l'événement A ne se produit pas

rappel : les règles vues en mathématiques concernant les ensembles s'appliquent aux événements.

En particulier : $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

définition d'1 système complet d'événements : $(A_i)_{i \geq 1}$ ensemble d'événements tels que : $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \Omega$

et si $i \neq j$ alors $A_i \cap A_j = \emptyset$

c'est 1 partition de Ω.

ex : lancer d'1 pièce : $A_1 = \{p\}$ et $A_2 = \{f\}$ sont 1 système complet d'événement sur $\{p; f\}$

lancer d'1 dé : $A_i = \{i\}$ pour $i = 1, \ldots, 6$ forment aussi 1 système complet d'événement sur $\{1, \ldots, 6\}$

2-2) $\mathcal{A}$ est 1 tribu sur Ω :

c'est 1 famille de parties de Ω vérifiant 3 propriétés:

déf: $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$ est 1 tribu si :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$
2. pour tout suite $(A_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, on a: $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$
3. si $A \in \mathcal{A}$ alors: $\bar{A} \in \mathcal{A}$

ex:
* $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \Omega\}$ est toujours 1 tribu sur Ω
* lancer d'1 pièce: $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \{p ; f\} ; \{p\} ; \{f\}\}$
* lancer d'1 dé: $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \{1;2;3;4;5;6\} ; \{1;2;3;4\} ; \{5;6\}\}$

---

exercice: Soit $\mathcal{A}$ 1 tribu sur Ω et E, 1 partie de Ω

montrer que: $\mathcal{F} = \{A \cap E$ tel que: $A \in \mathcal{A}\}$ est 1 tribu sur E

résolution:

1. on veut montrer que: $E \in \mathcal{F}$?

$\mathcal{A}$ étant 1 tribu, $\Omega \in \mathcal{A}$

or: $E = E \cap \Omega$ donc: $E \in \mathcal{F}$

2. Soit $(B_n)_{n \geq 1}$, 1 suite d'éléments de $\mathcal{F}$, on veut montrer que: $\bigcup\limits_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{F}$?

soit $n \geq 1$, $B_n \in \mathcal{F}$ donc: $B_n = A_n \cap E$ avec: $A_n \in \mathcal{A}$

d'où: $\bigcup\limits_{n \geq 1} B_n = \bigcup\limits_{n \geq 1} (A_n \cap E)$

$= \left(\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \right) \cap E$ [propriété des ensembles]

or: $(A_n)_{n \geq 1}$ est 1 suite d'éléments de $\mathcal{A}$ donc: $\bigcup\limits_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

si on pose: $C = \bigcup\limits_{n \geq 1} A_n$

$\bigcup\limits_{n \geq 1} B_n = C \cap E$ avec $C \in \mathcal{A}$ donc: $\bigcup\limits_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{F}$

③ Soit $F \in \mathcal{F}$, a-t-on : $\bar{F} \in \mathcal{F}$? [complémentaire dans E]

$F \in \mathcal{F}$ donc : $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que : $F = A \cap E$

$$\bar{F} = \overline{A \cap E} = \bar{A} \cup \bar{E} = \{x \in E / x \notin A\} \cup \underbrace{\{x \in E / x \notin E\}}_{\emptyset}$$

$$= \{x \in E / x \notin A\} \cup \emptyset$$

$$= E \cap \bar{A}$$

or : $\bar{A} \in \mathcal{A}$

donc : $\bar{F} \in \mathcal{F}$

---

3) $\mathbb{P}$: probabilité sur $(\Omega ; \mathcal{A})$:

On veut calculer la probabilité d'1 évènement de $\mathcal{A}$

déf : 3 propriétés doivent être vérifiées :

① $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$

② $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

③ Si $(A_n)_{n \geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{A}$, 2 à 2 disjoints

alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

ex : * lancer d'1 pièce : $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to [0;1]$

$$A \mapsto \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{card}(A)}{2}$$ est 1 probabilité sur $(\Omega ; \mathcal{A})$

avec : $\Omega = \{p ; f\}$ et $\mathcal{A} = \{\emptyset ; \{p ; f\} ; \{p\} ; \{f\}\}$

on a : $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$$\mathbb{P}(\{p;f\}) = \frac{\text{card}(\{p;f\})}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mathbb{P}(\{p\}) = \frac{\text{card}(\{p\})}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\{f\}) = \frac{\text{card}(\{f\})}{2} = \frac{1}{2}$$

propriétés:

1. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$

démo: $\Omega = A \cup \bar{A}$

donc: $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup \bar{A})$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$ [prop ③ de la définition]

or: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ [prop ② de la définition)

donc: $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A})$

2. $\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

démo: $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

donc: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$ (1)

or: $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ [union disjointe]

donc: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$ d'où: $\mathbb{P}(B \cap \bar{A}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$

on remplace dans (1):

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

3. soient A et B dans $\mathcal{A}$, si $A \subset B$ alors: $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$:

démo: soient A et B dans $\mathcal{A}$ tels que: $A \subset B$

$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$

donc: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$

d'où: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \cap \bar{A}))$ [union disjointe]

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$

or: $\mathbb{P}(B \cap \bar{A})$

donc: $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$

4 formule des probabilités totales :

si $(A_i)_{i\geq 1}$ est 1 système complet d'évènements de $\mathcal{A}$

alors : $\forall B \in \mathcal{A}, \ \mathbb{P}(B) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(B \cap A_i)$

démo : Soit $B \in \mathcal{A}$

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i\geq 1} A_i \right)$$

$$= \bigcup_{i\geq 1} \left(B \cap A_i \right)$$

on pose $(B_i)_{i\geq 1} = (B \cap A_i)_{i\geq 1}$

on a : $\begin{cases} \forall i \geq 1, \ B_i \in \mathcal{A} \text{ car : } B \in \mathcal{A} \text{ et } A_i \in \mathcal{A} \\ \text{et : pour } i \neq j, \ B_i \cap B_j = (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset \text{ car : } A_i \cap A_j = \emptyset \end{cases}$

donc : $(B_i)_{i\geq 1}$ est 1 suite d'éléments de $\mathcal{A}$, 2 à 2 disjoints

d'où : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\geq 1} B_i \right) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(B_i) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(B \cap A_i)$ [prop 3 de la probabilité]

4) Le concept de probabilité conditionnelle :

C'est la probabilité qu'un événement sachant qu'un autre événement a eu lieu.

*déf : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 1 espace probabilisé

et 2 événements E_1 et E_2 avec $\mathbb{P}(E_2) \neq 0$

on appelle probabilité de E_1 sachant que E_2 est réalisé $\mathbb{P}(E_1 | E_2) = \dfrac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)}$

on note aussi $\mathbb{P}_{E_2}(E_1)$

ex : Je prends les 4 as d'1 jeu de carte (pique, cœur, carreau, trèfle) et je retourne les cartes sur la table (faces invisibles). Je demande à 1 participant (ou 1 participante) à la préparation au concours d'attaché de cette année d'en choisir une.

Soient les événements : E_1 = "la carte est l'as de cœur"

E_2 = "la carte est de couleur rouge" (c'est donc l'as de cœur ou l'as de carreau)

on a : $\mathbb{P}(E_1) = \dfrac{1}{4}$

$\mathbb{P}(E_2) = \dfrac{1}{2}$

$\mathbb{P}(E_1 \cap E_2) = \mathbb{P}(E_1) = \dfrac{1}{4}$

$\mathbb{P}(E_1 | E_2) = \dfrac{1}{2}$ (intuitivement : 1 chance sur 2 qu'il soit l'as de cœur sachant que la carte est rouge)

$= \dfrac{\mathbb{P}(E_1 \cap E_2)}{\mathbb{P}(E_2)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (d'après la formule de la probabilité conditionnelle).

*Th : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé et $F \in \mathcal{A}$ 1 événement réalisable, la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\cdot | F) : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ E &\longmapsto \mathbb{P}(E|F) \end{aligned}$$

est 1 mesure de probabilité

démo :

① Soit $E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(E|F) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$

on : $\mathbb{P}(E \cap F) \geq 0$ et $\mathbb{P}(F) > 0$ donc : $\mathbb{P}(E|F) \geq 0$

et : $\mathbb{P}(E \cap F) \leq \mathbb{P}(F) \Rightarrow \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} \leq 1$ donc : $\mathbb{P}(E|F) \leq 1$

d'où : $\mathbb{P}(E|F) \in [0;1]$

② $\mathbb{P}(\Omega) = \dfrac{\mathbb{P}(\Omega \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \dfrac{\mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)} = 1$

③ Soient $(A_n)_{n \geq 1}$ des éléments 2 à 2 disjoints de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \middle| F\right) = \frac{\mathbb{P}\left(F \cap \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right)\right)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap F)\right)}{\mathbb{P}(F)}$$

Soit $(B_n)_{n \geq 1}$ tq : $B_n = A_n \cap F$

les $(B_n)_{n \geq 1}$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ 2 à 2 disjoints

donc : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} B_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(B_n)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap F)\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n \cap F)$$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap F)\right)}{\mathbb{P}(F)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{P}(A_n \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n|F)$$

d'où : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \middle| F\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n|F)$

$\mathbb{P}(\cdot|F)$ est bien 1 mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

* formule des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé et $(F_i)_{i \geq 1}$ 1 système complet d'événements

alors : pour tout événement E de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$$

démo : soit $E \in \mathcal{A}$

$(F_i)_{i\geq 1}$ étant 1 système complet d'événements, on a :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E \cap F_i)$$

Soit $i \geq 1$, étant donné que $F_i \neq \emptyset$, on a : $\mathbb{P}(F_i) \neq 0$

donc : $\mathbb{P}(E \cap F_i) = \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$

on en déduit que : $\sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E \cap F_i) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$

d'où : $\mathbb{P}(E) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$

* Th de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé et E et F, 2 événements réalisables de $\mathcal{A}$

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$$

démo : $\mathbb{P}(E|F) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$

or : $\mathbb{P}(F|E) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)}$ donc : $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)$

d'où : $\mathbb{P}(E|F) = \dfrac{\mathbb{P}(F|E) \times \mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$

* 2nd th de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé, $F \in \mathcal{A}$ 1 événement réalisable et $(E_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{A}$ 1 système complet d'événements

$$\forall i \geq 1, \quad \mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(F|E_j) \times \mathbb{P}(E_j)}$$

démo : Soit $i \geq 1$,

$\mathbb{P}(E_i|F) = \dfrac{\mathbb{P}(F|E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\mathbb{P}(F)}$ d'après le Th de Bayes

$\mathbb{P}(F) = \sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(F|E_j) \times \mathbb{P}(E_j)$ d'après la formule des probabilités totales

donc : $\mathbb{P}(E_i|F) = \dfrac{\mathbb{P}(F|E_i) \times \mathbb{P}(E_i)}{\sum_{j\geq 1} \mathbb{P}(F|E_j) \times \mathbb{P}(E_j)}$

5) l'indépendance :

On dit que 2 événements sont indépendants si la réalisation (ou la non-réalisation) de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre.

* déf : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé, soient E et F 2 événements de $\mathcal{A}$.

E et F sont indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)$

* Th : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé, soient E et F 2 événements réalisables de $\mathcal{A}$

(i) E et F sont indépendants

(ii) $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(E)$

(iii) $\mathbb{P}(F/E) = \mathbb{P}(F)$

sont 3 propositions équivalentes

démo :

* (i) $\Rightarrow$ (ii) ?

$$\mathbb{P}(E/F) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(F)}$$ car E et F sont indépendants d'après (i)

$$= \mathbb{P}(E)$$

donc (ii) est bien vérifiée

* (ii) $\Rightarrow$ (iii) ?

$$\mathbb{P}(F/E) = \frac{\mathbb{P}(E/F) \times \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)}$$ d'ap le th de Bayes

or : $\mathbb{P}(E/F) = \mathbb{P}(E)$ d'après (ii)

donc : $$\mathbb{P}(F/E) = \frac{\mathbb{P}(E) \times \mathbb{P}(F)}{\mathbb{P}(E)} = \mathbb{P}(F)$$

donc : (iii) est bien vérifiée

* (iii) $\Rightarrow$ (i) ?

$$\mathbb{P}(F/E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(E)} \Rightarrow \mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F/E) \times \mathbb{P}(E)$$

or d'après (iii), $\mathbb{P}(F/E) = \mathbb{P}(F)$

donc : $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(E)$

donc : E et F sont indépendants

* déf : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(E_i)_{i=1,\dots,n}$, n éléments de $\mathcal{A}$

les événements $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ sont indépendants $\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I} E_i\right) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(E_i)$, $\forall I \subset [\![1;n]\!]$

* ppt : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, 1 espace probabilisé et $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ n événements de $\mathcal{A}$ indépendants alors il sont indépendants 2 à 2

[n'importe quelle paire de ces événements est indépendante]

démo : Soient $k \in [\![1;n]\!]$ et $l \in [\![1;n]\!]$ avec $k \neq l$

on a : $\{k;l\} \subset [\![1;n]\!]$

donc : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in\{k;l\}} E_i\right) = \prod_{i\in\{k;l\}} \mathbb{P}(E_i)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(E_k \cap E_l) = \mathbb{P}(E_k) \times \mathbb{P}(E_l)$

donc E_k et E_l sont indépendants

[rappel : $[\![1;n]\!] = \{1; 2; \dots; n\}$]

* contre-exemple : On lance 2 fois 1 pièce et on considère le résultat du lancer (pile ou face)

les événements : P_1 = "j'obtient pile au 1er lancer"

P_2 = "j'obtient pile au 2è lancer"

et : I = "le résultat des 2 lancers est identique"

sont indépendants 2 à 2 mais pas indépendants.

Si on pose $\Omega = \{(P;P); (P;F); (F;P); (F;F)\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, et $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme

on a : $P_1 = \{(P;P); (P;F)\}$

$P_2 = \{(P;P); (F;P)\}$

$I = \{(P;P); (F;F)\}$

$P_1 \cap P_2 = \{(P;P)\}$

$P_1 \cap I = \{(P;P)\}$

$P_2 \cap I = \{(P;P)\}$

$P_1 \cap P_2 \cap I = \{(P;P)\}$

$\mathbb{P}(P_1 \cap P_2) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2)$ mais $\mathbb{P}(P_1 \cap P_2 \cap I) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(I)$

$\mathbb{P}(P_1 \cap I) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}(I)$

$\mathbb{P}(P_2 \cap I) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(P_2) \times \mathbb{P}(I)$