

INTRODUCTION À LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

(1)

Il existe 2 sciences du hasard qui font partie intégrante des mathématiques :

* la statistique : l'étude d'un phénomène par la collecte de données, leur analyse, l'interprétation des résultats et leur diffusion afin de rendre ces données accessibles à tous.

* la théorie des probabilités qui étudie des phénomènes caractérisés par le hasard et l'incertitude.

LES ESPACES PROBABILISÉS

I) Étude d'une expérience aléatoire :

- c'est une expérience renouvelable plusieurs fois dans des circonstances identiques.

- cette expérience donne des résultats différents à chaque fois qu'on la répète et, ce, de manière imprévisible.

ex: lancer d'une pièce

lancer d'un dé

Temps passé à attendre le bus

Nombre de jours d'utilisation d'une cartouche par une imprimante

II) Les espaces probabilisés :

C'est un triplet (Ω, \mathcal{A}, P) qui va permettre la modélisation quantitative de l'expérience aléatoire étudiée.

1) Ω :

C'est l'univers des possibles (l'ensemble des résultats possibles de l'expérience)

ex: lancer 1 pièce : $\Omega = \{p; f\}$ [dénombrable]
lancer 1 dé : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ [dénombrable]

Temps passé à attendre le bus : $\Omega = [0; a]$ [non dénombrable]

Nombre de jours d'utilisation d'une cartouche par une imprimante : $\Omega = \{1, 2\}$ [dénombrable]

2) A est 1 tribu d'événements:

2-1) 1 événement:

déf: * c'est 1 sous-ensemble de Ω

* c'est donc 1 ensemble dont les éléments sont des résultats possibles de Ω .

ex: lancer d'1 pièce: $A = \{p\}$ événement "face pile"

lancer d'1 dé: $A = \{2; 4; 6\}$ événement "obtenir 1 résultat pair"

\emptyset = événement impossible

$A \cup B$: l'événement A ou l'événement B se produit

$A \cap B$: les événements A et B se produisent

\bar{A} : (complémentaire de A) l'événement A ne se produit pas

rappel: les règles vues en mathématiques concernant les ensembles s'appliquent aux événements.

$$\text{En particulier: } \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

définition d'un système complet d'événements: $(A_i)_{i \geq 1}$ ensemble d'événements tels que: $\bigcup_{i \geq 1} A_i = \Omega$

$$\text{et si } i \neq j \text{ alors } A_i \cap A_j = \emptyset$$

c'est 1 partition de Ω .

ex: lancer d'1 pièce: $A_1 = \{p\}$ et $A_2 = \{f\}$ sont 1 système complet d'événement sur $\{p, f\}$

lancer d'1 dé: $A_i = \{i\}$ pour $i = 1, \dots, 6$ forment aussi 1 système complet d'événement sur $\{1, \dots, 6\}$

2-2) A est 1 tribu sur Ω :

c'est 1 famille de parties de Ω vérifiant 3 propriétés:

déf: $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est 1 tribu si :

$$\textcircled{1} \quad \Omega \in A$$

$$\textcircled{2} \quad \text{pour tout suite } (A_n)_{n \geq 1} \text{ d'éléments de } A, \text{ on a: } \bigcup_{n \geq 1} A_n \in A$$

$$\textcircled{3} \quad \text{si } A \in A \text{ alors: } \bar{A} \in A$$

ex: * $A = \{\emptyset; \Omega\}$ est toujours 1 tribu sur Ω

* lancer d'une pièce: $A = \{\emptyset; \{p; f\}; \{p\}; \{f\}\}$

* lancer d'un dé: $A = \{\emptyset; \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}; \{1; 2; 3; 4\}; \{5; 6\}\}$

exercice: Soit A 1 tribu sur Ω et E , 1 partie de Ω

montrer que: $\mathcal{F} = \{A \cap E \text{ tel que: } A \in A\}$ est 1 tribu sur E

Résolution:

① on veut montrer que: $E \in \mathcal{F}$?

A étant 1 tribu, $\Omega \in A$

or: $E = \Omega \cap \Omega$ donc: $E \in \mathcal{F}$

② Soit $(B_n)_{n \geq 1}$, 1 suite d'éléments de \mathcal{F} , on veut montrer que: $\bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{F}$?

soit $n \geq 1$, $B_n \in \mathcal{F}$ donc: $B_n = A_n \cap E$ avec: $A_n \in A$

$$\text{d'où: } \bigcup_{n \geq 1} B_n = \bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap E)$$

$$= \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) \cap E \quad [\text{propriété des ensembles}]$$

or: $(A_n)_{n \geq 1}$ est 1 suite d'éléments de A donc: $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in A$

$$\text{soit que: } C = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

$$\bigcup_{n \geq 1} B_n = C \cap E \text{ avec } C \in A \text{ donc: } \bigcup_{n \geq 1} B_n \in \mathcal{F}$$

(4)

③ Soit $F \in \mathcal{F}$, a-t-on : $\bar{F} \in \mathcal{F}$? [complémentaire dans E]

$F \in \mathcal{F}$ donc : $\exists A \in \mathcal{A}$ tel que : $F = A \cap E$

$$\begin{aligned}\bar{F} &= \overline{A \cap E} = \bar{A} \cup \bar{E} = \{x \in E \mid x \notin A\} \cup \underbrace{\{x \in E \mid x \notin E\}}_{\emptyset} \\ &= \{x \in E \mid x \notin A\} \cup \emptyset \\ &= E \cap \bar{A}\end{aligned}$$

donc : $\bar{F} \in \mathcal{F}$

3) \mathbb{P} : probabilité sur $(\mathcal{R}; \mathcal{A})$:

Ouvrir calculer la probabilité d'un événement de A

déf : 3 propriétés doivent être vérifiées :

① $\mathbb{P} : A \rightarrow [0; 1]$

② $\mathbb{P}(\mathcal{R}) = 1$

③ Si $(A_n)_{n \geq 1}$ sont des éléments de \mathcal{A} , 2 à 2 disjoints

$$\text{alors : } \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$$

ex : * lancer d'une pièce : $\mathbb{P} : A \rightarrow [0; 1]$

$$A \mapsto \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\mathcal{R})} = \frac{\text{card}(A)}{2} \text{ est } \underline{\text{probabilité sur } (\mathcal{R}; \mathcal{A})}$$

avec : $\mathcal{R} = \{p; f\}$ et $A = \{\emptyset; \{p; f\}; \{p\}; \{f\}\}$

$$\text{mais : } \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\{p; f\}) = \frac{\text{card}(\{p; f\})}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\mathbb{P}(\{p\}) = \frac{\text{card}(\{p\})}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(\{f\}) = \frac{\text{card}(\{f\})}{2} = \frac{1}{2}$$

propriétés:

$$\textcircled{1} \forall A \in \mathcal{A}, P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

dém: $\Omega = A \cup \bar{A}$

donc: $P(\Omega) = P(A \cup \bar{A})$
 $= P(A) + P(\bar{A})$ [par (3) de la définition]

or: $P(\Omega) = 1$ [par (2) de la définition]

donc: $1 = P(A) + P(\bar{A})$

$$\textcircled{2} \forall A \in \mathcal{A}, P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

dém: $A \cup B = A \cup (B \cap \bar{A})$

donc: $P(A \cup B) = P(A) + \underline{P(B \cap \bar{A})}$ (1)

or: $B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$ [union disjointe]

donc: $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$ d'où: $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(B \cap A)$

on remplace dans (1):

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\textcircled{3} \text{ soient } A \text{ et } B \text{ dans } \mathcal{A}, \text{ si } A \subset B \text{ alors: } P(A) \leq P(B):$$

dém: soient A et B dans \mathcal{A} tels que: $A \subset B$

$$B = (B \cap A) \cup (B \cap \bar{A})$$

donc: $B = A \cup (B \cap \bar{A})$

d'où: $P(B) = P(A \cup (B \cap \bar{A}))$ [union disjointe]
 $= P(A) + P(B \cap \bar{A})$

or: $P(B \cap \bar{A})$

donc: $P(B) \geq P(A)$

④ formule des probabilités totales:

où $(A_i)_{i \geq 1}$ est un système complet d'événements de A
 alors: $\forall B \in A, P(B) = \sum_{i \geq 1} P(B \cap A_i)$

démonstration: Soit $B \in A$

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i \geq 1} A_i \right)$$

$$= \bigcup_{i \geq 1} (B \cap A_i)$$

$$\text{on pose } (B_i)_{i \geq 1} = (B \cap A_i)_{i \geq 1}$$

on a: $\forall i \geq 1, B_i \in A$ car: $B \in A$ et $A_i \in A$

[et: pour $i \neq j, B_i \cap B_j = (B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$ car: $A_i \cap A_j = \emptyset$]

donc: $(B_i)_{i \geq 1}$ est une suite d'éléments de A , 2 à 2 disjoints

$$\text{d'où: } P\left(\bigcup_{i \geq 1} B_i\right) = \sum_{i \geq 1} P(B_i) = \sum_{i \geq 1} P(B \cap A_i) \quad [\text{prop ③ de la probabilité}]$$