ESPACES EUCLIDIENS

On travaille dans E, 1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I) Les espaces euclidiens et préhilbertiens réels :

1) le produit scalaire sur E :

*** déf :** $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est 1 produit scalaire sur E si :

① φ est bilinéaire :

(1-1) $\forall (u;v;w) \in E^3, \forall (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \varphi(\lambda u + \mu v ; w) = \lambda \varphi(u;w) + \mu \varphi(v;w)$ [linéaire à gauche]

(1-2) $\forall (u;v;w) \in E^3, \forall (\lambda;\mu) \in \mathbb{R}^2, \varphi(u, \lambda v + \mu w) = \lambda \varphi(u;v) + \mu \varphi(u;w)$ [linéaire à droite]

② φ est symétrique :

$\forall (u;v) \in E^2, \varphi(u;v) = \varphi(v;u)$

③ φ positive :

$\forall u \in E, \varphi(u;u) \geq 0$

④ φ est définie

$\forall u \in E, \varphi(u;u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$

*** remarques :** il est souvent demandé de montrer qu'1 application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est 1 produit scalaire sur E

→ pour montrer la bilinéarité (1) et la symétrie (②) il vaut mieux :

② Montrer la symétrie

(1-1) Montrer la linéarité à gauche

→ pour montrer la positivité (③) et la définition (④)

on peut montrer : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \varphi(u;u) > 0$

*** ex :** $E = \mathbb{R}^n$

$$\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto {}^t x\, y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ (ou produit scalaire canonique)

*** ppté : inégalité de Cauchy-Schwartz :**

Soit E 1 espace vectoriel et φ 1 produit scalaire sur E

$\forall (u;v) \in E^2, |\varphi(u;v)| \leq \sqrt{\varphi(u;u)}\, \sqrt{\varphi(v;v)}$

<u>démo :</u> Soit $(u;v) \in E^2$,

1) Si $u = 0_E$ alors : $|\varphi(u,v)| = |\varphi(0_E, v)| = 0 = \sqrt{\varphi(u,u)}\ \sqrt{\varphi(v,v)}$

2) Si $u \neq 0_E$ alors :

soit $x \in \mathbb{R}$, on note : $P(x) = \varphi(xu+v\,;\, xu+v) = x^2\varphi(u;u) + 2x\,\varphi(u;v) + \varphi(v,v)$

$$\Delta = 4\,\varphi(u;v)^2 - 4\,\varphi(u;u)\,\varphi(v;v) = 4\left[\varphi(u;v)^2 - \varphi(u,u).\varphi(v;v)\right]$$

or : $P(x) \geq 0$ car le produit scalaire est 1 forme positive

donc : $\Delta \leq 0 \iff \varphi(u;v)^2 - \varphi(u;u).\varphi(v;v) \leq 0$

$\iff \varphi(u;v)^2 \leq \varphi(u;u).\varphi(v;v)$

$\iff \underline{|\varphi(u,v)| \leqslant \sqrt{\varphi(u,u)}\ \sqrt{\varphi(v;v)}}$

<u>* Ex :</u> $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $|\varphi(x;y)| \leqslant \sqrt{\varphi(x;x)}\ \sqrt{\varphi(y;y)}$

$$\iff \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ avec le <u>produit scalaire canonique</u>

<u>* ppt :</u> égalité d'inégalité de Cauchy-Schwartz

Soit (E, φ) 1 espace préhilbertien réel et $(u;v) \in E^2$

alors : $|\varphi(u;v)| = \sqrt{\varphi(u;u)}\ \sqrt{\varphi(v;v)} \iff u$ et v sont liés

<u>démo :</u>

1) <u>si u et v sont liés :</u>

$v = \lambda u \Rightarrow \underline{\varphi(u;v)} = \varphi(u;\lambda u) = \lambda\,\varphi(u,u) = \lambda\sqrt{\varphi(u,u)}\,.\,\sqrt{\varphi(u;u)}$

$= \sqrt{\varphi(u;u)}\,.\,\sqrt{\lambda^2\varphi(u,u)}$

$= \sqrt{\varphi(u;u)}\,.\,\sqrt{\varphi(\lambda u;\lambda u)}$

$= \underline{\sqrt{\varphi(u;u)}\,.\,\sqrt{\varphi(v;v)}}$

2) <u>si $|\varphi(u;v)| = \sqrt{\varphi(u,u)}\,.\,\sqrt{\varphi(v;v)}$</u>

alors $\varphi(u,v)^2 = \varphi(u;u).\varphi(v;v)$ donc $\Delta = 0$

$\Rightarrow P$ admet donc 1 racine double t

$P(t) = 0 \iff \varphi(tu+v\,;\, tu+v) = 0$

$\iff tu + v = 0_E \iff v = -tu$

donc <u>u et v sont liés</u>

2) espace de Hilbert et espace euclidien :

*** déf 1 :** Si E est 1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel et φ 1 produit scalaire sur E
alors (E, φ) est 1 espace préhilbertien réel.

*** déf 2 :** Si, de plus, E est 1 espace vectorielle de dimension finie
alors (E, φ) est 1 espace euclidien.

II) Normes et distance sur E :

1) déf :

*** déf d'1 norme :** $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est 1 norme si :

(1) $\forall u \in E, \ \|u\| \geq 0$

(2) $\forall u \in E, \ \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0_E$

(3) $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$

(4) $\forall (u,v) \in E^2, \ \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

*** Ex de norme :** $E = \mathbb{R}^2$

$$\| \ \| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto |x| + |y|$$

*** déf d'1 distance :** $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$
$$(x;y) \mapsto \|x - y\|$$
est la distance associée à la norme $\| \ \|$.

2) prop : des distances :

Th : si d est 1 distance sur E

1) $\forall (x;y) \in E^2, \ d(x;y) \geq 0$

2) $\forall (x;y) \in E^2, \ d(x;y) = 0 \Rightarrow x = y$

3) $\forall (x;y) \in E^2, \ d(x;y) = d(y;x)$

4) $\forall (x,y,z) \in E^3, \ d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$

dém :

4) Soit $(x,y,z) \in E^3$, $d(x;y) = \|x-y\| = \|x - z + z - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\|$

$$\Rightarrow d(x;y) \leq d(x;z) + d(z;y)$$

3) norme hilbertienne ou euclidienne :

Th : Soit (E, φ) 1 espace préhilbertien réel

pour $u \in E$, on pose : $\|u\| = \sqrt{\varphi(u;u)}$

$\| \ \| : E \to \mathbb{R}^+$ est 1 norme sur E, c'est la norme sur E associée au produit scalaire φ (on parle aussi de norme euclidienne).

démo :

(1) soit $u \in E$, $\|u\| = \sqrt{\varphi(u,u)} \geq 0$

(2) soit $u \in E$, $\|u\| = 0 \Rightarrow \varphi(u,u) = 0 \Rightarrow u = 0_E$

(3) soit $u \in E$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = \sqrt{\varphi(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 \varphi(u,u)} = |\lambda| \sqrt{\varphi(u,u)} = |\lambda| \, \|u\|$

(4) soit $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\| = \sqrt{\varphi(u+v, u+v)} = \left(\varphi(u;u) + 2\varphi(u,v) + \varphi(v,v)\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
\text{donc : } \|u+v\|^2 &= \varphi(u;u) + 2\varphi(u;v) + \varphi(v;v) \\
&= \|u\|^2 + 2\varphi(u,v) + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2|\varphi(u,v)| + \|v\|^2 \\
&\leq \|u\|^2 + 2\sqrt{\varphi(u,u)} \cdot \sqrt{\varphi(v,v)} + \|v\|^2 \quad \text{d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz} \\
&= \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

ex : Si $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire

alors la norme euclidienne sur (E, φ) est :

$$\begin{aligned}
\| \ \| : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^+ \\
u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &\longmapsto (\varphi(u;u))^{\frac{1}{2}} = ({}^t u\, u)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Th de Pythagore : Soit (E, φ) 1 espace préhilbertien réel

$\forall (u;v) \in E^2$, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Leftrightarrow \varphi(u,v) = 0$

démo : soit $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\varphi(u,v) + \|v\|^2$

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 = 0 \Leftrightarrow \varphi(u;v) = 0$$

III) Orthogonalité :

1) déf :

* 2 vecteurs u et v sont orthogonaux ssi $\varphi(u,v)=0$
* Soit $A\subset E$, l'orthogonal de A noté $A^{\perp} = \{u\in E \,/\, \forall v\in A,\ \varphi(u,v)=0\}$

2) prop de l'orthogonal d'1 partie de E :

① $A^{\perp}$ est 1 sous-espace vectoriel de E
② $\{0_E\}^{\perp}=E$ et $E^{\perp}=\{0_E\}$
③ $\forall (A;B)\in \mathcal{P}(E)\times\mathcal{P}(E)$, $A\subset B \Rightarrow B^{\perp}\subset A^{\perp}$

3) prop de l'orthogonal d'1 sous espace vectoriel de E :

Th : Soit (E,φ) 1 espace préhilbertien réel et F 1 sous-espace vectoriel de E
alors : $F\cap F^{\perp}=\{0_E\}$
et : $F\subset (F^{\perp})^{\perp}$

4) famille de vecteurs orthogonale et/ou orthonormale :

Soit $(e_i)_{i=1,\dots,I}$ 1 famille de I vecteurs de E.

* la famille $(e_i)_{i=1,\dots,I}$ est orthogonale $\Leftrightarrow \forall (i,j)\in [\![1,\dots,I]\!]^2,\ i\neq j \Rightarrow \varphi(e_i,e_j)=0$

* la famille $(e_i)_{i=1,\dots,I}$ est orthonormale $\Leftrightarrow \forall (i,j)\in [\![1;I]\!]^2,\ \varphi(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } i=j\\ 0 & \text{si } i\neq j\end{cases}$

* remarque : 1 famille orthonormale est orthogonale

* Th : 1 famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

démo : Soit $(e_i)_{i=1,\dots,I}$ 1 famille orthogonale de I vecteurs de E

Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_I)\in\mathbb{R}^I$ tq : $\sum_{i=1}^{I}\lambda_i e_i=0_E$

soit $j\in[\![1,I]\!]$, $\varphi\left(e_j\,;\,\sum_{i=1}^{I}\lambda_i e_i\right)=0$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{I}\lambda_i\,\varphi(e_j,e_i)=0 \Rightarrow \lambda_j\,\varphi(e_j,e_j)=0$$

Etant donné que $e_j\neq 0_E$ on a : $\lambda_j=0$

donc : $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_I=0$

$(e_i)_{i=1,\dots,I}$ est 1 famille libre

*Th: 1 famille orthonormale est libre

*ex: $E=\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire, la base canonique est 1 famille orthonormale

4) base orthonormée :

*Th: Soit (E,φ) 1 espace euclidien alors il existe une base orthonormée

*Th: Soit (E,φ) 1 espace euclidien de dimension n et soit $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ 1 base orthonormée sur cet espace alors :

① coordonnées :

$$\forall u\in E,\ u=\sum_{i=1}^{n}\varphi(u,e_i)e_i$$

② produit scalaire :

$$\forall (u,v)\in E^2,\ \varphi(u;v)=\sum_{i=1}^{n}\varphi(u,e_i)\,\varphi(v,e_i)$$

③ norme :

$$\forall u\in E,\ \|u\|=\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(u,e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

démo :

① soit $u\in E$

$$u=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$$

soit $i\in[\![1;n]\!]$, $\varphi(u;e_i)=\sum_{j=1}^{n}x_j\,\varphi(e_j,e_i)=x_i$

donc $u=\sum_{j=1}^{n}\varphi(u,e_j)e_j$

② soit $(u,v)\in E^2$, $u=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i$ et $v=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$

$$\varphi(u,v)=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i\,\varphi\left(e_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\,\varphi(e_i,e_i)=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\varphi(u,e_i)\,\varphi(v,y_i)$$

d'après ①

③ soit $u\in E$,

$$\|u\|^2=\varphi(u,u)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

donc : $\|u\|=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}\varphi(u,e_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}$

IV) projection orthogonale dans 1 espace euclidien :

1) Orthogonal d'1 sous-espace d'1 espace euclidien :

* Th : Soit (E,φ) 1 espace euclidien et F 1 sous-espace vectoriel de E

alors : $E = F \oplus F^{\perp}$

* Th : Soit (E,φ) 1 espace euclidien et F 1 sous-espace vectoriel de E

alors : $(F^{\perp})^{\perp} = F$

démo : $E = F^{\perp} \oplus (F^{\perp})^{\perp}$

donc : $\dim(F^{\perp\perp}) = \dim(E) - \dim(F^{\perp})$

$= \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F)$

or : $F \subset F^{\perp\perp}$ dans tout espace préhilbertien réel.

donc : $F^{\perp\perp} = F$

2) projection orthogonale sur 1 vecteur u non nul :

* c'est l'application : $p_u : E \to \mathrm{Vect}\{u\}$

$$x \mapsto \frac{\varphi(x,u)}{\varphi(u,u)} \cdot u$$

$p_u(x)$ est le projeté orthogonal de x sur le vecteur u

3) projection orthogonale sur 1 sous-espace F de E :

* Soit F 1 sous-espace de E muni d'1 base orthonormée $(e_i)_{i=1,\dots,k}$

$$p_F : E \to F$$
$$x \mapsto p_F(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi(x,e_i)\, e_i$$

On l'appelle aussi projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$

* prop :

1. $p_F \in \mathcal{L}(E)$
2. $p_F \circ p_F = p_F$
3. $p_F + p_{F^{\perp}} = Id_E$
4. $p_F \circ p_{F^{\perp}} = 0_E$

* remarques : $E = F \oplus F^{\perp}$ donc : $\forall x \in E,\ \exists!\, y \in F$ et

4) décomposition d'1 vecteur de E :

soit F 1 sous-espace vectoriel de E

soit $x \in E$, on sait que $E = F \oplus F^{\perp}$

par conséquent, $\exists ! (y, z) \in F \times F^{\perp}, x = y + z$

Dans ce cas : $y = p_F(x)$ et $z = p_{F^{\perp}}(x)$ d'ap la prop 3 des projections orthogonales.

5) Comment orthonormaliser 1 base ?

Soit $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ 1 famille libre de vecteurs de E

[Si (E, φ) est 1 espace euclidien de dimension n alors $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ est 1 base de E]

alors la famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ définie par :

$$e_1 = u_1 \cdot \frac{1}{\|u_1\|}$$

pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, $e_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \varphi(u_{k+1}, e_i) e_i \cdot \dfrac{1}{\left\| u_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \varphi(u_{k+1}, e_i) \cdot e_i \right\|}$

est 1 famille orthonormée de E

[Si $(u_i)_{i=1,\dots,n}$ est 1 base de E alors $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est 1 base orthonormée de E]

C'est le procédé d'orthogonalisation de Schmidt