Correction des exercices de Révision

Etude de fonction :

1)

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sin x$ est continue sur $\mathbb{R}$
} $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions continues

et, $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}^*$

donc : f est continue sur $\mathbb{R}^*$

b) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

on a, $-x^2 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$

et : $\lim_{x \to 0} x^2 = \lim_{x \to 0} -x^2 = 0$

donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$

f est continue en 0.

2)

a) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
} $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition de fonctions dérivables

et x^2 est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

on a : $-x \leq x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$

et $\lim_{x \to 0} -x = \lim_{x \to 0} x = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$

donc f est dérivable en 0.

c) $f'(x) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$

or : $\lim\limits_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

et : $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas

donc : f' n'est pas continue en 0.

Diagonalisation :

1) $$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 4 & 5-\lambda & 6 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 6 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(5-\lambda)(9-\lambda) - 48\right] - 2\left[4(9-\lambda) - 42\right] + 3\left[32 - 7(5-\lambda)\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[45 - 14\lambda + \lambda^2 - 48\right] - 2\left[36 - 4\lambda - 42\right] + 3\left[7\lambda - 3\right]$$

$$= (1-\lambda)\left[-3 - 14\lambda + \lambda^2\right] + 2(6 + 4\lambda) + 21\lambda - 9$$

$$= -3 - 14\lambda + \lambda^2 + 3\lambda + 14\lambda^2 - \lambda^3 + 12 + 8\lambda + 21\lambda - 9$$

$$= -\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda$$

$$= \lambda(-\lambda^2 + 15\lambda + 18) = \lambda\left(\lambda - \frac{-15 + \sqrt{297}}{-2}\right)\left(\lambda \text{ [redacted] } \frac{-15 - \sqrt{297}}{-2}\right)$$

Le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$ et toutes ses racines sont simples
donc A est diagonalisable

2) $Ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus Ax = 0_{\mathbb{R}^3} \right\}$ [0 est racine simple de P_A et A est diagonalisable donc : $\dim(Ker(A)) = 1$]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Ker(A) \iff A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 0 & L_2 - 4.L_1 \\ -6y - 12z = 0 & L_3 - 7.L_1 \end{cases}$$

[méthode du Pivot de GAUSS]

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ -3y - 6z = 0 \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2y \text{ [redacted] } 3z = 4z \text{ [redacted] } 3z = z \\ y = -2z \\ z = z \end{cases}$$

donc : $Ker(A) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Suites récurrentes:

1) $f'(x) = 2px + p = p(2x+1)$

signe de x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$1-2p$	$\nearrow$	1

2) f est continue, croissante sur $[0;1]$ donc $f([0;1]) = [f(0); f(1)] = [1-2p; 1] \subset [0;1]$

donc: $\forall x \in [0;1],\ f(x) \in [0;1]$

On veut montrer la propriété (P_n): $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [0;1]$ par récurrence

$U_0 = 0 \in [0;1]$ donc: (P_0) est vraie

On suppose (P_n) vraie, a-t-on (P_{n+1}) vraie?

$U_n \in [0;1]$ donc: $f(U_n) \in [0;1]$ d'où: $U_{n+1} \in [0;1]$ (P_{n+1}) est vérifiée

donc $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \in [0;1]$

3) on a f croissante sur $[0;1]$ avec $f([0;1]) \subset [0;1]$

et $(U_n)_n$ définie par $U_0 \in [0;1]$ et $U_{n+1} = f(U_n)$

donc: $(U_n)_n$ est monotone

étant donné que: $U_1 - U_0 > 0$, $(U_n)_n$ est croissante.

4) $(U_n)_n$ est croissante et majorée par 1 donc: $(U_n)_n$ converge

5) on a: f continue sur $[0;1]$ avec $f([0;1]) \subset [0;1]$

et $(U_n)_n$ définie par: $U_0 \in [0;1]$ et $f(U_n) = U_{n+1}$

qui converge vers 1 limite ℓ

alors: $f(\ell) = \ell$

or: $f(\ell) = \ell \Leftrightarrow p\ell^2 + (p-1)\ell + (1-2p) = 0$

$$\Delta = (p-1)^2 - 4p(1-2p) = 9p^2 - 6p + 1 = (1-3p)^2$$

2 solutions possibles: $\begin{cases} \ell_1 = \dfrac{1-p+1-3p}{2p} = \dfrac{1}{p} - 2 > 1 & \text{donc ce n'est pas la limite de } (U_n)_n \\ \ell_2 = \dfrac{1-p-1+3p}{2p} = 1 & \text{donc: } U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1 \end{cases}$