Exercice sur l'indépendance mutuelle et l'indépendance 2 à 2

1) * loi de Z :

① support de Z : $Z : \Omega \longrightarrow \{0;1\}$

② loi de Z :

$$\mathbb{P}(Z=1) = \mathbb{P}(X_1 = X_2) = \mathbb{P}(\{X_1=0, X_2=0\} \cup \{X_1=1, X_2=1\})$$
$$= \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0) + \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) \quad \text{car l'union est disjointe}$$
$$= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0) + \mathbb{P}(X_1=1)\mathbb{P}(X_2=1)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(Z=0) = 1 - \mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{2}$$

$$Z \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

2) $\mathbb{P}(X_1=0, Z=0) = \mathbb{P}(X_1=0, X_1 \neq X_2) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1=0).\mathbb{P}(Z=0)$

$\mathbb{P}(X_1=0, Z=1) = \mathbb{P}(X_1=0, X_1=X_2) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1=0).\mathbb{P}(Z=1)$

$\mathbb{P}(X_1=1, Z=0) = \mathbb{P}(X_1=1, X_1 \neq X_2) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=0) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1=1).\mathbb{P}(Z=0)$

$\mathbb{P}(X_1=1, Z=1) = \mathbb{P}(X_1=1, X_1=X_2) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1=1).\mathbb{P}(Z=1)$

X_1 et Z sont donc indépendantes

3) $\mathbb{P}(X_2=0, Z=0) = \mathbb{P}(X_2=0, X_1=1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_2=0).\mathbb{P}(Z=0)$

$\mathbb{P}(X_2=0, Z=1) = \mathbb{P}(X_2=0, X_1=0) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_2=0).\mathbb{P}(Z=1)$

$\mathbb{P}(X_1=1, Z=0) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=0) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1=1).\mathbb{P}(Z=0)$

$\mathbb{P}(X_1=1, Z=1) = \mathbb{P}(X_1=1, X_2=1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1=1).\mathbb{P}(Z=1)$

X_2 et Z sont donc indépendantes

4) On remarque que : $\mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, Z=0) = \mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, X_1 \neq X_2) = 0$

or : $\mathbb{P}(X_1=0) = \frac{1}{2}$; $\mathbb{P}(X_2=0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(Z=0) = \frac{1}{2}$

donc : $\mathbb{P}(X_1=0, X_2=0, Z=0) \neq \mathbb{P}(X_1=0).\mathbb{P}(X_2=0).\mathbb{P}(Z=0)$

$\Rightarrow$ X_1, X_2 et Z ne sont pas mutuellement indépendantes.

5) l'indépendance 2 à 2 (X_1 et X_2 sont ind, X_1 et Z sont ind, X_2 et Z sont ind) n'implique pas l'indépendance mutuelle.