Exercice 1♥

3. *(Extrait de l'examen du 17 novembre 2010)*
On dispose de deux urnes extérieurement identiques. L'urne 1 contient 2 boules blanches et 2 boules noires ; l'urne 2 contient 3 boules blanches et 1 boule noire. On choisit une urne au hasard (avec équiprobabilité), et on en tire deux boules avec remise.
   (a) Quelle est la loi du nombre de boules blanches sorties lors de ces tirages ?
   (b) On a sorti deux boules blanches. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne 1 ? l'urne 2 ?

Exercice 2

On dispose de deux urnes A et B, d'un dé à six faces équilibré, et de six boules numérotées de 1 à 6. On place au début la boule 1 dans l'urne A et les autres boules dans l'urne B. On répète l'expérience suivante : on jette le dé, puis on change d'urne la boule dont le numéro est celui obtenu par le jet de dé.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note D_n la variable aléatoire représentant la valeur obtenue au n-ième lancer du dé, A_n le nombre de boules dans l'urne A après le n-ième jet de dé (après qu'on ait effectué le n-ième échange).

1. Calculer la loi de A_1, puis son espérance $\mathbb{E}(A_1)$.
2. On souhaite déterminer la loi du couple (A_1, A_2).
   (a) Déterminer les valeurs possibles pour le couple (A_1, A_2).
   (b) Pour chaque valeur possible (n_1, n_2), écrire l'évènement $\{(A_1, A_2) = (n_1, n_2)\}$ à l'aide d'évènements faisant intervenir les variables aléatoires D_n.
   (c) En déduire la loi du couple (A_1, A_2) puis celle de A_2.
   (d) Les variables aléatoires A_1 et A_2 sont-elles indépendantes ?
3. Soit $n \geq 1$. On souhaite relier $\mathbb{E}(A_{n+1})$ et $\mathbb{E}(A_n)$.
   (a) Relier $P(A_{n+1} = 0)$ et $P(A_n = 1)$.
   (b) Relier $P(A_{n+1} = 6)$ et $P(A_n = 5)$.
   (c) On fixe k entier entre 1 et 5. Relier $P(A_{n+1} = k)$ aux probabilités $P(A_n = k-1)$, $P(A_n = k+1)$.
   (d) Montrer que $\mathbb{E}(A_{n+1}) - \frac{2}{3}\mathbb{E}(A_n)$ est constant (indépendant de n).
4. Montrer que la suite $(\mathbb{E}(A_n) - 3)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique. La suite $(\mathbb{E}(A_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge-t-elle ?

Exercice 3 ♥

Soit λ >0. On considère 2 v.a.d. X et Y, de distribution jointe donnée par :

$P(X = x, Y = y) = (C \cdot \lambda^{x+y}) / (x!\, y!)$, $x \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{N}$

(a) déterminer C

(b) Trouver la distribution marginale de X

(c) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Soient X et Y, 2 v.a.d. indépendantes qui suivent une loi géométrique de paramètre p.

(a) Calculer la loi de X+Y

(b) Calculer le coefficient de corrélation entre X et X + Y

Exercice 5

Un réseau de télécommunication est sujet à des microcoupures qui interviennent sporadiquement à des instants aléatoires. Des études statistiques ont permis de proposer le modèle suivant : le nombre de coupure par heure suit une loi de Poisson de paramètre ln(2) et il n'y a pas d'influence du nombre de coupures dans une heure donnée sur le nombre de coupures pendant les heures précédentes ou suivantes.
On note X_i le nombre de coupures observées l'heure i d'un jour donné. Les $(X_i)_{i=1, \ldots, 24}$ sont des v.a.d. indépendantes de loi de Poisson de paramètre ln(2).

(a) Calculer la loi de la somme de 2 v.a.d. indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$?

(b) Soit J le nombre de micro-coupures observées dans une journée. Quelle est sa loi ?

(c) Soit A le nombre de coupures observées pendant la matinée et P le nombre de coupures observées après midi. Montrer que A et B sont 2 v.a.d. indépendantes de même loi de Poisson de paramètre 12ln(2).

(d) On a observé 5 micro-coupures hier. Quelle est la probabilité qu'elles aient toutes eu lieu avant midi ?

(e) On note Z l'heure à laquelle a été observée la première micro-coupure (en considérant que l'heure entre minuit et une heure du matin est la première heure de la journée) en posant Z = 25 si aucune micro-coupure n'a été observée dans la journée.

1. Montrer que, pour $1 \leq k \leq 24$, le calcul de P(Z = k) s'effectue comme si la loi était géométrique de paramètre 1/2
2. Calculer P(Z = 25)

(f) Quelle est la loi du nombre total d'heures sans micro-coupures pendant cette journée ?

Exercice 6

Soit T une variable aléatoire discrète à valeurs dans N* telle que,
pour tout $k \geq 1$, $l \geq 1$, $P(T > k + l \setminus T > l) = P(T > k)$.

(a) Expliciter P [T > k] pour $k \geq 1$ et identifier la loi de T.

(b) Interpréter cette propriété remarquable.

Exercice 7 ♥

Pour effectuer une étude sur la consommation de drogues illégales tout en préservant l'anonymat des sondés, on propose le protocole suivant :

On note Z la variable aléatoire égale à 1 s'il arrive à la personne sondée de consommer effectivement des drogues illégales et 0 sinon. On suppose que $P(Z = 1) = p$
On demande à la personne sondée de lancer au préalable un dé dont le résultat est une v.a.d. X et de mentir si $X \geq 5$ et de dire la vérité si $X \leq 4$. Ce résultat est gardé secret par la personne sondée.
Ensuite, le sondeur coche la réponse (« oui » ou « non ») à la question :« Vous arrive-t-il de consommer des drogues illicites ? ». On note Y la v.a.d. qui vaut 0 si la réponse est « non » et 1 si la réponse est « oui ».

(a) Quelle est la loi, l'espérance et la variance de X ? Mêmes questions pour Z.

(b) Montrer que $P(Y = 1, Z = 1) = P(Z = 1, X \leq 4)$

(c) On suppose que X et Z sont indépendantes.

1. Cette supposition vous semble-t-elle raisonnable ?
2. Montrer que $P(Y = 1, Z = 1) = 2p / 3$
3. Montrer que $P(Y = 0, Z = 0) = 2(p-1) / 3$

(d)

1. Calculer $P(Y=0, Z = 1)$
2. En déduire $P(Y = 1)$ et la loi de Y

(e) On suppose l'étude réalisée sur un grand nombre de personne. Proposer une estimation de $(p + 1) / 3$ et donc de p.

Exercice 8 ♠

On considère 2 v.a. X et Y indépendantes, de même loi géométrique de paramètre p.
On définit les v.a. U et V par :

$$U = \min(X, Y) \qquad \text{et} \qquad V = \max(X, Y) - \min(X, Y)$$

(a) Soient 2 entiers $k \geq 1$ et $l \geq 0$

1. Calculer $P(X = k , Y= k+l)$
2. En distinguant les cas : $l = 0$ et $l >0$, calculer $P(U =k , V = l)$

(b)

1. Montrer que U est de loi géométrique de paramètre $1 -(1 – p)^2$
2. Déterminer la loi de V et monter que, conditionnellement à $V \geq 1$, V est de loi géométrique de paramètre p

(c) Les v.a. U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 9

La maintenance d'une imprimante intervient tous les jours en fin de journée pour remplacer les cartouches d'encre. On impose que chaque cartouche soit remplacée au moins une fois tous les deux jours. Ainsi, par exemple, si le lundi soir, la cartouche n'est pas remplacée, elle le sera nécessairement le mardi soir. L'imprimante compte $I = 20$ cartouches.

On note T_i le nombre de jours d'utilisation de la cartouche i dernièrement installée. On suppose que les T_i sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que $P(T_i = 1) = p$ et $P(T_i = 2) = 1-p$ avec $p \in]0\,;1[$

Soit N, le nombre de jours d'utilisation de l'imprimante. Pour $n \in [1;N]$, $R_{i,n}$ désigne la variable aléatoire prenant la valeur 1 si la cartouche i est remplacée le jour n et 0 sinon. On note $r_n = E(R_{i,n})$, l'espérance de $R_{i,n}$

(a)

1. Calculer $E(T_i)$
2. Calculer r_1 et r_2

(b) soit $n \in [1;N]$

1. A l'aide de la formule des probabilités totales, écrire une relation donnant $P(R_{i,n+2} = 1)$ en fonction de $P(R_{i,n+1} = 1)$ et $P(R_{i,n} = 1)$.
2. En déduire l'égalité : $r_{n+2} = p.r_{n+1} + (1-p).r_n$

(c) On sait que : pour tout $n \in [1;N]$, $r_n = \lambda + \mu.(p-1)^n$ avec $(\lambda\,;\mu) \in \mathbb{R}^2$

1. Déterminer les valeurs de λ et μ. En déduire une expression de r_n en fonction de n et p.
2. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 1 / E[T_i]$

(d) soit $n \in \mathbb{N}$, on note C_N, le nombre de cartouches remplacées après N jours de fonctionnement. Exprimer C_N en fonction des variables aléatoires R_n et calculer $E[C_N]$.

Exercice 10

Soit $(X_i, i \in \mathbb{N}^*)$, 1 suite de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuées qui suivent une loi de bernoulli de paramètre p. Pour tout $i \geq 1$, on pose : $Y_i = X_i + X_{i+1}$

(a) Pour $i \geq 1$, donner la loi de Y_i

(b) Les $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont-elles indépendantes ?

(c) Pour $n \geq 1$, on pose $T_n = (Y_1 + \ldots + Y_n)/n$. Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 11

On place dans une enveloppe un billet de 5, 10, 20, 50, 100, 200 et 500 euros et on note B, l'ensemble de ces valeurs. On tire 2 billets de valeurs respectives X et Y et on considére le jeu suivant :

- Si X > Y, le joueur gagne X-Y
- Si X < Y, le joueur perd X-Y
- Si x=Y, il n'y a ni gain ni perte

On note G = X – Y, le gain ou la perte du joueur.

1) Tirage avec remise

On tire un premier billet de valeur X que l'on remet dans l'enveloppe, puis on tire un second billet de valeur Y.

(a) Quelle est la loi de X et Y ?

(b) Calculer le gain espéré, E[G]

(c) Donner les probabilités des événements suivants :

- N : « X = Y »
- V : « X > Y »
- D : « X < Y »

(d) Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

(e) On tire X =50. Conditionnellement à ce tirage, calculer :

- la probabilité de N
- la probabilité de V
- la loi de G
- l'espérance de G

(f) On tire X = x € B. Conditionnellement à ce tirage, calculer :

- la probabilité de N
- la probabilité de V
- la loi de G
- l'espérance de G

(g) On tire X publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelles valeurs a-t-il intérêt à se retirer ?

2) Tirage sans remise

On tire un premier billet de valeur X mais, cette fois, sans le remettre dans l'enveloppe, puis on tire un second billet de valeur Y qui est donc différente de X

(a) Quelle est la loi de Y ?

(b) Quelle est la probabilité de V ?

(c) Combien vaut E[G] ?

(d) Le jeu vous semble-t-il équilibré ?

(e) On tire $X = 100$. Calculer

- la loi conditionnelle de G
- l'espérance conditionnelle de G

(f) On tire $X = x \in B$. Calculer :

- la loi conditionnelle de G
- l'espérance conditionnelle de G

(g) On tire X publiquement et on demande au joueur s'il veut se retirer du jeu sans gain ni perte. Pour quelles valeurs a-t-il intérêt à se retirer ?