Exercices sur les suites

ex 1:

1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

or: $\frac{-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc d'après le th des gendarmes: $\frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$

or: $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc: $e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e$

d'où: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\to} e$

3) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{n^n} \leq \frac{n^{n-2}.2}{n^n}$

donc $0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$

or: $\frac{2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc: $\frac{n!}{n^n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

4) $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n}\ln(n)}$

or: $\frac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc: $e^{\frac{2\ln n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$

5) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

donc: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$

6) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$

or: $\frac{-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ et $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ donc $\frac{(-1)^n}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ d'après le théorème des gendarmes ex 3 :

① On pose : $U_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$

soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_n\right)$ car : $\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \supset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

donc : $U_{n+1} \geqslant U_n$

$\Rightarrow$ $(U_n)_n$ est 1 suite croissante

or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leqslant 1$

donc : $(U_n)_n$ est croissante et majorée alors elle converge par 1

② Soit $v_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$

soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$ car : $\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k \subset \bigcap_{k=1}^{n} A_k$

donc : $v_{n+1} \leqslant v_n$

$\Rightarrow$ $(v_n)_n$ est 1 suite décroissante

or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant 0$

donc : $(v_n)_n$ est décroissante et minorée donc : elle converge. par 0

ex 4 :

1) Si $(U_n)_n$ est bornée

alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant U_n \leqslant M$

soit $n \in \mathbb{N}$,

$(n+1)\,m \leqslant U_0 + U_1 + \dots + U_n \leqslant (n+1)\,M$

$$\Rightarrow \quad m \leqslant \frac{\sum_{k=0}^{n} U_k}{n+1} \leqslant M$$

$\Rightarrow$ $m \leqslant v_n \leqslant M$

donc : $(v_n)_n$ est bornée.

2)

* Si $(U_n)_n$ est bornée alors elle est majorée.

Etant donné que $(U_n)_n$ est croissante et majorée alors elle converge.

* soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_0 + \dots + u_{n+1}}{n+2} - \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1} = \frac{(n+1)(u_0 + \dots + u_{n+1}) - (n+2)(u_0 + \dots + u_n)}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[(n+1)u_{n+1} - u_0 - \dots - u_n \right] = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left[\underbrace{(u_{n+1} - u_0)}_{\geq 0} + \underbrace{(u_{n+1} - u_1)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(u_{n+1} - u_n)}_{\geq 0} \right]$$

car $(u_n)_n$ croissante

$$\geq 0$$

donc $(v_n)_n$ est croissante

* Étant donné que $(u_n)_n$ est bornée alors $(v_n)_n$ est bornée donc majorée

* $(v_n)_n$ est croissante et majorée donc elle converge.

ex 2:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+U_n}} \iff 2\sqrt{n+U_n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$

$$\iff \sqrt{n+U_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$$

$$\iff n+U_n = \frac{1}{4}\left(n+1+2\sqrt{n^2+n}+n\right) = \frac{1}{4}\left(1+2n+2\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}}$$

$$\iff U_n = \frac{1}{4} - \frac{n}{2} + \frac{n}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4} + \frac{n}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$.

or : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ [formule de taylor]

donc : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}+1$

d'où : $\frac{n}{2}\left(-1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{4}$

donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge

---

ex 5:

1)

* soit $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n+V_n\right) - \sqrt{U_nV_n} = \frac{1}{2}\left(U_n - 2\sqrt{U_nV_n} + V_n\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{U_n}-\sqrt{V_n}\right)^2 \geqslant 0$$

pour $n=0$, $V_0 - U_0 = b-a \geqslant 0$

donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_n \geqslant U_n$

* sens de variation de $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} \leqslant 0 \Rightarrow (V_n)_n \text{ est décroissante}$$

* sens de variation de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_nV_n} - U_n = \sqrt{U_n}\left(\sqrt{V_n}-\sqrt{U_n}\right)$$

* sens de variation de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \sqrt{U_n V_n} - \sqrt{U_n^2} = \underbrace{\sqrt{U_n}\left(\sqrt{V_n} - \sqrt{U_n}\right)}_{\geq 0}$ on : $V_n \geq U_n$ donc ; $\sqrt{V_n} \geq \sqrt{U_n}$

donc : $(U_n)_n$ est croissante

2) * (U_n) et (V_n) convergent ?

$\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_0 = a$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n \leq V_0 = b$

or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq V_n$

donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq U_n \leq V_n \leq b$

* (U_n) est croissante et majorée par b donc elle converge

* (V_n) est décroissante et minorée par a donc elle converge

* Si on note U la lim de (U_n) et V la lim de (V_n)

on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \dfrac{\lim}{2} \iff 2V = V+U \iff \underline{V = U}$