

Ces 3 exercices sont tirés des sujets du concours des années 2017, 2018 et 2019.

Exercice 1. (5 points)

Partie A : Étude d'une fonction

On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$.

1. (a) Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition.
(b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln(x)$.
(c) Étudier les variations de g . On montrera en particulier que l'équation $g(x) = 0$ admet une et une seule solution sur \mathbb{R}^{+*} , cette solution sera notée m .
2. (a) Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$ et montrer que $f(m) = \frac{1}{2m^2}$.
(b) Dresser le tableau de variation de f .

Exercice 3

Questions préliminaires :

- Montrer que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est ni positive ni négative, c'est à dire montrer qu'il existe $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(h \ k) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} < 0$$

et qu'il existe $(h', k') \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(h' \ k') \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h' \\ k' \end{pmatrix} > 0.$$

- Pour $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, écrire $(h \ k) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ comme une somme de carrés. En déduire que la matrice symétrique $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est positive.
-

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

On note $\nabla_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$ le gradient de f en un point $a \in U = \mathbb{R}^2$ et $H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$ la Hessienne de f en a .

- (a) Calculer le gradient $\nabla_f(a)$ pour $a \in U$.
 (b) Calculer les points critiques de f , c'est à dire les points en lesquels le gradient de f s'annule.
 (c) Calculer la Hessienne de f sur U .
 (d) Etudier les extrema locaux de f .
- On étudie maintenant les extrema éventuels de f sur $V_g = \{a \in U; g(a) = 0\}$ avec $g(x, y) = xy + 1$. On suppose que $a \in U$ est un extremum local de f sous la contrainte $g = 0$.
 - Justifier qu'il existe une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelée multiplicateur de Lagrange) telle que $\nabla_f(a) = \lambda \nabla_g(a)$.
 - En déduire les deux possibilités pour a , notées a_1 et a_2 .
 - On note G_{a_1} la fonction définie sur U par $G_{a_1}(x, y) = f(x, y) - f(a_1)$.
 - Montrer que $x^4 G_{a_1}(x, y) \geq 0$ pour $(x, y) \in V_g$. En déduire le signe de $G_{a_1}(x, y)$ pour $(x, y) \in V_g$.
 - Le point a_1 est-il un extremum global de f sur V_g ? Si oui est-ce un minimum, un maximum?
 - Faire l'étude en a_2 .

Exercice IV 5 pts

Partie A

On souhaite dans cette partie montrer la convexité de la fonction

$$b : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2,$$

c'est-à-dire montrer que

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \forall t \in [0, 1], b(t(x, y) + (1-t)(x', y')) \leq t.b(x, y) + (1-t).b(x', y').$$

On fixe deux points $(x, y), (x', y')$ de \mathbb{R}^2 , distincts.

1. Soit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto b(t(x, y) + (1-t)(x', y')) - [t.b(x, y) + (1-t).b(x', y')]$. Calculer une expression de $\varphi(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. Calculer φ' et φ'' .
3. Montrer que φ' est strictement croissante sur \mathbb{R} .
4. (a) Montrer qu'il existe un unique point $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\varphi'(t_0) = 0$.
(b) En déduire le tableau de signe de φ' et le tableau de variations de φ sur $[0, 1]$.
5. Conclure.

Partie B

Un boulanger souhaite optimiser sa production de viennoiseries. Pour simplifier on considère la situation suivante : on suppose que le boulanger ne produit que des pains au chocolat standard (en nombre x , en centaines) et des pains au chocolat maxi (en nombre y , en centaines également). Il souhaite choisir les nombres de pains x et y à produire pour optimiser sa recette $\frac{1}{3}x + y$ (un pain au chocolat standard est vendu 3 fois moins cher qu'un pain au chocolat maxi). On suppose que le seul ingrédient utilisé est de la farine, et qu'un pain standard nécessite 50g de farine, un pain maxi 100g. Il y a 10kg de farine disponible. Enfin une commande de 100 viennoiseries (pains standards ou maxis) a été passée et doit être assurée.

On traduit le problème à l'aide des fonctions suivantes : soient $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ données par $f_1(x, y) = y$, $f_2(x, y) = x + y$, $f_3(x, y) = -\frac{1}{2}x - y$.

On pose

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_1 &= (f_1)^{-1}([0, +\infty]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_1(x, y) \geq 0\} \\ \mathcal{P}_2 &= (f_2)^{-1}([1, +\infty]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_2(x, y) \geq 1\} \\ \mathcal{P}_3 &= (f_3)^{-1}([-1, +\infty]) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f_3(x, y) \geq -1\}\end{aligned}$$

et $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$. On note $A_1 = (0, 1)$, $A_2 = (2, 0)$, $A_3 = (1, 0)$.

L'objectif principal de cette partie est d'établir que tout point M de \mathcal{P} s'écrit comme barycentre des points A_1, A_2, A_3 , c'est à dire que

$$\boxed{\forall M \in \mathcal{P}, \text{ il existe } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_+ \text{ tels que } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \text{ et } M = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3.}$$

On pourra si besoin admettre ce résultat dans la partie III.

1. Expliquer en quoi les contraintes $\{f_2 \geq 1\}$ et $\{f_3 \geq -1\}$ modélisent certains impératifs du boulanger.

2. (a) Montrer que $\mathcal{P}_1 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, puis dessiner \mathcal{P}_1 dans un repère, en mettant les x en abscisses et les y en ordonnées.
- (b) Dans le même repère, dessiner $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$, puis \mathcal{P} .
3. (a) Soient $t \in [0, 1]$, $M = (x, y) \in \mathcal{P}_1$, $M' = (x', y') \in \mathcal{P}_1$.
Montrer que $f_1(tM + (1 - t)M') \geq 0$.
- (b) En déduire que \mathcal{P}_1 est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^2 , c'est à dire que

$$\forall t \in [0, 1], \forall M, M' \in \mathcal{P}_1, \text{ on a } tM + (1 - t)M' \in \mathcal{P}_1.$$

- (c) Que peut-on dire de $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$?
- (d) Montrer que \mathcal{P} est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^2 .
4. Dans cette question on souhaite montrer que tout point M de \mathcal{P} s'écrit comme barycentre des points A_1, A_2, A_3 , i.e. que pour tout point M de \mathcal{P} il existe des réels positifs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vérifiant $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ et $M = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$.
- (a) Vérifier que A_1 est bien un barycentre des points A_1, A_2, A_3 .
- (b) On suppose dans cette question que $M \in \mathcal{P} \setminus \{A_1\}$.
- Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_3(M + \lambda(1, 0)) = -1$, et que $\lambda \geq 0$.
Placer le point $M + \lambda(1, 0)$ sur le dessin et donner une interprétation en terme de barycentre avec les points A_1, A_2, A_3 .
 - Montrer qu'il existe un unique $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f_2(M - \mu(1, 0)) = 1$, et que $\mu \geq 0$.
 - Montrer qu'il existe $t \in [0, 1]$ tel que

$$M = t(M - \mu(1, 0)) + (1 - t)(M + \lambda(1, 0)).$$

Il est conseillé de faire un dessin !

- Montrer que si M' et M'' sont des points s'écrivant comme barycentres de A_1, A_2, A_3 , et si $s \in [0, 1]$ alors $sM' + (1 - s)M''$ s'écrit aussi comme barycentre de A_1, A_2, A_3 .
- Utiliser les questions précédentes pour conclure que M s'écrit comme barycentre de A_1, A_2, A_3 .

Partie C

Dans cette partie on souhaite optimiser la recette du boulanger, donc maximiser la fonction $r(x, y) = y + \frac{1}{3}x$ sur \mathcal{P} . Dans un deuxième temps on cherchera à optimiser le bénéfice donné par la fonction $b(x, y) = x^2 + y^2$ de la partie A.

1. (a) Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire. Montrer que pour tout $M \in \mathcal{P}$ on a :

$$g(M) \leq \max(g(A_1), g(A_2), g(A_3))$$

On utilisera le fait que M s'écrit comme barycentre des points A_1, A_2, A_3 .

- (b) Calculer le maximum de r sur \mathcal{P} , et dire en quel(s) point(s) de \mathcal{P} il est atteint.
2. (a) Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.
- Montrer que pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}_+$ tels que $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ on a
- $$h(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3) \leq \alpha_1 h(A_1) + \alpha_2 h(A_2) + \alpha_3 h(A_3).$$
- Établir que h admet un maximum sur \mathcal{P} et qu'il est atteint en A_1, A_2 ou A_3 .
 - Calculer le maximum de b sur \mathcal{P} , et dire en quel(s) point(s) de \mathcal{P} il est atteint.