Sujet 8

Question

Soit a un réel strictement positif. X désigne une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Z = aX$ et on admet que Z ainsi définie est une variable aléatoire. Déterminer la loi de Z.

Exercice

On note ln la fonction logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - \ln(x)$.

On pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis : si $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et si M est un réel vérifiant $|h'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $|h(a) - h(b)| \leqslant M|a - b|$.

1. Calculer les limites de f aux bornes de l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
2. Dériver f, en déduire son tableau de variations.
3. Que vaut $f(\mathbb{R}_+^*)$?
4. On fixe $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geqslant 0$.
   (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   (b) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On la note ℓ.
   (c) Montrer que la suite est convergente $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et calculer sa limite.
   (d) Montrer qu'il existe $c \in [0, 1[$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ on ait
   $$|u_n - \ell| \leqslant c^{n-1}|u_1 - \ell|.$$
5. On fixe $\rho \in]0, \frac{1}{2}[$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x - \rho f'(x)$.
   (a) Calculer $g'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (b) Soit $I = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$. Montrer que si $x \in I$, $|g(x) - g(1)| \leqslant |x - 1|$. En déduire que $g(I) \subset I$.
   (c) On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par $\begin{cases} v_0 \in I \\ v_{n+1} = g(v_n) \text{ pour } n \geqslant 0 \end{cases}$. Montrer que la suite converge vers ℓ.