Rappels sur l'intégration

1 calculer la primitive : $\displaystyle {}_a\int^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$ avec F primitive de f $\big(F'(x) = f(x)\big)$

[Primitive]

2 faire une intégration par partie :

$$\int_a^b u'(x)\,.\,v(x)\,dx = \Big[u(x)\,v(x)\Big]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx \qquad [IPP]$$

avec u et v dérivables de dérivées continues sur $[a;b]$ $\big(\mathcal{C}^1([a;b])\big)$

3 faire un changement de variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx \qquad [Chgt]$$

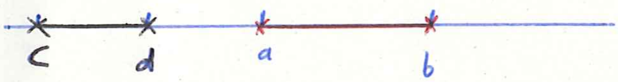
avec φ bijection sur $\varphi^{-1}([a;b])$, dérivable et de dérivée continue sur $\varphi^{-1}([a;b])$

Intégrer une fonction indicatrice

On peut prendre l'exemple de la loi Uniforme : $X \sim \mathcal{U}([a;b])$

$$I = \int_c^d \mathbb{1}_{[a;b]}(x)\,.\,\frac{1}{b-a}\,dx = \mathbb{P}(X \in [c;d])$$

1 Si $d < a$:



Soit $x \in [c;d]$, $\mathbb{1}_{[a;b]}(x)\,.\,\frac{1}{b-a} = 0$

donc : $I = 0$

2 si $d \in [a;b]$:

2-1 si $c < a$:

$$I = \int_a^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{d-a}{b-a}$$

2-2 si $c \geq a$:

$$I = \int_c^d \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{c-d}{b-a}$$

3 si $d > b$:

3-1 si $c < a$:

$$I = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = 1$$

3-2 si $c \in [a;b]$:

$$I = \int_c^b \frac{1}{b-a} = \frac{b-c}{b-a}$$

3-3 si $c > b$:

Soit $x \in [c;d]$, $\mathbb{1}_{[a;b]}(x) \cdot \frac{1}{b-a} = 0$

$I = 0$