# LES VARIABLES ALEATOIRES



**déf:** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 1 espace probabilisé
et $(E, \mathcal{E})$ avec 1 ensemble réel et $\mathcal{E}$, 1 tribu sur $E$
$X : \Omega \to E$ est 1 variable aléatoire de $\Omega$ sur $E$ si :

$$\forall A \in \mathcal{E}, \; X^{-1}(A) = \{w \in \Omega / X(w) \in A\} \in \mathcal{A}$$

## Les Variables aléatoires discrètes

### I) déf:

$X : \Omega \to E$ est 1 variable aléatoire discrète de $\Omega$ sur $E$ si ① $E$ est fini ou infini dénombrable,
et: ② $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

***ex:** Soit $X$ représentant le résultat du lancer d'1 dé.
on a : $X : \Omega \to \{1;2;3;4;5;6\} = E$ avec $E$ qui est fini

***remarque:** $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E)$ est 1 tribu sur $E$

### II) Loi (ou distribution) d'1 v.a.d:

***déf:** c'est l'application $\mathbb{P}_X : \mathcal{E} = \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0;1]$

$$A \longmapsto \mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A)) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\{w \in \Omega / X(w) \in A\}}_{\in \mathcal{A}}\Big)$$

***prop:** $\mathbb{P}_X$ est 1 mesure de probabilité sur $\mathcal{P}(E)$

**démo:** (i) $\mathbb{P}_X(\emptyset) = \mathbb{P}(X^{-1}(\emptyset)) = \mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) = \emptyset\}) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ car $\mathbb{P}$ est 1 probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

(ii) Si $(A_n)_{n \geq 0}$ sont des évènements 2 à 2 disjoints de $\mathcal{E}$

$$\mathbb{P}_X\Big(\bigcup_{n \geq 0} A_n\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geq 0} X^{-1}(A_n)\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n \geq 0} \{w \in \Omega / X(w) \in A_n\}\Big)$$

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(\{w \in \Omega / X(w) \in A_n\})$$ car les $(A_n)_{n \geq 0}$ sont 2 à 2 disjoints

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(X^{-1}(A_n))$$ car $\mathbb{P}$ est 1 probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$

$$= \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_X(A_n)$$

***remarque:** Etant donné que $E$ est fini ou infini dénombrable, la loi de $X$ est donnée à partir de chaque élément de $E$:
soit $k \in E$, $\mathbb{P}(X = k) = \ldots$

***ex:** $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \mathbb{P}(X=3) = \mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=5) = \mathbb{P}(X=6) = \dfrac{1}{6}$
défini la loi de $X$ à partir de tous les éléments de $E = [\![1;6]\!]$

## III) fonction de répartition d'1 v.a.d :

**déf** : c'est l'application $F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$

$$x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$$

**rq** : ① $F_X$ est croissante

② $F_X$ est continue à droite

③ $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

④ soit $y > x$, $F_X(y) - F_X(x) = \mathbb{P}_X(]x;y]) = \mathbb{P}(X^{-1}(]x;y]))$

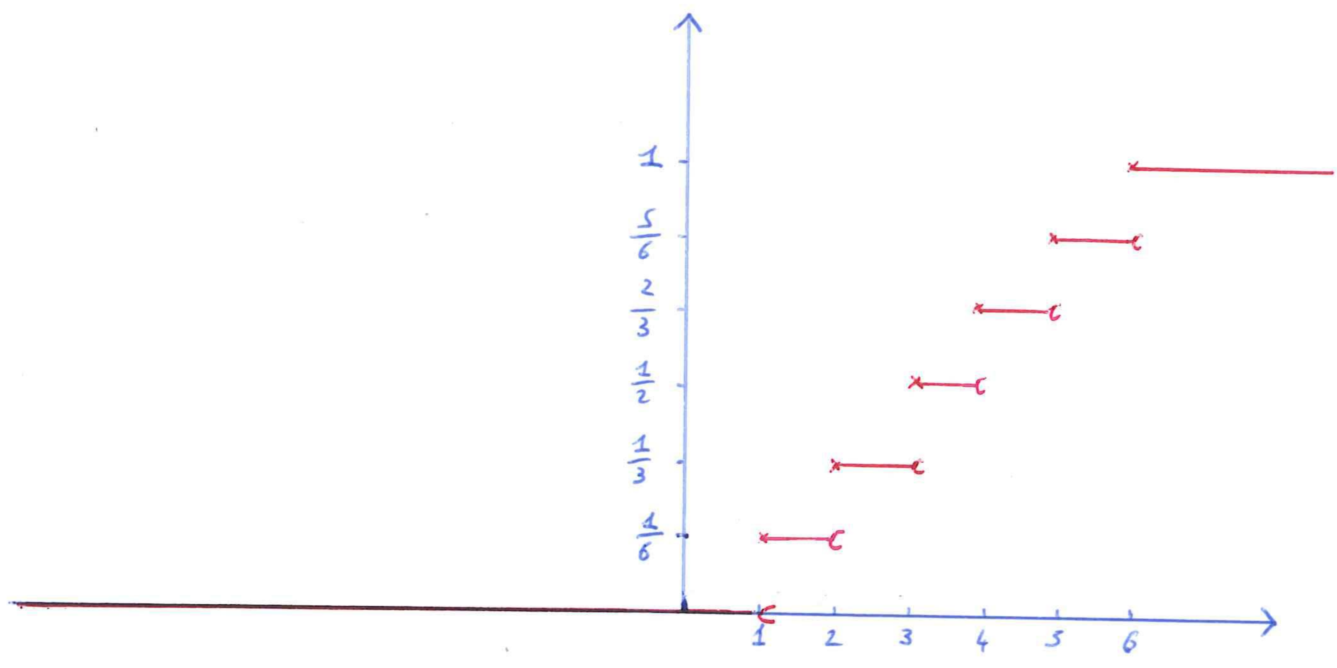
**démo** : ① soit $x$ et $y$ tels que : $y > x$, on a : $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$

donc : $\mathbb{P}(\{X \leq x\}) \leq \mathbb{P}(\{X \leq y\})$

$\Rightarrow F_X(x) \leq F(y)$

**ex** : $F_X : \mathbb{R} \to [0;1]$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ \frac{1}{6} \text{ si } x \in [1;2[ \\ \frac{1}{3} \text{ si } x \in [2;3[ \\ \frac{1}{2} \text{ si } x \in [3;4[ \\ \frac{2}{3} \text{ si } x \in [4;5[ \\ \frac{5}{6} \text{ si } x \in [5;6[ \\ 1 \text{ si } x \geq 6 \end{cases}$$



## IV) espérance d'1 v.a.d :

*** déf :** $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in E} x \cdot \mathbb{P}(X=x)$

*** interprétation :** C'est la valeur qu'on s'attend à trouver si on répète 1 nombre important de fois l'expérience et que l'on calcule la moyenne des résultats.

*** prop :** l'espérance est 1 opération linéaire : Soient X et Y, 2 v.a.d et $a \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[aX+Y] = a.\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

**démo :** $X : \Omega \to E$ avec E et F finis ou infinis dénombrables
$Y : \Omega \to F$

$$\mathbb{E}[a.X+Y] = \sum_{(x,y) \in E \times F} (ax+y)\, \mathbb{P}(aX+Y = ax+y)$$

$$= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} (ax+y)\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} \left[ax\, \mathbb{P}(X=x, Y=y) + y\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)\right]$$

$$= \sum_{x \in E} \sum_{y \in F} ax\, \mathbb{P}(X=x, Y=y) + \sum_{y \in F} \sum_{x \in E} y\, \mathbb{P}(X=x, Y=y)$$

$$= \sum_{x \in E} ax\, \mathbb{P}(X=x) + \sum_{y \in F} y\, \mathbb{P}(Y=y) = a.\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

*** ex :** $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in [\![1;6]\!]} x\, \mathbb{P}[X=x] = \frac{1}{6}\sum_{x \in [\![1;6]\!]} x = \frac{1}{6} \cdot \frac{6.7}{2} = \frac{7}{2} = 3,5$

## V) variance d'1 v.a.d. :

*** déf :** $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$

*** prop :** (1) formule de König : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ À UTILISER ⚠

(2) $\mathbb{V}[aX] = a^2\, \mathbb{V}[X]$ pour $a \in \mathbb{R}$

**démo :** (1) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

(2) $\mathbb{V}[aX] = \mathbb{E}[(aX)^2] - \mathbb{E}[aX]^2$

$$= \mathbb{E}[a^2X^2] - (a\,\mathbb{E}[X])^2 = a^2\,\mathbb{E}[X^2] - a^2\,\mathbb{E}[X]^2 = a^2\,\mathbb{V}[X]$$

*** ex :** $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x \in [\![1;6]\!]} x^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot 91 = 15,67$ => V[X] = 15,67 + (3,5)² = 3,42

*** autre définition : l'écart-type :** $\sigma_X = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$ ; Dans notre exemple : $\sigma_X = 1,85$

*interprétation : si $\sigma_X < \sigma_Y$

Les valeurs prise par X sont moins dispersées (on peut dire aussi plus homogènes) que celles prise par Y.

## VI) fonction d'1 v.a.d :

*prop : Soit X 1 v.a.d. de $\Omega$ sur E et f, 1 application définie sur E à valeur dans F, 2 ensembles finis ou infinis dénombrables alors $Y = f(X)$ est 1 v.a.d. de $\Omega$ sur F

démo : Soit $A \in \mathcal{P}(F)$, $Y^{-1}(A) = \{w \in \Omega \,/\, Y(w) \in A\} = \{w \in \Omega \,/\, f(X(w)) \in A\}$

Soit $B \in \mathcal{P}(E)$ tel que : $B = \{y \in E \,/\, f(y) \in A\}$

on a donc : $Y^{-1}(A) = \{w \in \Omega \,/\, X(w) \in B\} = X^{-1}(B)$

or : $B \in \mathcal{P}(E)$ et X est mesurable de $\Omega$ sur E

donc : $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$

donc : Y est mesurable de $\Omega$ sur F

---

Cx + problème 3 + problème 2

## VIII) covariance de 2 v.a.d :

*** déf :** $cov(X;Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

*** pp :** ① $cov(X;Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ À UTILISER ⚠

② $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,cov(X;Y)$

**dém :** ① $cov(X;Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY - X\mathbb{E}[Y] - Y\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y]] - \mathbb{E}[Y\mathbb{E}[X]] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

② $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{E}[(X+Y-\mathbb{E}[X+Y])^2] = \mathbb{E}[(X+Y)^2 - 2(X+Y)\mathbb{E}[X+Y] + \mathbb{E}[X+Y]^2]$

$= \mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2 - 2X(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]) - 2Y(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]) + (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])^2$

$= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2] - 2\mathbb{E}[X]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] - 2\mathbb{E}[Y]\mathbb{E}[X] - 2\mathbb{E}[Y]^2$
$+ \mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2$

$= \mathbb{E}[X^2] + \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 - 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + 2\mathbb{E}[XY]$

$= \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y] + 2\,cov(X;Y)$

## IX) coefficient de corrélation de 2 v.a.d :

*** déf :** $corr(X;Y) = \dfrac{cov(X;Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$

## X) indépendance de 2 v.a.d :

*** déf :** Soient X et Y, 2 v.a.d à valeurs respectivement dans E et F

Elles sont indépendantes ssi : $\forall x \in E, \forall y \in F, \ \mathbb{P}[X=x, Y=y] = \mathbb{P}[X=x].\mathbb{P}[Y=y]$

*** interprétation :** le résultat de l'expérience aléatoire de l'une n'influence pas le résultat de l'expérience aléatoire de l'autre.

*** pp :** ① si X et Y sont indépendantes alors : $cov(X;Y) = 0$

② si X et Y sont indépendantes alors : $\mathbb{V}[X+Y] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{V}[Y]$

**dém :** ① $\mathbb{E}[XY] = \sum_{(x,y)\in E\times F} xy\,\mathbb{P}[X=x, Y=y] = \sum_{x\in E}\sum_{y\in F} xy\,\mathbb{P}[X=x]\mathbb{P}[Y=y]$

$= \sum_{x\in E} x\,\mathbb{P}[X=x].\sum_{y\in F} y\,\mathbb{P}[Y=y] = \mathbb{E}[X].\mathbb{E}[Y]$