

Les v.a.d. Usuelles

I) Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \{0; 1\}$

$$\text{avec } P(X=1) = p \text{ et } P(X=0) = 1-p$$

* interprétation: C'est la v.a.d. associée au résultat d'une épreuve aléatoire qui admet que 2 issues (échec ou succès)

* ex: le tirage à pile ou face. Dans ce cas, $p = \frac{1}{2}$

II) Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$:

* déf: $X: \Omega \rightarrow \llbracket 0; n \rrbracket$

$$\text{avec: } \forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

* interprétation: On répète n fois une épreuve de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante.

alors X est la v.a.d. associée au nombre de succès obtenus

- Si les $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ sont n v.a.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre p

et si les $(X_i)_{i=1, \dots, n}$ sont mutuellement indépendantes

$$\left[\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n, P(X_1=x_1, X_2=x_2, \dots, X_n=x_n) = P(X_1=x_1) \cdot P(X_2=x_2) \cdots P(X_n=x_n) \right]$$

$$\text{alors } X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n; p)$$

* ex: Je jette à pile ou face et je compte le nombre de "pile" obtenus après 5 lancers. Soit X , la v.a.d. associée

$$X: \Omega \rightarrow \llbracket 0; 5 \rrbracket$$

\hookrightarrow je n'ai fait que des faces

Je pris $X_i = 0$ si j'ai fait face et 1 si j'ai fait pile sur i^{e} lancer

$$\text{donc: } X_i \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$$

les 5 lancers étant indépendants, les $(X_i)_{i=1, \dots, 5}$ sont mutuellement indépendantes

(2)

$$X = \sum_{i=1}^{\infty} X_i \sim \mathcal{B}(5, \frac{1}{2})$$

pour $k=3$, $\mathbb{P}(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$

↓ ↓ ↓
 nombre de façons je réussis j'échoue
 de réussir 3 parmi 5 3 fois 2 fois

III) Loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, $n \in \mathbb{N}^*$:

* déf: $X: \mathbb{N} \rightarrow [\![1; n]\!]$

avec: $\forall k \in [\![1; n]\!], \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{n}$

* interprétation: les résultats $(1, 2, \dots, n)$ sont équivalables

* ex: le résultat du lancer d'un dé suit la loi uniforme sur $[\![1; 6]\!]$

IV) Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

* déf: $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

avec $\forall x \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X=x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$

* interprétation: λ est le nombre d'événements se produisant dans 1 intervalle de temps

V) Loi géométrique de paramètre $p \in [0; 1]$:

* déf: $X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$

avec $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p \rightarrow$ je réussis à la $k^{\text{ème}}$ tentative
 ↓
 j'échoue $(k-1)$ fois

* interprétation: On répète plusieurs fois de manière indépendante 1 épreuve de Bernoulli de paramètre p jusqu'à obtenir 1 succès et X représente le nombre de tentatives nécessaires

* ex: nombre de lancers de dé nécessaires pour faire un "6"

$$\mathbb{P}(X=k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$$