Préparation attaché interne - Probabilités et Statistique
1 - Espace probabilisé

Samuel GIVOIS

2018/2019

L'ambition de ces notes de cours est de couvrir, de façon concise, l'intégralité du programme de probabilités et statistique du concours. Elles en suivent donc très largement la trame. En préambule de chaque chapitre, la partie du programme couverte sera précisée. Pour résussir les épreuves écrite, puis orale, du concours portant sur les probabilités et statistiques, une bonne maîtrise des notions présentées ici est indispensable. Cependant, ces connaissances sont évidemment insuffisantes, et il vous revient de les compléter par un investissement pratique, en vous confrontant à des exercices et problèmes, par exemple issus des annales des années précédentes.

Partie du programme couverte dans ce chapitre :

5. Éléments de théorie de probabilités

Espaces probabilisés :

- expérience aléatoire. Tribu d'événements. Système complet d'événements ;
- définition mathématique de la probabilité ;
- probabilités conditionnelles. Notation PB (A) ou P (A/B). Formule des probabilités totales. Formule de Bayes ;
- indépendance en probabilité d'événements.

1 Expérience aléatoire

Intuitivement, on peut dire d'une expérience qu'elle est aléatoire, lorsque sous des conditions identiques, la répétition de cette expérience conduit à des résultats différents.

Parler de « conditions identiques » reflète en réalité la connaissance partielle de toutes les conditions possibles. Théoriquement, lorsqu'on lance un dé, il est impossible de reproduire avec exactitude le même geste, ou d'avoir à nouveau les mêmes conditions de température et d'humidité. Nous sommes donc dans le cadre d'une modélisation, d'une représentation du réel.

Définition 1.1. *On appelle* ***univers*** *et on note Ω l'ensemble des résultats pouvant être obtenus à l'issue d'une expérience aléatoire.*

Exemple 1.1.
1. Lors d'un lancer d'une pièce à pile ou face, on a $\Omega = \{Pile, Face\} = \{P, F\}$.
2. Lors d'un lancé de dé à 6 faces, on a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 1.2. *On appelle* ***évènement****, ou* ***partie mesurable****, un ensemble de résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire. Si E est un évènement, on a $E \in \mathcal{P}(\Omega)$ (ensemble des parties de Ω) et $E \subset \Omega$.*

Exemple 1.2.
1. Lors d'un lancer d'une pièce à pile ou face, $E = \{P\}$ est l'évènement « obtenir pile ».
2. Lors d'un lancé de dé à 6 faces, $E = \{2, 4, 6\}$ est l'évènement « obtenir un chiffre pair ».

Définition 1.3. *On appelle* ***tribu*** *ou* ***σ-algèbre*** *sur Ω un ensemble non vide de parties de Ω, stable par passage au complémentaire et par union dénombrable. Formellement, une tribu $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifie :*

1. $\mathcal{A} \neq \varnothing$

2. $\forall E \in \mathcal{A}, \bar{E} \in \mathcal{A}$

3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n \in \mathcal{A}$ *alors* $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \in \mathcal{A}$

Exemple 1.3. 1. Lors d'un lancer d'une pièce à pile ou face, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$ est une tribu sur $\Omega = \{P, F\}$.

2. Lors d'un lancé de dé à 6 faces, $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$ est une tribu su $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition 1.4. *Un couple* $(\Omega, \mathcal{A})$ *constitué d'un ensemble* Ω *et d'une tribu* $\mathcal{A}$ *sur* Ω *est appelé* ***espace probabilisable*** *ou* ***mesurable***.

Définition 1.5. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable et soit* $E = (E_1, ...E_n) \subset \mathcal{A}$ *un ensemble d'évènements. On dit que* E *forme un* ***système complet*** *d'évènements si :*

1. $\forall i$, $E_i \neq \varnothing$

2. $\forall i, j$ *tels que* $i \neq j$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ *(deux à deux disjoints)*

3. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i = \Omega$

Autrement dit, E *forme une partition de* Ω.

2 Probabilité

Définition 2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace probabilisable. On appelle* ***mesure de probabilité*** *(ou* ***probabilité****) une application* $\mathbb{P} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *vérifiant les trois axiomes de Kolmogorov :*

1. $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(E) \in [0, 1]$

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

3. $\forall E, F \in \mathcal{A}$ *tels que* $E \cap F = \varnothing$, *on a* $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$

Exemple 2.1. Si Ω est fini, de cardinal n, on peut définir la mesure équiprobable $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ par $\mathbb{P}(x) = \frac{1}{n}$, pour tout $x \in \Omega$. C'est une probabilité.

Définition 2.2. *Un triplet* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *constitué d'un ensemble* Ω, *d'une tribu* $\mathcal{A}$ *sur* Ω *et d'une probabilité* $\mathbb{P}$ *sur* $\mathcal{A}$ *est appelé* ***espace probabilisé*** *ou* ***espace de probabilité***.

Théorème 2.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. On a :*

1. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

2. $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(\bar{E}) = 1$

3. $\forall (E_i)_{i\in\{1,...,n\}} \in \mathcal{A}^n$ *famille d'évènements deux à deux disjoints,* $\mathbb{P}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{P}(E_i)$

4. $\forall E, F \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F) \leq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F)$

5. $\forall E, F \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(F \backslash E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$

6. $\forall E, F \in \mathcal{A}$ *tels que* $E \subset F$, $\mathbb{P}(E) \leq \mathbb{P}(B)$

7. *si* $F = (F_i) \subset \mathcal{A}$ *est un système complet d'évènements,* $\forall E \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(E) = \sum\limits_{i} \mathbb{P}(E \cap F_i)$

3 Probabilité conditionnelle

Définition 3.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $F \in \mathcal{A}$ *un évènement réalisable (*$\mathbb{P}(F) > 0$*). Pour tout évènement* $E \in \mathcal{A}$, *on appelle probabilité conditionnelle de* E *sachant* F *et on note :*

$$\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}_F(E) = \frac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$$

Théorème 3.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $F \in \mathcal{A}$ *un évènement réalisable. La fonction définie par* $\mathbb{P}(.|F) : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une mesure de probabilité.*

Théorème 3.2. *(Formule des probabilités totales)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et* $F = (F_i) \subset \mathcal{A}$ *un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement* $E \in \mathcal{A}$*, on a :*

$$\mathbb{P}(E) = \sum_i \mathbb{P}(E|F_i) \times \mathbb{P}(F_i)$$

Théorème 3.3. *(Première formulation du théorème de Bayes)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $E, F \in \mathcal{A}$ *deux évènements réalisables. On a :*

$$\mathbb{P}(E|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(F)}$$

Théorème 3.4. *(Seconde formulation du théorème de Bayes)*
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $F \in \mathcal{A}$ *un évènement réalisable et soit* $E = (E_i) \subset \mathcal{A}$ *un système complet d'évènements. On a :*

$$\forall i, \quad \mathbb{P}(E_i|F) = \frac{\mathbb{P}(F|E_i)\mathbb{P}(E_i)}{\sum\limits_j \mathbb{P}(F|E_j)\mathbb{P}(E_j)}$$

4 Indépendance en probabilité

Définition 4.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* $E, F \in \mathcal{A}$ *deux évènements. On dit que* E *et* F *sont indépendants si :*

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$$

Théorème 4.1. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé, soit* $E, F \in \mathcal{A}$ *deux évènements réalisables. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. E *et* F *sont indépendants*
2. $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}(E)$
3. $\mathbb{P}(F|E) = \mathbb{P}(F)$

Définition 4.2. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *un espace probabilisé et soit* $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$*. On dit que ces* n *évènements sont indépendants si :*

$$\forall I \subset \{1, ..., n\}, \quad \mathbb{P}(\underset{i \in I}{\cap} E_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(E_i)$$

Remarque 4.1. Si les évènements $E_1, ..., E_n$ sont indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux.

5 Analyse combinatoire

L'objet de l'analyse combinatoire est l'étude des configurations possibles d'ensembles finis d'objet et de leur dénombrement. Elles sont utiles au calcul de probabilité lorsque Ω est dénombrable fini.

Définition 5.1. *Soit* A *un ensemble fini. On appelle* ***permutation*** *sur* A *une application bijective de* A *dans lui-même.*

Théorème 5.1. *Soit* A *un ensemble fini, de cardinal* n*. Il existe* $n!$ *permutations sur* A*.*

Définition 5.2. *Soit* A *un ensemble fini, de cardinal* n*. On appelle arrangement de* A *un sous-ensemble ordonné de* A*. Le nombre d'arrangements possibles de* k *éléments de* A *est égal à :*

$$\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Définition 5.3. *Soit* A *un ensemble fini, de cardinal* n*. On appelle combinaison de* A *un sous-ensemble non ordonné de* A*. Le nombre de combinaisons possibles de* k *éléments de* A *est égal à :*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

6 Exercices

6.1 Evènements

Exercice 6.1. Soit Ω l'ensemble des couples mariés d'une ville donnée. On considère les évènements :

— A « l'homme a plus de 40 ans »
— B « la femme est plus jeune que l'homme »
— C « la femme a plus de 40 ans »

1. Interpréter en fonction de A, B et C l'évènement « le mari a plus de quarante ans, mais non sa femme ».
2. Décrire en langage ordinaire l'évènement $(A \cap B) \cup \bar{C}$.
3. Vérifier que $A \cap \bar{C} \subset B$.
4. Ecrire un évènement impossible à l'aide de A, B et C.

Exercice 6.2. Soient A, B et C trois évènements. Exprimer en fonction de A, B et C et des opérations ensemblistes les évènements suivants :

1. A seul se produit
2. A et B se produisent mais pas C
3. les trois évènements se produisent
4. l'un au moins des évènements se produit
5. deux évènements au moins se produisent
6. un évènement au plus se produit
7. aucun des trois évènements ne se produit
8. deux évènements exactement se produisent
9. pas plus de deux évènements ne se produisent

Exercice 6.3. (Indicatrice d'un évènement) Soit A un évènement d'un univers Ω. L'indicatrice de l'évènement A notée $\mathbf{1}_A$, est la fonction définie sur Ω valant 1 pour une issue ω appartenant à A et 0 sinon. Vérifier les formules suivantes :

1. $\mathbf{1}_\Omega = 1$ et $\mathbf{1}_\varnothing = 0$
2. $\mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$ si et seulement si $A \subset B$
3. $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$
4. $\mathbf{1}_{\bar{A}} = 1 - \mathbf{1}_A$ et $\mathbf{1}_{A\setminus B} = \mathbf{1}_A \times (1 - \mathbf{1}_B)$

6.2 Probabilité

Exercice 6.4. On procède à deux jets consécutifs d'une pièce de monnaie *parfaite*.

1. Décrire Ω l'ensemble des issues possibles de cette expérience (prendre F pour face et P pour pile).
2. On prend la probabilité $\mathbb{P}$ uniforme sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Soient les évènements :
   — A « amener pile au premier jet »
   — B « amener face au second jet »

   Décrire A et B comme éléments de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$
3. Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$

Exercice 6.5. On procède à deux jets consécutifs d'un dé *parfait*.

1. Construire un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ décrivant cette expérience.
2. Soient les évènements :
   — A « la somme des deux jets est impaire »
   — B « 1 est tiré au moins une fois »

Décrire A et B comme éléments de $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

3. Interpréter les évènements $A \cap B$, $A \cup B$ et $A \cap \bar{B}$
4. Calculer leurs probabilités.

Exercice 6.6. A et B sont deux évènements tels que $\mathbb{P}(A) = 0,6$, $\mathbb{P}(B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$.

1. Quelle est la probabilité que A ou B se réalisent ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement un des deux évènements se produise ?
3. Quelle est la probabilité qu'au plus un des deux évènements se produise ?
4. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne se réalisent ?

Exercice 6.7. (Inégalité de Boole) Soit $(A_n)_{n=1,\ldots,N}$ une suite d'évènements avec $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{N}\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n)$$

6.3 Probabilité conditionnelle

Exercice 6.8.

1. Un groupe de 10 personnes est composé de 4 hommes et 6 femmes : on choisit deux personnes. Quelle est la probabilité qu'elles soient de même sexe ?
2. Une urne contient 5 boules dont 3 rouges et 2 noires : on tire deux boules avec remise. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de couleurs différentes ?
3. Dans une loterie on tire sans remise 5 nombres parmi les nombres 1,..., 20. On ne tient pas compte de l'ordre et il y a 5 bons numéros parmi les 20. Quelle est la probabilité d'obtenir 2 bons numéros exactement ?

Exercice 6.9. On tire successivement et sans remise 4 lettres du mot « ATTACHANT ». Quelle est la probabilité d'obtenir « CHAT » ?

Exercice 6.10. Dans une population on sait que la probabilité de naissance d'un garçon est de 0.52, et par ailleurs que 2 % des filles et 1 % des garçons présentent une luxation congénitale de la hanche.

1. On note F l'évènement « naissance d'une fille » et L l'évènement « avoir une luxation de la hanche ». Dresser le tableau des probabilités des intersections entre $F, \bar{F}$ et $F, \bar{F}$. Les évènements F et L sont-ils indépendants ?
2. Calculer la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation soit une fille.

Exercice 6.11.

1. Une urne I contient 2 boules rouges et 4 boules noires, une urne II contient 4 boules rouges et 2 boules noires. On tire aléatoirement (équiprobabilité) une boule dans l'urne I ou II et on sort une boule rouge. Quelle est la probabilité que la boule sorte de l'urne II ?
2. Même question si la probabilité de tirer dans l'urne II est α et si l'urne I contient une proportion de p_1 boules rouges, l'urne II une proportion de p_2 boules rouges.

6.4 Indépendance

Exercice 6.12. Deux évènements A et B disjoints ($A \cap B = \varnothing$) et de probabilités non nulles peuvent-ils être indépendants ?

Exercice 6.13.

1. On lance une pièce de monnaie 5 fois de suite indépendamment et on note dans l'ordre l'apparition de PILE ou FACE : $\mathbb{P}(PILE) = \frac{2}{3}$. Quelle est la probabilité qu'un lancer comporte deux PILE exactement ?
2. Une salle contient n personnes dont les dates de naissance sont indépendantes. Quelle est la probabilité pour qu'une personne (au moins) soit née le même jour que moi ?

Exercice 6.14. On lance un dé équiprobable à 6 faces un nombre indéterminé de fois indépendamment. On note E_n l'évènement « le premier 5 est au rang n » et A l'évènement le « le 5 apparaît avant le 2 ». Calculer :

1. $\mathbb{P}(E_n)$
2. $\mathbb{P}(A \cap E_n)$
3. $\mathbb{P}(A)$

Exercice 6.15. On considère deux évènements A et B. On résume par le tableau ci-dessous les probabilités des intersections entre A, $\bar{A}$, B et $\bar{B}$.

	B	$\bar{B}$
A	p	q
$\bar{A}$	r	s

1. Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $ps = qr$.
2. Montrer que si A et B sont indépendants, alors il en va de même pour A et $\bar{B}$, $\bar{A}$ et B, $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Exercice 6.16. On considère le jeu suivant : le joueur lance d'abord un dé non truqué. Il tire ensuite un jeton dans une urne choisie en fonction du résultat du dé. L'urne A est choisie quand le dé donne 1, 2 ou 3, l'urne B quand on obtient 4 ou 5 et l'urne C quand on obtient 6. Les urnes contiennent les jetons suivants :

— urne A : deux jetons rouges, trois jetons bleus ;

— urne B : deux jetons bleus, quatre jetons verts ;

— urne C : un jeton vert, un jeton rouge.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un jeton rouge par ce procédé ?
2. On obtient un jeton vert. Quelle est la probabilité que ce jeton soit issu de l'urne B ?
3. On obtient un jeton bleu. Quelle est la probabilité que le lancer du dé ait donné 3 ?
4. Quelle est la probabilité de ne pas obtenir un jeton vert, sachant que le lancer du dé a donné 3 ou 6 ?
5. Est-ce que l'évènement « choisir dans l'urne C » et l'évènement « obtenir un jeton rouge » sont indépendants ? Justifiez votre réponse.