

Exercices sur les suites

Ex 1:

$$1) \forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq \sin(n) \leq 1$$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{or: } \frac{-1}{n} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ donc d'après le théorème des gendarmes: } \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$2) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

$$\text{or: } \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n} \text{ donc: } e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e$$

$$\text{d'où: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad n \rightarrow +\infty$$

$$3) \forall n \in \mathbb{N}, \frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\dots3 \cdot 2 \cdot 1}{n^n} \leq \frac{n^{n-2} \cdot 2}{n^n}$$

$$\text{donc: } 0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$$

$$\text{or: } \frac{2}{n^2} \rightarrow 0 \text{ donc: } \frac{n!}{n^n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$4) \forall n \in \mathbb{N}, n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \ln(n)}$$

$$\text{or: } \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \text{ donc: } e^{\frac{2 \ln n}{n}} \rightarrow 1 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$5) \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$$\text{donc: } \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \rightarrow 0 \quad n \rightarrow +\infty$$

$$6) \forall n \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{or: } \frac{-1}{n} \rightarrow 0 \text{ et } \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ donc: } \frac{(-1)^n}{n} \rightarrow 0 \text{ d'après le théorème des gendarmes} \quad n \rightarrow +\infty$$

ex 3:

① On pose: $U_n = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^n A_k\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^{n+2} A_k\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=2}^n A_k\right)$ car: $\bigcup_{k=2}^{n+2} A_k \supset \bigcup_{k=2}^n A_k$
donc: $U_{n+2} \geq U_n$

$\Rightarrow (U_n)_n$ est une suite croissante

or: $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 1$

donc: $(U_n)_n$ est croissante et majorée $\xrightarrow{\text{par 1}}$ alors elle converge

② On pose: $v_n = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n+2} A_k\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right)$ car: $\bigcap_{k=1}^{n+2} A_k \subset \bigcap_{k=1}^n A_k$

donc: $v_{n+2} \leq v_n$

$\Rightarrow (v_n)_n$ est une suite décroissante

or: $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq 0$

donc: $(v_n)_n$ est décroissante et minorée $\xrightarrow{\text{par 0}}$ donc; elle converge.

ex 4:

1) Si $(U_n)_n$ est bornée

alors: $\forall n \in \mathbb{N}, m \leq U_n \leq M$

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)m \leq U_0 + U_1 + \dots + U_n \leq (n+2)M$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\sum_{k=0}^n U_k}{n+2} \leq M$$

$\Rightarrow m \leq v_n \leq M$

donc: $(v_n)_n$ est bornée.

2)

* Si $(U_n)_n$ est bornée alors elle est majorée.

Etant donné que $(U_n)_n$ est bornée et majorée alors elle converge.

(3)

* dans ECN,

$$\begin{aligned}
 v_{n+2} - v_n &= \frac{u_0 + \dots + u_{n+2}}{n+2} - \frac{u_0 + \dots + u_n}{n+1} = \frac{(n+2)(u_0 + \dots + u_{n+2}) - (n+1)(u_0 + \dots + u_n)}{(n+2)(n+1)} \\
 &= \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[(n+2)u_{n+2} - (u_0 + \dots + u_n) \right] = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \left[(u_{n+2} - u_0) + (u_{n+2} - u_1) + \dots + (u_{n+2} - u_n) \right] \\
 &\geq 0 \quad \geq 0 \quad \geq 0 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

car $(u_n)_n$ croissante

donc $(v_n)_n$ est croissante* Etant donné que $(u_n)_n$ est donnée alors $(v_n)_n$ est bornée donc majorée* $(v_n)_n$ est croissante et majorée donc elle converge.