

Planejamento e Análise de Experimentos (EEE933)

Estudo de Caso 2

Pedro Vinícius, Samara Silva e Savio Vieira

24 de Agosto de 2020

Introdução

O Índice de Massa Corporal (IMC) é uma medida de gordura corporal baseada na relação entre peso (em kg) e altura (em m) de um indivíduo e é comumente utilizado como uma ferramenta de triagem para indicar se uma pessoa está com um peso saudável para sua altura. Este índice é calculado conforme a Equação 1:

$$IMC = \frac{peso}{(altura)^2} \quad (1)$$

em kg/m^2 . Cada faixa de IMC permite classificar o indivíduo em uma das seguintes categorias [2]:

- Baixo peso: $< 18,5$
- Peso normal: $18,5 - 25$
- Sobrepeso: $25 - 30$
- Obesidade: $30 - 35$
- Obesidade mórbida: > 40

Neste estudo de caso deseja-se comparar o IMC médio dos alunos de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) de dois semestres distintos: 2016/2 e 2017/2. Para tal fim, foram disponibilizadas duas amostras, contendo sexo, altura e peso de alguns alunos [3]. Assim, duas análises estatísticas independentes são propostas: (i) uma sobre o IMC médio dos alunos do sexo masculino e (ii) uma sobre o IMC médio dos alunos do sexo feminino. Para ambos os casos, a condução dos experimentos foram similares, no entanto, alguns testes estatísticos tiveram que ser adaptados de acordo com as propriedades das distribuições amostrais em investigação, que foram validadas previamente.

Planejamento dos Experimentos

As hipóteses estatísticas foram definidas com o intuito de responder às questões propostas abaixo:

- Há evidências de que o IMC médio dos alunos do PPGEE/UFMG de 2016/2 é diferente do IMC médio dos alunos do PPGEE/UFMG de 2017/2 no que se refere ao sexo masculino?
- E quanto ao sexo feminino?

Em concordância com a proposta de comparação do IMC médio entre os alunos de semestres distintos, as hipóteses de teste podem ser formuladas sobre o parâmetro média:

$$\begin{cases} H_0 : \mu_{2016} = \mu_{2017} \\ H_1 : \mu_{2016} \neq \mu_{2017} \end{cases}$$

onde a hipótese nula H_0 implica na igualdade entre os IMCs médios dos alunos de 2016/2 e 2017/2 e a hipótese alternativa bilateral H_1 na diferença dos IMCs médios e, portanto, em uma potencial diferença dos estilos de vida dos alunos.

Os parâmetros experimentais para realização dos testes são:

- A probabilidade admissível de rejeição da hipótese nula quando ela é verdadeira é de apenas 5%, isto é, o nível de significância do teste é $\alpha = 0,05$;
- A potência do teste é de $\pi = 1 - \beta = 0,8$. Em outras palavras, deseja-se uma probabilidade de falha ao rejeitar a hipótese nula quando ela é falsa de 20%.
- O tamanho de efeito de mínima relevância prática será definido posteriormente na Subseção Tamanho de Efeito.

Pré-Processamento dos Dados

Conforme mencionado anteriormente, as bases de dados `imc_20162.csv` e `CS01_20172.csv` foram disponibilizadas [3]. A amostra relativa ao semestre de 2016/2 dispõe dos atributos número de identificação do aluno, visto que a coleta manteve o sigilo dos estudantes, curso (graduação ou pós-graduação), gênero, peso (em *kg*) e altura (em *m*). A princípio, foi necessário extrair apenas as informações dos alunos cujo vínculo com a universidade era de discente da pós-graduação e, posteriormente, realizar a fragmentação por gênero, formando duas amostras independentes (*M2016* e *F2016*). A amostra relativa ao semestre de 2017/2, por sua vez, compreendia os atributos peso (em *kg*), altura (em *m*), sexo e idade. Além disso, as observações eram somente de alunos da pós-graduação e, portanto, exigiu apenas a separação por gênero em duas outras amostras (*M2017* e *F2017*).

A partir dos pesos e alturas disponíveis, os índices de massa corporal foram calculados para cada aluno, conforme a Equação 1. Por fim, as observações de interesse foram compiladas em uma única estrutura de dados. Os 8 primeiros IMCs de cada amostra podem ser visualizados abaixo, onde os valores “NA” presentes nas amostras femininas (*F2016* e *F2017*) indicam que ambas possuem tamanho amostral $N < 8$, isto é, 7 e 4 observações, respectivamente. As amostras masculinas (*M2016* e *M2017*), no entanto, apresentam 21 observações cada uma.

##	M2016	M2017	F2016	F2017
## 1	24.96801	29.73704	18.45917	17.36111
## 2	23.23346	26.95568	20.19509	20.83253
## 3	28.07504	29.06574	19.72318	17.84652
## 4	37.55102	30.42185	22.48133	17.74623
## 5	22.40879	20.76125	22.58955	NA
## 6	24.28098	24.38272	25.18079	NA
## 7	27.14304	23.74764	18.96193	NA
## 8	24.41928	22.49135	NA	NA

Análise Exploratória de Dados

Algumas primeiras propriedades das quatro amostras, como média, moda, mediana, valores extremos, variância e desvio podem ser obtidas de imediato.

##	Variância	Média	Moda	Mediana	Mínimo	Máximo	Desvio
## M2016	18.691408	24.93595	24.96801	24.35542	17.57707	37.55102	4.323356
## M2017	11.800968	24.28551	29.73704	23.74764	17.72212	30.42185	3.435254
## F2016	5.839630	21.08443	18.45917	20.19509	18.45917	25.18079	2.416533
## F2017	2.573854	18.44660	17.36111	17.79637	17.36111	20.83253	1.604324

A priori, é possível evidenciar que a diferença entre as médias amostrais masculinas ($\Delta\bar{x}_M = 0,6504$) é bem menos discrepante que a diferença entre as médias amostrais femininas ($\Delta\bar{x}_F = 2,6378$). No que se refere a diferença entre as variâncias amostrais, tanto a disparidade do gênero masculino quanto do gênero feminino são bastante expressivas, sendo $\Delta s_M = 6,8904$ e $\Delta s_F = 3,2657$, respectivamente. Outro fato interessante é que as observações coletadas retratam que, na média, os alunos entrevistados de ambos os sexos seguem um padrão de vida ideal ($\overline{IMC} \in [18,5; 25]$), onde os homens estão mais próximos do limite superior (sobrepeso) e as mulheres estão mais próximas do limite inferior (baixo peso).

A fim de compreender melhor os dados em estudo e, posteriormente, inferir sobre as populações de onde as amostras provêm, serão analisadas algumas representações gráficas. No que tange a distribuição de frequência

das observações, pode-se constatar que as amostras masculinas apresentam um comportamento bastante similar ao de uma distribuição normal. No caso da amostra $M2016$, em específico, tal característica seria melhor assimilada caso não houvesse o *outlier* cujo IMC é 37.55 kg/m^2 . Em relação às amostras femininas, não é possível identificar indícios de normalidade a partir de seus histogramas, uma vez que os seus respectivos tamanhos amostrais são muito pequenos.

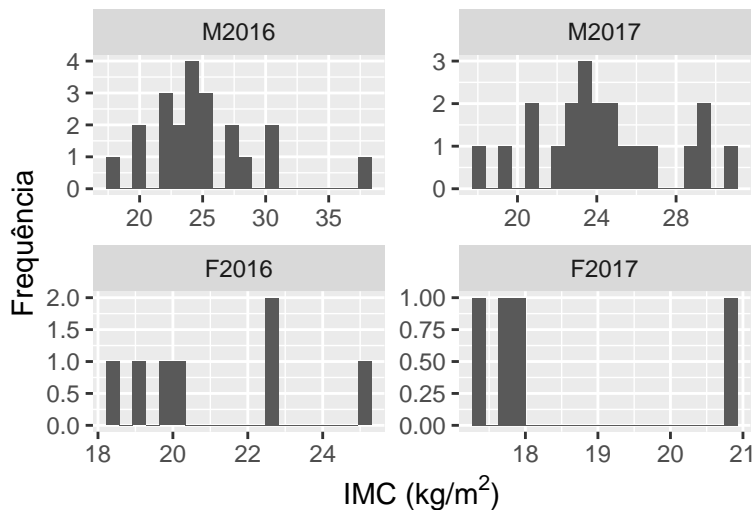


Figura 1: Histogramas.

Os diagramas de caixa, em princípio, corroboram algumas análises anteriores quanto às distribuições amostrais. O segundo quartil de $M2016$, em particular, está praticamente no centro da caixa, representando uma mediana próxima da média e, portanto, evidências de normalidade. O mesmo não ocorre para a amostra $M2017$, que visualmente apresenta maior assimetria do segundo quartil em relação ao centro da caixa. No entanto, a diferença entre a média e a mediana de $M2017$ ($\bar{x}_{2017} - \bar{m}_{2017} = 0,5378$) é ainda menor que a mesma diferença para $M2016$ ($\bar{x}_{2016} - \bar{m}_{2016} = 0,5805$), o que instiga análises ainda mais singulares. As assimetrias apresentadas para as distribuições amostrais do gênero feminino fortalecem os princípios de não-normalidade evidenciados anteriormente.

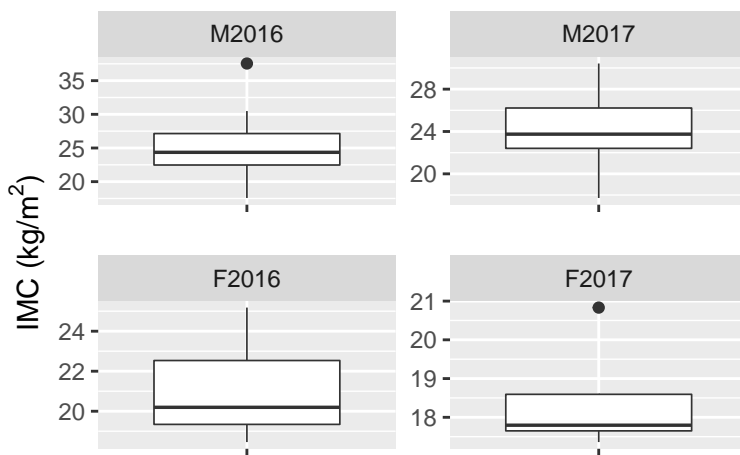


Figura 2: Boxplots.

Por fim, gráficos quantil-quantil foram utilizados para comparar as distribuições de probabilidade de cada uma das amostras (eixo das ordenadas) com uma distribuição normal (eixo das abcissas). Tal análise foi tomada para concluir sobre a normalidade das distribuições, corroborando ou refutando conclusões anteriores. Como esperado, o gráfico Q-Q da amostra masculina de 2016/2 sugere que os dados são normalmente distribuídos, uma vez que a reta se ajusta bem aos pontos (desconsiderando *outliers*). As amostras M2017 e F2016 também apresentaram bons ajustes do modelo aos dados e, conseqüentemente, também sugerem normalidade. Quanto à amostra feminina de 2017/2, há claros sinais de que os dados não seguem uma distribuição normal. Posteriormente, todas essas premissas serão validadas a partir de testes estatísticos, como Kolmogorov-Smirnov e Shapiro-Wilk.

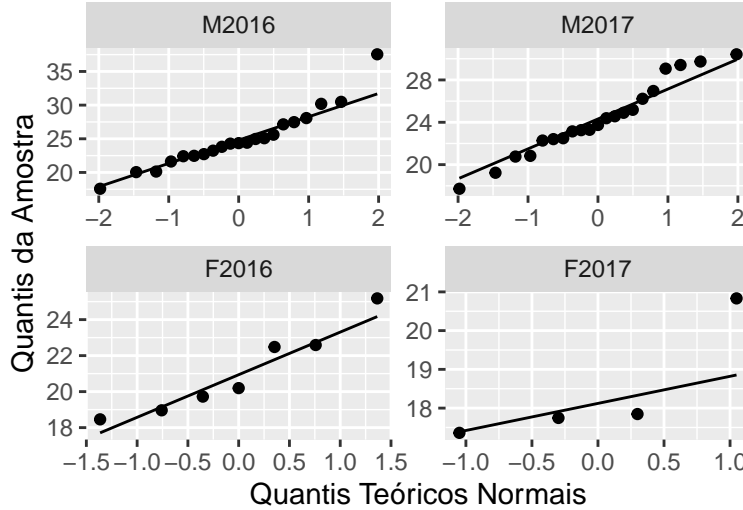


Figura 3: QQ-Plots

Parte 1: Amostras Masculinas

Tamanho de Efeito

Geralmente, os estudos científicos relatam a significância dos resultados alcançados. Contudo, é aconselhável mensurar também o tamanho de efeito (importância real) pertinente às diferenças encontradas em termos de média ou variância dos grupos avaliados [6]. A literatura aborda algumas metodologias para isso, como o Teste de Cohen, Teste de Glass, Teste de Hedges, dentre outros. Cada um desses testes têm diferentes maneiras de calcular o tamanho de efeito quanto a um determinado estimador, alguns fazendo uso da média (Cohen(d), Glass (Δ), Hedges(g), ψ) e outros a partir das variâncias (Pearson, η^2 , ω^2 e Cohen(f^2)). O primeiro teste de Cohen mencionado, por exemplo, calcula o tamanho de efeito d quanto à média, obtendo o quociente da diferença entre as médias dos grupos pelo desvio padrão agrupado, conforme a Equação (2) [11]:

$$d = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{s} \quad (2)$$

onde \bar{x}_1 e \bar{x}_2 são, respectivamente, as médias das amostras 1 e 2 e s é o desvio padrão agrupado dado pela Equação (3):

$$s = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \quad (3)$$

em que n_1 e n_2 são, nessa ordem, os tamanhos amostrais dos grupos 1 e 2, bem como s_1 e s_2 são os seus respectivos desvios amostrais.

A medida mais usada para calcular o tamanho de efeito para um teste t de Student é o d de Cohen [5]. A interpretação deste teste se dá a partir do d calculado pela Equação (2) conforme a seguinte classificação [8]:

- Muito pequeno: $0,01 \leq d < 0,20$
- Pequeno: $0,20 \leq d < 0,50$
- Médio: $0,50 \leq d < 0,80$
- Grande: $0,80 \leq d < 1,20$
- Muito grande: $1,20 \leq d < 2$
- Enorme: $d \geq 2,0$

Para calcular o tamanho de efeito usando este método, algumas premissas devem ser assumidas sobre os dados: normalidade e homocedasticidade [7]. Usando o Teste de Shapiro-Wilk é possível inferir sobre a normalidade das amostras, tendo em vista que a hipótese nula H_0 deste teste é de que os dados provêm de uma distribuição normal [9]. A função `shapiro.test` do pacote `stats` do R considera o nível de confiança de 90% ($\alpha = 0,1$) para avaliação das amostras fornecidas [1]. A validação da homocedasticidade será realizada a posteriori, uma vez que a premissa de alguns dos testes capazes de verificar tal premissa assumem normalidade.

O Teste de Shapiro-Wilk evidenciou que as amostras do grupo masculino *M2016* e *M2017* provêm de uma distribuição populacional com caráter normal ao nível de confiança de 90%, pois a hipótese nula desse teste não pôde ser refutada. Nesse caso, o valor de p resultou em 0,1275 e 0,6206, respectivamente, ambos superiores ao nível de significância $\alpha = 0,1$.

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  M2016
## W = 0.92833, p-value = 0.1275

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  M2017
## W = 0.96494, p-value = 0.6206
```

Uma vez que as variâncias populacionais não são conhecidas, nada se pode afirmar a cerca da homocedasticidade (igualdade de variâncias). Por isso, torna-se necessário a realização de um teste específico, como o Teste F para igualdade de variâncias. Esse teste tem como hipótese nula a proposição de que os grupos comparados resultam de populações com a mesma variância, partindo do pressuposto de que os dados são normais. O teste estatístico F é calculado pelo quociente da variância do primeiro grupo pelo segundo. Se a resultante de F é maior que o valor crítico superior ou menor que o valor crítico inferior, a hipótese nula é rejeitada [4].

```
##
##  F test to compare two variances
##
## data:  M2016 and M2017
## F = 1.5839, num df = 20, denom df = 20, p-value = 0.3119
## alternative hypothesis: true ratio of variances is not equal to 1
## 95 percent confidence interval:
##  0.6426853 3.9034665
## sample estimates:
## ratio of variances
##          1.58388
```

A execução do teste F para o grupo de dados *M2016* e *M2017* resultou em $F = 1,5838$ e $p = 0,3119$, que reflete que a igualdade de variância pode ser assumida para os dados em questão.

Com isso, pode-se calcular o d de Cohen como uma boa estimativa de tamanho de efeito para as amostras masculinas. O pacote `effsize` do R [10] permite tal cálculo a partir da função `cohen.d`.

```
##
## Cohen's d
##
## d estimate: 0.1665831 (negligible)
## 95 percent confidence interval:
##      lower      upper
## -0.4582151  0.7913813
```

O tamanho de efeito reportado é $d = 0,1665$.

Poder do Teste

No entanto, o cálculo anterior não leva em consideração a potência desejada ($\pi = 0,80$) e nem o nível de significância estipulado ($\alpha = 0,05$). É bem provável que, com essas especificações e com os tamanhos amostrais consideravelmente pequenos ($n_M = n_{M2016} = n_{M2017} = 21$), não seja possível detectar desvios no IMC médio masculino de $0,1665 \text{ kg/m}^2$ a partir das hipóteses de teste, conforme sugere o cálculo do d de Cohen.

Supondo o desvio padrão conjugado $s_M = 3,9046$ calculado a partir da Equação (3), o nível de significância $\alpha = 0,05$, o tamanho amostral n_M e o d de Cohen calculado anteriormente, a potência obtida pelo método `power.t.test` é de apenas 3,4%. Tal valor é cerca de 76,6 p.p menor que a potência desejada e, portanto, não é aceitável para realização dos experimentos.

```
power.t.test(n = 21, sd = 3.904637, sig.level = 0.05, delta = 0.1665831,
             type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
##
##      Two-sample t test power calculation
##
##              n = 21
##            delta = 0.1665831
##             sd = 3.904637
##          sig.level = 0.05
##           power = 0.03400076
##    alternative = two.sided
##
## NOTE: n is number in *each* group
```

Para que fosse possível detectar efeitos iguais ou maiores que $d = 0,1665$ de forma a preservar os parâmetros experimentais desejados, seriam necessárias cerca de 8626 amostras para cada um dos semestres.

```
power.t.test(delta = 0.1665831, sd = s, sig.level = 0.05, power = 0.80,
             type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
##
##      Two-sample t test power calculation
##
##              n = 8625.523
##            delta = 0.1665831
##             sd = 3.904637
##          sig.level = 0.05
##           power = 0.8
##    alternative = two.sided
##
## NOTE: n is number in *each* group
```

Como não existem possibilidades de se obter mais amostras para os experimentos, é possível detectar, a um nível de significância $\alpha = 0,05$ e potência $\pi = 0,80$, um tamanho de efeito de mínima relevância prática de $d = 3,4596$.

```
power.t.test(n = 21, sd = 3.904637, sig.level = 0.05, power = 0.80,  
             type = "two.sample", alternative = "two.sided")
```

```
##  
##      Two-sample t test power calculation  
##  
##              n = 21  
##            delta = 3.459679  
##             sd = 3.904637  
##          sig.level = 0.05  
##             power = 0.8  
##      alternative = two.sided  
##  
## NOTE: n is number in *each* group
```

Análise Estatística

Uma vez que as premissas de normalidade e homocedasticidade foram validadas, o teste estatístico t de Student pode ser efetuado para comparação das médias. Entretanto, o teste assumido foi o t de Welch para duas amostras, devido o seu caráter mais conservador. A hipótese nula é que a média da variável estudada (IMC) é igual nas duas populações, ou seja, a diferença entre a média das duas populações é igual a zero. Já a hipótese alternativa indica que há diferenças nas médias das populações, ou seja, $\mu_{2016} - \mu_{2017} \neq 0$. O nível de confiança adotado para os testes foi de 95%.

```
##  
##  Welch Two Sample t-test  
##  
## data:  M2016 and M2017  
## t = 0.53979, df = 38.057, p-value = 0.5925  
## alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0  
## 95 percent confidence interval:  
##  -1.788823  3.089716  
## sample estimates:  
## mean of x mean of y  
##  24.93595  24.28551  
  
## Intervalo de confiança: -1.788823 3.089716
```

O resultado do teste t de Welch retornou um p-valor de 0,5925, maior que o nível de significância de 0,05. Assim, com 95% de confiança não é possível rejeitar a hipótese nula H_0 de que as médias das duas populações são iguais. Sendo a hipótese alternativa H_1 bilateral, o intervalo de confiança para a diferença das médias é $[-1,788823; 3,089716]$. É interessante ressaltar que o resultado para o teste t de Student foi bastante similar e também falhou em rejeitar a hipótese nula.

Parte 2: Amostras Femininas

Tamanho de Efeito

```
##  
##  Shapiro-Wilk normality test
```

```
##
## data:  F2016
## W = 0.91974, p-value = 0.4674

##
## Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  F2017
## W = 0.7475, p-value = 0.03659
```

Poder do Teste

Análise Estatística

Conclusões

Discussão de Melhorias

Atividades Desempenhadas

Referências

- [1] Shapiro.test: Shapiro-Wilk Normality Test. <https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/shapiro.test>, 2020. From stats v3.6.2.
- [2] Alexandra M. N. Borba, Juliane H. Wolff Wolff, and Rafaela Liberali. Avaliação do Perfil Antropométrico e Alimentar de Idosos Institucionalizados em Blumenau-Santa Catarina. *RBONE-Revista Brasileira de Obesidade, Nutrição e Emagrecimento*, 1(3), 2007.
- [3] Felipe Campelo. Lecture Notes on Design and Analysis of Experiments. <http://git.io/v3Kh8>, 2018. Version 2.12; Creative Commons BY-NC-SA 4.0.
- [4] Ji-Qian Fang. *Handbook of medical statistics*. World Scientific, 2018.
- [5] Alboukadel Kassambara. T-test Essentials: Definition, Formula and d Calculation. <https://www.datanovia.com/en/lessons/t-test-effect-size-using-cohens-d-measure/>. Acesso em 15 Agosto de 2020.
- [6] Ken Kelley and Kristopher J Preacher. On Effect Size. *Psychological methods*, 17(2):137, 2012.
- [7] Chao-Ying Joanne Peng and Li-Ting Chen. Beyond Cohen’s d: Alternative Effect Size Measures for Between-Subject Designs. *The Journal of Experimental Education*, 82(1):22–50, 2014.
- [8] Shlomo S Sawilowsky. New Effect Size Rules of Thumb. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 8(2):26, 2009.
- [9] R Development Core Team. Shapiro-Wilk Normality Test. <https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/shapiro.test>. Documentation reproduced from package stats, version 3.6.2, License: Part of R 3.6.2.
- [10] Marco Torchiano. Package effsize, 2020. Version 0.8.0.
- [11] Sonia VIEIRA. Bioestatística: Tópicos Avançados. *Campus, Rio de Janeiro*, 2003.