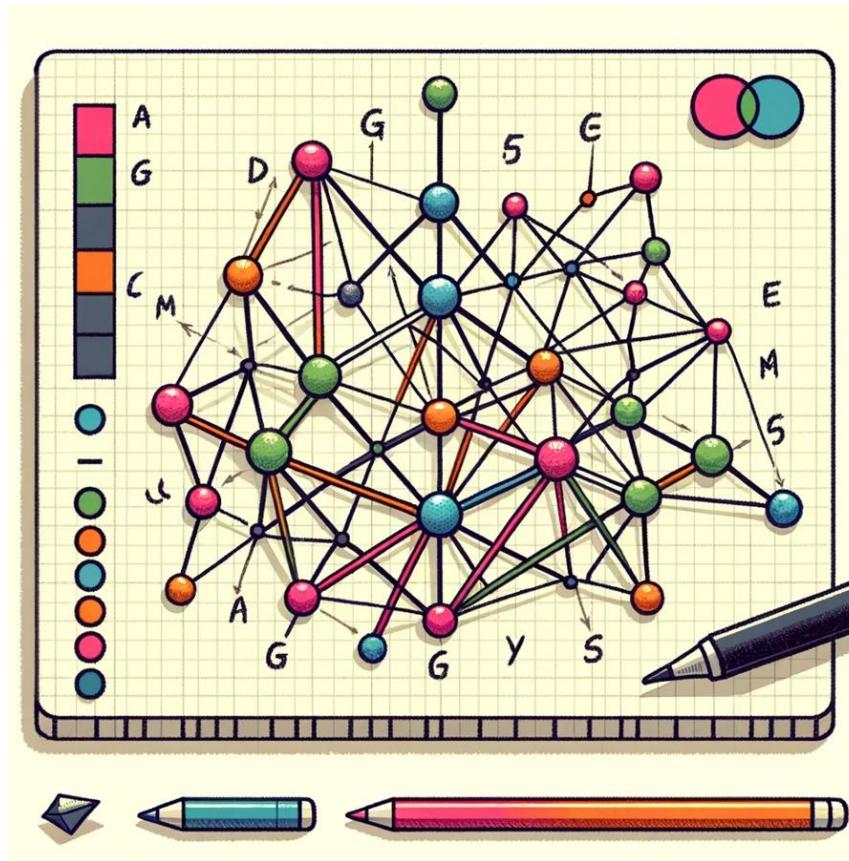


Teoria dos Grafos

Jairo Lucas



Teoria dos Grafos

Período Letivo	2024/01
Curso	Ciência Computação
Período	5º Semestre
Disciplina	Teoria dos Grafos
Modulo	--
Objetivos do Modulo	Levar o estudante a adquirir conhecimento para aplicar os conceitos de grafos como ferramentas de representação de problemas práticos. Bem como utilizar os algoritmos de grafos em uma pesquisa.
Carga Horária Teórica	--
Carga Horária Prática	--
Carga Horária Total	40 horas
Professor	Jairo Lucas
E-mail	<u>Artsoft.lucas@terra.com.br</u>

Teoria dos Grafos – Programa Disciplina

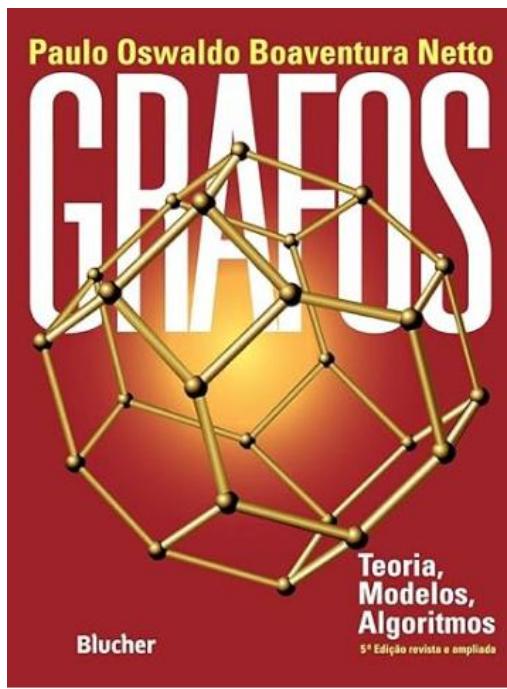
■ UNIDADE I: Grafos e Árvores.

- Terminologia e Aplicações de Grafos.
- Propriedades sobre grafos e árvores.
- Representações computacionais de Grafos.
- Grafos direcionados e relações binárias.
- Árvores de decisão e códigos de Huffman.
- Cortes de Arestas, Cortes de Vértices

■ UNIDADE II: Grafos e Algoritmos.

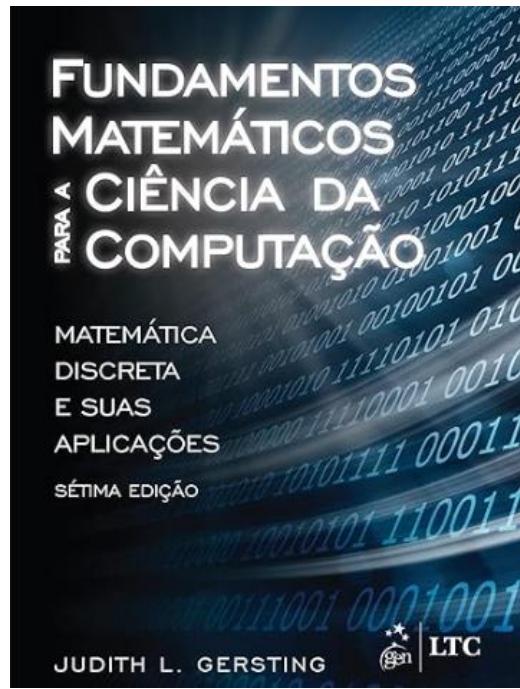
- Caminho Euleriano.
- Ciclo Hamiltoniano.
- Caminho mínimo e árvore geradora mínima.
- Emparelhamento

Teoria dos Grafos – Bibliografia



**Grafos: Teoria, Modelos,
Algoritmos**

Paulo O. Boaventura
Netto.
Ed Blucher - 2012.



**Fundamentos matemáticos
para a ciência da computação:
um tratamento moderno de
matemática discreta**

GERSTING, Judith ,
Rio de Janeiro - LTC, 2009

Slides,
apostilas e
outros
materiais
dados em aula

Teoria dos Grafos – Avaliação

- 1º. Bimestre

- 1 prova de 10 pontos : com peso 7
- 1 trabalho de 10 pontos : com peso 3

Nota 1 : (nota prova * 0.7) + (nota trabalho * 0.3)

- 2º. Bimestre

- 1 prova de 10 pontos : com peso 7
- 1 trabalho de 10 pontos: com peso 3

Nota 2 : (nota prova * 0.7) + (nota trabalho * 0.3)

NOTA FINAL : (Nota 1 + Nota 2) / 2

Teoria dos Grafos

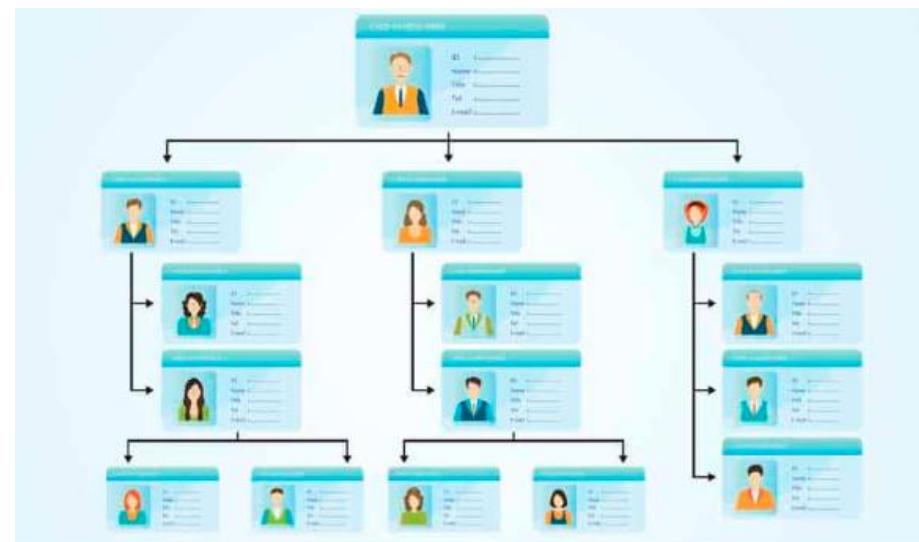
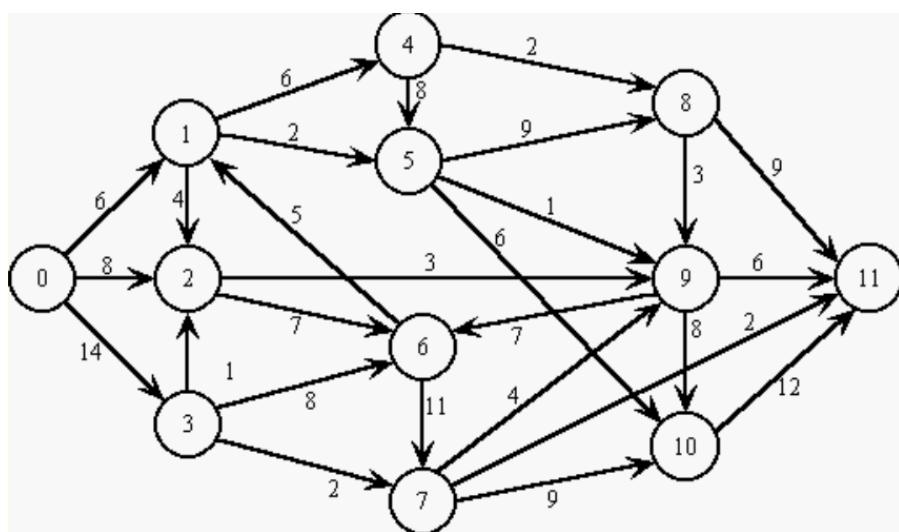
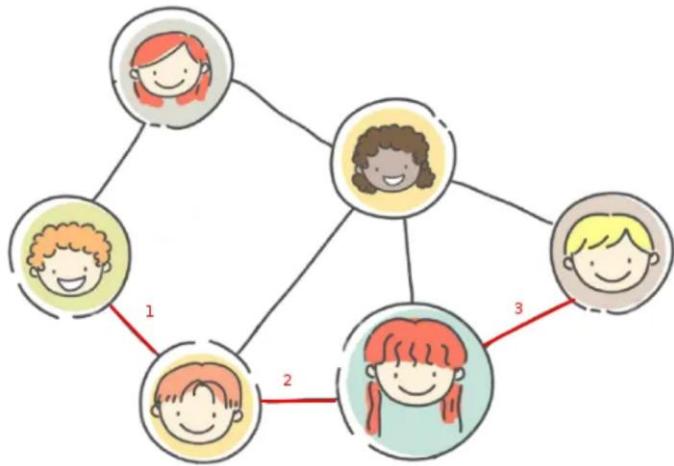
- **Requisitos:**
 - Lógica de programação
 - Estrutura de Dados

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

Por que estudar grafos?

- Importante ferramenta matemática com aplicação em diversas áreas do conhecimento
- Existem centenas de problemas do dia a dia que são solucionados computacionalmente utilizando grafos.
- Logística, redes de computadores, redes sociais, arvores genealógicas, química, medicina...

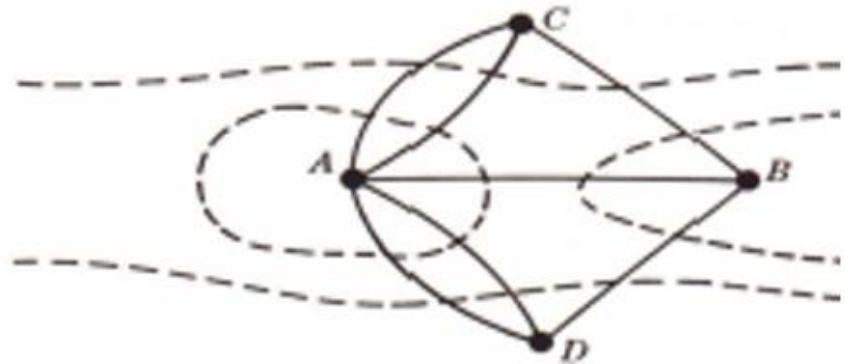
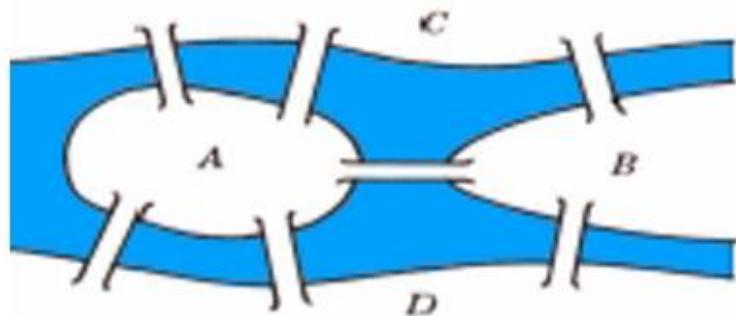
Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações



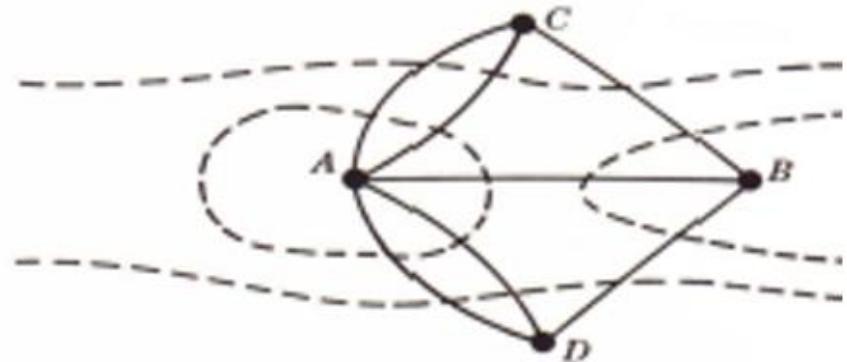
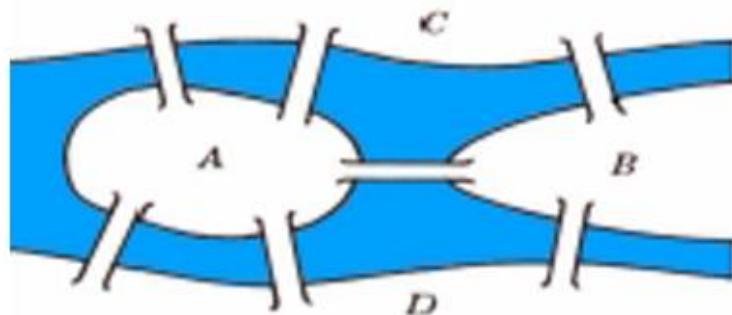
Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- Grafos são relativamente novos do ponto de vista matemático. Sua definição formal foi apresentada por Leonhard Euler em 1736.
- Euler usou a teoria para resolver o problema das **pontes de Königsberg**.
 - O problema é baseada na cidade de Koinsberg (Rússia) onde ha duas grandes ilhas ligadas por 7 pontes. O desafio era encontrar uma rota que atravessasse TODAS as pontes, SEM REPETIR nenhuma delas.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações



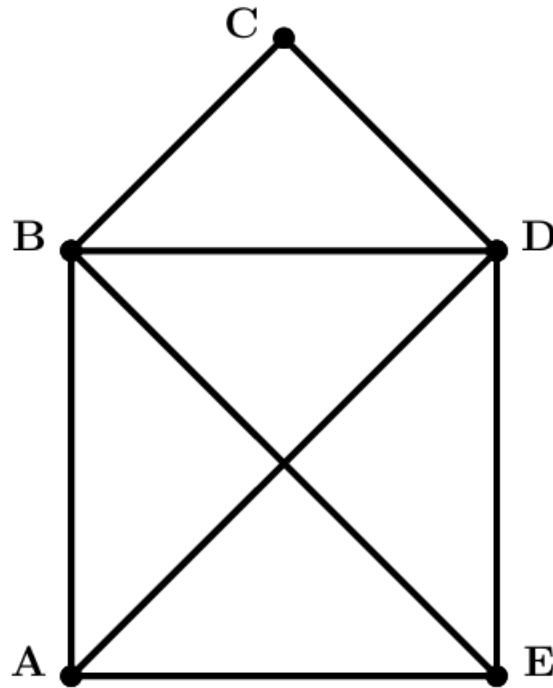
Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações



- Usando a teoria dos grafos, Euler provou que **isso não é possível**.
 - Para que cada ponte fosse cruzada apenas uma vez, todas as porções de terra, exceto talvez a inicial e a final, deveriam ter um numero par de pontes ligadas a ela. Uma para “entrar” e uma para “sair”
 - Teoria do caminho Eureliano.

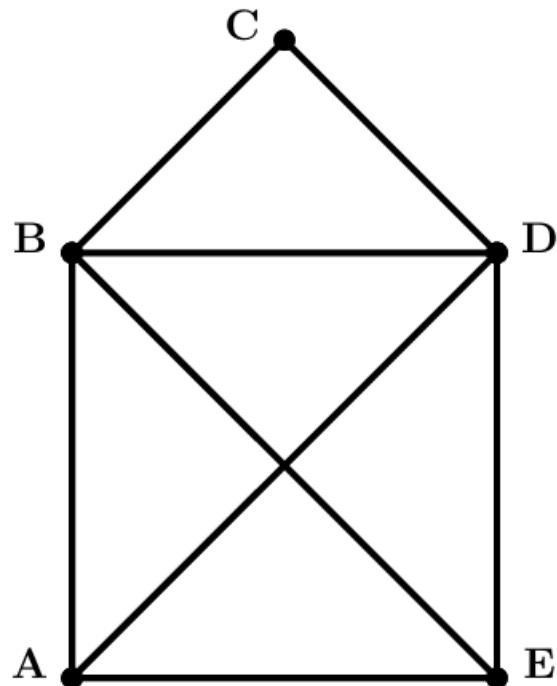
Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- a) Caminho para o recolhimento do lixo
 - a) Deve passar um única vez em cada rua (linha)
 - b) Deve passar em todas as ruas (linha)



Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- a) Caminho para o recolhimento do lixo
 - a) Deve passar um única vez em cada rua (linha)
 - b) Deve passar em todas as ruas (linha)



a - b - d - a - e - b - c - d - e
a - b - c - d - e - a - d - b - e

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- Um grafo é uma estrutura representada como um conjunto de **pontos (vértices ou nós)** ligados por **linhas (arestas)**.

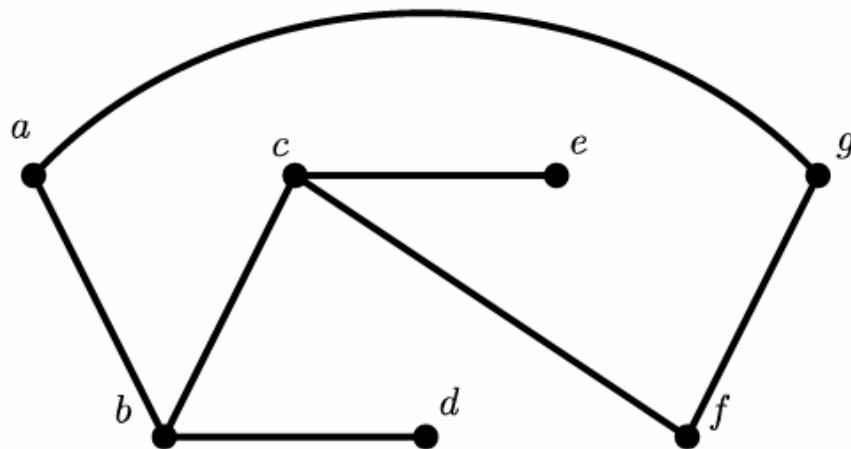


Figura 1.1: Grafo G .

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ **Matematicamente:** É um par de conjuntos (V, A) , $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, cujos elementos v_i são chamados **VÉRTICES**, e $A \subset \{\{v_i, v_j\}, v_i, v_j \in V\}$, cujos elementos são chamados **ARESTAS**.

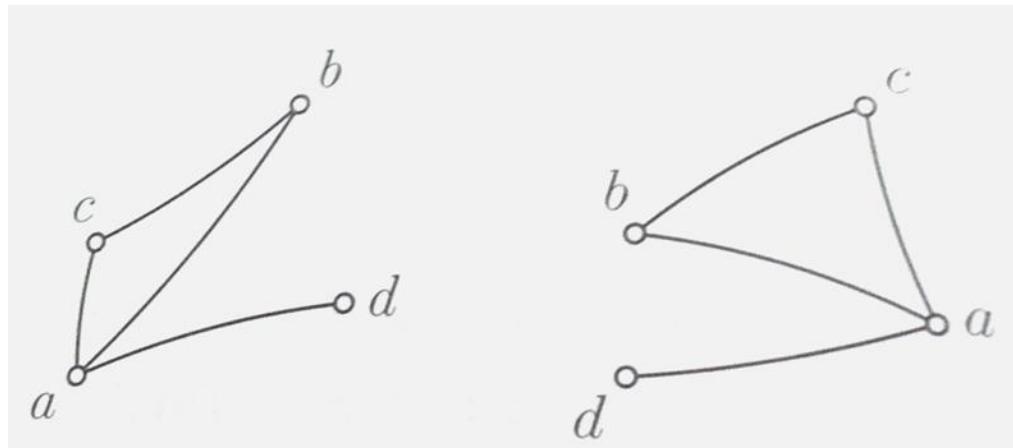
- cada aresta é um par não ordenado de vértices.

- $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $A = \{ab, bc, bd, ce, cf, fg, ga\}$

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- A figura representado por um gráfico não tem **nenhum** significado geométrico. Seu propósito é unicamente representar esquematicamente as relações entre os vértices de G .

$$G = (\{a, b, c, d\} ; \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}),$$

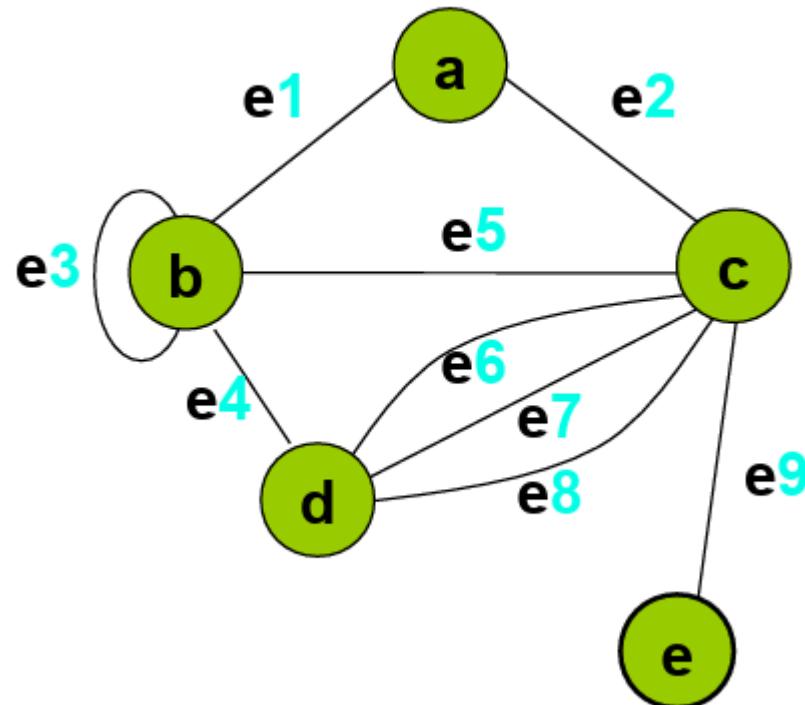


Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- O que nos interessa em um grafo é:
 - O conjunto V , ou seja, **QUEM** são os vértices.
 - Que pares de vértices estão ligados e quais não estão, ou seja, **QUEM** são as arestas.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:



$$G = (V, E)$$

$$V = \{a, b, c, d, e\}$$

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}\} = \\ \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$$

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

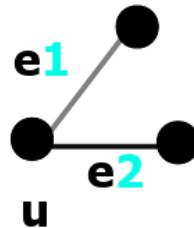
■ Principais conceitos:

- Quando existe uma aresta ligando dois vértices dizemos que os vértices são **adjacentes** e que a aresta é **incidente** aos vértices
- Uma aresta do tipo $\{v_i, v_i\}$, ou seja, que esta ligada a ela mesma é denominada **laço**.
 - A aresta e3(b) é um laço
- Arestras que possuem os mesmos vértices extremos são ditas **paralelas**.
 - As arestras e6, e7 e e8 são paralelas.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- Duas arestas que são **incidentes** a um mesmo vértice são ditas **adjacentes**



- Um grafo que possui **arestas paralelas** é denominado **multigrafo**.
- Um grafo **sem laços** e **sem arestas paralelas** é denominado **grafo simples**.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- E quando tiver laços e não tiver arestas paralelas??
 - Geralmente é chamado de **PSEUDOGRAFO**

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- Um grafo **COMPLETO** possui exatamente uma aresta ligando cada par de vértices.
- Um **PASSEIO** em um grafo é uma sequencia de vértices e arestas (não **necessariamente distintos**) percorridos.
 - **COMPRIIMENTO** é a quantidade de **ARESTAS** percorridas no passeio
 - Um grafo é considerado **CONEXO** de existir uma passeio entre qualquer um de seus vértices.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- Um **CAMINHO** em um grafo é um passeio onde **TODAS** suas **ARESTAS** são **DISTINTAS**.
 - Todo **caminho** é um passeio, porém, nem todo passeio é um **caminho**.
- Um **CAMINHO SIMPLES** é um caminho onde todos os **vértices** (além das arestas) são distintos, exceto possivelmente o primeiro e o último no caso de formarem um ciclo.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- Um **CICLO** em um grafo é um **caminho simples** que tem inicio e fim no mesmo vértice.
 - **Não** permite repetições de vértices ou arestas, exceto pelo vértice que serve como ponto inicial e final.
 - **Não** requer passar por todos os vértices e arestas do grafo.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- O número de vértices de um grafo G é denominado **ORDEM**, e é denotado por $n = |V|$.
- **Vértice isolado** é o vértice que não possui arestas incidentes (grau nulo)
- **Vértice folha** ou terminal é o vértice que possui grau 1

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

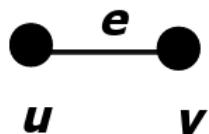
■ Principais conceitos:

- O número de arestas incidentes a um vértice v é denominado **grau(v)** e representado por $d(v)$.
 - $d(a) = 4 \quad d(b) = 5 \quad d(c) = 6 \quad d(d) = 4 \quad d(e) = 1$
 - Grau também é conhecido como **valência**
 - Um laço em um vértice conta como **DUAS incidências de arestas.**
- O número de **arestas de um grafo** é denotado por $m = |E|$
 - **ATENÇÃO!!!** Não confundir número de arestas de um grafo $m=|E|$ com número de arestas **de um vértice - grau(v)**

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- A soma dos graus dos vértices de um grafo é sempre o dobro do número de arestas. (válido para grafos **SIMPLES**).
 - Quando contamos os graus dos vértices estamos contando as extremidades das arestas uma vez. Como cada aresta tem duas extremidades, cada aresta foi contada duas vezes



- A aresta e é incidente aos vértices v e w
- É contabilizada no cômputo do grau de v e também de w .

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

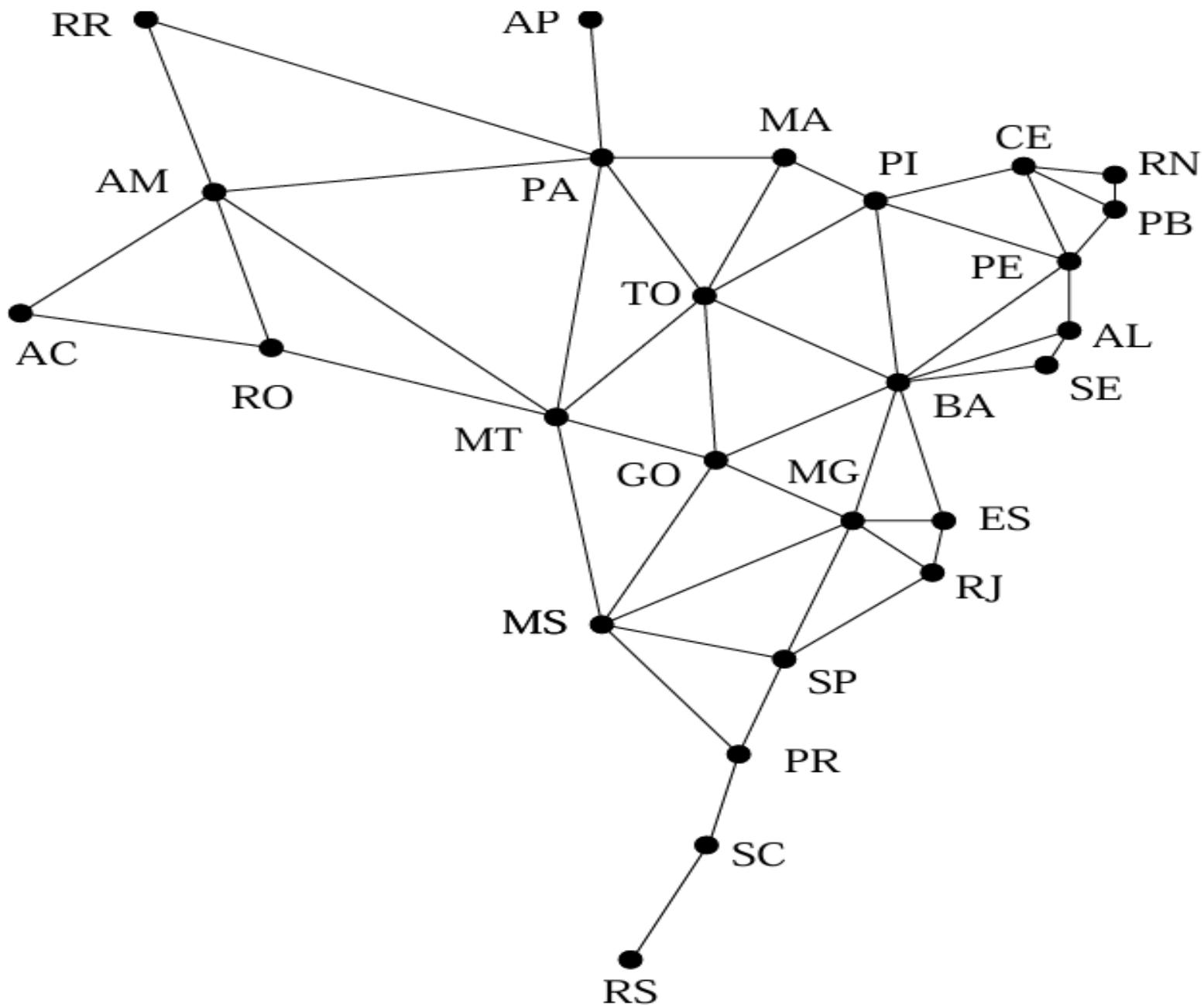
- Todo grafo G possui um número **par** de vértices de grau **ímpar**
- Se tivéssemos um número ímpar de vértices de grau ímpar a soma dos graus seria ímpar. Mas a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto é um número par

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

■ Principais conceitos:

- O número máximo de arestas de um grafo SIMPLES com n vértices é sempre $n(n-1)/2$.
 - cada par de vértices pode ser conectado por no máximo uma aresta (grafo simples não tem arestas paralelas)
 - Se considerarmos todos os possíveis pares de vértices em um grafo de n vértices, o número máximo de arestas é dado pela combinação de n vértices tomados de 2 a 2

$$\text{Número máximo de arestas} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$



Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

Exercícios:

- Crie um caminho, com o menor comprimento possível, para ir MG para CE.
- Qual o comprimento deste caminho?
- Crie um caminho, como o menor comprimento possível, que sai de MG e passe pelos estados ES, RJ, GO, e BA, independente de ordem.
- O grafo da figura é conexo ou desconexo? Explique.
- Existem vértices folhas?

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

Exercícios:

- Explique porque o grau máximo de qualquer vértice em um grafo simples com n vértices é $n-1$.
- Qual o número de arestas de um grafo completo que possui 9 vértices?
- Quantas arestas tem um grafo com vértices de graus 5, 2, 2, 2, 2, 1? Desenhe um possível grafo.

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

Exercícios:

- Explique os conceitos (e diferenças) de caminho, ciclo e passeio.
- Qual a soma dos graus do grafo da figura? Qual o grau máximo deste grafo?
- Desenhe um grafo simples com 5 vértices com os seguintes graus
 - 3, 3, 3, 3, 2
 - 1, 2, 3, 4, 5
 - 0, 1, 2, 2, 3

Teoria dos Grafos - Terminologia e Aplicações

- Qual o **comprimento** do **MENOR ciclo** dos gráficos abaixo?

