Modelo SIR

Pedro Henrique Mendes

Introdução a Sistemas Dinâmicos

Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

2021

Em 1927 Kermack e McKendrick[1] propuseram um modelo epidemiológico para estudar doenças contagiosas

$$\frac{dS}{dt} = -\beta\frac{SI}{N}; \quad \frac{dI}{dt} = \beta\frac{SI}{N} - \gamma I; \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I \tag{1}$$

- O período de incubação é desconsiderado.
- a é a probabilidade de contrair a doença e b é o número de pessoas que um indivíduo tem contato.
- $\beta = a \cdot b$ e $1/\gamma$ é o tempo necessário para se recuperar.
- A população total não se altera, da equação (1)

$$S + I + R = N \tag{2}$$

[1] Kermack, W. O.; McKendrick, A. G. "*A contribution to the mathematical theory of epidemics*", 1927, Royal Society.

O Modelo

Queremos estudar se uma doença contagiosa se tornará pandêmica. Da segunda equação de (1) podemos ver que

$$\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} = I(0)(\beta S(0) - \gamma) \tag{3}$$

A doença tende a se espalhar se $\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} > 0$ e a desaparecer se $\left.\frac{dI}{dt}\right|_{t=0} < 0$. Assim definimos

$$R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} \tag{4}$$

como fator de reprodutividade basal. Com esse parâmetro concluímos que há pandemia quando $R_0 > 1$ e não há quando $R_0 < 1$.

Temos, da equação (1), que

$$\frac{dI(t)}{dt} = \gamma I(t) \left[\frac{\beta S(t)}{\gamma} - 1 \right] \tag{5}$$

Assim

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad S(t) = \frac{\gamma}{\beta} = \sigma \tag{6}$$

ocorre quando $t = t_p$. Para $t > t_p$ observamos $dI/dt < 0$, ou seja, uma diminuição de infectados. Note que independente da condição inicial do sistema teremos

$$\lim_{t \to \infty} I(t) = 0 \tag{7}$$

ou seja, a doença desaparece com o passar do tempo.

Resultados Analíticos

Combinando as duas primeiras equações de (1) obtemos

$$\frac{dI}{dS} = \frac{\sigma}{S} - 1 \tag{8}$$

Integrando obtemos

$$I(t) = I(0) + S(0) - \sigma \ln S(0) - S(t) + \sigma \ln S(t) \tag{9}$$

Das duas últimas equações de (1) obtenho

$$\frac{dS}{dR} = -\frac{S}{\sigma} \tag{10}$$

Logo

$$S(t) = S(0)e^{-R(t)/\sigma} \tag{11}$$

Resultados Analíticos

Combinando as equações (1) e (2) obtemos que

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(N - R - S) \tag{12}$$

Expandindo (11) obtenho

$$S(t) = S(0)(1 - R/\sigma) \tag{13}$$

Combinando ambas equações obtenho

$$\frac{dR}{dt} = \gamma(I(0) + R(R_0 - 1)) \tag{14}$$

Integrando

$$R(t) = \frac{I(0)}{R_0 - 1}\left(e^{(r_0 - 1)\gamma t} - 1\right) \tag{15}$$

Simulação - Euler

Primeira forma de simular é utilizando o método mais simples: Euler.

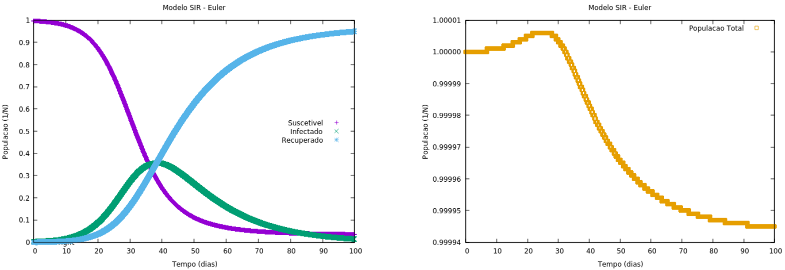
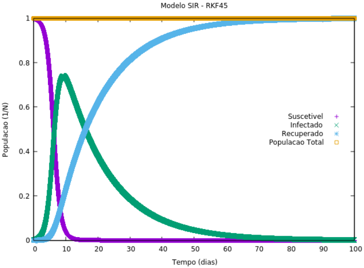


Figura 1: *(Esq.)*: Curvas obtidas da integração das equações (1), utilizando Euler, com $b = 1$. *(Dir.)*: População total ao longo do tempo. Foi utilizado que $a = 0.25$

Podemos ver que o método de Euler não pode ser utilizado aqui, pois ele não conserva a população total.

Utilizando o método Runge–Kutta–Fehlberg:



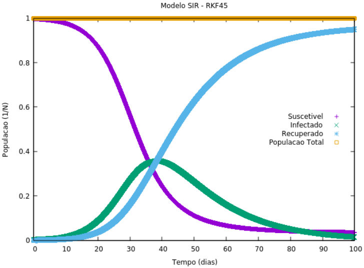


Figura 2: *(Esq.)*: Curvas obtidas da integração das equações (1), com $b = 4$. *(Dir.)*: Curvas obtidas da integração das equações (1), com $b = 1$.Em ambas simulações temos $a = 0.25$.

Podemos ver que a população total se conserva. É possível notar a importância do distanciamento social.

Simulando em uma rede quadrada com condições periódicas obtemos

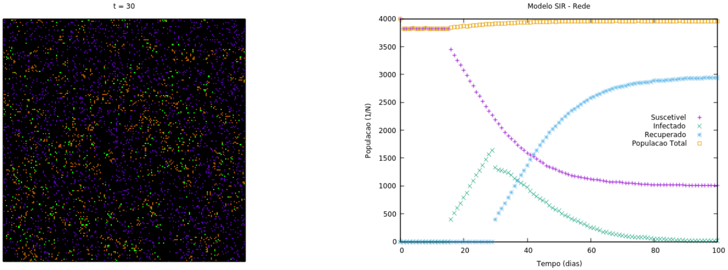


Figura 3: *(Esq.)*: *Screenshot* da simulação. *(Dir.)*: Curvas obtidas através da simulação na rede. O tempo de recuperação foi tomado como 14 dias.

Obtemos curvas que se assemelham a resultados anteriores. Para obter melhores resultados pode-se pensar em considerar a matriz completamente cheia e/ou rever a forma da dinâmica.

Referências

- Luiz Henrique Alves Monteiro. "*Sistemas Dinâmicos*". 3a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- Compartmental models in epidemiology, Wikipedia. `https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology#The_SIR_model_2`. Acesso em 10/05/2020.
- Códigos, Figuras e GIF: `https://github.com/pedhmendes/sir-model`

Agradecimentos

Obrigado pela atenção!