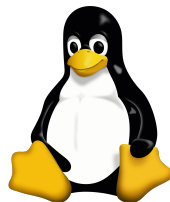


Pedro Henrique Mendes

Introdução a Sistemas Dinâmicos



Instituto de Física
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

2021

Em 1927 Kermack e McKendrick¹ propuseram um modelo epidemiológico para estudar doenças contagiosas

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI; \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I; \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I \quad (1)$$

- ▶ O período de incubação é desconsiderado.
- ▶ a é a probabilidade de contrair a doença e b é o número de pessoas que um indivíduo tem contato.
- ▶ $\beta = a \cdot b$ e $1/\gamma$ é o tempo necessário para se recuperar.
- ▶ A população total não se altera, da equação (1)

$$S + I + R = N \quad (2)$$

¹Kermack, W. O.; McKendrick, A. G. "A contribution to the mathematical theory of epidemics", 1927, Royal Society.

Queremos estudar se uma doença contagiosa se tornará pandêmica. Da segunda equação de (1) podemos ver que

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = I(0)(\beta S(0) - \gamma) \quad (3)$$

A doença tende a se espalhar se $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} > 0$ e a desaparecer se $\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} < 0$. Assim definimos

$$R_0 = \frac{\beta S(0)}{\gamma} \quad (4)$$

como fator de reprodutividade basal. Com esse parâmetro concluímos que há pandemia quando $R_0 > 1$ e não há quando $R_0 < 1$.

Temos, da equação (1), que

$$\frac{dI(t)}{dt} = \gamma I(t) \left[\frac{\beta S(t)}{\gamma} - 1 \right] \quad (5)$$

Assim

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \quad \longrightarrow \quad S(t) = \frac{\gamma}{\beta} = \sigma \quad (6)$$

ocorre quando $t = t_p$. Para $t > t_p$ observamos $dI/dt < 0$, ou seja, uma diminuição de infectados. Note que independente da condição inicial do sistema teremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0 \quad (7)$$

ou seja, a doença desaparece com o passar do tempo.

Primeira forma de simular é utilizando o método mais simples: Euler.

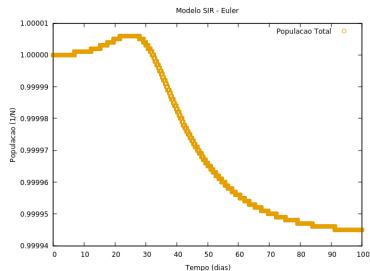
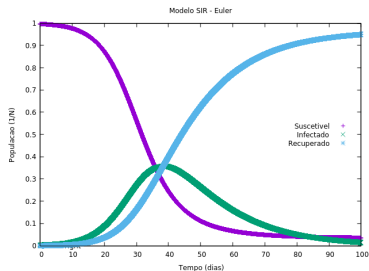


Figura 1: (*Esq.*): Curvas obtidas da integração das equações (1), utilizando Euler, com $b = 1$. (*Dir.*): População total ao longo do tempo. Foi utilizado que $a = 0.25$

Podemos ver que o método de Euler não pode ser utilizado aqui, pois ele não conserva a população total.

Utilizando o método Runge–Kutta–Fehlberg:

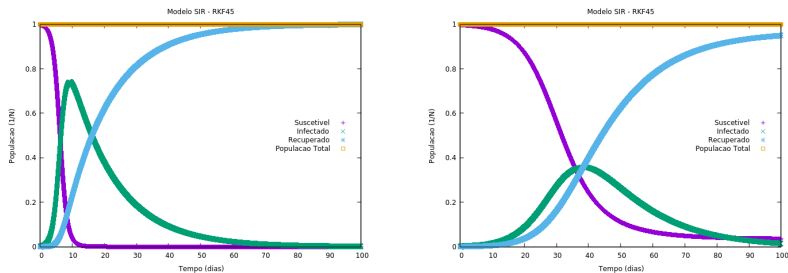


Figura 2: (*Esq.*): Curvas obtidas da integração das equações (1), com $b = 4$. (*Dir.*): Curvas obtidas da integração das equações (1), com $b = 1$. Em ambas simulações temos $a = 0.25$.

Podemos ver que a população total se conserva. É possível notar a importância do distanciamento social.

Simulando em uma rede quadrada com condições periódicas obtemos

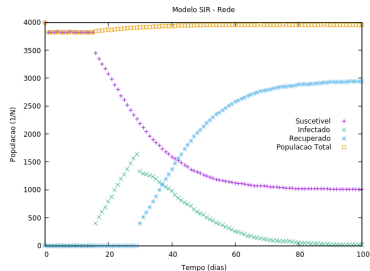
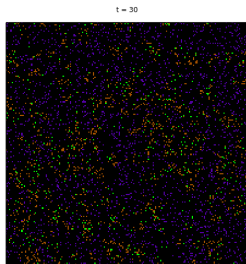


Figura 3: (Esq.): Screenshot da simulação. (Dir.): Curvas obtidas através da simulação na rede. O tempo de recuperação foi tomado como 14 dias.

Obtemos curvas que se assemelham a resultados anteriores. Para obter melhores resultados pode-se pensar em considerar a matriz completamente cheia e/ou rever a forma da dinâmica.

- ▶ Luiz Henrique Alves Monteiro. "*Sistemas Dinâmicos*". 3a ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- ▶ Compartmental models in epidemiology, Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Compartmental_models_in_epidemiology#The_SIR_model_2. Acesso em 10/05/2020.
- ▶ Códigos, Figuras e GIF:
<https://github.com/pedhmendes/sir-model>

Obrigado pela atenção!