Funções Polinomiais, Racionais, Algébricas, Exponenciais e Logarítmicas

Fabiano José dos Santos

1 de setembro de 2010

1 Funções Polinomiais do 1^o Grau

Funções polinomiais do 1^o grau são funções[1] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$f(x) = ax + b \ ; \tag{1}$$

em que a e b são constantes reais. Sua representação no plano cartesiano é uma reta (Figura 1). A constante a é chamada coeficiente angular e, por definição, é dada pela tangente do ângulo formado entre a reta e o semi eixo positivo da abscissas. A constante b é chamada coeficiente linear e geometricamente é a ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo-y. A raiz[2] é dada por $x = -b/a$.

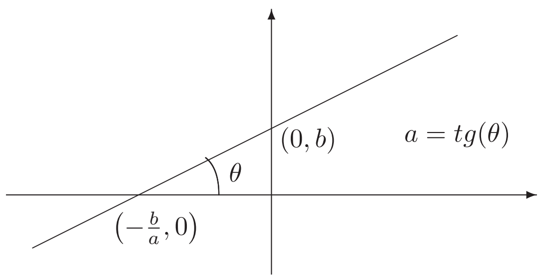


Figura 1: Coeficiente angular, coeficiente linear e raiz de uma função linear

1.1 Problemas Propostos

1 *Esboce o gráfico das duas funções dadas no plano cartesiano e determine (se existir) o ponto de interseção.*

(a) $f(x) = x - 2$ *e* $f(x) = -2x + 4$;

(b) $f(x) = 2x - 7$ *e* $f(x) = -2x + 1$;

(c) $f(x) = 3x - 1$ *e* $f(x) = -5x + 2$;

(d) $f(x) = 2x - 5$ *e* $f(x) = 2x + 5$;

2 *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $y = f(x) = 2x - 10$,

[1] Lembre-se que o símbolo $\mathbb{R}$ denota o conjunto de todos os números reais. Assim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indica que a função f tem como domínio (o $\mathbb{R}$ antes da flecha) e contra-domínio (o $\mathbb{R}$ depois da flecha) todos os números reais.

[2] As raízes, ou zeros, de uma função são todos os valores do domínio que anulam sua imagem, ou seja, são todos os elementos do domínio que possuem imagem zero. Determinamos as raízes de uma função f resolvendo a equação $f(x) = 0$.

(a) determine as coordenadas do ponto em que seu gráfico intercepta o eixo x;

(b) determine as coordenadas do ponto em que seu gráfico intercepta o eixo y;

(c) utilize as informações obtidas para esboçar seu gráfico.

3 *Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x - 4$, determine as constantes a e b sabendo-se que $f(a) = 2b$ e $f(b) = 9a - 28$.*

4 *Uma função polinomial do 1^o grau é tal que $f(3) = 2$ e $f(4) = 2f(2)$. Determine f.*

5 *Uma função polinomial do 1^o grau é tal que $f(0) = 1 + f(1)$ e $f(-1) = 2 - f(0)$. Determine $f(3)$.*

6 *Um avião parte de um ponto P no instante $t = 0$ e viaja para o oeste a uma velocidade constante de $450\,Km/h$.*

(a) Escreva uma expressão para a distância d (em Km) percorrida pelo avião em função do tempo t (em horas).

(b) Trace o gráfico $d \times t$.

(c) qual o significado do coeficiente angular da reta obtida?

2 Funções Polinomiais do 2^o grau

Funções polinomiais do 2^o grau (ou funções quadráticas) são funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Sua representação no plano cartesiano é uma parábola. As duas raízes são dadas pela Fórmula de Báskara

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}; \tag{2}$$

em que o discriminante (ou delta) é dado por $\Delta = b^2 - 4ac$. Temos que:

- se $\Delta > 0$: duas raízes reais distintas;
- se $\Delta = 0$: duas raízes reais iguais (raiz dupla);
- se $\Delta < 0$: duas raízes complexas[3]

Para o traçado do gráfico de funções quadráticas é útil lembrar que as coordenadas do vértice da parábola são dadas por:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right). \tag{3}$$

[3]Neste caso as raízes são conjugadas, pois estamos tratando de funções quadráticas de coeficientes reais.

2.1 Forma fatorada de uma função quadrática

Se os números r_1 e r_2 são as raízes de uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ então podemos reescrevê-la na forma fatorada

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Exemplo 1 *Dada a função* $y = -4x^2 + 2x + 6$ *temos*

- *raízes:* $\Delta = 2^2 - 4(-4)6 = 100$; *logo* $x = \frac{-2\pm10}{-8}$ *e as raízes são* $x = -1$ *e* $x = \frac{3}{2}$;
- *coordenadas do vértice:* $\left(\frac{-2}{-8}, \frac{-100}{-16}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{25}{4}\right)$;
- *forma fatorada:* $f(x) = -4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + 1\right)$.

2.2 Problemas Propostos

7 *Dadas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tais que* $f(x) = x + 1$ *e* $g(x) = x^2 - 5x + 6$,

(a) *determine as raízes de* f;

(b) *determine as raízes de* g *e reescreva-a na forma fatorada;*

(c) *resolva a equação* $\frac{g(2)-f(x)}{g(1)f(2)} = \frac{g(4)}{f(-2)}$

(d) *resolva a equação* $\frac{g(x)-f(x)}{g(0)f(0)} = \frac{g(-2)}{f(1)}$

8 *Dada a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *tal que* $y = f(x) = x^2 - 10x + 9$,

(a) *determine as coordenadas do ponto em que seu gráfico intercepta o eixo* x;

(b) *determine as coordenadas do ponto em que seu gráfico intercepta o eixo* y;

(c) *determine as coordenadas do vértice da parábola;*

(d) *utilize as informações obtidas para esboçar seu gráfico.*

9 *Dada a função quadrática* $f(x) = 4x^2 - 11x - 3$ *determine o valor de* k *sabendo-se que* $f(k) = f(k + 1)$.

10 *Sabe-se que a função quadrática* $y = 3x^2 + bx + c$ *tem como raízes os números* -2 *e* 6. *Determine as coordenadas do vértice de seu gráfico e esboce-o.*

11 (UFPI) *Uma fábrica produz* $p(t) = t^2 - 2t$ *pares de sapatos* t *horas após o início de suas atividades diárias. Se a fábrica começa a funcionar as* $8:00$ *horas, quantos pares de sapatos serão produzidos entre* $10:00$ *e* $11:00$.

12 (UFGO) *Se* $f(x) = x - 3$, *determine os valores de* x *que satisfazem a equação* $f(x^2) = f(x)$.

13 (UFAL-AL) *São dadas as funções* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definidas por* $f(x) = x^2 - 2x - 3$ *e* $g(x) = \frac{3}{2}x + m$. *Se* $f(0) + g(0) = -5$, *determine o valor da expressão* $f(m) - 2g(m)$.

14 (PUC-SP) *Qual é a função quadrática cuja única raiz é* -3 *e cujo gráfico passa pelo ponto* $(-2, 5)$?

15 *De uma função quadrática sabe-se que uma das raízes é* 3 *e que as coordenadas do vértice de seu gráfico são* $(-1, -16)$. *Determine a outra raiz e esboce seu gráfico.*

16 *De uma função quadrática sabe-se que* $f(m + 3) = 2m^2 - 2m + 1$.

(a) Determine $f(1)$ e $f(-2)$; *(b) Determine $f(x)$.*

17 (Cesgranrio-RJ) *Para quais valores de b a parábola $y = x^2 + bx$ tem um único ponto em comum com a reta $y = x - 1$?*

3 Funções Polinomiais

Uma função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função da forma

$$y = f(x) = a_n x^n + \ldots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0;$$

em que:

- n é o grau do polinômio;
- $a_n, \ldots, a_3, a_2, a_1, a_0$, chamados coeficientes do polinômio, são constantes ($a_n \neq 0$);
- x é a variável independente; o domínio de toda função polinomial é $\mathbb{R}$;
- $y = f(x)$ é a variável dependente.

Exemplo 2 *$y = 4x^3 - 2x^2 + 1$ é um polinômio de grau 3; seus coeficientes são 4, -2, 0 e 1.*

3.1 Resultados Importantes

Identidade de Polinômios

Dois polinômios são ditos idênticos se os coeficientes das parcelas de mesma potência são iguais.

Exemplo 3 *Determine os valores de m, n e p para que os polinômios*

$$P(x) = (m+n)x^2 + 3nx - 4 \quad e \quad Q(x) = 2mx^2 - 6x + 4p$$

sejam idênticos.

Solução: comparando-se as parcelas de mesma potência temos o sistema

$$\begin{cases} m+n &= 2m \\ 3n &= -6 \\ 4p &= -4 \end{cases}$$

cuja solução é $m = -2$, $n = -2$ e $p = -1$ (verifique!).

Polinômio Identicamente Nulo

O polinômio identicamente nulo é aquele no qual todos os coeficientes são nulos, ou seja,

$$y = f(x) = 0x^n + 0x^{n-1} + \ldots + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Qual o grau de um polinômio identicamente nulo? o que você quiser.

Teorema do Resto

A divisão do polinômio P pelo fator linear $(x-r)$ é igual a $P(r)$.

Exemplo 4 *Determine o valor de m de modo que a divisão do polinômio $f(x) = (m-4)x^3 - mx^2 - 3$ por $g(x) = x - 2$ dê resto 5.*

Solução: pelo Teorema do Resto devemos ter $f(2) = 5$; logo

$$\begin{aligned} f(2) = 8(m-4) - 4m - 3 &= 5 \\ 4m &= 40 \\ m &= 10. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Resto observamos que se r é uma raiz de um polinômio P, isto é, se $P(r) = 0$, então P é divisível por $(x-r)$ (este resultado é conhecido como Teorema de D'Alembert). Generalizando este resultado, se P é divisível pelos fatores lineares $(x-r_1)$, $(x-r_2)$,..., $(x-r_n)$, então P também é divisível pelo produto

$$(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_n);$$

onde os números $r_1, r_2, \ldots, r_n$ são todos raízes de P.

Teorema Fundamental da Álgebra - TFA

Todo polinômio de grau n possui n raízes. No TFA devemos considerar:

- a existência de raízes complexas;
- a existência de raízes múltiplas (repetidas).

Forma Fatorada de um Polinômio

A importância do TFA é que ele garante que todo polinômio $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, de grau n, pode ser escrito na forma fatorada

$$P(x) = a_n(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)\ldots(x-r_n)$$

em que os números $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n$ são suas raízes (mais uma vez: podem existir raízes complexas e/ou múltiplas). Evidentemente que para escrevermos um polinômio na forma fatorada devemos inicialmente determinar suas raízes; para polinômios de grau maior que 2 isto nem sempre é uma tarefa simples[4].

Exemplo 5 *As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ são $x = 0$, $x = 1$ e $x = 2$ (verifique). Logo sua forma fatorada é*

$$P(x) = (x-0)(x-1)(x-2) = x(x-1)(x-2).$$

Exemplo 6 *As raízes do polinômio $P(x) = x^4 + 3x^3 - 25x^2 - 39x + 180$ são $x = -5$, $x = -4$, $x = 3$ e $x = 3$ (verifique). Logo sua forma fatorada é (observe que 3 é uma raiz dupla)*

$$P(x) = (x+5)(x+4)(x-3)(x-3) = (x+5)(x+4)(x-3)^2.$$

[4]Visite o site www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html pra uma discussão sobre a determinação exata das raízes de polinômios cúbicos (Método de Tartaglia) e quárticos (Método de Ferrari) por métodos algébricos (métodos que envolvem apenas adição, subtração multiplicação, divisão e raízes de expressões nos coeficientes do polinômio).

3.2 Problemas Propostos

18 *Determine todos os valores de* k *para que o polinômio*

$$P(x) = (k^2 - k - 6)x^3 - (k-3)x^2 + kx - 2$$

(a) seja de grau 1*;*

(b) seja de grau 2*.*

19 (Mack-SP) *Para quais valores de* m *o polinômio* $P(x) = (m-4)x^3 + (m^2 - 16)x^2 + (m+4)x + 4$ *é de grau* 2*?*

20 *Dados* $A(x) = x^2 + 3x + 1$*,* $B(x) = -2x^2 + x - 1$ *e* $C(x) = x^3 - x + 1$*, determine:*

(a) $P(x) = (2A + B)^2 - 4C$*;*

(b) $Q(x) = (B - A)^2 - 2(B + C)$*.*

21 (FGV-SP) *Sabe-se que em um polinômio* P *do* 3^o *grau o coeficiente de* x^3 *é* 1*, duas de suas raízes são* 1 *e* 2 *e que* $P(3) = 30$*. Determine* $P(-1)$*.*

22 (Fuvest-SP) *Sabe-se que um polinômio* $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *tem as seguintes propriedades:* $P(1) = 0$ *e* $P(-x) + P(x) = 0$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*. Determine* $P(2)$*.*

23 *Determine as constantes* A*,* B *e* C *na identidade*

$$A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)) = 1.$$

24 *Determine as constantes* α*,* β*,* γ *e* δ *para que os polinômios* $P(x) = \alpha(x+\gamma)^3 + \beta(x+\delta)$ *e* $Q(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 14$ *sejam idênticos.*

25 (PUC-SP) *Determine as constantes* m*,* n *e* p *para que os polinômios* $P(x) = (m+n+p)x^4 - (p+1)x^3 + mx^2 + (n-p)x + n$ *e* $Q(x) = 2mx^3 + (2p+7)x^2 + 5mx + 2m$ *sejam idênticos.*

26 *Determine* m *e* n *para que o polinômio* $f(x) = x^3 + 12x^2 + mx + n$ *seja um cubo perfeito*[5]*.*

27 *Determine o quociente* Q *e o resto* R *da divisão do polinômio* $f(x) = x^3 - 7x^2 - x + 8$ *pelo polinômio* $g(x) = x^2 - 4$*.*

28 *Em uma divisão de polinômios, o divisor é* $Q(x) = x^3 - x^2 + 3$*, o quociente é* $q(x) = x + 2$ *e o resto é* $R(x) = x^2 - 9$*. Determine o dividendo.*

29 *Em uma divisão de polinômios, o dividendo é* $P(x) = x^4 - 2x^2 + x - 7$*, o quociente é* $q(x) = x^2 + x - 1$ *e o resto é* $R(x) = -7$*. Determine o divisor.*

30 *Determine as constantes* α *e* β *para que o polinômio* $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2x$ *seja divisível pelo polinômio* $Q(x) = x^2 + 1$*.*

31 *Determine o valor de* m *para que o polinômio* $P(x) = (m^2 - 1)x^2 + 2mx - 1$ *seja divisível pelo polinômio* $Q(x) = 2x - 1$*.*

32 (ITA-SP) *Um polinômio* P *divido por* $x - 1$ *dá resto* 3*. O quociente desta divisão é então dividido por* $x - 2$*, obtendo-se resto* 2*. Determine o resto da divisão de* P *por* $(x-1)(x-2)$*.*

[5] Isto é, para que f seja da forma $f(x) = (ax + b)^3$

33 *Sabe-se que o polinômio* $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ *é divisível pelo fator linear* $x + 2$. *Determine todas as raízes de* P *e reescreva-o na forma fatorada.*

34 *Dado a função polinomial* $P(x) = x^4 - 8x^2 - 9$ *determine suas raízes e reescreva-a na forma fatorada.*

35 *Sabendo-se que* 2 *é uma raiz dupla da função polinomial* $P(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 4x$, *determine suas outras* 3 *raízes e reescreva-a na forma fatorada.*

36 (ESAN-SP) *Seja* $P(x) = Q(x) + x^2 + x + 1$. *Sabendo-se que* 2 *é raiz de* P *e* 1 *é raiz de* Q *determine* $P(1) - Q(2)$.

37 (UFMG) *Os polinômios* $P(x) = px^2 + q(x) - 4$ *e* $Q(x) = x^2 + px + q$ *são tais que* $P(x+1) = Q(2x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. *Determine* p *e* q.

38 (UFES) *Seja* f *é um polinômio tal que a soma de seus coeficientes é zero. Determine f(1).*

39 (ITA-SP) *Sejam* a, b *e* c *números reais que nesta ordem formam uma progressão aritmética de soma* 12. *Sabendo-se que os restos das divisões de* $P(x) = x^{10} + 8x^8 + ax^5 + bx^3 + cx$ *por* $x - 2$ *e* $x + 2$ *são iguais, determine a razão da progressão aritmética.*

40 *Para todo* $n \in \mathbb{N}^*$ *a expressão* $(x+4)^n + (x+3)^{2n} - 1$ *define formalmente um polinômio em* x. *Mostre que qualquer polinômio assim obtido é divisível pelo produto* $(x+3)(x+4)$.

4 Estudo do Sinal de uma Função

Nesta Seção discutimos o problema do estudo do sinal de uma função, assunto muitas vezes tratado de forma rápida e superficial nos ensinos básico e médio. Daremos aqui uma maior cobertura a este tópico uma vez que se trata de um pré-requisito fundamental para se aprender o Cálculo Diferencial e Integral. Também introduzimos dois novos tipos de funções: as funções racionais e as funções algébricas.

Estudar o sinal de uma função consiste em determinar os intervalos nos quais a função tem imagem negativa e os intervalos nos quais a função tem imagem positiva.

4.1 Estudo do sinal de funções polinomiais

Como toda função polinomial tem como domínio todo o conjunto $\mathbb{R}$ e é sempre contínua[6], suas imagens só podem mudar de sinal em suas raízes reais.

4.1.1 Estudo do sinal de funções polinomiais do 1^o grau

Neste caso o estudo de sinal é bastante simples, pois a função apresenta uma única raiz (obviamente real) e portanto muda de sinal uma única vez.

Exemplo 7 *A única raiz da função polinomial* $y = 2x - 6$ *é* $x = 3$. *Assim (Figura 2)*

- *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$ *(isto significa que qualquer valor de* x *maior que* 3 *resulta em uma imagem positiva);*
- *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | x < 3\}$ *(isto significa que qualquer valor de* x *menor que* 3 *resulta em uma imagem negativa).*

[6]Uma discussão detalhada de *continuidade* depende do conhecimento da teoria de *limites* (Veja Seção 2.5 e Apêndices B.2 e B.3 de George F. Simmons, Cálculo com Geometria Analítica - Volume 1, McGraw-Hill, São Paulo, 1987. Grosseiramente falando, uma função é contínua quando seu gráfico não apresenta falhas ou saltos.

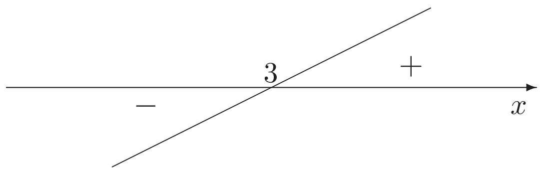


Figura 2: Estudo de sinal da função $y = 2x - 6$

4.1.2 Estudo do sinal de funções polinomiais do 2^o grau

Inicialmente determinamos as raízes reais (se existirem) do polinômio quadrático. A seguir podemos estudar o sinal utilizando o gráfico da função ou o quadro de sinais (com a função na forma fatorada). O Exemplo a seguir ilustra tais possibilidades.

Exemplo 8 *As raízes da função polinomial $y = x^2 - 3x - 4$ são $x = -1$ e $x = 4$.*

(i) Forma gráfica: como o coeficiente do termo quadrático é positivo, o gráfico da função é uma parábola com concavidade voltada para cima (Figura 3).

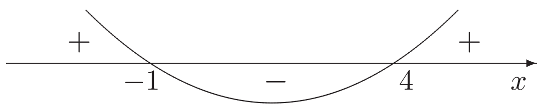


Figura 3: Estudo de sinal da função $y = x^2 - 3x - 4$

(ii) Quadro de sinais: escrevemos a função na forma fatorada

$$y = (x+1)(x-4)$$

e analisamos os sinais dos fatores nos subintervalos formados pelas raízes de cada fator (Figura 4).

	-1		4	
$x+1$	$-$		$+$	$+$

		-1		4

		-1	4
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$-$	$+$

Figura 4: Estudo de sinal da função $y = x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$

Temos:

- *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \quad ou \quad x > 4\}$;
- *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 4\}$.

4.1.3 Estudo do sinal de uma função polinomial qualquer

Neste caso devemos ser capazes de determinar as raízes do polinômio (não se frustre: para polinômios de grau maior que 2 isto nem sempre é fácil). Se pudermos determinar as raízes reais da função, podemos reescrevê-la na forma fatorada e então estudarmos seu sinal com o auxílio do quadro de sinais.

Exemplo 9 *As raízes da função polinomial* $y = x^3 - x^2 - 6x$ *são* $x = -2$, $x = 0$ *e* $x = 3$ *(verifique); logo sua forma fatorada é*

$$y = x(x+2)(x-3).$$

Analisamos então os sinais dos fatores nos subintervalos formados pelas raízes de cada fator (Figura 5). Temos:

- *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -2 \text{ ou } 0 < x < 3\}$;
- *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 0 \text{ ou } x > 3\}$.

		-2		0		3	
x	$-$		$-$		$+$		$+$
$x+2$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
y	$-$		$+$		$-$		$+$

Figura 5: Estudo de sinal da função $y = x^3 - x^2 - 6x$

4.2 Funções Racionais

Funções racionais são dadas por razões de polinômios, ou seja, são funções da forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

em que P e Q são polinômios quaisquer. Evidentemente, **como não existe divisão por zero**, o domínio de uma função racional são todos os números reais para os quais $Q(x) \neq 0$. As raízes de uma função racional são as próprias raízes de P (caso não anulem Q).

Exemplo 10 *Dada a função* $y = \frac{x-3}{x-1}$, *temos:*

- *domínio:* $x - 1 \neq 0$, *assim* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$;
- *raiz:* $x - 3 = 0$, *assim a função possui uma única raiz* $x = 3$;
- *estudo de sinal: utilizamos o quadro de sinais e analisamos os sinais dos fatores nos subintervalos formados pelas raízes de cada fator (Figura 6):*

		1		3	
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$x-3$	$-$		$-$		$+$
y	$+$		$-$		$+$

Figura 6: Estudo de sinal da função $y = \frac{x-3}{x-1}$

Temos:

- *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \quad ou \quad x > 3\}$*;*
- *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 3\}$*.*

Exemplo 11 *Dada a função* $y = \frac{x-3}{x^2-9}$*, temos:*

- *domínio:* $x^2 - 9 \neq 0$*, assim* $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \pm 3\}$*;*
- *raiz:* $x - 3 = 0$ *e neste caso* $x = 3$ *seria a provável raiz. Como* 3 *não está no domínio, esta função não possui raiz*[7]
- *estudo de sinal: como* $x = 3$ *é raiz do numerador e do denominador o fator linear* $x - 3$ *poderá ser cancelado*

$$y = \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{x+3}, \quad x \neq 3.$$

  Temos:

  - *a função é positiva em* $\{x \in \mathbb{R} | x > -3\}$*;*
  - *a função é negativa em* $\{x \in \mathbb{R} | x < -3\}$*.*

Uma função racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ se diz **própria** se o grau do polinômio P é menor que o grau do polinômio Q; caso contrário a função racional se diz **imprópria**. Em particular, toda função racional imprópria pode ser reescrita na forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}; \tag{4}$$

onde o polinômio q é o quociente e o polinômio r é o resto da divisão de P por Q.

Exemplo 12 *Na divisão do polinômio* $x^3 - 3x^2$ *por* $x - 1$ *o quociente é* $x^2 - 2x - 2$ *e o resto é* -2*. Assim a função racional* $f(x) = \frac{x^3-3x^2}{x-1}$ *pode ser reescrita como*

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x-1} = x^2 - 2x - 2 + \frac{-2}{x-1}.$$

4.3 Funções Algébricas

Funções algébricas são aquelas obtidas por qualquer manipulação algébrica de polinômios. Muitas vezes tais funções envolvem a extração de raízes e/ou divisões de polinômios. No caso de funções algébricas determinamos o seu domínio observando dois fatos:

(i) ***não existe divisão por zero***;

(ii) ***não existe raiz par de número negativo***.

Exemplo 13 *Determine o domínio e as raízes da função* $f(x) = \sqrt{21 - 18x - 3x^2}$*.*

Solução: uma vez que só podemos extrair a raiz quadrada de números não negativos, devemos ter

$$21 - 18x - 3x^2 \geq 0.$$

A Figura 7 ilustra graficamente a solução desta inequação. Observamos então que o domínio da função é $D(f) = \{x \in \mathbb{R} | -7 \leq x \leq< 1\}$*. As raízes são* $x = -7$ *e* $x = 1$*, uma vez que* $f(-7) = f(1) = \sqrt{0} = 0$*.*

[7] Cuidado: conforme podemos observar neste Exemplo a primeira providência quando analisamos uma função é determinar seu domínio. Se você começasse tentando encontrar as raízes poderia cometer um (grave) erro.

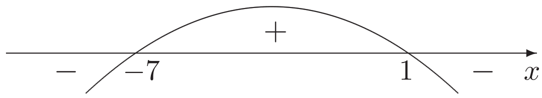


Figura 7: Determinando o domínio da função $f(x) = \sqrt{21 - 18x - 3x^2}$

4.4 Problemas Propostos

41 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

42 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = -x^2 + 4x$.

43 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^2 - 4x + 4$.

44 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = -x^2 + 4x - 13$.

45 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^3 - 6x^2 - 27x + 140$, *sabendo-se que uma de suas raízes é* 7.

46 *Determine as raízes e estude o sinal da função* $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

47 *Dada a função*$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-2}$

(a) determine seu domínio;

(b) determine suas raízes (se existirem);

(c) faça o estudo de seu sinal.

48 *Classifique as funções racionais como própria ou imprópria. Para as impróprias, reescreva-a na forma* (4).

(a) $\frac{x+1}{x^2+x-7}$

(b) $\frac{x^4-3x+1}{x^2-x}$

(c) $\frac{x^3+5x^2+2x+7}{x^3+x}$

(d) $\frac{x^3+8}{x^4+2x^2+4}$

(e) $\frac{x^6+5x^5+11x^4+7x^3+x^2-1}{x^2-1}$

49 *Faça o estudo de sinal das funções do Problema 48*

50 *Dada a função* $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+x^2-2x}}{x-1}$, *determine*

(a) seu domínio;

(b) suas raízes (se existirem);

(c) seu estudo de sinal.

51 *Dada a função* $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$, *determine*

(a) seu domínio;

(b) suas raízes (se existirem);

(c) seu estudo de sinal.

52 *Dada a função* $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-6}{x^2-x-6}}$, *determine*

(a) seu domínio;

(b) suas raízes (se existirem);

(c) seu estudo de sinal.

53 *Determine as constantes* A *e* B *que sastifazem a igualdade*

$$\frac{7x+14}{x^2+x-12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+4}$$

54 *Determine as constantes* A, B *e* C *que sastifazem a igualdade*

$$\frac{19}{x^3+x^2-14x+6} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4x-2}$$

55 *O estudo de sinal de uma função quadrática pode ser imediatamente determinado a partir do valor de seu discriminante e do sinal do coeficiente do termo quadrático. Faça um quadro resumo ilustrando as seis possibilidades de estudo de sinal para tais funções.*

56 *Podemos afirmar que* $\frac{x^2+2x-3}{x-1} = x+3$? *Explique.*

5 Funções Exponenciais

Dados $b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, denota-se por b^n o produto de b por si mesmo n vezes, isto é:

$$b^n = b \cdot b \cdot b \cdots b \text{ (n fatores).} \tag{5}$$

Em (5) a constante b é denominada base da potência e n seu expoente. Como conseqüências imediatas de (5) temos as seguintes propriedades para as potências ($m, n \in \mathbb{N}$):

(i) $b^m b^n = b^{m+n}$

(ii) $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

(iii) $(b^m)^n = b^{mn}$

(iv) $b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

(v) $b^0 = 1$, se $b \neq 0$

(vi) $0^n = 0$, se $n \neq 0$

(vii) $0^0 \;\nexists$

Além disto, definimos expoentes racionais (fracionários) como

$$b^{m/n} = \sqrt[n]{b^m},$$

onde fica subententido que m/n é uma fração irredutível e que a raiz n-ésima de b^m exista. A validade de (5) quando n é um número irracional é bem mais difícil de se estabelecer. Por exemplo, qual o significado de $3^{\sqrt{2}}$? Apesar desse incoveniente, admitiremos, sem provas, que tanto (5) como as propriedades listadas continuam válidas para expoentes reais quaisquer.

Para a desigualdade $b^x > b^y$ observamos que:

(i) se $b > 1$ então $x > y$;

(ii) se $0 < b < 1$ então $x < y$.

Notação Científica

Na notação científica, qualquer número racional pode ser escrito como o produto de um número x, $1 \leq x < 10$, multiplicado por uma potência de 10 adequada. Por exemplo:

- $0,02 = 2 \cdot 10^{-2}$
- $5.300 = 5,3 \cdot 10^{3}$
- $10.000 = 1 \cdot 10^{4}$
- $0,00083 = 8,3 \cdot 10^{-4}$

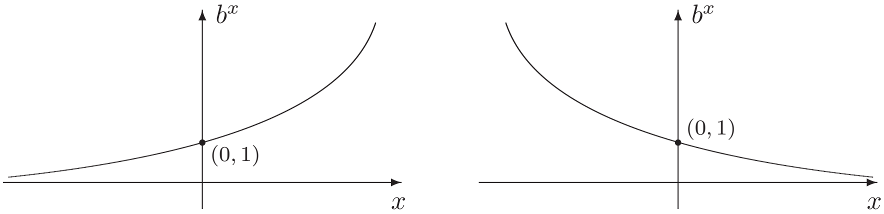
5.1 A Função Exponencial

Uma função exponencial é uma função da forma

$$f(x) = A \cdot b^{kx} \,, \tag{6}$$

em que A e k são constantes reais quaisquer e a base b é qualquer real positivo diferente de 1 ($b \in \mathbb{R}^{+}_{*}$ e $b \neq 1$). O leitor deve ficar atento para distinguir função potência, da forma x^a (a variável está na base), de função exponencial, da forma b^x (a variável está no expoente).

Em (6), quando $A > 0$ e $k > 0$, se $b > 1$ então a função exponencial é crescente - Figura 8(a); se $0 < b < 1$ a função exponencial é decrescente - Figura 8(b).



(a) Base $b > 1$ (b) Base $0 < b < 1$

Figura 8: Gráficos das funções exponenciais

Juros compostos

Se uma quantia de capital C é capitalizada periodicamente a uma taxa de juros j, pode-se mostrar[8] que o montante de capital M após t períodos é dado pela função exponencial

$$M(t) = C\left(1 + \frac{j}{100}\right)^{t}. \tag{7}$$

5.2 Problemas Propostos

57 *Escreva a expressão*

$$\sqrt{\frac{x}{\sqrt[3]{x^4}}\,\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt{x^7}}}$$

na forma de expoente fracionário.

58 *Sabendo-se que* $A = \frac{3^x+3^{-x}}{2}$ *e* $B = \frac{3^x-3^{-x}}{2}$, *determine* $A^2 + B^2$.

59 *Determine o valor da expressão* $2x^0 + x^{\frac{1}{3}} + 24x^{-\frac{1}{2}}$ *para* $x = 64$.

[8]Veja o Problema 70.

60 *Simplifique a expressão*

$$\frac{2^{n+4}+2^{n+2}+2^{n-1}}{2^{n-2}+2^{n-1}}.$$

61 *Resolva as equações exponenciais*

(a) $3^{x^2+1}=243$;

(b) $27^x=\sqrt{3}$;

(c) $(0.5)^{x^2+x-12}=1$;

(d) $8^{x-2}=8\sqrt{2}$;

(e) $2^x3^x=216$;

(f) $4^{x+2}+4^{x-1}-4^{x+1}+4^x=212$;

(g) $16^x4^{x+3}-8^{x+2}=0$;

(h) $2^{8x}-4\cdot 2^{4x}-32=0$;

62 *[ITA-SP] Resolva a equação* $4^{x^2}-5\cdot 2^{x^2}+4=0$.

63 *Resolva as inequações exponenciais*

(a) $2^{x+2}+2^{x-1}>3^{x-1}+3^x$;

(b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\frac{x-1}{x-2}}\geq 8^{\frac{x-1}{x}}$;

(c) $2^x-3>-2^{2-1}$;

64 *Para cada produto indicado, escreva os fatores em notação científica, determine o valor do produto e expresse-o em notação científica*

(a) $0,00002\cdot 12300$

(b) $102400\cdot 0,0005$

(c) $0,00025\cdot 1200000\cdot 1300$

(d) $0,004\cdot 0,000001\cdot 240000$

65 *Em uma colônia de bactérias, o número N de indivíduos em função do tempo t (em dias) é dado pela função exponencial $N(t)=M2^{kt}$, onde M e k são constantes.*

(a) Determine M e k sabendo-se que a população inicial (no tempo $t=0$) é de 100 bactérias e que esta população se quadruplicou após um dia.

(b) Determine o número de bactérias presentes na colônia após dois dias.

(c) Determine o número de bactérias presentes na colônia após cinco dias.

(d) Esboce o gráfico $N\times t$ no intervalo $0\leq t\leq 5$.

66 *[Unicamp-SP] Suponha que o número P de indivíduos de uma dada população em função do tempo t, em anos, seja dado pela função exponencial $P(t)=P_o\cdot 2^{-bt}$, em que P_o e b são constantes.*

(a) Determine P_o e b sabendo-se que a população inicial (no tempo $t=0$) é de 1024 indivíduos e que se reduziu à metade após 10 anos.

(b) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza à 25% da população inicial?

(c) Qual o tempo mínimo para que a população se reduza à $12,5\%$ da população inicial?

(d) Esboce o gráfico $P\times t$ no intervalo $0\leq t\leq 40$.

67 *Em uma cultura de bactérias, estima-se que após t dias a população P seja dada por*

$$P(t) = A \cdot \left(1 + 2^{\frac{t}{4}}\right) \ ,$$

em que A é uma constante positiva. Sabendo-se que a população inicial da cultura é de 20.000 *indivíduos, determine em quantos dias a população de bactérias atingirá 90.000 habitantes.*

68 *Na ausência de predadores, restrições de espaço e restrições de alimentos, as populações de topos os tipos de seres vivos, de bactérias a mamíferos de grande porte, tendem a crescer exponencialmente. Como exemplo, considere uma população de microorganismos, inicialmente com* 1.000 *indivíduos, e que triplica a cada* 20 *minutos.*

(a) Qual o tamanho desta população após 1 *hora? e após* 2 *horas?*

(b) Determine uma função que determine o tamanho da população de microorganismos após t horas.

69 *Se um raio de luz de intensidade k, em lux/m^2, é projetado verticalmente para baixo na água, então a intensidade luminosa I a uma profundidade de h metros é dada por*

$$I(h) = k3^{\alpha t} \ [=] \ lux/m^2,$$

onde k e α são constantes.

(a) Determine k e α sabendo-se que a intensidade luminosa é de 12 *lux/m^2 na superfície e de* 4 *lux/m^2 a um metro de profundidade;*

(b) determine a intensidade luminosa a 3 metros de profundidade.

70 *Suponha que uma quantia de capital C é capitalizada periodicamente a uma taxa de juros j. Use indução matemática para mostrar que o montante de capital M após n períodos é dado pela função exponencial*

$$M(n) = C\left(1 + \frac{j}{100}\right)^n.$$

6 Logaritmos

Definimos aqui o logaritmo como o inverso da exponencial, no seguinte sentido:

$$\log_b(a) = c \iff b^c = a \tag{8}$$

Em (8) utilizamos a seguinte nomenclatura

- b é a base do logaritmo;
- a é o logaritmando;
- c é o logaritmo.

Condição de existência de $\log_b(a)$

Como na exponencial $b^x = a$ a base satisfaz a condição $b > 0$ e $b \neq 1$, temos que $a > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$. Assim, para $\log_b(a)$ também devemos ter:

- $b > 0$ e $b \neq 1$;
- $a > 0$, isto é, **só existe logaritmo de números positivos**.

Conseqüências da definição

Como conseqüências da definição (8), dados $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, $b \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$, temos os seguintes resultados imediatos:

(i) $\log_b(1) = 0$, pois $b^0 = 1$;

(ii) $\log_b(b) = 1$, pois $b^1 = b$;

(iii) $\log_b(b^n) = n$, pois $b^n = b^n$;

(iv) $\log_b(a) = \log_b(c) \Rightarrow \; a = c$

(v) se $b > 1$, $\log_b(a) > \log_b(c) \Rightarrow \; a > c$

(vi) se $0 < b < 1$, $\log_b(a) > \log_b(c) \Rightarrow \; a < c$

Propriedades dos logaritmos

Também como conseqüência da definição (8), dados $a, b, c \in \mathbb{R}_*^+$, $b \neq 1$ e $n \in \mathbb{R}$, temos as seguintes propriedades para os logaritmos:

(i) o logaritmo do produto é a soma dos logaritmos:

$$\log_b(ac) = \log_b(a) + \log_b(c); \tag{9a}$$

(ii) o logaritmo do quociente é a diferença dos logaritmos:

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c); \tag{9b}$$

(iii) o logaritmo da potência é o expoente vezes o logaritmo:

$$\log_b(a^n) = n \log_b(a); \tag{9c}$$

(iv) exponencial do logaritmo de mesma base:

$$a^{\log_a(b)} = b; \tag{9d}$$

(v) Mudança de base, em que $B \in \mathbb{R}_*^+$ e $B \neq 1$:

$$\log_b(a) = \frac{\log_B(a)}{\log_B(b)} \tag{9e}$$

Provamos aqui a propriedade (9a) e deixamos as provas das demais para o leitor[9]. Sejam

$$\log_b(ac) = x \quad \therefore \quad b^x = ac; \tag{10a}$$
$$\log_b(a) = y \quad \therefore \quad b^y = a; \tag{10b}$$
$$\log_b(c) = z \quad \therefore \quad a^z = c. \tag{10c}$$

Substituindo (10b) e (10c) em (10a) temos

$$a^x = bc = a^y a^z = a^{y+z} \quad \therefore \quad x = y + z \quad \therefore \quad \log_a(bc) = \log_a(b) + \log_a(c).$$

[9] Veja Problema 90

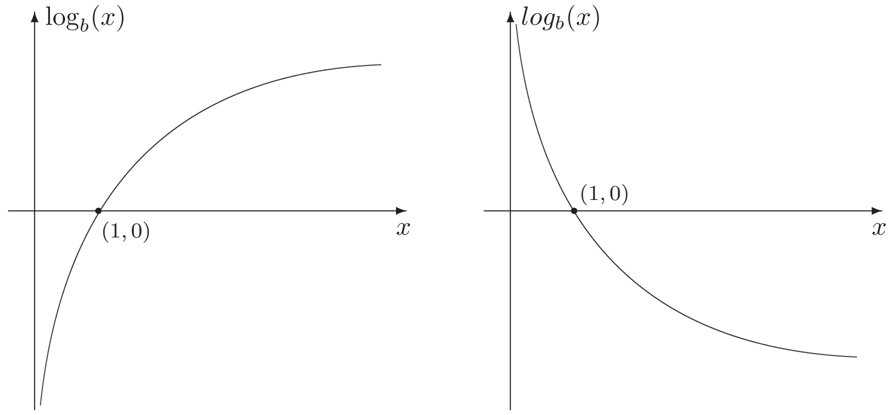
Bases importantes

- Logaritmo comum: é o logaritmo de base 10, isto é, $\log_{10}(a)$. Para o logaritmo comum geralmente omitimos o valor da base, isto é, $\log_{10}(a) = \log(a)$.
- Logaritmo natural (ou neperiano): é o logaritmo de base e, isto é, $\log_e(a)$. O logaritmo natural geralmente é denotado por ln, isto é, $\log_e(a) = \ln(a)$.
- Outro logaritmo importante é o logaritmo de base 2, isto é, $\log_2(a)$.

Historicamente os logaritmos mais utilizados eram o comum e o natural. Com o advento dos computadores digitais o sistema de numeração binária tornou-se amplamente utilizado, e por conseqüência, também o logaritmo de base 2.

Evidentemente, conhecendo-se os valores dos logaritmos em uma base, podemos determiná-los em qualquer outra base através da equação (9e). Se o leitor possuir uma calculadora científica poderá verificar que ela calcula logaritmos apenas em algumas bases; geralmente apenas nas 3 aqui citadas.

6.1 A função logarítmica



(a) Base $b > 1$

(b) Base $0 < b < 1$

Figura 9: Gráficos das funções logarítmicas

Dado $b \in \mathbb{R}_*^+$ e $b \neq 1$ definimos a função logarítmica $f : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = \log_b(x)$. Se $a > 1$ então a função logarítmica é crescente, Figura 9(a). Se $0 < b < 1$ então a função logarítmica é decrescente, Figura 9(b).

É importante ressaltar que, como só existe logaritmo de número positivo, para determinarmos o domínio de uma função logarítmica devemos obrigar o logaritmando ser positivo.

Exemplo 14 *Para a função logarítmica* $f(x) = \log(4 - x^2)$ *devemos ter* $4 - x^2 > 0 \therefore -2 < x < 2$. *Assim o domínio é* $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 < x < 2\}$.

6.2 Problemas Propostos

71 *Calcule os logaritmos*

(a) $\log_2(32)$ *(d)* $\log_5(0,0016)$ *(g)* $\log_{\sqrt{8}}(0.125)$

(b) $\log_5(625)$ *(e)* $\log_{10}(0,00001)$ *(h)* $\log_{2\sqrt{2}}(256)$

(c) $\log_9(243)$ *(f)* $\log_{1/3}(81)$ *(i)* $\log_{2/\sqrt{3}}(9/16)$

72 *As igualdades a seguir são verdadeiras? Sob quais condições?*

(a) $\log\left(\frac{ab}{c^2}\right) = \frac{\log(a)+\log(b)}{2\cdot\log(c)}$

(b) $\log(a) = -\log\left(\frac{1}{a}\right)$

73 *A igualdade* $\log_q(p) = \frac{1}{\log_p(q)}$ *é verdadeira? Sob quais condições?*

74 *Avalie as expressões.*

(a) $\log_5(1) + 4^{\log_4(5)} + \log_3(\log_5(125))$ *(b)* $49^{\log_7(2)} - 25^{\log_5(3)}$

75 *Sabendo-se que* $\log(a) = 2$, $\log(b) = 3$ *e* $\log(c) = -6$, *calcule*

(a) $\log(ab)$ *(c)* $\log\left(\frac{ab}{c}\right)$ *(e)* $\log\left(\frac{\sqrt[5]{ab}}{\sqrt{c}}\right)$

(b) $\log(abc)$ *(d)* $\log\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)$ *(f)* $\log\left(\frac{\sqrt{a^2b^2}}{c^3}\right)$

76 *Sabendo-se que* $\log_2(3) = a$, *calcule (em função de a)*

(a) $\log_6(9)$ *(b)* $\log_{36}(64)$

77 *Sabendo-se que* $\log_a(x) = 2$, $\log_b(x) = 3$ *e* $\log_c(x) = 5$, *calcule*

(a) $\log_{ab}(x)$ *(b)* $\log_{abc}(x)$ *(c)* $\log_{\frac{ab}{c}}(x)$

78 *[UEPB] Sabendo-se que* $\log(x) = 8$, *determine o valor da expressão*

$$\log\sqrt{\frac{x^3\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}}$$

79 *[UFCE] Se* $\log_7(875) = a$, *determine* $\log_{25} 245$.

80 *Resolva as equações logarítmicas*

(a) $\log_5(x^2+3) = \log_5(x+3)$ *(d)* $[\log_8(x)]^2 - 3[\log_8(x)] + 2 = 0$

(b) $\log_2(14-5x) = 2$ *(e)* $\log(3x^2+7) - \log(3x-2) = 1$

(c) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+3x-1) = -2$ *(f)* $\log(x+1) + 2 = \log(4x^2-500)$

81 *Em um triângulo retângulo, sejam* A *a medida da hipotenusa e* B *e* C *as medidas dos catetos, tais que* $A \pm C \neq 1$ *e* $B \neq 1$. *Mostre que*

$$2\cdot\log_{A+C}(B)\cdot\log_{A-C}(B) = \log_{A+C}(B) + \log_{A-C}(B).$$

82 *Resolva as inequações logarítmicas*

(a) $[\log(x)]^2 - \log(x) > 0$

(b) $\log(x^2 - 2x - 7) < 0$

(c) $2[\log(x)]^2 - \log(x) > 6$

(d) $\log_2\left[\log_{\frac{1}{4}}(x^2 - 2x + 1)\right] < 0$

83 *Determine o domínio e esboce o gráfico das funções dadas.*

(a) $f(x) = \log(x - 1)$

(b) $f(x) = \log(x^2 - 1)$

(c) $f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$

(d) $\log(\log(x))$

84 *Após o consumo de uma dose substancial de cerveja, a concentração C de álcool no sangue de uma mulher atinge $0,3$ mg/mm^3. Ao parar de beber, a concentração diminui com o tempo, e é dada pela função*

$$C(t) = 0,3 \cdot (0,5)^t \ ,$$

em que t é o tempo, em horas, após o instante em que a mulher parou de beber. Se a concentração máxima admitida na localidade é de $0,0375$ mg/mm^3, quanto tempo esta mulher deverá esperar para dirigir?

85 *Uma aplicação financeira é capitalizada a uma taxa de 50% a.a., isto é, 50% ao ano. Para um depósito inicial de R\$ $1.000,00$, determine o tempo mínimo para que o montante da aplicação atinja R\$ $10.000,00$.*
Dados: $log(2) = 0,30$ e $log(3) = 0,48$.

86 *A intensidade M de um terremoto medido na escala Richter é um número que varia de $M = 0$ (nenhum tremor) até $M = 8,9$ (maior terremoto conhecido). O valor de M é dado pela fórmula empírica*

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right),$$

onde E é a energia liberada no terremoto (em KWh - kilowatt-hora) e E_0 é uma constante que vale 7×10^{-3} KWh.

(a) Qual a energia liberada em um terremoto de grandeza $M = 6$?

(b) Uma cidade de cerca de 300.000 habitantes consome cerca de 3.5×10^6 KWh de energia elétrica por dia. Se a energia de um terremoto pudesse ser convertida em energia elétrica, quantos dias de fornecimento de energia para esta cidade obteríamos com a energia liberada em um terremoto de grandeza $M = 8$?

87 *O pH de uma solução salina é definido pela fórmula*

$$pH = -\log[H^+]$$

onde $[H^+]$ é a concentração, em mols por litro, do íon Hidrogênio.

(a) *Qual o pH da água pura, sabendo-se que sua concentração de* $[H^+]$ *vale* $1,00 \times 10^{-7}$*?*

(b) *Uma solução é dita ácida se sua concentração de* $[H^+]$ *é maior que a da água, e dita básica (ou alcalina) se sua concentração de* $[H^+]$ *é menor que a da água. Quais os valores de pH caracterizam as soluções ácidas? Quais os valores de pH caracterizam as soluções básicas?*

88 *[Vunesp-SP] O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às* $22:00$*. Às* $22:30$ *o médico da polícia chegou e imediatamente mediu a temperatura do cadáver, que era de* $32,5^oC$*. Uma hora mais tarde mediu a temperatura outra vez e encontrou* $31,5^oC$*. A temperatura do ambiente foi mantida constante a* $16,5^oC$*. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja de* $36,5^oC$ *e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do cadáver seja dada por*

$$D(t) = D_o \cdot 2^{-2\alpha t} ,$$

em que t é o tempo em horas, D_o *é a diferença da temperatura do cadáver com a do ambiente no instante* $t = 0$*,* $D(t)$ *é a diferença da temperatura do cadáver com a do ambiente em um instante t qualquer e* α *uma constante positiva. Determine o horário do assassinato.*

89 *No estudo da acústica é usual denotarmos por* I *a intensidade sonora (medida em watts por metro quadrado,* w/m^2 *) de uma fonte de som. Outra grandeza importante em acústica é a altura* L *do som, medida em decibéis, e dada por*

$$L = 10 \cdot log(\frac{I}{I_o}) ,$$

em que I *é a intensidade do som para a qual desejamos determinar a altura e a constante* $I_o = 10^{-12}\ w/m^2$ *é o valor mínimo de intensidade sonora para que o som seja perceptível pelo sistema auditivo humano (valor médio, obtido para uma freqüência de* 100 *hertz).*

(a) *Sabe-se que para o sistema auditivo humano a intensidade sonora máxima suportável (limiar de dor) é de* $100\ w/m^2$*. Determine a altura máxima audível pelo sistema auditivo humano.*

(b) *Qual a intensidade sonora, em uma agitada sala de aula, na qual a altura do som é de* 90 *decibéis.*

90 *Use a definição* (8) *para provar as propriedades* (9b), (9c), (9d) *e* (9e)*.*

91 *Se* $\log_b(x + \sqrt{x^2 - 1}) = a$*, mostre que* $x = \frac{1}{2}(b^a + b^{-a})$*.*

92 *Mostre que* $\log_b(x + \sqrt{x^2 - 1}) = -\log_b(x - \sqrt{x^2 - 1})$*.*

7 Respostas dos Problemas Propostos

- Problema 1 (página 1)

(a) $(2, 0)$ (b) $(2, -3)$ (c) $(\frac{3}{8}, \frac{1}{8})$ (d) paralelas

- Problema 2 (página 1)

(a) $(5,0)$ (b) $(0,-10)$

- Problema 3 (página 2) $a=b=4$
- Problema 4 (página 2) $f(x)=\frac{2}{3}x$
- Problema 5 (página 2) $f(3)=-\frac{5}{2}$
- Problema 6 (página 2) $d(t)=450t$
- Problema 7 (página 3)

  (a) $x=2$ e $x=3$ (b) $x=-1$ (c) $x=11$ (d) $x=-5$ ou $x=11$

- Problema 8 (página 3)

  (a) $(1,0)$ e $(9,0)$; (b) $(0,9)$; (c) $(5,-16)$

- Problema 9 (página 3) $k=\frac{7}{8}$.
- Problema 10 (página 3) $(2,-48)$.
- Problema 11 (página 3) $p(3)-p(2)=3$ pares de sapatos.
- Problema 12 (página 3) $x=0$ ou $x=1$.
- Problema 13 (página 3) 15.
- Problema 14 (página 3) $f(x)=5(x+3)^2$.
- Problema 15 (página 3) $x=-5$.
- Problema 16 (página 3)

  (a) $f(1)=13$ e $f(-2)=61$; (b) $f(x)=2x^2-14x+25$.

- Problema 17 (página 4) $b=-1$ ou $b=3$.
- Problema 18 (página 6)

  (a) $k=3$; (b) $k=-2$.

- Problema 19 (página 6) para nenhum m.
- Problema 20 (página 6)

  (a) $P(x)=-4x^3+49x^2+18x-3$; (b) $Q(x)=9x^4+10x^3+20x^2+8x+4$.

- Problema 21 (página 6) $P(-1)=66$.
- Problema 22 (página 6) $P(2)=6$.
- Problema 23 (página 6) $A=\frac{1}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=\frac{2}{3}$.
- Problema 24 (página 6) $\alpha=1$, $\beta=3$, $\gamma=\delta=2$.
- Problema 25 (página 6) $m=1$, $n=2$ e $p=-3$.
- Problema 26 (página 6) $m=48$ e $n=64$.
- Problema 27 (página 6) $Q(x)=x-7$ e $R(x)=3x-20$.
- Problema 28 (página 6) $P(x)=x^4+x^3-x^2+3x-3$
- Problema 29 (página 6) $Q(x)=x^2-x$.

- Problema 30 (página 6) $\alpha = 2$ e $\beta = 1$.
- Problema 31 (página 6) $m = -5$ ou $m = 1$
- Problema 32 (página 6) $2x + 1$
- Problema 33 (página 7) $x = -3$, $x = -2$, $x = 3$; $P(x) = (x+3)(x+2)(x-3)$.
- Problema 34 (página 7) $x = \pm 3$ e $x = \pm i$; $P(x) = (x+3)(x-3)(x+i)(x-i)$.
- Problema 35 (página 7) $x = 0$ (raiz simples), $x = -1$ (raiz dupla); $P(x) = x(x+1)^2(x-2)^2$.
- Problema 36 (página 7) $P(1) - Q(2) = 10$
- Problema 37 (página 7) $p = 4$ e $q = 0$.
- Problema 38 (página 7) $f(1) = 0$.
- Problema 39 (página 7) $\frac{28}{5}$
- Problema 41 (página 11)
  - raízes: $x = -1$ e $x = 6$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ ou } x > 6\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 6\}$.
- Problema 42 (página 11)
  - raízes: $x = 0$ e $x = 4$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | 0 < x < 4\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} | x < 0 \text{ ou } x > 4\}$.
- Problema 43 (página 11)
  - raízes: $x = 2$ (dupla);
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$;
    * a função nunca é negativa.
- Problema 44 (página 11)
  - raízes: não existe raiz real (as raízes são $x = 2 \pm 3i$);
  - estudo de sinal: a função nunca é negativa $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
- Problema 45 (página 11)
  - raízes: $x = -5$, $x = 4$ e $x = 7$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -5 < x < 4 \text{ ou } x > 7\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -5 \text{ ou } 4 < x < 7\}$.
- Problema 46 (página 11)
  - raízes: $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ e $x = 3$;
  - estudo de sinal
    * a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -3 \text{ ou } -2 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$;
    * a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -3 < x < -2 \text{ ou } 2 < x < 3\}$.
- Problema 47 (página 11)
  (a) domínio: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 2\}$;
  (b) raízes: $x = -1$ e $x = 4$;
  (c) estudo de sinal.

- a função é positiva em $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 < x < 2 \text{ ou } x > 4\}$;
- a função é negativa em $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -1 \text{ ou } 2 < x < 4\}$.

- Problema 48 (página 11)
  (a) própria
  (b) imprópria $\frac{x^4-3x+1}{x^2-x} = x^2 + x + 1 + \frac{-2x+1}{x^2-x}$
  (c) imprópria $\frac{x^3+5x^2+2x+7}{x^3+x} = 1 + \frac{5x^2+x+7}{x^3+x}$
  (d) própria
  (e) imprópria $\frac{x^6+5x^5+11x^4+7x^3+x^2-1}{x^2-1} = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 12x + 13 + \frac{12x+12}{x^2-1}$

- Problema 50 (página 11)
  (a) domínio: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -2 \leq x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$;
  (b) raíz: $x = -2$ e $x = 0$.

- Problema 51 (página 11)
  (a) domínio: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -3 \text{ ou } x > 5\}$;
  (b) raíz: $x = -3$.

- Problema 52 (página 12)
  (a) domínio: $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq -3 \text{ ou } -2 < x \leq 2 \text{ ou } x > 3\}$;
  (b) raíz: $x = -3$ e $x = 2$.

- Problema 53 (página 12) $A = 5$ e $B = 2$
- Problema 54 (página 12) $A = 1$, $B = -1$ e $C = -7$
- Problema 57 (página 13) $x^{-15/46}$
- Problema 58 (página 13) $\frac{3^{2x}+3^{-2x}}{2}$
- Problema 60 (página 14) 82/3
- Problema 61 (página 14)
  (a) $x = \pm 2$
  (b) $x = 5/3$
  (c) $x = -4$ ou $x = 3$
  (d) $x = 19/6$
  (e) $x = 3$
  (f) $x = 2$
  (g) $x = 0$
  (h) $x = 3/4$

- Problema 63 (página 14)
  (a) $x < 3$
  (b) $0 < x \leq 1$ ou $12/7 \leq x2$
  (c) $x > 0$

- Problema 65 (página 14)
  (a) $M = 100$ e $k = 2$
  (b) $N(5) = 102.400$

- Problema 69 (página 15)
  (a) $K = 12$ e $\alpha = -1$
  (b) $I(3) = 12/27$

- Problema 71 (página 17)

(a) 5
(b) 4
(c) 5/2
(d) -4
(e) -5)
(f) -4
(g) -1)
(h) 16/3
(i) -4

- Problema 74 (página 18)

(a) 6
(b) -5

- Problema 75 (página 18)

(a) 5
(b) -1
(c) 11
(d) -3
(e) 4
(f) 23

- Problema 76 (página 18)

(a) $\frac{2a}{1+a}$
(b) $\frac{3}{1+a}$

- Problema 77 (página 18)

(a) 6/5
(b) 30/31
(c) 30/19

- Problema 80 (página 18)

(a) $x = 0$ e $x = 1$
(b) $x = 2$
(c) $x = -5$ e $x = 2$
(d) $x = 8$ e $x = 64$
(e) $x = 1$ e $x = 9$
(f) $x = -5$ e $x = 30$

- Problema 82 (página 19)

(a) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1 \quad \text{ou} \quad x > 10\right\}$
(b) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < \frac{1}{10\sqrt{10}} \quad \text{ou} \quad x > 100\right\}$
(c) $\left\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \quad \text{e} \quad x \neq 1\right\}$

- Problema 86 (página 19)

(a) 7×10^6 KWh
(b) 2000 dias! (aproximadamente 5 anos e 6 meses)

- Problema 87 (página 19)

(a) 7
(b) ácidas: $0 < pH < 7$; básicas: $7 < pH < 14$