

# Trigonometria

Fabiano José dos Santos

7 de outubro de 2010

## 1 Conceitos preliminares

### O número $\pi$ e o comprimento de uma circunferência

Dada uma circunferência de raio  $r$ , diâmetro  $d = 2r$ , o número  $\pi$  é definido como a razão do comprimento  $C$  da circunferência pelo seu diâmetro  $d$ , isto é,

$$\pi = \frac{C}{d} \quad \text{ou} \quad \pi = \frac{C}{2r}. \quad (1)$$

Pela definição do número  $\pi$  na equação (1) observamos que o comprimento da circunferência é dado por<sup>1</sup>

$$C = \pi d \quad \text{ou} \quad C = 2\pi r \quad (2)$$

### Ângulos e suas medidas

Duas semi retas (dois segmentos de retas) com origem comum formam um ângulo plano. Neste texto designaremos os ângulos por letras gregas minúsculas. A Figura 1(a) mostra um ângulo  $\alpha$ ; os segmentos  $AB$  e  $AC$  são chamados lados do ângulo e o ponto  $A$  é o seu vértice.

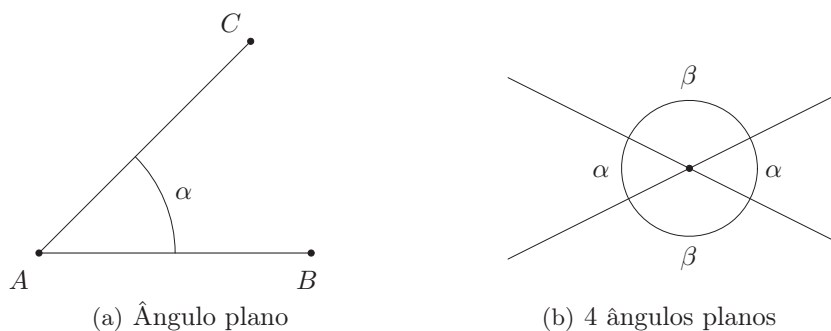


Figura 1: Ângulos planos

Duas retas (ou duas semi retas ou dois segmentos de retas) que se interceptam formam 4 ângulos planos - Figura 1(b). Neste caso é útil observar que os ângulos opostos pelo vértice têm mesma medida.

Há três modos de se medir ângulos.

---

<sup>1</sup>É útil observar que a equação (2) não é passível de demonstração; trata-se simplesmente de uma maneira de reescrever a definição do número  $\pi$ .

- **Grado:** 1 grado é um ângulo correspondente a  $\frac{1}{400}$  de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 400 grados - Figura 2(a).
- **Grau:** 1 grau, denotado  $1^\circ$ , é um ângulo correspondente a  $\frac{1}{360}$  de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de  $360^\circ$  - Figura 2(b).
- **Radiano:** 1 radiano, denotado 1 rad, é um ângulo correspondente a um arco de mesmo comprimento do raio da circunferência - Figura 2(c).

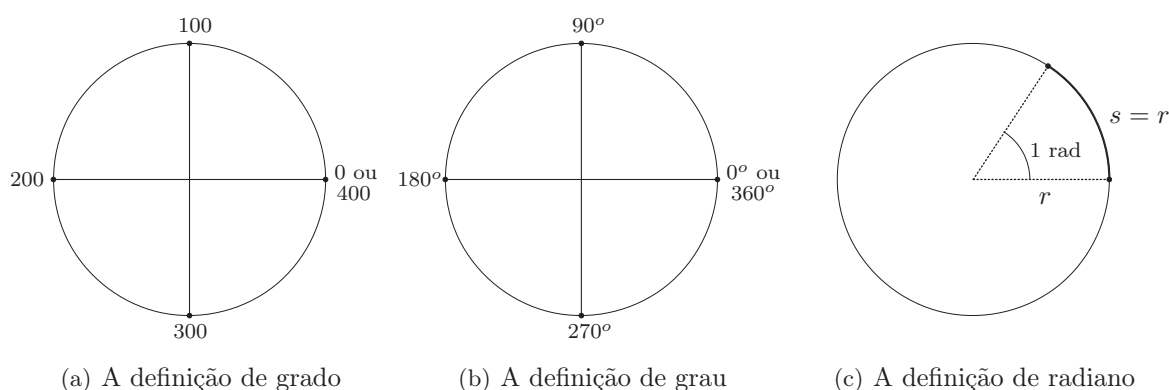


Figura 2: Medidas de ângulo

### O comprimento de um arco

Em uma circunferência de raio  $r$  a definição de radiano implica que um ângulo de 1 radiano compreende um arco de comprimento  $r$ . Logo um ângulo de  $\theta$  radianos, Figura 3(a), compreende um arco de comprimento  $s$ . O valor  $s$  é dado por

$$\frac{1 \text{ rad}}{r} = \frac{\theta \text{ rad}}{s} \quad \therefore \quad s = r \theta$$

### Conversão grau-radiano

De modo análogo, um arco de comprimento  $r$  compreende um ângulo de 1 radiano. A circunferência completa, um arco de comprimento  $2\pi r$ , compreende um ângulo  $\theta$  dado por

$$\frac{r}{1 \text{ rad}} = \frac{2\pi r}{\theta \text{ rad}} \quad \therefore \quad \theta = 2\pi \text{ rad}$$

Em outras palavras, volta completa na circunferência corresponde a um ângulo de medida  $2\pi$  radianos - Figura 3(b).

Assim, dado um ângulo  $\theta$  radianos, sua medida  $x$  em graus é dada por

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\theta \text{ rad}}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{180}{\pi} \theta$$

**Exemplo 1** Determine a medida do ângulo  $\frac{3}{4}\pi \text{ rad}$  em graus.

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{3}{4}\pi \text{ rad}}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{180}{\pi} \frac{3}{4}\pi = 135^\circ$$

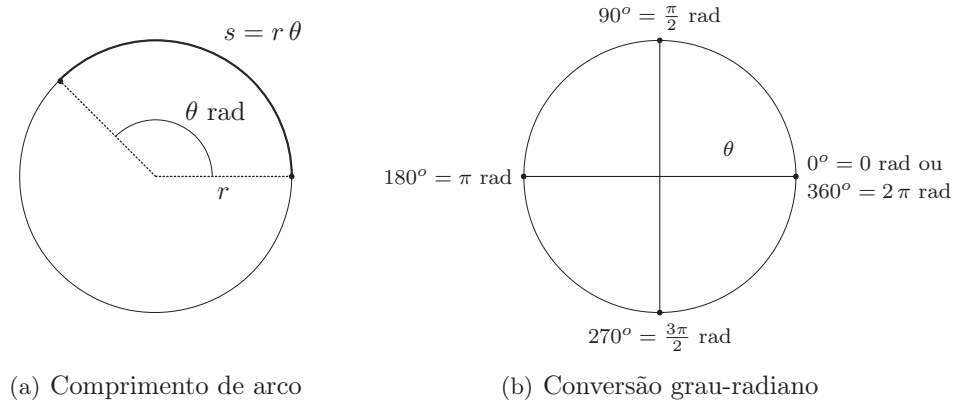


Figura 3: Comprimento de arco e a conversão grau-radiano

**Exemplo 2** Determine a medida do ângulo  $155^\circ$  em radianos.

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{x \text{ rad}}{155^\circ} \quad \therefore \quad x = \frac{155}{180} \pi = \frac{31}{36} \pi \text{ rad}$$

### Classificação de triângulos

Triângulo é um polígono com 3 ângulos internos, logo 3 lados. Podemos classificá-los de duas maneiras:

- quanto aos tamanhos dos lados:
  - equilátero - 3 lados de mesmo comprimento,
  - isósceles - 2 lados de mesmo comprimento,
  - escaleno - 3 lados de comprimentos diferentes;
- quanto às medidas dos ângulos:
  - acutângulo - 3 ângulos agudos (menores que  $90^\circ$  graus),
  - retângulo - 1 ângulo reto ( $90^\circ$  graus),
  - obtusângulo - 1 ângulo obtuso (maior que  $90^\circ$  graus).

## 2 Triângulo retângulo

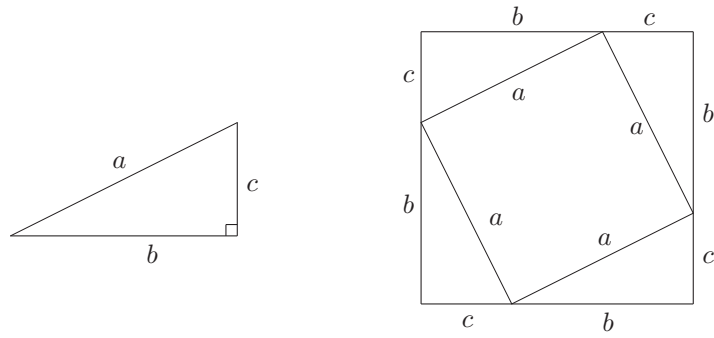
### 2.1 Teorema de Pitágoras

Em um triângulo retângulo, Figura 4(a), os lados que formam o ângulo reto são denominados catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado hipotenusa. Os comprimentos da hipotenusa e dos catetos estão relacionados pelo Teorema de Pitágoras

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3)$$

Uma prova bastante simples do Teorema de Pitágoras pode ser obtida através da Figura 4(b): a área do quadrado externo é igual à soma da área do quadrado interno mais a área dos 4 triângulos retângulos, isto é:

$$a^2 + 4 \frac{bc}{2} = (b + c)^2 \therefore a^2 + 2bc = b^2 + 2bc + c^2 \therefore a^2 = b^2 + c^2.$$



(a) Triângulo retângulo.

(b) Teorema de Pitágoras.

Figura 4: Triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras.

## 2.2 Razões trigonométricas no triângulo retângulo

Para cada ângulo agudo de um triângulo retângulo define-se 6 razões trigonométricas (conhecidas como seno, cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante) da seguinte maneira

- seno =  $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$
- cosseno =  $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$
- tangente =  $\frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$
- cotangente =  $\frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$
- secante =  $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adjacente}}$
- cossecante =  $\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto oposto}}$

A Figura 5 ilustra as 6 razões trigonométricas para os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  de um triângulo retângulo.

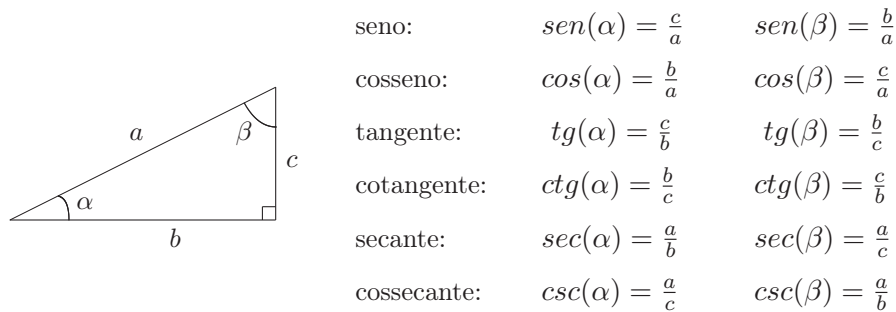


Figura 5: As razões trigonométricas.

### 2.2.1 Razões trigonométricas de alguns ângulos notáveis

Na Figura 6(a) traçamos a diagonal de um quadrado de lado  $a$  e então determinamos as razões trigonométricas para o ângulo de  $45^\circ$  obtido:

$$cos(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad sen(45^\circ) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad tg(45^\circ) = \frac{a}{a} = 1.$$

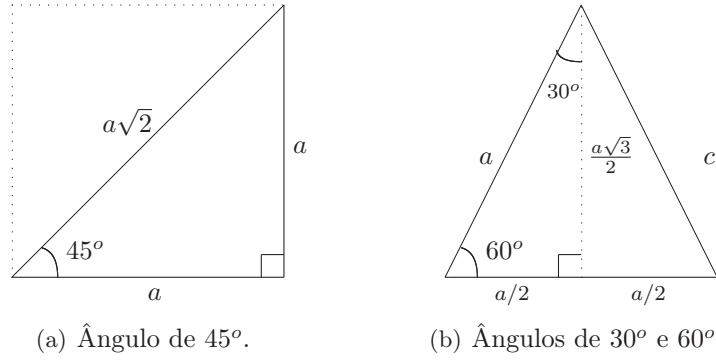


Figura 6: Ângulos notáveis.

Na Figura 6(b) traçamos a altura de um triângulo equilátero de lado  $a$  e então determinamos as razões trigonométricas para os ângulos de  $30^\circ$  e  $60^\circ$  obtidos:

$$\cos(30^\circ) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \sin(30^\circ) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{a/2}{a\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos(60^\circ) = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad , \quad \sin(60^\circ) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad \operatorname{tg}(60^\circ) = \frac{a\sqrt{3}/2}{a/2} = \sqrt{3}.$$

A tabela 1 resume estes resultados.

ângulo	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1: Valores de seno, cosseno e tangente dos ângulos  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ .

### 3 Algumas identidades trigonométricas

Na Figura 5 temos que  $b = a \cos(\alpha)$  e  $c = a \sin(\alpha)$ ; obtemos então as seguintes identidades:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{c}{b} = \frac{a \sin(\alpha)}{a \cos(\alpha)} \quad \therefore \quad \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (4a)$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{b}{c} = \frac{a \cos(\alpha)}{a \sin(\alpha)} \quad \therefore \quad \operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} \quad (4b)$$

$$\sec(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{a}{a \cos(\alpha)} \quad \therefore \quad \sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad (4c)$$

$$\csc(\alpha) = \frac{a}{c} = \frac{a}{a \sin(\alpha)} \quad \therefore \quad \csc(\alpha) = \frac{1}{\sin(\alpha)} \quad (4d)$$

Usando o Teorema de Pitágoras obtemos

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad \therefore \quad a^2 \cos^2(\alpha) + a^2 \sin^2(\alpha) = a^2 \quad \therefore \quad a^2 [\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)] = a^2$$

donde

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad (4e)$$

A identidade (4e) é chamada de identidade fundamental: o quadrado do cosseno mais o quadrado do seno de qualquer ângulo é sempre igual a um. A partir da identidade fundamental obtemos outras duas importantes identidades:

$$\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad \therefore 1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \quad \therefore 1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha) \quad (4f)$$

$$\frac{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \quad \therefore \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + 1 = \frac{1}{\sin^2(\alpha)} \quad \therefore \cot^2(\alpha) + 1 = \csc^2(\alpha) \quad (4g)$$

**Exemplo 3** Para um dado ângulo  $\theta$  sabe-se que  $\cos(\theta) = \frac{1}{5}$ . Determine as outras razões trigonométricas para  $\theta$ .

Da identidade fundamental obtemos

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \sin^2(\theta) = 1 \quad \therefore \sin^2(\theta) = 1 - \frac{1}{25} \quad \therefore \sin(\theta) = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

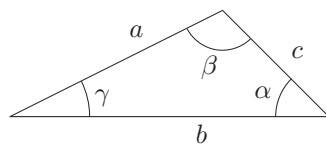
Logo:

- pela identidade (4a):  $\tan(\theta) = \frac{2\sqrt{6}/5}{1/5} = \frac{2\sqrt{6}}{1} \cdot \frac{5}{1} = 2\sqrt{6}$ ;
- pela identidade (4b):  $\cot(\theta) = \frac{1/5}{2\sqrt{6}/5} = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ ;
- pela identidade (4c):  $\sec(\theta) = \frac{1}{1/5} = 5$ ;
- pela identidade (4d):  $\csc(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{6}/5} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ .

## 4 Triângulos quaisquer

### 4.1 A Lei dos Cossenos

Vimos que para triângulos retângulos as medidas dos lados estão relacionadas pelo Teorema de Pitágoras. Para triângulos quaisquer os comprimentos dos lados estão relacionados pela Lei dos Cossenos (Figura 7).



$$\text{Para o ângulo } \alpha: \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$\text{Para o ângulo } \beta: \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$$

$$\text{Para o ângulo } \gamma: \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$$

Figura 7: A Lei dos Cossenos.

A demonstração da Lei dos Cossenos para o ângulo  $\gamma$  pode ser obtida a partir da Figura 8. No triângulo retângulo da esquerda temos

$$\cos(\gamma) = \frac{x}{a} \quad \therefore x = a \cos(\gamma) \quad (5a)$$

$$a^2 = x^2 + H^2 \quad \therefore H^2 = a^2 - x^2. \quad (5b)$$

No triângulo retângulo da direita temos

$$c^2 = H^2 + (b - x)^2 = H^2 + b^2 - 2bx + x^2 \quad (5c)$$

Substituindo (5a) e (5b) em (5c) obtemos

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - x^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) + x^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma) \end{aligned}$$

que é a Lei dos Cossenos para o ângulo  $\gamma$ .

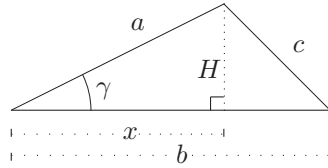


Figura 8: A demonstração da Lei dos Cossenos para o ângulo  $\gamma$ .

## 4.2 A Lei dos Senos

Outra relação entre os comprimentos dos lados e os ângulos de um triângulo qualquer é a Lei dos Senos (Figura 9), cuja demonstração fica a cargo do leitor (Problema Teórico 1).

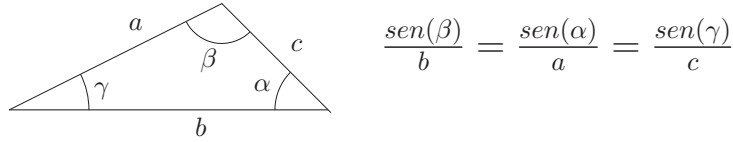


Figura 9: A Lei dos Senos.

## 5 Círculo Trigonométrico e Funções Circulares

Círculo trigonométrico é o círculo<sup>2</sup> de raio unitário e centro na origem do sistema cartesiano - Figura 10(a).

No triângulo  $OPQ$  da Figura 10(b) (lembrando que  $\overline{OP} = 1$ ) observamos que

$$\cos(\theta) = \overline{OQ}/\overline{OP} = x/1 = x \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \overline{PQ}/\overline{OP} = \overline{OR}/\overline{OP} = y/1 = y,$$

de modo que as coordenadas cartesianas do ponto  $P$  são dadas por

$$P = (x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

Raciocinando no sentido inverso, seja  $P(x, y)$  um ponto qualquer sobre o círculo unitário e  $\theta$  o ângulo correspondente, medido no sentido anti-horário a partir do semi-eixo positivo das

<sup>2</sup>Um termo mais apropriado seria circunferência trigonométrica, mas o termo círculo trigonométrico é tradicionalmente utilizado na literatura e vamos mantê-lo.

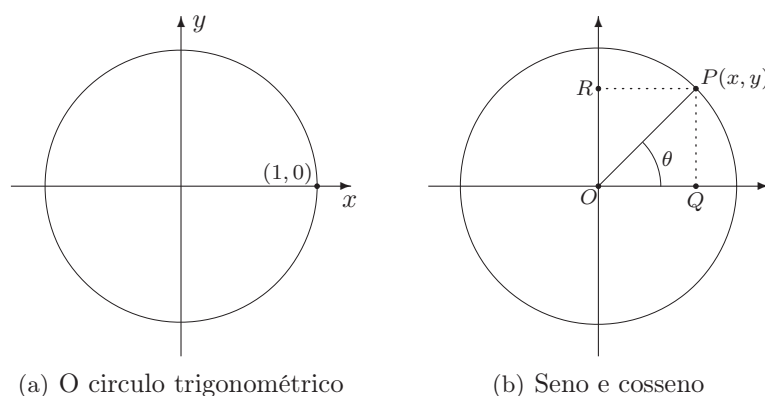


Figura 10: O seno e o cosseno no círculo trigonométrico

abscissas. Definimos o cosseno deste ângulo como o valor da abscissa de  $P$  e seu seno como o valor da ordenada de  $P$ . Esta definição do seno e cosseno no círculo trigonométrico nos permite calcular os valores das razões trigonométricas para ângulos dados por qualquer número real, e não apenas para ângulos agudos como no caso de triângulos retângulos. A Figura 11 ilustra este raciocínio para ângulos no segundo, terceiro e quarto quadrantes.

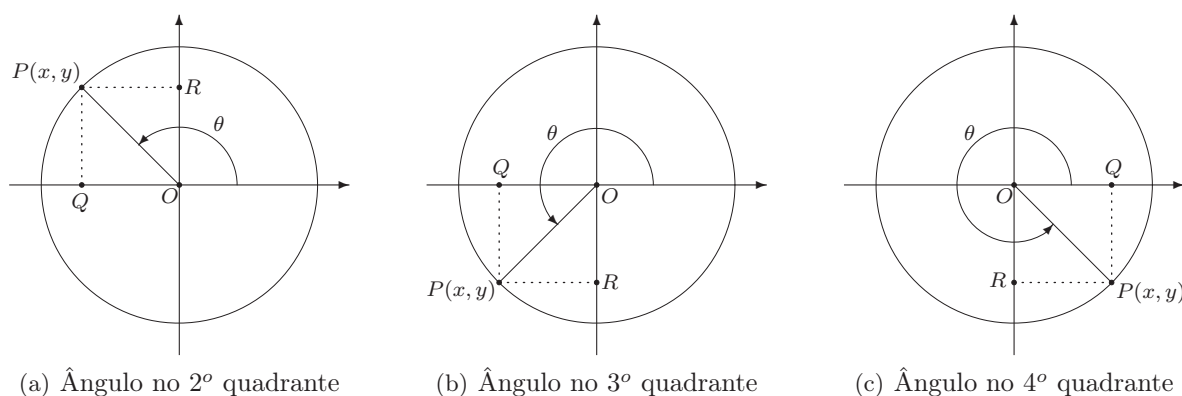


Figura 11:  $\cos(\theta) = \overline{OQ} = x$  e  $\text{sen}(\theta) = \overline{OR} = y$ .

### Sinal do seno e cosseno

- se  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  então  $\text{sen}(\theta) > 0$  e  $\cos(\theta) > 0$  - Figura 10(b);
- se  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  então  $\text{sen}(\theta) > 0$  e  $\cos(\theta) < 0$  - Figura 11(a);
- se  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  então  $\text{sen}(\theta) < 0$  e  $\cos(\theta) < 0$  - Figura 11(b);
- se  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  então  $\text{sen}(\theta) < 0$  e  $\cos(\theta) > 0$  - Figura 11(c).

## 5.1 As funções circulares

### A função seno

Seja  $x$  um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de  $x$  associamos um único valor para seu seno, denotado  $\text{sen}(x)$ . Definimos então a função  $f(x) = \text{sen}(x)$ , cujo gráfico,



chamado senóide, é mostrado na Figura 12.

A Figura 12 exibe duas propriedades importantes da função  $\text{sen}(x)$ :

- é periódica de período  $T = 2\pi$ ; isto significa que suas imagens se repetem de  $2\pi$  em  $2\pi$  radianos, isto é,  $\forall x \in \mathbb{R}$  temos que  $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$ ;
- é limitada entre  $-1$  e  $1$ , isto é,  $\forall x \in \mathbb{R}$  temos que  $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$ .

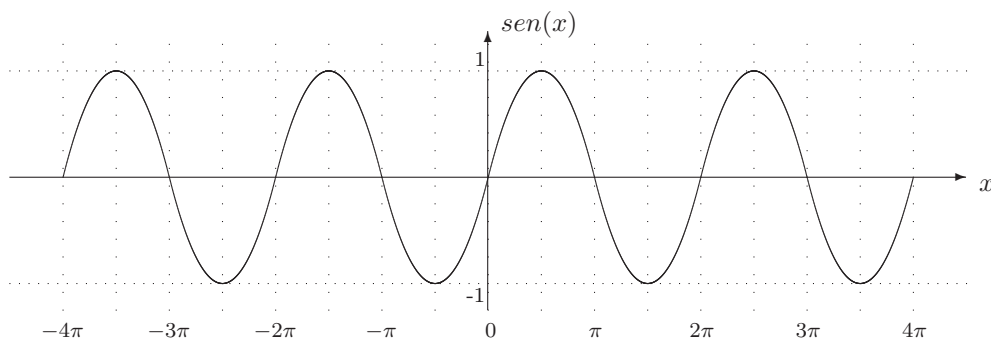


Figura 12: Senóide  $\text{sen}(x)$

### A função cosseno

De modo análogo ao seno, seja  $x$  um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de  $x$  associamos um único valor para seu cosseno, denotado  $\cos(x)$ . Definimos então a função  $f(x) = \cos(x)$ , cujo gráfico é mostrado na Figura 13.

A Figura 13 exibe duas propriedades importantes da função  $\cos(x)$ :

- é periódica de período  $T = 2\pi$ ; isto significa que suas imagens se repetem de  $2\pi$  em  $2\pi$  radianos, isto é,  $\forall x \in \mathbb{R}$  temos que  $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$ ;
- é limitada entre  $-1$  e  $1$ , isto é,  $\forall x \in \mathbb{R}$  temos que  $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ .

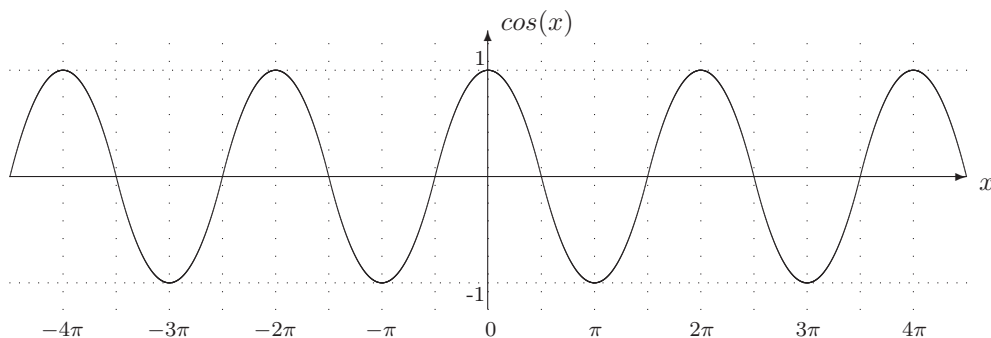


Figura 13: Senóide  $\cos(x)$

## 6 Mais identidades trigonométricas

### Simetrias

As identidades de simetria estabelecem o efeito da substituição de  $\alpha$  por  $-\alpha$ . Pela Figura 14 temos

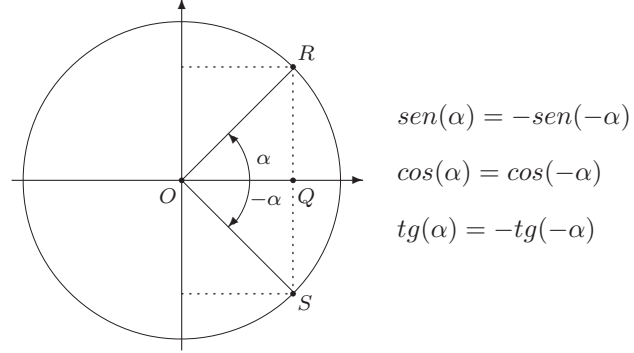


Figura 14: Simetrias do seno, cosseno e tangente.

$$\text{sen}(\alpha) = \overline{QR} = -\overline{QS} = -\text{sen}(-\alpha) \quad \therefore \quad \text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(-\alpha). \quad (6a)$$

$$\cos(\alpha) = \overline{OQ} = \cos(-\alpha) \quad \therefore \quad \cos(\alpha) = \cos(-\alpha). \quad (6b)$$

Estas identidades também podem ser facilmente observadas nas Figuras 12 e 13 respectivamente. Finalmente

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{-\text{sen}(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = -\text{tg}(-\alpha) \quad \therefore \quad \text{tg}(\alpha) = -\text{tg}(-\alpha). \quad (6c)$$

### Deslocamentos (translações) horizontais

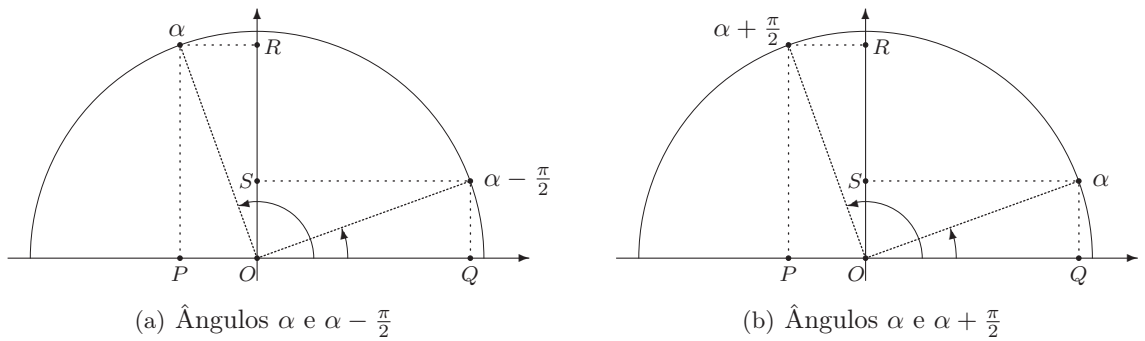


Figura 15: Ângulos deslocados (transladados).

As identidades de translação estabelecem o efeito da substituição de  $\alpha$  por  $\alpha - \frac{\pi}{2}$  e de  $\alpha$  por  $\alpha + \frac{\pi}{2}$ . Pela congruência dos triângulos da Figura 15(a) observamos que

$$\overline{OR} = \overline{OQ} \quad \therefore \quad \text{sen}(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad (6d)$$

e

$$\overline{OP} = -\overline{OS} \quad \therefore \quad \cos(\alpha) = -\operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \quad (6e)$$

De modo análogo, pela Figura 15(b) observamos que

$$\overline{OQ} = \overline{OR} \quad \therefore \quad \cos(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6f)$$

e

$$\overline{OS} = -\overline{OP} \quad \therefore \quad \operatorname{sen}(\alpha) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (6g)$$

### Cosseno da diferença

Iniciamos deduzindo a fórmula do cosseno da diferença. Calculando o quadrado da distância entre os pontos  $P$  e  $Q$  da Figura 16 temos:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\operatorname{sen}(\alpha) - \operatorname{sen}(\beta)]^2 \\ &= \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha) - 2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta) \\ &= \cos^2(\alpha) + \operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ &= 1 + 1 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ &= 2 - 2[\cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)] \end{aligned}$$

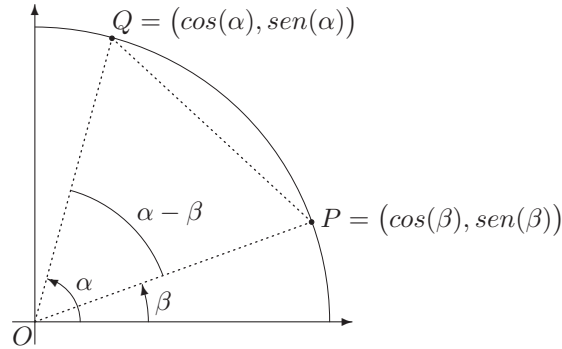


Figura 16: O cosseno da diferença:  $\cos(\alpha - \beta)$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo  $OPQ$  da Figura 16 temos:

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP}\overline{OQ}\cos(\alpha - \beta) \\ &= 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) \\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

Igualando os resultados obtidos para  $\overline{PQ}^2$  obtemos o cosseno da diferença

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$$

### Cosseno da soma

O cosseno da soma pode agora ser obtido usando um artifício algébrico engenhoso - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o cosseno da diferença

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (6a) e (6b) para obtermos o cosseno da soma

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

### Seno da diferença

Para obtermos o seno da diferença, inicialmente usamos a identidade (6d) para escrever

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\alpha - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

e a seguir aplicamos o cosseno da diferença no membro direito

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha)\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mas, pelo cosseno da soma

$$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\beta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\beta)$$

e pela identidade (6f)

$$\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\beta).$$

Assim o seno da diferença é dado por

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

### Seno da soma

O seno da soma pode ser obtido pelo mesmo artifício aplicado na dedução do cosseno da soma - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o seno da diferença

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin(\alpha)\cos(-\beta) - \cos(\alpha)\sin(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (6a) e (6b) para obtermos o seno da soma

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

#### 6.0.1 Sumário das fórmulas da soma e da diferença

Sumarizamos aqui os resultados obtidos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (6h)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (6i)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (6j)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (6k)$$

## 7 Redução ao Primeiro Quadrante

Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quadrantes:

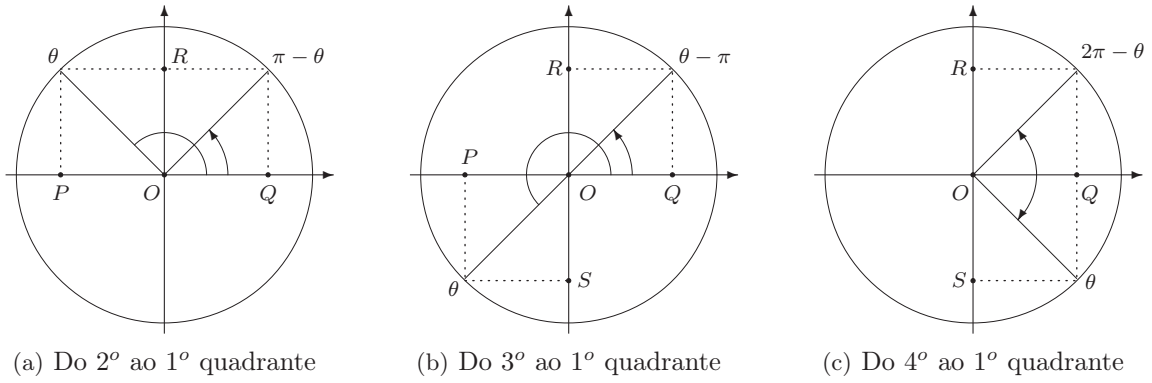


Figura 17: Redução ao primeiro quadrante.

- 1º quadrante:  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ;
- 2º quadrante:  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ;
- 3º quadrante:  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ;
- 4º quadrante:  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ .

Dado um ângulo  $\theta$ , reduzi-lo ao primeiro quadrante consiste em determinar um ângulo no primeiro quadrante que possua as mesmas razões trigonométricas de  $\theta$ , a menos de um sinal. Devemos considerar 3 casos.

#### Redução do segundo ao primeiro quadrante

Na Figura 17(a) observamos que se  $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$  então sua redução ao primeiro quadrante é  $\pi - \theta$ . Temos que

- $\text{sen}(\theta) = \overline{OR} = \text{sen}(\pi - \theta)$
- $\text{cos}(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -\text{cos}(\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $\text{tg}(\theta) = -\text{tg}(\pi - \theta)$
- $\text{ctg}(\theta) = -\text{ctg}(\pi - \theta)$
- $\text{sec}(\theta) = -\text{sec}(\pi - \theta)$
- $\text{csc}(\theta) = \text{csc}(\pi - \theta)$

**Exemplo 4** O ângulo  $\frac{5\pi}{6}$  está no segundo quadrante, pois  $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$ . Assim sua redução ao primeiro quadrante é  $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ . Logo

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad e \quad \text{cos}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\text{cos}\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

#### Redução do terceiro ao primeiro quadrante

Na Figura 17(b) observamos que se  $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$  então sua redução ao primeiro quadrante é  $\theta - \pi$ . Temos que

- $\text{sen}(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -\text{sen}(\theta - \pi)$
- $\text{cos}(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -\text{cos}(\theta - \pi)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = tg(\theta - \pi)$
- $ctg(\theta) = cotg(\theta - \pi)$
- $sec(\theta) = -sec(\theta - \pi)$
- $csc(\theta) = -csc(\theta - \pi)$

**Exemplo 5** O ângulo  $\frac{5\pi}{4}$  está no terceiro quadrante, pois  $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$ . Assim sua redução ao primeiro quadrante é  $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$ . Logo

$$sen\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

### Redução do quarto ao primeiro quadrante

Na Figura 17(c) observamos que se  $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$  então sua redução ao primeiro quadrante é  $2\pi - \theta$ . Temos que

- $sen(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -sen(2\pi - \theta)$
- $cos(\theta) = \overline{OQ} = cos(2\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = -tg(2\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(2\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = sec(2\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = -csc(2\pi - \theta)$

**Exemplo 6** O ângulo  $\frac{5\pi}{3}$  está no quarto quadrante, pois  $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$ . Assim sua redução ao primeiro quadrante é  $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ . Logo

$$sen\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

## 8 Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é aquela que envolve as funções trigonométricas *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cossecante*. Resolver uma equação trigonométrica significa encontrar os valores do ângulo que a verifica. Para este propósito a Tabela 2, que nos dá os valores do *seno*, *coseno* e *tangente* dos ângulos notáveis do 1º quadrante, será de grande auxílio.

$\theta$	$sen(\theta)$	$cos(\theta)$	$tg(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\cancel{A}$

Tabela 2: Seno, coseno e tangente dos ângulos notáveis do 1º quadrante

A Tabela 2 nos fornece os valores de *seno*, *coseno* e *tangente* apenas para os ângulos notáveis do 1º quadrante. A Figura 18 mostra os ângulos nos segundo, terceiro e quarto quadrantes redutíveis aos notáveis do primeiro quadrante.

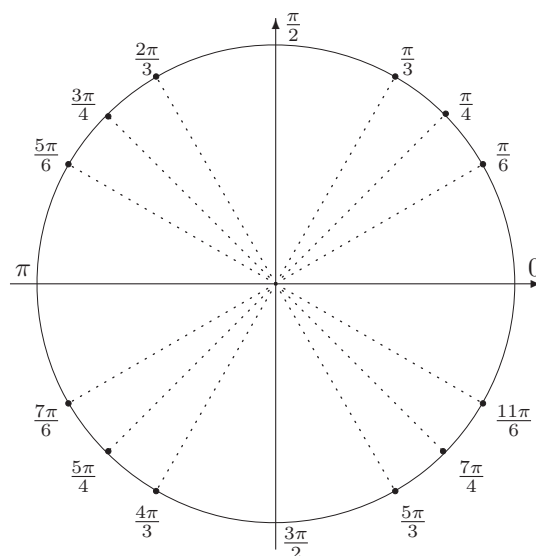


Figura 18: Ângulos redutíveis aos notáveis

**Exemplo 7** Resolver a equação  $\sin(x) = 0$ .

*Solução:* pela Tabela 2 temos que  $x = 0$ . Observando a Figura 18 temos que  $x = \pi$  também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral é da forma

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 8** Resolver a equação  $\sin(x) = \cos(x)$ .

*Solução:* pela Tabela 2 temos que  $x = \frac{\pi}{4}$ . Observando a Figura 18 temos que  $x = \frac{5\pi}{4}$  (simétrico de  $\frac{\pi}{4}$  em relação à origem) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Exemplo 9** Resolver a equação  $2\cos(x) - 1 = 0$ .

*Solução:* temos que  $\cos(x) = \frac{1}{2}$ , e pela Tabela 2 temos que  $x = \frac{\pi}{3}$ . Observando a Figura 18 observamos que  $x = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$  (simétrico de  $\frac{\pi}{3}$  em relação ao eixo horizontal) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

## 9 Problemas Propostos

- 1 [Mack-SP] A medida de um ângulo é  $225^\circ$ . Determine sua medida em radianos.
- 2 [Fuvest-SP] Qual o valor do ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos.
- 3 [UF-PA] Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?

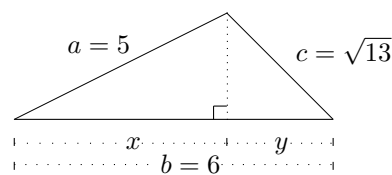
4 A altura de um triângulo equilátero mede 2 cm. Determine seu perímetro e sua área.

5 A diagonal de um quadrado mede  $3\sqrt{6}$  cm. Determine seu perímetro e sua área.

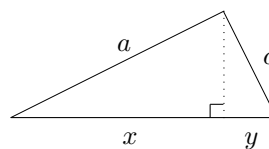
6 [PUC-SP] Se a altura de um trapézio isósceles medir 8 dm e suas bases medirem, respectivamente, 27 dm e 15 dm, determine a medida de suas diagonais.

7 [UEPB] Com uma velocidade constante de 30 Km/h, um móvel parte de A e segue numa direção que forma com a reta AB um ângulo de  $30^\circ$ . Após 4 h de percurso, a que distância o móvel se encontra da reta AB?

8 No triângulo dado determine as medidas  $x$  e  $y$ .



9 No triângulo dado sabe-se que  $c = 5$ ,  $y = 3$  e lado de comprimento  $a$  é perpendicular ao lado de comprimento  $c$ . Determine  $a$  e  $x$ .



10 Em um triângulo retângulo um dos catetos mede 5 cm e sua projeção sobre a hipotenusa mede 4 cm. Determine:

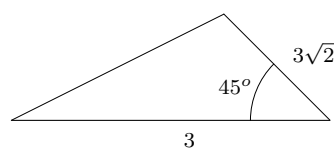
- |                                    |                    |
|------------------------------------|--------------------|
| (a) o comprimento do outro cateto; | (c) seu perímetro; |
| (b) o comprimento da hipotenusa;   | (d) sua área.      |

11 Em um triângulo a hipotenusa mede 10 dm e a razão entre os comprimentos dos catetos é  $\frac{3}{4}$ . Determine os comprimentos das projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

12 [PUC-SP] O perímetro de um losângo mede 20 cm e uma de suas diagonais mede 8 cm. Quanto mede a outra diagonal?

13 Num triângulo retângulo a altura relativa à hipotenusa mede 12 cm e a projeção de um dos catetos sobre a hipotenusa mede 16 cm. Determine o comprimento dos catetos deste triângulo.

14 Determine o perímetro e a área do triângulo dado.



15 Os lados de um triângulo medem  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = 2$  e  $c = 1 + \sqrt{3}$ . Determine as medidas de seus ângulos.



**16** Um triângulo tem seus vértices nos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ . Sabe-se que  $\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{2}$ . Se  $\overline{AB} = 2$  e  $\alpha$  é o ângulo oposto ao lado  $\overline{BC}$ , determine  $\alpha$ .

**17** Um terreno tem a forma de um paralelogramo cujos lados medem 40 m e um dos ângulos internos mede  $120^\circ$ . Seu proprietário irá cercá-lo e também dividi-lo ao meio com uma cerca com 3 fios de arame. Determine a menor quantidade de arame a ser utilizada.

**18** [ITA-SP] Os lados de um triângulo medem  $a$ ,  $b$  e  $c$  centímetros. Qual o valor do ângulo interno deste triângulo, oposto ao lado que mede  $a$  centímetros, se forem satisfeitas as seguintes relações:  $3a = 7c$  e  $3b = 8c$ .

**19** [ITA-SP] Num losango  $ABCD$  a soma das medidas dos ângulos obtusos é o triplo da soma das medidas dos ângulos agudos. Se sua diagonal menor mede  $d$ , determine sua aresta.

**20** [Universidade Gama Filho - RJ] Calcular os valores de  $k$  que verificam simultaneamente as igualdades:  $\sin(\theta) = k - 1$  e  $\cos(\theta) = \sqrt{3 - k^2}$ .

**21** Para cada razão trigonométrica dada utilize as identidades da Seção 3 para determinar as outras cinco.

$$(a) \sin(\alpha) = \frac{3}{5}$$

$$(d) \cotg(\delta) = 3$$

$$(g) \csc(\phi) = 2$$

$$(b) \cos(\beta) = \frac{1}{7}$$

$$(e) \cos(\epsilon) = \frac{3}{5}$$

$$(c) \tg(\gamma) = 4$$

$$(f) \tg(\theta) = \frac{1}{2}$$

$$(h) \sec(\sigma) = 3$$

**22** Uma pessoa na margem de um rio vê, sob um ângulo de  $60^\circ$ , o topo de uma torre na margem oposta. Quando ela se afasta 40 m perpendicularmente à margem do rio, esse ângulo é de  $30^\circ$ .

(a) Qual a largura do rio?

(b) Qual a altura da torre?

**23** Verifique a veracidade das igualdades a seguir.

$$(a) \frac{\sin(\alpha)}{1+\cos(\alpha)} + \frac{1+\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = 2\csc(\alpha)$$

$$(b) \frac{2-\sin^2(\beta)}{\cos^2(\beta)} - \tg^2(\beta) = 2$$

$$(c) \frac{\tg(\gamma)}{1+\tg^2(\gamma)} = \sin(\gamma)\cos(\gamma)$$

$$(d) \frac{\sec(\theta)+\sin(\theta)}{\csc(\theta)+\cos(\theta)} = \tg(\theta)$$

$$(e) \sec^2(\phi)\csc^2(\phi) = \tg^2(\phi) + \cotg^2(\phi) + 2$$

$$(f) [\tg(\sigma) - \sin(\sigma)]^2 + [1 - \cos(\sigma)]^2 = [\sec(\sigma) - 1]^2$$

**24** Explique por quê as igualdades dadas são inválidas.

$$(a) \sin(\alpha) = 3$$

$$(c) \sec(\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$(b) \cos(\alpha) = 5$$

$$(d) \csc(\alpha) = \frac{3}{4}$$

**25** Dois ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  são ditos complementares se  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Use a Figura 5 para se convencer dos seguintes fatos:

- (a) o seno de um ângulo é igual ao cosseno de seu complementar;
- (b) o cosseno de um ângulo é igual ao seno de seu complementar;
- (c) a tangente de um ângulo é igual à cotangente de seu complementar;
- (d) a cotangente de um ângulo é igual à tangente de seu complementar;
- (e) a secante de um ângulo é igual à cossecante de seu complementar;
- (f) a cossecante de um ângulo é igual à secante de seu complementar.

**26** Os lados de um paralelogramo medem  $a$  e  $b$  e suas diagonais  $x$  e  $y$ . Mostre que

$$x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2).$$

**27** [Cessem-SP] Em quais quadrantes estão os ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  tais que:  $\text{sen}(\alpha) < 0$  e  $\cos(\alpha) < 0$ ;  $\cos(\beta) < 0$  e  $\text{tg}(\beta) < 0$ ;  $\text{sen}(\gamma) > 0$  e  $\text{cotg}(\gamma) > 0$ , respectivamente.

**28** [FECAP-SP] Determine o valor da expressão:  $\text{sen}(\pi/4) + \cos(\pi/4) + \cos(\pi/2 + \pi/4)$ .

**29** [Santa Casa-SP] Seja a função  $f$ , de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 1 + 4\text{sen}(x)$ . Determine o intervalo do conjunto imagem dessa função.

**30** [UFP-RS] Qual o intervalo do conjunto imagem da função  $f$ ,  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  definida por  $f(x) = 2\text{sen}(x) - 3$ .

**31** Para quais valores de  $a$  as sentenças  $\text{sen}(x) = \sqrt{a}$  e  $\cos(x) = 2\sqrt{a} - 1$  são verdadeiras para todo  $x$  real.

**32** [UF São Carlos-SP] Calcule o valor da expressão:  $\frac{2 - \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} - \text{tg}^2(x)$ .

**33** [FGV-RJ] Determine a função trigonométrica equivalente a  $\frac{\sec(x) + \text{sen}(x)}{\cossec(x) + \cos(x)}$ .

**34** [PUC-RS] Determine a igualdade da expressão:  $\frac{\text{sen}(x)}{1 + \cos(x)} + \frac{1 + \cos(x)}{\text{sen}(x)}$ .

**35** [FEP-PA] No círculo trigonométrico um ângulo é tal que seu seno vale  $\frac{3}{5}$  e encontra-se no segundo quadrante. Calcule o valor da tangente deste ângulo.

**36** [Edson Queiroz-CE] Sabendo que  $\sec(x) = 3$  e  $\text{tg}(x) < 0$ , calcule  $\text{sen}(x)$ .

**37** [ITA-SP] Calcule o valor da expressão  $y = \frac{2\text{tg}(x)}{1 - \text{tg}^2(x)}$  quando  $\cos(x) = \frac{-3}{7}$  e  $\text{tg}(x) < 0$ .

**38** [PUC-RS] Sendo  $\text{tg}(x) = \frac{-\sqrt{7}}{7}$  e  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , calcule  $\text{sen}(x)$ .

**39** [PUC-SP] Quais os valores de  $x$  satisfazem a equação  $\cos(3x - \frac{\pi}{5}) = 0$ .

**40** [Cescea-SP] Determine a soma das raízes da equação  $1 - 4\cos^2(x) = 0$  compreendidas entre 0 e  $\pi$ .

**41** [AMAN-RJ] Determine os valores de  $x$  que satisfazem a equação  $3^{\cos(2x)} = 1$ .

42 [FC Chagas-BA] Determine o número de soluções da equação  $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$ , no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

43 [Mack-SP] Determine os valores de  $x$  para que  $\sin(x) = \sin(x + \pi)$ , no intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

44 [Osec-SP] Determine o conjunto solução da equação  $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$ , sendo  $0 < x < 2\pi$ .

45 [UF Uberlândia-MG] Determine o conjunto solução da equação

$$\operatorname{tg}(x+1)\sqrt{3}\operatorname{cotg}(x) - 1 = 0$$

no intervalo  $[0, \pi]$ .

46 [Fac. Belas Artes-SP] Determine os valores de  $x$  na equação  $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{cotg}(x) = 2$ .

47 [Mack-SP] Determine os valores de  $x$  na equação  $\sin^2(x) = \frac{1+\cos(x)}{2}$ , no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

48 [Metodista-S.B. do Campo-SP] Determine os valores de  $x$  na equação

$$\sec^2(x) + 2\operatorname{tg}^2(x) = 2$$

no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

49 [Cesgranrio-RJ] Determine as raízes da equação  $\cos^2(x) - \sin^2(\pi - x) = \frac{1}{2}$  no intervalo  $[0, \pi]$ .

50 [Cesgranrio-RJ] Determine a soma das quatro raízes da equação

$$\sin^2(x) + \sin(-x) = 0$$

no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

51 [CESESP-PE] Determine o conjunto solução da equação  $\frac{1}{1+\sin(x)} + \frac{1}{1-\sin(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ .

52 [Mack-SP] Determine a expressão geral dos arcos  $x$  para os quais  $2[\cos(x) + \sec(x)] = 5$ .

53 [FGV-RJ] Determine a solução da equação:  $3[1 - \cos(x)] = \sin^2(x)$ .

54 [FGV-SP] Determine a soma das raízes da equação

$$\sin^3(x) - 3\sin^2(x)\cos(x) + 3\sin(x).\cos^2(x) - \cos^3(x) = 0$$

no intervalo  $[0, 2\pi]$ .

55 [Mack-SP] Sendo  $\sin(x) = \frac{12}{13}$  e  $\sin(y) = \frac{4}{5}$ ,  $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$ , determine  $\sin(x - y)$ .

56 [FEI-SP] Se  $\cos(x) = \frac{3}{5}$ , calcule  $\sin(x - \frac{\pi}{2})$ .

57 [F . S . Judas-SP] Se  $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  e  $x$  um arco do segundo quadrante, então calcule

$$\sin(x - \frac{\pi}{2})\cos(x - \frac{\pi}{2}).$$

- 58 [UC-MG] Prove que  $\frac{2tg(x)}{1+tg^2(x)}$  é idêntica a  $\text{sen}(2x)$ .
- 59 [UF-GO] Se  $\text{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}$ , calcule  $\cos(2x)$ .
- 60 [F. S. Judas-SP] Se  $\text{sen}(x) = \frac{2}{3}$  e  $x$  um arco do primeiro quadrante, então calcule  $\text{sen}(2x)$ .
- 61 [UCP-PR] Sabendo que  $\cos(36^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ , calcule  $\cos(72^\circ)$ .
- 62 [AMAN-RJ] Determine os valores de  $x$  que satisfazem a inequação:  $\cos(5x) \leq \frac{1}{2}$ .
- 63 [FGV-SP] Determine a solução da inequação  $\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) > \cos(x)$  no intervalo  $[0, \pi]$ .
- 64 [UF São Carlos-SP] Determine o conjunto solução da inequação  $\frac{1}{\cos \sec(x)} - \frac{1}{\sec(x)} > 0$ , para  $0 \leq x \leq \pi$ .
- 65 [Mack-SP] Determine a solução da inequação  $\frac{\cos(x) - \text{sen}(x)}{\cos(x) + \text{sen}(x)}$ , para  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .
- 66 [PUC-SP] Determine a solução da inequação  $\frac{\text{sen}(x) - 2}{\cos(2x) + 3\cos(x-1)} > 0$ , no conjunto  $0 \leq x \leq 2\pi$ .
- 67 [ITA-SP] Dado o polinômio  $P$  definido por  $P(x) = \text{sen}(\theta) - tg(\theta)x + \sec^2(\theta)x^2$ , determine os valores de  $\theta$  no intervalo  $[0, 2\pi]$  tais que  $P$  admita somente raízes reais.
- 68 Use as identidades (6i) e (6k) para deduzir a tangente da soma

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha)tg(\beta)}.$$

- 69 Use as identidades (6h) e (6j) para deduzir a tangente da diferença

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha)tg(\beta)}.$$

**70 (Fórmulas do ângulo duplo).**

- (a) Use a identidade (6i) para mostrar o cosseno do ângulo duplo (sugestão: faça  $2\alpha = \alpha + \alpha$ )

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \text{sen}^2(\alpha).$$

- (b) Use a identidade (6k) para mostrar o seno do ângulo duplo

$$\text{sen}(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\text{sen}(\alpha).$$

**71 (Fórmulas do ângulo metade).** Use a identidade fundamental e o cosseno do ângulo duplo para deduzir o cosseno e o seno do ângulo metade

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(2\alpha) \right].$$

$$\text{sen}^2(\alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos(2\alpha) \right].$$

- 1 Demonstre a Lei dos Senos (Figura 9).

## 10 Respostas dos Problemas Propostos

- 1 (página 15)  $\frac{5\pi}{4}$
- 2 (página 15)  $36^\circ$
- 3 (página 15)  $\frac{5\pi}{3}$
- 4 (página 16)  
perímetro =  $4\sqrt{3} \text{ cm}$  e área =  $\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^2$
- 5 (página 16)  
perímetro =  $12\sqrt{3} \text{ cm}$  e área =  $27 \text{ cm}^2$
- 5 (página 16)  
 $\sqrt{505} \text{ dm}$
- 8 (página 16)  $x = 4$  e  $y = 2$
- 9 (página 16)  $a = \frac{20}{3}$  e  $x = \frac{16}{3}$
- 10 (página 16)
  - (a)  $\frac{15}{4}$ ; (c) 15;
  - (b)  $\frac{25}{4}$ ; (d)  $\frac{75}{8}$ .
- 11 (página 16)  $\frac{18}{5}$  e  $\frac{32}{5}$
- 12 (página 16)  $6 \text{ cm}$
- 13 (página 16)  $15 \text{ cm}$  e  $20 \text{ cm}$
- 14 (página 16) perímetro =  $6 + 3\sqrt{2}$  e  
área =  $\frac{9}{2}$
- 15 (página 16)  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $105^\circ$
- 16 (página 17)  $\alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$  radianos
- 17 (página 17)  $600 \text{ m}$  de arame
- 18 (página 17)  $60^\circ$
- 19 (página 17)  $\frac{d}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$
- 20 (página 17)  $k = \frac{3}{2}$
- 21 (página 17)
  - (a)  $\cos(\alpha) = \frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{cotg}(\alpha) = \frac{4}{3}$ ,  
 $\sec(\alpha) = \frac{5}{4}$ ,  $\csc(\alpha) = \frac{5}{3}$ .
  - (b)  $\operatorname{sen}(\beta) = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ ,  $\operatorname{tg}(\beta) = 4\sqrt{3}$ ,  
 $\operatorname{cotg}(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{12}$ ,  $\sec(\beta) = 7$ ,  $\csc(\beta) = \frac{7\sqrt{3}}{12}$ .
  - (c)  $\cos(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{17}$ ,  $\operatorname{sen}(\gamma) = \frac{4\sqrt{17}}{17}$ ,  
 $\operatorname{cotg}(\gamma) = \frac{1}{4}$ ,  $\sec(\gamma) = \sqrt{17}$ ,  $\csc(\gamma) = \frac{\sqrt{17}}{4}$ .
  - (d)  $\cos(\delta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,  $\operatorname{sen}(\delta) = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $\operatorname{tg}(\delta) = \frac{1}{3}$ ,  
 $\sec(\alpha) = \frac{\sqrt{10}}{3}$ ,  $\csc(\alpha) = \sqrt{10}$ .
  - (e)  $\operatorname{sen}(\epsilon) = \frac{4}{5}$ ,  $\operatorname{tg}(\epsilon) = \frac{4}{3}$ ,  $\operatorname{cotg}(\epsilon) = \frac{3}{4}$ ,  
 $\sec(\epsilon) = \frac{5}{3}$ ,  $\csc(\epsilon) = \frac{5}{4}$ .
- (f)  $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $\operatorname{cotg}(\theta) = 2$ ,  
 $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ,  $\csc(\theta) = \sqrt{5}$ .
- (g)  $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\operatorname{sen}(\phi) = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg}(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  
 $\operatorname{cotg}(\phi) = \sqrt{3}$ ,  $\sec(\phi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .
- (h)  $\cos(\sigma) = \frac{1}{3}$ ,  $\operatorname{sen}(\sigma) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ,  $\operatorname{tg}(\sigma) = 2\sqrt{2}$ ,  
 $\operatorname{cotg}(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,  $\csc(\sigma) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ .
- 22 (página 17)
  - (a)  $20 \text{ m}$  (b)  $20\sqrt{3} \text{ m}$
- 27 (página 18)  $3^\circ$ ,  $2^\circ$  e  $1^\circ$
- 28 (página 18)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 29 (página 18)  $[-3, 5]$
- 30 (página 18)  $[-5, -1]$
- 31 (página 18)  $a = 0$  ou  $a = \frac{16}{25}$
- 32 (página 18) 2
- 33 (página 18)  $\operatorname{tg}(x)$
- 34 (página 18)  $2\operatorname{cossec}(x)$
- 35 (página 18)  $-3/4$
- 36 (página 18)  $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$
- 37 (página 18)  $\frac{12\sqrt{10}}{31}$
- 38 (página 18)  $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- 39 (página 18)  $\frac{7\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$
- 40 (página 18)  $\pi$
- 41 (página 18)  $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
- 42 (página 19)  $4 : -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
- 43 (página 19)  $0, \pi, 2\pi$
- 44 (página 19)  $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$
- 45 (página 19)  $\frac{\pi}{3}$  e  $\frac{\pi}{4}$
- 46 (página 19)  $\frac{\pi}{4} \pm \pi$
- 47 (página 19)  $\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$  e  $\pi$
- 48 (página 19)  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
- 49 (página 19)  $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
- 50 (página 19)  $\frac{7\pi}{2}$
- 51 (página 19)  $\frac{\pi}{2} + k\pi$
- 52 (página 19)  $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- 53 (página 19)  $x = k.360^\circ$
- 54 (página 19)  $\frac{3\pi}{2}$
- 55 (página 19)  $\frac{16}{65}$
- 56 (página 19)  $\frac{-3}{5}$

- 57 (página 19)  $0, 5$
- 59 (página 20)  $\frac{5}{6}$
- 60 (página 20)  $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- 61 (página 20)  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
- 62 (página 20)  $\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{15} \leq x \leq \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{3}$
- 63 (página 20)  $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$  ou  $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$
- 64 (página 20)  $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$
- 65 (página 20)  $0 < x < \frac{\pi}{4}$
- 66 (página 20)  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
- 67 (página 20)  $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$  ou  $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$