



Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias  
Departamento de Ciências Florestais e  
da Madeira



# CAPÍTULO IV

## Volumetria

### Parte 1

Professor Gilson Fernandes da Silva

# Objetivos da parte 1

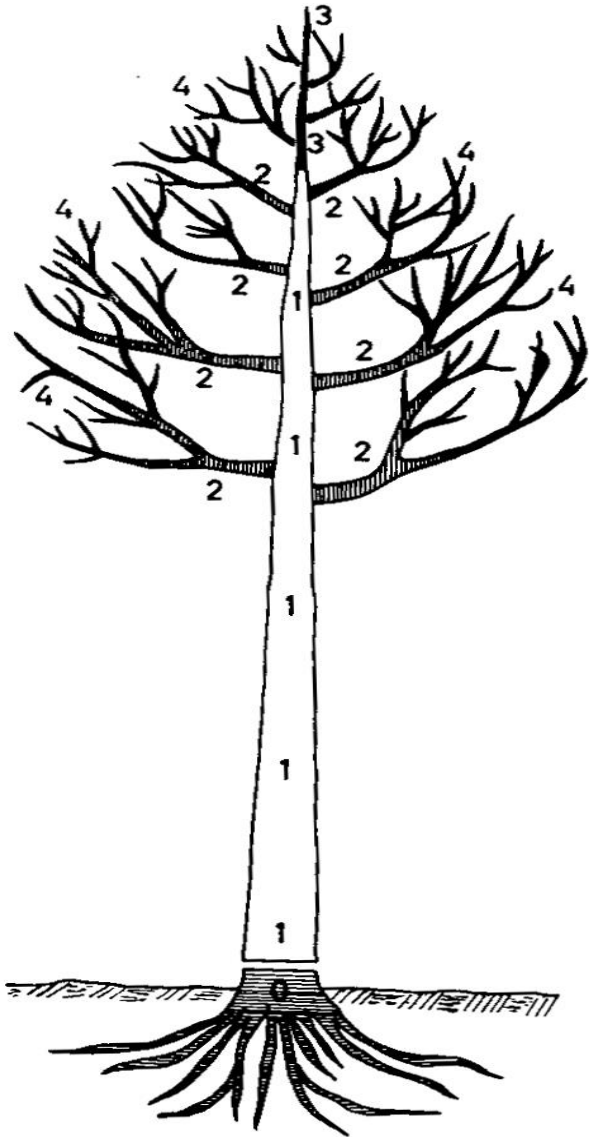
---

- Enfatizar a importância em se medir o volume.
- Apresentar os principais métodos diretos para se medir o volume e a massa de árvores.

# 1 – Razões para se medir o volume de uma árvore

- ✓ Para apurar a produção de áreas florestais, de modo a se avaliar a viabilidade econômica da implantação e condução de projetos.
- ✓ Para auxiliar os profissionais de órgãos públicos na aplicação das leis relacionadas aos recursos florestais e na fiscalização de planos de manejo florestal.
- ✓ Em trabalhos de pesquisa relacionados, por exemplo, à produção de produtos florestais madeireiros.
- ✓ Em estudos de ecologia florestal, por se tratar de uma variável importante que pode ajudar na compreensão da distribuição e abundância de espécies em uma determinada área.

## 2 - Tipos de volume da árvore



0 – Madeira do toco;

1 – Fuste comercial;

2 – Galhos comerciais;

3 – Fuste não comercial;

4 – Galhos não comerciais (pequenos);

$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = \text{Volume total.}$

### 3 – Métodos diretos de medição do volume

Medidas diretas de qualquer variável da árvore são aquelas feitas pelo mensurador diretamente sobre a árvore. Estas medidas podem ser feitas para o diâmetro, circunferência, comprimento da tora, espessura da casca e também para o volume.

A literatura cita basicamente dois métodos diretos para se chegar a medidas de volume: Os métodos baseados em deslocamento de fluidos e os métodos baseados em medidas diretas da biomassa de madeira.

Na sequência, serão apresentados os princípios que definem estes métodos.

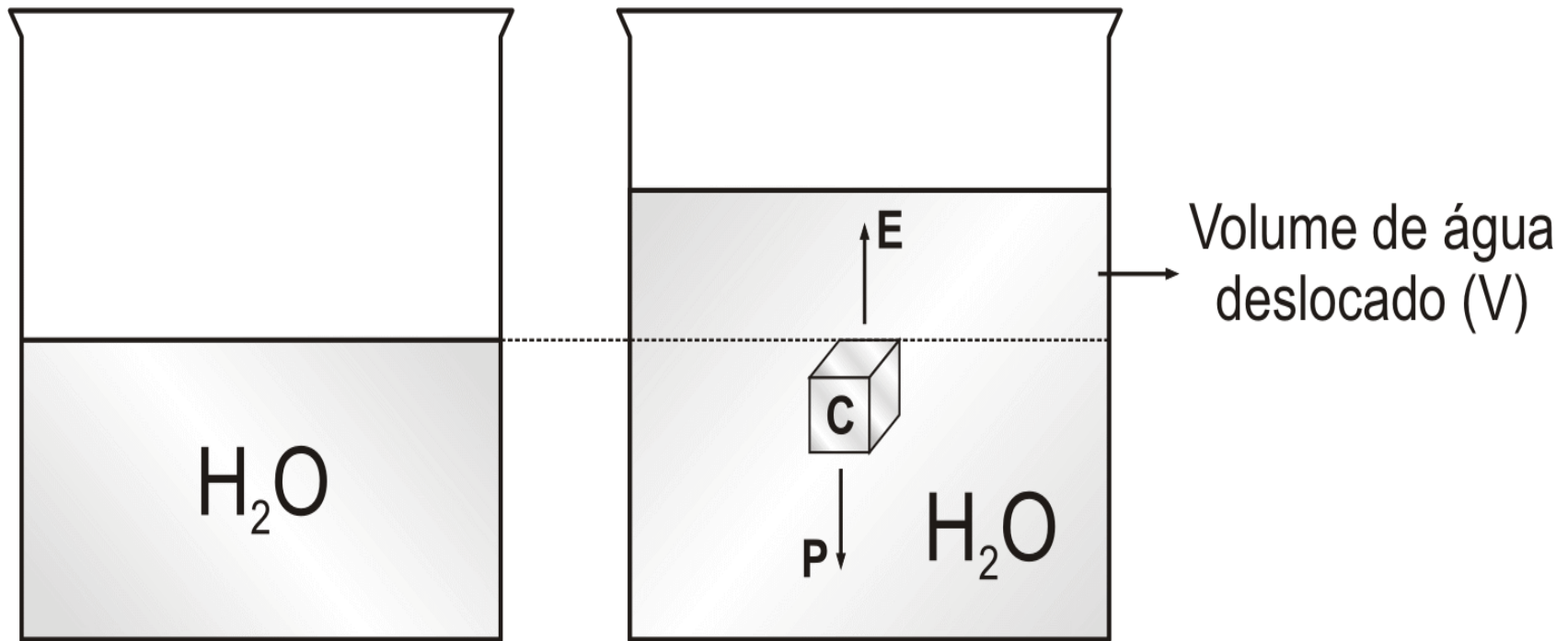
## 3.1 – Volume obtido pelo deslocamento de fluidos

### 3.1.1 – Método da balança hidrostática

Utilizado para o cálculo do volume de um corpo de prova, baseia-se no princípio de Arquimedes segundo o qual:

*“Todo corpo imerso em um fluido fica sujeito a uma força (empuxo), com direção vertical, de baixo para cima, de intensidade igual ao peso do volume de líquido deslocado ou igual ao volume do líquido deslocado ou igual ao volume deslocado  $\times$  densidade do líquido  $\times$  aceleração da gravidade local.”*

## ⇒ Demonstração do método



É importante ressaltar que o corpo-de-prova (C) submerso deve estar saturado ou revestido por um material impermeabilizante, como a parafina, por exemplo, para que o mesmo não absorva o fluido e comprometa a precisão do método.

A partir da figura anterior, pode-se escrever que:

$$E = P \quad (1)$$

$$P = mg \quad \Rightarrow \quad E = mg \quad (2)$$

$$\rho = \frac{m}{v} \quad (3)$$

Sendo a densidade da água igual a  $1\text{g.cm}^{-3}$  (a  $4^{\circ}\text{C}$ ), tem-se que:

$$m = v \quad (4)$$

Substituindo a expressão (4) na expressão (2), tem-se:

$$E = vg \quad (5)$$



A massa de água deslocada  $m$  pode ser obtida pela seguinte diferença:

$$m = m_s - m_r \quad (6)$$

Em que  $m_s$  e  $m_r$  correspondem às massas do recipiente com água com e sem o corpo-de-prova, respectivamente.

Substituindo a expressão (6) na expressão (2), tem-se:

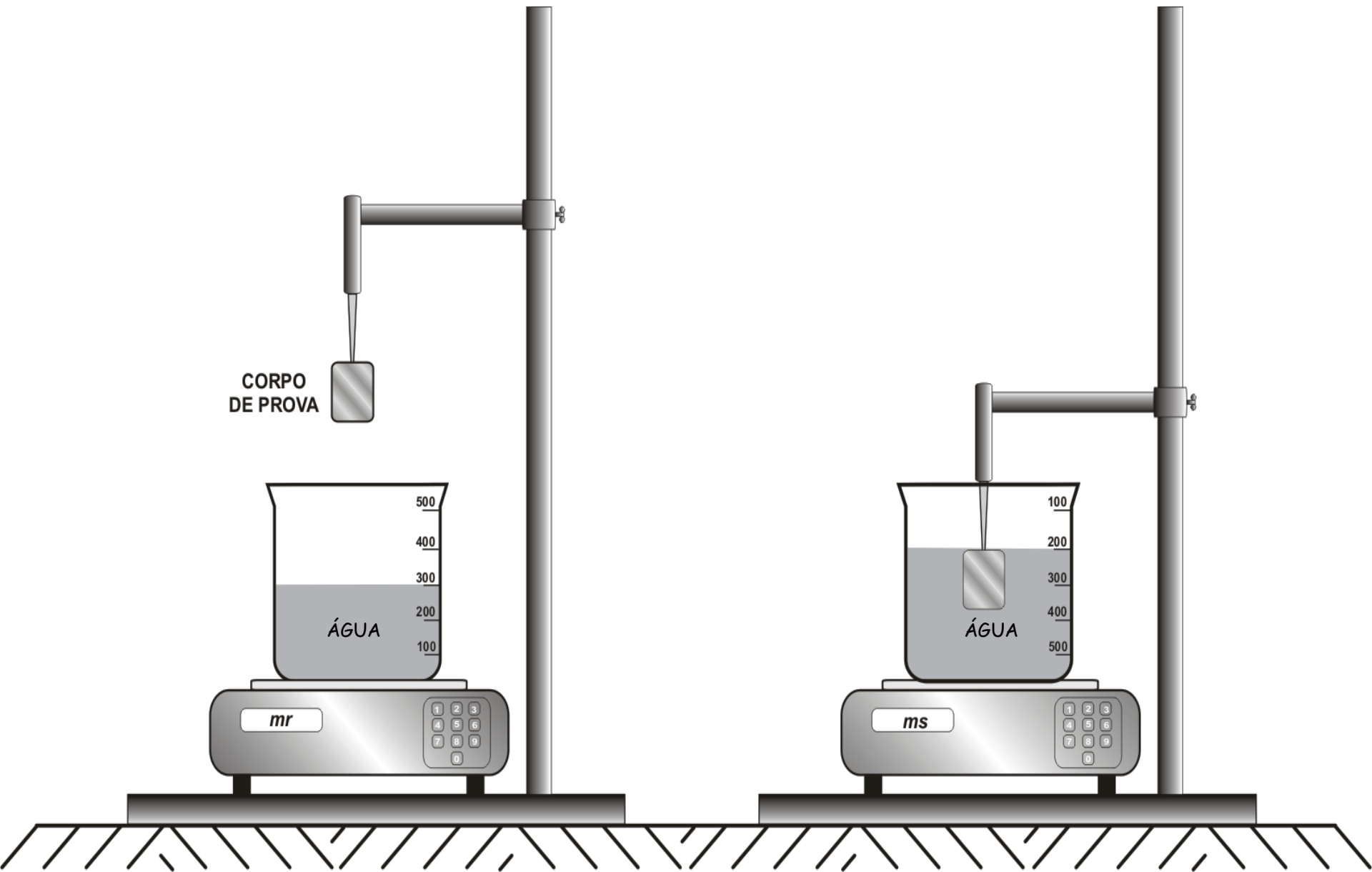
$$E = (m_s - m_r)g \quad (7)$$

Finalmente, substituindo a expressão (7) na (5), tem-se:

$$(m_s - m_r)g = \rho g v \Rightarrow v = m_s - m_r \quad \text{ou} \quad v_c = m_s - m_r \quad (8)$$

Considerando que a densidade da água é igual a 1 e utilizando relações entre massa e volume, tem-se que o volume em  $\text{cm}^3$  é igual à massa em gramas. Assim, se a diferença de massa do recipiente contendo o corpo de prova for de 100 g, isso significa que o volume do corpo de prova será de  $100 \text{ cm}^3$  ou  $0,0001 \text{ m}^3$ .

## ⇒ Implementação do método em laboratório



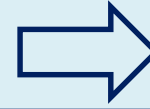
**Exemplo 1:** Tomando como base a figura anterior, imagine que um recipiente com água foi colocado em uma balança e sua massa, após a medição, foi igual a 200 g ( $m_r = 200$  g). Em seguida, foi procedida a imersão do corpo-de-prova saturado no recipiente com água, e o resultado registrado na balança foi de 345 g ( $m_s = 345$  g). Qual o volume do corpo de prova em questão?

**Solução:** Pela aplicação da expressão (8), tem-se que:

$$v = m_s - m_r \quad \Rightarrow \quad v = 345 - 200 = 145 \text{ g}$$

$$\text{ou} \quad v = 145 \text{ cm}^3 = 0,000145 \text{ m}^3$$

Caso o fluido empregado não seja a água, pode-se demonstrar facilmente que:



$$v = \frac{m_s - m_r}{\rho}$$

**Exemplo 2:** Considere que caso no exemplo 1 tenha se utilizado mercúrio ao invés de água, e imagine agora que o recipiente com mercúrio foi colocado na balança e sua massa, após a medição, foi igual a 5464,88 g ( $m_r$ ). Em seguida, procedeu-se a imersão do corpo-de-prova saturado no recipiente com mercúrio e o resultado registrado na balança foi de 7435,43 g ( $m_s$ ). Qual o volume do corpo-de-prova?

**Solução:**

$$v = \frac{7435,43 - 5464,88}{13,59}$$

$$\text{ou } v = 145 \text{ cm}^3 = 0,000145 \text{ m}^3$$

### 3.1.2 - Xilômetro

O xilômetro ([Figura 1](#)) é um recipiente com água onde as toras de madeira são colocadas, sendo o volume das toras correspondente ao volume deslocado de água ( $l$ ), medido em uma régua graduada.

Por este processo, é possível medir o volume de madeira de troncos irregulares ou tortuosos, não importando a forma do tronco para o processo de medição.

# Principais desvantagens no uso do xilômetro

✓ Normalmente só é utilizado para pequenos volumes de madeira, tendo em vista as dificuldades em se trabalhar com este aparelho quando se quer medir grandes volumes de madeira. Dentre as principais dificuldades, pode-se citar o carregamento e descarregamento da madeira e o abastecimento do aparelho com água.

✓ A madeira é um material poroso, podendo absorver água, o que pode comprometer os resultados de volume obtidos pelo xilômetro.

✓ A água deve ser trocada à medida que se acumulem resíduos das medições já realizadas, o que propiciaria estimativas de volume incorretas.

## 3.2 – Volume obtido por meio da massa

Esta é uma maneira comum das empresas florestais, particularmente as de celulose, comprarem madeira de terceiros. Portanto, por este método, pode-se mensurar grandes volumes de madeira.

Conforme citado por Scolforo e Filho (1998), o método consiste inicialmente em se obter a massa do caminhão quando carregado e quando vazio, obtendo-se por diferença a massa de madeira transportada.

Em seguida, obtém-se a densidade média da madeira por meio de uma amostra retirada em diferentes posições na carga transportada.



O volume de madeira transportado será obtido pela razão entre a massa efetiva de madeira e a densidade aparente média:

$$v = \frac{m}{\rho}$$

**Exemplo 3:** Scolforo e Filho (1998): Considere que uma empresa de celulose está comprando a produção de um talhão florestal de 30 ha com *Eucalyptus grandis* com 7 anos de idade. O pagamento ao proprietário deverá ser feito pela quantificação do volume por meio da massa desta madeira, haja vista que ao ser transportada pelo caminhão, a mesma será medida.

As toras têm tamanhos padronizados e na própria fábrica, por meio de um xilômetro, foi feita uma amostragem em cada caminhão tendo sido encontrado os seguintes valores médios:

⇒ massa total do caminhão = 20,0 toneladas

⇒ massa do caminhão vazio = 2,5 toneladas

⇒ massa de 4 lotes com igual quantidade de toras retiradas do caminhão

Obs.: foram feitas 263 viagens de caminhão na área de 30 ha de eucalipto aos 7 anos.

A seguir são apresentados valores médios de 4 lotes amostrados:

⇒ Lote 1 = 0,0150 toneladas ou 15.000 g

⇒ Lote 2 = 0,0140 toneladas ou 14.000 g

⇒ Lote 3 = 0,0146 toneladas ou 14.600 g

⇒ Lote 4 = 0,0171 toneladas ou 17.100 g

Volume de água deslocado pelos quatro lotes (xilômetro):

⇒ Lote 1 = 0,030 m<sup>3</sup> = 30 litros = 30.000 cm<sup>3</sup>

⇒ Lote 2 = 0,027 m<sup>3</sup> = 27 litros = 27.000 cm<sup>3</sup>

⇒ Lote 3 = 0,033 m<sup>3</sup> = 33 litros = 33.000 cm<sup>3</sup>

⇒ Lote 4 = 0,029 m<sup>3</sup> = 29 litros = 29.000 cm<sup>3</sup>

Como a densidade ( $d$ ), é obtida pela razão do peso sobre o volume, tem-se facilmente a densidade de cada lote:

$$\rho_1 = 15.000/30.000 = 0,5000 \text{ g.cm}^{-3}$$

$$\rho_2 = 14.000/27.000 = 0,5185 \text{ g.cm}^{-3}$$

$$\rho_3 = 14.600/33.000 = 0,4424 \text{ g.cm}^{-3}$$

$$\rho_4 = 17.100/29.000 = 0,5897 \text{ g.cm}^{-3}$$

A densidade média da madeira ( $\bar{\rho}$ ), neste exemplo, é igual a  $0,5127 \text{ g.cm}^{-3}$ . A massa de madeira no caminhão é igual a  $17.500.000 \text{ g}$ . Portanto:

$$V = 17.500.000/0,5127 = 34.133.021,26 \text{ cm}^3 \text{ ou } \mathbf{V = 34,13 m^3}$$

$$V = 34,13 \text{ m}^3 \times 263 \text{ viagens} = \mathbf{8.976,19 m^3}.$$

**FIM**

14 7 2005

# Referências

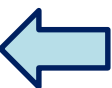
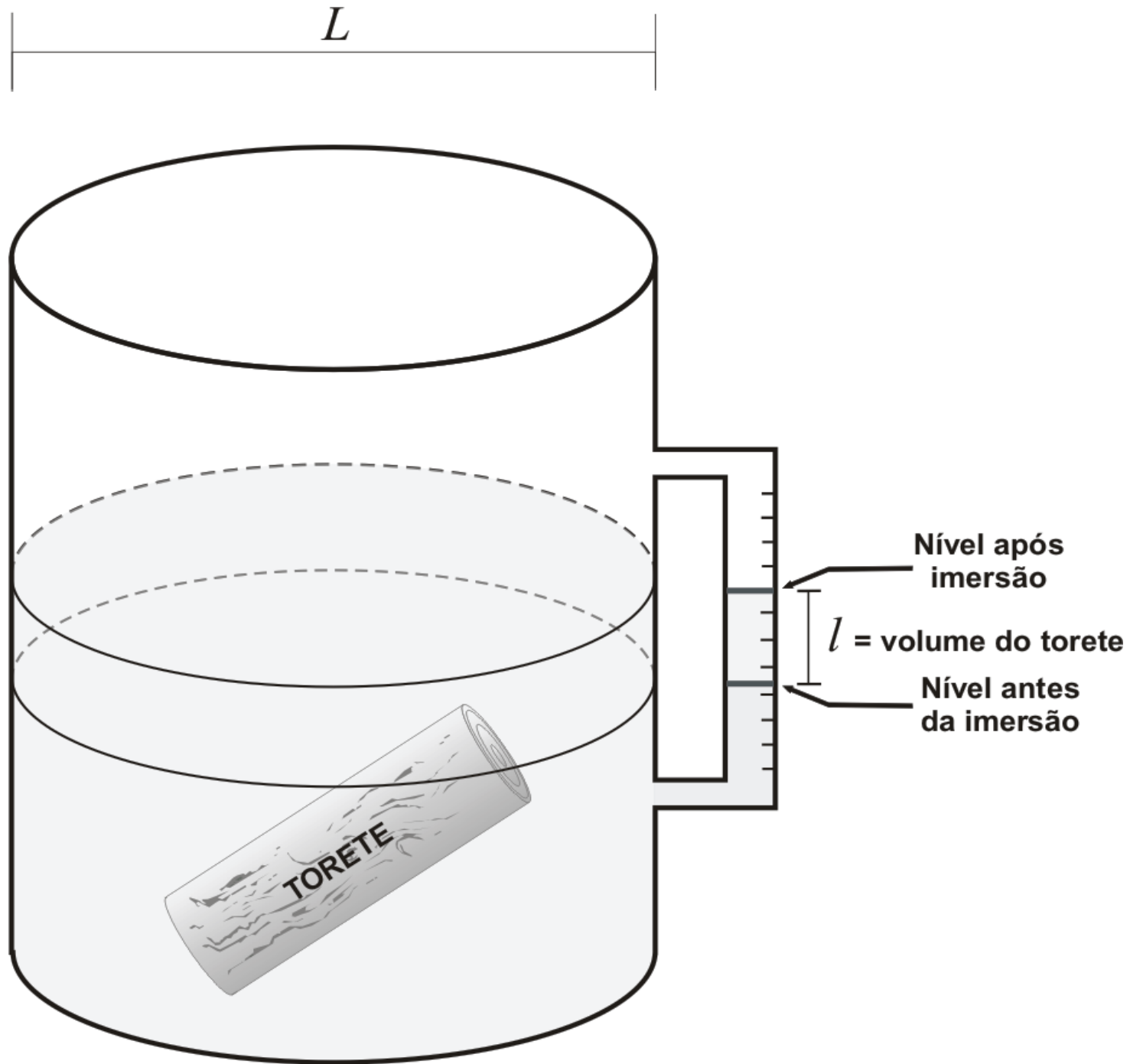
CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. Viçosa: UFV, 407 p., 2009.

FINGER, C. A. G. **Fundamentos de biometria florestal**. Santa Maria: UFSM, 1992. 269p.

LEITHOLD, L.D. O cálculo com Geometria Analítica. Harper E. Roll do Brasil, 1977 – vol. I.

MACHADO, S. A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. Curitiba: UFPR, 2003. 309p.

SCOLFORO, J. R. S.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Biometria Florestal: medição e volumetria de árvores**. Lavras: UFLA/FAEPE, 1998. 310p.







Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias  
Departamento de Ciências Florestais e  
da Madeira



# CAPÍTULO IV

## Volumetria

### Parte 2

Professor Gilson Fernandes da Silva



# Objetivos da parte 2

---

- Identificar os principais fatores que influenciam a forma das árvores.
- Apresentar os principais métodos indiretos de se medir volume.
- Apresentar a ideia de quociente de forma.
- Apresentar a ideia de fator de forma e sua utilidade no cálculo do volume.

## 4 – Métodos indiretos de medição do volume

Os métodos indiretos de medição do volume permitem obter o volume da árvore com base em outras variáveis medidas diretamente, como por exemplo, o diâmetro medido em diferentes alturas do tronco da árvore.

Com essas variáveis e empregando-se expressões matemáticas apropriadas para o cálculo de volume, é possível se obter o volume do tronco indiretamente de maneira muito precisa.

O sucesso desses métodos está baseado no estudo da forma das árvores, buscando-se associar o cálculo do volume com as diferentes formas geométricas que as árvores podem assumir.

## 4.1 – Fatores que afetam a forma dos troncos das árvores

**Espécie**: A forma do tronco de uma árvore pode variar de espécie para espécie. Ex: Os gêneros *Pinus* e *Eucaliptus* x Espécies do cerrado.

**Idade**: A conicidade tende a diminuir com a idade.

**Espaçamento**: Em espaçamentos mais reduzidos, em geral, o tronco das árvores tendem a serem menos cônicos que em espaçamentos maiores.

**Qualidade do local**: Locais com menor capacidade produtiva tendem a produzir troncos com piores formas.

**Posição sociológica:** As árvores com copas maiores (árvores dominantes) tendem a apresentar troncos com maior conicidade que as árvores de menor copa (árvores dominadas).

**Fatores genéticos:** Mesmo considerando as questões ambientais e de manejo da floresta, como qualidade do local e espaçamento, a forma das espécies florestais normalmente está associada à herança genética.

Além dos fatores citados anteriormente, a forma do tronco das árvores pode ser afetada pela realização de desbastes, podas e outros tratos culturais que de alguma maneira reflitam algum ou alguns dos fatores anteriormente citados.

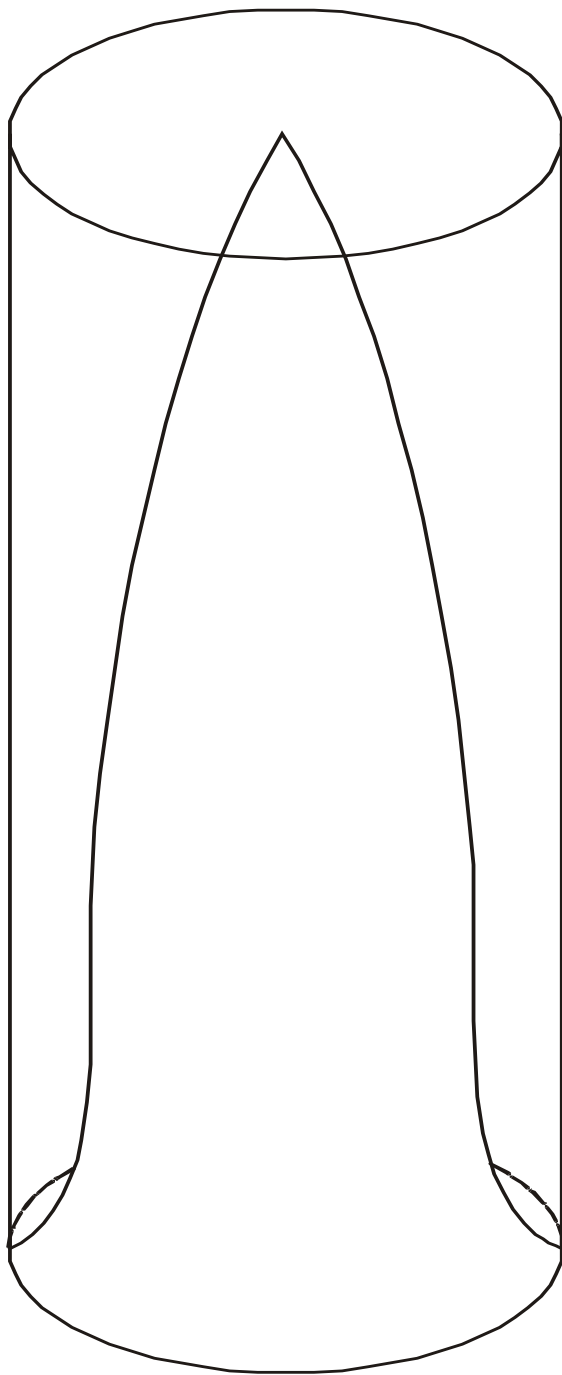
## 4.2 - Fator de forma e quociente de forma

O fator e o quociente de forma são tentativas de se expressar a forma da árvore numericamente. O fator e o quociente de forma também podem ser empregados para o cálculo do volume de árvores individuais.

### 4.2.1 - Fator de forma

#### a) Fator de forma artificial ( $f$ )

Este fator é a razão entre dois volumes: o volume cubado da árvore, considerado aproximadamente como o volume real da árvore, e o volume de um cilindro. Ele pode assumir valores entre 0 e 1.



$$f = \frac{v_{real}}{v_{cil}}$$

Em que:

$f$  = fator de forma artificial, com ou sem casca;

$v_{real}$  = volume cubado, com ou sem casca, em m<sup>3</sup>;

$v_{cil}$  = volume de um cilindro definido pelo  $D$  e pela altura total ou comercial.

Para o cálculo deste fator, é feito o abate da árvore e por meio de metodologias de cubagem rigorosa, apresentadas posteriormente, é obtido o volume considerado como o volume real da árvore.

Quanto ao volume do cilindro, o mesmo é calculado pela seguinte expressão:

$$V_{cil} = \frac{\pi D^2}{40000} H$$

Deveria se ter cuidado no emprego do fator de forma em árvores muito tortuosas, tendo em vista que não é razoável pensar que uma árvore desse tipo possa se aproximar da forma geométrica de um cilindro.

**Exemplo 4:** Uma determinada árvore apresenta uma altura total ( $H$ ) igual a 20 metros e um  $D$  igual a 15 cm. Sabe-se de antemão que seu fator de forma artificial  $\bar{f}$  é igual a 0,6. Qual o volume estimado desta árvore em metros cúbicos?

$$v_{cil} = \frac{\pi 15^2}{40000} 20 = 0,35343 \text{ m}^3$$

$$v_{est} = 0,35343 \times 0,6$$

$$v_{est} = \mathbf{0,21206 \text{ m}^3}$$



## b) Fator de forma de Hohenald ( $f_{0,1}$ )

A diferença básica entre o fator de forma de Hohenadl ( $f_{0,1}$ ) e o fator de forma artificial está na obtenção do volume do cilindro. Enquanto que no fator de forma artificial o volume do cilindro é calculado tomando como base a área seccional relativa ao  $D$ , no fator de forma de Hohenadl a área seccional para cálculo do volume do cilindro é obtida a partir do diâmetro tomado a 10% da altura total da árvore.

$$f_{0,1} = \frac{v_{real}}{v_{cil}}$$

Esta diferença conceitual gera algumas peculiaridades na interpretação destes dois fatores:

- ✓ Quando a árvore tem 13 metros de altura, estes dois fatores são iguais, uma vez que 10% da altura corresponde a altura do *D*.
- ✓ Para árvores com mais de 13 metros de altura, o fator de forma artificial é menor que o fator de forma natural, sendo o contrário verdadeiro.
- ✓ O fator de forma natural é mais eficiente que o fator de forma artificial, já que árvores com diferentes alturas, mas com mesma conicidade, apresentam o mesmo fator de forma natural, mas não o mesmo fator de forma artificial.
- ✓ O fator de forma artificial é mais fácil de ser aplicado em nível de campo.

## **Observações importantes:**

- ✓ Normalmente utiliza-se a altura total das árvores por facilidade de medição, exceto em matas naturais onde a altura comercial é mais fácil de obter-se.
- ✓ Sempre use a altura correspondente àquela utilizada para gerar o fator, ou seja, se o fator foi gerado utilizando a altura total, o volume do cilindro deve ser obtido medindo-se a altura total.
- ✓ Verificar se o fator de forma refere-se a um fator de forma com casca ou a um fator de forma sem casca.

## 4.2.2 - Quociente de forma

- ✓ O quociente de forma ( $k$ ) é uma razão entre dois diâmetros que procura medir o grau de afilamento do tronco das árvores, podendo ser utilizado para se estimar o volume das mesmas.
- ✓ Proporcionam resultados menos precisos que os obtidos pelo fator de forma, porém são mais fáceis de serem obtidos uma vez que não é necessário fazer o abate da árvore para o cálculo de seu volume real.
- ✓ Na prática são pouco utilizados pela sua baixa precisão.

A literatura apresenta alternativas para calcular o quociente de forma. A título de exemplo, é apresentada a seguir a expressão de cálculo do quociente de Girard (1933):

$$k = \frac{d_{5,2}}{D}$$

Em que:

$k$  = quociente de forma de Girard;

$d_{5,2}$  = diâmetro da árvore à 5,2 metros de altura, com ou sem casca;

$D$  = diâmetro a 1,30 metros de altura, com ou sem casca.

Semelhantemente ao fator de forma, o volume da árvore pode ser obtido multiplicando-se o volume de um cilindro pelo quociente de forma médio, apropriado para a espécie e para o volume que se deseja estimar.

**FIM**

14 7 2005

# Referências

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. Viçosa: UFV, 407 p., 2009.

FINGER, C. A. G. **Fundamentos de biometria florestal**. Santa Maria: UFSM, 1992. 269p.

LEITHOLD, L.D. O cálculo com Geometria Analítica. Harper E. Roll do Brasil, 1977 – vol. I.

MACHADO, S. A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. Curitiba: UFPR, 2003. 309p.

SCOLFORO, J. R. S.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Biometria Florestal: medição e volumetria de árvores**. Lavras: UFLA/FAEPE, 1998. 310p.





Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias  
Departamento de Ciências Florestais e  
da Madeira



# CAPÍTULO IV

## Volumetria

### Parte 3

Professor Gilson Fernandes da Silva



# Objetivos da parte 3

---

- Apresentar de forma detalhada o estudo do perfil longitudinal do tronco.

## 4.3 - Estudo do perfil longitudinal do tronco

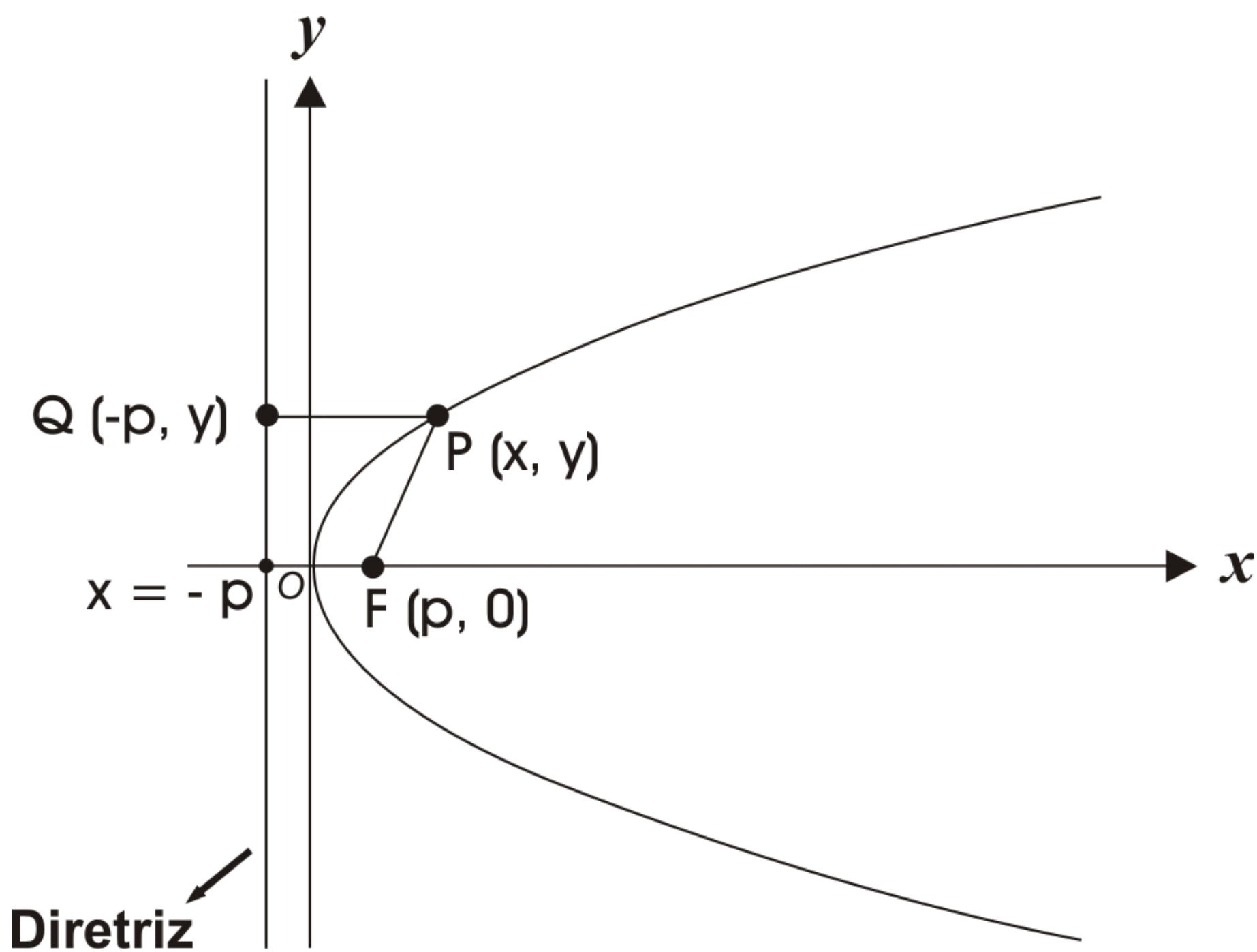
Os troncos das árvores podem assumir diferentes formas, desde aquelas perfeitamente assimiláveis a uma figura geométrica, caso das coníferas, até aquelas com formas totalmente irregulares, não comparáveis a quaisquer tipos geométricos.

Para estudar as formas naturais das árvores, é comum na pesquisa florestal relacioná-las aos sólidos geométricos de revolução. Estes sólidos são conhecidos no meio florestal como protótipos dendrométricos.

O perfil longitudinal das árvores pode ser representado pela equação geral da família de curvas planas denominadas parábolas generalizadas.

Esta equação tem origem na definição da parábola e aproveitando-se aqui a definição apresentada por Leithold (1977), podemos escrever:

*“Uma parábola é o conjunto de todos os pontos num plano, equidistantes de um ponto e de uma reta fixos. O ponto fixo é chamado foco e a reta fixa é chamada diretriz.”*



Para dedução da equação, tomemos como base a figura anterior. Na figura, o foco é o ponto  $F (p, 0)$  e a diretriz é a reta que tem a equação  $x = -p$ . Um ponto  $P (x, y)$  está na parábola se, e somente se,  $P$  for eqüidistante de  $F$  e da diretriz, isto é, se  $Q (-p, y)$  é o pé da reta perpendicular de  $P$  à diretriz, então  $P$  está na parábola se, e somente se:

$$|\overline{FP}| = |\overline{QP}|$$

Cálculo das distâncias  $|\overline{FP}|$  e  $|\overline{QP}|$

Fazendo  $F = P_1$  e  $P = P_2$ , observe que a distância entre  $F$  e  $P$  pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$|\overline{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



A partir das relações anteriores, pode-se escrever que:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x - p)^2 + y^2} \quad \text{e} \quad |\overline{QP}| = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$$

$$\sqrt{(x - p)^2 + y^2} = \sqrt{(x + p)^2}$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

$$y^2 = 4px$$

**Teorema** - Uma equação da parábola que tem seu foco em  $(p, 0)$  e sua diretriz na reta  $x = -p$  é:

$$y^2 = 4px$$

A partir da equação da parábola, pode-se escrever que:

$$y = 2p^{1/2} \sqrt{x}$$

Fazendo  $2p^{1/2} = k$ , tem-se:

$$y = k \sqrt{x}$$

A expressão anterior representa uma parábola por definição. Mas, se o expoente de  $x$  for igual a  $r$ , pode-se generalizar esta função tal que a mesma seja capaz de gerar novas curvas dependendo do valor de  $r$ .

$$y = k \sqrt{x^r}$$



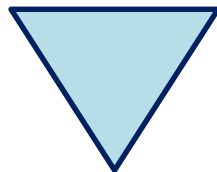
$$y = k \sqrt[r]{x}$$

$y$  = raio ao longo do tronco;

$x$  = distância da seção do topo da curva;

$r$  = índice que caracteriza a forma da curva;

$k$  = coeficiente ou constante que descreve o tamanho do corpo de rotação.



O volume de um sólido de revolução pode ser obtido a partir da expressão:

$$y = k \sqrt{x^r}$$

Que também pode ser escrita na forma:

$$y^2 = k^2 x^r$$

Sendo circular as seções ao longo do seu perfil, a área  $S$  de qualquer dessas seções pode ser obtida por:

$$a = \pi y^2 \quad \text{ou} \quad a = \pi k^2 x^r$$



$$a = b x^r$$



O volume do sólido de revolução pode ser obtido pela integral da área representada pela expressão anterior em relação a  $x$ , no intervalo que vai de 0 até  $x$ , ou seja:

$$v = \int_0^x a \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \int_0^{x_0} b x^r \, dx \quad \Rightarrow \quad v = b \int_0^{x_0} x^r \, dx$$

$$v = b \left[ \frac{x^{r+1}}{r+1} \right]_0^{x_0} \quad \Rightarrow \quad v = b \left[ \frac{x_0^{r+1}}{r+1} - \frac{0^{r+1}}{r+1} \right]$$

$$v = \frac{1}{r+1} b x_0^r x_0^1 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{r+1} a x_0$$

Fazendo de  $x$  a altura  $h$  do parabolóide e  $1/(r + 1)$  um coeficiente de forma absoluto  $f$ , a fórmula geral de volume pode ser escrita como:

$$v = f aH$$

$$r = 0 , f = 1/(0 + 1) = 1 \Rightarrow f = 1 \quad (\text{cilindro})$$

$$r = 1 , f = 1/(1 + 1) = 1/2 \Rightarrow f = 1/2 \quad (\text{parabolóide ordinário})$$

$$r = 2 , f = 1/(2 + 1) = 1/3 \Rightarrow f = 1/3 \quad (\text{cone})$$

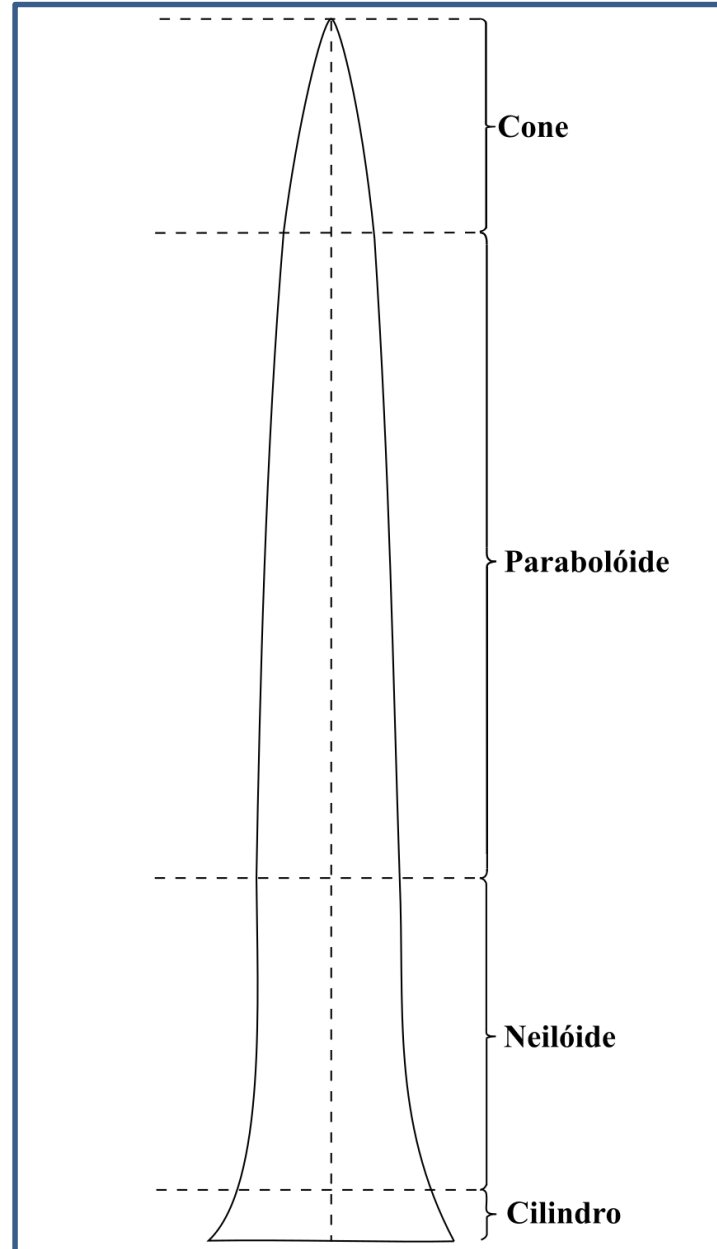
$$r = 3 , f = 1/(3 + 1) = 1/4 \Rightarrow f = 1/4 \quad (\text{parabolóide de Neil ou neilóide})$$

O quadro a seguir resume as expressões de cálculo do volume para os principais sólidos de revolução

Sólido de Revolução	Equação de Volume	
Cilindro	$v = ah$	
Parabolóide	$v = (1/2)(ah)$	
Cone	$v = (1/3)(ah)$	
Neilóide	$v = (1/4)(ah)$	
tronco de parabolóide	$v = (h/2)(a_i + a_{i+1})$	(Smalian)
	$v = h(a_m)$	(Huber)
tronco de cone	$v = (h/3)(a_i + \sqrt{a_i a_{i+1}} + a_{i+1})$	
tronco de neilóide	$v = (h/4)(a_i + \sqrt[3]{a_i^2 a_{i+1}} + \sqrt[3]{a_i a_{i+1}^2} + a_{i+1})$	
cilindro, parabolóide, cone ou neilóide	$v = (h/6)(a_i + 4a_m + a_{i+1})$	(Newton)

**O que é um tronco geométrico?**

# E QUAL SERÁ A FORMA DA ÁRVORE?



**FIM**

14 7 2005

# Referências

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. Viçosa: UFV, 407 p., 2009.

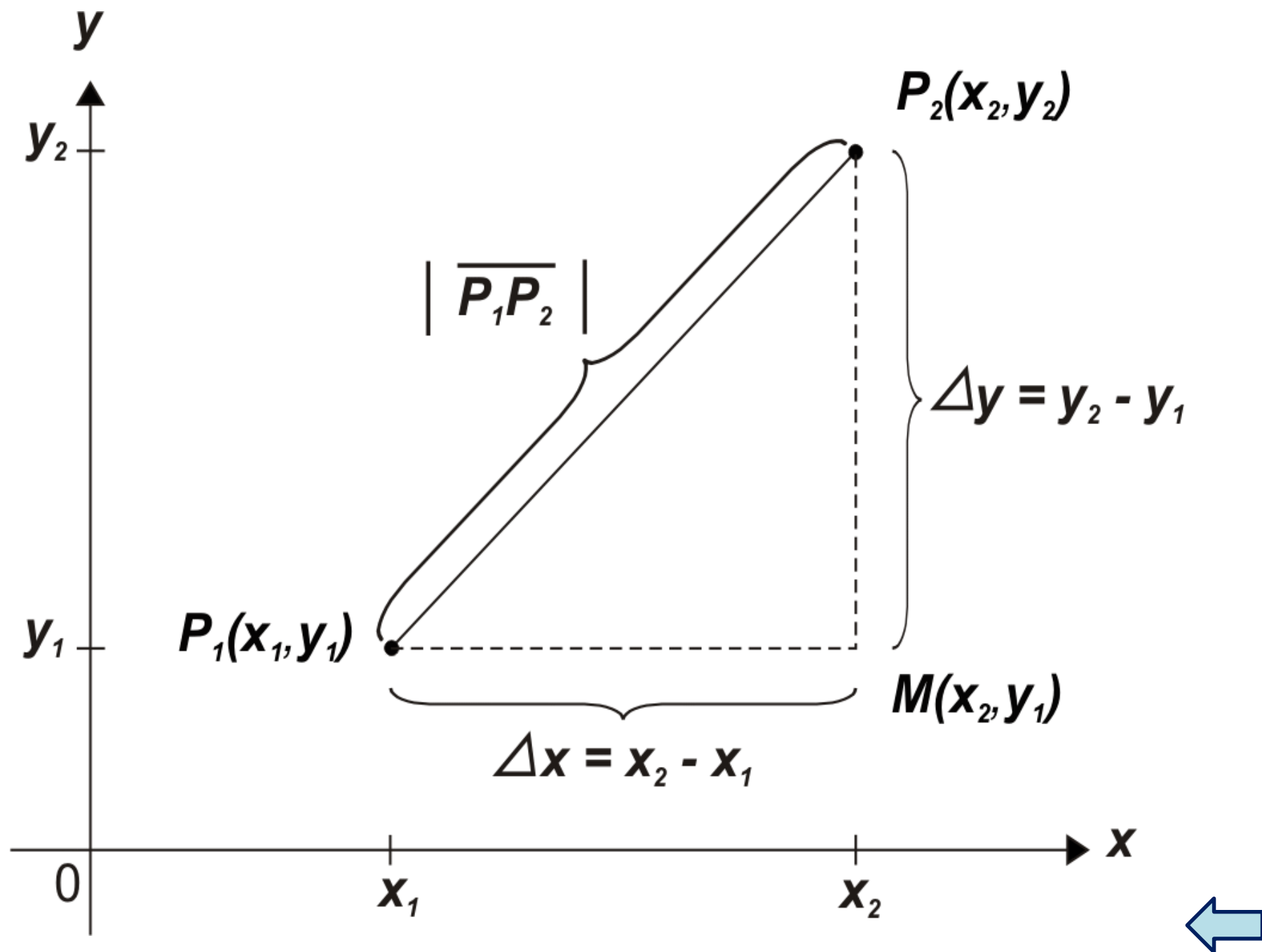
FINGER, C. A. G. **Fundamentos de biometria florestal**. Santa Maria: UFSM, 1992. 269p.

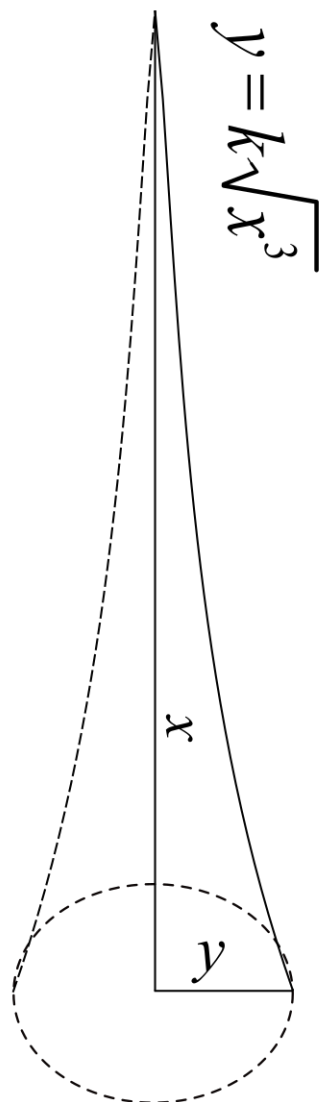
LEITHOLD, L.D. O cálculo com Geometria Analítica. Harper E. Roll do Brasil, 1977 – vol. I.

MACHADO, S. A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. Curitiba: UFPR, 2003. 309p.

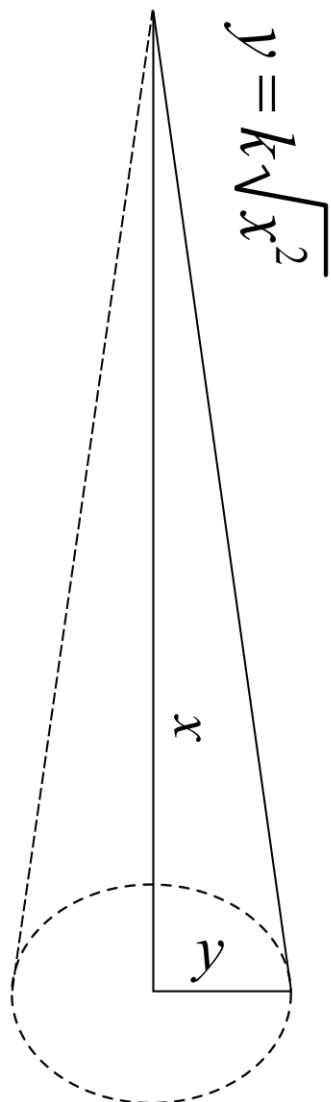
SCOLFORO, J. R. S.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Biometria Florestal: medição e volumetria de árvores**. Lavras: UFLA/FAEPE, 1998. 310p.



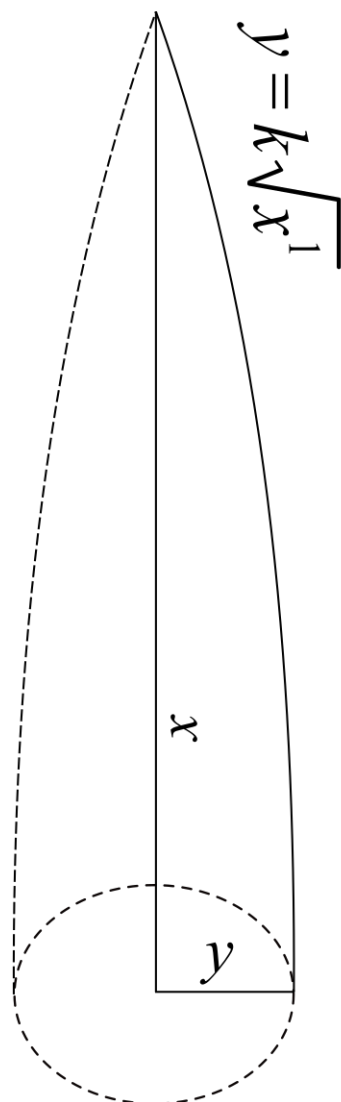




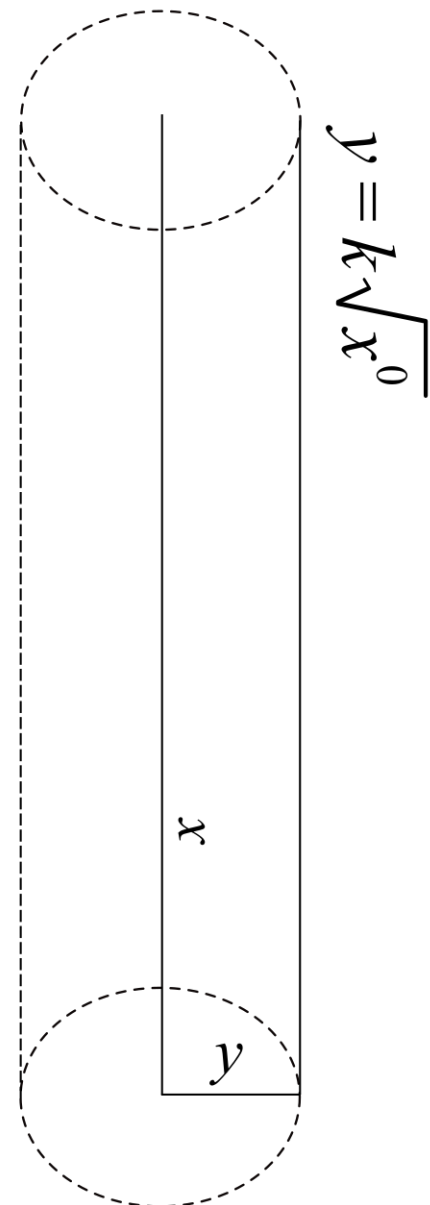
**Neilóide**



**Cone**

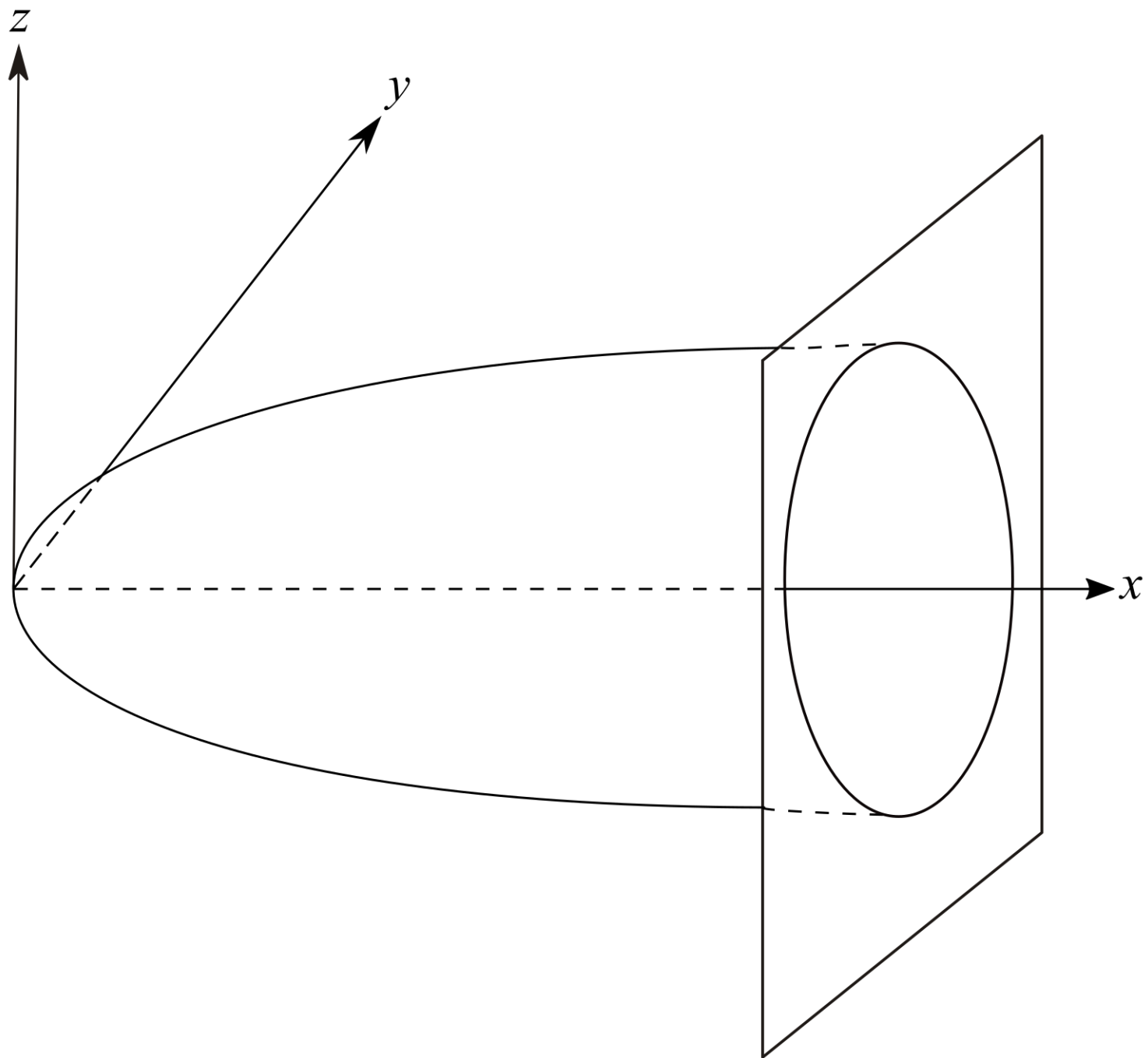


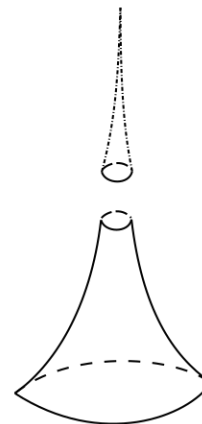
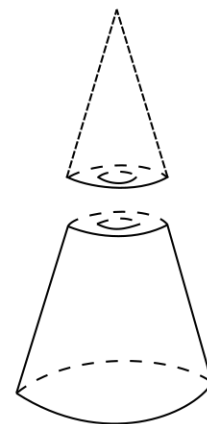
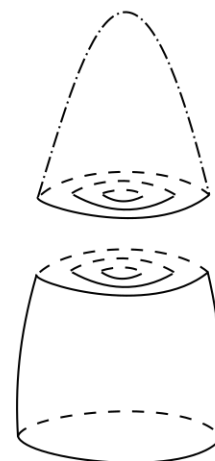
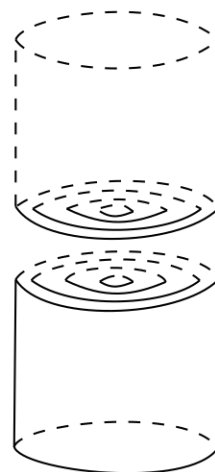
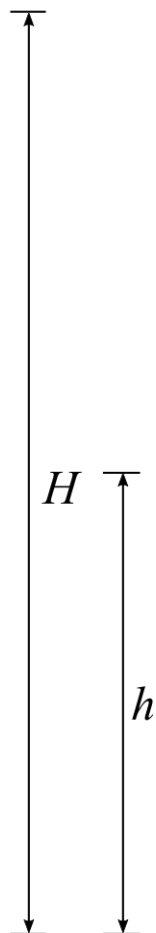
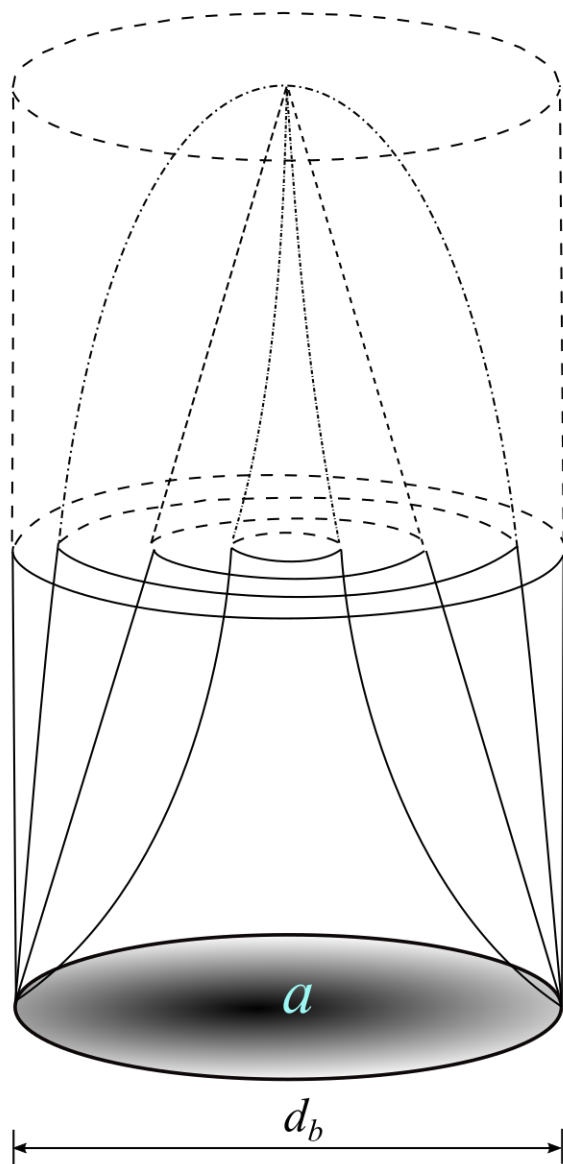
**Parabolóide**



**Cilindro**









Universidade Federal do Espírito Santo  
Centro de Ciências Agrárias  
Departamento de Ciências Florestais e  
da Madeira



# CAPÍTULO IV

## Volumetria

### Parte 4

Professor Gilson Fernandes da Silva

# Objetivos da parte 4

---

- Apresentar a ideia de cubagem rigorosa e os principais métodos disponíveis.
- Apresentar os principais métodos baseados em seccionamento absoluto: Smalian, Huber e Newton.
- Apresentar os principais métodos baseados em seccionamento relativo: Hohenald e FAO.

## 4.4 – Métodos de cubagem rigorosa

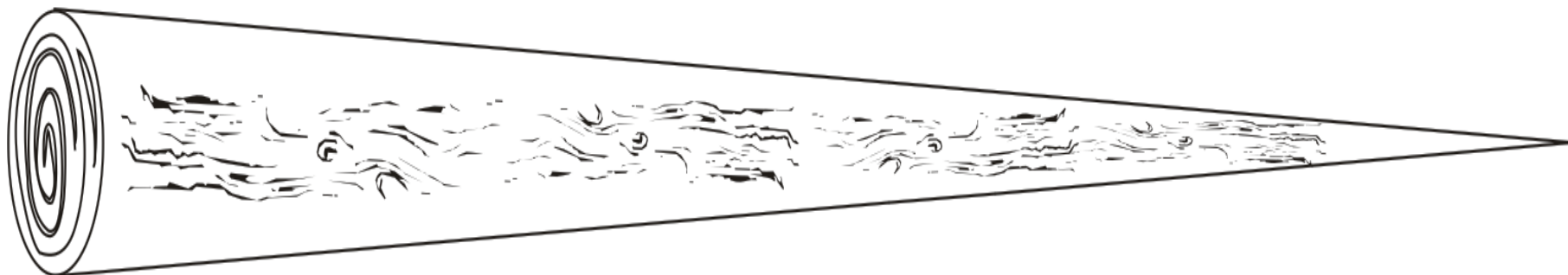
A cubagem rigorosa de uma árvore nada mais é do que dividir o tronco em volumes menores (toretas) obtendo o volume individual de cada um desses toretas empregando para isso expressões apropriadas de cálculo de volume.

Uma vez obtido o volume individual de todos os toretas do tronco da árvore, os mesmos são somados chegando-se ao volume total da árvore.

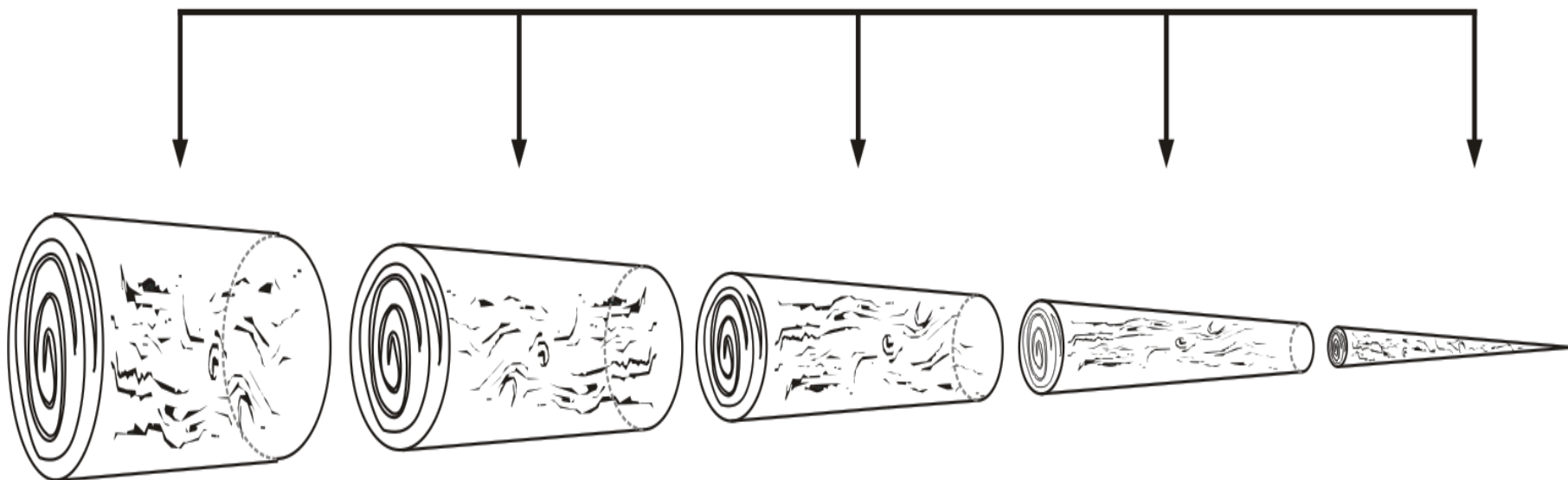
A principal razão pela qual a árvore é subdividida em toretas é que se pode obter o volume de maneira mais precisa para toretas menores do que para o tronco inteiro da árvore.

# IDEIA GERAL DA CUBAGEM RIGOROSA

Árvore inteira



Árvore subdividida em toretes





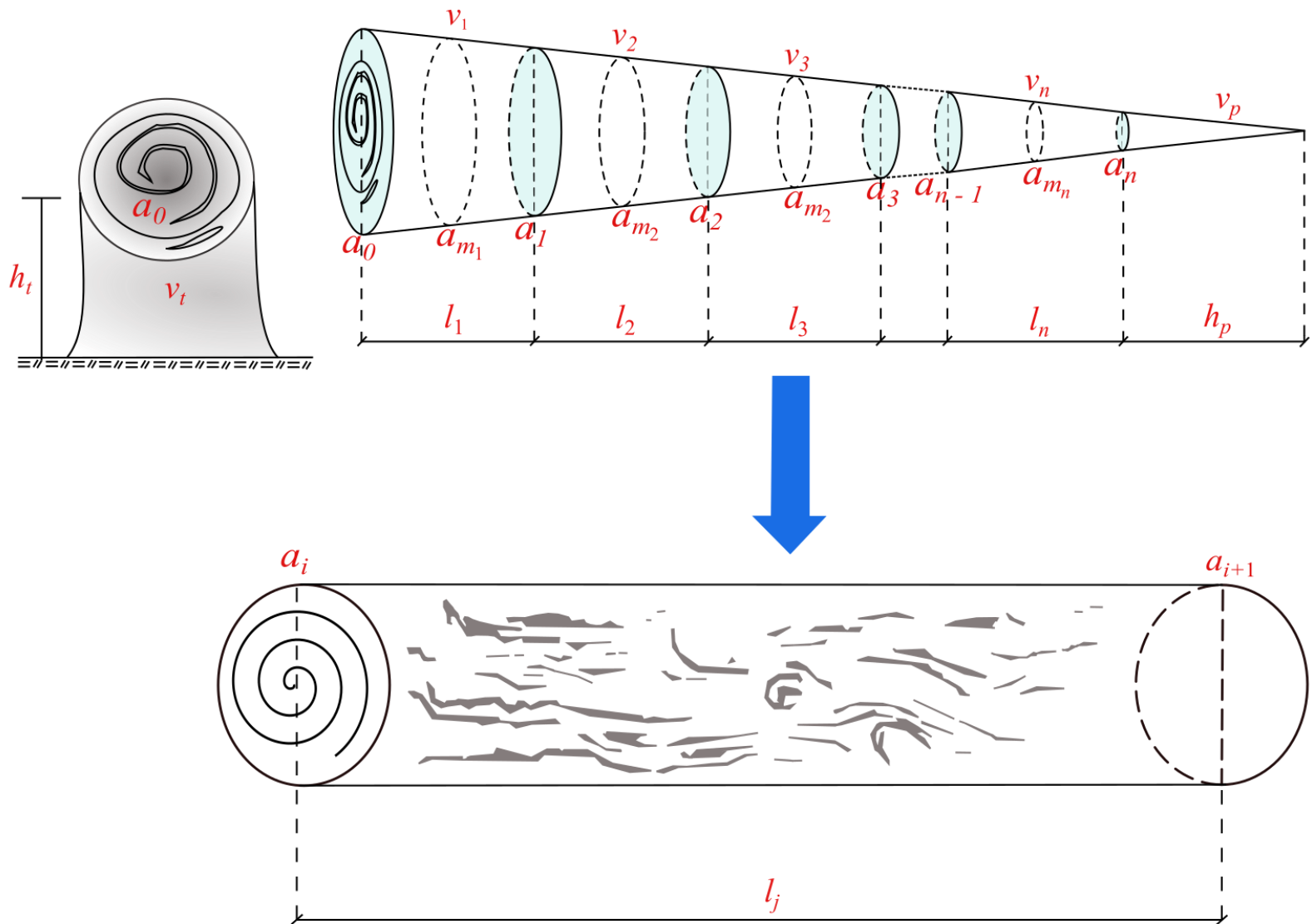
#### **4.4.1 - Volume pelo seccionamento em comprimentos absolutos: métodos de Smalian, Huber e Newton**

Em geral, as medições dos diâmetros são feitas a partir do nível do solo nas posições 0,10; 0,30; 0,70; 1,00; 1,30 m e a partir daí, de 1 em 1 metro ou de 2 em 2 metros para cada torete.

O maior número de toretes na parte basal do tronco pode se justificar pela maior quantidade de volume existente nesta porção do tronco e também uma maior variação da forma.

Nada impede, entretanto, que outras formas de subdivisão sejam feitas diferentemente do exemplo citado.

## 4.4.1.1 - Cubagem pelo método de Smalian



Para o cálculo do volume pelo método de cubagem de Smalian, tomemos como base a Figura anterior, de onde vem:

$$v = v_t + \sum_{j=1}^n v_{a_j} + v_p$$

Em que:

$v$  = volume total da árvore;

$v_t = a_o h_t$  = volume do toco, sendo  $h_t$  igual à altura do toco;

$v_p = (1/3)(a_n h_p)$  = volume da ponta, assumindo-se a ponta como tendo a forma de um cone, sendo que  $h_p$  corresponde ao comprimento da ponta.

$$v_{a_j} = \frac{(a_i + a_{i+1})}{2} l_j$$

Volume do  $j$ -ésimo torete, sendo o índice  $i$  relativo às áreas seccionais extremas do torete e  $l_j$  o comprimento do  $j$ -ésimo torete.

## Exemplo 5:

Campo			Escritório	
$h$ (m)	$d$ (cm)	$d_s$ (cm)	$a$ (m <sup>2</sup> )	$a_s$ (m <sup>2</sup> )
0,1	27,1	24,9	0,05768	0,04870
1,3	25,8	23,6	0,05228	0,04374
3,3	22,9	22,3	0,04119	0,03906
5,3	21,3	20,9	0,03563	0,03431
7,3	19,1	18,7	0,02865	0,02746
9,3	17,2	17,0	0,02324	0,02270
11,3	14,3	14,1	0,01606	0,01561
13,3	10,8	10,6	0,00916	0,00882
15,3	6,7	6,5	0,00353	0,00332
17,3	3,2	3,0	0,00080	0,00071

O comprimento da ponta da árvore ( $h_p$ ) foi de 1,2 metros.

*Cálculo para o volume com casca:*

$$v_{a_1} = \frac{(a_{0,1} + a_{1,3})}{2} l_1$$

$$v_{a_1} = \frac{(0,05768 + 0,05228)}{2} \times 1,2 = 0,06598 \text{ m}^3$$

$$v_{a_2} = \frac{(a_{1,3} + a_{3,3})}{2} l_2$$

$$v_{a_2} = \frac{(0,05228 + 0,04119)}{2} \times 2,0 = 0,09347 \text{ m}^3$$

$v_{a_3}$	$v_{a_4}$	$v_{a_5}$	$v_{a_6}$	$v_{a_7}$	$v_{a_8}$	$v_{a_9}$
0,07682 m <sup>3</sup>	0,06428 m <sup>3</sup>	0,05189 m <sup>3</sup>	0,03930 m <sup>3</sup>	0,02522 m <sup>3</sup>	0,01269 m <sup>3</sup>	0,00433 m <sup>3</sup>

$$v_t = a_{0,1} h_t \quad \Rightarrow \quad v_t = 0,05768 \times 0,1 = 0,00577 \text{ m}^3$$

$$v_p = \frac{a_{17,3}}{3} h_p \quad \Rightarrow \quad v_p = \frac{0,00080}{3} \times 1,2 = 0,00032 \text{ m}^3$$

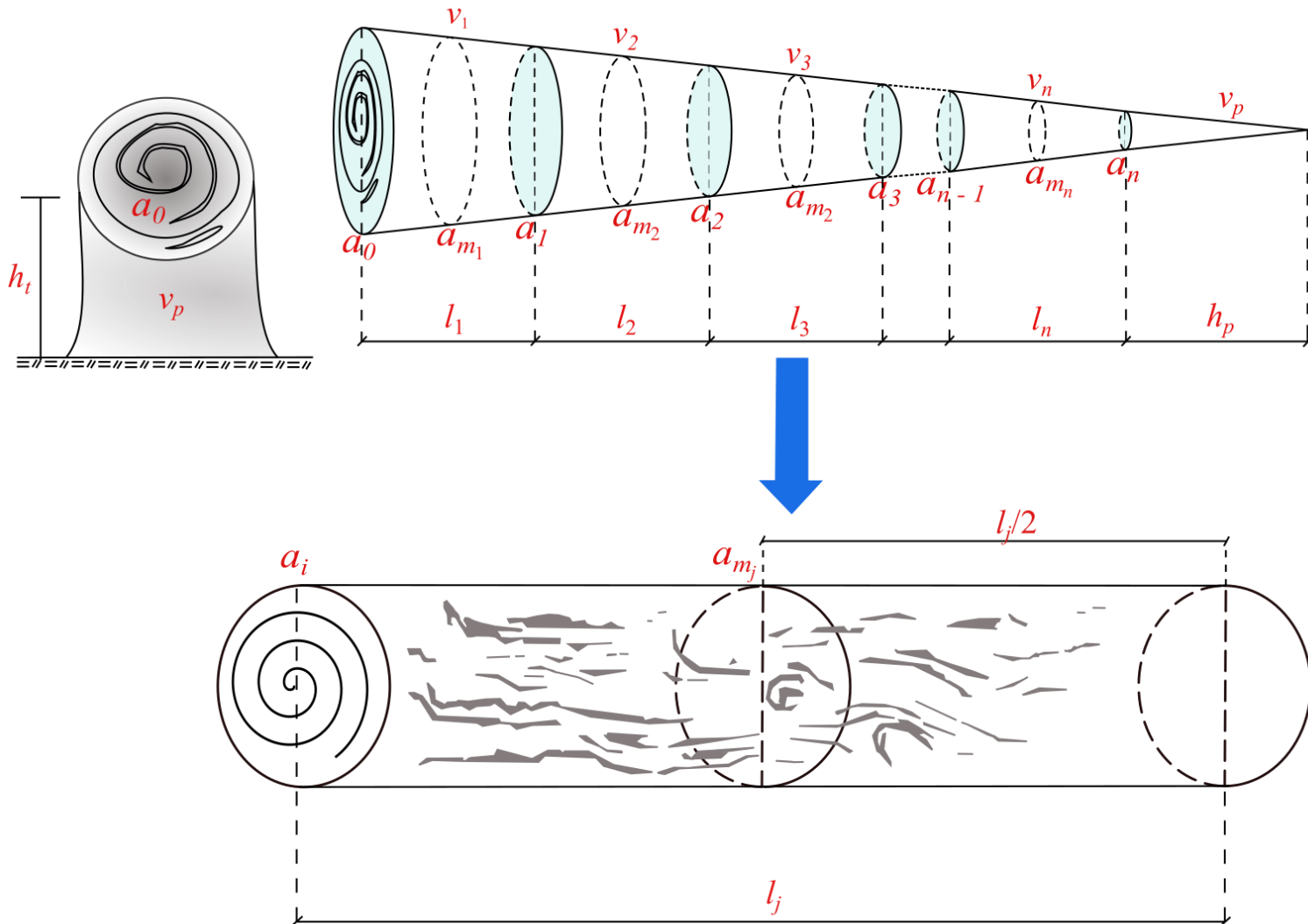
$$v = v_t + \sum_{j=1}^n v_{a_j} + v_p$$

$$v = 0,00577 + (0,06598 + \dots + 0,00433) + 0,00032 = \mathbf{0,44006 \text{ m}^3}.$$

*Repetindo os mesmos cálculos para o volume sem casca, tem-se:*

$$v_s = \mathbf{0,40764 \text{ m}^3}$$

## 4.4.1.2 - Cubagem pelo método de Huber



Para o cálculo do volume pelo método de cubagem de Huber, temos que:

$$v = v_t + \sum_{j=1}^n v_{a_j} + v_p$$

Em que:

$v_t$  e  $v_p$  é tal como calculado para Smalian e

$$v_{a_j} = a_{mj} l_j$$

Volume do  $j$ -ésimo torete, sendo  $a_{mj}$  a área seccional na metade do  $j$ -ésimo torete.



## Exemplo 6:

Campo			Escritório	
$h$ (m)	$d$ (cm)	$d_s$ (cm)	$a$ (m <sup>2</sup> )	$a_s$ (m <sup>2</sup> )
0,7	26,4	24,0	0,05474	0,04524
2,3	24,2	23,4	0,04600	0,04301
4,3	22,0	21,4	0,03801	0,03597
6,3	20,1	19,7	0,03173	0,03048
8,3	18,8	18,4	0,02776	0,02659
10,3	15,9	15,7	0,01986	0,01936
12,3	12,7	12,5	0,01267	0,01227
14,3	8,6	8,4	0,00581	0,00554
16,3	5,4	5,2	0,00229	0,00212

O comprimento da ponta da árvore ( $h_p$ ) foi de 1,2 metros.

*Cálculo para o volume com casca:*

$$v_1 = a_{0,7} l_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 0,05474 \times 1,2 = 0,06569 \text{ m}^3$$

$$v_2 = a_{2,3} l_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = 0,04600 \times 2 = 0,09199 \text{ m}^3$$

$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
0,07603 m <sup>3</sup>	0,06346 m <sup>3</sup>	0,05552 m <sup>3</sup>	0,03971 m <sup>3</sup>	0,02534 m <sup>3</sup>	0,01162 m <sup>3</sup>	0,00458 m <sup>3</sup>

$$v_t = 0,00577 \text{ m}^3 \quad \text{e} \quad v_p = 0,00032 \text{ m}^3$$

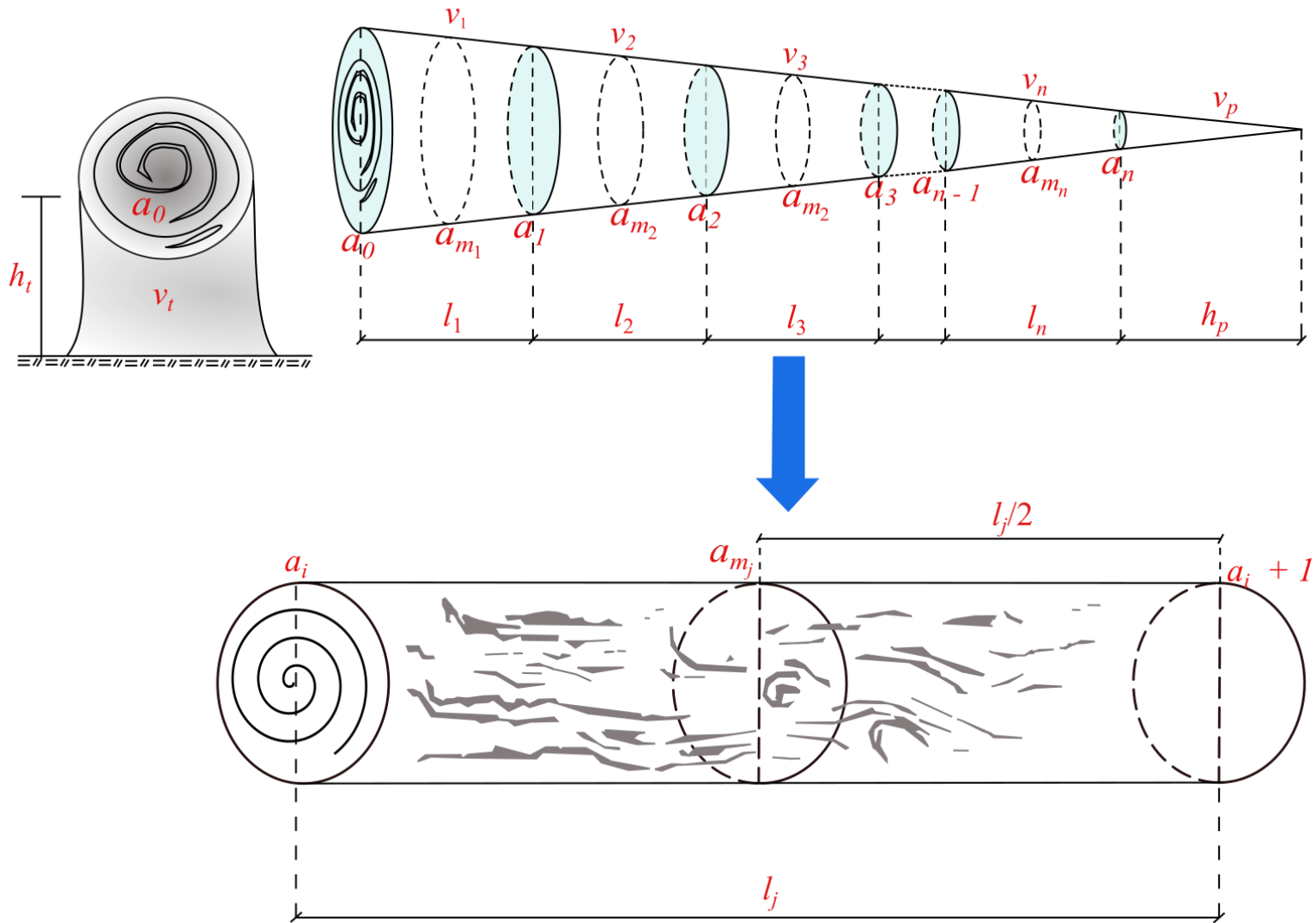
$$v = v_t + \sum_{j=1}^n v_{a_j} + v_p$$

$$v = 0,00577 + (0,06569 + \dots + 0,00458) + 0,00032 = \mathbf{0,44002 \text{ m}^3}$$

*Repetindo os mesmos cálculos para o volume sem casca, tem-se:*

$$v_s = \mathbf{0,41012 \text{ m}^3}$$

## 4.4.1.3 - Cubagem pelo método de Newton



Para o cálculo do volume pelo método de cubagem de Newton, temos que:

$$v = v_t + \sum_{j=1}^n v_{a_j} + v_p$$

Em que:

$v_t$  e  $v_p$  é tal como calculado para Smalian e Huber, e

$$v_j = \frac{1}{6} (a_i + 4a_{m_j} + a_{i+1}) l_j$$

Volume do *j-ésimo* torete, sendo  $a_i$  e  $a_{i+1}$  as áreas seccionais nas extremidades (Smalian) e  $a_{m_j}$  a área seccional na metade do *j-ésimo* torete (Huber)

## Exemplo 7:

Campo			Escritório	
$h$ (m)	$d$ (cm)	$d_s$ (cm)	$a$ (m <sup>2</sup> )	$a_s$ (m <sup>2</sup> )
0,1	27,1	24,9	0,05768	0,04870
0,7	26,4	24,0	0,05474	0,04524
1,3	25,8	23,6	0,05228	0,04374
2,3	24,2	23,4	0,04600	0,04301
3,3	22,9	22,3	0,04119	0,03906
4,3	22,0	21,4	0,03801	0,03597
5,3	21,3	20,9	0,03563	0,03431
6,3	20,1	19,7	0,03173	0,03048
7,3	19,1	18,7	0,02865	0,02746
8,3	18,8	18,4	0,02776	0,02659
9,3	17,2	17,0	0,02324	0,02270
10,3	15,9	15,7	0,01986	0,01936
11,3	14,3	14,1	0,01606	0,01561
12,3	12,7	12,5	0,01267	0,01227
13,3	10,8	10,6	0,00916	0,00882
14,3	8,6	8,4	0,00581	0,00554
15,3	6,7	6,5	0,00353	0,00332
16,3	5,4	5,2	0,00229	0,00212
17,3	3,2	3,0	0,00080	0,00071

O comprimento da ponta da árvore ( $h_p$ ) foi de 1,2 metros.

*Cálculo para o volume com casca:*

$$v_1 = \frac{(a_{0,1} + 4a_{0,7} + a_{1,3})}{6} l_1$$

$$v_1 = \frac{(0,05768 + 4 \times 0,05474 + 0,05228)}{6} \times 1,2 = 0,06578 \text{ m}^3$$

$$v_2 = \frac{(a_{1,3} + 4a_{2,3} + a_{3,3})}{6} l_2$$

$$v_2 = \frac{(0,05228 + 4 \times 0,04600 + 0,04119)}{6} \times 2 = 0,09248 \text{ m}^3$$

$v_3$	$v_4$	$v_5$	$v_6$	$v_7$	$v_8$	$v_9$
0,07629 m <sup>3</sup>	0,06374 m <sup>3</sup>	0,05431 m <sup>3</sup>	0,03957 m <sup>3</sup>	0,02530 m <sup>3</sup>	0,01197 m <sup>3</sup>	0,00450 m <sup>3</sup>

$$v_t = 0,00577 \text{ m}^3 \quad \text{e} \quad v_p = 0,00032 \text{ m}^3$$

$$v = v_t + \sum_{j=1}^n v_{a_j} + v_p$$

$$v = 0,00577 + (0,06578 + \dots + 0,00450) + 0,00032 = \mathbf{0,44003 \text{ m}^3}$$

*Repetindo os mesmos cálculos para o volume sem casca, tem-se:*

$$v_s = \mathbf{0,40929 \text{ m}^3}$$

Método de cubagem	Vol. com casca (m <sup>3</sup> )	Vol. sem casca (m <sup>3</sup> )
Smalian	0,44006	0,40763
Huber	0,44002	0,41012
Newton	0,44003	0,40929

# Considerações sobre os métodos de cubagem

- ✓ Seja qual for o método empregado, o  $D$  com casca e a altura total devem ser sempre medidos, pois serão úteis no ajuste de equações de volume;
- ✓ As fórmulas de Smalian e de Huber são mais empregadas devido a praticidade e rapidez no cálculo;
- ✓ Para seções maiores que 2 m, não se recomenda o uso da fórmula de Smalian, sendo Huber e Newton mais precisas;
- ✓ Para partes com excessiva deformação, a fórmula de Huber dá melhores resultados que a de Smalian.

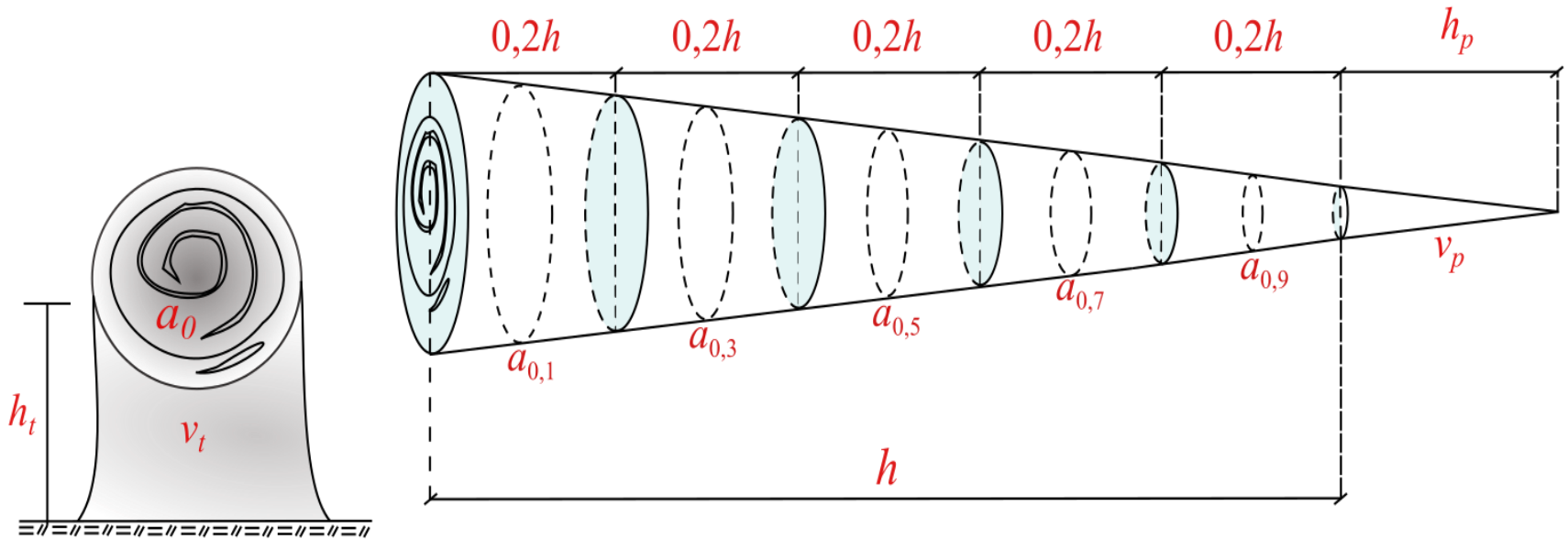


## 4.4.2 - Volume pelo seccionamento em comprimentos relativos: métodos de Hohenadl e da FAO

O volume pelo seccionamento do tronco em comprimentos relativos consiste em dividir o tronco da árvore em seções com tamanhos relativos, normalmente em função da altura total da árvore.

Para este tipo de seccionamento baseado em comprimentos relativos das seções a serem cubadas, existem dois métodos mais conhecidos: [o método de Hohenadl](#) e [o método da FAO](#), que nada mais é do que uma adaptação ao método de Hohenadl.

## 4.4.2.1 - O método de Hohenadl



$$v = 0,2h \frac{\pi}{4} d_{0,1}^2 + 0,2h \frac{\pi}{4} d_{0,3}^2 + 0,2h \frac{\pi}{4} d_{0,5}^2 + 0,2h \frac{\pi}{4} d_{0,7}^2 + 0,2h \frac{\pi}{4} d_{0,9}^2$$

$$v = 0,2h(a_{0,1} + a_{0,3} + a_{0,5} + a_{0,7} + a_{0,9})$$

## Exemplo 8:

Campo			Escritório	
$h$ (m)	$d$ (cm)	$d_s$ (cm)	$a$ (m <sup>2</sup> )	$a_s$ (m <sup>2</sup> )
1,0	18,30	17,50	0,02630	0,02405
3,0	15,80	15,00	0,01961	0,01767
5,0	12,30	11,90	0,01188	0,01112
7,0	10,80	10,40	0,00916	0,00849
9,0	5,40	5,00	0,00229	0,00196

$$v = 0,2h(a_{0,1} + a_{0,3} + a_{0,5} + a_{0,7} + a_{0,9})$$

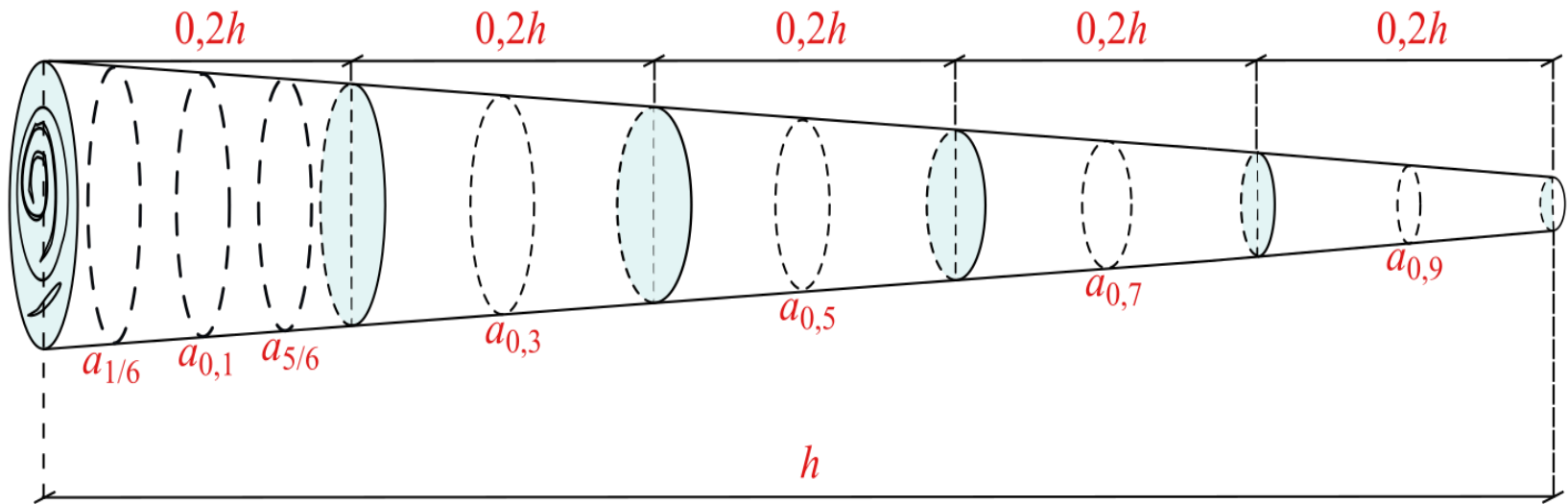
$$v = 0,2 \times 10 \times (0,02630 + 0,01961 + 0,01188 + 0,00916 + 0,00229)$$

$$v = \mathbf{0,13848 \text{ m}^3}$$

$$v_s = 0,2 \times 10 \times (0,02405 + 0,01767 + 0,01112 + 0,00849 + 0,00196)$$

$$v_s = \mathbf{0,12661 \text{ m}^3}$$

## 4.4.2.2 - O método da FAO



$$v = 0,2h \left[ \left( \frac{2a_1 + a_2 + a_3}{4} \right) + a_{0,3} + a_{0,5} + a_{0,7} + a_{0,9} \right]$$

Em que  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  correspondem, respectivamente, a área basal a 1/6, 3/6 e 5/6 da altura do primeiro torete.

## Exemplo 9:

Campo				Escritório	
Torete	$h$ (m)	$d$ (cm)	$d_s$ (cm)	$a$ (m <sup>2</sup> )	$a_s$ (m <sup>2</sup> )
1 (1/6)	0,3	19,1	18,2	0,02865	0,02602
1 (3/6)	1,0	18,3	17,5	0,02630	0,02405
1 (5/6)	1,7	17,4	16,6	0,02378	0,02164
2	3,0	15,8	15,0	0,01961	0,01767
3	5,0	12,3	11,9	0,01188	0,01112
4	7,0	10,8	10,4	0,00916	0,00849
5	9,0	5,4	5,0	0,00229	0,00196

$$v = 0,2 \times 10 \left[ \left( \frac{2 \times 0,02865 + 0,02630 + 0,02378}{4} \right) + 0,01961 + 0,01188 + 0,00916 + 0,00229 \right]$$

$$v = \mathbf{0,13957 \text{ m}^3}$$

*Repetindo os cálculos para o volume sem casca, chega-se a:*

$$v_s = \mathbf{0,12737 \text{ m}^3}$$

**FIM**

10/7/2005



# Referências

CAMPOS, J. C. C.; LEITE, H. G. **Mensuração Florestal: perguntas e respostas**. Viçosa: UFV, 407 p., 2009.

FINGER, C. A. G. **Fundamentos de biometria florestal**. Santa Maria: UFSM, 1992. 269p.

LEITHOLD, L.D. O cálculo com Geometria Analítica. Harper E. Roll do Brasil, 1977 – vol. I.

MACHADO, S. A.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Dendrometria**. Curitiba: UFPR, 2003. 309p.

SCOLFORO, J. R. S.; FIGUEIREDO FILHO, A. **Biometria Florestal: medição e volumetria de árvores**. Lavras: UFLA/FAEPE, 1998. 310p.