

Simplificação de Funções Booleanas

Lógica de Predicados
2014/2

Profa: Daniela Scherer dos Santos
daniela.santos37@ulbra.edu.br



Simplificação de Funções Booleanas

O que é?

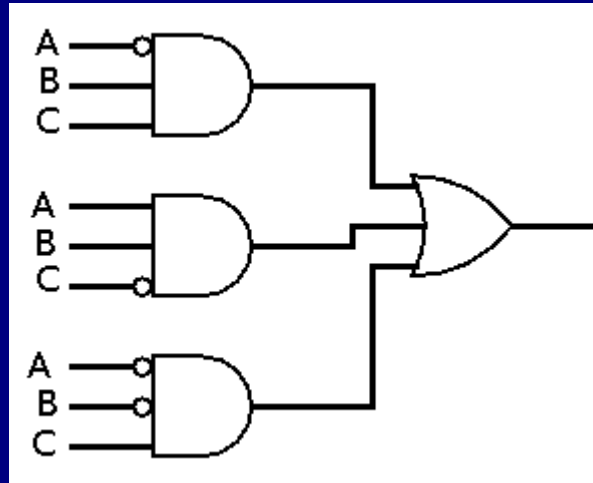
É um processo de manipulação algébrica das funções lógicas com a finalidade de REDUZIR o número de variáveis e operações para realizar a função lógica.

Por que simplificar?

- ◆ tornar o circuito mais simples de fabricar;
- ◆ facilitar a manutenção;
- ◆ economia de componentes;
- ◆ tornar o circuito mais rápido.

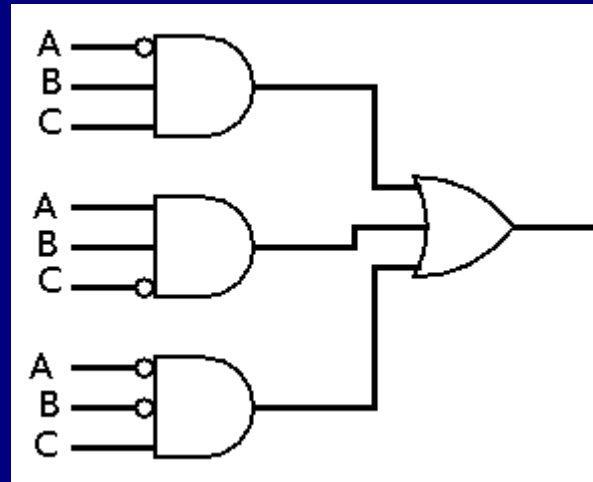
Simplificação de Funções Booleanas

$$F(A,B,C) = A'BC + ABC' + A'B'C$$



Simplificação de Funções Booleanas

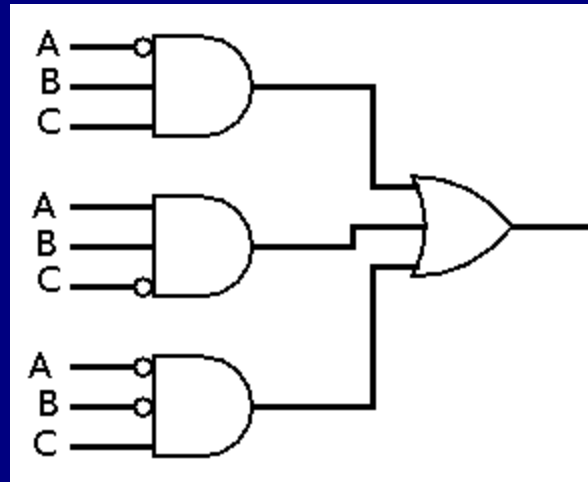
$$F(A,B,C) = A'BC + ABC' + A'B'C$$



Será que podemos deixá-lo menor (mais simples)?

Simplificação de Funções Booleanas

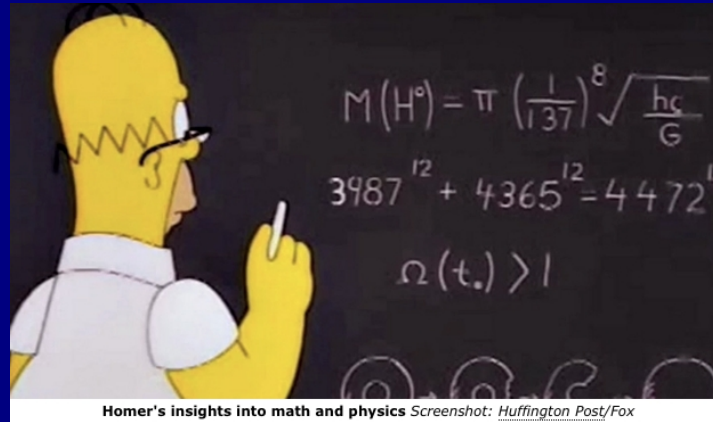
$$F(A,B,C) = A'BC + ABC' + A'B'C$$



Será que podemos deixá-lo menor (mais simples)?
Para isso, precisamos simplificar a função booleana.

Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...



Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

SOMA e MULTIPLICAÇÃO:

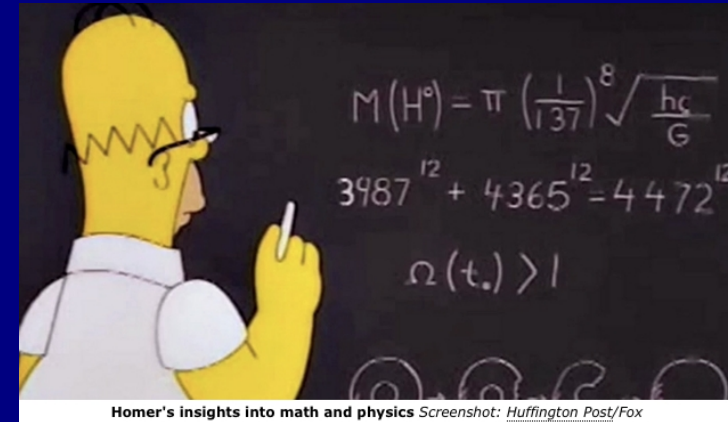
- propriedade comutativa:

$$5 + 2 = 2 + 5$$

a ordem das PARCELAS
não altera a soma

$$5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$$

a ordem dos FATORES
não altera o produto



Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

SOMA e MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade comutativa:

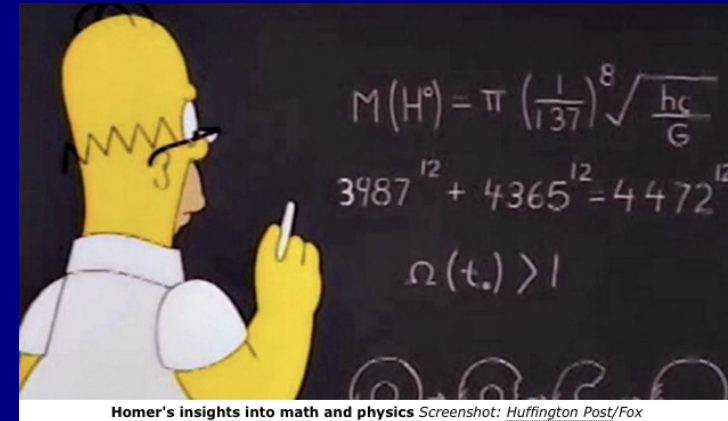
$$5 + 2 = 2 + 5 \qquad 5 \cdot 2 = 2 \cdot 5$$

- propriedade associativa:

$$5 + (2 + 3) = 10 \qquad 5 \cdot (2 \cdot 3) = 30$$

$$(5 + 2) + 3 = 10 \qquad (5 \cdot 2) \cdot 3 = 30$$

$$2 + (5 + 3) = 10 \qquad 2 \cdot (5 \cdot 3) = 30$$



Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

SOMA e MULTIPLICAÇÃO:

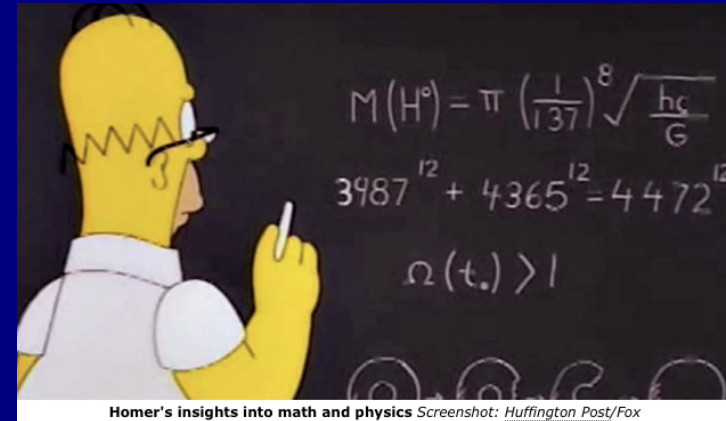
- propriedade do elemento neutro:

- soma(0)

$$5 + 0 = 5$$

- multiplicação (1)

$$5.1 = 5$$



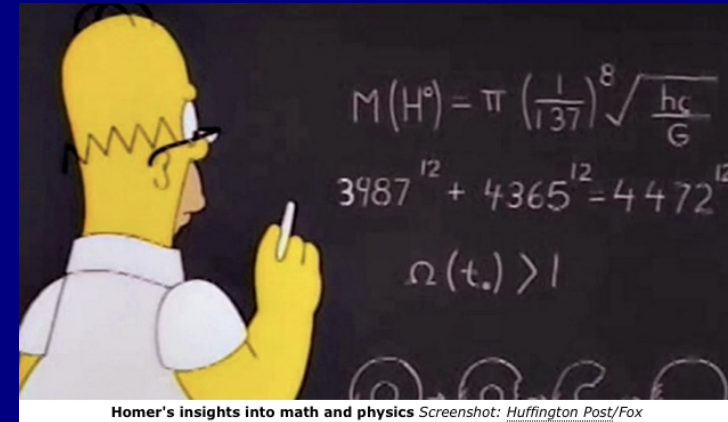
Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- ♦ propriedade distributiva:

$$3.(x + 4)$$



Homer's insights into math and physics Screenshot: Huffington Post/Fox

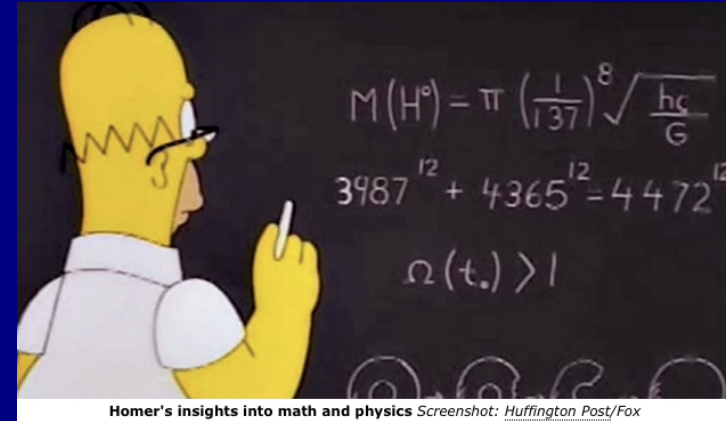
Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:

$$3 \cdot (x + 4) = 3x + 12$$




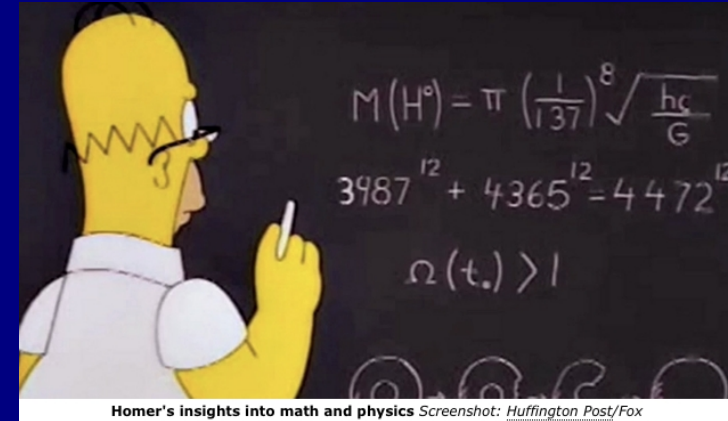
Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

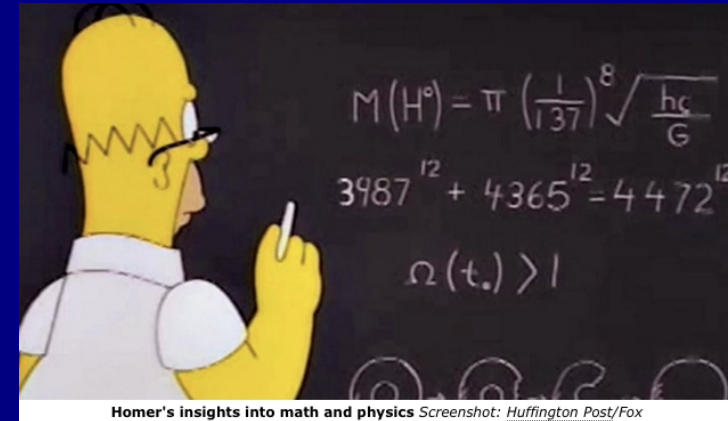
MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

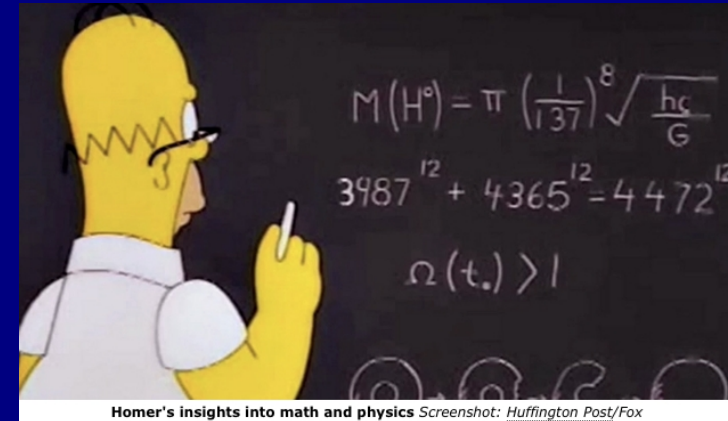
- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$
$$3.($$

$$12 = 3 \times 4$$




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

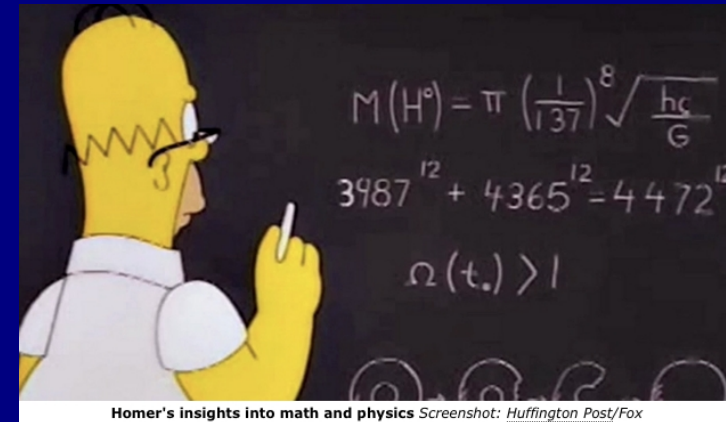
- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$

$$3.($$

$$12 = 3 \times 4$$

o que eu quero? $3x$




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

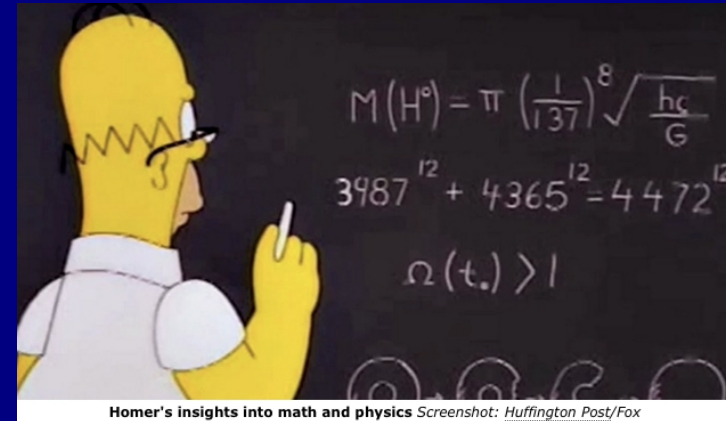
- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$

$$3.($$

$$12 = 3 \times 4$$

o que eu quero? $3x$
o que eu tenho? 3




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:

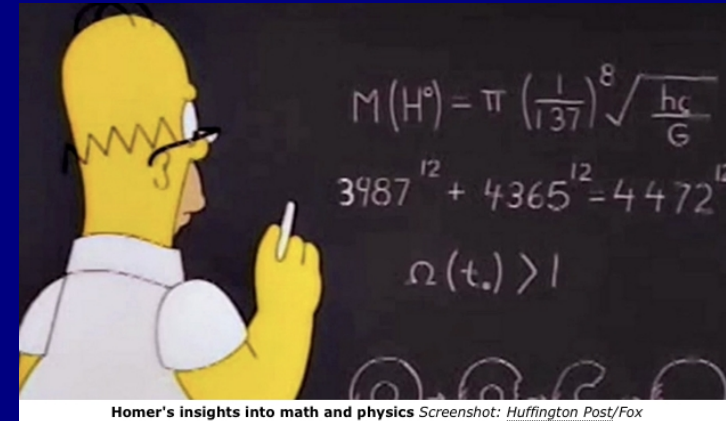

$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$
$$3.(x +$$

$$12 = 3 \times 4$$

o que eu quero? $3x$
o que eu tenho? 3
o que está faltando? x




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

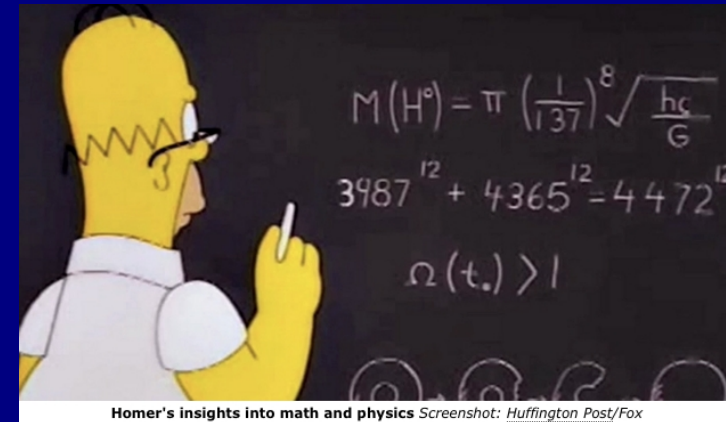
- fatoração por fator comum:

$$3x + \mathbf{12}$$

$$3.(x +$$

$$12 = 3 \times 4$$

o que eu quero? 12




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:

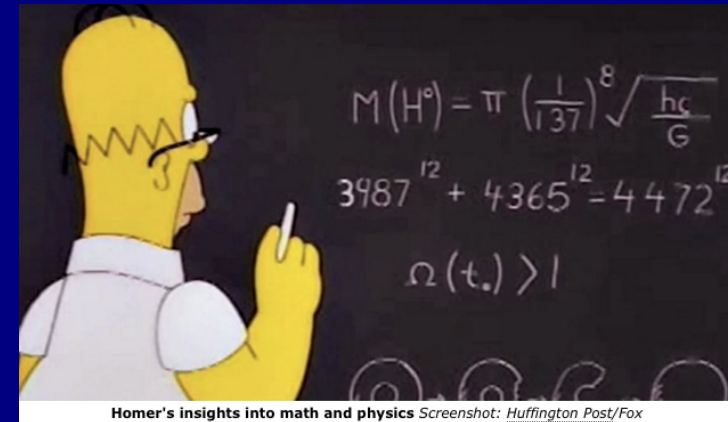

$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$
$$\mathbf{3}.(x +$$

$$12 = 3 \times 4$$

o que eu quero? 12
o que eu tenho? 3




Simplificação de Funções Booleanas

Lembrando a Matemática...

MULTIPLICAÇÃO:

- propriedade distributiva:


$$3.(x + 4) = 3x + 12$$

- fatoração por fator comum:

$$3x + 12$$

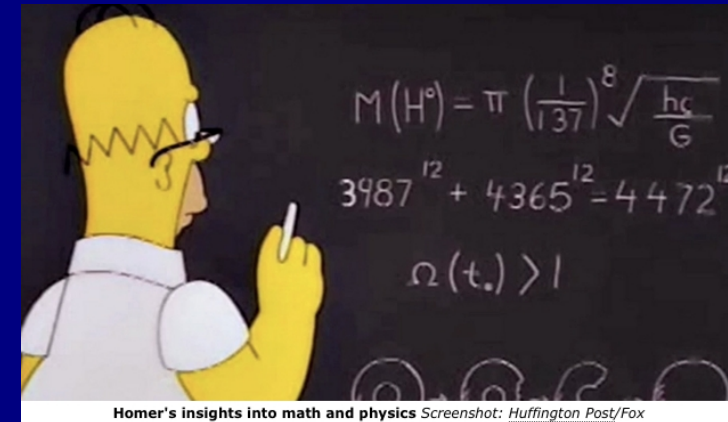
$$3.(x + 4)$$

$$12 = 3 \times 4$$

o que eu quero? 12

o que eu tenho? 3

o que está faltando? 4



Teoremas da Álgebra de Boole

T1. Dupla Negação: $A'' = A$

$$A = 1$$

$$A = 0$$

$$A' = 0$$

$$A' = 1$$

$$A'' = 1$$

$$A'' = 0$$

T2. $A.1 = A$

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Teoremas da Álgebra de Boole

$$T3. A + 1 = 1$$

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$T4. A \cdot 0 = 0$$

A	B	A·B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Teoremas da Álgebra de Boole

$$T5. A + 0 = A$$

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

$$T6. A.A' = 0$$

A	A'	A.A'
1	0	0
0	1	0

Teoremas da Álgebra de Boole

$$T7. A + A' = 1$$

A	A'	A+A'
1	0	1
0	1	1

$$T8. A + A = A$$

A	A	A+A
1	1	1
0	0	0

Teoremas da Álgebra de Boole

T9. $A.A = A$

A	A	A.A
1	1	1
0	0	0

T10. Comutatividade:

$$A + B = B + A \quad \text{e} \quad A.B = B.A$$

T11. Distributividade:

$$A . (B + C) = (A.B) + (A.C) \quad \text{e} \quad A + (B . C) = (A + B).(A + C)$$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A + (A \cdot B)$$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

A + (A.B) (colocar em evidência)

A.(

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$A + (A \cdot B)$ (colocar em evidência)

$A \cdot (1 +$

o que eu quero? A
o que eu tenho? A
o que está faltando???

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$A + (A \cdot B) \text{ (colocar em evidência)}$$
$$A \cdot (1 + B)$$

o que eu quero? AB
o que eu tenho? A
o que está faltando? B

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$$\begin{aligned} &A + (A \cdot B) \text{ (colocar em evidência)} \\ &A \cdot (1 + B) \end{aligned}$$



$$\text{T3. } A + 1 = 1$$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$A + (A \cdot B)$ (colocar em evidência)

$A \cdot (1 + B)$ (t3 – teorema básico)

$A \cdot 1$



$$\text{T3. } A + 1 = 1$$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$A + (A \cdot B)$ (colocar em evidência)

$A \cdot (1 + B)$ (t3 – teorema básico)

$A \cdot 1$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$A + (A \cdot B)$ (colocar em evidência)

$A \cdot (1 + B)$ (t3 – teorema básico)

$A \cdot 1$



T2. $A \cdot 1 = A$

Teoremas da Álgebra de Boole

T12. Leis de Morgan:

$$(A + B)' = A' \cdot B' \quad \text{e} \quad (A \cdot B)' = A' + B'$$

T13. Colocar em evidência:

$$A + (A \cdot B) = A$$

$A + (A \cdot B)$ (colocar em evidência)

$A \cdot (1 + B)$ (t3 – teorema básico)

$A \cdot 1$ (t2 – teorema básico)

A



T2. $A \cdot 1 = A$

Teoremas da Álgebra de Boole

T14. Xor:

$$A \oplus B = (A.B') + (A'.B)$$

T15. Xor negado:

$$(A \oplus B)' = (A'.B') + (A.B)$$

Teoremas da Álgebra de Boole

$$\text{T16. } (A \rightarrow B)' = A \cdot B'$$

$$\text{T17. } (B \rightarrow A)' = A' \cdot B$$

$$\text{T18. } A \rightarrow B = A' + B$$

$$\text{T19. } B \rightarrow A = A + B'$$

$$\text{T20. } (A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A)$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$F(A,B,C) = A'BC + ABC' + A'B'C$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$F(A,B,C) = A'BC + ABC' + A'B'C$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'B\textcolor{red}{C} + A'B'\textcolor{red}{C} + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \text{ (T7 - Teorema básico)} \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \text{ (T7 - Teorema básico)} \\ &= C.(A'.1) + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \text{ (T7 - Teorema básico)} \\ &= C.(A'.1) + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \text{ (T7 - Teorema básico)} \\ &= C.(A'.1) + ABC' \text{ (T2 - Teorema básico)} \\ &= C.A' + ABC' \end{aligned}$$

Simplificação de Funções Booleanas

Como simplificar?

Aplicando-se os teoremas da Álgebra de Boole sobre a função que deve ser simplificada.

Exemplo:

$$\begin{aligned} F(A,B,C) &= A'BC + A'B'C + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'B + A'B') + ABC' \text{ (colocar em evidência)} \\ &= C.(A'.(B+B')) + ABC' \text{ (T7 - Teorema básico)} \\ &= C.(A'.1) + ABC' \text{ (T2 - Teorema básico)} \\ &= A'C + ABC' \end{aligned}$$

Referências

- ◆ BAGHLIAN, J. Lógica e Álgebra Booleana. 1995.