

Relações de Implicação e Equivalência

Lógica para Computação
2014/2

Profa: Daniela Scherer dos Santos
daniela.santos37@ulbra.edu.br



Roteiro

- ◆ Implicação Lógica;
 - ◆ Tautologias e implicação lógica;
- ◆ Equivalência Lógica;
 - ◆ Tautologias e equivalência lógica;
- ◆ Propriedades;
- ◆ Exemplos de relações de Equivalência.

Implicação Lógica

Uma proposição P **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição Q , se **em suas tabelas-verdade não ocorre VF(10) nessa ordem!**

Ou ainda, se a condicional $P \rightarrow Q$ for uma tautologia.

$P \Rightarrow Q$

← notação

Lê-se “a proposição P implica a proposição Q ”

Implicação Lógica

Exemplo (1):

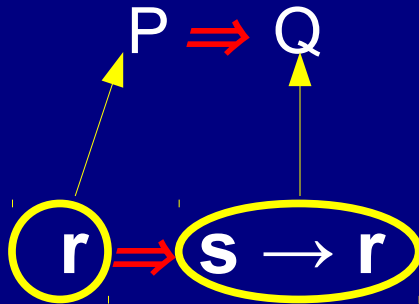
Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Observar a forma:



Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Solução: 1 - construir a tabela verdade para as proposições

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Solução: 1 - construir a tabela verdade para as proposições

r	s	$s \rightarrow r$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Solução: 2 – verificar se NÃO ocorre VF (10)

r	s	$s \rightarrow r$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Solução: 2 – verificar se NÃO ocorre VF (10)

r	s	$s \rightarrow r$	
V	V	V	VV
V	F	V	VV
F	V	F	FF
F	F	V	FV

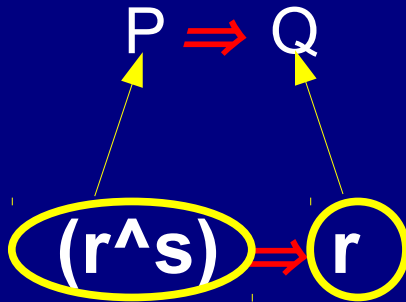
Comparando as tabelas-verdade das proposições r e $s \rightarrow r$, verificamos que NÃO ocorre VF (10) (nessa ordem!) em uma mesma linha. Portanto $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

Observar a forma:



Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

r	s	$r \wedge s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

r	s	$r \wedge s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

r	s	$r \wedge s$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

VV
FV
FF
FF

Comparando as tabelas-verdade das proposições $(r \wedge s)$ e r , verificamos que NÃO ocorre VF (10) (nessa ordem!) em uma mesma linha. Portanto $(r \wedge s) \Rightarrow r$

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q , testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (1.b)

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q , testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (1.b)

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Solução: construir a tabela verdade para a condicional $P \rightarrow Q$

r	s	$s \rightarrow r$	$r \rightarrow (s \rightarrow r)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V



Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q , testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (1.b)

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Solução: construir a tabela verdade para a condicional $P \rightarrow Q$

r	s	$s \rightarrow r$	$r \rightarrow (s \rightarrow r)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Como a condicional $r \rightarrow (s \rightarrow r)$ é uma tautologia, então pode-se afirmar que $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q , testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (2.b) :

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q , testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (2.b) :

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

Solução: construir a tabela verdade para a condicional $P \rightarrow Q$

r	s	$r \wedge s$	$(r \wedge s) \rightarrow r$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q , testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (2.b) :

Verificar se $(r \wedge s) \Rightarrow r$

Solução: construir a tabela verdade para a condicional $P \rightarrow Q$

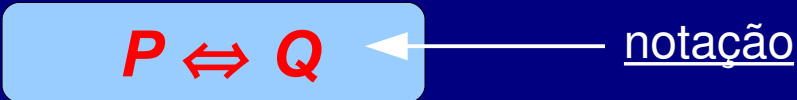
r	s	$r \wedge s$	$(r \wedge s) \rightarrow r$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Como a condicional $(r \wedge s) \rightarrow r$ é uma tautologia, então pode-se afirmar que $(r \wedge s) \Rightarrow r$

Equivalência Lógica

Uma proposição P é **logicamente equivalente** a uma proposição Q , se as tabelas-verdade destas duas proposições são **idênticas**.

Ou ainda, se a bicondicional $(P \leftrightarrow Q)$ for uma tautologia.



$P \leftrightarrow Q$ ← notação

Lê-se “a proposição P é equivalente a proposição Q ”

Equivalência Lógica

Exemplo:

Verificar se $(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Equivalência Lógica

Exemplo:

Verificar se $(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Solução: construir a tabela verdade das proposições P e Q e verificar se são idênticas

r	s	$r \rightarrow s$	$\sim r$	$(\sim r \vee s)$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalência Lógica

Exemplo:

Verificar se $(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Solução: construir a tabela verdade das proposições P e Q e verificar se são idênticas

r	s	$r \rightarrow s$	$\sim r$	$(\sim r \vee s)$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como as tabelas das proposições $(r \rightarrow s)$ e $(\sim r \vee s)$ são idênticas, então pode-se afirmar que $(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Tautologia e Equivalência Lógica

Ou ainda, se a bicondicional $(P \leftrightarrow Q)$ for uma tautologia, então pode-se dizer que estas duas proposições, P e Q, são equivalentes.

Exemplo:

Verificar se $(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Tautologia e Equivalência Lógica

Ou ainda, se a bicondicional $(P \leftrightarrow Q)$ for uma tautologia, então pode-se dizer que estas duas proposições, P e Q, são equivalentes.

Exemplo:

Verificar se $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Solução: construir a tabela verdade da bicondicional $P \leftrightarrow Q$

r	s	$r \rightarrow s$	$\sim r$	$\sim r \vee s$	$(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\sim r \vee s)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tautologia e Equivalência Lógica

Se a bicondicional $(P \leftrightarrow Q)$ for uma tautologia, então pode-se dizer que estas duas proposições, P e Q, são equivalentes.

Exemplo:

Verificar se $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Solução: construir a tabela verdade da bicondicional $P \leftrightarrow Q$

r	s	$r \rightarrow s$	$\sim r$	$\sim r \vee s$	$(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\sim r \vee s)$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como a bicondicional $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\sim r \vee s)$ é uma tautologia, então pode-se afirmar que $(r \rightarrow s) \leftrightarrow (\sim r \vee s)$

Propriedades

Reflexiva:

$$P \Rightarrow P$$

$$P \Leftrightarrow P$$

Transitiva:

se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$

se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$

Simétrica:

se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$

Exemplos de relações de Equivalência

(a) Dupla negação

$$(p')' \Leftrightarrow p$$

(b) Leis idempotentes

$$p + p \Leftrightarrow p$$

$$p \cdot p \Leftrightarrow p$$

(c) Leis Comutativas

$$p + q \Leftrightarrow q + p$$

$$p \cdot q \Leftrightarrow q \cdot p$$

(d) Leis Associativas

$$p + (q + r) \Leftrightarrow (p + q) + r$$

$$p \cdot (q \cdot r) \Leftrightarrow (p \cdot q) \cdot r$$

Exemplos de relações de Equivalência

(e) Leis de Morgan

$(p \cdot q)' \Leftrightarrow p' + q'$ -----> a negação de um produto de variáveis é igual a soma das negações de cada variável

$(p + q)' \Leftrightarrow p' \cdot q'$ -----> a negação da soma de variáveis é igual ao produto das negações de cada variável

(f) Leis Distributivas

$$p \cdot (q + r) \Leftrightarrow (p \cdot q) + (p \cdot r)$$

$$p + (q \cdot r) \Leftrightarrow (p + q) \cdot (p + r)$$

Exemplos de relações de Equivalência

(g) Bicondicional

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$$

(h) Condicionais

$p \rightarrow q$ (condicional)

$q \rightarrow p$ (recíproca do condicional)

$q' \rightarrow p'$ (contrapositivo)

$p' \rightarrow q'$ (recíproca do contrapositivo)

Equivalências :

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q' \rightarrow p')$$

$$(q \rightarrow p) \Leftrightarrow (p' \rightarrow q')$$