

Álgebra de Boole

Lógica de Predicados
2014/2

Profa: Daniela Scherer dos Santos
daniela.santos37@ulbra.edu.br



Introdução

“Você foi contratado por Ratos Somos Nós para construir os circuitos de controle para uma fábrica de produção de um novo composto químico anticancerígeno que está sendo testado em ratos:

- ◆ O circuito de controle tem que gerenciar a abertura e o fechamento de duas válvulas, A e B, após a saída do tonel de mistura;
- ◆ A válvula A é aberta sempre que a pressão no tonel excede 3,5 atm (atmosferas) **e** a salinidade da mistura excede 45 g/l (gramas por litro);
- ◆ A válvula B é aberta sempre que a válvula A está fechada, a temperatura excede 53°C **e** a acidez está abaixo de 7 pH (valores mais baixos de pH indicam maior acidez).

Introdução

“Você foi contratado por Ratos Somos Nós para construir os circuitos de controle para uma fábrica de produção de um novo composto químico anticancerígeno que está sendo testado em ratos:

- ◆ O circuito de fechamento do tonel de mistura;
- ◆ A válvula A é aberta quando a pressão atm (atmosfera) excede 3,5 atm e a acidez está abaixo de 7 pH (gramas por litro);
- ◆ A válvula B é aberta sempre que a válvula A está fechada, a temperatura excede 53°C e a acidez está abaixo de 7 pH (valores mais baixos de pH indicam maior acidez).

Pergunta-se: Quantas portas lógicas, e de que tipo, serão necessárias no circuito?

Introdução

- ◆ Resposta: encontra-se em um ramo da Matemática desenvolvido em torno de 1850 por George Boole:
 - ◆ Álgebra de Boole: ferramenta básica para a construção de sistemas lógicos e serve como base para a operação de circuitos computacionais;
- ◆ A álgebra booleana se aplica a situações que apresentam dois estados que mutuamente se excluem como, por exemplo: LIGADO e DESLIGADO.

Introdução

- Variável: é capaz de assumir um entre um conjunto de valores.
 - Exemplos:
 - variável $X \rightarrow$ campo dos números reais;
 - variável $Z \rightarrow \{\text{carro, amarelo, casa}\}$
 - variável $Y \rightarrow$ campo dos números naturais;

Introdução

- Função: é uma relação que determina o valor de uma variável (variável dependente) a partir de uma ou mais variáveis (variáveis independentes)
 - Exemplo:

$$y = x + 3 * z$$

$$x = \{0,1\}$$

$$z = \{1,2\}$$



x	z	y
0	1	3
0	2	6
1	1	4
1	2	7

Representação:

$$y = F(x,z)$$

Introdução

- Função: é uma relação que determina o valor de uma variável (variável dependente) a partir de uma ou mais variáveis (variáveis independentes)
 - Exemplo:

$$y = x + 3 * z$$

$$x = \{0,1\}$$

$$z = \{1,2\}$$



x	z	y
0	1	3
0	2	6
1	1	4
1	2	7

Representação:

$$y = F(x,z)$$

No exemplo:

Qual é a variável dependente?

Quais são as variáveis independentes?

Álgebra de Boole

- Composta por:
 - conjunto $\{0,1\}$:
 - 0=FALSO ou DESLIGADO;
 - 1=VERDADEIRO ou LIGADO;
 - duas operações binárias:
 - **OU**, cujo operador é (+):
 - $p + q$: ADIÇÃO LÓGICA;
 - **E** cujo operador é (.):
 - $p . q$: MULTIPLICAÇÃO LÓGICA;

Álgebra de Boole

- Composta por (cont):
 - e uma operação unária **NÃO**, cujo operador pode ser representado por ($'$), ($-$), ou (\sim):
 - Exemplo:
 - p' , $\sim p$ ou \bar{p} : também chamado de complemento de p

Variáveis Lógicas

- ♦ variável lógica (booleana):
 - ♦ pode assumir um de dois valores possíveis;
 - ♦ os valores são expressos por sentenças não ambíguas;
 - ♦ os valores devem ser mutuamente exclusivos (não ser um implica em ser o outro).

Uma função lógica é uma regra que determina o valor de uma variável lógica dependente a partir de uma ou mais variáveis lógicas independentes.

Função NOT/NÃO (negação)

Função unária (de uma variável) que será 1 se a variável independente vale 0 e será 0 se a variável independente vale 1;

A tabela verdade para $F = A'$ é:

A	$F = A'$
0	1
1	0

Função AND/E (conjunção, produto lógico)

Representação:

$$F = A \text{ AND } B$$

$$F = A . B$$

$$F = A \wedge B$$

A função será verdadeira (1) se todas as variáveis independentes forem verdadeiras. Neste caso, se A e B forem verdadeiras.

A	B	A.B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Função AND/E (conjunção, produto lógico)

Propriedades da função AND:

- Comutativa: se A e B tiverem sua ordem invertida, a função F não se altera (mantém seu valor):
 - $F = A . B = B . A$
- Associativa: a associação de alguns fatores não altera o produto:
 - Exemplo: $2 \times 3 \times 5 = 30 \rightarrow 2 \times (3 \times 5) = 30 \rightarrow (2 \times 3) \times 5 = 30 \rightarrow (2 \times 5) \times 3 = 30$
 - $F = (A . B) . C = A . (B . C) = (A . C) . B$

Função OR/OU (disjunção, soma lógica)

Representação: $F = A \text{ OR } B$

$$F = A + B$$

$$F = A \vee B$$

A	B	A+B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

A função será verdadeira (1) se pelo menos uma das variáveis independentes for verdadeira ou as duas forem verdadeiras.

Propriedades da Função OR:

- Comutativa $\rightarrow F = A + B = B + A$
- Associativa $\rightarrow F = (A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B$

Propriedade da Distributividade

- As funções AND e OR têm a propriedade da distributividade:
 - AND: $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
 - OR: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

Referências

- GERSTING, J. L. Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. 2003.
- DAGHLIAN, Jacob. Lógica e Álgebra de Boole. São Paulo: Editora Atlas, 1990.