Relações de Implicação e Equivalência

Lógica para Computação

2014/2

Profa: Daniela Scherer dos Santos

daniela.santos37@ulbra.edu.br

Roteiro

- Implicação Lógica;
    - Tautologias e implicação lógica;
- Equivalência Lógica;
    - Tautologias e equivalência lógica;
- Propriedades;
- Exemplos de relações de Equivalência.

Implicação Lógica

Uma proposição *P* **implica logicamente** ou apenas **implica** uma proposição *Q*, se **em suas tabelas-verdade não ocorre VF(10) <u>nessa ordem</u>!**

Ou ainda, se a condicional $P \rightarrow Q$ for uma tautologia.

$$\boldsymbol{P \Rightarrow Q}$$ ← <u>notação</u>

Lê-se "*a proposição P implica a proposição Q*"

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se $r \Rightarrow s \rightarrow r$

Observar a forma:

$$P \Rightarrow Q$$

$$r \Rightarrow s \rightarrow r$$

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se **r** $\Rightarrow$ **s** $\rightarrow$ **r**

Solução: 1 - construir a tabela verdade para as proposições

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se **r $\Rightarrow$ s $\rightarrow$ r**

Solução: 1 - construir a tabela verdade para as proposições

r	s	s → r
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se **r $\Rightarrow$ s $\rightarrow$ r**

Solução: 2 – verificar se NÃO ocorre VF (10)

r	s	s → r
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Implicação Lógica

Exemplo (1):

Verificar se **r** $\Rightarrow$ **s** $\rightarrow$ **r**

Solução: 2 – verificar se NÃO ocorre VF (10)

r	s	s → r
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

VV
VV
FF
FV

Comparando as tabelas-verdade das proposições **r** e **s** → **r**, verificamos que NÃO ocorre VF (10) (nessa ordem!) em uma mesma linha. Portanto r $\Rightarrow$ s → r

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se **$(r \wedge s) \Rightarrow r$**

Observar a forma:

$P \Rightarrow Q$

$(r \wedge s) \Rightarrow r$

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se **(r ^ s)** $\Rightarrow$ **r**

r	s	r ^ s
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se **(r ^ s) ⇒ r**

r	s	r ^ s
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implicação Lógica

Exemplo (2):

Verificar se **(r ^ s)** $\Rightarrow$ **r**

r	s	r ^ s
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

VV
FV
FF
FF

Comparando as tabelas-verdade das proposições **(r^s)** e **r**, verificamos que NÃO ocorre VF (10) (nessa ordem!) em uma mesma linha. Portanto (r^s)$\Longrightarrow$ r

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q, testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (1.b)

Verificar se **r** $\Rightarrow$ **s** $\rightarrow$ **r**

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q, testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (1.b)

Verificar se **$r \Rightarrow s \rightarrow r$**

Solução: construir a tabela verdade para a condicional $P \rightarrow Q$

r	s	$s \rightarrow r$	$r \rightarrow (s \rightarrow r)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q, testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (1.b)

Verificar se **r $\Rightarrow$ s $\rightarrow$ r**

Solução: construir a tabela verdade para a condicional P $\rightarrow$ Q

r	s	s → r	r → (s → r)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

Como a condicional r → (s → r) é uma tautologia, então pode-se afirmar que **r $\Rightarrow$ s $\rightarrow$ r**

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q, testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (2.b) :

Verificar se **(r ^ s)** $\Rightarrow$ **r**

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q, testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (2.b) :

Verificar se **(r ^ s)** $\Rightarrow$ **r**

Solução: construir a tabela verdade para a condicional P → Q

r	s	r ^ s	(r ^ s) → r
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tautologia e Implicação Lógica

Pode-se também verificar se uma proposição P implica uma proposição Q, testando se a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia.

Exemplo (2.b) :

Verificar se **(r ^ s) ⇒ r**

Solução: construir a tabela verdade para a condicional P → Q

r	s	r ^ s	(r ^ s) → r
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Como a condicional (r ^s) → r é uma tautologia, então pode-se afirmar que **(r ^ s) ⇒ r**

Equivalência Lógica

Uma proposição *P* é **logicamente equivalente** a uma proposição *Q*, se as tabelas-verdade destas duas proposições são **idênticas**.

Ou ainda, se a bicondicional **($P \leftrightarrow Q$)** for uma tautologia.

$$P \Leftrightarrow Q$$

notação

Lê-se "*a proposição P é equivalente a proposição Q*"

Equivalência Lógica

Exemplo:

Verificar se **$(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$**

Equivalência Lógica

Exemplo:

Verificar se **$(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$**

Solução: construir a tabela verdade das proposições P e Q e verificar se são idênticas

r	s	$r \rightarrow s$	$\sim r$	$(\sim r \vee s)$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalência Lógica

Exemplo:

Verificar se **$(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$**

Solução: construir a tabela verdade das proposições P e Q e verificar se são idênticas

r	s	$r \rightarrow s$	$\sim r$	$(\sim r \vee s)$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Como as tabelas das proposições $(r \rightarrow s)$ e $(\sim r \vee s)$ são idênticas, então pode-se afirmar que **$(r \rightarrow s) \Leftrightarrow (\sim r \vee s)$**

Tautologia e Equivalência Lógica

Ou ainda, se a bicondicional **(*P↔Q*)** *for* uma tautologia, então pode-se dizer que estas duas proposições, P e Q, são equivalentes.

Exemplo:

Verificar se **(r → s) ⇔ (~r v s)**

Tautologia e Equivalência Lógica

Ou ainda, se a bicondicional ***(P↔Q)*** *for* uma tautologia, então pode-se dizer que estas duas proposições, P e Q, são equivalentes.

Exemplo:

Verificar se **(r → s) ⇔ (~r v s)**

Solução: construir a tabela verdade da bicondicional P ↔ Q

r	s	r → s	~r	~r v s	(r → s) ↔ (~r ^s)
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Tautologia e Equivalência Lógica

Se a bicondicional **(*P↔Q*)** *for* uma tautologia, então pode-se dizer que estas duas proposições, P e Q, são equivalentes.

Exemplo:

Verificar se **(r → s) ⇔ (~r v s)**

Solução: construir a tabela verdade da bicondicional P ↔ Q

r	s	r → s	~r	~r v s	(r → s) ↔ (~r ^s)
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Como a bicondicional (r → s) ↔ (~r v s) é uma tautologia, então pode-se afirmar que **(r → s) ⇔ (~r v s)**

Proporiedades

Reflexiva:

$P \Rightarrow P$

$P \Leftrightarrow P$

Transitiva:

se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$

se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$

Simétrica:

se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$

Exemplos de relações de Equivalência

(a) Dupla negação

$(p')' \Leftrightarrow p$

(b) Leis idempotentes

$p + p \Leftrightarrow p$

$p \,.\, p \Leftrightarrow p$

(c) Leis Comutativas

$p + q \Leftrightarrow q + p$

$p \,.\, q \Leftrightarrow q \,.\, p$

(d) Leis Associativas

$p + (q + r) \Leftrightarrow (p + q) + r$

$p \,.\, (q \,.\, r) \Leftrightarrow (p \,.\, q) \,.\, r$

Exemplos de relações de Equivalência

(e) Leis de Morgan

$(p \, . \, q)' \Leftrightarrow p' + q'$ -----> a negação de um produto de variáveis é igual a soma das negações de cada variável

$(p + q)' \Leftrightarrow p' \, . \, q'$ ------> a negação da soma de variáveis é igual ao produto das negações de cada variável

(f) Leis Distributivas

$p \, . \, (q + r) \Leftrightarrow (p \, . \, q) + (p \, . \, r)$

$p + (q \, . \, r) \Leftrightarrow (p + q) \, . \, (p + r)$

Exemplos de relações de Equivalência

(g) Bicondicional

$$p \leftrightarrow q \;\Leftrightarrow\; (p \to q) \,.\, (q \to p)$$

(h) Condicionais

$p \to q$	(condicional)
$q \to p$	(recíproca do condicional)
$q' \to p'$	(contrapositivo)
$p' \to q'$	(recíproca do contrapositivo)

Equivalências :

$$(p \to q) \;\Leftrightarrow\; (q' \to p')$$

$$(q \to p) \;\Leftrightarrow\; (p' \to q')$$