Lógica de Predicados ou Lógica de 1° Ordem * parte II *

Lógica de Predicados

2014/2

Profa: Daniela Scherer dos Santos

daniela.santos37@ulbra.edu.br

Quantificadores

São operadores lógicos que restringem as funções proposicionais, de forma que elas se refiram a todo o conjunto de termos ou a uma parte dele. Há dois quantificadores:

- $\forall$: quantificador universal (para todo, qualquer que seja, etc);
- $\exists$: quantificador existencial (existe, há, alguns, etc.).

Quantificadores

- $(\forall x)$: pode ser lida: “qualquer que seja x”, “para todo x”, “todos”, “tudo”;
- $(\exists x)$: pode ser lida: “existe um x tal que”, “algo”, “alguma coisa”, “alguns”.

Quantificadores

Exemplos:

a) Todos que prestaram concurso foram contratados.

$\forall x$ (se x prestou concurso, então foi contratado)

b) Alguns dos que prestaram concurso foram contratados.

$\exists x$ (x prestou concurso e foi contratado)

c) No conjunto A={3,5,7}, $\forall x(x \in A$, x é primo)

d) No conjunto A={3,4,7}, $\exists x(x \in A$, x é par)

Quantificadores

Variável “aparente” (ligada) e Variável “livre”

Quando há um quantificador a incidir sobre uma variável, esta é chamada VARIÁVEL APARENTE ou LIGADA. Caso contrário, a variável é LIVRE.

Exemplo:

a) $\exists x\ (3x-1=14)$, a variável x nesta sentença é APARENTE ou LIGADA;

b) $3x-1=14$, a variável x nesta sentença é LIVRE.

Quantificadores

Princípio de substituição das variáveis aparentes:

Todas as vezes que uma variável aparente é substituída, em todos os lugares que ocupa numa expressão, por outra variável que não figure na mesma expressão, obtém-se uma expressão equivalente.

Exemplo:

a) $(\forall x \in A)\ (p(x)) \Leftrightarrow (\forall y \in A)\ (p(y))$

b) $(\exists x \in A)\ (p(x)) \Leftrightarrow (\exists y \in A)\ (p(y))$

c) ($\forall$ Fulano) (Fulano é mortal) <=> $(\forall x)$(x é mortal)

Quantificadores

Negação de proposições com quantificador

Um quantificador universal ou existencial pode ser precedido de uma negação.

Quantificadores

Negação de proposições com quantificador

Um quantificador universal ou existencial pode ser

Significa que x tem a propriedade P

uma negação.

Exemplo:

a) $(\forall x)P(x)$ e o conjunto universo $U=\{a,b,c\}$. É evidente que nesse caso temos:

$$(\forall x)P(x) <=> P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$$

Quantificadores

Negação de proposições com quantificador

Um quantificador universal ou existencial pode ser precedido de uma negação.

Exemplo:

a) $(\forall x)P(x)$ e o conjunto universo U={a,b,c}. É evidente que nesse caso temos:

$$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$$

Podemos considerar então que:

$$\sim(\forall x)P(x) \Leftrightarrow \sim(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \Leftrightarrow \sim P(a) \vee \sim P(b) \vee \sim P(c)$$

Quantificadores

Negação de proposições com quantificador

Um quantificador universal ou existencial pode ser precedido de uma negação.

Exemplo:

a) $(\forall x)P(x)$ e o conjunto universo U={a,b,c}. É evidente que nesse caso temos:

$$(\forall x)P(x) \Leftrightarrow P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$$

Podemos considerar então que:

$$\sim(\forall x)P(x) \Leftrightarrow \sim(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \Leftrightarrow \sim P(a) \vee \sim P(b) \vee \sim P(c)$$

O que significa dizermos que existe no mínimo um objeto em U tal que $\sim P(x)$, ou seja:

$$\boxed{\sim(\forall x)P(x) \Leftrightarrow (\exists x)\sim P(x)}$$

Quantificadores

Negação de proposições com quantificador

Um quantificador universal ou existencial pode ser precedido de uma negação.

Exemplo:

a) Sentença:Todo o aluno da turma A é bem comportado.

Negação: Existe pelo menos um aluno da turma A que não é bem comportado.

Ou: Nem todo o aluno da turma A é bem comportado.

Quantificadores

Negação de proposições com quantificador

Um quantificador universal ou existencial pode ser precedido de uma negação.

Exemplo:

b) Sentença: Existe pelo menos um aluno da turma A que está doente.

Negação: Qualquer que seja o aluno da turma A, ele não está doente.

Ou: Nenhum aluno da turma A está doente.

Fórmula

1. As fórmulas mais simples do cálculo de predicados são chamadas de fórmulas atômicas;
2. Se α e β forem fórmulas então (~α), (α ^ β), (α v β), ($\alpha \rightarrow \beta$), ($\alpha \leftrightarrow \beta$) são fórmulas;
3. Se α e β forem fórmulas então $(\forall x)\alpha$ e $(\exists x)\alpha$ são fórmulas.

Fórmula

Exemplos:

1. Todo amigo de Carlos é amigo de Jonas.
   Pedro não é amigo de Jonas.
   Logo, Pedro não é amigo de Carlos.

$$(\forall x)(A(x,c) \rightarrow A(x,j))$$

$$\frac{\sim A(p,j)}{\sim A(p,c)}$$

A=amigo (indica a propriedade de ser amigo)

c=Carlos, j=Jonas, p=Pedro

Fórmula

Exemplos:

2. Todos os humanos são racionais.

   Alguns animais são humanos.

   Portanto, alguns animais são racionais.

$$\frac{(\forall x)(H(x) \rightarrow R(x)) \quad (\exists x)(A(x) \wedge H(x))}{(\exists x)(A(x) \wedge R(x))}$$

H=humano, R=racional

A=animal

H, R e A indicam, respectivamente as propriedades de ser humano, racional e animal.

Fórmula

Exemplos:

4. Todos os homens são sábios.

$(\forall x)(H(x) \rightarrow S(x))$

4. Alguns homens são sábios.

$(\exists x)(H(x) \wedge S(x))$

5. Nenhum homem é sábio.

$(\forall x)(H(x) \rightarrow \sim S(x))$

6. Alguns homens não são sábios.

$(\exists x)(H(x) \wedge \sim S(x))$

Fórmula

REGRA GERAL:

$\forall$ é acompanhado de $\rightarrow$

$\exists$ é acompanhado de ^

ENUNCIADOS FREQUENTES:

1. "Todo P é Q" : $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. "Nenhum P é Q" : $(\forall x)(P(x) \rightarrow \sim Q(x))$
3. "Algum P é Q" : $(\exists x)(P(x) \wedge Q(x))$
4. "Algum P não é Q" : $(\exists x)(P(x) \wedge \sim Q(x))$

Cuidar!

1. $\sim(\forall x)\ P(x)$ significa: Px não se dá para todos os x;
   Px não tem lugar sempre;
   Nem tudo tem propriedade Px.
2. $(\forall x)\sim(P(x))$ significa: Para todo x, não se tem Px;
   Px sempre falha;
   Todos não tem a propriedade P;
3. $\sim(\exists x)\ P(x)$ significa: não existe x tal que Px;
   Não há x tal que Px;
   Ninguém tem propriedade P;
4. $(\exists x)\sim(P(x))$ significa: para algum x, não se dá Px;
   alguém não tem a propriedade P.

Exemplo - Prolog

: - Se
, operador lógico ^
; operador lógico v

```
progenitor(jose,joao).
progenitor(maria,ana).
progenitor(jose,ana).
progenitor(joao,mario).
progenitor(ana,helena).
progenitor(ana,joana).
progenitor(helena,carlos).
progenitor(mario,carlos).

sexo(ana,feminino).
sexo(maria,feminino).
sexo(joana,feminino).
sexo(helena,feminino).

sexo(mario,masculino).
sexo(joao,masculino).
sexo(jose,masculino).
sexo(carlos,masculino).

irma(X,Y):- progenitor(A,X),
            progenitor(A,Y),
            X\==Y,
            sexo(X,feminino).

irmao(X,Y):- progenitor(A,X),
             progenitor(A,Y),
             X\==Y,
             sexo(X,masculino).
```

Exemplo - Prolog

Árvores genealógica da família Pinheiro. O programa é capaz de responder questões do tipo:

1. O João é filho do José?
2. Quem são os filhos da Maria?
3. Quem são os primos do Mário?
4. Quantos sobrinhos/sobrinhas com um Tio existem na família Pinheiro?
5. Quem são os ascendentes do Carlos?
6. A Helena tem irmãos? E irmãs?

```
descendente(X,Y):- progenitor(X,Y).
descendente(X,Y):- progenitor(X,A),
                   descendente(A,Y).

avo(X,Y):- progenitor(X,A),
           progenitor(A,Y),
           sexo(X,masculino).

mae(X,Y):- progenitor(X,Y),
           sexo(X,feminino).

pai(X,Y):- progenitor(X,Y),
           sexo(X,masculino).

tio(X,Y):- irmao(X,A),
           progenitor(A,Y).

primo(X,Y):-irmao(A,B),
            progenitor(A,X),
            progenitor(B,Y),
            X\==Y.
primo(X,Y):-irma(A,B),
            progenitor(A,X),
            progenitor(B,Y),
            X\==Y.
```