



Processos de Poisson, Cadeias de Markov em Tempo Contínuo e Sistemas de Filas de Espera

Desempenho e Dimensionamento de Redes

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2020/2021

Processo de contagem

- Um processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ diz-se um processo de contagem se $N(t)$ representar o número total de eventos que ocorreram até ao instante t .
- Um processo de contagem satisfaz as seguintes condições:
 - (1) $N(t) \geq 0$.
 - (2) $N(t)$ toma valores inteiros apenas.
 - (3) Se $s < t$, então $N(s) \leq N(t)$.
 - (4) Se $s < t$, então $N(t) - N(s)$ é igual ao número de eventos ocorridos no intervalo de tempo $[s, t]$.
- Um processo de contagem tem incrementos independentes se o número de eventos em intervalos de tempo disjuntos for independente.
- Um processo de contagem tem incrementos estacionários se a distribuição do número de eventos que ocorre em qualquer intervalo de tempo depender apenas do comprimento do intervalo de tempo.

Processo de Poisson

- Um processo de contagem diz-se um processo de Poisson com taxa λ , $\lambda > 0$, se:
 - (1) $N(0) = 0$;
 - (2) o processo tem incrementos independentes;
 - (3) o número de eventos num intervalo de duração t tem uma distribuição de Poisson com média λt . Isto é, para todo s , $t \geq 0$

$$P\{N(s+t) - N(s) = n\} = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

- Um processo de Poisson tem incrementos estacionários e média

$$E[N(t)] = \lambda t$$

razão pela qual λ é designada a taxa (i.e., o número médio de eventos por unidade de tempo) do processo de Poisson.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 1:** Num processo de Poisson com taxa λ considere-se:
 - T_1 o instante do primeiro evento
 - $T_n, n > 1$, o intervalo de tempo entre o $(n-1)$ -ésimo evento e o n -ésimo evento
- Então, $T_n, n = 1, 2, \dots$, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exponencial de média $1/\lambda$.
- **Propriedade 2:** Num processo de Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ com taxa λ considere-se que cada evento é classificado de forma independente em:
 - evento do tipo 1 com probabilidade p
 - evento do tipo 2 com probabilidade $1 - p$
- Assim, $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ são o número de eventos de cada tipo que ocorreram no intervalo $[0, t]$.
- Então, $N_1(t)$ e $N_2(t)$ são ambos processos de Poisson independentes com taxas λp e $\lambda(1-p)$.

Propriedades de um processo de Poisson

- **Propriedade 3:** Sejam $\{N_1(t), t \geq 0\}$ e $\{N_2(t), t \geq 0\}$ processos de Poisson independentes com taxas λ_1 e λ_2 ,
- Então, o processo $N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ é também um processo de Poisson com taxa $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
- **Propriedade 4:** Sabendo-se que num processo de Poisson ocorreram exatamente n eventos até ao instante t ,
- Então, os instantes de ocorrência dos eventos são distribuídos independentemente e uniformemente no intervalo $[0, t]$. Por esta razão diz-se que num processo de Poisson as chegadas são aleatórias.

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Considere-se um processo estocástico em tempo contínuo $\{X(t), t \geq 0\}$ com o espaço de estados definido pelo conjunto dos números inteiros não negativos.
- $X(t)$ é uma cadeia de Markov se para todo o $s, t \geq 0$ e inteiros não-negativos $i, j, x(u), 0 \leq u < s$:

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$$

- Significa que a distribuição futura $X(s+t)$ condicionada ao presente $X(s)$ e ao passado $X(u), 0 \leq u < s$, depende apenas do presente e é independente do passado (propriedade Markoviana).
- Se $P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$ for independente de s então diz-se que a cadeia de Markov em tempo contínuo tem probabilidades de transição estacionárias ou homogéneas:

$$P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\} = P\{X(t) = j \mid X(0) = i\}$$

Cadeias de Markov em tempo contínuo

- Uma cadeia de Markov em tempo contínuo tem como propriedades:
 - (1) Quando o processo entra no estado i , o tempo de permanência nesse estado, antes de efetuar uma transição para um estado diferente, é exponencialmente distribuído (designamos a média por $1/q_i$);
 - (2) Quando o processo deixa o estado i , entra de seguida no estado j com uma probabilidade P_{ij} que satisfaz as seguintes condições

$$P_{ii} = 0 \quad 0 \leq P_{ij} \leq 1 \quad , j \neq i \quad \sum_j P_{ij} = 1$$

NOTA: A propriedade (1) é equivalente a dizer que quando o processo está no estado i , ele transita para outro estado qualquer a uma taxa q_i .

- Numa cadeia de Markov em tempo contínuo, o tempo de permanência num estado e o próximo estado visitado são variáveis aleatórias independentes.

Taxas de transição instantâneas

- Para qualquer par de estados i e j seja:

$$q_{ij} = q_i P_{ij}$$

q_i - a taxa à qual o processo faz uma transição quando está no estado i

P_{ij} - a probabilidade que a transição seja para o estado j quando está no estado i

q_{ij} - a taxa à qual o processo faz uma transição para o estado j quando está no estado i

- As q_{ij} designam-se por taxas de transição instantâneas. Estas são as grandezas habitualmente representadas nos diagramas de transição de estados.

- Como
$$q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij} \qquad P_{ij} = \frac{q_{ij}}{q_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

resulta que a especificação das taxas de transição instantâneas determina a cadeia de Markov em tempo contínuo.

Exemplo 1

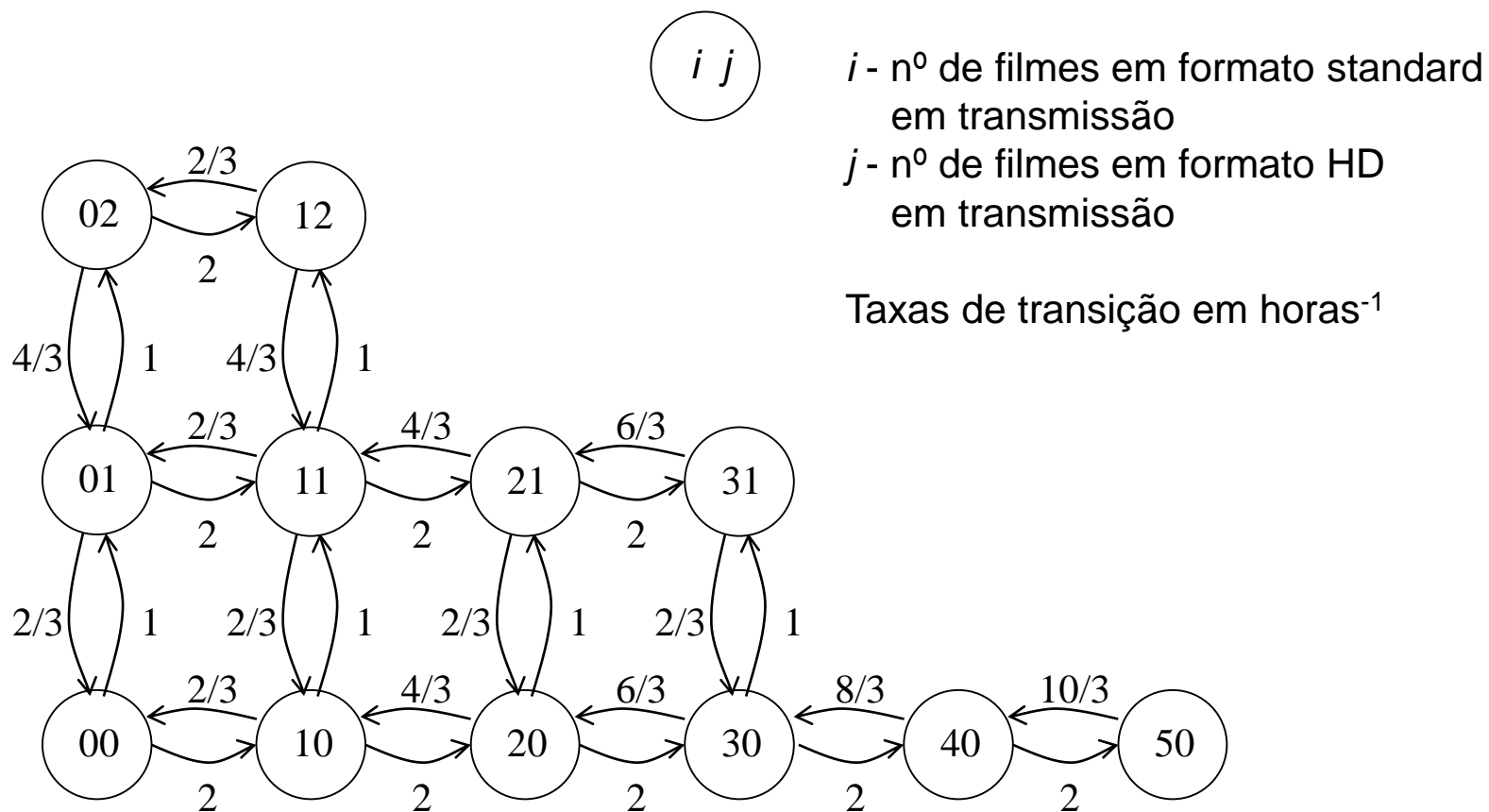
Considere um servidor de *video-streaming* que providencia filmes em formato standard (2.0 Mbps) ou HD (4.0 Mbps) e com uma interface de rede de 10 Mbps.

No período de maior tráfego, a taxa de pedidos de filmes é de 2 filmes/hora em formato standard e 1 filme/hora em formato HD.

Ambos os tipos de filmes têm uma duração exponencialmente distribuída de média 90 minutos. Quando um filme é pedido, ele começa a ser transmitido desde que haja capacidade disponível na interface de rede ou é recusado caso contrário.

Considere o estado do sistema dado pelo número de filmes de cada tipo em transmissão. Qual o diagrama de transição de estados do sistema?

Diagrama de transição de estados do Exemplo 1



Probabilidades limite

- Seja $P_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j \mid X(s) = i\}$

a probabilidade de um processo presentemente no estado i estar no estado j após um intervalo de tempo t .

- A probabilidade de uma cadeia de Markov em tempo contínuo estar no estado j no instante t converge para um valor limite independente do estado inicial:

$$\pi_j \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$$

- Condição suficiente para a existência de probabilidades limite:
 - (1) a cadeia é irredutível, isto é, começando no estado i existe uma probabilidade positiva de alguma vez se estar no estado j , para todo o par de estados i, j
 - (2) a cadeia de Markov é recorrente positiva, isto é, começando em qualquer estado o tempo médio para voltar a esse estado é finito

Cálculo das probabilidades limite

- As probabilidades limite podem calcular-se resolvendo as equações:

$$q_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k, \quad \text{para todos os estados } j$$

$$\sum_j \pi_j = 1$$

- Estas equações são designadas por equações de balanço:

taxa à qual o sistema transita do estado j

=

taxa à qual o sistema transita para o estado j

- A probabilidade π_j pode ser interpretada como a proporção de tempo em que o processo está no estado j .
- As probabilidades π_j são designadas por probabilidades estacionárias: se o estado inicial for dado pela distribuição $\{\pi_j\}$, então a probabilidade de se estar no estado j no instante t é π_j , para todo o t .

Exemplo 1

Equações de balanço:

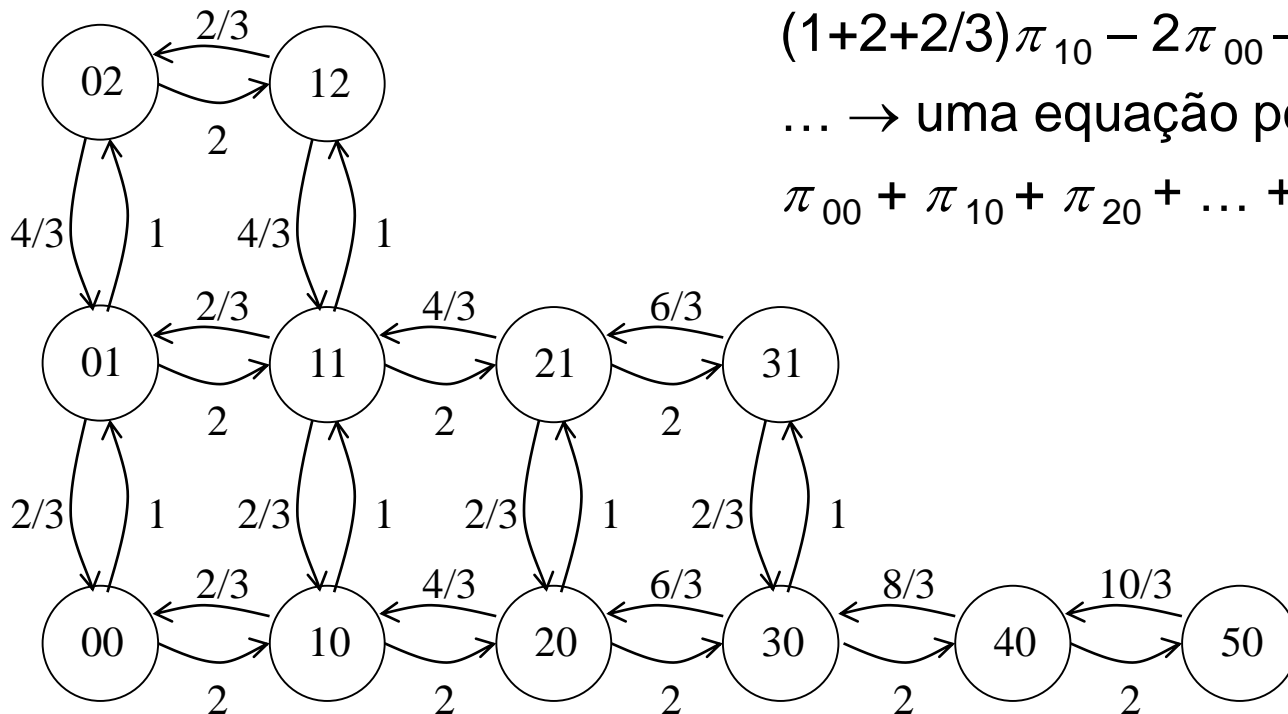
$$q_j \pi_j = \sum_{k \neq j} q_{kj} \pi_k \quad \sum_j \pi_j = 1$$

$$(1+2)\pi_{00} - 2/3\pi_{10} - 2/3\pi_{01} = 0$$

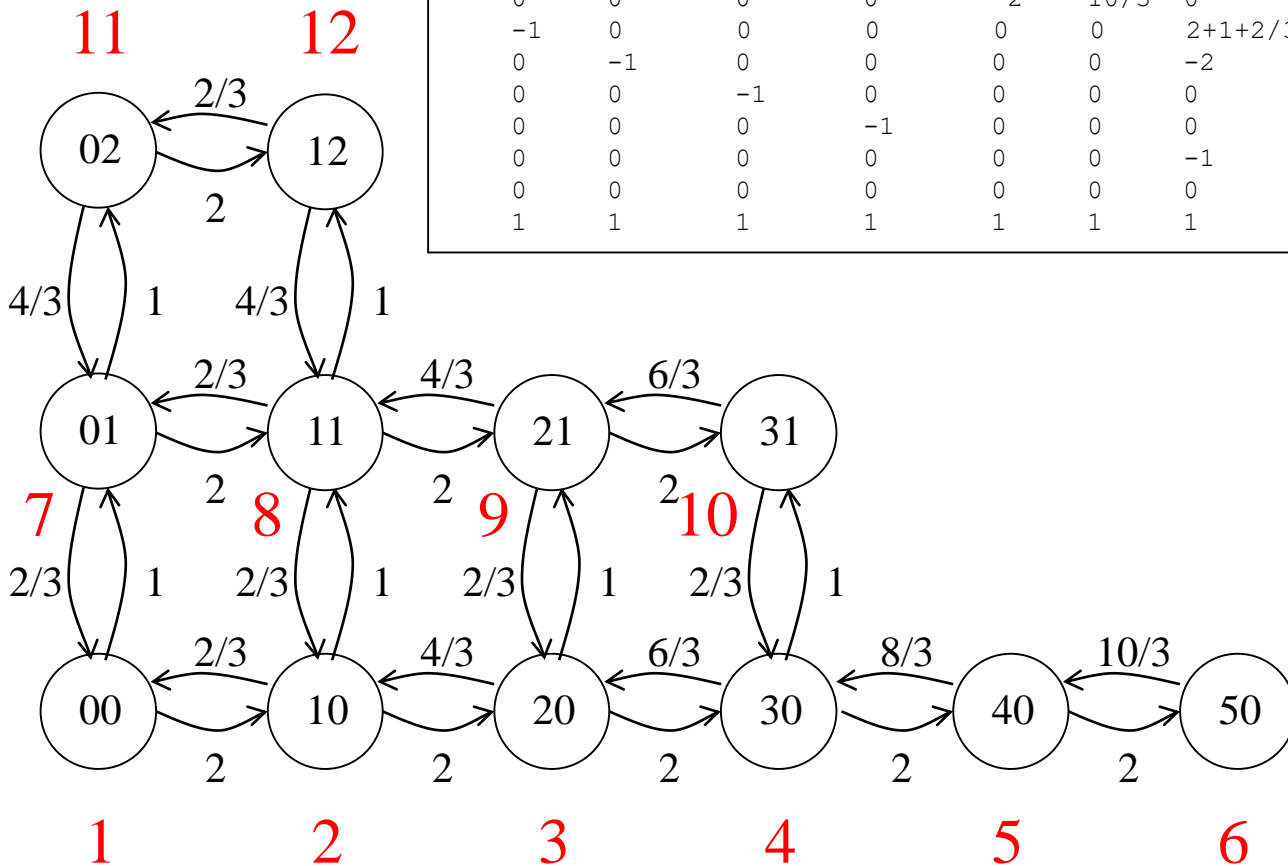
$$(1+2+2/3)\pi_{10} - 2\pi_{00} - 4/3\pi_{20} - 2/3\pi_{11} = 0$$

... → uma equação por cada estado

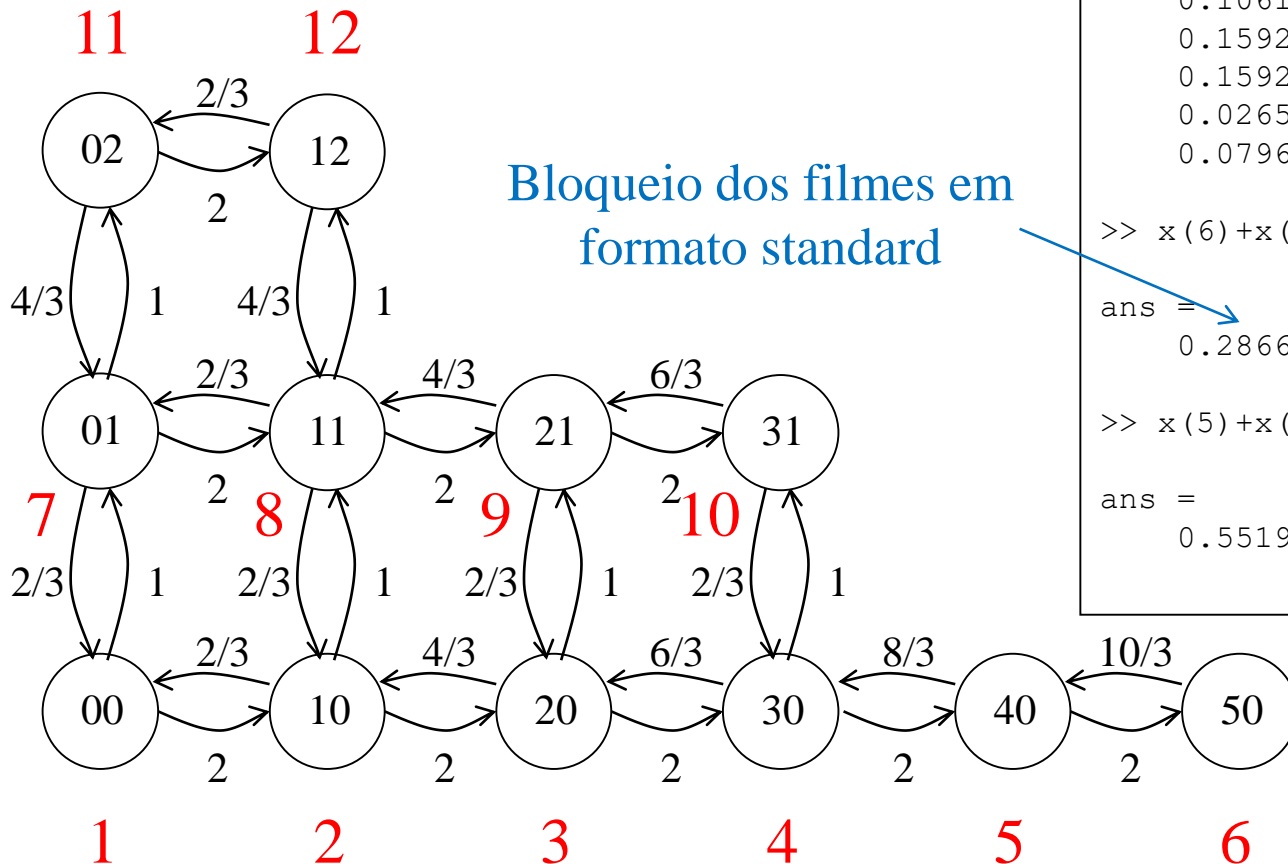
$$\pi_{00} + \pi_{10} + \pi_{20} + \dots + \pi_{02} + \pi_{12} = 1$$



Exemplo 1 – resolução no MATLAB

[illegible]
$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1 – resolução no MATLAB



Bloqueio dos filmes em
formato standard

```
>> x=A\B
```

```
x =  
    0.0236  
    0.0708  
    0.1061  
    0.1061  
    0.0796  
    0.0478  
    0.0354  
    0.1061  
    0.1592  
    0.1592  
    0.0265  
    0.0796
```

```
>> x(6)+x(10)+x(12)
```

```
ans =  
    0.2866
```

```
>> x(5)+x(6)+x(9)+x(10)+x(11)+x(12)
```

```
ans =  
    0.5519
```

Bloqueio dos filmes em
formato HD

Definições do teorema de Little

- Admita-se que se observa um sistema desde o instante $t = 0$. Seja:

$L(t)$ - o número de clientes no sistema no instante t ,

$N(t)$ - o número de clientes que chegaram no intervalo $[0, t]$,

W_i - o tempo despendido no sistema pelo i -ésimo cliente.

- Média temporal do número de clientes observados até ao instante t

$$L_t = \frac{1}{t} \int_0^t L(\tau) d\tau \qquad L = \lim_{t \rightarrow \infty} L_t$$

- Média temporal da taxa de chegada no intervalo $[0, t]$:

$$\lambda_t = N(t)/t \qquad \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_t$$

- Média temporal do atraso dos clientes até ao instante t

$$W_t = \frac{\sum_{i=0}^{N(t)} W_i}{N(t)} \qquad W = \lim_{t \rightarrow \infty} W_t$$

Teorema de Little

- O teorema de Little enuncia que

$$L = \lambda W$$

- O teorema de Little traduz a ideia intuitiva de que, para a mesma taxa de chegada de clientes, sistemas mais congestionados (L elevado) impõem maiores atrasos (W elevado).
- Num dia de chuva, o mesmo tráfego (mesmo λ) é mais lento do que normalmente (W maior) e as ruas estão mais congestionadas (L maior).
- Um restaurante de refeições rápidas (W menor) precisa de uma sala menor (L menor) que um restaurante normal, para a mesma taxa de chegada de clientes (mesmo λ).

Propriedade PASTA

- Considere um sistema em que os clientes chegam um de cada vez e são servidos um de cada vez.
- Seja $L(t)$ o número de clientes no sistema no instante t e defina-se P_n , $n \geq 0$, como

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{L(t) = n\}$$

P_n é a probabilidade em estado estacionário de existirem exatamente n clientes no sistema (ou a proporção de tempo em que o sistema contém exatamente n clientes).

- Considere a_n a proporção de clientes que ao chegar encontram n clientes no sistema.
- Considere d_n a proporção de clientes que ao partir deixam n clientes no sistema.
- Em qualquer sistema em que os clientes chegam um de cada vez e são servidos um de cada vez verifica-se que

$$a_n = d_n$$

Propriedade PASTA

- Propriedade PASTA (*Poisson Arrivals always See Time Averages*):

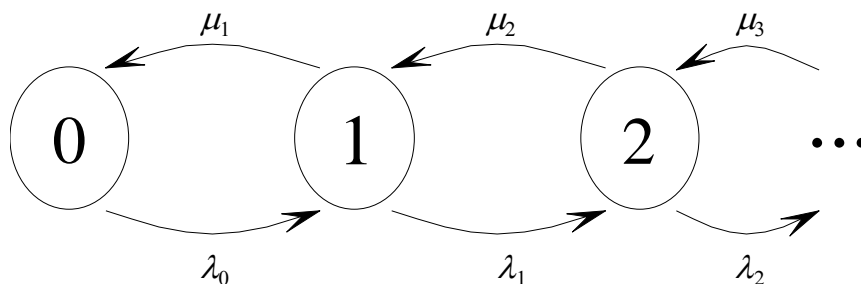
As chegadas de Poisson em que o tempo de serviço é estatisticamente independente dos instantes de chegada, vêem sempre médias temporais:

$$a_n = P_n$$

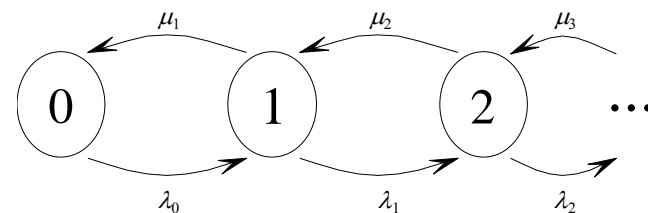
- Contra exemplos:
- Considere que o intervalo entre chegadas é uniformemente distribuído entre 2 e 6 segundos e os tempos de serviço dos clientes são uniformemente distribuídos entre 1 e 2 segundos.
 - As chegadas não são de Poisson
- Considere um sistema em que o processo de chegada de clientes é um processo de Poisson e que o tempo de serviço do n -ésimo cliente é igual a metade do intervalo entre a chegada do n -ésimo e do $(n+1)$ -ésimo cliente.
 - O tempo de serviço não é independente das chegadas

Processos de nascimento e morte

- Considere um sistema cujo estado representa o número de clientes no sistema.
- Sempre que o sistema tem n clientes:
 - (1) chegam novos clientes ao sistema a uma taxa exponencial λ_n
 - (2) partem clientes do sistema a uma taxa exponencial μ_n
- Este sistema é designado por processo de nascimento e morte.
- Os parâmetros λ_n ($n = 0, 1, \dots$) e μ_n ($n = 1, 2, \dots$) são designados por taxas de chegada (ou de nascimento) e taxas de partida (ou de morte), respetivamente.



Equações de balanço de processos de nascimento e morte



| <i>Estado</i> | <i>taxa de saída = taxa de entrada</i> |
|---------------|---|
| 0 | $\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1$ |
| 1 | $(\lambda_1 + \mu_1) \pi_1 = \mu_2 \pi_2 + \lambda_0 \pi_0$ |
| 2 | $(\lambda_2 + \mu_2) \pi_2 = \mu_3 \pi_3 + \lambda_1 \pi_1$ |
| $n, n \geq 1$ | $(\lambda_n + \mu_n) \pi_n = \mu_{n+1} \pi_{n+1} + \lambda_{n-1} \pi_{n-1}$ |

Ou, de forma equivalente (por manipulação das equações anteriores):

$$\lambda_n \pi_n = \mu_{n+1} \pi_{n+1}, \quad n \geq 0$$

Probabilidades limite de processos de nascimento e morte

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}}$$

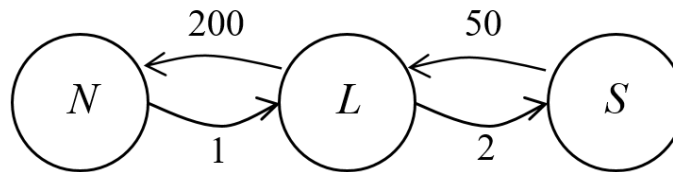
$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot \pi_0, \quad n \geq 1$$

Condição necessária para a existência de probabilidades limite:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} < \infty$$

Exemplo 2

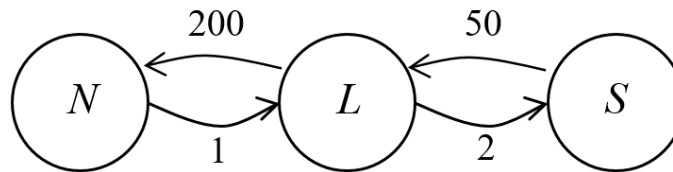
Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (N), Interferência Ligeira (L) ou Interferência Severa (S) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



- (a) Determine a probabilidade de cada um dos estados.
- (b) Determine o tempo de permanência médio de cada estado (em minutos).
- (c) Sabendo que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é de 0.01% no estado N , 0.1% no estado L e 1% no estado S , qual a probabilidade da ligação estar no estado N quando um pacote é recebido com erros?

Exemplo 2 – Resolução (a)

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (N), Interferência Ligeira (L) ou Interferência Severa (S) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



(a) Determine a probabilidade de cada um dos estados.

$$P_N = \frac{1}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.99483 = 99.483\%$$

$$P_L = \frac{\frac{1}{200}}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.00497 = 0.497\%$$

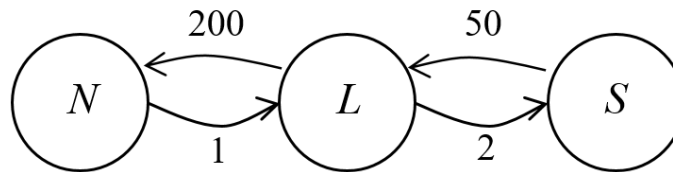
$$P_S = \frac{\frac{1}{200} \times \frac{2}{50}}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{200} \times \frac{2}{50}} = 0.0002 = 0.02\%$$

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}}$$

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot \pi_0$$

Exemplo 2 – Resolução (b)

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (N), Interferência Ligeira (L) ou Interferência Severa (S) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):



(b) Determine o tempo de permanência médio de cada estado (em minutos).

$$T_N = \frac{1}{1} = 1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos}$$

$$T_L = \frac{1}{2 + 200} = 0.00495 \text{ horas} = 0.3 \text{ minutos}$$

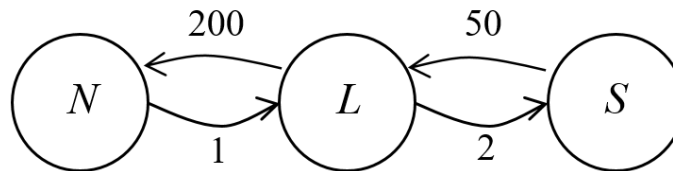
$$T_S = \frac{1}{50} = 0.02 \text{ horas} = 1.2 \text{ minutos}$$

Tempo médio de permanência $T = 1/q_i$

$$q_i = \sum_j q_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

Exemplo 2 – Resolução (c)

Considere que uma ligação sem fios para comunicação de pacotes pode estar num de 3 estados possíveis – Normal (N), Interferência Ligeira (L) ou Interferência Severa (S) – de acordo com a cadeia de Markov seguinte (taxas em número de transições por hora):

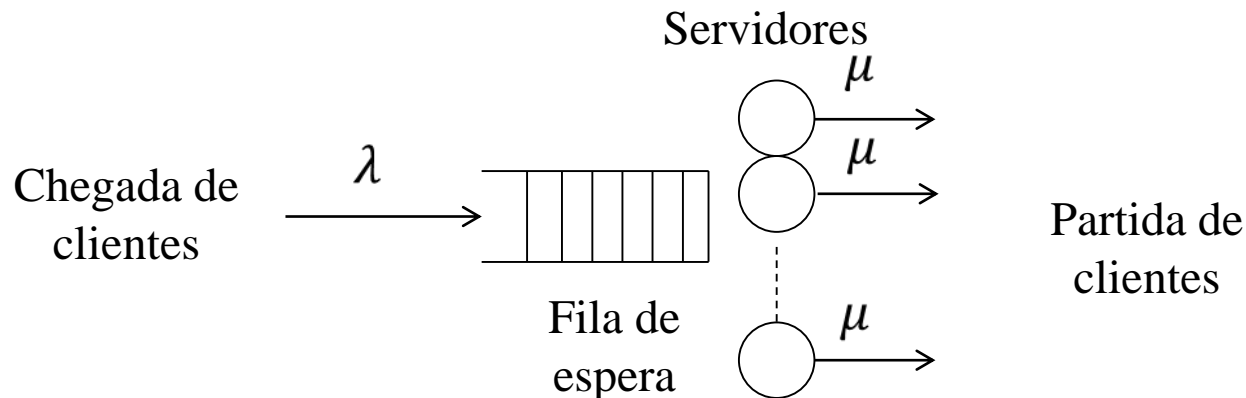


(c) Sabendo que a probabilidade de cada pacote ser recebido com erros é de 0.01% no estado N , 0.1% no estado L e 1% no estado S , qual a probabilidade da ligação estar no estado N quando um pacote é recebido com erros?

$$\begin{aligned} P(N|E) &= \frac{P(E|N) \times P(N)}{P(E|N) \times P(N) + P(E|L) \times P(L) + P(E|S) \times P(S)} \\ &= \frac{0.01\% \times 0.99483}{0.01\% \times 0.99483 + 0.1\% \times 0.00497 + 1\% \times 0.00020} \\ &= 0.9346 = 93.46\% \end{aligned}$$

Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é caracterizado por:
 - um conjunto de c servidores, cada um com capacidade para servir clientes a uma taxa μ
 - uma fila de espera com uma determinada capacidade (em nº de clientes)
- A este sistema chegam clientes a uma taxa λ
- Quando um cliente chega:
 - ele começa a ser servido por um servidor se houver algum disponível
 - ele é colocado da fila de espera se os servidores estiverem todos ocupados (ou é perdido se a fila de espera estiver cheia)
- Os clientes na fila de espera são atendidos segundo uma disciplina *First-In-First-Out*



Sistema de fila de espera

- Um sistema de fila de espera é representado por:

$$A/B/c/d$$

A – o processo de chegada de clientes:

M – Markoviano, D – Determinístico, G – Genérico

B – o processo de atendimento de clientes:

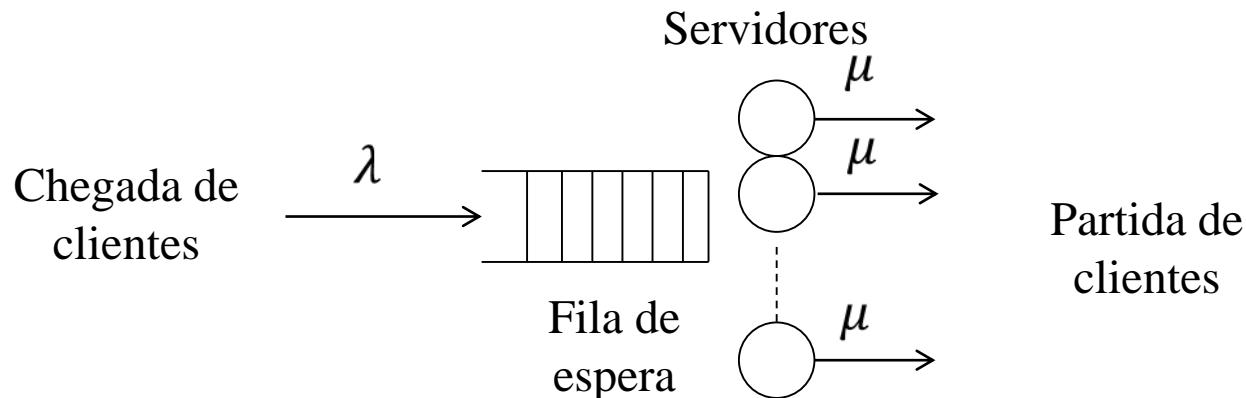
M – Markoviano, D – Determinístico, G – Genérico

c – o número de servidores

d – capacidade do sistema em nº de clientes:

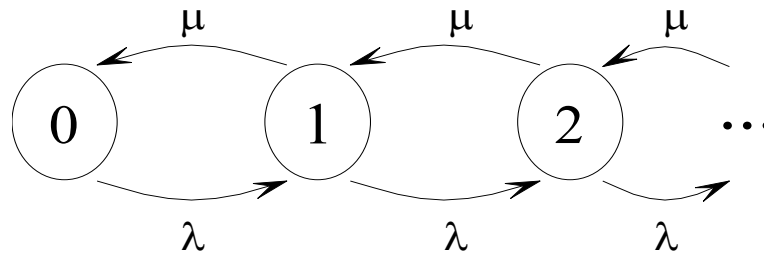
número de servidores + capacidade da fila de espera

- Quando d é omissa, a fila de espera tem tamanho infinito.



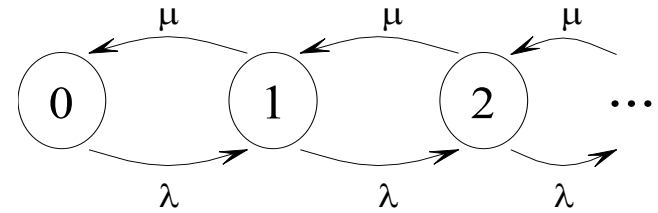
Sistema $M/M/1$

- Processo de nascimento e morte em que:
 - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
 - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
 - (3) o sistema tem 1 servidor
 - (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes



- Uma ligação ponto-a-ponto com capacidade μ pacotes/s e uma fila de espera muito grande onde chegam pacotes a uma taxa de Poisson λ pacotes/s com comprimento exponencialmente distribuído de média $1/\mu$ é um sistema $M/M/1$

Sistema *M/M/1*



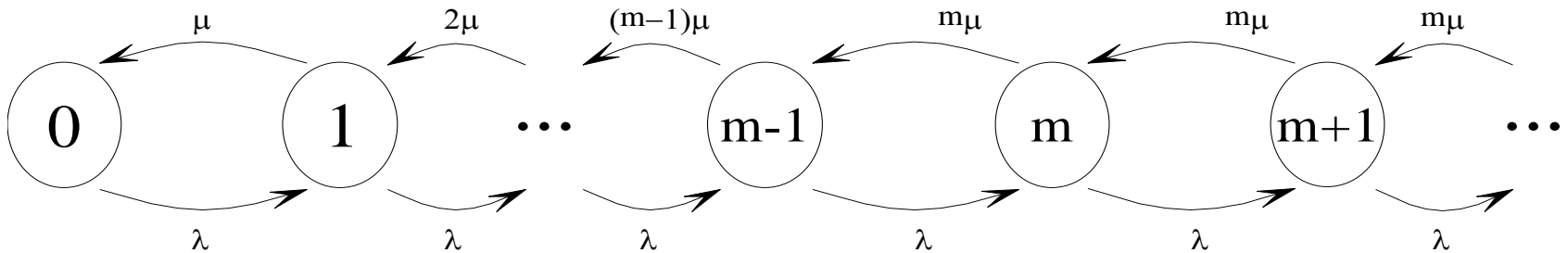
$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}} = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \cdot P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}$$

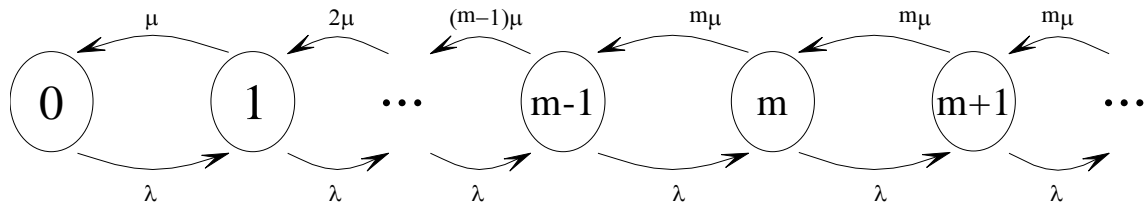
- Número médio de clientes no sistema: $L = \sum_{n=0}^{\infty} n P_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$
- Atraso médio no sistema: $W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
- Atraso médio na fila de espera: $W_Q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$
- Número médio de clientes na fila de espera: $L_Q = \lambda W_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$

Sistema $M/M/m$

- Processo de nascimento e morte em que:
 - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
 - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
 - (3) o sistema tem m servidores
 - (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes



Sistema $M/M/m$



Equações de balanço:

$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n, \quad n \leq m$$

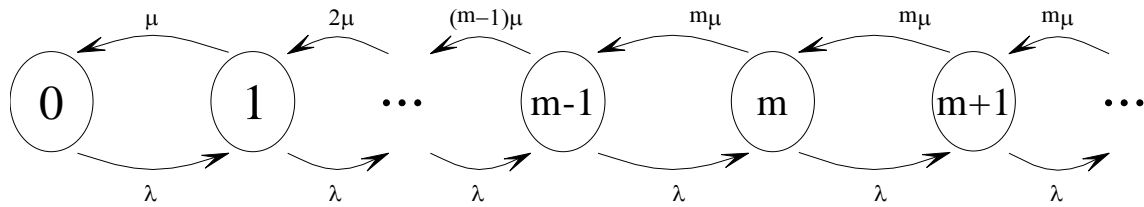
$$\lambda P_{n-1} = m\mu P_n, \quad n > m$$

Probabilidade de n clientes no sistema em estado estacionário ($\rho = \lambda/m\mu < 1$):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + \frac{(m\rho)^m}{m!(1-\rho)}}$$

$$P_n = \begin{cases} P_0 \frac{(m\rho)^n}{n!}, & n \leq m \\ P_0 \frac{m^m \rho^n}{m!}, & n > m \end{cases}, n \geq 1$$

Sistema $M/M/m$



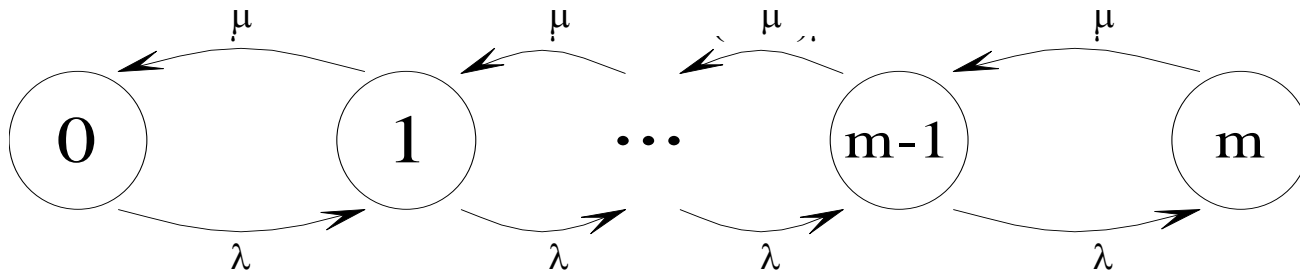
- Probabilidade de uma chegada encontrar todos os servidores ocupados (fórmula de Erlang C):

$$P_Q = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{P_0 (m\rho)^m}{m!(1-\rho)}$$

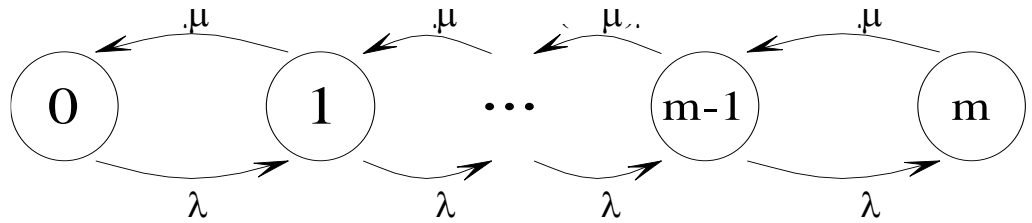
- Número médio de clientes na fila de espera: $L_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n P_0 \frac{m^m \rho^{m+n}}{m!} = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$
- Atraso médio na fila de espera: $W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$
- Atraso médio no sistema: $W = \frac{1}{\mu} + W_Q = \frac{1}{\mu} + \frac{P_Q}{m\mu - \lambda}$
- Número médio de clientes no sistema: $L = \lambda W = m\rho + \frac{\rho P_Q}{1-\rho}$

Sistema $M/M/1/m$

- Processo de nascimento e morte em que:
 - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
 - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
 - (3) o sistema tem 1 servidor
 - (4) o sistema acomoda no máximo m clientes (*i.e.*, a fila de espera tem capacidade para $m - 1$ clientes)



Sistema $M/M/1/m$



- Equações de balanço:

$$\lambda P_{n-1} = \mu P_n, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

- Probabilidade de n clientes no sistema em estado estacionário:

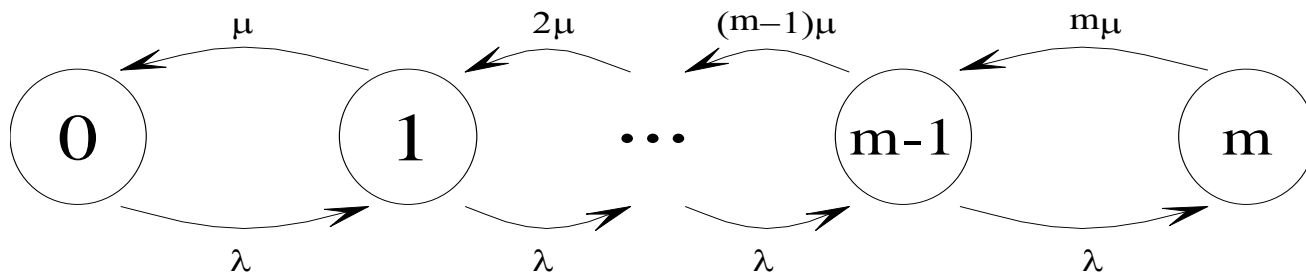
$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i} \quad n = 0, 1, \dots, m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de uma chegada encontrar o sistema cheio (*i.e.*, o servidor ocupado e a fila de espera cheia):

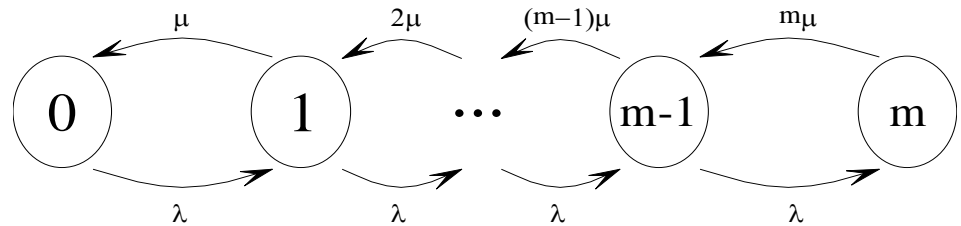
$$P_m = \frac{(\lambda/\mu)^m}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i}$$

Sistema $M/M/m/m$

- Processo de nascimento e morte em que:
 - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
 - (2) o tempo de atendimento de um servidor é exponencialmente distribuído com média $1/\mu$
 - (3) o sistema tem m servidores
 - (4) o sistema acomoda no máximo m clientes (*i.e.*, não tem fila de espera)



Sistema $M/M/m/m$



- Equações de balanço:

$$\lambda P_{n-1} = n\mu P_n, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

- Probabilidade de n clientes no sistema em estado estacionário:

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n / n!}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i / i!} \quad n = 0, 1, \dots, m$$

- Pela propriedade PASTA, a probabilidade de uma chegada encontrar o sistema cheio é (fórmula de Erlang B):

$$P_m = \frac{(\lambda/\mu)^m / m!}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i / i!}$$

Sistema *M/G/1*

- Processo de nascimento e morte em que:
 - (1) a chegada de clientes é um processo de Poisson com taxa λ
 - (2) o tempo de atendimento S do servidor tem uma distribuição genérica e independente das chegadas dos clientes
 - (3) o sistema tem 1 servidor
 - (4) o sistema acomoda um número infinito de clientes
- Sendo conhecidos $E[S]$ e $E[S^2]$ do tempo de atendimento S , a fórmula de Pollaczek - Khintchine enuncia que o atraso médio na fila de espera é dado por:

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])}$$

- O atraso médio no sistema é dado por:

$$W = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} + E[S]$$

Sistema *M/G/1*

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])}$$

- Quando o tempo de serviço é exponencialmente distribuído, o sistema resulta num *M/M/1*:

$$E[S] = 1/\mu$$

$$E[S^2] = \text{Var}[S] + (E[S])^2 = 1/\mu^2 + 1/\mu^2 = 2/\mu^2$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- Quando os tempos de serviço são iguais para todos os clientes com valor $1/\mu$, o sistema resulta num *M/D/1*:

$$E[S] = 1/\mu$$

$$E[S^2] = 1/\mu^2$$

$$W_Q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

- Uma ligação ponto-a-ponto com capacidade μ pacotes/s e uma fila de espera muito grande onde chegam pacotes a uma taxa de Poisson λ pacotes/s é um sistema *M/G/1*.
 - Se o comprimento dos pacotes for exponencialmente distribuído, resulta num sistema *M/M/1*.
 - Se o comprimento dos pacotes for fixo, resulta num sistema *M/D/1*.

Exemplo 3

Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego oferecido é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

- (a) A percentagem de pacotes perdidos.
- (b) A percentagem de pacotes que não sofre atraso na fila de espera.
- (c) A percentagem de utilização da linha de transmissão.

Exemplo 3 – Resolução (a)

Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego oferecido é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(a) A percentagem de pacotes perdidos.

$$\mu = \frac{64000 \text{ bps}}{400 \times 8 \text{ bpp}} = 20 \text{ pps}$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i} \quad n = 0, 1, \dots, m$$

$$P_4 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}$$

$$P_4 = \frac{\left(\frac{15}{20}\right)^4}{1 + \frac{15}{20} + \left(\frac{15}{20}\right)^2 + \left(\frac{15}{20}\right)^3 + \left(\frac{15}{20}\right)^4} = 0.104 = 10.4\%$$

Exemplo 3 – Resolução (b)

Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego oferecido é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(b) A percentagem de pacotes que não sofre atraso na fila de espera.

$$\mu = \frac{64000 \text{ bps}}{400 \times 8 \text{ bpp}} = 20 \text{ pps}$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{\sum_{i=0}^m (\lambda/\mu)^i} \quad n = 0, 1, \dots, m$$

$$P_0 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0}{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{15}{20} + \left(\frac{15}{20}\right)^2 + \left(\frac{15}{20}\right)^3 + \left(\frac{15}{20}\right)^4} = 0.328 = 32.8\%$$

Exemplo 3 – Resolução (c)

Considere um sistema de transmissão de pacotes com uma fila de espera seguida de uma linha de transmissão de 64 Kbps. O tráfego oferecido é de Poisson com taxa de 15 pacotes/segundo. O comprimento dos pacotes é exponencialmente distribuído com média de 400 bytes. A fila de espera tem capacidade para 3 pacotes. Um pacote que chegue ao sistema é encaminhado pela linha de transmissão, se estiver livre, ou posto em fila de espera. Se a fila de espera se encontrar cheia, o pacote é perdido. Calcule:

(c) A percentagem de utilização da linha de transmissão.

$$U = 0 \times P_0 + 1 \times P_1 + 1 \times P_2 + 1 \times P_3 + 1 \times P_4$$

$$U = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1 - P_0$$

$$U = 1 - 0.328 = 0.672 = 67.2\%$$

Exemplo 4

Considere um sistema de transmissão ponto-a-ponto de 128 kbps que suporta dois fluxos de pacotes: no fluxo 1, os pacotes têm um tamanho constante de 128 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 30 pacotes/segundo; no fluxo 2, os pacotes têm um tamanho constante de 512 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 10 pacotes/segundo. Os fluxos são multiplexados estatisticamente numa fila de espera muito grande.

- (a) Indique justificando que tipo de fila de espera modela o desempenho deste sistema de transmissão.
- (b) Calcule o atraso médio no sistema dos pacotes de cada fluxo.

Exercício 4 – Resolução (a)

Este sistema é modelado por uma fila de espera $M/G/1$:

- a soma de 2 processos de Poisson é um processo de Poisson e, assim, o processo de chegada de pacotes é um processo de Poisson (' M ' em $M/G/1$) com taxa $30 + 10 = 40$ pps;
- o tempo de transmissão dos pacotes é genérico (' G ' em $M/G/1$) porque a distribuição dos tamanhos não segue uma distribuição comum: o tamanho é 128 Bytes com probabilidade $30/(30+10) = 0.75 = 75\%$ ou 512 Bytes com probabilidade $10/(30+10) = 0.25 = 25\%$;
- o número de servidores é um (' 1 ' em $M/G/1$) pois o canal de transmissão é usado para transmitir um pacote de cada vez;
- como o sistema tem uma fila de espera muito grande, a notação relativa à capacidade do sistema é omissa (considera-se que o sistema tem capacidade infinita).

Exercício 4 – Resolução (b)

$$S_{128} = (128 \times 8)/128000 = 8 \times 10^{-3} \text{ seg} \quad S_{512} = (512 \times 8)/128000 = 32 \times 10^{-3} \text{ seg}$$

$$\begin{aligned} E[S] &= 0.75 \times S_{128} + 0.25 \times S_{512} = \\ &= 0.75 \times 8 \times 10^{-3} + 0.25 \times 32 \times 10^{-3} = 14 \times 10^{-3} \text{ seg} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[S^2] &= 0.75 \times (S_{128})^2 + 0.25 \times (S_{512})^2 = \\ &= 0.75 \times (8 \times 10^{-3})^2 + 0.25 \times (32 \times 10^{-3})^2 = 3.04 \times 10^{-4} \text{ seg}^2 \end{aligned}$$

$$W_Q = \frac{\lambda E[S^2]}{2(1 - \lambda E[S])} = \frac{40 \times 3.04 \times 10^{-4}}{2(1 - 40 \times 14 \times 10^{-3})} = 0.0143 = 14.3 \text{ mseg}$$

$$W_{128} = W_Q + S_{128} = 14.3 + 8 = 22.3 \text{ mseg}$$

$$W_{512} = W_Q + S_{512} = 14.3 + 32 = 46.3 \text{ mseg}$$