Resolução de Exercícios de Revisão

Desempenho e Dimensionamento de Redes

Prof. Amaro de Sousa (asou@ua.pt)

DETI-UA, 2020/2021

Exercício 1

Numa ligação sem fios (wireless) entre dois equipamentos, a probabilidade dos pacotes de dados serem recebidos com erros é de 0.1% em condições normais ou de 10% quando há interferências. A probabilidade de haver interferência é de 2%. Os equipamentos têm a capacidade de verificar na receção se os pacotes de dados foram recebidos com erros ou não.

(a) Se um pacote de dados for recebido com erros, qual a probabilidade da ligação estar com interferência.

(b) Os terminais decidem que a ligação está com interferência quando recebem 2 pacotes seguidos com erros. Qual a probabilidade desta decisão estar correta?

Exercício 1 – resolução da (a)

(a) Se um pacote de dados for recebida com erros, qual a probabilidade da ligação estar com interferência.

$$P\left(F_j \middle| E\right) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$ ← Regra de Bayes

F_1 – estado normal

F_2 – estado em interferência

E – pacote recebido com erros

$P(F_1) = 1 - P(F_2) = 98\% = 0.98$

$P(E|F_1) = 0.1\% = 0.001$

$P(F_2) = 2\% = 0.02$

$P(E|F_2) = 10\% = 0.1$

$$P(F_2|E) = \frac{P(E|F_2)P(F_2)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)}$$

$$= \frac{0.1 \times 0.02}{0.001 \times 0.98 + 0.1 \times 0.02} = 0.671 = 67.1\%$$

Exercício 1 – resolução da (b)

(b) Os terminais decidem que a ligação está com interferência quando recebem 2 pacotes seguidos com erros. Qual a probabilidade desta decisão estar correta?

$$P(F_j|E) = \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(E|F_i)P(F_i)}$$

F_1 – estado normal

F_2 – estado em interferência

E – 2 pacotes seguidos com erros

$P(F_1) = 1 - P(F_2) = 98\% = 0.98$

$P(E|\,F_1) = 0.001 \times 0.001 = 10^{-6}$

$P(F_2) = 2\% = 0.02$

$P(E|\,F_2) = 0.1 \times 0.1 = 0.01$

$$P(F_2|E) = \frac{P(E|F_2)P(F_2)}{P(E|F_1)P(F_1) + P(E|F_2)P(F_2)}$$

$$= \frac{0.01 \times 0.02}{10^{-6} \times 0.98 + 0.01 \times 0.02} = 0.995 = 99.5\%$$

Exercício 2

Considere um sistema de transmissão de pacotes ponto-a-ponto de 64 Kbps. Os pacotes têm um tamanho exponencialmente distribuído com média de 500 Bytes e a chegada de pacotes é um processo de Poisson com taxa de 4 pacotes/segundo. Calcule a capacidade mínima da fila de espera (em número de pacotes) para que a taxa de pacotes perdidos seja menor que 2%.

Exercício 2 - resolução

Este sistema é um M/M/1/X em que X é a capacidade do sistema (a capacidade da fila de espera é X – 1). Pela propriedade PASTA, a taxa de pacotes perdidos é igual à probabilidade do sistema estar cheio:

λ = 4 pac/s $\qquad\qquad$ μ = 64000/(500 × 8) = 16 pac/s

λ / μ = 4/16 = 0.25

$$P_X = \frac{\frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{X-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_X}}{1+\sum_{n=1}^{X}\left(\frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n}\right)} = \frac{\frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{X-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_X}}{1+\frac{\lambda_0}{\mu_1}+\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}+\cdots+\frac{\lambda_0\lambda_1 \ldots \lambda_{X-1}}{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_X}} = \frac{0.25^X}{1+0.25+0.25^2+\cdots+0.25^X}$$

$X = 1 \Rightarrow$ $\qquad$ $P_1 = 0.25/(1+0.25) = 0.2 = 20\% > 2\%$

$X = 2 \Rightarrow$ $\qquad$ $P_2 = 0.25^2/(1+0.25+0.25^2) = 0.0476 = 4.76\% > 2\%$

$X = 3 \Rightarrow$ $\qquad$ $P_3 = 0.25^3/(1+0.25+0.25^2+0.25^3) = 0.0118 = 1.18\% < 2\%$

Assim, é necessário que a fila de espera tenha capacidade para X – 1 = 2 pacotes.

Exercício 3

Considere uma ligação ponto-a-ponto de 64 kbps partilhada por 3 fluxos de pacotes:

- o fluxo A gera pacotes de tamanho constante de 200 bytes a uma taxa de Poisson de 10 pacotes/s.
- o fluxo B gera pacotes de tamanho exponencialmente distribuído com média de 500 bytes a uma taxa de Poisson de 2 pacotes/s.
- o fluxo C gera pacotes de tamanho exponencialmente distribuído com média de 500 bytes a uma taxa de Poisson de 6 pacotes/s.

A fila de espera tem tamanho infinito e atribui maior prioridade ao fluxo A e menor prioridade aos fluxos B e C (segundo um mecanismo de prioritização estrita não-preemptiva). Determine o atraso médio dos pacotes para cada um dos 3 fluxos.

Exercício 3 - resolução

Os fluxos B e C têm a mesma prioridade e o mesmo tamanho médio de pacotes pelo que são considerados um único fluxo BC com taxa de chegada de pacotes igual à soma das taxas de chegada dos dois fluxos (2 + 6 = 8 pacotes/s).

$$W_{Qk} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i E\left(S_i^2\right)}{2\left(1-\rho_1-\cdots-\rho_{k-1}\right)\left(1-\rho_1-\cdots-\rho_k\right)} \qquad \text{onde} \qquad \rho_k = \lambda_k / \mu_k$$

λ_A = 10 pac/s $\quad$ μ_A = 64000/(200 × 8) = 40 pac/s $\quad$ $\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.25$

λ_{BC} = 2+6 = 8 pac/s $\quad$ μ_{BC} = 64000/(500 × 8) = 16 pac/s $\quad$ $\rho_{BC} = \lambda_{BC} / \mu_{BC} = 0.5$

$$E\left(S_A^2\right) = VAR(S_A) + E\left(S_A\right)^2 = 0^2 + \left(1/\mu_A\right)^2 = 625 \times 10^{-6}$$

$$E\left(S_{BC}^2\right) = VAR(S_{BC}) + E\left(S_{BC}\right)^2 = \left(1/\mu_{BC}\right)^2 + \left(1/\mu_{BC}\right)^2 = 2 \times \left(1/\mu_{BC}\right)^2 = 7812.5 \times 10^{-6}$$

$$W_A = \frac{\lambda_A E\left(S_A^2\right) + \lambda_{BC} E\left(S_{BC}^2\right)}{2\left(1-\rho_A\right)} + \frac{1}{\mu_A} = 70.8 \ ms$$

$$W_B = W_C = W_{BC} = \frac{\lambda_A E\left(S_A^2\right) + \lambda_{BC} E\left(S_{BC}^2\right)}{2\left(1-\rho_A\right)\left(1-\rho_A-\rho_{BC}\right)} + \frac{1}{\mu_{BC}} = 245.8 \ ms$$

Exercício 4

Considere uma ligação ponto-a-ponto de 128 Kbps. Chegam a esta ligação dois fluxos de chamadas de Poisson ambos com taxas de 2 chamadas/hora. Cada chamada ocupa uma capacidade de 64 Kbps no fluxo 1 e 128 Kbps no fluxo 2. As chamadas têm duração exponencialmente distribuída com média de 3 minutos no fluxo 1 e 6 minutos no fluxo 2.

Determine:

(a) a cadeia de Markov que representa o estado da ligação,

(b) a probabilidade de bloqueio de cada fluxo,

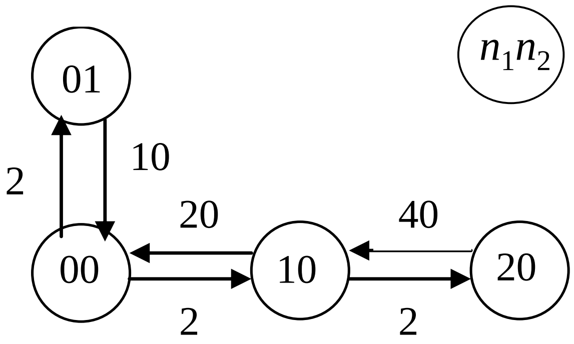
(c) a taxa de ocupação da ligação.

Exercício 4 - resolução

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ chamadas/hora

$\mu_1 = 60/3 = 20$ chamadas/hora

$\mu_2 = 60/6 = 10$ chamadas/hora



(b) $\rho_1 = \lambda_1 / \mu_1 = 2/20 = 0.1$ Erl.

$\rho_2 = \lambda_2 / \mu_2 = 2/10 = 0.2$ Erl.

$$B_k = 1 - \frac{\displaystyle\sum_{\mathbf{n}\in S_k} \prod_{l=1}^{K} \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!}}{\displaystyle\sum_{\mathbf{n}\in S} \prod_{l=1}^{K} \frac{\rho_l^{n_l}}{n_l!}}$$

$$B_1 = 1 - \frac{\dfrac{0.1^0 0.2^0}{0!\,0!} + \dfrac{0.1^1 0.2^0}{1!\,0!}}{\dfrac{0.1^0 0.2^0}{0!\,0!} + \dfrac{0.1^1 0.2^0}{1!\,0!} + \dfrac{0.1^2 0.2^0}{2!\,0!} + \dfrac{0.1^0 0.2^1}{0!\,1!}} = 15.7\%$$

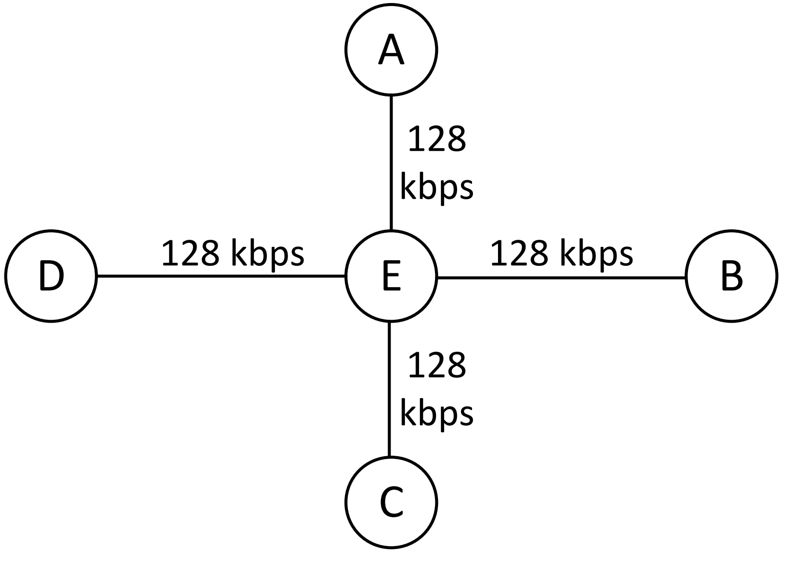
$$B_2 = 1 - \frac{\dfrac{0.1^0 0.2^0}{0!\,0!}}{\dfrac{0.1^0 0.2^0}{0!\,0!} + \dfrac{0.1^1 0.2^0}{1!\,0!} + \dfrac{0.1^2 0.2^0}{2!\,0!} + \dfrac{0.1^0 0.2^1}{0!\,1!}} = 23.4\%$$

(c)

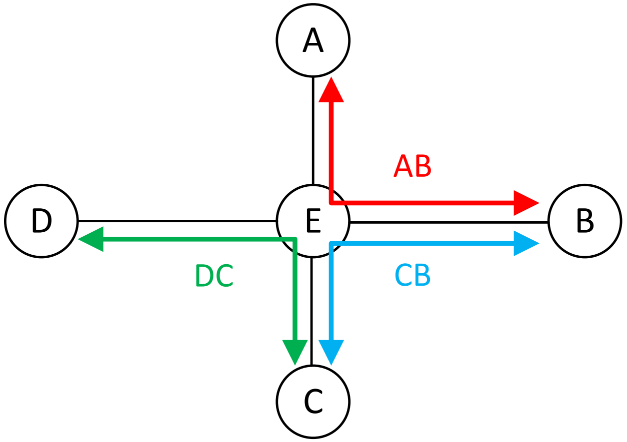
$$0 \times \mathrm{P}(00) + 0.5 \times \mathrm{P}(10) + 1 \times \mathrm{P}(20) + 1 \times \mathrm{P}(01) = \frac{0 \times \dfrac{0.1^0 0.2^0}{0!\,0!} + 0.5 \times \dfrac{0.1^1 0.2^0}{1!\,0!} + 1 \times \dfrac{0.1^2 0.2^0}{2!\,0!} + 1 \times \dfrac{0.1^0 0.2^1}{0!\,1!}}{\dfrac{0.1^0 0.2^0}{0!\,0!} + \dfrac{0.1^1 0.2^0}{1!\,0!} + \dfrac{0.1^2 0.2^0}{2!\,0!} + \dfrac{0.1^0 0.2^1}{0!\,1!}} = 19.5\%$$

Exercício 5

Considere a rede com comutação de circuitos da figura seguinte. A rede suporta três sessões de chamadas: AB, CB e DC. As chamadas das três sessões chegam de acordo com um processo de Poisson com taxas λ_{AB} = 2 chamadas/hora, λ_{CB} = 1 chamada/hora e λ_{DC} = 5 chamadas/hora. Em todas as sessões, as chamadas requerem uma largura de banda de 64 Kbps e a duração de cada chamada é exponencialmente distribuída com média de 3 minutos. Determine os limites superiores para a probabilidade de bloqueio de cada sessão com base no teorema do limite do produto.



Exercício 5 - resolução



Teorema do Limite do Produto:

$$\bar{\rho}_j = \sum_{k \in K_j} \rho_k \qquad B_k \leq 1 - \prod_{j \in R_k} \left(1 - ER\left[\bar{\rho}_j, C_j\right]\right)$$

$$\rho_{AB} = \frac{2 \times 3}{60} = 0.1\,Erlangs \qquad \rho_{CB} = \frac{1 \times 3}{60} = 0.05\,Erlangs \qquad \rho_{DC} = \frac{5 \times 3}{60} = 0.25\,Erlangs$$

$$B_{AB} \leq 1 - \left(1 - ER\left[\rho_{AB}, 2\right]\right)\left(1 - ER\left[\rho_{AB} + \rho_{CB}, 2\right]\right)$$

$$B_{AB} \leq 1 - \left(1 - \frac{\frac{0.1^2}{2!}}{\frac{0.1^0}{0!} + \frac{0.1^1}{1!} + \frac{0.1^2}{2!}}\right)\left(1 - \frac{\frac{0.15^2}{2!}}{\frac{0.15^0}{0!} + \frac{0.15^1}{1!} + \frac{0.15^2}{2!}}\right) = 0.0142 = 1.42\%$$

$$B_{CB} \leq 1 - \left(1 - ER\left[\rho_{CB} + \rho_{DC}, 2\right]\right)\left(1 - ER\left[\rho_{AB} + \rho_{CB}, 2\right]\right)$$

$$B_{CB} \leq 1 - \left(1 - \frac{\frac{0.3^2}{2!}}{\frac{0.3^0}{0!} + \frac{0.3^1}{1!} + \frac{0.3^2}{2!}}\right)\left(1 - \frac{\frac{0.15^2}{2!}}{\frac{0.15^0}{0!} + \frac{0.15^1}{1!} + \frac{0.15^2}{2!}}\right) = 0.0428 = 4.28\%$$

$$B_{DC} \leq 1 - \left(1 - ER\left[\rho_{DC}, 2\right]\right)\left(1 - ER\left[\rho_{CB} + \rho_{DC}, 2\right]\right)$$

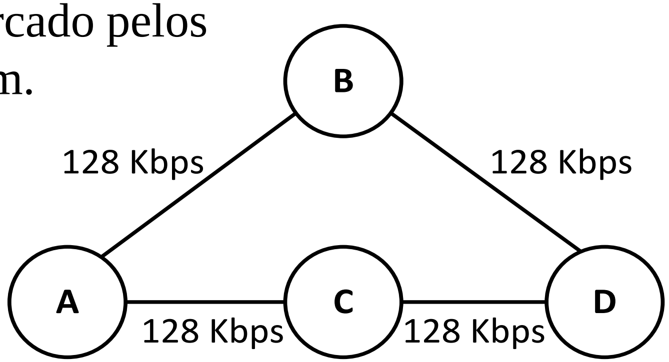
$$B_{DC} \leq 1 - \left(1 - \frac{\frac{0.25^2}{2!}}{\frac{0.25^0}{0!} + \frac{0.25^1}{1!} + \frac{0.25^2}{2!}}\right)\left(1 - \frac{\frac{0.3^2}{2!}}{\frac{0.3^0}{0!} + \frac{0.3^1}{1!} + \frac{0.3^2}{2!}}\right) = 0.0570 = 5.70\%$$

Exercício 6

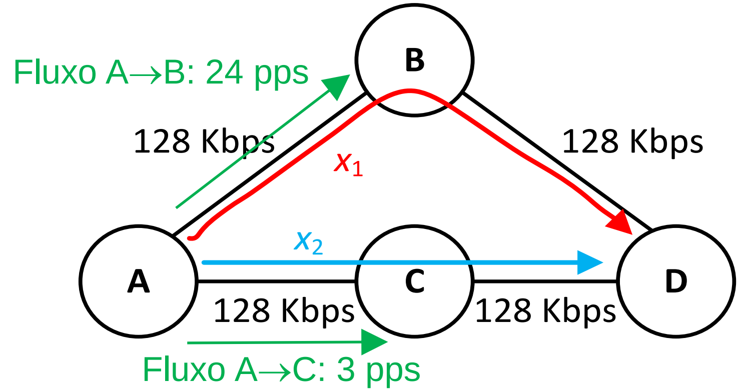
Considere a rede com comutação de pacotes da figura. Inicialmente, a rede serve um fluxo de 24 pacotes/s no percurso direto A$\rightarrow$B e um de fluxo 3 pacotes/s no percurso direto A$\rightarrow$C. É oferecido um novo fluxo de 10 pacotes/s de A para D. Todos os fluxos são caracterizados por intervalos entre chegadas e comprimentos de pacotes independentes e exponencialmente distribuídos. O comprimento médio dos pacotes é de 250 bytes.

(a) Admita que o novo fluxo A$\rightarrow$D é encaminhado em igual percentagem pelos dois percursos possíveis. Determine pela aproximação de Kleinrock o atraso médio que os pacotes de cada fluxo sofrem na rede.

(b) Admita que o novo fluxo A$\rightarrow$D pode ser bifurcado pelos dois percursos possíveis em qualquer percentagem. Determine o sistema de equações cuja resolução permite calcular a bifurcação do novo fluxo que minimiza o atraso médio total da rede.



Exercício 6 - resolução



(a) O atraso médio do fluxo *s* é dado por:

$$W_s = \sum_{(i,j)\in R_s} \left(\frac{1}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} + d_{ij} \right)$$

$x_1 = 5$ pps, $x_2 = 5$ pps, d_{ij} nulos. Em todas as ligações temos $\mu = \dfrac{128000}{250 \times 8} = 64 \ \ pps$

$$W_{AB} = \frac{1}{64-(24+5)} = 28.6 \ \ ms \qquad W_{AC} = \frac{1}{64-(3+5)} = 17.9 \ \ ms$$

$$W_{AD} = 0.5 \times \left(\frac{1}{64-(24+5)} + \frac{1}{64-5} \right) + 0.5 \times \left(\frac{1}{64-(3+5)} + \frac{1}{64-5} \right) = 40.2 \ \ ms$$

(b) $$L = L_{AB} + L_{AC} + L_{BD} + L_{CD} = \frac{x_1+24}{64-(x_1+24)} + \frac{x_2+3}{64-(x_2+3)} + \frac{x_1}{64-x_1} + \frac{x_2}{64-x_2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{64}{(40-x_1)^2} + \frac{64}{(64-x_1)^2}$$

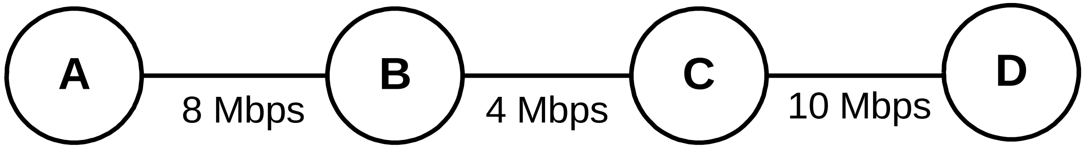
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{64}{(61-x_2)^2} + \frac{64}{(64-x_2)^2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{64}{(40-x_1)^2} + \dfrac{64}{(64-x_1)^2} = \dfrac{64}{(61-x_2)^2} + \dfrac{64}{(64-x_2)^2} \\ x_1 + x_2 = 10 \end{cases}$$

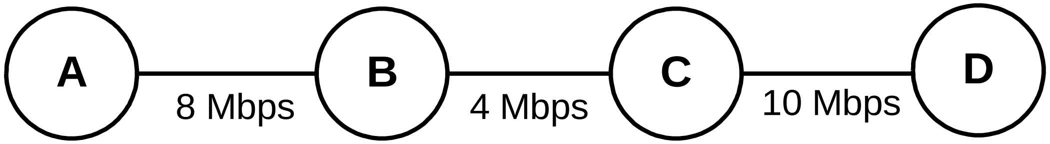
Regra das derivadas: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercício 7

Considere a rede com comutação de pacotes da figura. Em todas as ligações, o atraso de propagação é de 10 milissegundos em cada sentido. A rede suporta fluxos entre todos os nós com pacotes de tamanho médio 1000 bytes. O fluxo de A para C é controlado por janelas extremo-a-extremo em que as permissões têm um tamanho fixo de 40 Bytes. Determine o tamanho mínimo (em número de pacotes) da janela de emissão garantindo que este fluxo pode emitir ao ritmo máximo quando nenhum outro fluxo está ativo.



Exercício 7 - resolução



$W_{AC} \geq \left\lceil \frac{d}{X} \right\rceil$

d – atraso de ida (de um pacote) e volta (da permissão)

X – tempo médio de transmissão de cada pacote (ao ritmo permitido pela rede)

$$d = \frac{8 \times 1000}{8000000} + 0.01 + \frac{8 \times 1000}{4000000} + 0.01 + \frac{8 \times 40}{4000000} + 0.01 + \frac{8 \times 40}{8000000} + 0.01$$

$$X = \frac{8 \times 1000}{4000000}$$

$$W_{AC} \geq \left\lceil \frac{d}{X} \right\rceil = \left\lceil \frac{0.04312}{0.002} \right\rceil = \lceil 21.56 \rceil = 22$$

O tamanho mínimo da janela de emissão é 22 pacotes.

Exercício 8

Considere uma ligação de 2 Mbps que serve três fluxos de pacotes (A, B e C) com o algoritmo de escalonamento *Deficit Round Robin* e um limiar de 1200 bytes para cada fluxo.

– No fluxo A, chegam 3 pacotes: pacote A.1 de 800 Bytes no instante 0 ms, pacote A.2 de 700 Bytes no instante 12 ms e pacote A.3 de 200 Bytes no instante 15 ms.

– No fluxo B, chegam 2 pacotes: pacote B.1 de 500 Bytes no instante 5 ms e pacote B.2 de 600 Bytes no instante 6 ms.

– No fluxo C, chegam 2 pacotes: pacote C.1 de 1000 Bytes no instante 0 ms e pacote C.2 de 1300 Bytes no instante 4 ms.

O ciclo segue a sequência A → B → C e o algoritmo decide no início de cada ciclo os pacotes a enviar e respetiva ordem. Determine que pacotes e por que ordem são enviados em cada ciclo.

Exercício 8 - resolução

– Fluxo A:	pacote A.1 de 800 Bytes no instante 0 ms pacote A.2 de 700 Bytes no instante 12 ms pacote A.3 de 200 Bytes no instante 15 ms
– Fluxo B:	pacote B.1 de 500 Bytes no instante 5 ms pacote B.2 de 600 Bytes no instante 6 ms
– Fluxo C:	pacote C.1 de 1000 Bytes no instante 0 ms pacote C.2 de 1300 Bytes no instante 4 ms

1º ciclo: Início: 0 ms

Pacotes: A.1 → C.1 Créditos: Fluxo A = 1200 – 800 = 400 Bytes
Fluxo B = 0 Bytes
Fluxo C = 1200 – 1000 = 200 Bytes

2º ciclo: Início: $0 + 8\times(800+1000)/2000000 = 7.2\times10^{-3} = 7.2$ ms

Pacotes: B.1 → B.2 → C.2 Créditos: Fluxo A = 0 Bytes
Fluxo B = 1200 – (500+600) = 100 Bytes
Fluxo C = (200+1200) – 1300 = 100 Bytes

3º ciclo: Início: $7.2\times10^{-3} + 8\times(500+600+1300)/2000000 = 16.8\times10^{-3} = 16.8$ ms

Pacotes: A.2 → A.3 Créditos: Fluxo A = 1200 – (700+200) = 300 Bytes
Fluxo B = 0 Bytes
Fluxo C = 0 Bytes