Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Enumeração Combinatória

Exemplos de problemas de contagem

Exemplo

- Quantos sequências binárias de comprimento *n* existem?

Exemplos de problemas de contagem

Exemplo

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?

Exemplos de problemas de contagem

Exemplo

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?

Exemplos de problemas de contagem

Exemplo

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?
- Quantas sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros existem?

Exemplos de problemas de contagem

Exemplo

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?
- Quantas sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros existem?
- Sejam $k, n \in \mathbb{N}$. A equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ tem quantas soluções com $x_i \in \mathbb{N}$?
- ...

Índice

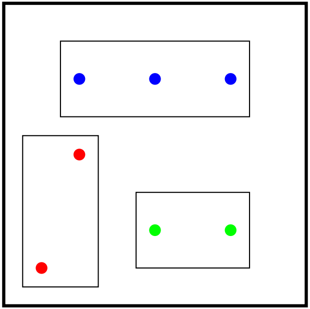
Os prinípios da adição e da multiplicação

Dois princípio simples

O príncipio da adição

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos *dois a dois disjuntos* (isto é, tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$). Então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$



Dois princípio simples

O príncipio da adição

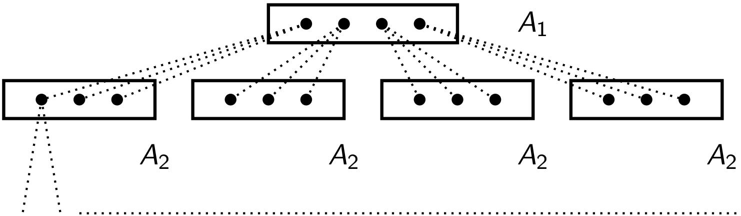
Sejam A_1, A_2, ..., A_n conjuntos finitos *dois a dois disjuntos* (isto é, tais que $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$). Então

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

O princípio da multiplicação

Sejam A_1, A_2, ..., A_n conjuntos finitos. Então

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_n|.$$



Exemplos

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é

Exemplos

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n.

$$\text{Contamos os elementos de } \underbrace{\{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}}_{n \text{ vezes}}.$$

Exemplos

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$.

Exemplos

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \dots, 9$.
  Determinamos o tamanho do conjunto
  $$\{1, \dots, 9\}^4;$$
  ou seja, existem $9^4 = 6561$ tais números.

Exemplos

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \dots, 9$.
  Determinamos o tamanho do conjunto
  $$\{1, \dots, 9\}^4;$$
  ou seja, existem $9^4 = 6561$ tais números.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $0, \dots, 9$ e que são divisíveis por 5?

Exemplos

Exemplo

- O número de sequências binárias de comprimento n é 2^n.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $1, \dots, 9$.
  Determinamos o tamanho do conjunto
  $$\{1, \dots, 9\}^4;$$
  ou seja, existem $9^4 = 6561$ tais números.
- Qual é o número de números naturais com 4 algarismos que se pode escrever com os dígitos $0, \dots, 9$ e que são divisíveis por 5?
  O conjunto
  $$\{1, \dots 9\} \times \{0, 1, \dots, 9\}^2 \times \{0, 5\}$$
  tem 1800 elementos.

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

- o número de “(” é igual ao número de “)”,

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

- o número de “(” é igual ao número de “)”,
- em cada parte inicial da palavra, o número de “(” é maior ou igual ao número de “)”,

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

- o número de “(” é igual ao número de “)”,
- em cada parte inicial da palavra, o número de “(” é maior ou igual ao número de “)”,
- entre “(” e “)” está pelo menos um dos símbolos “a,b,c”.

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

- o número de “(” é igual ao número de “)”,
- em cada parte inicial da palavra, o número de “(” é maior ou igual ao número de “)”,
- entre “(” e “)” está pelo menos um dos símbolos “a,b,c”.

Seja S o conjunto destas palavras, e consideramos

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto),

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

- o número de “(” é igual ao número de “)”,
- em cada parte inicial da palavra, o número de “(” é maior ou igual ao número de “)”,
- entre “(” e “)” está pelo menos um dos símbolos “a,b,c”.

Seja S o conjunto destas palavras, e consideramos

- $S_0 = \{p \mid p$ não tem nenhuma parêntese$\}$,

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto),

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos "a", "b", "c", "(", ")" de modo que

- o número de "(" é igual ao número de ")",
- em cada parte inicial da palavra, o número de "(" é maior ou igual ao número de ")",
- entre "(" e ")" está pelo menos um dos símbolos "a,b,c".

Seja S o conjunto destas palavras, e consideramos

- $S_0 = \{p \mid p \text{ não tem nenhuma parêntese}\}$,
- $S_1 = \{p \mid p \text{ tem uma vez o símbolo "("}\}$,

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto),

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos "a", "b", "c", "(", ")" de modo que

- o número de "(" é igual ao número de ")",
- em cada parte inicial da palavra, o número de "(" é maior ou igual ao número de ")",
- entre "(" e ")" está pelo menos um dos símbolos "a,b,c".

Seja S o conjunto destas palavras, e consideramos

- $S_0 = \{p \mid p \text{ não tem nenhuma parêntese}\}$,
- $S_1 = \{p \mid p \text{ tem uma vez o símbolo "("}\}$,
- $S_2 = \{p \mid p \text{ tem duas vezes o símbolo "("}\}$,

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto),

Mais um exemplo

Exemplo

Determinamos o número das palavras de comprimento 5 que se podem escrever com os símbolos “a”, “b”, “c”, “(”, “)” de modo que

- o número de “(” é igual ao número de “)”,
- em cada parte inicial da palavra, o número de “(” é maior ou igual ao número de “)”,
- entre “(” e “)” está pelo menos um dos símbolos “a,b,c”.

Seja S o conjunto destas palavras, e consideramos

- $S_0 = \{p \mid p \text{ não tem nenhuma parêntese}\}$,
- $S_1 = \{p \mid p \text{ tem uma vez o símbolo “(”}\}$,
- $S_2 = \{p \mid p \text{ tem duas vezes o símbolo “(”}\}$,

logo $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ (dois a dois disjunto), e por isso

$$|S| = |S_0| + |S_1| + |S_2|.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| =$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 =$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$
  (o primeiro número indica a posição de "(", o segundo a posição de ")").

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$
  (o primeiro número indica a posição de "(", o segundo a posição de ")").
  Aqui $|S_1^{i,j}| =$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$
  (o primeiro número indica a posição de "(", o segundo a posição de ")").
  Aqui $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$, logo $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$
  (o primeiro número indica a posição de "(", o segundo a posição de ")").
  Aqui $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$, logo $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$.
- $S_2 =$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$
  (o primeiro número indica a posição de "(", o segundo a posição de ")").
  Aqui $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$, logo $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$.
- $S_2 = \{$"((a))", "((b))", "((c))"$\}$, logo $|S_2| = 3$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Temos:

- $|S_0| = 3^5 = 243$.
- $S_1 = S_1^{1,3} \cup S_1^{1,4} \cup S_1^{1,5} \cup S_1^{2,4} \cup S_1^{2,5} \cup S_1^{3,5}$
  (o primeiro número indica a posição de "(", o segundo a posição de ")").
  Aqui $|S_1^{i,j}| = 3^3 = 27$, logo $|S_1| = 6 \cdot 27 = 162$.
- $S_2 = \{$"((a))", "((b))", "((c))"$\}$, logo $|S_2| = 3$.

Portanto $|S| = 243 + 162 + 3 = 408$.

Generalizações

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| =$

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9\cdot$

Generalizando ...

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- ...
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}$

Generalizando ...

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- ...
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}$

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7$

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 4536.$

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{$números com 4 algarismos distintos$\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 4536$.
- Para $A = \{$números com 4 algarismos distintos em $1, \ldots, 9$, um deles igual a $5\}$,

$$|A| =$$

Generalizando ...

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- ...
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 4536.$
- Para $A = \{$números com 4 algarismos distintos em $1, \ldots, 9$, um deles igual a $5\}$,

$$|A| = 4\cdot$$

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 4536.$
- Para $A = \{\text{números com 4 algarismos distintos em } 1,\ldots,9, \text{ um deles igual a } 5\}$,

$$|A| = 4{\cdot}8{\cdot}$$

Generalizando ...

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- ...
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \dots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 4536.$
- Para $A = \{\text{números com 4 algarismos distintos em } 1,\dots,9,$ um deles igual a $5\}$,

$$|A| = 4{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}$$

Generalizando ...

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- ...
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$.
- Para $A = \{\text{números com 4 algarismos distintos em } 1, \ldots, 9, \text{ um deles igual a } 5\}$,

$$|A| = 4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$$

Generalizando . . .

O príncipio da multiplicação generalizada

Suponhamos que temos um procedimento com n escolhas onde há

- r_1 possibilidades para a primeira escolha,
- r_2 possibilidades para a segunda escolha (independente da primeira escolha),
- . . .
- r_n possibilidades para a última escolha (independente das escolhas anteriores);

Então, existem $r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_n$ maneiras de realizar o procedimento.

Exemplo

- $|\{\text{números com 4 algarismos distintos}\}| = 9{\cdot}9{\cdot}8{\cdot}7 = 4536.$
- Para $A = \{$números com 4 algarismos distintos em $1,\ldots,9$, um deles igual a $5\}$,

$$|A| = 4{\cdot}8{\cdot}7{\cdot}6 = 1344.$$

Generalizando . . .

Nota

O princípio da adição é só válido quando os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ são *dois a dois disjuntos*. Mais geral, temos:

Generalizando . . .

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Generalizando . . .

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| =$$

Generalizando ...

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| = |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)|$$

Generalizando . . .

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \end{aligned}$$

Generalizando ...

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\
&= |A_1| +
\end{aligned}$$

Generalizando ...

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\ &= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - \end{aligned}$$

Generalizando ...

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - \\
&\qquad (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|)
\end{aligned}$$

Generalizando ...

O princípio de inclusão-exclusão

- Para conjuntos finitos A_1 e A_2:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

- Para conjuntos finitos A_1, A_2 e A_3:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup (A_2 \cup A_3)| &= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |A_1 \cap (A_2 \cup A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2 \cup A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3)| \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_2 \cap A_3| - \\
&\quad\ (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|) \\
&= |A_1| + |A_2| + |A_3| \\
&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| \\
&\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}$$

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, $\ldots A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Isto é:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \cdots \cup A_n| = {} & |A_1| + \cdots + |A_n| \\ & - |A_1 \cap A_2| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\ & - \ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm |A_1 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned}$$

Prova por indução.

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, $\ldots A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Exemplo

Determinamos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, $\ldots A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Exemplo

Determinamos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Seja $A_k = \{n \in \{1, \ldots 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, $\dots A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Exemplo

Determinamos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Seja $A_k = \{n \in \{1, \dots 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Assim,

$$|A_3 \cup A_5|$$

.

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos $A_1, A_2, \ldots A_n$*:*

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Exemplo

Determinamos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Seja $A_k = \{n \in \{1, \ldots 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Assim,

$$|A_3 \cup A_5| = |A_3| + |A_5| - |A_3 \cap A_5|$$

.

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, $\ldots A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Exemplo

Determinamos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Seja $A_k = \{n \in \{1, \ldots 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Assim,

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5| &= |A_3| + |A_5| - |A_3 \cap A_5| \\ &= \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor \\ &\quad . \end{aligned}$$

O princípio de inclusão-exclusão

Teorema

Em geral, para os conjuntos finitos A_1, A_2, $\ldots A_n$:

$$|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}|$$

Exemplo

Determinamos o número de números entre 1 e 1000 que são divisíveis por 3 ou por 5.

Seja $A_k = \{n \in \{1, \ldots 1000\} \mid k \text{ divide } n\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Assim,

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5| &= |A_3| + |A_5| - |A_3 \cap A_5| \\ &= \lfloor \frac{1000}{3} \rfloor + \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor - \lfloor \frac{1000}{15} \rfloor \\ &= 333 + 200 - 66 = 467. \end{aligned}$$

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \ldots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \cdots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \cdots = |A_u| =$

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| =$$22^{10}$.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \ldots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \cdots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \cdots = |A_u| =22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \cdots = |A_o \cap A_u| =$

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| = 22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| = 21^{10}$.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \cdots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \cdots = |A_u| =22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \cdots = |A_o \cap A_u| =21^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \cdots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| = 22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| = 21^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \dots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \dots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais (“a,e,i,o,u”)?

Sejam A_a,…,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem “a”,…, “u”, respetivamente; procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| =$ 22^{10}.
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| =$ 21^{10}.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \dots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \dots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 18^{10}$.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \ldots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam $A_a, \ldots, A_u$ os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \cdots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \cdots = |A_u| = 22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \cdots = |A_o \cap A_u| = 21^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \cdots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \cdots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 18^{10}$.

Há 10 intersecções de 2 conjuntos, 10 intersecções de 3 conjuntos e 5 intersecções de 4 conjuntos.

Um exemplo

Exemplo

Quantas palavras de comprimento 10 com letras em $\{a, \dots, z\}$ (23 letras) existem que não contêm todas as vogais ("a,e,i,o,u")?

Sejam A_a,...,A_u os conjuntos das palavras de comprimento 10 sem "a",..., "u", respetivamente; procuramos $|A_a \cup \dots \cup A_u|$.

- $|A_a| = \dots = |A_u| =22^{10}$.
- $|A_a \cap A_e| = \dots = |A_o \cap A_u| =21^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i| = \dots = |A_i \cap A_o \cap A_u| = 20^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o| = \dots = |A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 19^{10}$.
- $|A_a \cap A_e \cap A_i \cap A_o \cap A_u| = 18^{10}$.

Há 10 intersecções de 2 conjuntos, 10 intersecções de 3 conjuntos e 5 intersecções de 4 conjuntos. Logo,

$$|A_a \cup \dots \cup A_u| = 5 \cdot 22^{10} - 10 \cdot 21^{10} + 10 \cdot 20^{10} - 5 \cdot 19^{10} + 18^{10}.$$

O prinípio da bijeção

Transportar problemas (desconhecido $\rightsquigarrow$ conhecido)

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f : A \to B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Transportar problemas (desconhecido $\rightsquigarrow$ conhecido)

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f: A \to B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Tipicamente utilizamos[a] este princípio quanto é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

---

[a] De facto, já utilizámos durante este semestre.

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f: A \to B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Tipicamente utilizamos este princípio quanto é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Determinamos o número de subconjuntos de $X = \{1, \dots, n\}$.

Transportar problemas (desconhecido $\rightsquigarrow$ conhecido)

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f: A \to B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Tipicamente utilizamos este princípio quanto é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Determinamos o número de subconjuntos de $X = \{1, \dots, n\}$. A função

$$PX \longrightarrow \{\text{sequências binárias de comprimento } n\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

Transportar problemas (desconhecido $\rightsquigarrow$ conhecido)

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f: A \to B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Tipicamente utilizamos este princípio quanto é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Determinamos o número de subconjuntos de $X = \{1, \dots, n\}$. A função

$$PX \longrightarrow \{\text{sequências binárias de comprimento } n\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

é bijetiva (porque é invertível).

Transportar problemas (desconhecido $\rightsquigarrow$ conhecido)

O princípio da bijecção

Sejam A e B conjuntos (finitos). Se existe uma função bijetiva $f : A \to B$ entre A e B, então A e B têm o mesmo número de elementos.

Tipicamente utilizamos este princípio quanto é mais fácil contar os elementos de um destes conjuntos.

Exemplo

Determinamos o número de subconjuntos de $X = \{1, \dots, n\}$. A função

$$PX \longrightarrow \{\text{sequências binárias de comprimento } n\}$$

$$A \longmapsto a_1 a_2 \dots a_n \quad \text{onde } a_i = \begin{cases} 1 & i \in A, \\ 0 & i \notin A \end{cases}$$

é bijetiva (porque é invertível). Logo, $|PX| = 2^n$.

Mais exemplos

Exemplo

O número de maneiras de colocar k bolas em n caixa coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros.

$$1\ 1\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \qquad 0 \quad 1\ 1\ 1\ 1$$

Mais exemplos

Exemplo

O número de maneiras de colocar k bolas em n caixa coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros.

1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1

Exemplo

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$)

Mais exemplos

Exemplo

O número de maneiras de colocar k bolas em n caixa coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros.

1 1 1 0 1 0 0 1 1 1 1

Exemplo

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$) coincide com o número de maneiras de colocar k bolas em n caixas.

Mais exemplos

Exemplo

O número de maneiras de colocar k bolas em n caixa coincide com o número de sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros.

$1\ 1\ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \qquad 0 \quad 1\ 1\ 1\ 1$

Exemplo

O número das soluções da equação $x_1 + \cdots + x_n = k$ (com $x_i \in \mathbb{N}$) coincide com o número de maneiras de colocar k bolas em n caixas.

Exemplo

O número de sequências binárias com k uns e m zero coincide com o número de subconjuntos de k elementos de um conjunto de $k+m$ elementos.

Nota

Voltaremos ao estas questões no

Capítulo 5: Agrupamentos e Identidades Combinatória.