Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

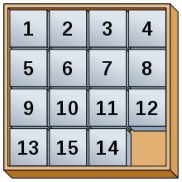
OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Permutações

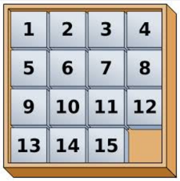
Introdução

Introdução: o jogo do 15

O jogo



$\rightsquigarrow$

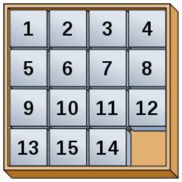


Notas

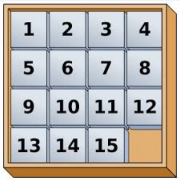
- O matemático americano Samuel Loyd publicou o problema em 1891.
- Há 15 peças quadradas (numeradas) e um espaço vazio que permite movimentos.
- O objetivo é ordenar os quadrados (da esquerda para a direita e de cima para baixo), o espaço vazio fica na última posição.

Introdução: o jogo do 15

O jogo



$\rightsquigarrow$



Notas

- O matemático americano Samuel Loyd publicou o problema em 1891.
- Há 15 peças quadradas (numeradas) e um espaço vazio que permite movimentos.
- O objetivo é ordenar os quadrados (da esquerda para a direita e de cima para baixo), o espaço vazio fica na última posição.
- O jogo não tem solução!! (Veremos em breve porquê.)

Índice

1. Noções básicas
2. Decomposição cíclica
3. A paridade de permutações

Noções básicas

Permutações

Definição

Uma função bijetiva $\pi\colon X \to X$ de um conjunto X (tipicamente finito) em si próprio diz-se permutação de X.

Permutações

Definição

Uma função bijetiva $\pi\colon X \to X$ de um conjunto X (tipicamente finito) em si próprio diz-se permutação de X.

Nota

- Para cada conjunto X, a função identidade $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ é uma permutação de X (designada por permutação identidade).

Permutações

Definição

Uma função bijetiva $\pi\colon X \to X$ de um conjunto X (tipicamente finito) em si próprio diz-se permutação de X.

Nota

- Para cada conjunto X, a função identidade $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ é uma permutação de X (designada por permutação identidade).
- Para cada permutação $\pi\colon X \to X$, a função inversa $\pi^{-1}\colon X \to X$ também é uma permutação de X.

Permutações

Definição

Uma função bijetiva $\pi\colon X \to X$ de um conjunto X (tipicamente finito) em si próprio diz-se permutação de X.

Nota

- Para cada conjunto X, a função identidade $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ é uma permutação de X (designada por permutação identidade).
- Para cada permutação $\pi\colon X \to X$, a função inversa $\pi^{-1}\colon X \to X$ também é uma permutação de X.
- Para permutações $\pi, \sigma\colon X \to X$, a função composta $\sigma \circ \pi\colon X \to X$ é uma permutação.

Permutações finitas

Notações

Seja $\pi\colon X \to X$ uma permutação de um conjunto finito X.

Permutações finitas

Notações

Seja $\pi\colon X \to X$ uma permutação de um conjunto finito X.

- Para cada $x \in X$, escrevemos também π_x em lugar de $\pi(x)$.

Permutações finitas

Notações

Seja $\pi\colon X \to X$ uma permutação de um conjunto finito X.

- Para cada $x \in X$, escrevemos também π_x em lugar de $\pi(x)$.
- Da forma mais legível, descrevemos a permutação π por

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ \pi_a & \pi_b & \pi_c & \dots \end{pmatrix}, \qquad \text{suponde que } X = \{a, b, c, \dots\}.$$

Permutações finitas

Notações

Seja $\pi\colon X \to X$ uma permutação de um conjunto finito X.

- Para cada $x \in X$, escrevemos também π_x em lugar de $\pi(x)$.
- Da forma mais legível, descrevemos a permutação π por

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ \pi_a & \pi_b & \pi_c & \dots \end{pmatrix}, \qquad \text{suponde que } X = \{a, b, c, \dots\}.$$

- Ainda mais, se $X = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$, escrevemos simplesmente

$$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

em lugar de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}.$$

Permutações finitas

Notações

Seja $\pi\colon X \to X$ uma permutação de um conjunto finito X.

- Para cada $x \in X$, escrevemos também π_x em lugar de $\pi(x)$.
- Da forma mais legível, descrevemos a permutação π por

  $$\begin{pmatrix} a & b & c & \dots \\ \pi_a & \pi_b & \pi_c & \dots \end{pmatrix}, \qquad \text{suponde que } X = \{a, b, c, \dots\}.$$

- Ainda mais, se $X = [n] = \{1, 2, \dots, n\}$, escrevemos simplesmente

  $$(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$$

  em lugar de

  $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n \end{pmatrix}.$$

- S_n denota o conjunto de todas as permutações de $\{1, 2, \dots, n\}$. Temos $|S_n| = n!$.

Um exemplo

Exemplo

Um exemplo

Exemplo

- $(4, 1, 3, 2)$ denota a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  em $\{1, 2, 3, 4\}$; ou seja, $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 3$ e $\pi(4) = 2$.

Um exemplo

Exemplo

- $(4, 1, 3, 2)$ denota a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

  em $\{1, 2, 3, 4\}$; ou seja, $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 3$ e $\pi(4) = 2$.

- A permutação inversa π^{-1} de permutação π acima obtém-se "trocando as linhas":

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

  ou seja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \end{pmatrix};$$

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & & & \end{pmatrix};$$

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & & \end{pmatrix};$$

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & \end{pmatrix};$$

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma\colon \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

e a permutação composta $\pi \circ \sigma$ é dada por

Mais um exemplo

Exemplo

Considerando as permutações

$$\pi : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

em $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação composta $\sigma \circ \pi$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix};$$

e a permutação composta $\pi \circ \sigma$ é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Voltando ao jogo do 15

O início

O jogo do 15 começa com a permutação $\pi_0 = (1, 2, \ldots, 13, 15, 14)$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{12} & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} \end{pmatrix}.$$

Voltando ao jogo do 15

O início

O jogo do 15 começa com a permutação $\pi_0 = (1, 2, \ldots, 13, 15, 14)$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{12} & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma jogada "vertical"

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	14	12

obtemos π_1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} & \color{red}{12} \end{pmatrix}.$

Voltando ao jogo do 15

O início

O jogo do 15 começa com a permutação $\pi_0 = (1, 2, \ldots, 13, 15, 14)$.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{12} & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} \end{pmatrix}.$$

Fazendo uma jogada “vertical”

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	14	12

obtemos π_1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} & \color{red}{12} \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} & \color{red}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{12} & \color{red}{13} & \color{red}{15} & \color{red}{14} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & \color{red}{13} & \color{red}{14} & \color{red}{15} & \color{red}{12} \end{pmatrix}$$

Decomposição cíclica

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. *Então, os conjuntos*

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \}, \; X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\}, \; \dots$$

($i \notin X_1$*) definem uma partição* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *de* $\{1, 2, \dots, n\}$*, designada por partição cíclica de* π*.*

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. *Então, os conjuntos*

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \}, \; X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\}, \; \dots$$

($i \notin X_1$*) definem uma partição* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *de* $\{1, 2, \dots, n\}$*, designada por partição cíclica de* π*.*

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1,$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$*. Então, os conjuntos*

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \},\ X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\},\ \dots$$

($i \notin X_1$*) definem uma partição* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *de* $\{1, 2, \dots, n\}$*, designada por partição cíclica de* π*.*

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. Então, os conjuntos

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \},\ X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\},\ \dots$$

($i \notin X_1$) definem uma partição $\{X_1, \dots, X_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, designada por partição cíclica de π.

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. Então, os conjuntos

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \}, \; X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\}, \; \dots$$

($i \notin X_1$) definem uma partição $\{X_1, \dots, X_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, designada por partição cíclica de π.

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2\},$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. Então, os conjuntos

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \},\ X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\},\ \dots$$

($i \notin X_1$) definem uma partição $\{X_1, \dots, X_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, designada por partição cíclica de π.

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2\}, \{4$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. *Então, os conjuntos*

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \ldots, \}, \; X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \ldots\}, \; \ldots$$

($i \notin X_1$*) definem uma partição* $\{X_1, \ldots, X_k\}$ *de* $\{1, 2, \ldots, n\}$*, designada por partição cíclica de* π*.*

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2\}, \{4, 6$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. *Então, os conjuntos*

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \},\ X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots \},\ \dots$$

($i \notin X_1$*) definem uma partição* $\{X_1, \dots, X_k\}$ *de* $\{1, 2, \dots, n\}$*, designada por* ***partição cíclica*** *de* π.

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2\}, \{4, 6, 5$

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. Então, os conjuntos

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \},\ X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots\},\ \dots$$

($i \notin X_1$) definem uma partição $\{X_1, \dots, X_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, designada por partição cíclica de π.

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2\}, \{4, 6, 5\}\}$.

A partição cíclica de uma permutação

Teorema

Seja $\pi \in S_n$. Então, os conjuntos

$$X_1 = \{1, \pi(1), \pi(\pi(1)), \dots, \},\ X_2 = \{i, \pi(i), \pi(\pi(i)), \dots \},\ \dots$$

($i \notin X_1$) definem uma partição $\{X_1, \dots, X_k\}$ de $\{1, 2, \dots, n\}$, designada por partição cíclica de π.

Exemplo

A partição cíclica da permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

é dada por $\{\{1, 3, 2\}, \{4, 6, 5\}\}$.

Nota

Para cada $j \leq k$ e $x \in X$: $x \in X_j \implies \pi(x) \in X_j$; de facto, a partição cíclica é a partição *mais fina* com esta propriedade.

Permutações cíclicas

Nota

- Dada a partição cíclica $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de uma permutação π, para cada $j \leq k$ escrevemos os elementos de X_k na forma

$$[x_1, x_2, \ldots, x_m]$$

onde $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3$,$\ldots$,$\pi(x_{m-1}) = x_m$, $\pi(x_m) = x_1$.

Permutações cíclicas

Nota

- Dada a partição cíclica $\{X_1, \dots, X_k\}$ de uma permutação π, para cada $j \leq k$ escrevemos os elementos de X_k na forma
$$[x_1, x_2, \dots, x_m]$$
onde $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3$,. . . ,$\pi(x_{m-1}) = x_m$, $\pi(x_m) = x_1$.
- Por outro lado, cada sequência $[x_1, x_2, \dots, x_m]$ podemos interpretar como uma permutação σ onde
$$\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{m-1}) = x_m, \sigma(x_m) = x_1$$
e $\sigma(x) = x$ para cada outro x. Uma tal permutação diz-se permutação cíclica de comprimento m.

Permutações cíclicas

Nota

- Dada a partição cíclica $\{X_1, \dots, X_k\}$ de uma permutação π, para cada $j \leq k$ escrevemos os elementos de X_k na forma

$$[x_1, x_2, \dots, x_m]$$

  onde $\pi(x_1) = x_2$, $\pi(x_2) = x_3$,...,$\pi(x_{m-1}) = x_m$, $\pi(x_m) = x_1$.
- Por outro lado, cada sequência $[x_1, x_2, \dots, x_m]$ podemos interpretar como uma permutação σ onde

$$\sigma(x_1) = x_2, \sigma(x_2) = x_3, \dots, \sigma(x_{m-1}) = x_m, \sigma(x_m) = x_1$$

  e $\sigma(x) = x$ para cada outro x. Uma tal permutação diz-se permutação cíclica de comprimento m.
- Um ciclo de comprimento 1 é a permutação identidade.

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & \end{pmatrix}.$$

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1, 3, 7]^2 = [1,$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1, 3, 7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ dada por
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$
- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 5]$ é a permutação
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$
- A composta $[1, 3, 7] \circ [2, 8, 3]$ é a permutação
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$
- A composta $[1, 3, 7]^2 = [1, 7,$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7]^2 = [1,7,3]$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7]^2 = [1,7,3]$ e $[1,3,7]^3 =$

Exemplos

Exemplos

- A sequência $[1,3,7]$ corresponde à permutação π do conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,5]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 7 & 4 & 2 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7] \circ [2,8,3]$ é a permutação

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

- A composta $[1,3,7]^2 = [1,7,3]$ e $[1,3,7]^3 = \text{id}$.

Voltando ao jogo do 15

Fazendo uma jogada “vertical”

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	14	12

obtemos π_1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}}$$

Voltando ao jogo do 15

Fazendo uma jogada "vertical"

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	14	12

obtemos π_1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}}_{[12,13,14,15]}$$

Fazendo uma jogada "vertical"

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	
13	15	14	12

obtemos π_1: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 15 & 14 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 13 & 14 & 15 & 12 \end{pmatrix}}_{[12,13,14,15]}$$

De facto, cada "jogada vertical" corresponde a "composição à direita com um 4-ciclo" (e as "jogadas horizontais" não alteram a permutação).

A decomposição de permutações

Teorema

Seja $\pi \in S_n$ *com a partição cíclica* $\{X_1, \ldots, X_k\}$*, e sejam* $\sigma_1, \ldots \sigma_k \in S_n$ *as correspondentes permutações cíclicas. Então,*

$$\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k.$$

A decomposição de permutações

Teorema

Seja $\pi \in S_n$ com a partição cíclica $\{X_1, \dots, X_k\}$, e sejam $\sigma_1, \dots \sigma_k \in S_n$ as correspondentes permutações cíclicas. Então,

$$\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k.$$

A factorização acima designa-se por decomposição de π num produto de ciclos.

A decomposição de permutações

Teorema

Seja $\pi \in S_n$ com a partição cíclica $\{X_1, \ldots, X_k\}$, e sejam $\sigma_1, \ldots \sigma_k \in S_n$ as correspondentes permutações cíclicas. Então,

$$\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k.$$

A factorização acima designa-se por decomposição de π num produto de ciclos.

Definição

Seja $\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ a decomposição de π num produto de cíclos e, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, seja λ_i o número de ciclos de comprimento i nesta decomposição.

A decomposição de permutações

Teorema

Seja $\pi \in S_n$ com a partição cíclica $\{X_1, \dots, X_k\}$, e sejam $\sigma_1, \dots \sigma_k \in S_n$ as correspondentes permutações cíclicas. Então,

$$\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k.$$

A factorização acima designa-se por decomposição de π num produto de ciclos.

Definição

Seja $\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ a decomposição de π num produto de cíclos e, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja λ_i o número de ciclos de comprimento i nesta decomposição. Diz-se que π é do tipo

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}.$$

Nota: $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n.$

A decomposição de permutações

Teorema

Seja $\pi \in S_n$ com a partição cíclica $\{X_1, \dots, X_k\}$, e sejam $\sigma_1, \dots \sigma_k \in S_n$ as correspondentes permutações cíclicas. Então,

$$\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k.$$

A factorização acima designa-se por decomposição de π num produto de ciclos.

Definição

Seja $\pi = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_k$ a decomposição de π num produto de cíclos e, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja λ_i o número de ciclos de comprimento i nesta decomposição. Diz-se que π é do tipo

$$1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}. \qquad \textbf{Nota:} \sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n.$$

Tipicamente não escrevemos os termos com $\lambda_i = 0$.

Exemplos

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

$$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

Exemplos

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1,3,7,4] \circ [2,5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemplos

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1,3,7,4] \circ [2,5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.
- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1,3,6] \circ [2,5,4].$$

Exemplos

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 6] \circ [2, 5, 4].$$

  Assim, π é do tipo

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.
- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 6] \circ [2, 5, 4].$$

  Assim, π é do tipo 3^2.

Exemplos

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.
- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 6] \circ [2, 5, 4].$$

  Assim, π é do tipo 3^2.
- O tipo da permutação identidade em $\{1, 2, 3\}$ é

Exemplos

Exemplos

- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

  Assim, π é do tipo $1^1 2^1 4^1$.
- Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

  A decomposição de π num produto de ciclos é

  $$\pi = [1, 3, 6] \circ [2, 5, 4].$$

  Assim, π é do tipo 3^2.
- O tipo da permutação identidade em $\{1, 2, 3\}$ é 1^3.

Quantas permutações de um certo tipo existem?

Teorema (Fórmula de Cauchy)

O número de permutações do tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}\lambda_1!\dots\lambda_n!}.$$

Quantas permutações de um certo tipo existem?

Teorema (Fórmula de Cauchy)

O número de permutações do tipo $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n} \lambda_1! \dots \lambda_n!}.$$

Indicamos primeiro os ciclos (digamos, temos k ciclos, (ordenados pelo comprimento)

$$[\qquad\qquad\qquad\qquad] \circ [\qquad\qquad\qquad\qquad] \circ \cdots \circ [\qquad\qquad\qquad\qquad].$$

Quantas permutações de um certo tipo existem?

Teorema (Fórmula de Cauchy)

O número de permutações do tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}\lambda_1!\dots\lambda_n!}.$$

Indicamos primeiro os ciclos (digamos, temos k ciclos, (ordenados pelo comprimento)

$$[x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1] \circ [x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_1}^2] \circ \dots \circ [x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k].$$

Há $n!$ maneiras de “distribuir” $1, \dots, n$.

Quantas permutações de um certo tipo existem?

Teorema (Fórmula de Cauchy)

O número de permutações do tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}\lambda_1!\dots\lambda_n!}.$$

Indicamos primeiro os ciclos (digamos, temos k ciclos, (ordenados pelo comprimento)

$$[x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1] \circ [x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_1}^2] \circ \dots \circ [x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k].$$

Há $n!$ maneiras de "distribuir" $1, \dots, n$. Mas alguns destas denotam a mesma permutação. De facto:

Quantas permutações de um certo tipo existem?

Teorema (Fórmula de Cauchy)

O número de permutações do tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}\lambda_1!\dots\lambda_n!}.$$

Indicamos primeiro os ciclos (digamos, temos k ciclos, (ordenados pelo comprimento)

$$[x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1] \circ [x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_1}^2] \circ \dots \circ [x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k].$$

Há $n!$ maneiras de "distribuir" $1, \dots, n$. Mas alguns destas denotam a mesma permutação. De facto:

- Em cada bloco do comprimento i, há i escolhas para o primeiro elemento, assim, para cada permutação dos blocos de comprimento i, i^{λ_i} correspondem à mesma permutação.

Quantas permutações de um certo tipo existem?

Teorema (Fórmula de Cauchy)

O número de permutações do tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$ *é*

$$\frac{n!}{1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}\lambda_1!\dots\lambda_n!}.$$

Indicamos primeiro os ciclos (digamos, temos k ciclos, (ordenados pelo comprimento)

$$[x_1^1, x_2^1, \dots, x_{n_1}^1] \circ [x_1^2, x_2^2, \dots, x_{n_1}^2] \circ \dots \circ [x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n_k}^k].$$

Há $n!$ maneiras de "distribuir" $1, \dots, n$. Mas alguns destas denotam a mesma permutação. De facto:

- Em cada bloco do comprimento i, há i escolhas para o primeiro elemento, assim, para cada permutação dos blocos de comprimento i, i^{λ_i} correspondem à mesma permutação.
- Há $\lambda_i!$ permutações dos blocos de comprimento i.

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n =$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$.

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$[\ ] \circ [\qquad\quad] \circ [\qquad\quad]$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$[3] \circ [\qquad\quad] \circ [\qquad\quad]$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$[3] \circ [1, 4, 7] \circ [\qquad\quad]$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$[3] \circ [1, 4, 7] \circ [2, 5, 6]$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$[3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7]$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} & [3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ = & [3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned}
&[3]\circ[1,4,7]\circ[2,5,6]=[3]\circ[2,5,6]\circ[1,4,7]\\
&=[3]\circ[4,7,1]\circ[2,5,6]=[3]\circ[5,6,2]\circ[4,7,1]
\end{aligned}$$

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} & [3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ = & [3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\ = & [3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \dots . \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$
\begin{aligned}
&[3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\
&= [3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\
&= [3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \ldots .
\end{aligned}
$$

Mas:

$$[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [2] \circ [3,5,6] \circ [1,4,7],$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &[3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ = &[3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\ = &[3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \ldots . \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} &[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [2] \circ [3,5,6] \circ [1,4,7], \\ &[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [3] \circ [5,2,6] \circ [1,4,7]. \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &[3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ &= [3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\ &= [3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \dots . \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] &\neq [2] \circ [3,5,6] \circ [1,4,7], \\ [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] &\neq [3] \circ [5,2,6] \circ [1,4,7]. \end{aligned}$$

Quantas permutações do tipo $1^1 3^2$ existem?

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &[3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ = &[3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\ = &[3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \dots . \end{aligned}$$

Mas:

$$[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [2] \circ [3,5,6] \circ [1,4,7],$$
$$[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [3] \circ [5,2,6] \circ [1,4,7].$$

Quantas permutações do tipo $1^1 3^2$ existem?

$$\frac{7!}{1^1 3^2\, 1!\, 2!} =$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} &[3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ = &[3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\ = &[3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \dots. \end{aligned}$$

Mas:

$$[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [2] \circ [3,5,6] \circ [1,4,7],$$
$$[3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \neq [3] \circ [5,2,6] \circ [1,4,7].$$

Quantas permutações do tipo $1^1 3^2$ existem?

$$\frac{7!}{1^1 3^2\, 1!\, 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3}$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos o tipo $1^1 3^2$; logo $n = 7$. Por exemplo:

$$\begin{aligned} & [3] \circ [1,4,7] \circ [2,5,6] = [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] \\ = & [3] \circ [4,7,1] \circ [2,5,6] = [3] \circ [5,6,2] \circ [4,7,1] \\ = & [3] \circ [4,7,1] \circ [5,6,2] = \dots . \end{aligned}$$

Mas:

$$\begin{aligned} [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] &\neq [2] \circ [3,5,6] \circ [1,4,7], \\ [3] \circ [2,5,6] \circ [1,4,7] &\neq [3] \circ [5,2,6] \circ [1,4,7]. \end{aligned}$$

Quantas permutações do tipo $1^1 3^2$ existem?

$$\frac{7!}{1^1 3^2\, 1!\, 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3} = 7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 280.$$

A paridade de permutações

Transposições

Definição

Um ciclo de comprimento 2 diz-se transposição.

Transposições

Definição

Um ciclo de comprimento 2 diz-se transposição.

Exemplo

Para cara $i < n$, $[i, i+1]$ é uma transposição. Dada uma permutação $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, então

$$\pi \circ [i, i+1] = (\pi_1, \ldots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \pi_i, \ldots, \pi_n).$$

Transposições

Definição

Um ciclo de comprimento 2 diz-se transposição.

Exemplo

Para cara $i < n$, $[i, i+1]$ é uma transposição. Dada uma permutação $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$, então

$$\pi \circ [i, i+1] = (\pi_1, \ldots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \pi_i, \ldots, \pi_n).$$

Nota

Para cada transposição τ, $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_n$; ou seja, $\tau^{-1} = \tau$.

Transposições

Definição

Um ciclo de comprimento 2 diz-se transposição.

Exemplo

Para cara $i < n$, $[i, i+1]$ é uma transposição. Dada uma permutação $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, então

$$\pi \circ [i, i+1] = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \pi_i, \dots, \pi_n).$$

Nota

Para cada transposição τ, $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_n$; ou seja, $\tau^{-1} = \tau$.

Teorema

Cada permutação é uma composta de transposições.

Transposições

Definição

Um ciclo de comprimento 2 diz-se transposição.

Exemplo

Para cara $i < n$, $[i, i+1]$ é uma transposição. Dada uma permutação $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, então

$$\pi \circ [i, i+1] = (\pi_1, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \pi_i, \dots, \pi_n).$$

Nota

Para cada transposição τ, $\tau \circ \tau = \mathrm{id}_n$; ou seja, $\tau^{-1} = \tau$.

Teorema

Cada permutação é uma composta de transposições.

Para cada ciclo $\sigma = [x_1, x_2, \dots, x_k]$:

$$\sigma = [x_1, x_2] \circ [x_2, x_3] \circ \cdots \circ [x_{k-1} x_k].$$

Exemplo

Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Exemplo

Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

A decomposição de π num produto de ciclos é

$$\pi = [1,3,7,4] \circ [2,5] \circ [6].$$

Nota: A partição cíclica de π é $\{\{1,3,4,7\},\{2,5\},\{6\}\}$.

Exemplo

Exemplo

Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

A decomposição de π num produto de ciclos é

$$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5] \circ [6].$$

Portanto:

$$\pi = [1, 3, 7, 4] \circ [2, 5]$$

Nota: A partição cíclica de π é $\{\{1, 3, 4, 7\}, \{2, 5\}, \{6\}\}$.

Exemplo

Exemplo

Consideramos a permutação π dada por $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$.

A decomposição de π num produto de ciclos é

$$\pi = [1,3,7,4] \circ [2,5] \circ [6].$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \pi &= [1,3,7,4] \circ [2,5] \\ &= [1,3] \circ [3,7] \circ [7,4] \circ [2,5]. \end{aligned}$$

Nota: A partição cíclica de π é $\{\{1,3,4,7\},\{2,5\},\{6\}\}$.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade:

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$

O número das inversões é *par*.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$

O número das inversões é *ímpar*.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $\pi = (1, 3, 2, 5, 4, 6)$. As inversões de π são

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $\pi = (1, 3, 2, 5, 4, 6)$. As inversões de π são $(3, 2)$ e $(5, 4)$,

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $\pi = (1, 3, 2, 5, 4, 6)$. As inversões de π são $(3, 2)$ e $(5, 4)$, logo $I(\pi) = 2$ e $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$; portanto, π é par.

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $k < m$ e consideramos a transposição $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & m & \ldots & n \\ 1 & \ldots & m & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$.
Temos as seguintes inversões:

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $k < m$ e consideramos a transposição $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & m & \ldots & n \\ 1 & \ldots & m & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$.
Temos as seguintes inversões:

- Para cada $k \leq l < m$: (m, l) (obtemos $m - k$ inversões).

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $k < m$ e consideramos a transposição $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & m & \ldots & n \\ 1 & \ldots & m & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$.
Temos as seguintes inversões:

- Para cada $k \leq l < m$: (m, l) (obtemos $m - k$ inversões).
- Para cara $k < l < m$: (l, k) (obtemos $m - k - 1$ inversões).

A paridade de uma permutação

Definição

Seja $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ uma permutação.

- O par (π_i, π_j) com $i < j$ e $\pi_i > \pi_j$ diz-se por inversão de π.
- O número de todas as inversões de π denota-se por $I(\pi)$.
- O número $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{I(\pi)}$ designa-se por sinal de π.
- Tipos de paridade: a permutação π diz-se par quando $\operatorname{sgn}(\pi) = 1$ e π diz-se ímpar quando $\operatorname{sgn}(\pi) = -1$

Exemplo

Seja $k < m$ e consideramos a transposição $\tau = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & \ldots & m & \ldots & n \\ 1 & \ldots & m & \ldots & k & \ldots & n \end{pmatrix}$.
Temos as seguintes inversões:

- Para cada $k \leq l < m$: (m, l) (obtemos $m - k$ inversões).
- Para cara $k < l < m$: (l, k) (obtemos $m - k - 1$ inversões).

Portanto, τ tem $2(m - l) - 1$ inversões, logo $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{-1, 1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad \textit{e} \quad \operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{-1, 1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad e \quad \operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{-1,1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \qquad e \quad \operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

- Para cada permutação π: $\quad \operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)^{-1} = \operatorname{sgn}(\pi)$.

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\operatorname{sgn}\colon S_n \to \{-1, 1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\operatorname{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad e \quad \operatorname{sgn}(\pi \circ \sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

- Para cada permutação π: $\operatorname{sgn}(\pi^{-1}) = \operatorname{sgn}(\pi)^{-1} = \operatorname{sgn}(\pi)$.
- Recordamos: para cada transposição τ, $\operatorname{sgn}(\tau) = -1$.

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{-1,1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad \textit{e} \quad \mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

- Para cada permutação π: $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi)^{-1} = \mathrm{sgn}(\pi)$.
- Recordamos: para cada transposição τ, $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
- Para cada ciclo σ de comprimento k, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$ porque σ é composta de $k-1$ transposições.

  Recordamos:

  $$[x_1, x_2, \ldots, x_k] = [x_1, x_2] \circ [x_2, x_3] \circ \cdots \circ [x_{k-1} x_k].$$

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{-1, 1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad \textit{e} \quad \mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

- Para cada permutação π: $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi)^{-1} = \mathrm{sgn}(\pi)$.
- Recordamos: para cada transposição τ, $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
- Para cada ciclo σ de comprimento k, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$ porque σ é composta de $k-1$ transposições.
- Seja π uma permutação do tipo $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \ldots n^{\lambda_n}$. Então,
$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{\lambda_2 + \lambda_4 + \cdots}.$$

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{-1,1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad e \quad \mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

- Para cada permutação π: $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi)^{-1} = \mathrm{sgn}(\pi)$.
- Recordamos: para cada transposição τ, $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
- Para cada ciclo σ de comprimento k, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$ porque σ é composta de $k-1$ transposições.
- Seja π uma permutação do tipo $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\dots n^{\lambda_n}$. Então,
$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\dots}.$$

Nota

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $P_n = \{\pi \in S_n \mid \pi \text{ é par}\}$.

Ainda sobre o sinal

Teorema

A função $\mathrm{sgn}\colon S_n \to \{-1,1\}$ *satisfaz, para todos os* $\pi, \sigma \in S_n$,

$$\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_n) = 1 \quad e \quad \mathrm{sgn}(\pi \circ \sigma) = \mathrm{sgn}(\pi) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma).$$

Portanto:

- Para cada permutação π: $\mathrm{sgn}(\pi^{-1}) = \mathrm{sgn}(\pi)^{-1} = \mathrm{sgn}(\pi)$.
- Recordamos: para cada transposição τ, $\mathrm{sgn}(\tau) = -1$.
- Para cada ciclo σ de comprimento k, $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^{k-1}$ porque σ é composta de $k-1$ transposições.
- Seja π uma permutação do tipo $1^{\lambda_1} 2^{\lambda_2} \dots n^{\lambda_n}$. Então,
$$\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots}.$$

Nota

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $P_n = \{\pi \in S_n \mid \pi \text{ é par}\}$. Para todos os $\pi, \sigma \in P_n$, também $\pi \circ \sigma \in P_n$ e $\pi^{-1} \in P_n$.

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nota: $\mathrm{sgn}(\pi_0) = -1$ (π_0 tem só uma inversão).

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nota: $\operatorname{sgn}(\pi_0) = -1$ $\quad$ (π_0 tem só uma inversão).

Também recordamos que cada "jogada vertical" corresponde a "compor à direita com um 4-ciclo".

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nota: $\mathrm{sgn}(\pi_0) = -1$ $\quad$ (π_0 tem só uma inversão).

Também recordamos que cada "jogada vertical" corresponde a "compor à direita com um 4-ciclo". Tal que o espaço vazio fica na última posição, o número de "jogadas verticais" tem de ser *par*.

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \dots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nota: $\mathrm{sgn}(\pi_0) = -1$ (π_0 tem só uma inversão).

Depois de $2n$ jogadas verticais obtemos a permutação

$$\pi_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{2n} \qquad \text{(com 4-ciclos } \sigma_i\text{), e}$$

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & \color{red}{15} & \color{red}{14} \end{pmatrix}.$$

Nota: $\operatorname{sgn}(\pi_0) = -1$ (π_0 tem só uma inversão).

Depois de $2n$ jogadas verticais obtemos a permutação

$$\pi_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{2n} \qquad \text{(com 4-ciclos } \sigma_i\text{), e}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\pi_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{2n}) &= \operatorname{sgn}(\pi_0) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_1) \cdot \cdots \cdot \operatorname{sgn}(\sigma_{2n}) \\ &= (-1) \cdot (-1)^{2n} = -1. \end{aligned}$$

(Não) resolvendo o jogo do 15

Missão impossível

Recordamos que o jogo do 15 começa com a permutação

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

$$\pi_0 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 1 & 2 & \ldots 11 & 12 & 13 & 15 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nota: $\mathrm{sgn}(\pi_0) = -1$ (π_0 tem só uma inversão).

Depois de $2n$ jogadas verticais obtemos a permutação

$$\pi_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{2n} \qquad \text{(com 4-ciclos } \sigma_i\text{), e}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(\pi_0 \circ \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_{2n}) &= \mathrm{sgn}(\pi_0) \cdot \mathrm{sgn}(\sigma_1) \cdot \cdots \cdot \mathrm{sgn}(\sigma_{2n}) \\ &= (-1) \cdot (-1)^{2n} = -1. \end{aligned}$$

Logo, não podemos obter a permutação id_{15} porque $\mathrm{sgn}(\mathrm{id}_{15}) = 1$.

Permutações pares

Nota

O jogo do 15 é impossível se a permutação inicial é ímpar.

Permutações pares

Nota

O jogo do 15 é impossível se a permutação inicial é ímpar. Pode-se mostrar que o jogo tem uma solução se a permutação inicial é par.

Permutações pares

Nota

O jogo do 15 é impossível se a permutação inicial é ímpar. Pode-se mostrar que o jogo tem uma solução se a permutação inicial é par. Então, quantas permutações pares existem?

Permutações pares

Nota

O jogo do 15 é impossível se a permutação inicial é ímpar. Pode-se mostrar que o jogo tem uma solução se a permutação inicial é par. Então, quantas permutações pares existem?

Teorema

Para cada $n \geq 2$, há tantas permutações pares como ímpares.

Permutações pares

Nota

O jogo do 15 é impossível se a permutação inicial é ímpar. Pode-se mostrar que o jogo tem uma solução se a permutação inicial é par. Então, quantas permutações pares existem?

Teorema

Para cada $n \geq 2$, há tantas permutações pares como ímpares.

Demonstração.

A função

$$P_n \longrightarrow \{\text{permutações ímpares}\}, \quad \pi \longmapsto \overbrace{[1,2] \circ \pi}^{\text{sgn}([1,2]\circ\pi)=(-1)\cdot\text{sgn}(\pi)}$$

é invertível com a função inversa

$$\{\text{permutações ímpares}\} \longrightarrow P_n, \quad \pi \longmapsto [1,2] \circ \pi. \qquad \square$$

Permutações pares

Nota

O jogo do 15 é impossível se a permutação inicial é ímpar. Pode-se mostrar que o jogo tem uma solução se a permutação inicial é par. Então, quantas permutações pares existem?

Teorema

Para cada $n \geq 2$, há tantas permutações pares como ímpares. Portanto, para $n \geq 2$, $|P_n| = \frac{n!}{2}$.

Demonstração.

A função

$$P_n \longrightarrow \{\text{permutações ímpares}\}, \quad \pi \longmapsto \overbrace{[1,2] \circ \pi}^{\operatorname{sgn}([1,2]\circ\pi)=(-1)\cdot\operatorname{sgn}(\pi)}$$

é invertível com a função inversa

$$\{\text{permutações ímpares}\} \longrightarrow P_n, \quad \pi \longmapsto [1,2] \circ \pi. \qquad \square$$