Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Índice

Alguns conceitos métricos

Passeios em grafos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Passeios em grafos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)).

Passeios em grafos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \ldots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \ldots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \ldots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)). O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P e v_k designa-se por vértice final do passeio P, os vértices $v_1, \ldots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

Passeios em grafos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Um passeio em G é uma sequência

$$P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_k, v_k)$$

finita onde $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$, $e_1, e_2, \dots, e_k \in E$ e, para cada $i = 1, 2, \dots, k$, $\psi(e_i) = v_{i-1}v_i$.

Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k (ou um passeio-(v_0, v_k)). O vértice v_0 designa-se por vértice inicial do passeio P e v_k designa-se por vértice final do passeio P, os vértices $v_1, \dots, v_{k-1}$ designam-se por vértices intermédios.

Nota

Num grafo simples, um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices; isto é, basta considerar

$$P = (v_0, v_1, \dots, v_k).$$

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final $(v_0 = v_k)$. Um trajeto fechado diz-se também circuito.

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final $(v_0 = v_k)$. Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo P em G é um "caminho fechado"; da forma mais rigorosa,

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo P em G é um "caminho fechado"; da forma mais rigorosa,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final $(v_0 = v_k)$. Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo P em G é um "caminho fechado"; da forma mais rigorosa,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou

Trajetos, caminhos, circuitos e ciclos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo.

- Um trajeto é um passeio sem arestas repetidas.
- Um trajeto diz-se fechado quando tem pelo menos uma aresta e o vértice inicial coincide com o vértice final ($v_0 = v_k$). Um trajeto fechado diz-se também circuito.
- Um caminho é um trajeto que não repete vértices.
- Um ciclo P em G é um "caminho fechado"; da forma mais rigorosa,
  1. P é um *lacete* $P = (v_0, e, v_0)$, ou
  2. $P = (v_0, a, v_1, b, v_0)$ com $v_0 \neq v_1$ e $a \neq b$, ou
  3. $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k, e_{k+1}, v_0)$ é um passeio com $k \geq 2$ e $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$ é um caminho.

Comprimento de passeios

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o comprimento de P é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Comprimento de passeios

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \dots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o comprimento de P é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

Comprimento de passeios

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e seja $P = (v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots e_k, v_k)$ um passeio de G. Então, o comprimento de P é

$$\text{comp}(P) = k;$$

ou seja, $\text{comp}(P)$ é o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui.

Nota

No caso dos caminhos e dos trajetos, o comprimento coincide com o número de arestas.

Exemplos

Uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

Distância entre vértices

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideramos o conjunto $\mathcal{P}_{x,y} = \{\text{todos os caminhos entre } x \text{ e } y\}$.

Designa-se por distância entre vértices de G a função

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases} \end{aligned}$$

Distância entre vértices

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). Para $x, y \in V$, consideramos o conjunto $\mathcal{P}_{x,y} = \{$todos os caminhos entre x e $y\}$.

Designa-se por distância entre vértices de G a função

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}\colon V \times V &\longrightarrow \{0, 1, \dots, \nu(G), \infty\} \\
(x, y) &\longmapsto \begin{cases} \min\{\operatorname{comp}(P) \mid P \in \mathcal{P}_{x,y}\} & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \varnothing, \\ \infty & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \varnothing. \end{cases}
\end{aligned}$$

Nota

Tem-se

$$\operatorname{dist}(x, x) = 0, \quad \operatorname{dist}(x, y) + \operatorname{dist}(y, z) \geq \operatorname{dist}(x, z),$$

e $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{dist}(y, x)$, para todos os $x, y, z \in V$.

Existem caminhos longos. . .

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ *um grafo simples finito.*

- G *contém um caminho* P *tal que* $comp(P) \geq \delta(G)$.

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G.

$\square$

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G. Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (senão, podia-se prolongar o caminho),

□

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G. Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (senão, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

□

Existem caminhos longos. . .

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G. Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (senão, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\text{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$.

$\square$

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G. Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (senão, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\mathrm{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i)$ é um ciclo (nota: $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) $\square$

Existem caminhos longos...

Teorema

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples finito.

- *G contém um caminho P tal que $comp(P) \geq \delta(G)$.*
- *Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um ciclo C tal que $comp(C) \geq \delta(G) + 1$.*

Demonstração.

Seja $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ um caminho de maior comprimento em G. Portanto, todos os vizinhos de v_k pertencem ao caminho (senão, podia-se prolongar o caminho), portanto,

$$\text{comp}(P) \geq d(v_k) \geq \delta(G).$$

Seja $i_0 = \min\{i \mid v_i v_k \in E\}$. Então, $C = (v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k, v_i)$ é um ciclo (nota: $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_k)$ tem pelo menos três vertices porque $d(v_k) \geq 2$) de comprimento $d(v_k) + 1 \geq \delta(G) + 1$. $\square$

Cintura e excentricidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

Cintura e excentricidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- A cintura $g(G)$ de G é o comprimento do circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.

Cintura e excentricidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- A cintura $g(G)$ de G é o comprimento do circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por excentricidade de v e denota-se por $e(v)$. Mais formalmente, $e(v) = \max\limits_{u \in V} dist_G(u, v)$.

Cintura e excentricidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- A cintura $g(G)$ de G é o comprimento do circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por excentricidade de v e denota-se por $e(v)$. Mais formalmente, $e(v) = \max\limits_{u \in V} dist_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro de G e denota-se por $\mathrm{diam}(G)$.

  Nota: Se $V \neq \varnothing$: $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.

Cintura e excentricidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- A cintura $g(G)$ de G é o comprimento do circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por excentricidade de v e denota-se por $e(v)$. Mais formalmente, $e(v) = \max\limits_{u \in V} dist_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro de G e denota-se por $\text{diam}(G)$.

  Nota: Se $V \neq \varnothing$: $\text{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- A menor excentricidade dos vértices de G designa-se por raio e denota-se por $r(G)$.

Cintura e excentricidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

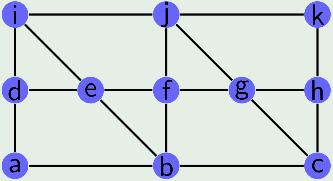
- A cintura $g(G)$ de G é o comprimento do circuito de menor comprimento em G se existe pelo menos um circuito em G; caso contrario $g(G) = \infty$.
- Seja $v \in V$. A maior distância entre v e todos os vértices de G designa-se por excentricidade de v e denota-se por $e(v)$. Mais formalmente, $e(v) = \max\limits_{u \in V} dist_G(u, v)$.
- A maior excentricidade dos seus vértices designa-se por diâmetro de G e denota-se por $\mathrm{diam}(G)$.

  Nota: Se $V \neq \varnothing$: $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- A menor excentricidade dos vértices de G designa-se por raio e denota-se por $r(G)$.
- Um vértice v diz-se central quando $e(v) = r(G)$. O conjunto dos vértices centrais designa-se por centro do grafo.

Um exemplo (concreto)

Exemplo

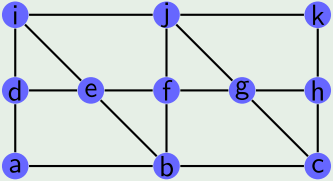
Considere o seguinte grafo G.



Um exemplo (concreto)

Exemplo

Considere o seguinte grafo G.

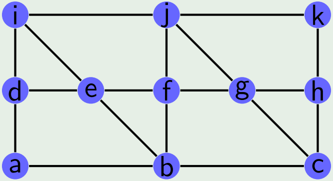


1. Determine a cintura do grafo G.

Um exemplo (concreto)

Exemplo

Considere o seguinte grafo G.

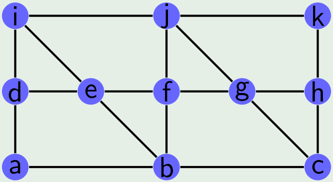


1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.

Um exemplo (concreto)

Exemplo

Considere o seguinte grafo G.

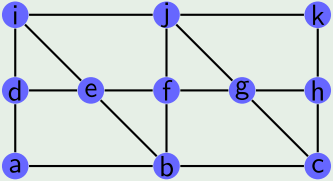


1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.
3. Determine o raio e o diâmetro de G.

Um exemplo (concreto)

Exemplo

Considere o seguinte grafo G.



1. Determine a cintura do grafo G.
2. Determine a excentricidade dos vértices de G.
3. Determine o raio e o diâmetro de G.
4. Determine o centro de G.

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x, y \in X} d(x, y)$.

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min\limits_{x \in V} \max\limits_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max\limits_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \mathrm{diam}(G)$.

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Caso 1: Suponhamos que existem $x, y \in V$ com $\operatorname{dist}(x, y) = \infty$. Então, para todo o $z \in V$,

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \mathrm{diam}(G)$.

Caso 1: Suponhamos que existem $x, y \in V$ com $\mathrm{dist}(x, y) = \infty$. Então, para todo o $z \in V$, $\mathrm{dist}(z, x) = \infty$ ou $\mathrm{dist}(z, y) = \infty$ e por isso $r(G) = \infty$ e $\mathrm{diam}(G) = \infty$.

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \mathrm{diam}(G)$.

Caso 2: Suponhamos que $\mathrm{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$.

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$. *Então,*

$$r(G) \leq \operatorname{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min\limits_{x \in V} \max\limits_{y \in V} d(x, y)$.
- $\operatorname{diam}(G) = \max\limits_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\operatorname{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \operatorname{diam}(G)$.

Caso 2: Suponhamos que $\operatorname{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$. Sejam x, y os vértices com a maior distância $\operatorname{dist}(x, y) = \operatorname{diam}(G)$ e seja z um vértice central (ou seja, $e(z) = r(G)$).

Mais um exemplo

Exemplo

Seja $G = (V, E, \psi)$ *um grafo finito com* $V \neq \varnothing$*. Então,*

$$r(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2r(G).$$

Recordamos que:

- $r(G) = \min_{x \in V} \max_{y \in V} d(x, y)$.
- $\mathrm{diam}(G) = \max_{x,y \in X} d(x, y)$.
- $\mathrm{dist}(x, y) =$ comprimento do menor caminho (ou ∞).

Logo, $r(G) \leq \mathrm{diam}(G)$.

Caso 2: Suponhamos que $\mathrm{dist}(x, y) < \infty$, para todos os $x, y \in V$. Sejam x, y os vértices com a maior distância $\mathrm{dist}(x, y) = \mathrm{diam}(G)$ e seja z um vértice central (ou seja, $e(z) = r(G)$). Portanto:

$$\mathrm{diam}(G) = \mathrm{dist}(x, y) \leq \mathrm{dist}(x, z) + \mathrm{dist}(z, y) \leq 2\, e(z) = 2r(G).$$

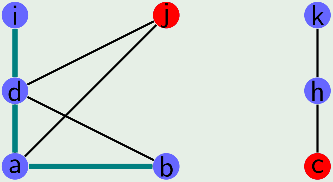
Conexidade

A relação de conexidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos se existe um caminho entre eles em G.

Exemplo



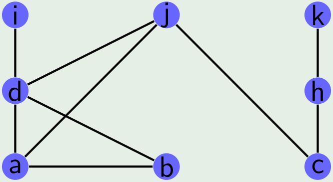
Por exemplo: i e b são conexos, e j e c não são conexos.

A relação de conexidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos se existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos.

Exemplo



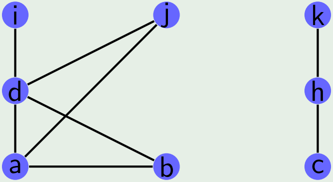
Grafo conexo

A relação de conexidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos se existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se desconexo.

Exemplo



Grafo desconexo

A relação de conexidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos se existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se desconexo.

Nota

A *relação de conexidade* definida por

$$x \sim y \text{ quando } x \text{ e } y \text{ são conexos}$$

é uma relação de equivalência em V.

A relação de conexidade

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Os vértices $u, v \in V$ dizem-se conexos se existe um caminho entre eles em G. O grafo G com pelo menos um vértice diz-se conexo quando todos os seus vértices são conexos. Um grafo não conexo diz-se desconexo.

Nota

A *relação de conexidade* definida por

$$x \sim y \text{ quando } x \text{ e } y \text{ são conexos}$$

é uma relação de equivalência em V.

Nota

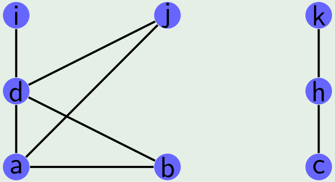
Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo conexo de ordem n. Então, $|E| \geq n - 1$ (ver a solução do exercício 25).

Componentes conexas

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas.

Exemplo

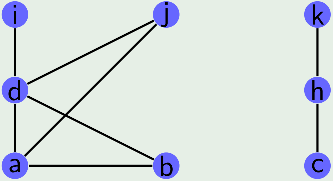


Componentes conexas

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas. O número de componentes conexas de G denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

Exemplo



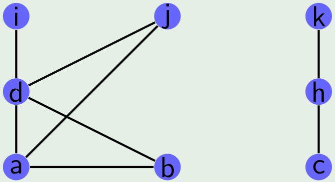
$\mathrm{cc}(G) = 2.$

Componentes conexas

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas. O número de componentes conexas de G denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

Exemplo



$\mathrm{cc}(G) = 2.$

Nota

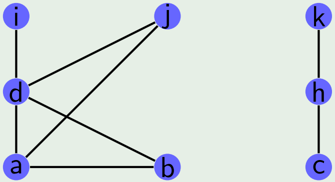
- Um grafo G é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.

Componentes conexas

Definição

Os subgrafos induzidos pelas classes de equivalência da relação de conexidade dizem-se componentes conexas. O número de componentes conexas de G denota-se por $\mathrm{cc}(G)$.

Exemplo



$\mathrm{cc}(G) = 2.$

Nota

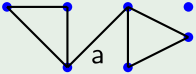
- Um grafo G é conexo se e só se $\mathrm{cc}(G) = 1$.
- As componentes conexas são precisamente os subgrafos (induzidos) conexos *maximais*.

Pontes

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma ponte (ou uma aresta de corte) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

Exemplo

G: 

A arresta a é uma ponte de G.

Pontes

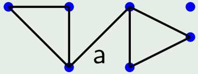
Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma ponte (ou uma aresta de corte) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

Ou seja, a é uma ponte de G se a eliminação de a aumenta o número de componentes de G.

Exemplo

G:



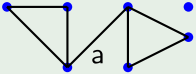
A arresta a é uma ponte de G.

Pontes

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo. Uma aresta $a \in E$ diz-se uma ponte (ou uma aresta de corte) quando $\mathrm{cc}(G - a) > \mathrm{cc}(G)$.

Exemplo

G: 

A arresta a é uma ponte de G.

Teorema

Sejam $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $a \in E$ com $\psi(a) = \{u, v\}$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) *A aresta a é uma ponte de G*

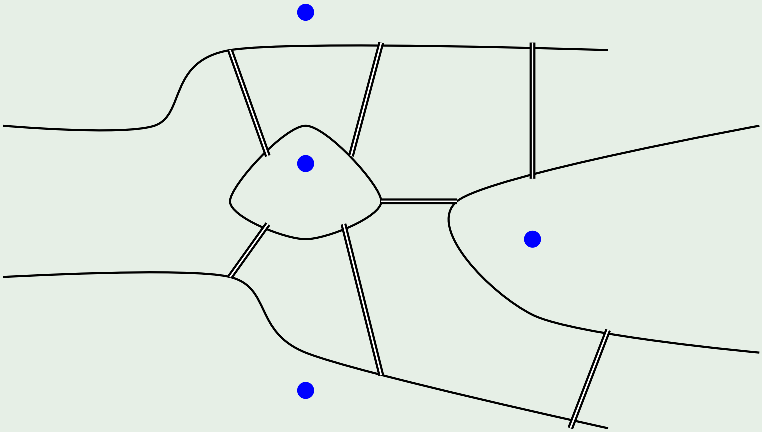
(ii) $\mathrm{cc}(G - a) = \mathrm{cc}(G) + 1$ *(supondo que G é finito).*

(iii) *Os vértices u e v não são conexos em $G - a$.*

(iv) *A aresta a não pertence a nenhum circuito de G.*

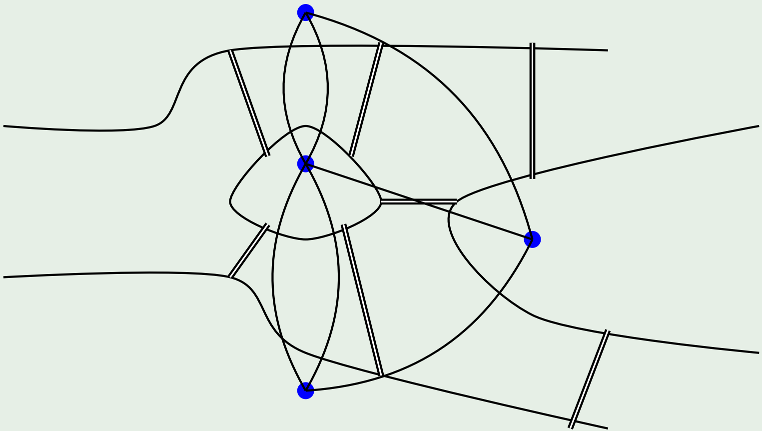
Voltando ao Königsberg

Exemplo



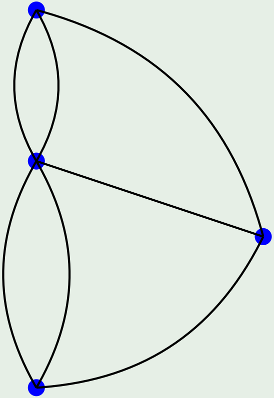
Voltando ao Königsberg

Exemplo



Voltando ao Königsberg

Exemplo



Voltando ao Königsberg

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em G diz-se circuito de Euler quando contém todas as arestas de G.

Voltando ao Königsberg

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um circuito em G diz-se circuito de Euler quando contém todas as arestas de G.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Voltando ao Königsberg

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

$\square$

Voltando ao Königsberg

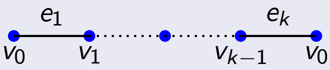
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha que G tem um circuito de Euler, digamos

P:



$\square$

Voltando ao Königsberg

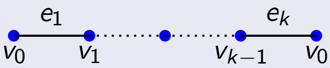
Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha que G tem um circuito de Euler, digamos

P:



Se um vértice v aparece n vezes em P, então $d(v) = 2n$ é par.

□

Voltando ao Königsberg

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par.

$\square$

Voltando ao Königsberg

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

$$P:\quad v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{———}} v_k$$

um trajeto de maior comprimento em G.

$\square$

Voltando ao Königsberg

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

$$P: \quad v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{———}} v_k$$

um trajeto de maior comprimento em G. Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$.

$\square$

Voltando ao Königsberg

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja

$$P\colon\quad v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1 \cdots\cdots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{———}} v_k$$

um trajeto de maior comprimento em G. Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de P; neste caso existe uma aresta $v \text{———} v_i$ fora de P com v_i em P.

□

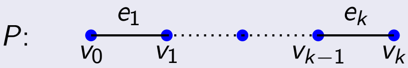
Voltando ao Königsberg

Teorema

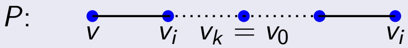
Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um circuito de Euler se e só se todos os vértices de G tem grau par.

Demonstração.

Suponha agora que todos os vértices de G tem grau par. Seja



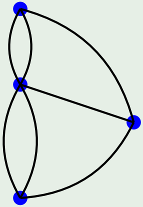
um trajeto de maior comprimento em G. Logo, P contém todas as arestas com um vértice em v_k. Logo, como $d(v_k)$ é par, $v_0 = v_k$. Suponha que existe uma aresta fora de P; neste caso existe uma aresta v — v_i fora de P com v_i em P. Então,



é um trajeto mais comprido, uma contradição. $\square$

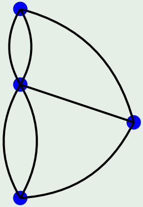
Voltando ao Königsberg

Exemplo



Voltando ao Königsberg

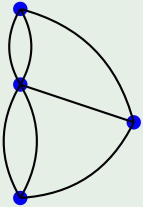
Exemplo



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente.

Voltando ao Königsberg

Exemplo



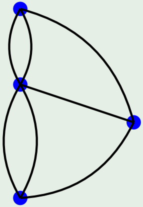
Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em G diz-se trajeto de Euler quando contém todas as arestas de G.

Voltando ao Königsberg

Exemplo



Os vértices tem grau 3, 5, 3 e 3, respetivamente.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito. Um trajeto em G diz-se trajeto de Euler quando contém todas as arestas de G.

Teorema

Seja G um grafo finito e conexo. Então, G tem um trajeto de Euler se e só o número de vértices de grau ímpar é 0 ou 2.

Grafos particulares

Grafos completos e grafos nulos

Definição

Um grafo simples G diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes.

Grafos completos e grafos nulos

Definição

Um grafo simples G diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se nulo quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

Grafos completos e grafos nulos

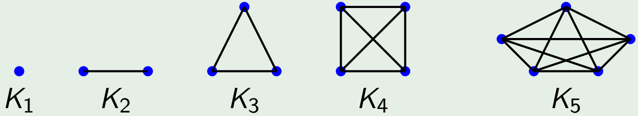
Definição

Um grafo simples G diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se nulo quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem n. Denota-se este grafo por K_n, e $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Exemplos (Grafos completos)



Grafos completos e grafos nulos

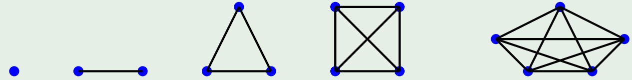
Definição

Um grafo simples G diz-se completo quando todos os pares de vértices são adjacentes. Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se nulo quando $E = \varnothing$; ou seja, quando não tem arestas.

Nota

- A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo de ordem n. Denota-se este grafo por K_n, e $\epsilon(K_n) = \binom{n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$.
- Cada grafo nulo é simples, de facto, os grafos nulos são precisamente os grafos complementares dos grafos completos. Portanto, denotamos o grafo nulo com n vértices por $K_n^{\complement}$.

Exemplos (Grafos completos)



K_1 K_2 K_3 K_4 K_5

Grafos regulares

Definição

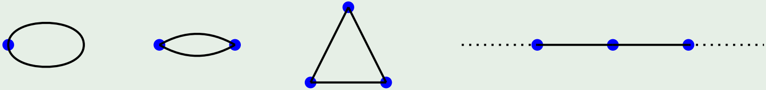
Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se *k-regular* quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se *regular* quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Grafos regulares

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se *k-regular* quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se regular quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)

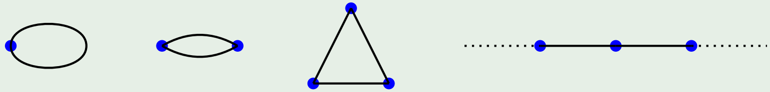


Grafos regulares

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se k-regular quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se regular quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



Nota

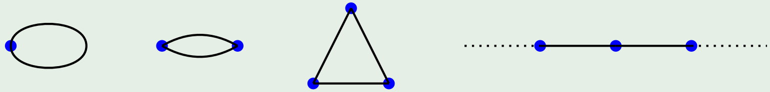
- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.

Grafos regulares

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se k-regular quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se regular quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



Nota

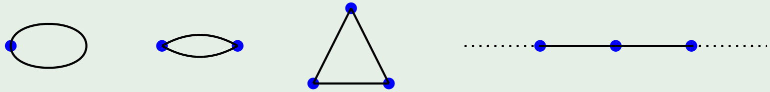
- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular.

Grafos regulares

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se *k-regular* quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se *regular* quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



Nota

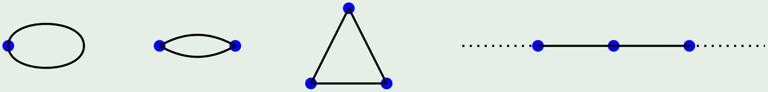
- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples G é $(n-1)$-regular se e só se G é completo.

Grafos regulares

Definição

Seja $k \in \mathbb{N}$. Um grafo G diz-se *k-regular* quando todos os seus vértices têm grau k. Um grafo G diz-se *regular* quando G é k-regular para algum $k \in \mathbb{N}$.

Exemplos (Grafos 2-regulares)



Nota

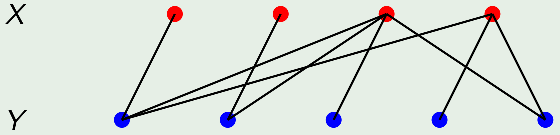
- Os grafos 3-regulares designam-se por grafos cúbicos.
- O grafo K_n é $(n-1)$-regular. De facto, um grafo simples G é $(n-1)$-regular se e só se G é completo.
- Um grafo G é 0-regular se e só se G é um grafo nulo.

Grafos bipartidos

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se bipartido quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos

Exemplo

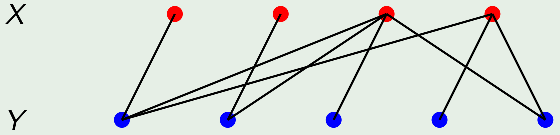


Grafos bipartidos

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se bipartido quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos (isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y; ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y).

Exemplo



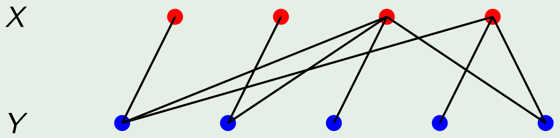
Grafos bipartidos

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ diz-se bipartido quando existem subconjuntos não-vazios $X, Y \subseteq V$ de V com $V = X \cup Y$ e $X \cap Y = \varnothing$ tais que os grafos $G[X]$ e $G[Y]$ são nulos (isto é, não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y; ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y).

Uma tal partição $\{X, Y\}$ do conjunto V dos vértices de G designa-se por bipartição dos vértices. Neste caso denota-se G por (X, Y, E, ψ) (ou simplesmente (X, Y, E) se G é simples).

Exemplo



Grafos bipartidos

Teorema

G[a] é bipartido $\iff$ G não tem circuitos[b] de comprimento ímpar.

[a] com pelo menos dois vértices
[b] circuito = passeio fechado sem repetição de arestas.

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

$\square$

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com partição $\{X, Y\}$) e seja

$$P:\quad v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{———}} v_0$$

um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$.

$\square$

Grafos bipartidos

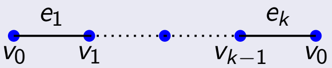
Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com partição $\{X, Y\}$) e seja

P:



um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$.

$\square$

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com partição $\{X, Y\}$) e seja

$$P:\quad v_0 \overset{e_1}{\text{———}} v_1 \cdots\cdots \bullet \cdots\cdots v_{k-1} \overset{e_k}{\text{———}} v_0$$

um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, ..., $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices e por isso

$\square$

Grafos bipartidos

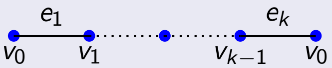
Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha que G é bipartido (com partição $\{X, Y\}$) e seja

P:



um circuito em G. Suponhamos que $v_0 \in X$. Então, $v_1 \in Y$, $v_2 \in X$, $\ldots$, $v_{k-1} \in Y$ e $v_0 \in X$. Portanto, há um número ímpar de vértices e por isso um número par de arestas.

$\square$

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo).

$\square$

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideramos

$$X = \{x \in V \mid \mathrm{dist}(x, x_0) \text{ é par}\} \neq \varnothing,$$

$\square$

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideramos

$$X = \{x \in V \mid \text{dist}(x, x_0) \text{ é par}\}, \; Y = \{y \in V \mid \text{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

$\square$

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideramos

$$X = \{x \in V \mid \text{dist}(x, x_0) \text{ é par}\},\ Y = \{y \in V \mid \text{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$).

$\square$

Grafos bipartidos

Teorema

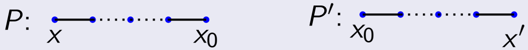
G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideramos

$$X = \{x \in V \mid \text{dist}(x, x_0) \text{ é par}\},\ Y = \{y \in V \mid \text{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam



caminhos de menor comprimento (necessariamente par).

□

Grafos bipartidos

Teorema

G é bipartido $\iff$ G não tem circuitos de comprimento ímpar.

Demonstração.

Suponha agora que $G = (V, E, \psi)$ não tem circuitos de comprimento ímpar (e G é conexo). Seja $x_0 \in V$. Consideramos

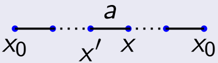
$$X = \{x \in V \mid \text{dist}(x, x_0) \text{ é par}\}, \; Y = \{y \in V \mid \text{dist}(y, x_0) \text{ é ímpar}\} \neq \varnothing.$$

Suponhamos que existem $x, x' \in X$ adjacentes (com $a \in E$). Sejam

P: 

P': 

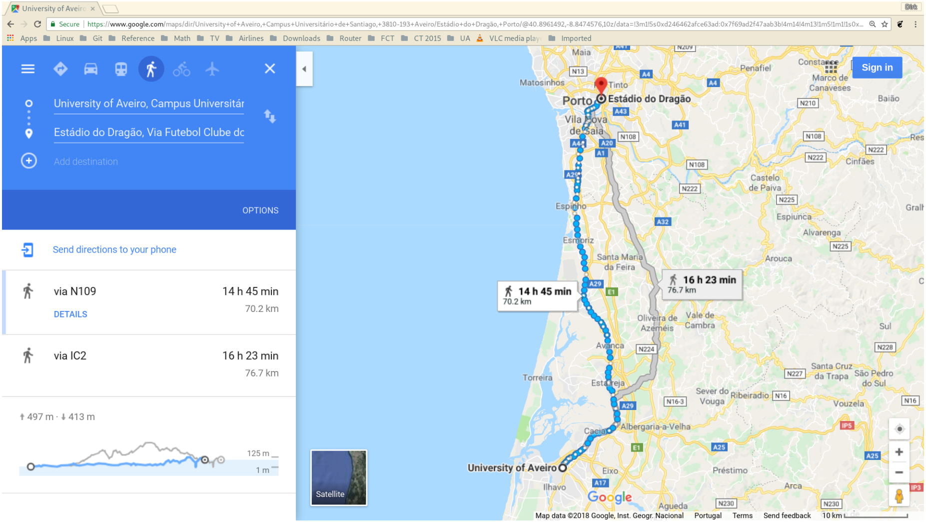
caminhos de menor comprimento (necessariamente par). Portanto,



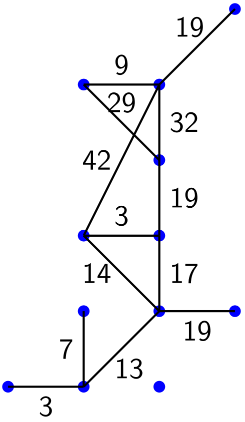
é um passeio fechado de comprimento ímpar, logo existe um circuito de comprimento ímpar (TPC!!), uma contradição. □

Problemas de caminho de “custo mínimo” em grafos

O problema


University of Aveiro
Secure
https://www.google.com/maps/dir/University+of+Aveiro,+Campus+Universitário+de+Santiago,+3810-193+Aveiro/Estádio+do+Dragão,+Porto/@40.8961492,-8.8474576,10z/data=!3m1!5s0xd246462afce63ad:0x7f69ad2f47aab3b!4m14!4m13!1m5!1m1!1s0x...
Apps
Linux
Git
Reference
Math
TV
Airlines
Downloads
Router
FCT
CT 2015
UA
VLC media play
Imported
University of Aveiro, Campus Universitár
Estádio do Dragão, Via Futebol Clube dc
Add destination
OPTIONS
Send directions to your phone
via N109
14 h 45 min
70.2 km
DETAILS
via IC2
16 h 23 min
76.7 km
497 m · 413 m
125 m
1 m
Satellite
Sign in
Porto
Estádio do Dragão
Matosinhos
Maia
Vila Nova de Gaia
Espinho
Esmoriz
Santa Maria da Feira
Oliveira de Azeméis
Vale de Cambra
Avanca
Estarreja
Torreira
Albergaria-a-Velha
University of Aveiro
Ilhavo
Eixo
Agueda
Penafiel
Castelo de Paiva
Cinfães
Arouca
Alvarenga
Espiunca
Sever do Vouga
Ribeiradio
Vouzela
São Pedro do Sul
Santa Cruz da Trapa
Préstimo
14 h 45 min
70.2 km
16 h 23 min
76.7 km
Map data ©2018 Google, Inst. Geogr. Nacional
Portugal
Terms
Send feedback
10 km

Formalizar o problema



- vértices = cruzamentos
- arestas = estradas com distância/tempo/preço/...

Grafos com custos

Definição

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma *matriz de custos*

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$.

Grafos com custos

Definição

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma *matriz de custos*

$$W \colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, não precisamos E.)

Grafos com custos

Definição

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma *matriz de custos*

$$W \colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, não precisamos E.)

Para cada caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em G, o custo de P é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

Grafos com custos

Definição

Um grafo com custos não negativos nas arestas $G = (V, E, W)$ é dado por um grafos simples (V, E) e uma *matriz de custos*

$$W\colon V \times V \longrightarrow [0, \infty]$$

tais que, $W(u, v) = W(v, u)$, $W(u, u) = 0$ e, para todos os $u \neq v \in V$, $W(u, v) = \infty$ se $uv \notin E$. (Logo, não precisamos E.)

Para cada caminho $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ em G, o custo de P é

$$W(P) = \sum_{i=0}^{k-1} W(v_i, v_{i+1})$$

(onde $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$).

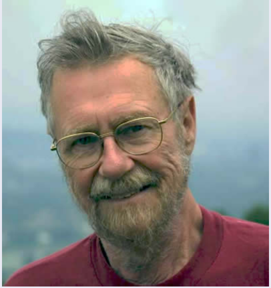
Objetivo

Encontrar o caminho de menor custo entre dois vértices.

O algoritmo de Dijkstra

Considerações iniciais

Se $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k)$ é o caminho de "menor custo" entre v_0 e v_k, então $(v_0, v_1, \ldots, v_{k-1})$ é o caminho de "menor custo" entre v_0 e v_{k-1}.

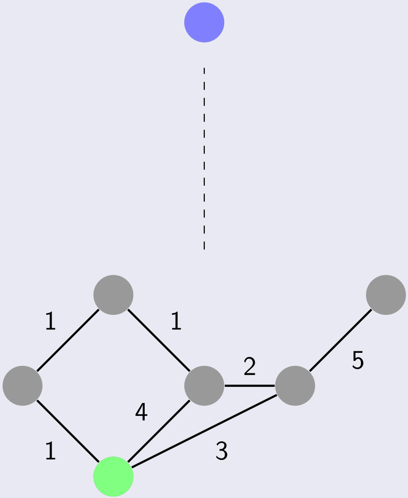


Edsger W. Dijkstra (1959). «A note on two problems in connexion with graphs». Em: *Numerische Mathematik* **1**.(1), pp. 269–271.

Edsger Wybe Dijkstra (1930 – 2002), matemático holandês.

O algoritmo de Dijkstra

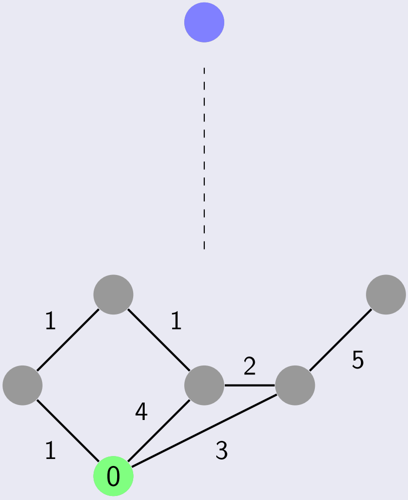
A ideia



Procuramos is caminho de menor custo entre • e •.

O algoritmo de Dijkstra

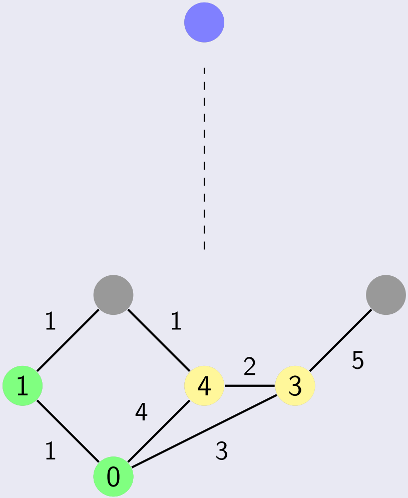
A ideia



Procuramos is caminho de menor custo entre • e •.

O algoritmo de Dijkstra

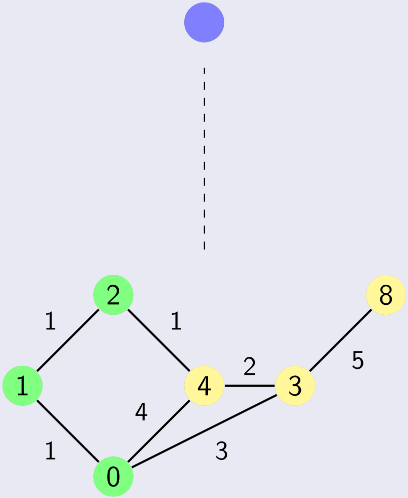
A ideia



Procuramos is caminho de menor custo entre ● e ●.

O algoritmo de Dijkstra

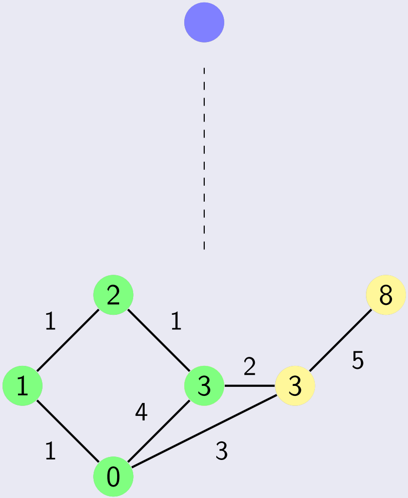
A ideia



Procuramos is caminho de menor custo entre ● e ●.

O algoritmo de Dijkstra

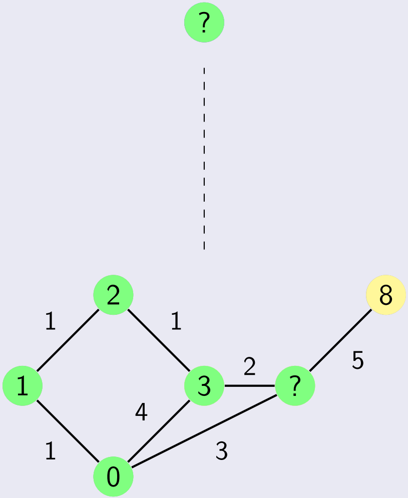
A ideia



Procuramos is caminho de menor custo entre ● e ●.

O algoritmo de Dijkstra

A ideia



Procuramos is caminho de menor custo entre • e •.

O algoritmo de Dijkstra

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.

O algoritmo de Dijkstra

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:

O algoritmo de Dijkstra

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **custo**(v) = "custo" do caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).

O algoritmo de Dijkstra

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **custo**(v) = "custo" do caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**(v) = antecessor de v no caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).

O algoritmo de Dijkstra

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **custo**(v) = "custo" do caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**(v) = antecessor de v no caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.

O algoritmo de Dijkstra

As variáveis

- `start` = o vértice inicial.
- Para cada $v \in V$:
  - **custo**(v) = "custo" do caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).
  - **ant**(v) = antecessor de v no caminho de menor "custo" entre `start` e v (até o momento).
- **temp** = lista dos vértices com valores temporários.
- `menor` = vértice de menor custo (neste momento).

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{custo}(\texttt{start}) = 0$.

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{custo}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{custo}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:

Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{custo}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o v em **temp**:
    - Se $\textbf{custo}(v) > \textbf{custo}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

$$\begin{aligned} \textbf{custo}(v) &= \textbf{custo}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v), \\ \textbf{ant}(v) &= \texttt{menor}\,. \end{aligned}$$

Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{custo}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\text{aux}} = \infty$.
  - Para todo o v em **temp**:
    - Se $\textbf{custo}(v) > \textbf{custo}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

      $$\textbf{custo}(v) = \textbf{custo}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v),$$
      $$\textbf{ant}(v) = \texttt{menor}\,.$$

    - Se $\textbf{custo}(v) < c_{\text{aux}}$ então $c_{\text{aux}} = \textbf{custo}(v)$ e $v_{\text{aux}} = v$ (lembrar do "menor custo").

Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

O algoritmo de Dijkstra

O desenvolvimento

- Inicializar as variáveis:
  - Para cada $v \in V$: $\textbf{custo}(v) = \infty$, $\textbf{ant}(v) = \varnothing$.
  - $\textbf{custo}(\texttt{start}) = 0$.
  - $\textbf{temp} = V \setminus \{\texttt{start}\}$ e $\texttt{menor} = \texttt{start}$.
- Repetir:
  - $c_{\mathrm{aux}} = \infty$.
  - Para todo o v em **temp**:
    - Se $\textbf{custo}(v) > \textbf{custo}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v)$, então

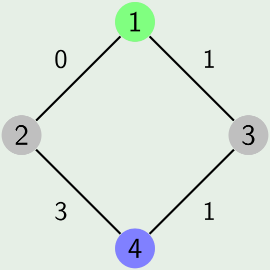
      $$\begin{aligned} \textbf{custo}(v) &= \textbf{custo}(\texttt{menor}) + W(\texttt{menor}, v), \\ \textbf{ant}(v) &= \texttt{menor}\,. \end{aligned}$$

    - Se $\textbf{custo}(v) < c_{\mathrm{aux}}$ então $c_{\mathrm{aux}} = \textbf{custo}(v)$ e $v_{\mathrm{aux}} = v$ (lembrar do "menor custo").
  - $\textbf{temp} = \textbf{temp} \setminus \{v_{\mathrm{aux}}\}$ e $\texttt{menor} = v_{\mathrm{aux}}$.

Até $\texttt{menor} =$ o vértice terminal.

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

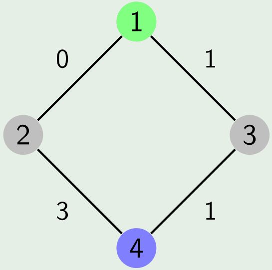


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	menor	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$

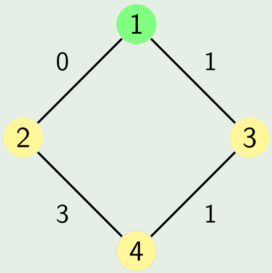


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$

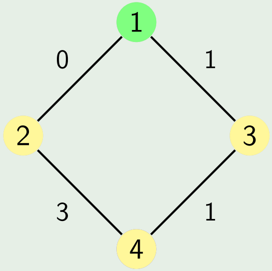


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$		

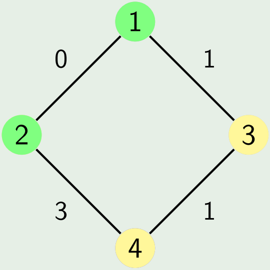


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$

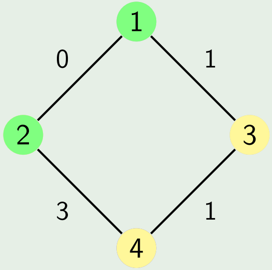


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	1	$\{2,3,4\}$
	$(0,1)$	$(1,1)$	$(\infty,-)$	2	$\{3,4\}$
		$(1,1)$	$(3,2)$		

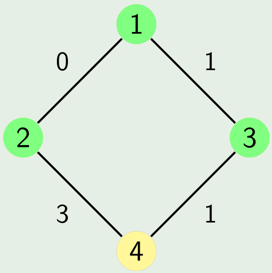


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$

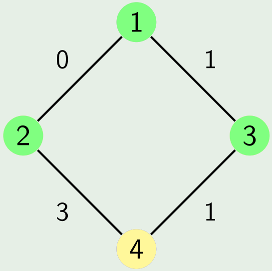


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$		

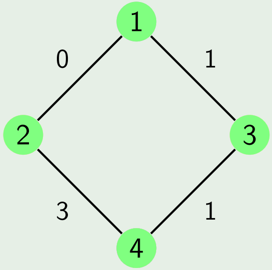


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$	4	$\varnothing$

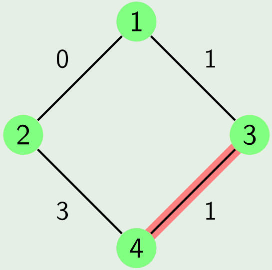


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação: (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4\}$
	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4\}$
		$(1, 1)$	$(3, 2)$	3	$\{4\}$
			$(2, 3)$	4	$\varnothing$

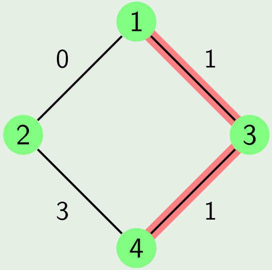


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

O algoritmo de Dijkstra

Exemplo

1	2	3	4	`menor`	**temp**
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	1	$\{2,3,4\}$
	$(0,1)$	$(1,1)$	$(\infty,-)$	2	$\{3,4\}$
		$(1,1)$	$(3,2)$	3	$\{4\}$
			$(2,3)$	4	$\varnothing$

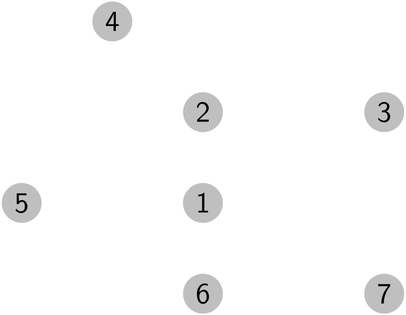


- vértice inicial: 1.
- vértice terminal: 4.
- Notação:
  (custo, vértice anterior).

- Simon Peyton Jones e Andrew Goldberg (2010). «Getting from A to B: fast route-finding on slow computers». URL: https://www.microsoft.com/en-us/research/video/getting-from-a-b-fast-route-finding-using-slow-computers/. A talk by Simon Peyton-Jones for Think Computer Science 2010.
- Stephen Dolan (2013). «Fun with semirings: a functional pearl on the abuse of linear algebra». Em: *Proceedings of the 18th ACM SIGPLAN international conference on Functional programming - ICFP '13*. Vol. 48. 9. ACM. ACM Press, pp. 101–110. URL: https://www.cl.cam.ac.uk/~sd601/papers/semirings.pdf.

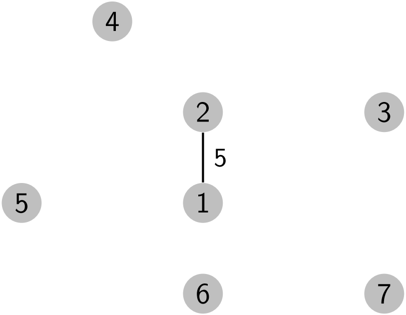
Exercício 31 (a) e (b)

Exercício 31



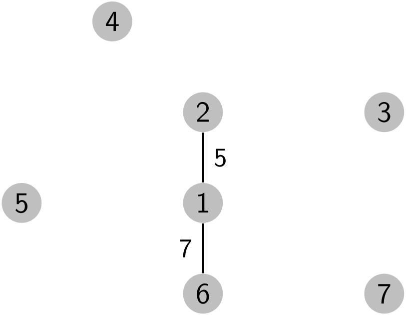
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 31



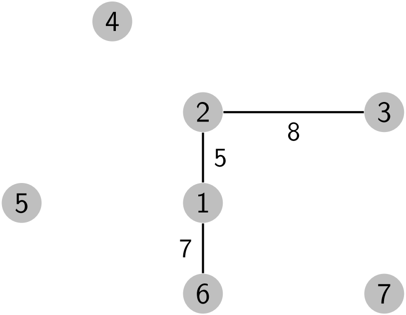
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 31



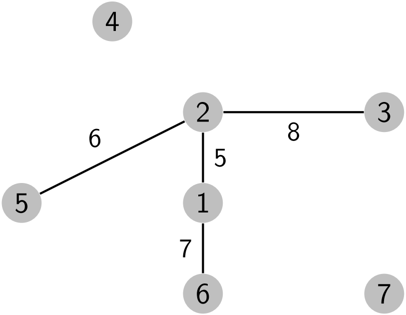
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & \color{red}{8} & \infty & \color{red}{6} & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 31



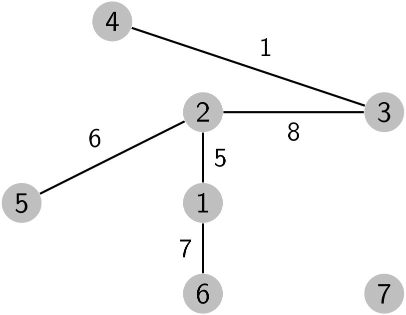
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & {\color{red}8} & \infty & {\color{red}6} & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 31



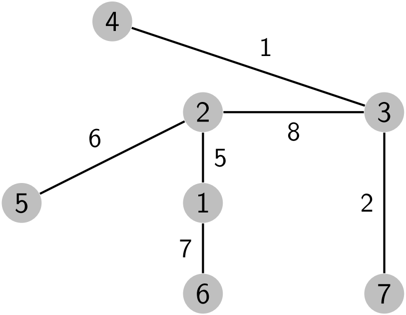
$$\begin{bmatrix}
0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\
5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\
\infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\
\infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\
\infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\
7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\
\infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0
\end{bmatrix}$$

Exercício 31



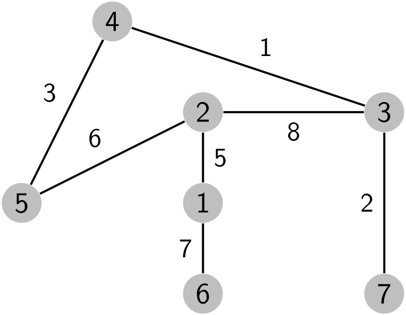
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & \color{red}{1} & \infty & \infty & \color{red}{2} \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 31



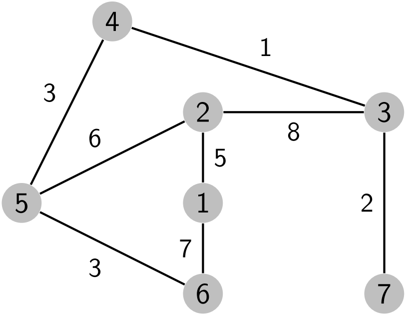
$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 31



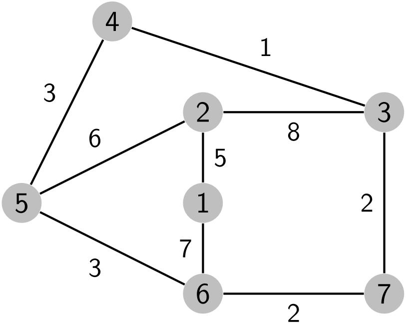
$$
\begin{bmatrix}
0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\
5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\
\infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\
\infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\
\infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\
7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\
\infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0
\end{bmatrix}
$$

Exercício 31



$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & \color{red}{2} \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

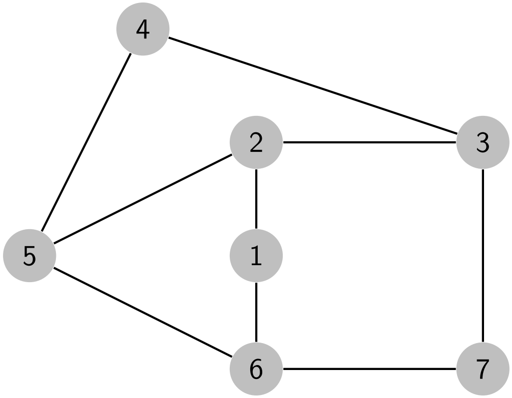
Exercício 31



$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & 7 & \infty \\ 5 & 0 & 8 & \infty & 6 & \infty & \infty \\ \infty & 8 & 0 & 1 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 0 & 3 & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & 0 & 3 & \infty \\ 7 & \infty & \infty & \infty & 3 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

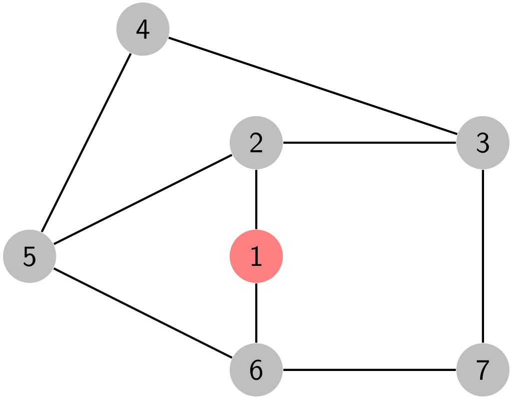
Exercício 31a (folha 7)

Verifique se G é um grafo bipartido.



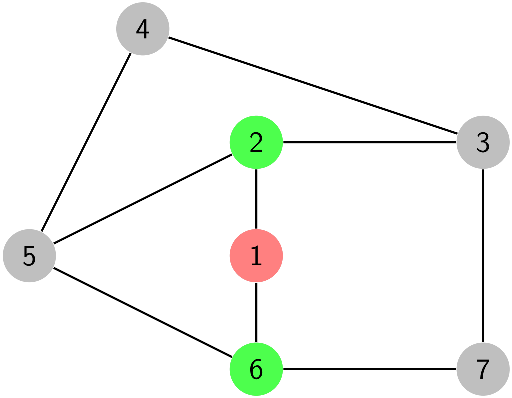
Exercício 31a (folha 7)

Verifique se G é um grafo bipartido.



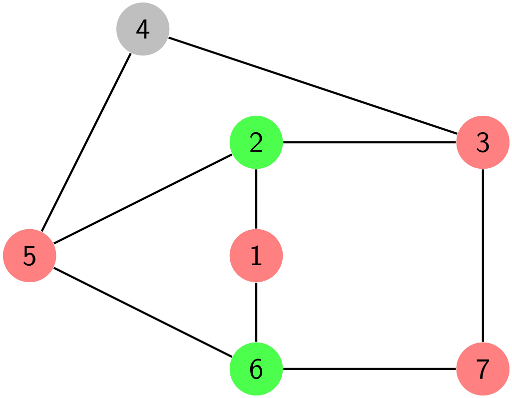
Exercício 31a (folha 7)

Verifique se G é um grafo bipartido.



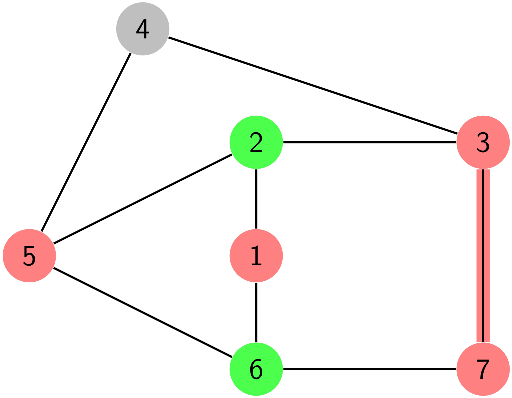
Exercício 31a (folha 7)

Verifique se G é um grafo bipartido.



Exercício 31a (folha 7)

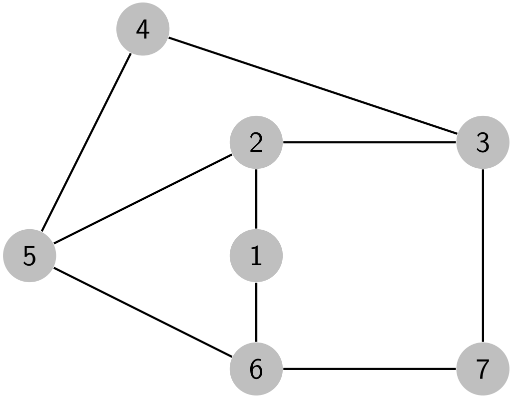
Verifique se G é um grafo bipartido.



Logo, o grafo G não é bipartido.

Exercício 31a (folha 7)

Verifique se G é um grafo bipartido.

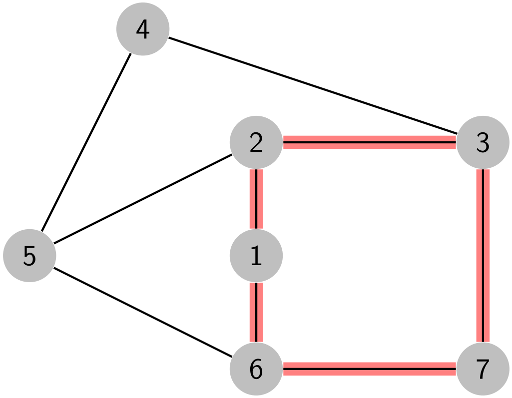


Logo, o grafo G não é bipartido.

Argumento alternativo:

Exercício 31a (folha 7)

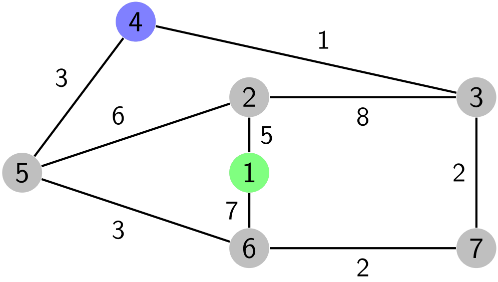
Verifique se G é um grafo bipartido.



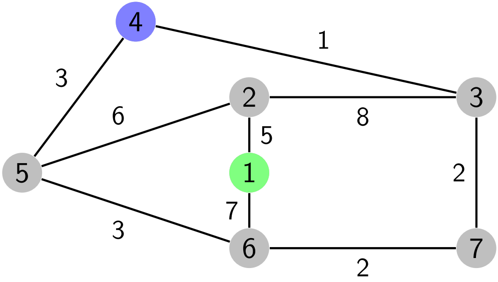
Logo, o grafo G não é bipartido.

Argumento alternativo: G contém um circuito de comprimento impar, logo G não é bipartido.

Exercício 31b (folha 7)

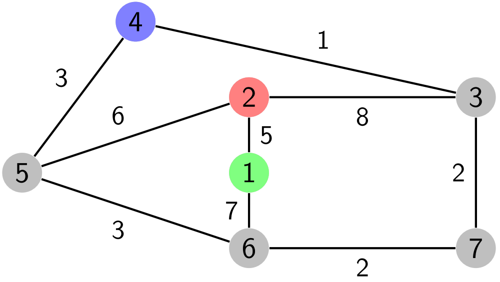


Exercício 31b (folha 7)



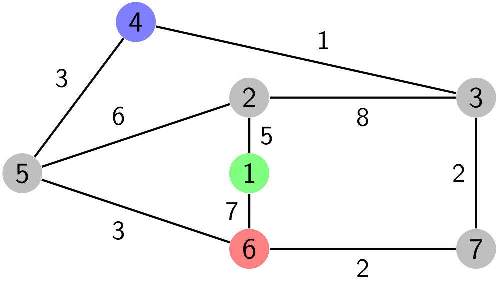
1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Exercício 31b (folha 7)



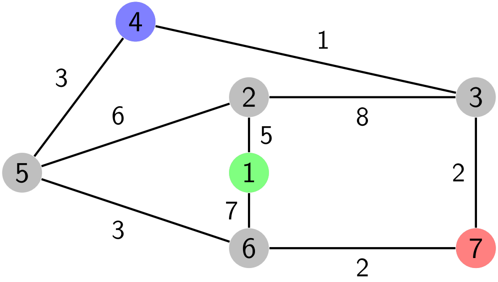
1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	1	$\{2,3,4,5,6,7\}$
$-$	$(5,1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	2	$\{3,4,5,6,7\}$

Exercício 31b (folha 7)



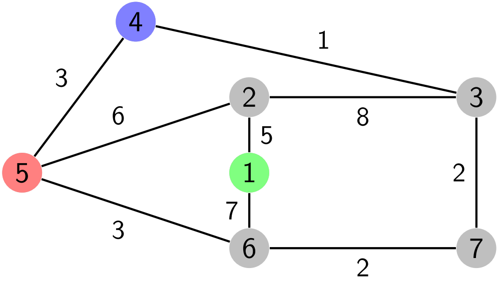
1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	1	$\{2,3,4,5,6,7\}$
$-$	$(5,1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	2	$\{3,4,5,6,7\}$
$-$	$-$	$(13,2)$	$(\infty,-)$	$(11,2)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	6	$\{3,4,5,7\}$

Exercício 31b (folha 7)



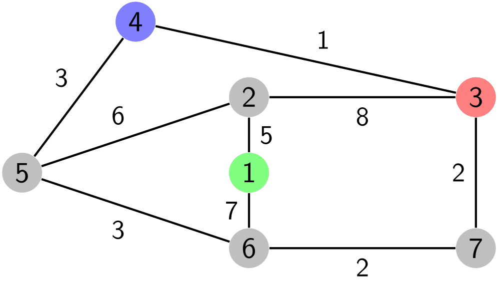
1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$-$	$(5, 1)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(7, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4, 5, 6, 7\}$
$-$	$-$	$(13, 2)$	$(\infty, -)$	$(11, 2)$	$(7, 1)$	$(\infty, -)$	6	$\{3, 4, 5, 7\}$
$-$	$-$	$(13, 2)$	$(\infty, -)$	$(10, 6)$	$-$	$(9, 6)$	7	$\{3, 4, 5\}$

Exercício 31b (folha 7)



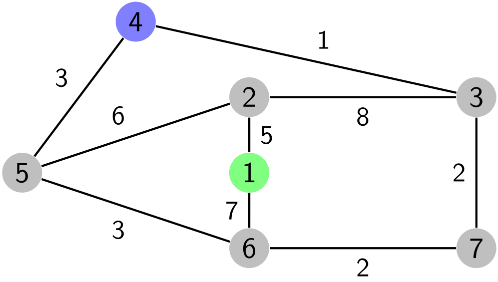
1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	1	$\{2,3,4,5,6,7\}$
$-$	$(5,1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	2	$\{3,4,5,6,7\}$
$-$	$-$	$(13,2)$	$(\infty,-)$	$(11,2)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	6	$\{3,4,5,7\}$
$-$	$-$	$(13,2)$	$(\infty,-)$	$(10,6)$	$-$	$(9,6)$	7	$\{3,4,5\}$
$-$	$-$	$(11,7)$	$(\infty,-)$	$(10,6)$	$-$	$-$	5	$\{3,4\}$

Exercício 31b (folha 7)



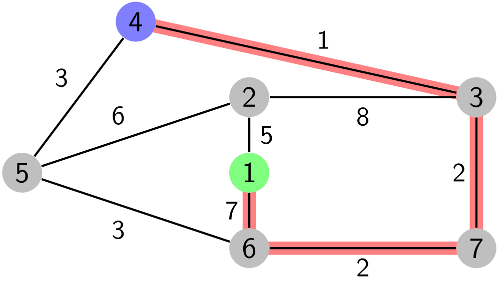
1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$-$	$(5, 1)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(7, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4, 5, 6, 7\}$
$-$	$-$	$(13, 2)$	$(\infty, -)$	$(11, 2)$	$(7, 1)$	$(\infty, -)$	6	$\{3, 4, 5, 7\}$
$-$	$-$	$(13, 2)$	$(\infty, -)$	$(10, 6)$	$-$	$(9, 6)$	7	$\{3, 4, 5\}$
$-$	$-$	$(11, 7)$	$(\infty, -)$	$(10, 6)$	$-$	$-$	5	$\{3, 4\}$
$-$	$-$	$(11, 7)$	$(13, 5)$	$-$	$-$	$-$	3	$\{4\}$

Exercício 31b (folha 7)



1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	1	$\{2,3,4,5,6,7\}$
$-$	$(5,1)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	2	$\{3,4,5,6,7\}$
$-$	$-$	$(13,2)$	$(\infty,-)$	$(11,2)$	$(7,1)$	$(\infty,-)$	6	$\{3,4,5,7\}$
$-$	$-$	$(13,2)$	$(\infty,-)$	$(10,6)$	$-$	$(9,6)$	7	$\{3,4,5\}$
$-$	$-$	$(11,7)$	$(\infty,-)$	$(10,6)$	$-$	$-$	5	$\{3,4\}$
$-$	$-$	$(11,7)$	$(13,5)$	$-$	$-$	$-$	3	$\{4\}$
$-$	$-$	$-$	$(12,3)$	$-$	$-$	$-$	4	$\varnothing$

Exercício 31b (folha 7)



1	2	3	4	5	6	7	menor	temp
$(0, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	1	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$-$	$(5, 1)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(7, 1)$	$(\infty, -)$	2	$\{3, 4, 5, 6, 7\}$
$-$	$-$	$(13, 2)$	$(\infty, -)$	$(11, 2)$	$(7, 1)$	$(\infty, -)$	6	$\{3, 4, 5, 7\}$
$-$	$-$	$(13, 2)$	$(\infty, -)$	$(10, 6)$	$-$	$(9, 6)$	7	$\{3, 4, 5\}$
$-$	$-$	$(11, 7)$	$(\infty, -)$	$(10, 6)$	$-$	$-$	5	$\{3, 4\}$
$-$	$-$	$(11, 7)$	$(13, 5)$	$-$	$-$	$-$	3	$\{4\}$
$-$	$-$	$-$	$(12, 3)$	$-$	$-$	$-$	4	$\varnothing$

Portanto, um caminho de custo mínimo é

$$4 \leftarrow 3 \leftarrow 7 \leftarrow 6 \leftarrow 1.$$