Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2018-2019

Aula 2

Probabilidades

Probabilidades

Conceitos essenciais

Espaço de amostragem

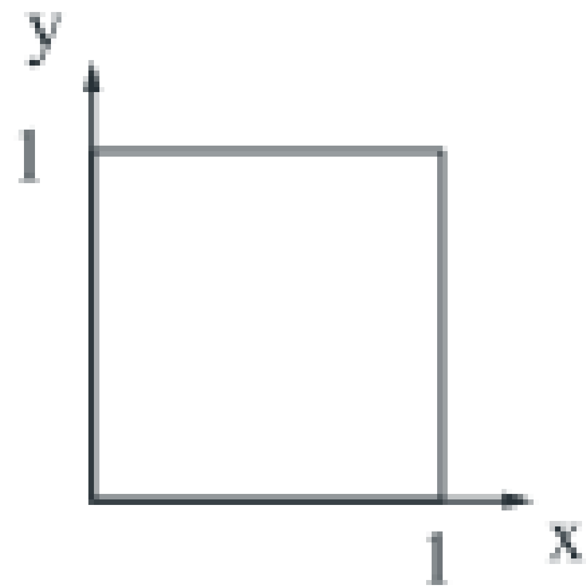
- Conjunto (S) de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória
  - Em geral representado por S (de Sample Space)
- Resultados têm de ser mutuamente exclusivos e não divisíveis

- S é discreto se for contável
  - i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- S é contínuo se não for contável

- Elementos de S são designados por resultados elementares

Exemplo de espaço de amostragem contínuo

- Experiência aleatória: instante de chegada, em horas, de 2 alunos (x e y) a uma aula de 1 hora



- S= {(x,y) : 0<= x,y <=1}

Acontecimentos / eventos

- Os resultados elementares não são necessariamente os únicos itens de interesse nas experiências aleatórias
  - Por exemplo:
    - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar (nº > L)
  - Os itens de interesse são representados por subconjuntos de S

- **Acontecimento (evento**) A é um subconjunto de S
  - S é obviamente um subconjunto de si próprio e constitui o evento certo
  - O conjunto vazio, ϕ, corresponde ao acontecimento impossível (também é considerado um subconjunto de S)

- A probabilidade é atribuída a acontecimentos/eventos

Lei de probabilidade

- Regra que atribui probabilidade aos vários eventos

- Probabilidade: número associado a um acontecimento que indica a "verosimilhança" da ocorrência do acontecimento quando se efetua a experiência aleatória
  - valor entre 0 e 1
    - 1 para o acontecimento certo
    - 0 para o acontecimento impossível

Cálculo de probabilidades

Como é que se definem/obtêm as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de medição
- Através da construção de modelos probabilísticos

Como determinar a probabilidade?

- Probabilidades teóricas
- **Probabilidade empíricas**

- Probabilidades subjectivas
  - Exemplo:
    - Um Médico diz que tem 95 % de certeza de que determinada pessoa tem uma determinada doença
    - Uma casa de apostas estimou em 1/5 a probabilidade de Portugal ser campeão Europeu em 2016
      - E fomos Campeões ☺

  - Não nos interessam nesta UC

Diferentes abordagens

- Teoria clássica (de Laplace)
  - Probabilidades teóricas
- Frequencista
  - Probabilidades empíricas
- Teoria matemática

Noção clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- "*Pour étudiér un phénoméne, il faut réduire tous les evénements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d'un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l'événement e dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles*"
  - pg 17 livro "O Acaso"

- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, **"casos", igualmente prováveis**

$$P(evento) = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Exemplo

- Lançamento de 1 dado honesto
    - qualquer face igualmente provável
- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ?
- 6 resultados ou <u>eventos elementares</u>
    - Representáveis pelo conjunto {1,2,3,4,5,6}
- Ao evento "saída da face 5" apenas corresponde um caso favorável
    - > P("face 5")=1/6

Variante do problema

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?

- Espaço de amostragem ?
  - S={1,2,3,4,5} ? => casos possíveis =5
  - S={1,2,3,4,**5**,**5**}

- P("sair 5")=2/6

Exemplo de aplicação (em Java)

- Probabilidade de termos “0123” numa sequência de 4 dígitos
- Como fazer ? Sugestões ?
- Relembro que precisamos contar todos os casos possíveis

Resolvendo…

- Ideia 1 : 4 ciclos for …
  - Limitação do código… se quisermos 5 etc

- Ideia 2 …
  - Usar recursividade …

Possível solução

```
void comb(String example, String alphabet, int len, List<String> list)
{

    if (len == 0) {  // new combination available, store it ...
         list.add(example);  //  store it in a list
       return;
    }
    else {
       for (int i=0;i<alphabet.length(); i++){ // all alphabet

              //  recursive cal
              comb(example+alphabet.charAt(i), alphabet, len-1,list);


        }
    }
}
```

Exemplo de utilização

```
public static void main(String[] args) {

     String alphabet = "0123456789";

     final int MAX=7;

     for (int n=1;n<=MAX;n++){
        int possible=comb(alphabet,n);

        System.out.printf("t Prob=%.8f\n",1/(double)possible);
     }
```

- [PINs.java]

Regras básicas (OU)

- P(“sair face maior que 4”) ?

  = P(“sair face 5 ou face 6”) = P({5,6}) = 2/6

  = P({5})+P({6})

- P(“face par”)=P({2})+P({4})+P({6})=1/2
- P(“qualquer face”) = 6 x 1/6 =1

… $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sempre ??? Se não, em que condições é verdade?

Regras básicas

- P("face menor ou igual a 4")

  =1 – P("face maior que 4")

  = 1 – 2/6 = 4/6

Regra do complemento

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Regras básicas (E)

- P("face par E face menor ou igual a 4")=

  = P("face par") x P("face menor ou igual a 4")

  $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

  De facto existem 2 possibilidades em 6 , {2,4}

- Pode calcular-se a probabilidade da intersecção (E) sempre como o produto das probabilidades ? Se não, em que condições ?

Aplicação das regras (OU novamente)

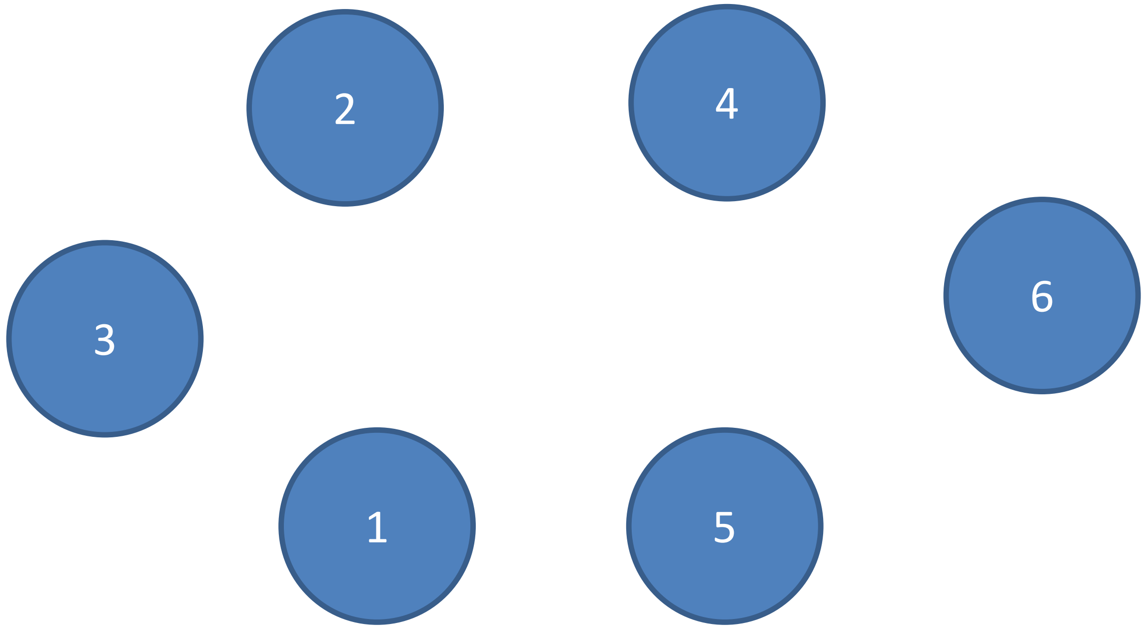
- P("face par OU face menor ou igual a 4") = ?

- Se fizermos P("face par")+ P("face menos ou igual a 4") dá 7/6 > 1 !!

- Qual o erro ?

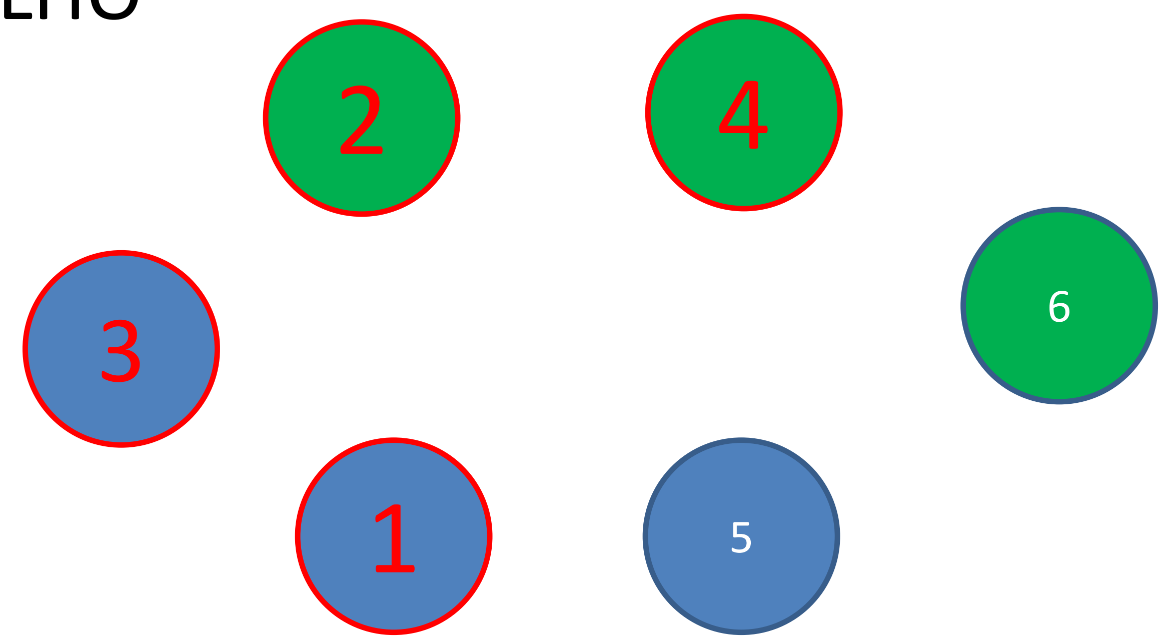
Analisemos

S



Eventos

- A="face par"   VERDE
- B="face menor ou igual a 4" limite e texto a VERMELHO



…

Temos 3 com fundo verde => $P(A) = ½$

Temos 4 com vermelho => $P(B) = 2/3$

… mas temos 2 casos com verde e vermelho

- No mínimo perigoso ☺

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $P(A \cup B) = P(A)+P(B) - P(A \cap B)$

  $= ½ + 2/3 - 2/6 = 3/6+4/6-2/6 = 5/6$

Testar as regras (num problema exemplo)

- Considere uma família com 2 filhos e que a probabilidade de nascer rapaz é igual à de nascer uma rapariga.
- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?

- Probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos ?

Resolução

- Pelo menos 1 rapaz => MF ou FM ou MM

- MF é a intersecção (“e”) de M no primeiro e F no segundo = ½ * ½

- Similar para MM e FM

- P(MF) + P(MM) + P(FM) = ¾
  - Devido à união (“ou”)

Problema do Cavaleiro de Méré

- Aplicação de teoria Clássica

- Criar lista de todas as possibilidades (S)
  - 4 lançamentos
    - 1111
    - 1112
    - 1113 …
  - 24 lançamentos …
- Contar casos favoráveis
- Calcular probabilidade

- Sugestão de TPC (Java?)

Problema do Cavaleiro de Méré

- P("sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado") vs P ("sair DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados")

- Melhor usar a regra do complemento..
- P("nenhum 6 em 4 lançamentos ")=
- P("não 6 na primeira E não 6 na segunda E …")

  =P("não 6 na primeira") x P("não 6 na segunda")

…

$$= 5/6 \times 5/6 \ldots = (5/6)^4$$

- P("sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado")

  $= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$

  $= 0{,}51775$

- P ("sair pelo menos um DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados") =

  $= 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24}$

  $= 0{,}49141$

Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, equiprobabilidade para os eventos elementares

- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

Noção frequencista

- Noção introduzida por De Moivre (1718)

- Repete-se a experiência um certo número de vezes (N).

- Seja k o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (ex: “sair face 5 num dado”)
- Determina-se $f= k/N$, ou seja a frequência relativa de ocorrência

- Usa-se esta frequência como uma medida empírica de probabilidade

Frequência relativa

- Definição:
  - Se uma experiência for repetida N vezes nas mesmas condições a frequência relativa do evento A é

$$f(A) = \frac{\#\ ocorrências\ do\ evento\ A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando N aumenta, então o limite da frequência relativa é a probabilidade de A

$$p(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{\#\ ocorrências\ de\ A}{N}$$

Frequência relativa (cont.)

- $0 \leq f(A) \leq 1$

- Numa experiência com k resultados possíveis em N experiências:
  - S= {A1, A2, A3,… , Ak}
  - o resultado Ai ocorre Ni vezes
  - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de f(Ai) = Ni/N
  - $\sum_{i=1}^{k} f\,(Ai) = 1$

Exemplos/Demos (em Java)

- Probabilidade de Cara no lançamento de uma moeda
  - CoinWithGraphics
- Probabilidade de uma das faces no lançamento de um Dado honesto
  - Dice …
- Probabilidades das várias somas possíveis no lançamento de n Dados
  - Ndices ..

Exemplos com cartas (Java)

- P("Rei de Ouros (numa carta)") ?
- P("5 Ouros em 5 cartas") ?
- Etc

- Cards.java

Código exemplo

```
static double sim(int nCards, String pattern, int nOcurrences,int nreps, boolean debug) {

//  the deck
List<String> deck =new ArrayList<>();
for (String c:card)
          for (String t:type)
                    deck.add(c+" de "+t);

int count = 0; // count of number of  favorable outcomes

//  REPEAT EXPERIMENT OF OBTAINING A HAND
for (int rep=1; rep<=nreps; rep++) {

          // deal hand

          List<String> hand= sample(deck,nCards);

          if (debug) System.out.println("HAND="+hand);

          // CHECK IF FAVORABLE OUTCOME
          int numFav=0;
          for (String h:hand)
                    if (h.contains(pattern))
                              numFav++;



          //   if pattern occurs the number of times  we want
          if (numFav==nOcurrences)
                    count = count + 1;
}

return (count/(double)nreps);

}
```

Exemplo em Matlab

- Probabilidade de **sair 2 caras em 3 lançamentos**

- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?
- Como se simula 3 lançamentos ?
- Como se repete “muitas” vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

Simular lançamentos ...

```
%  simular 1 lançamento
l= rand() >0.5  % assumiremos que 1 = “cara”

% simular os 3 lançamentos
l3= rand (3, 1) > 0.5     % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes
N= 1e6  %  mas comecem com valor pequeno
lancamentos= rand(3,N)>0.5;  % importante o “;”
```

ocorrências … freq. relativa

```
% contar num ocorrências de "2 caras"
%     contar num caras (1s) em cada experiência
%          (que se encontra numa coluna da matriz lancamentos)
numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);

%  contar vezes em que esse número de caras é 2
numOcorrencias =    sum (numCarasNaExperiencia ==2)

% calcular freq relativa
f  = numOcorrencias / N

%  usar como estimativa da probabilidade
pA= f
```

Variação com N

```
% variação da frequência relativa em função de N

N= 1e5
lancamentos = rand(3,N) > 0.5;
sucessos= sum(lancamentos)==2; % 1 = sucesso
fabsol =  cumsum(sucessos);
frel = fabsol ./ (1:N);

plot(1:N, frel);
```

Problema do Cavaleiro de Méré

- P(“sair pelo menos um seis em 4 lançamentos de 1 dado”) vs P (“sair pelo menos um DUPLO 6 em 24 lançamentos de 2 dados”)

- Simulação **em Matlab** [cavaleiro.m]

- TPC: Simulação em Java

Parte do código – 2 dados

```
L=24
dado1=floor(rand(L,N) * 6)+1  ;
dado2=floor(rand(L,N) * 6)+1  ;

seis= (dado1==6 & dado2==6);

%  contar o num de seis (somando ao longo das colunas
contagem=sum(seis);

% determinar as experiencias com pelo menos 1 seis
expsFavoraveis=contagem>=1;

% contar casos favoráveis (equivale a somar)
fav=sum(expsFavoraveis)

prob2=fav/N
```

Problema 4 - aprovações a MPEI

- **Simulação** em Matlab [simulMPEI.m]

```
p=aprov/total ;        %  prob aluno passar em 2015 - 2016
n=50*2;                % alunos de MPEI
N=1e6;                 % experiências
k=fix(0.8 * n);        %  os 80 %

aprovados = rand(n,N) < p;   %%  1 indica aprovado

numOcorrencias =0;
for k1=k:n
   sucessos= sum(aprovados)==k1 ;
   fprintf('%d aprovados -> %8d , p=%.5f\n',k1,sum(sucessos),sum(sucessos)/N);
   numOcorrencias = numOcorrencias +sum(sucessos);
End

probSimulacao= numOcorrencias /N;
fprintf('prob de %d ou mais em %d passsarem é de %.4f\n',k,n,probSimulacao);
```

Exemplos de resultados

Prob aprovação = 0.8962 (baseado edição 2015/2016)

80 aprovados -> 1721 , p=0.00172
81 aprovados -> 3660 , p=0.00366
82 aprovados -> 7448 , p=0.00745
83 aprovados -> 13980 , p=0.01398
84 aprovados -> 24506 , p=0.02451
85 aprovados -> 39659 , p=0.03966
86 aprovados -> 59943 , p=0.05994
87 aprovados -> 83473 , p=0.08347
88 aprovados -> 106277 , p=0.10628
89 aprovados -> 124191 , p=0.12419
90 aprovados -> 130987 , p=0.13099
91 aprovados -> 124396 , p=0.12440
92 aprovados -> 104728 , p=0.10473
93 aprovados -> 78250 , p=0.07825
94 aprovados -> 50022 , p=0.05002
95 aprovados -> 27396 , p=0.02740
96 aprovados -> 12368 , p=0.01237
97 aprovados -> 4330 , p=0.00433
98 aprovados -> 1149 , p=0.00115
99 aprovados -> 202 , p=0.00020
100 aprovados -> 13 , p=0.00001

prob de 80 ou mais em 100 passarem é de 0.9987

TOTAL INCLUINDO REPROVADOS POR FALTAS

Prob aprovação = 0.7600 (baseado edição anterior)

80 aprovados -> 63021 , p=0.06302
81 aprovados -> 49257 , p=0.04926
82 aprovados -> 35789 , p=0.03579
83 aprovados -> 24857 , p=0.02486
84 aprovados -> 15942 , p=0.01594
85 aprovados -> 9491 , p=0.00949
86 aprovados -> 5315 , p=0.00532
87 aprovados -> 2648 , p=0.00265
88 aprovados -> 1223 , p=0.00122
89 aprovados -> 540 , p=0.00054
90 aprovados -> 183 , p=0.00018
91 aprovados -> 70 , p=0.00007
92 aprovados -> 31 , p=0.00003
93 aprovados -> 7 , p=0.00001
94 aprovados -> 1 , p=0.00000
95 aprovados -> 1 , p=0.00000
96 aprovados -> 0 , p=0.00000
97 aprovados -> 0 , p=0.00000
98 aprovados -> 0 , p=0.00000
99 aprovados -> 0 , p=0.00000
100 aprovados -> 0 , p=0.00000

prob de 80 ou mais em 100 passarem é de 0.2084

Simples mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências

- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
  - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
  - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
  - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efectuar um número finito de repetições da experiência
  - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
    - Quantos ensaios se tem de efectuar para termos medidas fiáveis ?
    - Como se lida com medições sujeitas a erro ?