

Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, <http://sweet.ua.pt/dirk/>

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24

Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Apresentação

Nota

Toda a informação está disponível em

<http://elearning.ua.pt>.

Avaliação

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:
 1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
 2. No dia e hora do exame final.

Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.

Avaliação

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:

1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
2. No dia e hora do exame final.

Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.

- A matéria a abordar no primeiro teste será lecionada até ao dia 19 de abril de 2019 e a abordar no segundo teste será a lecionada depois do 19 de abril.

Avaliação

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:

1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
2. No dia e hora do exame final.

Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.

- A matéria a abordar no primeiro teste será lecionada até ao dia 19 de abril de 2019 e a abordar no segundo teste será a lecionada depois do 19 de abril.
- Há registo de faltas e os alunos que não sejam estudantes trabalhadores e que faltem injustificadamente a mais de 30% das aulas teórico-práticas reprovam automaticamente à UC, ficando impedidos de se apresentar a qualquer das épocas de exame.

O programa

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
3. Princípios de Enumeração Combinatória
4. Permutações
5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
6. Recorrência e Funções geradoras
7. Introdução aos Números Combinatórios
8. Elementos de Teoria dos Grafos

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
 - Lógica proposicional
 - Teoria de Conjuntos
 - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
 - Estratégias de demonstração da implicação
 - Princípios de indução e de indução completa
 - Princípio da gaiola dos pombos

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
 - Lógica proposicional
 - Teoria de Conjuntos
 - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
 - Estratégias de demonstração da implicação
 - Princípios de indução e de indução completa
 - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa “a afirmação A é válida (verdadeira)”?

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
 - Lógica proposicional
 - Teoria de Conjuntos
 - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
 - Estratégias de demonstração da implicação
 - Princípios de indução e de indução completa
 - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa “a afirmação A é válida (verdadeira)”?
- Como justificamos? O que é uma prova?

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
 - Lógica proposicional
 - Teoria de Conjuntos
 - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
 - Estratégias de demonstração da implicação
 - Princípios de indução e de indução completa
 - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa “a afirmação A é válida (verdadeira)”?
- Como justificamos? O que é uma prova?
- Podemos provar todo o que é válido?

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
 - Lógica proposicional
 - Teoria de Conjuntos
 - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
 - Estratégias de demonstração da implicação
 - Princípios de indução e de indução completa
 - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa “a afirmação A é válida (verdadeira)”?
- Como justificamos? O que é uma prova?
- Podemos provar todo o que é válido?
- O que é um conjunto? (Não há resposta!!) Há tantos números reais como números naturais? Ou racionais?

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória

- Princípio da bijecção
- Princípios da adição e da multiplicação
- Princípio de inclusão-exclusão

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória

- Princípio da bijecção
- Princípios da adição e da multiplicação
- Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantas sequências binárias de comprimento n existem?

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória

- Princípio da bijecção
- Princípios da adição e da multiplicação
- Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantas sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória

- Princípio da bijecção
- Princípios da adição e da multiplicação
- Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantas sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória

- Princípio da bijecção
- Princípios da adição e da multiplicação
- Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantas sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?
- Quantas sequências binárias com k uns e $n - 1$ zeros existem?
- ...

Conteúdo

4. Permutações

- Composição de permutações e permutações inversas
- Partição cíclica de uma permutação e tipos de permutações
- Transposições, inversões e sinal de uma permutação

Conteúdo

4. Permutações

- Composição de permutações e permutações inversas
- Partição cíclica de uma permutação e tipos de permutações
- Transposições, inversões e sinal de uma permutação

Questões

O “jogo do 15”

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

\rightsquigarrow

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

é possível?

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
- Combinações e permutações (com e sem repetição)
- Identidades combinatórias

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
- Combinações e permutações (com e sem repetição)
- Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
- Combinações e permutações (com e sem repetição)
- Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta:

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
- Combinações e permutações (com e sem repetição)
- Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
- Combinações e permutações (com e sem repetição)
- Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias

- Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
- Combinações e permutações (com e sem repetição)
- Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras

- Relações de recorrência
- Funções geradoras

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras

- Relações de recorrência
- Funções geradoras

Questões

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$



\vdots

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras

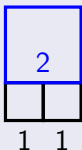
- Relações de recorrência
- Funções geradoras

Questões

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

$$\vdots$$


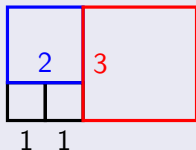
Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras

- Relações de recorrência
- Funções geradoras

Questões

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.



$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

$$a_3 = 3,$$

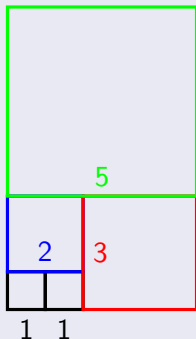
\vdots

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras

- Relações de recorrência
- Funções geradoras

Questões



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

$$a_3 = 3,$$

$$a_4 = 5,$$

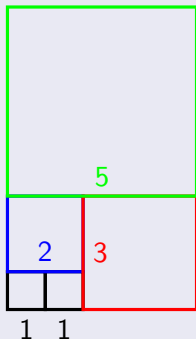
$$\vdots$$

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras

- Relações de recorrência
- Funções geradoras

Questões



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$

$$a_2 = 2,$$

$$a_3 = 3,$$

$$a_4 = 5,$$

$$\vdots$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Conteúdo

7. Introdução aos Números Combinatórios

- Factoriais e número binomiais
- Números de Fibonacci e número de ouro
- Outros números combinatórios

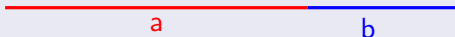
Conteúdo

7. Introdução aos Números Combinatórios

- Factoriais e número binomiais
- Números de Fibonacci e número de ouro
- Outros números combinatórios

Questões

Dividimos uma reta



em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

A razão $\frac{a}{b}$ é igual a ...

Conteúdo

8. Elementos de Teoria dos Grafos

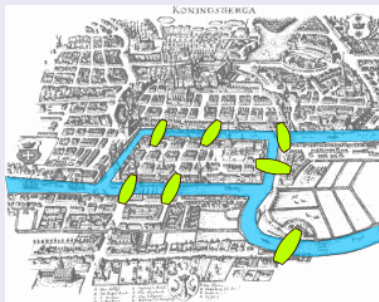
- Conceitos e resultados fundamentais
- Conexidade, caminhos e árvores

Conteúdo

8. Elementos de Teoria dos Grafos

- Conceitos e resultados fundamentais
- Conexidade, caminhos e árvores

Questões



Será possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas?



DOMINGOS CARDOSO, J. SZYMANSKI e
MOHAMMAD ROSTAMI. *Matemática discreta: Combinatória,
Teoria dos Grafos e Algoritmos*. Escolar Editora, 2009.



DOMINGOS CARDOSO, J. SZYMANSKI e
MOHAMMAD ROSTAMI. *Matemática discreta: Combinatória,
Teoria dos Grafos e Algoritmos*. Escolar Editora, 2009.



DOMINGOS CARDOSO e PAULA CARVALHO. «Noções de
Lógica Matemática». 2007. Universidade de Aveiro.



JOSÉ SOUSA PINTO. «Tópicos de Matemática Discreta».
1999. Universidade de Aveiro.



RONALD L. GRAHAM, DONALD E. KNUTH e
OREN PATASHNIK. *Concrete mathematics: a foundation for
computer science*. 2ª ed. Addison-Wesley, 1994.



J. M. S. SIMÕES PEREIRA. *Matemática Discreta: Tópicos
de combinatória*. Editora Luz da Vida, 2006.



J. M. S. SIMÕES PEREIRA. *Matemática Discreta: Grafos,
Redes, Aplicações*. Editora Luz da Vida, 2009.

Capítulo 1: Linguagem Matemática e Lógica Informal

in the model on the null relation $\Omega \in \text{Rel}(A, B)$, consisting only of the pair $(0, 0)$, and the universal relation \mathfrak{U} , consisting of all pairs (a, b) for $a \in A, b \in B$. For these we assumed the following elementary axioms:

(III-1) For each pair of objects A, B there exist $\Omega = \Omega_B^A, \mathfrak{U} = \mathfrak{U}_B^A$ in $\text{Rel}(A, B)$ such that $f \in \text{Rel}(A, B)$ implies $\Omega \subset f \subset \mathfrak{U}$,

(III-2) $\Omega\mathfrak{U} = \Omega, \quad \Omega\Omega = \Omega, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U} = \mathfrak{U},$

(III-3) $\Omega\Omega = \Omega, \quad \mathfrak{U}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}.$

Here the first equation of (III-2) reads in full: For four objects A, B, C, D , $\Omega_B^A \mathfrak{U}_C^B = \Omega_B^A \mathfrak{U}_D^C$. (It actually suffices to assume the axiom only in the case $B = A = D$, deducing the more general case.) The other axioms are to be read similarly.

Clearly $\Omega^f = \Omega, \mathfrak{U}^f = \mathfrak{U}$. We also define

$$0 = 0_B^A = \Omega_B^B \mathfrak{U}_B^A, \quad 0^f = \mathfrak{U}\Omega; \quad (5.1)$$

in the model 0 is the graph of the zero homomorphism. By (III-3), the various composites are given by

$$0\Omega = \Omega = 00^f, \quad 0\mathfrak{U} = 0 = 0\Omega = \Omega\Omega, \quad 0^f 0 = \mathfrak{U} = 0^f \mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{U}. \quad (5.2)$$

For any f , (III-1) and the other axioms give

$$\Omega f \Omega = \Omega, \quad \mathfrak{U} f \mathfrak{U} = \mathfrak{U}, \quad 0 f 0 = 0, \quad 0 f 0^f = \Omega. \quad (5.3)$$

LEMMA 5.1. For $g \in \text{Rel}(A, B)$, $\Omega_B^B g = g \cap 0_B^A$.

Proof: Since $\Omega g \subset 1g = g$ and $\Omega g \subset \mathfrak{U}\mathfrak{U} = 0$, we have $\Omega g \subset g \cap 0$. For the converse inclusion, set $h = g \cap 0$. Then $h \subset g, h \subset 0$ give $h = hh^f h \subset hh^f g \subset 00^f g = \Omega\mathfrak{U}\Omega g = \Omega g$, q.e.d.

As a consequence of this lemma and its dual, note that

$$0 \cap 1 = \Omega, \quad 0^f \cup 1 = \mathfrak{U}. \quad (5.4)$$

LEMMA 5.2. For each $s \in 1_A$, and $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_A^A$,

$$1 \cap s\mathfrak{U} = s, \quad 0 \cup s\mathfrak{U} = s\mathfrak{U}, \quad (1 \cup s0^f)0 = s\mathfrak{U}. \quad (5.5)$$

Proof: By (II-c), $1 \cap s\mathfrak{U} \subset s^f s = s$. Conversely, $1 \supset s$ and $s\mathfrak{U} \supset ss = s$, so $1 \cap s\mathfrak{U} \supset s$. Since $0 = \mathfrak{U}\mathfrak{U} \subset s\mathfrak{U}$, the second equation follows. Next note that $D(s0^f) = (s0^f)^f s 0^f \cap 1 = 0ss0^f \cap 1 = 0s0^f \cap 1 = \Omega \cap 1 = \Omega$ by (5.3). This allows us to apply the distributive law (II-b) to get $(1 \cup s0^f)0 = 0 \cup s0^f 0 = 0 \cup s\mathfrak{U} = s\mathfrak{U}$, as asserted.

With these preparations we can formulate

THEOREM 5.3. For each object A there is a lattice isomorphism ϕ between the lattice of all $s \in 1_A$ and that of all $q \supset 1_A$, given $(\phi^{-1} = \psi)$ by

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Exemplos:

- Cada espaço vetorial tem uma base.
- A função $\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
- A função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ é diferenciável.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Além disso, temos:

- **Axioma**: Proposição que se aceita como verdadeira.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Além disso, temos:

- **Axioma**: Proposição que se aceita como verdadeira.
- **Teorema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Além disso, temos:

- **Axioma**: Proposição que se aceita como verdadeira.
- **Teorema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**.
- **Lema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Além disso, temos:

- **Axioma**: Proposição que se aceita como verdadeira.
- **Teorema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**.
- **Lema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**. Tipicamente um resultado auxiliar (mas ver a próxima página).

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Além disso, temos:

- **Axioma**: Proposição que se aceita como verdadeira.
- **Teorema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**.
- **Lema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**. Tipicamente um resultado auxiliar (mas ver a próxima página).
- **Corolário**: Consequência dos resultados já estabelecidos.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se **proposição**.

Além disso, temos:

- **Axioma**: Proposição que se aceita como verdadeira.
- **Teorema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**.
- **Lema**: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as **regras de inferência**. Tipicamente um resultado auxiliar (mas ver a próxima página).
- **Corolário**: Consequência dos resultados já estabelecidos.
- **Teoria ou sistema matemático**: Coleção de axiomas, regras de inferência e resultados (teoremas, lemas e corolários).

Nota

“Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit. A good lemma also survives a philosophical or technological revolution.”

a

^aPaul Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Vol. 59. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. xi + 572.

Nota

“Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit. A good lemma also survives a philosophical or technological revolution.”

“... The importance of the result is undisputed, as is shown by the fact that it will shortly turn into a Lemma named after someone else, ...”^a

^aPaul Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Vol. 59. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. xi + 572.

Ainda sobre a nomenclatura

Nota

“Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit. A good lemma also survives a philosophical or technological revolution.”

“... The importance of the result is undisputed, as is shown by the fact that it will shortly turn into a Lemma named after someone else, ...”^a

^aPaul Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Vol. 59. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. xi + 572.

Nota

“The nice thing about standards is that you have so many to choose from.”^a

^aAndrew Tanenbaum, cientista da computação norte-americano.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz .

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz .
- **Regras de inferência:**

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz .
- **Regras de inferência:**
 1. Proposições (neste caso: palavras) obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz , são proposições verdadeiras.

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz .
- **Regras de inferência:**
 1. Proposições (neste caso: palavras) obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz , são proposições verdadeiras.
 2. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz .
- **Regras de inferência:**
 1. Proposições (neste caso: palavras) obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz , são proposições verdadeiras.
 2. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Exercício

Mostrar que $yyxzz$ é um teorema do sistema matemático considerado no exemplo anterior.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente

- **consistente** significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e (menos importante) independente.

- **consistente** significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)
- **independente** significa que nenhum axioma é consequência dos restantes.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e (menos importante) independente.

- **consistente** significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)
- **independente** significa que nenhum axioma é consequência dos restantes.

Alem disso, um sistemas de axiomas diz se **completo** quando para toda a proposição p da teoria se pode deduzir p ou a sua negação $\neg p$.

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e (menos importante) independente.

- **consistente** significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)
- **independente** significa que nenhum axioma é consequência dos restantes.

Alem disso, um sistemas de axiomas diz se **completo** quando para toda a proposição p da teoria se pode deduzir p ou a sua negação $\neg p$.

Por outras palavras, o sistema e **saturado** no sentido que a adição de um qualquer axioma que não é consequência dos axiomas do sistema, torna o sistema não consistente.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

1. Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
2. Todo o segmento de recta está contido numa recta.
3. Dado um ponto C e um real $r > 0$, existe uma única circunferência de centro C e raio r .
4. Todos os ângulos rectos são iguais.
5. *Axioma das paralelas*: dada uma recta e um ponto não pertencente a essa recta, existe uma única recta que contém o ponto e é paralela à recta dada.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.
9. Objetos coincidentes são iguais.
10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

9. Objetos coincidentes são iguais.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

Ou seja, se $x = y$, então $x + z = y + z$.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

9. Objetos coincidentes são iguais.

10. O todo é maior do que a parte.

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

Ou seja, se $x = y$, então $x + z = y + z$.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

Ou seja, se $x = y$, então $x - z = y - z$.

9. Objetos coincidentes são iguais.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

Ou seja, se $x = y$, então $x + z = y + z$.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

Ou seja, se $x = y$, então $x - z = y - z$.

9. Objetos coincidentes são iguais.

Ou seja, se $x = x$.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.

A teoria do David Hilbert tem

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.

A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.

A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.
- Seis relações: ...

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.

A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.
- Seis relações: ...
- Vários axiomas ...

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.

A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.
- Seis relações: ...
- Vários axiomas ...

Nota

“Man muß jederzeit an Stelle von “Punkte, Geraden, Ebenen”
“Tische, Stühle, Bierseidel” sagen können.”^a

^aatribuído ao David Hilbert

Ainda uma curiosidade

Grundlagen der Geometrie - x

https://www.amazon.com/Grundlagen-Geometrie-David-HILBERT/dp/B006CSFQ24

Linux Git Reference Math TV Airlines Downloads Router FCT CT 2015 UA VLC media play... Index of /texlive... Internet Radio... Imported From...

amazon Books

Shop Today's Deals

EN Hello, Sign in Account & Lists Orders Cart

Departments Your Amazon.com Today's Deals Gift Cards Registry Sell Help

Books Advanced Search New Releases Amazon Charts Best Sellers & More The New York Times® Best Sellers Children's Books Textbooks Textbook Rentals Sell Us Your Books

Look inside

Grundlagen der Geometrie Hardcover – 1899

by David HILBERT (Author)

★★★★★ 1 customer review

> See all 38 formats and editions

Hardcover
from \$4,250.00
1 Used from \$4,250.00

Paperback
\$9.57
1 Used from \$12.50
4 New from \$9.57

1 Used from \$4,250.00

1 Used from \$12.50
4 New from \$9.57

Share

1 Used from \$4,250.00

Deliver to Portugal

See All Buying Options

Add to List

Have one to sell? Sell on Amazon

See this image

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000

Conjetura

O que é

Uma **conjetura** é uma afirmação ainda não provada nem “reprovada”. Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Conjetura

O que é

Uma **conjetura** é uma afirmação ainda não provada nem “reprovada”. Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- **Conjectura de Goldbach**: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7, \dots!?$$

Conjetura

O que é

Uma **conjetura** é uma afirmação ainda não provada nem “reprovada”. Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- **Conjectura de Goldbach**: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7, \dots!?$$

- Existe uma infinidade de números primos gémeos.

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \dots!?$$

Conjetura

O que é

Uma **conjetura** é uma afirmação ainda não provada nem “reprovada”. Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- **Conjetura de Goldbach**: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7, \dots!?$$

- Existe uma infinidade de números primos gêmeos.

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \dots!?$$

- A hipótese do continuum. Foi uma conjectura por volta de 1900, entretanto sabemos que

Conjetura

O que é

Uma **conjetura** é uma afirmação ainda não provada nem “reprovada”. Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- **Conjetura de Goldbach**: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2, \quad 6 = 3 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 10 = 3 + 7, \dots!?$$

- Existe uma infinidade de números primos gêmeos.

$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), \dots!?$$

- A hipótese do continuum. Foi uma conjetura por volta de 1900, entretanto sabemos que ... nunca vamos saber.

Bibliografia adicional



PETER J. CAMERON. *Sets, logic and categories*. Springer, 2005.



PAUL R. HALMOS. *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. Princeton, N. J.-
Toronto-New York-London: van Nostrand Reinhold Company, 1960. vii + 104.

Bibliografia adicional



PETER J. CAMERON. *Sets, logic and categories*. Springer, 2005.



PAUL R. HALMOS. *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. Princeton, N. J.-Toronto-New York-London: van Nostrand Reinhold Company, 1960. vii + 104.



SAUNDERS MACLANE. *Mathematics Form and Function*. Springer, 1986.



ANDREJ BAUER. «Five stages of accepting constructive mathematics». Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* **54**.(3) (2016), pp. 481–498.



SAUNDERS MACLANE. «Despite physicists, proof is essential in mathematics». Em: *Synthese* **111**.(2) (1997), pp. 147–154.

Lógica proposicional

- 1 Introdução
- 2 O sintaxe
- 3 A semântica
- 4 Tautologias

Introdução

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos^a – as chamadas **proposições**.

^aO princípio da **não contradição** e princípio do **terceiro excluído**

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos^a – as chamadas **proposições**.

^aO princípio da **não contradição** e princípio do **terceiro excluído**

Exemplos

- “O Porto é campeão” é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos^a – as chamadas **proposições**.

^aO princípio da **não contradição** e princípio do **terceiro excluído**

Exemplos

- “O Porto é campeão” é uma proposição.
- “ $3 < (2 + 7)$ ” é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos^a – as chamadas **proposições**.

^aO princípio da **não contradição** e princípio do **terceiro excluído**

Exemplos

- “O Porto é campeão” é uma proposição.
- “ $3 < (2 + 7)$ ” é uma proposição.
- “ $x = 6$ ” não é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos^a – as chamadas **proposições**.

^aO princípio da **não contradição** e princípio do **terceiro excluído**

Exemplos

- “O Porto é campeão” é uma proposição.
- “ $3 < (2 + 7)$ ” é uma proposição.
- “ $x = 6$ ” não é uma proposição.
- “O Porto é campeão ou não” é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos^a – as chamadas **proposições**.

^aO princípio da **não contradição** e princípio do **terceiro excluído**

Exemplos

- “O Porto é campeão” é uma proposição.
- “ $3 < (2 + 7)$ ” é uma proposição.
- “ $x = 6$ ” não é uma proposição.
- “O Porto é campeão ou não” é uma proposição.
- “Se está chover, então está chover” é uma proposição.

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- “...e ...”,

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação;

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação; no entanto, a frase "Se está chover, então está chover" é verdadeira e nem temos de olhar fora

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação; no entanto, a frase "Se está chover, então está chover" é verdadeira e nem temos de olhar fora Procuramos *formas* de frases tal que, qualquer que seja o conteúdo, a frase é verdadeira.

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação; no entanto, a frase "Se está chover, então está chover" é verdadeira e nem temos de olhar fora Procuramos *formas* de frases tal que, qualquer que seja o conteúdo, a frase é verdadeira.

Decomposição de proposições

Uma proposição pode ser **atômica** ou **composta** por proposições e conetivos (operadores lógicos).

O syntaxe

Fórmulas (bem formadas – “fbf”)

Consideramos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições), e
- **0** e **1** e os conectivos

Negação: \neg (não ...),

Conjunção: \wedge (... e ...),

Disjunção: \vee (... ou ...),

Implicação: \Rightarrow (se ... então ...),

Equivalência: \Leftrightarrow (... se e somente se...).

Fórmulas (bem formadas – “fbf”)

Consideramos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições), e
- **0** e **1** e os conetivos

Negação: \neg (não ...),

Conjunção: \wedge (... e ...),

Disjunção: \vee (... ou ...),

Implicação: \Rightarrow (se ... então ...),

Equivalência: \Leftrightarrow (... se e somente se...).

- Cada variável é uma fórmula, e **0** and **1** são fórmulas.

Fórmulas (bem formadas – “fbf”)

Consideramos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições), e
- **0** e **1** e os conetivos

Negação: \neg (não ...),

Conjunção: \wedge (... e ...),

Disjunção: \vee (... ou ...),

Implicação: \Rightarrow (se ... então ...),

Equivalência: \Leftrightarrow (... se e somente se...).

- Cada variável é uma fórmula, e **0** and **1** são fórmulas.
- Se p e q são fórmulas, então as expressões

$$\neg q, \quad (p \wedge q), \quad (p \vee q), \quad (p \Rightarrow q), \quad (p \Leftrightarrow q)$$

são fórmulas.

Exemplos (de fórmulas)

- $1, 0, p, q, r, \dots$

Exemplos (de fórmulas)

- $1, 0, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$),

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p , q , r , \dots
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $p \Rightarrow \mathbf{0}$, $\neg \mathbf{1}$, \dots

Exemplos (de fórmulas)

- $1, 0, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $p \Rightarrow 0$, $\neg 1$, \dots
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$, $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$, \dots

Exemplos (de fórmulas)

- $1, 0, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $p \Rightarrow 0$, $\neg 1$, \dots
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$, $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$, \dots
- $(p \wedge q) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$, \dots

Exemplos (de fórmulas)

- $1, 0, p, q, r, \dots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $p \Rightarrow 0$, $\neg 1$, \dots
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$, $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$, \dots
- $(p \wedge q) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$, \dots

Exemplos (não são fórmulas)

$(1\ 0)$, $(p\ q\ r)$, $(1 \Rightarrow)$, $(p \Rightarrow \wedge)$, \dots

A semântica

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e
- os conectivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as “tabelas de verdade”):

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as “tabelas de verdade”):

p	$\neg p$
0	1
1	0

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e
- os conectivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as “tabelas de verdade”):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as “tabelas de verdade”):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e
- os conectivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as “tabelas de verdade”):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- **0** interpreta-se por 0 (falso), **1** por 1 (verdadeiro), e
- os conectivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as “tabelas de verdade”):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês. . .

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês. . .

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês. . .

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 5$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 5$. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 5$. (Sim)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 4$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra “se” podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 5$. (Sim)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 4$. (Sim)

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \Rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
0	0	0	1

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \Rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
0	0	0	1

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
1	0	1	0

Tautologias

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para *cada* a interpretação.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- **tautologia** (ou **fórmula válida**) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se **consistente** quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é **inconsistente** (ou uma **contradição**) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para *cada* a interpretação. Portanto,

uma fórmula φ é uma contradição se e só se $\neg\varphi$ é válida.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.
2. *Se $\varphi \equiv \psi$, então $\psi \equiv \varphi$.*

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.
2. Se $\varphi \equiv \psi$, então $\psi \equiv \varphi$.
3. Se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \theta$, então $\varphi \equiv \theta$.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se **equivalentes** (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q).$$

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.
2. Se $\varphi \equiv \psi$, então $\psi \equiv \varphi$.
3. Se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \theta$, então $\varphi \equiv \theta$.

Nota

Se $\varphi \equiv \psi$, então também $\theta \vee \varphi \equiv \theta \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \theta \equiv \psi \Rightarrow \theta$, ...

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

- Idempotência:

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge p) \equiv p.$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

- Idempotência:

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge p) \equiv p.$$

- Distributividade:

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

- Idempotência:

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge p) \equiv p.$$

- Distributividade:

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

- Leis de De Morgan:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \quad \text{e} \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q).$$

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$

- Modus ponens:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

é uma tautologia.

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$

- Modus ponens:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

é uma tautologia.

- Modus tollens:

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

é uma tautologia.

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg \neg p \equiv p.$$

- Modus ponens:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

é uma tautologia.

- Modus tollens:

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

é uma tautologia.

- Corte:

$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$

é uma tautologia.

Ainda mais tautologias

- $\neg 0 \equiv 1$ e $\neg 1 \equiv 0$.

Ainda mais tautologias

- $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$ e $\neg \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv \mathbf{0}$ e $(\neg p \vee p) \equiv \mathbf{1}$.

Ainda mais tautologias

- $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$ e $\neg \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv \mathbf{0}$ e $(\neg p \vee p) \equiv \mathbf{1}$.
- $(p \vee \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$ e $(p \wedge \mathbf{1}) \equiv p$.
- $(p \vee \mathbf{0}) \equiv p$ e $(p \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Ainda mais tautologias

- $\neg 0 \equiv 1$ e $\neg 1 \equiv 0$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv 0$ e $(\neg p \vee p) \equiv 1$.
- $(p \vee 1) \equiv 1$ e $(p \wedge 1) \equiv p$.
- $(p \vee 0) \equiv p$ e $(p \wedge 0) \equiv 0$.
- As fórmulas

$$p \Rightarrow (p \vee q) \quad \text{e} \quad q \Rightarrow (p \vee q)$$

são tautologias.

Ainda mais tautologias

- $\neg 0 \equiv 1$ e $\neg 1 \equiv 0$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv 0$ e $(\neg p \vee p) \equiv 1$.
- $(p \vee 1) \equiv 1$ e $(p \wedge 1) \equiv p$.
- $(p \vee 0) \equiv p$ e $(p \wedge 0) \equiv 0$.
- As fórmulas

$$p \Rightarrow (p \vee q) \quad \text{e} \quad q \Rightarrow (p \vee q)$$

são tautologias.

- As fórmulas

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \quad \text{e} \quad (p \wedge q) \Rightarrow q$$

são tautologias.

Nota

As vezes utiliza-se a expressão “ou” no sentido exclusivo; ou seja “ p ou q mas não ambos”. Neste caso escrevemos

$$p \dot{\vee} q$$

como abreviação de

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$