Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

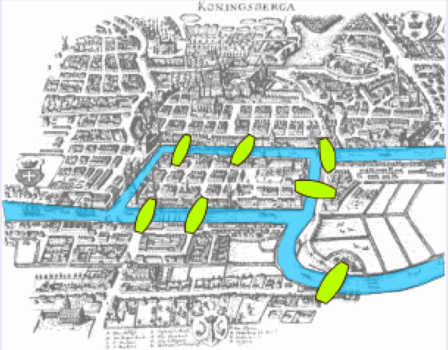
OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Elementos de Teoria dos Grafos

Introdução

As pontes de Königsberg

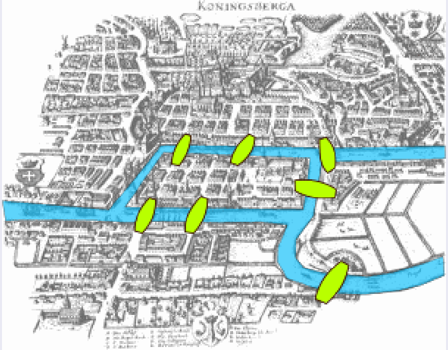
Fazer um passeio . . .



Será possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas?

As pontes de Königsberg

Fazer um passeio ...

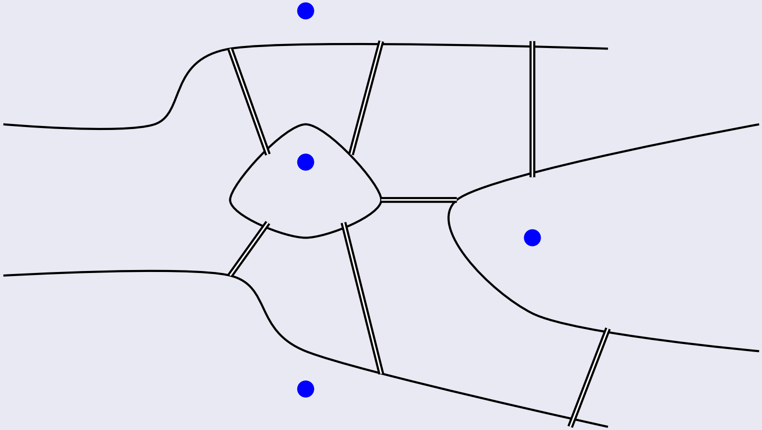


Será possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas? Veremos porque a resposta é "Não"... [a]

[a] Leonhard Euler (1707 – 1783), matemático suíço.

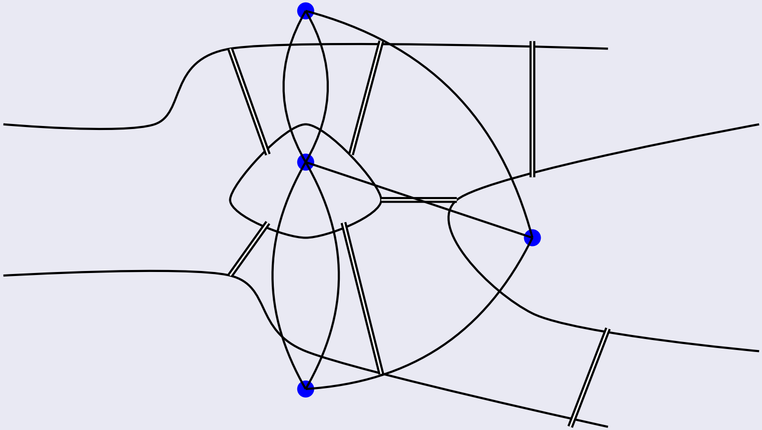
As pontes de Königsberg

Um modelo matemático



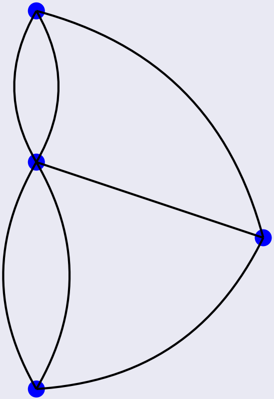
As pontes de Königsberg

Um modelo matemático



As pontes de Königsberg

Um modelo matemático



Índice

Conceitos fundamentais de teoria dos grafos

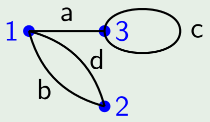
Grafos orientados e não orientados

Definição (grafo não orientado)

Designa-se por grafo (não orientado) um terno $G = (V, E, \psi)$ onde

---

Exemplo



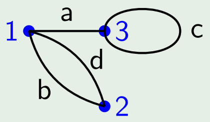
Grafos orientados e não orientados

Definição (grafo não orientado)

Designa-se por grafo (não orientado) um terno $G = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices);

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}$,

Grafos orientados e não orientados

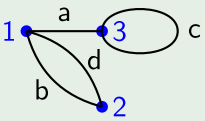
Definição (grafo não orientado)

Designa-se por grafo (não orientado) um terno $G = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices);
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arestas);

E é tipicamente disjunto de V.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c, d\}$,

Grafos orientados e não orientados

Definição (grafo não orientado)

Designa-se por grafo (não orientado) um terno $G = (V, E, \psi)$ onde

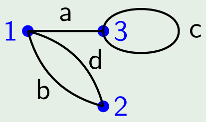
- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices);
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arestas);
- ψ é uma função

$$\psi\colon E \longrightarrow \{A \subseteq V \mid 1 \leq |A| \leq 2\}$$

(a função de incidência do grafo). Para $a \in E$ com $\psi(a) = \{u, v\}$, u e v dizem-se os pontos extremos de a.

E é tipicamente disjunto de V.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c, d\}$,

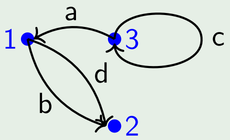
$\psi(a) = \{1, 3\}$, $\psi(b) = \{1, 2\}$,
$\psi(c) = \{3\}$, $\psi(d) = \{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Grafos orientados e não orientados

Definição (grafo orientado)

Designa-se por grafo orientado (ou digrafo) um terno $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ onde

Exemplo



,

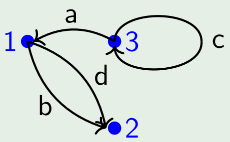
Grafos orientados e não orientados

Definição (grafo orientado)

Designa-se por grafo orientado (ou digrafo) um terno $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices);

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}$,

Grafos orientados e não orientados

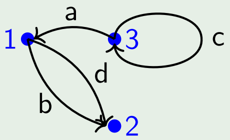
Definição (grafo orientado)

Designa-se por grafo orientado (ou digrafo) um terno $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices);
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arcos);

E é tipicamente disjunto de V.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c, d\}$,

Grafos orientados e não orientados

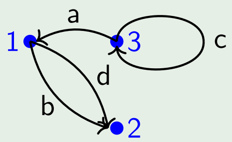
Definição (grafo orientado)

Designa-se por grafo orientado (ou digrafo) um terno $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ onde

- V é um conjunto (os elementos de V chamamos vértices);
- E é um conjunto (os elementos de E chamamos arcos);
- ψ é uma função $\psi\colon E \longrightarrow V \times V$ (a função de incidência do grafo). Para $a \in E$ com $\psi(a) = (u, v)$, u diz-se cauda de a e v diz-se cabeça de a.

E é tipicamente disjunto de V.

Exemplo



$V = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c, d\}$,

$\psi(a) = (3, 1)$, $\psi(b) = (1, 2)$,
$\psi(c) = (3, 3)$, $\psi(d) = (1, 2)$.

Grafos orientados e não orientados

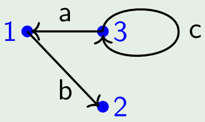
Grafos orientados vs. não-orientados

A cada grafo orientado $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ podemos associar um grafo não orientado $G = (V, E, \widehat{\psi})$ onde

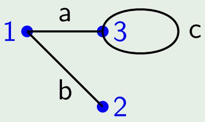
$$\widehat{\psi}(a) = \{u, v\} \text{ precisamente quando } \psi(a) = (u, v)$$

(ou seja, esquecemos a direção dos arcos). Desde modo, vários conceitos de grafos aplicam-se igualmente aos digrafos.

Exemplo



$\rightsquigarrow$



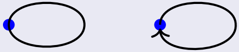
Alguns conceitos

Definição

Alguns conceitos

Definição

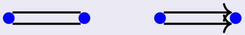
- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se lacete.



Alguns conceitos

Definição

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se lacete.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por arcos paralelos.
  - paralelas:

  - não paralelas:

Alguns conceitos

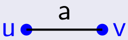
Definição

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se lacete.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por arcos paralelos.
- Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.

Alguns conceitos

Definição

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se lacete.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por arcos paralelos.
- Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se incidente nos seus vértices extremos.

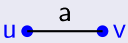


a arresta a é incidente nos vértices u e v.

Alguns conceitos

Definição

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se lacete.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por arcos paralelos.
- Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se incidente nos seus vértices extremos.
- Os vértices u e v dizem-se adjacentes se existe uma aresta (um arco) com pontos extremos u e v.



os vértices u e v são adjacentes.

Alguns conceitos

Definição

- Uma aresta (um arco) com os pontos extremos iguais diz-se lacete.
- Arestas com os mesmos vértices extremos designam-se por arestas paralelas, e arcos com a mesma cauda e a mesma cabeça designam-se por arcos paralelos.
- Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes.
- Uma aresta (um arco) diz-se incidente nos seus vértices extremos.
- Os vértices u e v dizem-se adjacentes se existe uma aresta (um arco) com pontos extremos u e v.
- Arestas (arcos) incidentes num mesmo vértice dizem-se adjacentes.

as arrestas a e b são adjacentes.

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo

Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo

Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

No que se segue, consideramos tipicamente grafos finitos.

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo

Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

No que se segue, consideramos tipicamente grafos finitos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo

Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

No que se segue, consideramos tipicamente grafos finitos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- ordem de G: $\nu(G) = |V|$ (o número de vértices).

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo

Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

No que se segue, consideramos tipicamente grafos finitos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- ordem de G: $\nu(G) = |V|$ (o número de vértices).
- dimensão de G: $\epsilon(G) = |E|$ (o número de arestas).

Ordem e dimensão de um grafo

Definição

Um grafo $G = (V, E, \psi)$ (respetivamente digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$) diz-se finito quando os conjuntos V e E são finitos.

Exemplo

Designa-se por grafo trivial um grafo simples com um único vértice, ou seja, tal que $|V| = 1$ e $E = \varnothing$.

No que se segue, consideramos tipicamente grafos finitos.

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- ordem de G: $\nu(G) = |V|$ (o número de vértices).
- dimensão de G: $\epsilon(G) = |E|$ (o número de arestas).

(E da forma igual para digrafos.)

Grafos simples

Simplificar a notação

Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por multi(di)grafo.

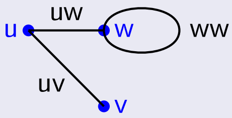
Simplificar a notação

Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por multi(di)grafo.

Nota

Num grafo (respetivamente digrafo) simples, cada aresta (arco) a é completamente determinada(o) pelos vértices extremos u e v (cauda u e cabeça v). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo uv em lugar de a.



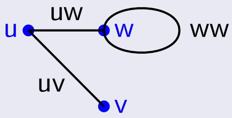
Simplificar a notação

Recordamos:

Um grafo (respetivamente digrafo) diz-se simples quando não contém arestas (arcos) paralelas(os) nem lacetes. (Di)Grafos não simples denota-se também por multi(di)grafo.

Nota

Num grafo (respetivamente digrafo) simples, cada aresta (arco) a é completamente determinada(o) pelos vértices extremos u e v (cauda u e cabeça v). Neste caso escrevemos da forma mais sugestivo uv em lugar de a.



Com esta notação, o (di)grafo (V, E, ψ) é completamente determinado por (V, E) (ou seja, podemos "dispensar" ψ).

Grafos simples complementares

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O grafo complementar de G é o grafo $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ com o mesmo conjunto de vértices e com

$$uv \in E^{\complement} \iff uv \notin E.$$

Grafos simples complementares

Definição

Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O grafo complementar de G é o grafo $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ com o mesmo conjunto de vértices e com

$$uv \in E^{\complement} \iff uv \notin E.$$

Nota

Portanto, $(G^{\complement})^{\complement} = G$.

Grafos simples complementares

Definição

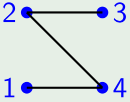
Seja $G = (V, E)$ um grafo simples. O grafo complementar de G é o grafo $G^{\complement} = (V, E^{\complement})$ com o mesmo conjunto de vértices e com

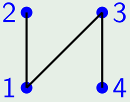
$$uv \in E^{\complement} \iff uv \notin E.$$

Nota

Portanto, $(G^{\complement})^{\complement} = G$.

Exemplo





Vizinhança e grau

O conceito de vizinhança

Definição

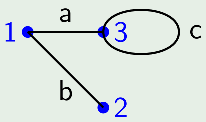
- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$.

O conceito de vizinhança

Definição

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$. O conjunto de todos os vértices adjacentes a v designa-se por vizinhança de v e denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}(v)$).

Exemplo



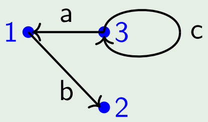
$$\mathcal{N}(1) = \{2, 3\},$$
$$\mathcal{N}(2) = \{1\},$$
$$\mathcal{N}(3) = \{1, 3\}$$

O conceito de vizinhança

Definição

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e $v \in V$. O conjunto de todos os vértices adjacentes a v designa-se por vizinhança de v e denota-se por $\mathcal{N}_G(v)$ (ou simplesmente $\mathcal{N}(v)$).
- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo e $v \in V$. A vizinhança de entrada de v é o conjunto $\mathcal{N}^-(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (u, v)$, e a vizinhança de saída de v é o conjunto $\mathcal{N}^+(v)$ de todos os vértices u tal que existe um $e \in E$ com $\psi(e) = (v, u)$.

Exemplo



$\mathcal{N}^-(1) = \{3\}$, $\mathcal{N}^+(1) = \{2\}$, $\mathcal{N}(1) = \{2, 3\}$
$\mathcal{N}^-(2) = \{1\}$, $\mathcal{N}^+(2) = \varnothing$, $\mathcal{N}(2) = \{1\}$
$\mathcal{N}^-(3) = \{3\}$, $\mathcal{N}^+(3) = \{1, 3\}$, $\mathcal{N}(3) = \{1, 3\}$

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:

$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O menor grau dos vértices do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O menor grau dos vértices do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota

No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideramos ainda

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O menor grau dos vértices do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota

No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideramos ainda

- o semigrau de entrada: $d^{-}(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (u, v)\}|$.

  Ou seja, $d^{-}(v)$ é o número de arcos com “cabeça em v”.

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O menor grau dos vértices do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota

No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideramos ainda

- o semigrau de entrada: $d^{-}(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (u, v)\}|$.
- o semigrau de saida: $d^{+}(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (v, u)\}|$.

  Ou seja, $d^{+}(v)$ é o número de arcos com "cauda em v".

Grau de um vértice (grafo)

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo finito.

- Seja $v \in V$. O grau de v é o número $d(v)$ de arestas incidentes em v (onde cada lacete conta duas vezes).
- O maior grau dos vértices do grafo G denota-se por $\Delta(G)$:
$$\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V\}.$$
- O menor grau dos vértices do grafo G denota-se por $\delta(G)$:
$$\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V\}.$$

Nota

No caso de um digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$, consideramos ainda

- o semigrau de entrada: $d^-(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (u, v)\}|$.
- o semigrau de saida: $d^+(v) = |\{e \mid \exists u \in V\ \psi(e) = (v, u)\}|$.
- **Nota:** $d(v) = d^-(v) + d^+(v)$.

A matriz de incidência

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A matriz de incidência (aresta-vértice) de G é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

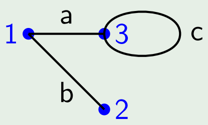
Representação por matrizes

A matriz de incidência

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A matriz de incidência (aresta-vértice) de G é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

Exemplo



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

Representação por matrizes

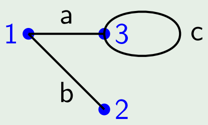
A matriz de incidência

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A matriz de incidência (aresta-vértice) de G é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (v, a) \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } v \notin \psi(a), \\ 1 & \text{se } \psi(a) = \{u, v\} \text{ com } u \neq v, \\ 2 & \text{se } \psi(a) = \{v\}. \end{cases}$$

Nota: Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da "coluna a" é 2. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da "linha v" é o grau de v.

Exemplo



	a	b	c
1	1	1	0
2	0	1	0
3	1	0	2

Representação por matrizes

A matriz de incidência

Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito) sem lacetes. A matriz de incidência (aresta-vértice) de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$V \times E \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$(v, a) \longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(a), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(a), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

A matriz de incidência

Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito) sem lacetes. A matriz de incidência (aresta-vértice) de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \epsilon$ definida por

$$\begin{aligned} V \times E &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (v, a) &\longmapsto \begin{cases} -1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (u, v) = \psi(a), \\ 1 & \text{se existe } u \in V \text{ com } (v, u) = \psi(a), \\ 0 & \text{nos outros casos.} \end{cases} \end{aligned}$$

Nota: Para cada $a \in E$, a soma sobre todos os elementos da "coluna a" é 0. Para cada $v \in V$, a soma sobre todos os elementos da "linha v" é igual a $d^+(v) - d^-(v)$.

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ *finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

$\square$

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

- Para cada "linha v", a soma das entradas desta linha é igual ao $d(v)$.

$\square$

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

- Para cada "linha v", a soma das entradas desta linha é igual ao $d(v)$. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $\sum_{v \in V} d(v)$.

$\square$

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

- Para cada "linha v", a soma das entradas desta linha é igual ao $d(v)$. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $\sum_{v \in V} d(v)$.
- Para cada "coluna a", a soma das entradas desta coluna é igual à 2.

$\square$

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Demonstração.

Somamos de duas maneiras diferentes as entradas da matriz de incidência de G:

- Para cada "linha v", a soma das entradas desta linha é igual ao $d(v)$. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $\sum_{v \in V} d(v)$.
- Para cada "coluna a", a soma das entradas desta coluna é igual à 2. Portanto, a soma de todas as entradas da matriz de incidência é igual à $2|E|$.

$\square$

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ *finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

Intermezzo: alguns resultados básicos

Teorema

Para todo o grafo $G = (V, E, \psi)$ finito, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas, ou seja,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Corolário

O número de vértices de grau ímpar é par.

Teorema

Para todo o digrafo $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ finito,

$$\sum_{v \in V} d^{+}(v) = \sum_{v \in V} d^{-}(v) = |E|.$$

Representação por matrizes

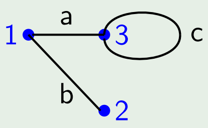
As matrizes de adjacência

Representação por matrizes

As matrizes de adjacência

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A matriz de adjacência de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes).

Exemplo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	2

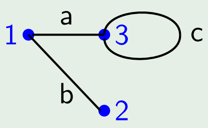
Representação por matrizes

As matrizes de adjacência

- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A matriz de adjacência de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes).

  Nota: Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna u (ou linha u) é igual ao grau de u.

Exemplo



	1	2	3
1	0	1	1
2	1	0	0
3	1	0	2

Representação por matrizes

As matrizes de adjacência

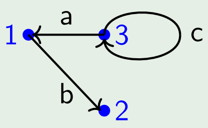
- Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo (finito). A matriz de adjacência de G é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ com entrada (u, v) igual a número de arestas entre u e v (cada lacete conta duas vezes).

  Nota: Esta matriz é simétrica e a soma sobre os elementos da coluna u (ou linha u) é igual ao grau de u.

- Seja $\overrightarrow{G} = (V, E, \psi)$ um digrafo (finito). A matriz de adjacência de $\overrightarrow{G}$ é a matriz do tipo $\nu \times \nu$ definida por

$$V \times V \longmapsto \mathbb{R}, \quad (u, v) \longmapsto |\{a \in E \mid \psi(a) = (u, v)\}|.$$

Exemplo



	1	2	3
1	0	1	0
2	0	0	0
3	1	0	1

Representação de grafos em computador

Utilizando matrizes

Pode-se representar um (bi)grafo pela

Representação de grafos em computador

Utilizando matrizes

Pode-se representar um (bi)grafo pela

- matriz de adjacência: utiliza ν^2 células de memória.

Representação de grafos em computador

Utilizando matrizes

Pode-se representar um (bi)grafo pela

- matriz de adjacência: utiliza ν^2 células de memória.
- matriz de incidência: utiliza $\nu \times \epsilon$ células de memória.

Representação de grafos em computador

Utilizando matrizes

Pode-se representar um (bi)grafo pela

- matriz de adjacência: utiliza ν^2 células de memória.
- matriz de incidência: utiliza $\nu \times \epsilon$ células de memória.

Utilizando listas

Pode-se representar um (bi)grafo

Representação de grafos em computador

Utilizando matrizes

Pode-se representar um (bi)grafo pela

- matriz de adjacência: utiliza ν^2 células de memória.
- matriz de incidência: utiliza $\nu \times \epsilon$ células de memória.

Utilizando listas

Pode-se representar um (bi)grafo

- pela lista $(uv, uw, \dots)$ das arestas. Esta representação utiliza ϵ células de memória. (Perde-se informação sobre vértices isolados.)

Representação de grafos em computador

Utilizando matrizes

Pode-se representar um (bi)grafo pela

- matriz de adjacência: utiliza ν^2 células de memória.
- matriz de incidência: utiliza $\nu \times \epsilon$ células de memória.

Utilizando listas

Pode-se representar um (bi)grafo

- pela lista $(uv, uw, \dots)$ das arestas. Esta representação utiliza ϵ células de memória. (Perde-se informação sobre vértices isolados.)
- com duas listas

$$F = (f_1, \dots, f_\epsilon) \quad \text{e} \quad T = (t_1, \dots, t_\epsilon)$$

(que representam as arestas entre f_i e t_i).

Representação de grafos em computador

Utilizando listas

Pode-se representar um (bi)grafo

- pelas ν listas de sucessores (ou de adjacência), uma por cada vértice.

  A cada vértice v faz-se corresponder a lista de todos os vértices que lhe são adjacentes (ou todos os vértices que são cabeça de um arco com cauda em v se o grafo é orientado), com eventual repetição no caso de multigrafos.

Grafos isomorfos e subgrafos

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Nota

- Para cada grafo $G = (V, E, \psi)$, as identidades $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ e $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ definem um isomorfismo de G em G.

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Nota

- Para cada grafo $G = (V, E, \psi)$, as identidades $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ e $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ definem um isomorfismo de G em G.
- Para cada isomorfismo de G em H, as funções $\varphi^{-1}\colon V_H \to V_G$ e $\theta^{-1}\colon E_H \to E_G$ definem um isomorfismo de H em G.

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Nota

- Para cada grafo $G = (V, E, \psi)$, as identidades $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ e $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ definem um isomorfismo de G em G.
- Para cada isomorfismo de G em H, as funções $\varphi^{-1}\colon V_H \to V_G$ e $\theta^{-1}\colon E_H \to E_G$ definem um isomorfismo de H em G.
- As compostas de isomorfismos são isomorfismos.

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Nota

- Para cada grafo $G = (V, E, \psi)$, as identidades $\mathrm{id}_V\colon V \to V$ e $\mathrm{id}_E\colon E \to E$ definem um isomorfismo de G em G.
- Para cada isomorfismo de G em H, as funções $\varphi^{-1}\colon V_H \to V_G$ e $\theta^{-1}\colon E_H \to E_G$ definem um isomorfismo de H em G.
- As compostas de isomorfismos são isomorfismos.
- TPC: Define homomorfismo de grafos e observe que *os isomorfismos são os homomorfismos invertíveis*.

Isomorfismos de grafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma "uv", a função θ acima é completamente determinada por φ:

$$\theta(uv) = \varphi(u)\varphi(v).$$

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. Um isomorfismo de G em H é um par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ de funções bijetivas tais que, para todos os $e \in E_G$ e $u, v \in V_G$,

$$(\psi_G(e) = \{u, v\}) \iff (\psi_H(\theta(e)) = \{\varphi(u), \varphi(v)\}).$$

(No caso de digrafos, escreve-se (u, v) em lugar de $\{u, v\}$.)

Nota

No caso de grafos simples, e denotando as arestas da forma "uv", a função θ acima é completamente determinada por φ:

$$\theta(uv) = \varphi(u)\varphi(v).$$

Portanto, um isomorfismo entre grafos simples (V_G, E_G) e (V_H, E_H) é dado por uma função bijetiva $\varphi\colon V_G \to V_H$ tal que, para todos os $u, v \in V_G$: $uv \in E_G \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E_H$.

Grafos isomorfos

Definição

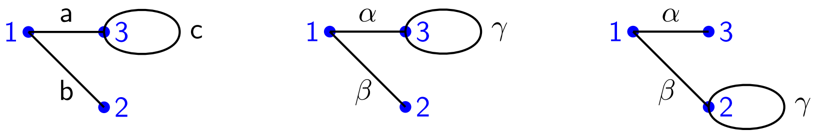
Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Grafos isomorfos

Definição

Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Intuitivamente, grafos isomorfos são “iguais a menos da etiquetação dos vértices e aresta”.



Grafos isomorfos

Definição

Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Nota

Grafos isomorfos tem "as mesmas propriedades de grafos". Mais concretamente, sendo o par $\varphi \colon V_G \to V_H$ e $\theta \colon E_G \to E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

Grafos isomorfos

Definição

Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Nota

Grafos isomorfos tem "as mesmas propriedades de grafos". Mais concretamente, sendo o par $\varphi \colon V_G \to V_H$ e $\theta \colon E_G \to E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão: $\nu(G) = \nu(H)$ e $\epsilon(G) = \epsilon(H)$.

Grafos isomorfos

Definição

Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Nota

Grafos isomorfos tem "as mesmas propriedades de grafos". Mais concretamente, sendo o par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão: $\nu(G) = \nu(H)$ e $\epsilon(G) = \epsilon(H)$.
- G é simples se e só se H é simples.

Grafos isomorfos

Definição

Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Nota

Grafos isomorfos tem "as mesmas propriedades de grafos". Mais concretamente, sendo o par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão: $\nu(G) = \nu(H)$ e $\epsilon(G) = \epsilon(H)$.
- G é simples se e só se H é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau: para cada $v \in V_G$, $d_G(v) = d_H(\varphi(v))$.

Grafos isomorfos

Definição

Dois (di)grafos dizem-se isomorfos quando existe um isomorfismo entre eles.

Nota

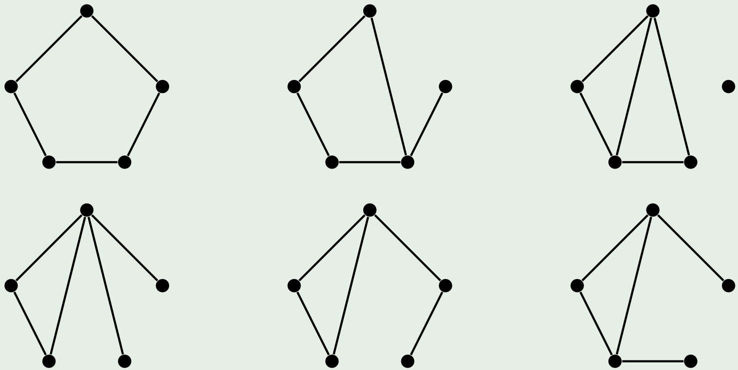
Grafos isomorfos tem "as mesmas propriedades de grafos". Mais concretamente, sendo o par $\varphi\colon V_G \to V_H$ e $\theta\colon E_G \to E_H$ um isomorfismo entre os grafos $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ (finitos). Então:

- Os grafos têm a mesma ordem e a mesma dimensão: $\nu(G) = \nu(H)$ e $\epsilon(G) = \epsilon(H)$.
- G é simples se e só se H é simples.
- Vértices correspondentes têm o mesmo grau: para cada $v \in V_G$, $d_G(v) = d_H(\varphi(v))$.
- Portanto: $\Delta(G) = \Delta(H)$ e $\delta(G) = \delta(H)$.

Um exemplo

Exemplo

Representação gráfica de todos os grafos simples não isomorfos, com 5 vértices e 5 arestas:



Subgrafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se subgrafo de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H.

Subgrafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se subgrafo de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H. Neste caso também se diz que G é um supergrafo de H.

Subgrafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se subgrafo de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H. Neste caso também se diz que G é um supergrafo de H.

Nota

Cada grafo é subgrafo de si próprio.

Subgrafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se subgrafo de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H. Neste caso também se diz que G é um supergrafo de H.

Nota

Cada grafo é subgrafo de si próprio. Se H é um subgrafo de G e $H \neq G$, então diz-se que H é um subgrafo próprio de G.

Subgrafos

Definição

Sejam $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ e $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ grafos. O grafo H diz-se subgrafo de G quando $V_H \subseteq V_G$, $E_H \subseteq E_G$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto E_H. Neste caso também se diz que G é um supergrafo de H.

Nota

Cada grafo é subgrafo de si próprio. Se H é um subgrafo de G e $H \neq G$, então diz-se que H é um subgrafo próprio de G.

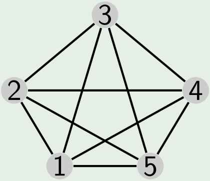
Definição

Um subgrafo $H = (V_H, E_H, \psi_H)$ de $G = (V_G, E_G, \psi_G)$ diz-se abrangente quando $V_H = V_G$.

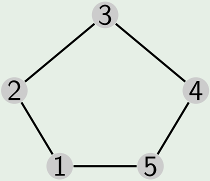
Exemplos

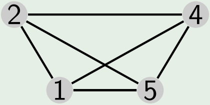
Exemplos

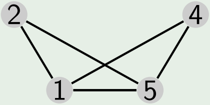
Considere o seguinte grafo G.



Alguns subgrafos de G:







Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

Tem-se $G = G[V]$ mas em geral $G[E] \neq G$.

Para o grafo G

o grafo $G[E]$ é o grafo

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

- Por definição, $G[V - \widehat{V}]$ é o sugrafo gerado pelo complemento de $\widehat{V}$, e escrevemos simplesmente $G - \widehat{V}$. Ainda mais, se $\widehat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

- Por definição, $G[V - \widehat{V}]$ é o sugrafo gerado pelo complemento de $\widehat{V}$, e escrevemos simplesmente $G - \widehat{V}$. Ainda mais, se $\widehat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.
- Denota-se por $G - \widehat{E}$ o subgrafo *abrangente* cujo conjunto de arestas é $E - \widehat{E}$. Se $\widehat{E} = \{e\}$ então usa-se a notação $G - e$.

Subgrafos induzidos

Definição

Seja $G = (V, E, \psi)$ um grafo e sejam $\widehat{V} \subseteq V$ e $\widehat{E} \subseteq E$.

- O subgrafo $G[\widehat{V}]$ de G induzido por $\widehat{V}$ é o grafo cujo conjunto vértices é $\widehat{V}$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto das arestas de G com extremos em $\widehat{V}$.
- O subgrafo $G[\widehat{E}]$ de G induzido por $\widehat{E}$ é o grafo cujo conjunto de arestas é $\widehat{E}$ e cujo conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de $\widehat{E}$.

Nota

- Por definição, $G[V - \widehat{V}]$ é o sugrafo gerado pelo complemento de $\widehat{V}$, e escrevemos simplesmente $G - \widehat{V}$. Ainda mais, se $\widehat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.
- Denota-se por $G - \widehat{E}$ o subgrafo *abrangente* cujo conjunto de arestas é $E - \widehat{E}$. Se $\widehat{E} = \{e\}$ então usa-se a notação $G - e$. **Atenção**: Em geral $G[E - \widehat{E}]$ e $G - \widehat{E}$ são distintos.