Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Séries e funções geradoras

Introdução

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n = \text{o número de maneiras de fazer algo}^a \text{ com } n \text{ objetos.}$$

[a] ordenar, permutar, pintar, formar equipas de futebol, ...

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

A estratégia

Para descobrir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é útil de

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

A estratégia

Para descobrir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é útil de

- decompor o problema em problemas mais simples;

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

A estratégia

Para descobrir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é útil de

- decompor o problema em problemas mais simples;
- para o tal, é importante de saber como "compor soluções",

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

A estratégia

Para descobrir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é útil de

- decompor o problema em problemas mais simples;
- para o tal, é importante de saber como "compor soluções",
- e como calcular com as sucessões associadas.

Introdução

A questão

Em problemas de contagem, queremos tipicamente descobrir uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ onde

$$a_n = \text{o número de maneiras de fazer algo com } n \text{ objetos.}$$

A estratégia

Para descobrir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, é útil de

- decompor o problema em problemas mais simples;
- para o tal, é importante de saber como "compor soluções",
- e como calcular com as sucessões associadas.

O cálculo com estas sucessões é uma generalização do cálculo com polinómios, por isso é conveniente escrever $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como uma *série formal*:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Índice

1. Séries formais de potências
2. Operações com séries formais
3. Interpretação combinatorial
4. Séries vs. funções
5. A derivada e o integral
6. Voltando às equações de recorrência

Séries formais de potências

O que é?

Séries formais de potências

Uma série formal de potências é dada por uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números (naturais, racionais, ...ou até complexas); mas escrevemos mais intuitivamente (com algum símbolo x)

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

O que é?

Séries formais de potências

Uma série formal de potências é dada por uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números (naturais, racionais, ... ou até complexas); mas escrevemos mais intuitivamente (com algum símbolo x)

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Nota

- O "somatório" na definição acima é apenas notação (não somamos nada).

O que é?

Séries formais de potências

Uma série formal de potências é dada por uma sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números (naturais, racionais, ...ou até complexas); mas escrevemos mais intuitivamente (com algum símbolo x)

$$\mathcal{A} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Nota

- O "somatório" na definição acima é apenas notação (não somamos nada).
- A série formal $\mathcal{A}$ é igual a série formal

  $$\mathcal{B} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

  se e só se $a_n = b_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- “escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$”:

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 +$$

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 +$$

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots$$

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \dots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \dots, n\}$":

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \dots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \dots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \ldots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$$

- "colocar n bolas numa única caixa (suficientemente grande)":

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \ldots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$$

- "colocar n bolas numa única caixa (suficientemente grande)":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \dots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \dots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$$

- "colocar n bolas numa única caixa com no máximo 4 lugares":

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \ldots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$$

- "colocar n bolas numa única caixa com no máximo 4 lugares":

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + 0x^5 + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \ldots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$$

- "colocar n bolas numa única caixa com exatamente 4 lugares":

Exemplos

Exemplos

Determinamos a série formal correspondente ao problema de contar as maneiras de

- "escolher 3 elementos em $\{1, 2, \ldots, n\}$":

$$0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 + \binom{4}{3}x^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{3} x^n$$

- "escolher uma parte (um subconjunto) de $\{1, \ldots, n\}$":

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \ldots$$

- "colocar n bolas numa única caixa com exatamente 4 lugares":

$$0 + 0x + 0x^2 + 0x^3 + 1x^4 + 0x^5 + \cdots = x^4$$

Exemplos

- Cada número a podemos interpretar como a série

$$a = a + 0x + 0x^2 + \dots.$$

Exemplos

- Cada número a podemos interpretar como a série

$$a = a + 0x + 0x^2 + \dots .$$

Em particular:

$$\begin{aligned} \text{a série nula:} \qquad & 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots . \\ \text{a série “um”:} \qquad & 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots . \end{aligned}$$

Números e polinómios

Exemplos

- Cada número a podemos interpretar como a série

$$a = a + 0x + 0x^2 + \dots .$$

  Em particular:

$$\begin{aligned} \text{a série nula:} \qquad & 0 = 0 + 0x + 0x^2 + \dots . \\ \text{a série ``um'':} \qquad & 1 = 1 + 0x + 0x^2 + \dots . \end{aligned}$$

- Os polinómios $a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ podemos identificar como as séries formais

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k + 0x^{k+1} + 0x^{k+2} + \dots .$$

Operações com séries formais

As operações mais simples

. . . é um espaço vetorial

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

As operações mais simples

. . . é um espaço vetorial

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

- Multiplicação por um escalar:

$$\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$$

As operações mais simples

. . . é um espaço vetorial

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

- Multiplicação por um escalar:

$$\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$$

- A série nula

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$$

é o *elemento neutro* da adição.

As operações mais simples

. . . é um espaço vetorial

- Soma:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

- Multiplicação por um escalar:

$$\alpha \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n) x^n$$

- A série nula

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 x^n$$

  é o *elemento neutro* da adição.

- Verificam-se: comutatividade, associatividade, ...

Exemplo

Exemplo (os números de Fibonacci)

Recordamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci é definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Exemplo

Exemplo (os números de Fibonacci)

Recordamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci é definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Utilizando a notação de séries formais:

$$\mathcal{F} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots.$$

Exemplo

Exemplo (os números de Fibonacci)

Recordamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci é definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Utilizando a notação de séries formais:

$$\mathcal{F} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots .$$

Observamos:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\ + & & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 \end{array}$$

Exemplo

Exemplo (os números de Fibonacci)

Recordamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci é definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Utilizando a notação de séries formais:

$$\mathcal{F} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots.$$

Observamos:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\
+ & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144
\end{array}$$

Exemplo

Exemplo (os números de Fibonacci)

Recordamos que a sucessão $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos números de Fibonacci é definida por

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Utilizando a notação de séries formais:

$$\mathcal{F} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \dots.$$

Observamos:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 \\
+ & \color{red}{1} & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \\
\hline
 & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144
\end{array}$$

Daqui em breve expressamos este cálculo mais elegante . . . .

A operação "mais importante" ...

O produto

Para as séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, definimos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. A série formal $1 + 0x + 0x^2 + \ldots$ é o *elemento neutro* da multiplicação.

A operação "mais importante" ...

O produto

Para as séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, definimos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. A série formal $1 + 0x + 0x^2 + \ldots$ é o *elemento neutro* da multiplicação.

Nota

Para os polinómios (vistos como séries formais), o produto definido acima coincide com o produto habitual de polinómios.

A operação "mais importante" ...

O produto

Para as séries formais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, definimos:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. A série formal $1 + 0x + 0x^2 + \dots$ é o *elemento neutro* da multiplicação.

Nota

Para os polinómios (vistos como séries formais), o produto definido acima coincide com o produto habitual de polinómios.

Exemplo

Para cada $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

Exemplos

Exemplo

$$(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)$$

Exemplos

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\
&= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\
&\quad + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots)
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\
&= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\
&\qquad + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots) \\
&= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots .
\end{aligned}
$$

Exemplos

Exemplo

$$\begin{aligned}(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &\quad + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots) \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots .\end{aligned}$$

Nota

Para séries formais $\mathcal{A} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ e $\mathcal{B}$:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)\mathcal{B}$$

Exemplos

Exemplo

$$
\begin{aligned}
(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= (1+x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\
&= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots) \\
&\quad + (a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4 + \dots) \\
&= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots .
\end{aligned}
$$

Nota

Para séries formais $\mathcal{A} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ e $\mathcal{B}$:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)\mathcal{B} = a_0\mathcal{B} + (a_1x + a_2x^2 + \dots)\mathcal{B}$$

Exemplos

Exemplo

$$\begin{aligned}(1+x)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) &= (1+x)(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &= (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\ &\qquad + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \dots) \\ &= a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \dots .\end{aligned}$$

Nota

Para séries formais $\mathcal{A} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$ e $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)\mathcal{B} &= a_0\mathcal{B} + (a_1 x + a_2 x^2 + \dots)\mathcal{B} \\ &= a_0\mathcal{B} + x(a_1 + a_2 x + \dots)\mathcal{B}.\end{aligned}$$

A séries inversa

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se série inversa da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\,\mathcal{B} = 1$.

A séries inversa

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se série inversa da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$.

Nota: Dada $\mathcal{A}$, se existe, uma tal série $\mathcal{B}$ é única e escrevemos $\mathcal{A}^{-1}$ em lugar de $\mathcal{B}$.

A séries inversa

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se série inversa da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\,\mathcal{B} = 1$.

Nota: Dada $\mathcal{A}$, se existe, uma tal série $\mathcal{B}$ é única e escrevemos $\mathcal{A}^{-1}$ em lugar de $\mathcal{B}$.

Exemplo

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

A séries inversa

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se série inversa da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$.

Nota: Dada $\mathcal{A}$, se existe, uma tal série $\mathcal{B}$ é única e escrevemos $\mathcal{A}^{-1}$ em lugar de $\mathcal{B}$.

Exemplo

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= (1+x+x^2+x^3+x^4+\dots) \\ &\quad -(x+x^2+x^3+x^4+\dots)\end{aligned}$$

A séries inversa

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se série inversa da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$.

Nota: Dada $\mathcal{A}$, se existe, uma tal série $\mathcal{B}$ é única e escrevemos $\mathcal{A}^{-1}$ em lugar de $\mathcal{B}$.

Exemplo

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &\qquad - (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= 1;\end{aligned}$$

A séries inversa

Definição

Uma série $\mathcal{B}$ diz-se série inversa da série $\mathcal{A}$ quando $\mathcal{A}\,\mathcal{B} = 1$.

Nota: Dada $\mathcal{A}$, se existe, uma tal série $\mathcal{B}$ é única e escrevemos $\mathcal{A}^{-1}$ em lugar de $\mathcal{B}$.

Exemplo

$$\begin{aligned}(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &\qquad - (x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots) \\ &= 1;\end{aligned}$$

ou seja, $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é a série inversa da série $(1-x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Mais exemplos

Exemplos

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

Mais exemplos

Exemplos

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}.$$

De facto:

$$\mathcal{A} = 1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + (\alpha x)^3 + \dots$$

Mais exemplos

Exemplos

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

De facto:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + (\alpha x)^3 + \dots \\ &= 1 + (\alpha x)\left(1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

Mais exemplos

Exemplos

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

De facto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + (\alpha x)^3 + \dots \\
&= 1 + (\alpha x)\left(1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + \dots\right) \\
&= 1 + (\alpha x)\,\mathcal{A},
\end{aligned}$$

Mais exemplos

Exemplos

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$$

De facto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + (\alpha x)^3 + \dots \\
&= 1 + (\alpha x)\left(1 + \alpha x + (\alpha x)^2 + \dots\right) \\
&= 1 + (\alpha x)\,\mathcal{A},
\end{aligned}$$

portanto, $\mathcal{A}\,(1 - \alpha x) = 1$.

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Em particular, para $m = 2$ e $\alpha = 1$:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n,$$

ou seja

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Verificamos: $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right)^m.$$

Utilizamos "Agrupamentos e Identidades Combinatórias", a última página.

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Verificamos: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right)^m.$

De facto, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ onde c_n é igual a

Utilizamos "Agrupamentos e Identidades Combinatórias", a última página.

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Verificamos: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right)^m.$

De facto, $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ onde c_n é igual a

$$\sum_{k=0}^{n}$$

Utilizamos "Agrupamentos e Identidades Combinatórias", a última página.

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Verificamos: $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right)^m.$

De facto, $\displaystyle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ onde c_n é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m-1} \alpha^k \alpha^{n-k}$$

Utilizamos "Agrupamentos e Identidades Combinatórias", a última página.

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Verificamos: $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right)^m.$

De facto, $\displaystyle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ onde c_n é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m-1} \alpha^k \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=m-1}^{n+m-1} \binom{k}{m-1}$$

Utilizamos “Agrupamentos e Identidades Combinatórias”, a última página.

Mais exemplos

Exemplo

Utilizando indução, para cada $m \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ prova-se:

$$\frac{1}{(1-\alpha x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n.$$

Verificamos: $\displaystyle \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{m-1} \alpha^n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right)^m.$

De facto, $\displaystyle \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right)^m \left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ onde c_n é igual a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+m-1}{m-1} \alpha^k \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=m-1}^{n+m-1} \binom{k}{m-1} = \alpha^n \binom{n+m}{m}.$$

Utilizamos "Agrupamentos e Identidades Combinatórias", a última página.

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Consideramos série $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$:

$$\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Consideramos série $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\ &= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n\end{aligned}$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Consideramos série $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right)
\end{aligned}$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Consideramos série $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n &= f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right) \\
&= 1 + x + x(\mathcal{F} - 1) + x^2 \mathcal{F};
\end{aligned}$$

Os números de Fibonacci (outra vez)

Exemplo

Consideramos série $\mathcal{F}$ da sucessão de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n = f_0 + f_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} f_n x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} x^n \\
&= 1 + x + x\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n\right) + x^2\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n\right) \\
&= 1 + x + x(\mathcal{F} - 1) + x^2\mathcal{F};
\end{aligned}$$

portanto, $\mathcal{F} - x\mathcal{F} - x^2\mathcal{F} = 1$, logo $\mathcal{F} = (1 - x - x^2)^{-1}$.

Séries invertíveis

Definição

A série formal $\mathcal{A}$ diz-se invertível quando existe uma série formal $\mathcal{B}$ com $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$ (ou seja, quando $\mathcal{A}$ tem inversa).

Séries invertíveis

Definição

A série formal $\mathcal{A}$ diz-se invertível quando existe uma série formal $\mathcal{B}$ com $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$ (ou seja, quando $\mathcal{A}$ tem inversa).

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que

Séries invertíveis

Definição

A série formal $\mathcal{A}$ diz-se invertível quando existe uma série formal $\mathcal{B}$ com $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$ (ou seja, quando $\mathcal{A}$ tem inversa).

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que

$$1 = a_0 b_0 \qquad \rightsquigarrow \quad b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \text{supondo que} \quad a_0 \neq 0,$$

Séries invertíveis

Definição

A série formal $\mathcal{A}$ diz-se invertível quando existe uma série formal $\mathcal{B}$ com $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$ (ou seja, quando $\mathcal{A}$ tem inversa).

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que

$$1 = a_0 b_0 \quad \rightsquigarrow \quad b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \text{supondo que} \quad a_0 \neq 0,$$

$$0 = a_0 b_1 + a_1 b_0 \quad \rightsquigarrow \quad b_1 = -\frac{1}{a_0} a_1 b_0,$$

Séries invertíveis

Definição

A série formal $\mathcal{A}$ diz-se invertível quando existe uma série formal $\mathcal{B}$ com $\mathcal{A}\mathcal{B} = 1$ (ou seja, quando $\mathcal{A}$ tem inversa).

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que

$$
\begin{aligned}
1 &= a_0 b_0 & &\rightsquigarrow & b_0 &= \frac{1}{a_0} \qquad \text{supondo que} \quad a_0 \neq 0, \\
0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 & &\rightsquigarrow & b_1 &= -\frac{1}{a_0} a_1 b_0, \\
&\vdots \\
0 &= a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 & &\rightsquigarrow & b_n &= -\frac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0).
\end{aligned}
$$

Agora salta . . .

Séries invertíveis

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que

$$
\begin{aligned}
1 &= a_0 b_0 && \rightsquigarrow \quad b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \text{supondo que} \quad a_0 \neq 0, \\
0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 && \rightsquigarrow \quad b_1 = -\frac{1}{a_0} a_1 b_0, \\
&\vdots \\
0 &= a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 && \rightsquigarrow \quad b_n = -\frac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0).
\end{aligned}
$$

Séries invertíveis

E quando é?

Dada $\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$, procuramos $\mathcal{B} = \sum_{k=0}^{\infty} b_n x^n$ tal que

$$
\begin{aligned}
1 &= a_0 b_0 & \rightsquigarrow \quad & b_0 = \frac{1}{a_0} \qquad \text{supondo que} \quad a_0 \neq 0, \\
0 &= a_0 b_1 + a_1 b_0 & \rightsquigarrow \quad & b_1 = -\frac{1}{a_0} a_1 b_0, \\
&\vdots & & \\
0 &= a_0 b_n + \cdots + a_n b_0 & \rightsquigarrow \quad & b_n = -\frac{1}{a_0}(a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0).
\end{aligned}
$$

Conclusão: $\mathcal{A}$ é invertível se e só se $a_0 \neq 0$ e a inversa $\mathcal{B}$ satisfaz

$$\mathcal{B} = \frac{-1}{a_0}\left(-1 + x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n\right)\mathcal{B}\right).$$

Interpretação combinatorial

Interpretação combinatorial (objetos "indistinguíveis")

A ideia

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

Interpretação combinatorial (objetos "indistinguíveis")

A ideia

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ estão a contar?

Interpretação combinatorial (objetos "indistinguíveis")

A ideia

Para um *problema de contagem "A"* e um *problema de contagem "B"*, com as séries correspondentes

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A}\,\mathcal{B}$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

Interpretação combinatorial (objetos “indistinguíveis”)

A ideia

Para um *problema de contagem “A”* e um *problema de contagem “B”*, com as séries correspondentes

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

- partir uma coleção de n objetos “idênticos” em duas partes E_1 (de k elementos) e E_2 (de $n-k$ elementos) disjuntas,

Interpretação combinatorial (objetos “indistinguíveis”)

A ideia

Para um *problema de contagem “A”* e um *problema de contagem “B”*, com as séries correspondentes

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

- partir uma coleção de n objetos “idênticos” em duas partes E_1 (de k elementos) e E_2 (de $n-k$ elementos) disjuntas,
- aplicar o problema “A” a E_1, e

Interpretação combinatorial (objetos “indistinguíveis”)

A ideia

Para um *problema de contagem “A”* e um *problema de contagem “B”*, com as séries correspondentes

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad e \quad \mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

o que os coeficientes $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ do produto $\mathcal{A}\mathcal{B}$ estão a contar?

De facto, c_n é igual ao número de maneiras de

- partir uma coleção de n objetos “idênticos” em duas partes E_1 (de k elementos) e E_2 (de $n-k$ elementos) disjuntas,
- aplicar o problema “A” a E_1, e
- aplicar o problema “B” a E_2.

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n - k$ elementos);

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n-k$ elementos);
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $k \leq 2$ e é "impossível" para $k > 2$;

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n-k$ elementos);
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $k \leq 2$ e é "impossível" para $k > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n - k$ elementos);
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $k \leq 2$ e é "impossível" para $k > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n-k$ elementos);
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $k \leq 2$ e é "impossível" para $k > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots).$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n tais objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes disjuntas: E_1 (k elementos) e E_2 ($n-k$ elementos);
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $k \leq 2$ e é "impossível" para $k > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3+x^4+\dots).$$

Em particular, $c_4 = 3$.

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2). \\ &\qquad \text{[Um produto de 5 séries]} \\ &= (1+x)^3(1+x+x^2)^2\end{aligned}$$

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2).$$

[Um produto de 5 séries]

$$= (1+x)^3(1+x+x^2)^2$$

$$= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$$

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2). \\
&\quad \text{[Um produto de 5 séries]} \\
&= (1+x)^3(1+x+x^2)^2 \\
&= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4) \\
&= 1+5x+12x^2+18x^3+18x^4+12x^5+5x^6+1x^7.
\end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos idênticos em cinco caixas numeradas de modo que hajam no máximo um objeto nas primeiras três caixas e no máximo dois objetos nas últimas duas caixas.

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n &= (1+x)(1+x)(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2).\\ &\qquad \text{[Um produto de 5 séries]}\\ &= (1+x)^3(1+x+x^2)^2\\ &= (1+3x+3x^2+x^3)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)\\ &= 1+5x+12x^2+18x^3+18x^4+12x^5+5x^6+1x^7.\end{aligned}$$

Logo, há $c_4 = 18$ tais maneiras.

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \ldots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n-k$ elementos),

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n-k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n-k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar "A" ao conjunto E_1,

E se os objetos são “distinguíveis”?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem “A” e “B”, e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar “A” resp. “B” ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n - k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar “A” ao conjunto E_1, há a_k maneiras;

E se os objetos são “distinguíveis”?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem “A” e “B”, e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar “A” resp. “B” ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n - k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar “A” ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar “B” ao conjunto E_2,

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n-k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar "A" ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar "B" ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

E se os objetos são “distinguíveis”?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem “A” e “B”, e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar “A” resp. “B” ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n - k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar “A” ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar “B” ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

Logo, c_n é igual à

E se os objetos são “distinguíveis”?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem “A” e “B”, e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar “A” resp. “B” ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \ldots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n - k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar “A” ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar “B” ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

Logo, c_n é igual à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} =$$

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \ldots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n - k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar "A" ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar "B" ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

Logo, c_n é igual à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} =$$

E se os objetos são “distinguíveis”?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem “A” e “B”, e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar “A” resp. “B” ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \ldots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n - k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar “A” ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar “B” ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

Logo, c_n é igual à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!};$$

E se os objetos são "distinguíveis"?

Outra vez, consideramos

problemas de contagem "A" e "B", e a_n e b_n denotam o número de maneiras de aplicar "A" resp. "B" ao um conjunto de n elementos.

Seja c_n o número de maneiras de

- partir $\{1, \dots, n\}$ numa parte E_1 (com k elementos) e numa parte E_2 (com $n-k$ elementos), há $\binom{n}{k}$ maneiras;
- aplicar "A" ao conjunto E_1, há a_k maneiras;
- aplicar "B" ao conjunto E_2, há b_{n-k} maneiras.

Logo, c_n é igual à

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!};$$

por isso $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}\right).$$

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$;

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = (1 + x + \frac{1}{2}x^2)(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots).$$

Exemplo

Exemplo

Determinamos o número de maneiras de distribuir quatro objetos numerados em duas caixas numeradas de modo que hajam no máximo dois objetos na primeira caixa.

Mais geral, se temos n objetos, para os distribuir temos de

- dividir a coleção em duas partes E_1 e E_2 disjuntas;
- os objetos de E_1 destinam-se à primeira caixa, portanto, "há uma maneira" se $|E_1| \leq 2$ e é "impossível" para $|E_1| > 2$;
- os objetos de E_2 destinam-se à segunda caixa; portanto "há uma maneira".

Sendo c_n o número de maneiras de ..., então

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n = (1 + x + \frac{1}{2}x^2)(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots).$$

Em particular, $c_4 = 11$.

Séries associadas ao problemas de combinatória

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um “problema de contagem” e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de} \dots \text{ com } n \text{ objetos,}$$

consideramos as seguintes séries.

Séries associadas ao problemas de combinatória

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um "problema de contagem" e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de} \dots \text{ com } n \text{ objetos},$$

consideramos as seguintes séries.

- a série geradora ordinária de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

  $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

  Utilizamos esta série no caso de "objetos indistinguíveis": bolas iguais, votação secreta, ...

Séries associadas ao problemas de combinatória

As séries ordinárias e exponenciais

Dada um "problema de contagem" e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de } \dots \text{ com } n \text{ objetos,}$$

consideramos as seguintes séries.

- a série geradora ordinária de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$
Utilizamos esta série no caso de "objetos indistinguíveis": bolas iguais, votação secreta, ...
- a série geradora exponencial de $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n.$$
Utilizamos esta série no caso de "objetos distinguíveis": bolas enumeradas ou de cores diferentes, votação aberta, ...

Algumas igualdades úteis

Para calcular com séries geradoras

Algumas igualdades úteis

Para calcular com séries geradoras

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$

Algumas igualdades úteis

Para calcular com séries geradoras

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}.$

- Mais geral:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}.$$

Algumas igualdades úteis

Para calcular com séries geradoras

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1 - \alpha x}.$

- Mais geral:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}.$$

- Para cada $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m.$$

Séries vs. funções

Séries $\rightsquigarrow$ funções

Recordamos do Cálculo

- Interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$,

Séries $\rightsquigarrow$ funções

Recordamos do Cálculo

- Interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$, então existe um R com $0 \leq R \leq \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente, para cada $x \in \left]-R, R\right[$.

Séries $\rightsquigarrow$ funções

Recordamos do Cálculo

- Interpretando a série formal $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ como uma série de potências em $\mathbb{R}$, então existe um R com $0 \leq R \leq \infty$ (o raio de convergência) tal que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente, para cada $x \in \left]-R, R\right[$.
- Se $R > 0$, associamos à série $\mathcal{A}$ a função

$$f_{\mathcal{A}} \colon \left]-R, R\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

A função $f_{\mathcal{A}}$ admite derivadas de cada ordem em $\left]-R, R\right[$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_kt^k.$$

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$
2. A série (formal) $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ tem o raio de convergência

   $R =$

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$
2. A série (formal) $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ tem o raio de convergência $R = 0 \dots$ por isso não vale a pena considerar a função correspondente.

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_k t^k.$$
3. A série (formal) $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência

   $R =$

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_kx^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_kt^k.$$
3. A série (formal) $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência $R = \frac{1}{2}$; portanto, a série $\mathcal{A}$ defina a função
$$\mathcal{A} \colon \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^n t^n = \frac{1}{1-2t}.$$

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$ defina a função polinomial
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k.$$
3. A série (formal) $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência $R = \frac{1}{2}$; portanto, a série $\mathcal{A}$ defina a função
$$\mathcal{A} \colon \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^n t^n = \frac{1}{1-2t}.$$
4. A série (formal) $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ tem o raio de convergência $R =$

Exemplos

Exemplos

1. Um polinómio $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$ defina a função polinomial

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k.$$

3. A série (formal) $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^n$ tem o raio de convergência $R = \frac{1}{2}$; portanto, a série $\mathcal{A}$ defina a função

$$\mathcal{A} \colon \left]\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^n t^n = \frac{1}{1-2t}.$$

4. A série (formal) $\mathcal{A} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$ tem o raio de convergência $R = \infty$; portanto, a série $\mathcal{A}$ defina a função

$$\mathcal{A} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,

  Aqui: $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

  Aqui: $(f \cdot g)(t) = f(t) \cdot g(t)$

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

Exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right) =$$

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

Exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) =$$

Interpretação combinatorial: "Partir $\{1, \dots, n\}$ em duas partes".

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

Exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n\right)= \qquad\qquad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{}{n!}x^n.$$

Interpretação combinatorial: "Partir $\{1,\dots,n\}$ em duas partes".

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

Exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = \qquad\qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$$

Interpretação combinatorial: “Partir $\{1, \dots, n\}$ em duas partes”.

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

Exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = e^x \cdot e^x \qquad = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$$

Interpretação combinatorial: "Partir $\{1, \dots, n\}$ em duas partes".

Transportar o cálculo

Nota

O cálculo com séries corresponde ao cálculo com funções (o que é as vezes mais simples). Mais concretamente:

- a série nula corresponde à função nula,
- a soma de séries formais corresponde à soma de funções,
- a multiplicação por escalares de séries formais corresponde à multiplicação por escalares de funções,
- o produto de séries formais corresponde ao produto de funções.

Exemplo

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = e^x \cdot e^x = e^{2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n.$$

Interpretação combinatorial: "Partir $\{1, \dots, n\}$ em duas partes".

Funções geradoras

Funções geradoras ordinária e exponencial

Dada um “problema de contagem” e a correspondente sucessão

$$c_n = \text{o número de maneiras de} \ldots \text{ com } n \text{ objetos},$$

a função correspondente à série geradora ordinária

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

diz-se função geradora ordinária, e a função correspondente à série geradora exponencial

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n$$

diz-se função geradora exponencial.

Exemplos

Exemplos

- A função geradora ordinária f da sucessão dos números de Fibonacci $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (definida por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $(n \geq 2)$) é dada por

$$f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}.$$

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja,

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$.

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de combinações sem repetição de n objetos k a k; ou seja,

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de combinações sem repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = \binom{n}{k}$.

Exemplos

Exemplos

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de arranjos com repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = n^k$. Então, a função geradora exponencial correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = e^{nx}.$$

- Seja $n \in \mathbb{N}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja c_k o número de combinações sem repetição de n objetos k a k; ou seja, $c_k = \binom{n}{k}$. Então, a função geradora ordinária correspondente f é definida por

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

A derivada e o integral

Mais duas operações com séries formais

Definição

Seja

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

uma série de potências formal. Então,

Mais duas operações com séries formais

Definição

Seja

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

uma série de potências formal. Então,

- a derivada de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal

$$\mathcal{A}' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Mais duas operações com séries formais

Definição

Seja

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

uma série de potências formal. Então,

- a derivada de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal

$$\mathcal{A}' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

- o integral de $\mathcal{A}$ é a série de potências formal

$$\int \mathcal{A} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Calcular com a derivada e o integral

Séries formais vs. funções

Calcular com a derivada e o integral

Séries formais vs. funções

- As séries de potências formais $\mathcal{A}'$ e $\int \mathcal{A}$ têm o mesmo raio de convergência como a série $\mathcal{A}$.

Calcular com a derivada e o integral

Séries formais vs. funções

- As séries de potências formais $\mathcal{A}'$ e $\int \mathcal{A}$ têm o mesmo raio de convergência como a série $\mathcal{A}$.
- Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A}$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries.

  Mais concretamente,

Calcular com a derivada e o integral

Séries formais vs. funções

- As séries de potências formais $\mathcal{A}'$ e $\int \mathcal{A}$ têm o mesmo raio de convergência como a série $\mathcal{A}$.
- Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A}$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries.

  Mais concretamente,

  - a função definida pela série formal $\mathcal{A}'$ é a derivada da função definida pela série $\mathcal{A}$;

Calcular com a derivada e o integral

Séries formais vs. funções

- As séries de potências formais $\mathcal{A}'$ e $\int \mathcal{A}$ têm o mesmo raio de convergência como a série $\mathcal{A}$.
- Dentro do intervalo de convergência da série $\mathcal{A}$, a derivada (formal) e o integral (formal) correspondem às operações com as funções definidas pelas séries.

  Mais concretamente,

  - a função definida pela série formal $\mathcal{A}'$ é a derivada da função definida pela série $\mathcal{A}$;
  - para cada elemento x do intervalo de convergência,

$$\left(\int \mathcal{A}\right)(x) = \int_0^x \mathcal{A}(t)dt.$$

Calcular com a derivada e o integral

As operações algébricas

As operações "derivada" e "integral" com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

Calcular com a derivada e o integral

As operações algébricas

As operações "derivada" e "integral" com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ e $\int(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \int\mathcal{A} + \int\mathcal{B}$;

Calcular com a derivada e o integral

As operações algébricas

As operações “derivada” e “integral” com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ e $\int(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \int\mathcal{A} + \int\mathcal{B}$;
- $(\alpha\,\mathcal{A})' = \alpha\,\mathcal{A}'$ e $\int(\alpha\,\mathcal{A}) = \alpha\int\mathcal{A}$;

Calcular com a derivada e o integral

As operações algébricas

As operações "derivada" e "integral" com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ e $\int(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \int\mathcal{A} + \int\mathcal{B}$;
- $(\alpha\,\mathcal{A})' = \alpha\,\mathcal{A}'$ e $\int(\alpha\,\mathcal{A}) = \alpha\int\mathcal{A}$;
- $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})' = \mathcal{A}'\,\mathcal{B} + \mathcal{A}\,\mathcal{B}'$;

Calcular com a derivada e o integral

As operações algébricas

As operações "derivada" e "integral" com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ e $\int(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \int\mathcal{A} + \int\mathcal{B}$;
- $(\alpha\,\mathcal{A})' = \alpha\,\mathcal{A}'$ e $\int(\alpha\,\mathcal{A}) = \alpha\int\mathcal{A}$;
- $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})' = \mathcal{A}'\,\mathcal{B} + \mathcal{A}\,\mathcal{B}'$;
- se $\mathcal{A}$ é invertível, então

$$\left(\mathcal{A}^{-1}\right)' = -\mathcal{A}'\mathcal{A}^{-2}.$$

Notação mais intuitiva:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\right)' = -\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}^2}.$$

Calcular com a derivada e o integral

As operações algébricas

As operações "derivada" e "integral" com as séries formais obedecem as regras conhecidas do cálculo com funções:

- $(\mathcal{A}+\mathcal{B})' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}'$ e $\int(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \int\mathcal{A} + \int\mathcal{B}$;
- $(\alpha\,\mathcal{A})' = \alpha\,\mathcal{A}'$ e $\int(\alpha\,\mathcal{A}) = \alpha\int\mathcal{A}$;
- $(\mathcal{A}\,\mathcal{B})' = \mathcal{A}'\,\mathcal{B} + \mathcal{A}\,\mathcal{B}'$;
- se $\mathcal{A}$ é invertível, então

  $$\left(\mathcal{A}^{-1}\right)' = -\mathcal{A}'\mathcal{A}^{-2}.$$

  Notação mais intuitiva:

  $$\left(\frac{1}{\mathcal{A}}\right)' = -\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}^2}.$$

- Para cada série formal $\mathcal{A}$: $(\int\mathcal{A})' = \mathcal{A}$.

Exemplos

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =$$

$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exemplos

Exemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n =$$
$$x\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exemplo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) = \left(\int\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) =$$
$$\int(1-x)^{-1} = \int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-x).$$

Voltando às equações de recorrência

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \qquad (*)$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \qquad (*)$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n\geq 1}.$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \qquad (*)$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n \geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão constante $(-1)_{n \geq 1}$ é uma solução de $(*)$;

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \tag{$*$}$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n \geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão constante $(-1)_{n\geq 1}$ é uma solução de $(*)$; assim, a solução geral de $(*)$ é dada por

$$(c \cdot 2^n - 1)_{n \geq 1}.$$

Voltando às equações de recorrência

Exemplo (Torre de Hanói)

Recordamos que o número mínimo de passos necessários para transportar n discos da origem ao destino é dado pelas equações

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1. \qquad (*)$$

Utilizando os métodos introduzidos anteriormente, consideramos primeiro a equação homogénea $a_n = 2a_{n-1}$, cuja solução geral é

$$(c \cdot 2^n)_{n\geq 1}.$$

Também verifica-se facilmente que a sucessão constante $(-1)_{n\geq 1}$ é uma solução de $(*)$; assim, a solução geral de $(*)$ é dada por

$$(c \cdot 2^n - 1)_{n\geq 1}.$$

Finalmente, tendo em conta a condição inicial $a_1 = 1$, obtemos $1 = 2c - 1$, ou seja, $c = 1$.

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n$$

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n$$

$$= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1)x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned}$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$a_n = 2a_{n-1} + 1 \quad (\text{para } n \geq 2) \quad \text{e} \qquad a_1 = 1.$$

Agora utilizamos a série geradora ordinária $\mathcal{A} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};
\end{aligned}$$

Agora salta ...

. . . e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty}(2a_{n-1}+1)x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1}x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

...e com séries geradoras

Exemplo (Torre de Hanói)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
&= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\
&= (\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n + 1) - (\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1)
\end{aligned}
$$

Exemplo (Torre de Hanói)

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = x + \sum_{n=2}^{\infty} (2a_{n-1} + 1) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} 2a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} x^n = x + 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= x + 2x\mathcal{A} + \frac{x^2}{1-x} = 2x\mathcal{A} + \frac{x}{1-x};\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{A} = \frac{1}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x} \\ &= (\sum_{n=1}^{\infty} (2x)^n + 1) - (\sum_{n=1}^{\infty} x^n + 1) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n - 1) x^n.\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\ &= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \; (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \; a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + 6x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \; (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \; a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad x^n \quad + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad x^n
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad x^n \quad + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad x^n \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - a_0) + 6x^2 \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad x^n \quad + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad x^n \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A}
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \ (n \geq 2), \qquad a_0 = 3,\ a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad x^n \quad + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad x^n \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A} \\
&= (6x^2 + x)\mathcal{A} + x + 3;
\end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

$$a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2} \; (n \geq 2), \qquad a_0 = 3, \; a_1 = 4.$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= 3 + 4x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + 6 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \\
&= 3 + 4x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad x^n \quad + 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad x^n \\
&= 3 + 4x + x(\mathcal{A} - 3) + 6x^2 \mathcal{A} \\
&= (6x^2 + x)\mathcal{A} + x + 3;
\end{aligned}$$

logo, $\mathcal{A} = \dfrac{x+3}{-6x^2 - x + 1} = \dfrac{x+3}{(1-3x)(1+2x)}$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{1}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{1}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

com $x = \frac{1}{3}$ obtemos $A = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$.

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consideramos agora

$$\frac{1}{(1-3x)(1+2x)} = \frac{A}{1-3x} + \frac{B}{1+2x};$$

multiplicando ambos os lados por $(1-3x)$ obtemos

$$\frac{1}{1+2x} = A + \frac{B(1-3x)}{1+2x},$$

com $x = \frac{1}{3}$ obtemos $A = \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$. De forma semelhante obtém-se $B = \frac{2}{5}$, por isso

$$\mathcal{A} = \frac{3}{5}\,\frac{x+3}{1-3x} + \frac{2}{5}\,\frac{x+3}{1+2x}.$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\mathcal{A} = (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\ &= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n\end{aligned}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}
$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n =$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} +$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} +$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\ &= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\ &= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} +$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x}\\ &= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n\\ &= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$a_n = \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} + \frac{6 \cdot (-2)^n}{5}$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}
$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} + \frac{6 \cdot (-2)^n}{5} \\
&= 2 \cdot 3^n + (-2)^n
\end{aligned}
$$

Mais um exemplo (continuação)

Exemplo

Consequentemente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= (x+3)\frac{3}{5}\frac{1}{1-3x} + (x+3)\frac{2}{5}\frac{1}{1+2x} \\
&= (x+3)\frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + (x+3)\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n \\
&= \frac{3}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} + \frac{9}{5}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + \frac{2}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{n+1} + \frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^n.
\end{aligned}$$

Assim, para $n \geq 1$, o coeficiente de x^n é

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{3^n}{5} + \frac{9 \cdot 3^n}{5} + \frac{2 \cdot (-2)^{n-1}}{5} + \frac{6 \cdot (-2)^n}{5} \\
&= 2 \cdot 3^n + (-2)^n
\end{aligned}$$

(e também para $n = 0$: $a_0 = 2 + 1 = 3$).

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

- Escrever $\mathcal{A}$ na forma

$$\mathcal{A} = (\text{polinómio 1}) \left(\cdots + \frac{\text{constante}}{1-\lambda_i x} + \frac{\text{constante}}{(1-\lambda_i x)^2} + \dots \right)$$

Resumindo

Resolver uma equação de recorrência com séries geradoras

- Desenvolver a série $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ utilizando a equação de recorrência e as condições inicias até
- obtemos

$$\mathcal{A} = \frac{\text{polinómio 1}}{\text{polinómio 2}} = \frac{\text{polinómio 1}}{(1-\lambda_1 x)^{n_1} \dots (1-\lambda_k x)^{n_k}}.$$

- Escrever $\mathcal{A}$ na forma

$$\mathcal{A} = (\text{polinómio 1}) \left(\cdots + \frac{\text{constante}}{1-\lambda_i x} + \frac{\text{constante}}{(1-\lambda_i x)^2} + \dots \right)$$

- Recordar (e utilizar) que

$$\frac{1}{(1-\lambda x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \lambda^n x^n.$$

Mais uma vez: algumas igualdades úteis

Para calcular com séries/funções geradoras

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$.
- Mais geral: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m+n-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.
- Para cada $m \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m$.
- Mais geral, para cada $r \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = (1+x)^r$ onde

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}, \qquad \binom{r}{0} = 1.$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \end{aligned}$$

Exemplo

Vamos resolver o sistema de equações de recorrência

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1} + b_{n-1} + 1 \\ b_n &= a_{n-1} + 2b_{n-1} + 2^{n-1} \end{aligned}\right\} \quad (n \geq 1) \quad \text{e} \quad a_0 = b_0 = 0.$$

Com $\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ e $\mathcal{B} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \\ &= 0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= 2x \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} x^{n-1} + x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \\ &= 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}. \end{aligned}$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned} (1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x}, \\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x}; \end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.
Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.
Assim, temos

$$\begin{aligned}(1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x},\\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x};\end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix}(1-2x) & -x\\ -x & (1-2x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{A}\\ \mathcal{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{x}{1-x}\\ \frac{x}{1-2x}\end{bmatrix}.$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Portanto, $\mathcal{A} = 2x\mathcal{A} + x\mathcal{B} + \frac{x}{1-x}$.

Utilizando a segunda equação, obtém-se $\mathcal{B} = x\mathcal{A} + 2x\mathcal{B} + \frac{x}{1-2x}$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}(1-2x)\mathcal{A} - x\mathcal{B} &= \frac{x}{1-x},\\ -x\mathcal{A} + (1-2x)\mathcal{B} &= \frac{x}{1-2x};\end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{bmatrix}(1-2x) & -x\\ -x & (1-2x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{A}\\ \mathcal{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{x}{1-x}\\ \frac{x}{1-2x}\end{bmatrix}.$$

Agora precisamos paciência ...

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

Sistemas de equações de recorrência

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$[a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)]$$

Sistemas de equações de recorrência

$$\begin{bmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x} \end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{bmatrix}(1-2x) & -x \\ -x & (1-2x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathcal{A} \\ \mathcal{B}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{x}{1-x} \\ \frac{x}{1-2x}\end{bmatrix}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix}(1-2x) & -x \\ -x & (1-2x)\end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix}\frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x)\end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{vmatrix}(1-2x) & \frac{x}{1-x} \\ -x & \frac{x}{1-2x}\end{vmatrix} = x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Exemplo (continuação)

Utilizamos a *regra do Cramer*, por isso precisamos:

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & -x \\ -x & (1-2x) \end{vmatrix} = (1-2x)^2 - x^2 = (1-x)(1-3x),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{1-x} & -x \\ \frac{x}{1-2x} & (1-2x) \end{vmatrix} = \frac{x(1-2x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-2x} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)(1-2x)},$$

$$\begin{vmatrix} (1-2x) & \frac{x}{1-x} \\ -x & \frac{x}{1-2x} \end{vmatrix} = x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{x}{1-x}.$$

Portanto:

$$\mathcal{A} = \frac{x-3x^2+3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)}, \qquad \mathcal{B} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Sistemas de equações de recorrência

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\mathcal{B} = \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x}\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\ &= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x}\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n.
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \frac{x}{(1-x)^2(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^n.
\end{aligned}$$

Conclusão:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(n+1) + \frac{3}{4}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\mathcal{A} = \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\ &= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x}\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x}
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n.
\end{aligned}$$

Exemplo (continuação)

Agora calculamos:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \frac{x - 3x^2 + 3x^3}{(1-x)^2(1-2x)(1-3x)} \\
&= \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{C}{1-2x} + \frac{D}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-2x} + \frac{3}{4}\,\frac{1}{1-3x} \\
&= -\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+1}{n}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n + \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty}(3x)^n.
\end{aligned}
$$

Conclusão:

$$
(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - 2^n + \frac{3}{4}3^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.
$$