Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Teoria de Conjuntos

Conjuntos

A noção de conjunto

Introdução

Discutivelmente, a noção mais básica de matemática é a de conjunto que formaliza a observação básica que frequentemente encontramos de "coleção de objetos": um conjunto é "algo que pode ter elementos".

A noção de conjunto

Introdução

Discutivelmente, a noção mais básica de matemática é a de conjunto que formaliza a observação básica que frequentemente encontramos de “coleção de objetos”: um conjunto é “algo que pode ter elementos”.

- Expressamos a propriedade “x é um elemento de X” como

$$x \in X.$$

  Nesta situação diz-se que x pertence a X; e escreve-se $x \notin X$ quando x não pertence ao X.

A noção de conjunto

Introdução

Discutivelmente, a noção mais básica de matemática é a de conjunto que formaliza a observação básica que frequentemente encontramos de "coleção de objetos": um conjunto é "algo que pode ter elementos".

- Expressamos a propriedade "x é um elemento de X" como

$$x \in X.$$

  Nesta situação diz-se que x pertence a X; e escreve-se $x \notin X$ quando x não pertence ao X.
- Se X tem um número finito de elementos, podemos apresentar X enunciando simplesmente os seus elementos entre chavetas; por exemplo:

$$\{\text{azul, verde, vermelho}\}, \quad \{a, b, c, d\}, \quad \{1, 2, \dots, 1000\}.$$

Igualdade e subconjuntos

- Os conjuntos X e Y são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos

  $X = Y$ quando, para todo o x, $x \in X$ se e somente se $x \in Y$.

Igualdade e subconjuntos

- Os conjuntos X e Y são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos

  $X = Y$ quando, para todo o x, $x \in X$ se e somente se $x \in Y$.
- Existe um (único) conjunto que não tem elementos. Este conjunto denota-se por $\varnothing$; portanto, para todo o x, $x \notin \varnothing$.

Igualdade e subconjuntos

- Os conjuntos X e Y são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos

  $X = Y$ quando, para todo o x, $x \in X$ se e somente se $x \in Y$.

- Existe um (único) conjunto que não tem elementos. Este conjunto denota-se por $\varnothing$; portanto, para todo o x, $x \notin \varnothing$.
- Diz-se que o conjunto X está contido no conjunto Y, $X \subseteq Y$ quando cada elemento de X também pertence a Y:

  $$X \subseteq Y \text{ quando, para todo o } x,\ x \in X \text{ implica } x \in Y.$$

  Neste caso diz-se também que Y contém X ou que X é um subconjunto de Y.

Igualdade e subconjuntos

- Os conjuntos X e Y são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos

  $X = Y$ quando, para todo o x, $x \in X$ se e somente se $x \in Y$.
- Existe um (único) conjunto que não tem elementos. Este conjunto denota-se por $\varnothing$; portanto, para todo o x, $x \notin \varnothing$.
- Diz-se que o conjunto X está contido no conjunto Y, $X \subseteq Y$ quando cada elemento de X também pertence a Y:

  $$X \subseteq Y \text{ quando, para todo o } x,\ x \in X \text{ implica } x \in Y.$$

  Neste caso diz-se também que Y contém X ou que X é um subconjunto de Y.
- Para todo o conjunto X: $\varnothing \subseteq X$.

Igualdade e subconjuntos

- Os conjuntos X e Y são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos

  $X = Y$ quando, para todo o x, $x \in X$ se e somente se $x \in Y$.

- Existe um (único) conjunto que não tem elementos. Este conjunto denota-se por $\varnothing$; portanto, para todo o x, $x \notin \varnothing$.
- Diz-se que o conjunto X está contido no conjunto Y, $X \subseteq Y$ quando cada elemento de X também pertence a Y:

  $$X \subseteq Y \text{ quando, para todo o } x,\ x \in X \text{ implica } x \in Y.$$

  Neste caso diz-se também que Y contém X ou que X é um subconjunto de Y.

- Para todo o conjunto X: $\varnothing \subseteq X$.
- Assim, $X = Y$ se e somente se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.

Igualdade e subconjuntos

- Os conjuntos X e Y são iguais quando têm exatamente os mesmos elementos

  $X = Y$ quando, para todo o x, $x \in X$ se e somente se $x \in Y$.

- Existe um (único) conjunto que não tem elementos. Este conjunto denota-se por $\varnothing$; portanto, para todo o x, $x \notin \varnothing$.
- Diz-se que o conjunto X está contido no conjunto Y, $X \subseteq Y$ quando cada elemento de X também pertence a Y:

  $$X \subseteq Y \text{ quando, para todo o } x,\ x \in X \text{ implica } x \in Y.$$

  Neste caso diz-se também que Y contém X ou que X é um subconjunto de Y.

- Para todo o conjunto X: $\varnothing \subseteq X$.
- Assim, $X = Y$ se e somente se $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$.
- Diz-se que X é um subconjunto próprio de Y quando $X \subseteq Y$ e $X \neq Y$. Notação: $X \subsetneq Y$.

Igualdade e subconjuntos (cont.)

- Para cada conjunto X e cada propriedade (aplicável aos elementos de X) podemos formar o conjunto de todos os elementos de X que satisfazem esta propriedade. Este conjunto denota-se por

  $$\{x \in X \mid \dots\} \qquad \text{ou} \qquad \{x \in X : \dots\}$$

  onde em lugar de "$\dots$" escreve-se a propriedade em causa.

Igualdade e subconjuntos (cont.)

- Para cada conjunto X e cada propriedade (aplicável aos elementos de X) podemos formar o conjunto de todos os elementos de X que satisfazem esta propriedade. Este conjunto denota-se por

$$\{x \in X \mid \dots\} \qquad \text{ou} \qquad \{x \in X : \dots\}$$

onde em lugar de "$\dots$" escreve-se a propriedade em causa.

Aqui não somos muito precisos sobre a formulação desta propriedade, que depende do contexto. Esperamos que estes dois exemplos ajudem:

$$\begin{aligned} \{0,1,2,3\} &= \{n \in \mathbb{N} \mid n < 4\}, \\ \{a, o, u\} &= \{x \in \{a, c, m, o, p, u, z\} \mid x \text{ é um vogal}\}. \end{aligned}$$

Exemplo

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Exemplo

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que 6 divide n.

Consequentemente, n é par.

Exemplo

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que 6 divide n. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ com $n = 6m$. Consequentemente, n é par.

Exemplo

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que 6 divide n. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ com $n = 6m$. Portanto, $n = 2(3m)$. Consequentemente, n é par.

Exemplo

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que 6 divide n. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ com $n = 6m$. Portanto, $n = 2(3m)$. Consequentemente, n é par.

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \neq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Exemplo

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que 6 divide n. Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ com $n = 6m$. Portanto, $n = 2(3m)$. Consequentemente, n é par.

Exemplo

Mostre que

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\} \neq \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}.$$

De facto, $2 \in \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ é par}\}$ mas $2 \notin \{n \in \mathbb{N} \mid 6 \text{ divide } n\}$.

A álgebra dos subconjuntos

Nota

Tipicamente fixamos um universo $\mathcal{U}$ e consideramos apenas partes de $\mathcal{U}$.

A álgebra dos subconjuntos

Nota

Tipicamente fixamos um universo $\mathcal{U}$ e consideramos apenas partes de $\mathcal{U}$.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{U} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Neste caso:

A álgebra dos subconjuntos

Nota

Tipicamente fixamos um universo $\mathcal{U}$ e consideramos apenas partes de $\mathcal{U}$.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{U} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Neste caso:

- $\{x \mid x \text{ é par}\} =$

Nota

Tipicamente fixamos um universo $\mathcal{U}$ e consideramos apenas partes de $\mathcal{U}$.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{U} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Neste caso:

- $\{x \mid x \text{ é par}\} = \{4, 6\}$.

A álgebra dos subconjuntos

Nota

Tipicamente fixamos um universo $\mathcal{U}$ e consideramos apenas partes de $\mathcal{U}$.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{U} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Neste caso:

- $\{x \mid x \text{ é par}\} = \{4, 6\}$.
- $\{x \mid x \text{ é ímpar}\} = \{x \mid x \text{ é primo}\}$ porque

A álgebra dos subconjuntos

Nota

Tipicamente fixamos um universo $\mathcal{U}$ e consideramos apenas partes de $\mathcal{U}$.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{U} = \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Neste caso:

- $\{x \mid x \text{ é par}\} = \{4, 6\}$.
- $\{x \mid x \text{ é ímpar}\} = \{x \mid x \text{ é primo}\}$ porque

$$\{x \mid x \text{ é ímpar}\} = \{3, 5, 7\} = \{x \mid x \text{ é primo}\}.$$

A álgebra dos subconjuntos

Para os conjuntos A e B de $\mathcal{U}$:

A álgebra dos subconjuntos

Para os conjuntos A e B de $\mathcal{U}$:

- A interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A e a B:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

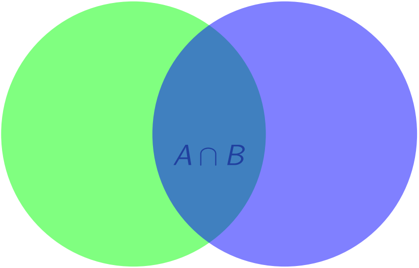


Diagrama de Venn

A álgebra dos subconjuntos

Para os conjuntos A e B de $\mathcal{U}$:

- A interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A e a B:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

- A união de A e B é o conjunto $A \cup B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A ou a B:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

A álgebra dos subconjuntos

Para os conjuntos A e B de $\mathcal{U}$:

- A interseção de A e B é o conjunto $A \cap B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A e a B:

$$A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

- A união de A e B é o conjunto $A \cup B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A ou a B:

$$A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

- O complementar de A é o conjunto $A^{\complement}$ cujos elementos são precisamente os elementos (do universo $\mathcal{U}$) que não pertencem a A:

$$A^{\complement} = \{x \mid x \notin A\}.$$

A álgebra dos subconjuntos

- A diferença entre A e B e é o conjunto $A \setminus B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A e não a B:

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

- A diferença entre A e B e é o conjunto $A \setminus B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A e não a B:

$$A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}.$$

- A diferença simétrica entre A e B é o conjunto $A \bigtriangleup B$ cujos elementos são precisamente os elementos que pertencem a A ou a B mas não a ambos os conjuntos:

$$A \bigtriangleup B = \{x \mid (x \in A) \dot{\vee} (x \in B)\}.$$

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad$ e $\quad A \cup B = B \cup A$.

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad$ e $\quad A \cup B = B \cup A$.
- Elemento neutro: $A \cap \mathcal{U} = A \quad$ e $\quad A \cup \varnothing = A$.

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad$ e $\quad A \cup B = B \cup A$.
- Elemento neutro: $A \cap \mathcal{U} = A \quad$ e $\quad A \cup \varnothing = A$.
- Elemento absorvente: $A \cap \varnothing = \varnothing \quad$ e $\quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad \text{e} \quad A \cup B = B \cup A$.
- Elemento neutro: $A \cap \mathcal{U} = A \quad \text{e} \quad A \cup \varnothing = A$.
- Elemento absorvente: $A \cap \varnothing = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- Associatividade:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{e} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A \quad$ e $\quad A \cup B = B \cup A$.
- Elemento neutro: $A \cap \mathcal{U} = A \quad$ e $\quad A \cup \varnothing = A$.
- Elemento absorvente: $A \cap \varnothing = \varnothing \quad$ e $\quad A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- Associatividade:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{e} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

- Distributividade:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$.
- Elemento neutro: $A \cap \mathcal{U} = A$ e $A \cup \varnothing = A$.
- Elemento absorvente: $A \cap \varnothing = \varnothing$ e $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- Associatividade:

  $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{e} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

- Distributividade:

  $$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Dupla complementaridade: $(A^{\complement})^{\complement} = A$.

Propriedades

Sejam A, B, C conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- Comutatividade: $A \cap B = B \cap A$ e $A \cup B = B \cup A$.
- Elemento neutro: $A \cap \mathcal{U} = A$ e $A \cup \varnothing = A$.
- Elemento absorvente: $A \cap \varnothing = \varnothing$ e $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$.
- Associatividade:

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad \text{e} \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C.$$

- Distributividade:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{e} \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- Dupla complementaridade: $(A^\complement)^\complement = A$.
- Leis de De Morgan:

$$(A \cap B)^\complement = A^\complement \cup B^\complement \quad \text{e} \quad (A \cup B)^\complement = A^\complement \cap B^\complement.$$

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B =$

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) =$

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
- $(A \setminus A) =$

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
- $(A \setminus A) = \varnothing$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
- $(A \setminus A) = \varnothing$.
- $(A \setminus \varnothing) = A$ e $(\varnothing \setminus A) = \varnothing$.

Mais propriedades

Sejam A e B conjuntos de um universo $\mathcal{U}$.

- $\varnothing \subseteq A$ e $A \subseteq \mathcal{U}$.
- $\varnothing^{\complement} = \mathcal{U}$ e $\mathcal{U}^{\complement} = \varnothing$.
- $A \cup A^{\complement} = \mathcal{U}$ e $A \cap A^{\complement} = \varnothing$.
- $A \setminus B = A \cap B^{\complement}$.
- $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$.
- $(A \setminus A) = \varnothing$.
- $(A \setminus \varnothing) = A$ e $(\varnothing \setminus A) = \varnothing$.
- $((A \setminus B) = (B \setminus A)) \iff A = B$.

Famílias de conjuntos

Definição

Uma família de conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ consiste num conjunto I (o conjunto dos índices) e um conjunto A_i de $\mathcal{U}$, para cada $i \in I$.

Notação: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

Famílias de conjuntos

Definição

Uma família de conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ consiste num conjunto I (o conjunto dos índices) e um conjunto A_i de $\mathcal{U}$, para cada $i \in I$.

Notação: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

- União: $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.

Famílias de conjuntos

Definição

Uma família de conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ consiste num conjunto I (o conjunto dos índices) e um conjunto A_i de $\mathcal{U}$, para cada $i \in I$.

Notação: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

- União: $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.
- Interseção: $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para todo o } i \in I\}$.

Famílias de conjuntos

Definição

Uma família de conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ consiste num conjunto I (o conjunto dos índices) e um conjunto A_i de $\mathcal{U}$, para cada $i \in I$.

Notação: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

- União: $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.
- Interseção: $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para todo o } i \in I\}$.
- A família $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ diz-se disjunta quando $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$.

Famílias de conjuntos

Definição

Uma família de conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ consiste num conjunto I (o conjunto dos índices) e um conjunto A_i de $\mathcal{U}$, para cada $i \in I$.

Notação: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

- União: $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.
- Interseção: $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para todo o } i \in I\}$.
- A família $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ diz-se disjunta quando $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$.
- A família $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ diz-se dois a dois disjunta quando $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$.

Famílias de conjuntos

Definição

Uma família de conjuntos de um universo $\mathcal{U}$ consiste num conjunto I (o conjunto dos índices) e um conjunto A_i de $\mathcal{U}$, para cada $i \in I$.

Notação: $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$.

- União: $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para algum } i \in I\}$.
- Interseção: $\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid x \in A_i, \text{ para todo o } i \in I\}$.
- A família $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ diz-se disjunta quando $\bigcap \mathcal{A} = \varnothing$.
- A família $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ diz-se dois a dois disjunta quando $A_i \cap A_j = \varnothing$, para $i \neq j$.
- Por exemplo: $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \left(\bigcup_{i \in I} A_i^{\complement}\right)$ e $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^{\complement} = \left(\bigcap_{i \in I} A_i^{\complement}\right)$.

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n = \,]0, \infty[,$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n\in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n\in I} A_n =$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{1\},$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n \in I} B_n =$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \ldots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n \in I} B_n = [0, \infty[,$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n \in I} B_n = [0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} B_n =$$

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n \in I} B_n = [0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} B_n = \varnothing.$$

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n\in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n\in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n\in I} B_n = [0, \infty[, \qquad \bigcap_{n\in I} B_n = \varnothing.$$

A família $(A_n)_{n\in I}$ não é disjunta.

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n \in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n \in I} B_n = [0, \infty[, \qquad \bigcap_{n \in I} B_n = \varnothing.$$

A família $(A_n)_{n \in I}$ não é disjunta.

A família $(B_n)_{n \in I}$ é disjunta mas não é dois a dois disjunta.

Exemplos

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2, 3, \dots\}$, $A_n = [\frac{1}{n}, n]$ e $B_n = [n-1, n]$:

$$\bigcup_{n\in I} A_n =]0, \infty[, \qquad \bigcap_{n\in I} A_n = \{1\},$$

$$\bigcup_{n\in I} B_n = [0, \infty[, \qquad \bigcap_{n\in I} B_n = \varnothing.$$

A família $(A_n)_{n\in I}$ não é disjunta.

A família $(B_n)_{n\in I}$ é disjunta mas não é dois a dois disjunta.

Exemplo

Consideramos $I = \{1, 2\}$:

$$\bigcup_{n\in I} A_n = A_1 \cup A_2 \qquad \text{e} \qquad \bigcap_{n\in I} A_n = A_1 \cap A_2.$$

O conjunto das partes

Definição

O conjunto das partes de um conjunto X é o conjunto PX de todos os subconjuntos de X:

$$PX = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

O conjunto das partes

Definição

O conjunto das partes de um conjunto X é o conjunto PX de todos os subconjuntos de X:

$$PX = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Nota

Para todo o conjunto X: $\varnothing \in PX$ e $X \in PX$.

O conjunto das partes

Definição

O conjunto das partes de um conjunto X é o conjunto PX de todos os subconjuntos de X:

$$PX = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Nota

Para todo o conjunto X: $\varnothing \in PX$ e $X \in PX$.

Exemplo

Para $X = \{0, 1, 2\}$,

$$PX =$$

O conjunto das partes

Definição

O conjunto das partes de um conjunto X é o conjunto PX de todos os subconjuntos de X:

$$PX = \{A \mid A \subseteq X\}.$$

Nota

Para todo o conjunto X: $\varnothing \in PX$ e $X \in PX$.

Exemplo

Para $X = \{0, 1, 2\}$,

$$PX = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}.$$

Relações

Pares ordenados

Definição

Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a, b) é o conjunto

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Pares ordenados

Definição

Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a, b) é o conjunto

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Nota

$(a, b) = (x, y) \iff x = a$ e $y = b$.

Pares ordenados

Definição

Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a, b) é o conjunto

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Nota

$(a, b) = (x, y) \iff x = a$ e $y = b$.

Nota

Mais geralmente, defina-se n-uplo ordenado:

Pares ordenados

Definição

Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a, b) é o conjunto
$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Nota

$(a, b) = (x, y) \iff x = a$ e $y = b$.

Nota

Mais geralmente, defina-se n-uplo ordenado:

- $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, (x_2, x_3))$.

Definição

Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a, b) é o conjunto

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Nota

$(a, b) = (x, y) \iff x = a$ e $y = b$.

Nota

Mais geralmente, defina-se n-uplo ordenado:

- $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, (x_2, x_3))$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, (x_2, x_3, x_4))$.

Pares ordenados

Definição

Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O par ordenado (a, b) é o conjunto

$$(a, b) = \{\{a, b\}, \{a\}\}.$$

Nota

$(a, b) = (x, y) \iff x = a$ e $y = b$.

Nota

Mais geralmente, defina-se n-uplo ordenado:

- $(x_1, x_2, x_3) = (x_1, (x_2, x_3))$.
- $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, (x_2, x_3, x_4))$.
- $\ldots$

Produtos Cartesianos

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto $A \times B$ de todos os pares de elementos de A e B

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

diz-se produto cartesiano de A e B.

Produtos Cartesianos

Definição

Sejam A e B conjuntos. O conjunto $A \times B$ de todos os pares de elementos de A e B

$$A \times B = \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

diz-se produto cartesiano de A e B.

Nota

Se $A = B$, escrevemos as vezes A^2 em lugar de $A \times A$.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\,r\,y$ em lugar de $(x, y) \in r$.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\,r\,y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\,r\,y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Exemplo

Para cada conjunto A,

$$I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$$

é uma relação binária em A (a relação de identidade).

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\,r\,y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Imagem

Seja r uma relação entre A e B e $X \subseteq A$:

$$r(X) = \{y \in B \mid x\,r\,y \text{ para algum } x \in X\}.$$

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\, r\, y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Imagem

Seja r uma relação entre A e B e $X \subseteq A$:

$$r(X) = \{y \in B \mid x\, r\, y \text{ para algum } x \in X\}.$$

- Imagem de r: $\mathrm{img}(r) = r(A)$.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\,r\,y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Imagem

Seja r uma relação entre A e B e $X \subseteq A$:

$$r(X) = \{y \in B \mid x\,r\,y \text{ para algum } x \in X\}.$$

- Imagem de r: $\mathrm{img}(r) = r(A)$.
- Imagem de $x \in A$ por r: $r(x) = r(\{x\})$.

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\,r\,y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Imagem

Seja r uma relação entre A e B e $X \subseteq A$:

$$r(X) = \{y \in B \mid x\,r\,y \text{ para algum } x \in X\}.$$

- Imagem de r: $\text{img}(r) = r(A)$.
- Imagem de $x \in A$ por r: $r(x) = r(\{x\})$.
- Domínio de r: $\text{dom}(r) = r^{-1}(B)$

Relações

Definição

- Uma relação r entre A e B é um subconjunto $r \subseteq A \times B$.
- Se $A = B$, diz-se que r é uma relação binária em A.
- Escrevemos $x\, r\, y$ em lugar de $(x, y) \in r$.
- Relação inversa (entre B e A): $r^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in r\}$.

Imagem

Seja r uma relação entre A e B e $X \subseteq A$:

$$r(X) = \{y \in B \mid x\, r\, y \text{ para algum } x \in X\}.$$

- Imagem de r: $\mathrm{img}(r) = r(A)$.
- Imagem de $x \in A$ por r: $r(x) = r(\{x\})$.
- Domínio de r: $\mathrm{dom}(r) = r^{-1}(B)$
- Imagem recíproca de $y \in B$ por $r = r^{-1}(y)$.

A composição de relações

Definição

Seja r uma relação de A em B e s uma relação de B em C. A relação composta de s com r, denotado por $s \circ r$, é a relação de A em C definida por

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe um } y \in B \text{ com } (x\, r\, y) \wedge (y\, s\, z)\}.$$

A composição de relações

Definição

Seja r uma relação de A em B e s uma relação de B em C. A **relação composta** de s com r, denotado por $s \circ r$, é a relação de A em C definida por

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe um } y \in B \text{ com } (x\, r\, y) \wedge (y\, s\, z)\}.$$

Nota

- Para uma relação r de A em B: $r \circ I_A = r$ e $I_B \circ r = r$.

A composição de relações

Definição

Seja r uma relação de A em B e s uma relação de B em C. A relação composta de s com r, denotado por $s \circ r$, é a relação de A em C definida por

$$s \circ r = \{(x,z) \in A \times C \mid \text{ existe um } y \in B \text{ com } (x\, r\, y) \wedge (y\, s\, z)\}.$$

Nota

- Para uma relação r de A em B: $r \circ I_A = r$ e $I_B \circ r = r$.
- Para as relações r de A em B, s de B em C e t de C em D:

$$(t \circ s) \circ r = t \circ (s \circ r)$$

A composição de relações

Definição

Seja r uma relação de A em B e s uma relação de B em C. A relação composta de s com r, denotado por $s \circ r$, é a relação de A em C definida por

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe um } y \in B \text{ com } (x\, r\, y) \wedge (y\, s\, z)\}.$$

Nota

- Para uma relação r de A em B: $r \circ I_A = r$ e $I_B \circ r = r$.
- Para as relações r de A em B, s de B em C e t de C em D:

$$(t \circ s) \circ r = t \circ (s \circ r)$$

- $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$ e $(r^{-1})^{-1} = r$

A composição de relações

Definição

Seja r uma relação de A em B e s uma relação de B em C. A relação composta de s com r, denotado por $s \circ r$, é a relação de A em C definida por

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe um } y \in B \text{ com } (x\, r\, y) \wedge (y\, s\, z)\}.$$

Nota

- Para uma relação r de A em B: $r \circ I_A = r$ e $I_B \circ r = r$.
- Para as relações r de A em B, s de B em C e t de C em D:

$$(t \circ s) \circ r = t \circ (s \circ r)$$

- $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1} \qquad \text{e} \qquad (r^{-1})^{-1} = r$
- $r \subseteq s \implies r^{-1} \subseteq s^{-1}$.

A composição de relações

Definição

Seja r uma relação de A em B e s uma relação de B em C. A relação composta de s com r, denotado por $s \circ r$, é a relação de A em C definida por

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \mid \text{ existe um } y \in B \text{ com } (x\, r\, y) \wedge (y\, s\, z)\}.$$

Nota

- Para uma relação r de A em B: $r \circ I_A = r$ e $I_B \circ r = r$.
- Para as relações r de A em B, s de B em C e t de C em D:

$$(t \circ s) \circ r = t \circ (s \circ r)$$

- $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$ e $(r^{-1})^{-1} = r$
- $r \subseteq s \implies r^{-1} \subseteq s^{-1}$.
- $r \subseteq r'$ e $s \subseteq s' \implies s \circ r \subseteq s' \circ r'$.

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x\, r\, x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x\, r\, x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.
- simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$x\, r\, y \implies y\, r\, x.$$

  Portanto, r é simétrica se e só se

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x\,r\,x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.
- simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

  $$x\,r\,y \implies y\,r\,x.$$

  Portanto, r é simétrica se e só se $r \subseteq r^{-1}$. (E então $r = r^{-1}$)

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x\,r\,x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.
- simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$x\,r\,y \implies y\,r\,x.$$

  Portanto, r é simétrica se e só se $r \subseteq r^{-1}$. (E então $r = r^{-1}$)
- anti-simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$((x\,r\,y) \wedge (y\,r\,x)) \implies x = y.$$

  Portanto, r é anti-simétrica se e só se

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x\,r\,x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.
- simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$x\,r\,y \implies y\,r\,x.$$

  Portanto, r é simétrica se e só se $r \subseteq r^{-1}$. (E então $r = r^{-1}$)
- anti-simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$((x\,r\,y) \wedge (y\,r\,x)) \implies x = y.$$

  Portanto, r é anti-simétrica se e só se $r \cap r^{-1} \subseteq I_A$.

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x\, r\, x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.
- simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$x\, r\, y \implies y\, r\, x.$$

  Portanto, r é simétrica se e só se $r \subseteq r^{-1}$. (E então $r = r^{-1}$)
- anti-simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$((x\, r\, y) \wedge (y\, r\, x)) \implies x = y.$$

  Portanto, r é anti-simétrica se e só se $r \cap r^{-1} \subseteq I_A$.
- transitiva quando, para todos os $x, y, z \in A$,

$$((x\, r\, y) \wedge (y\, r\, z)) \implies (x\, r\, z).$$

  Portanto, r é transitiva se e só se

Propriedades de relações binárias

Uma relação binária r em A diz-se

- reflexiva quando, para todo o $x \in A$, $x \, r \, x$. Portanto r é reflexiva se e só se $I_A \subseteq r$.
- simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$x \, r \, y \implies y \, r \, x.$$

  Portanto, r é simétrica se e só se $r \subseteq r^{-1}$. (E então $r = r^{-1}$)
- anti-simétrica quando, para todos os $x, y \in A$,

$$((x \, r \, y) \wedge (y \, r \, x)) \implies x = y.$$

  Portanto, r é anti-simétrica se e só se $r \cap r^{-1} \subseteq I_A$.
- transitiva quando, para todos os $x, y, z \in A$,

$$((x \, r \, y) \wedge (y \, r \, z)) \implies (x \, r \, z).$$

  Portanto, r é transitiva se e só se $r \circ r \subseteq r$.

Relações de ordem parcial

Definição

Uma relação binária r em A diz-se uma relação de ordem parcial quando é reflexiva, transitiva, e anti-simétrica.

O par (A, r) onde A é um conjunto e r é uma relação de ordem parcial em A diz-se conjunto parcialmente ordenado.

Relações de ordem parcial

Definição

Uma relação binária r em A diz-se uma relação de ordem parcial quando é reflexiva, transitiva, e anti-simétrica.

O par (A, r) onde A é um conjunto e r é uma relação de ordem parcial em A diz-se conjunto parcialmente ordenado.

Definição

Uma relação de ordem parcial r em A diz-se relação de ordem total quando, para todos os $x, y \in A$,

$$(x \, r \, y) \vee (y \, r \, x).$$

O par (A, r) onde r é uma relação de ordem total em A diz-se conjunto totalmente ordenado.

Relações de equivalência

Definição

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma relação de equivalência quando R é reflexiva, transitiva e simétrica.

Relações de equivalência

Definição

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma relação de equivalência quando R é reflexiva, transitiva e simétrica.

Exemplos

- Para cada conjunto A, I_A é uma relação de equivalência.

Relações de equivalência

Definição

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma relação de equivalência quando R é reflexiva, transitiva e simétrica.

Exemplos

- Para cada conjunto A, I_A é uma relação de equivalência.
- Em $A = \mathbb{Z}$, a relação R definida por

$$x \, R \, y \text{ quando } |x| = |y|$$

é uma relação de equivalência.

Relações de equivalência

Definição

Uma relação binária R num conjunto A diz-se uma relação de equivalência quando R é reflexiva, transitiva e simétrica.

Exemplos

- Para cada conjunto A, I_A é uma relação de equivalência.
- Em $A = \mathbb{Z}$, a relação R definida por

  $$x \, R \, y \text{ quando } |x| = |y|$$

  é uma relação de equivalência.

Definição

Sejam R uma relação de equivalência em A e $x \in A$. A classe de equivalência de x é o conjunto

$$[x]_R = \{y \in A \mid x \, R \, y\}.$$

O conjunto quociente

Teorema

Seja R uma relação de equivalência em A.

- *Para cada $x \in A$: $x \in [x]$. Em particular, $[x] \neq \varnothing$.*

O conjunto quociente

Teorema

Seja R uma relação de equivalência em A.

- *Para cada $x \in A$: $x \in [x]$. Em particular, $[x] \neq \varnothing$.*
- *Logo:* $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.

O conjunto quociente

Teorema

Seja R uma relação de equivalência em A.

- *Para cada $x \in A$: $x \in [x]$. Em particular, $[x] \neq \varnothing$.*
- *Logo:* $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.
- *Para todos os $x, y \in A$: $[x] = [y] \iff x\,R\,y$.*

O conjunto quociente

Teorema

Seja R uma relação de equivalência em A.

- *Para cada $x \in A$: $x \in [x]$. Em particular, $[x] \neq \varnothing$.*
- *Logo: $A = \bigcup_{x \in A} [x]$.*
- *Para todos os $x, y \in A$: $[x] = [y] \iff x \, R \, y$.*
- *Para todos os $x, y \in A$: $[x] \neq [y] \implies [x] \cap [y] = \varnothing$.*

O conjunto quociente

Teorema

Seja R *uma relação de equivalência em* A*.*

- *Para cada* $x \in A$*:* $x \in [x]$*. Em particular,* $[x] \neq \varnothing$*.*
- *Logo:* $A = \bigcup_{x \in A} [x]$*.*
- *Para todos os* $x, y \in A$*:* $[x] = [y] \iff x\,R\,y$*.*
- *Para todos os* $x, y \in A$*:* $[x] \neq [y] \implies [x] \cap [y] = \varnothing$*.*

Definição

Seja R uma relação de equivalência em A. O conjunto quociente de R é o conjunto

$$A/R = \{[x] \mid x \in A\}$$

das classes de equivalência.

Partições

Definição

Sejam A um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq PA$. $\mathcal{A}$ diz-se partição de A quando

Partições

Definição

Sejam A um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq PA$. $\mathcal{A}$ diz-se partição de A quando

- para todo o $S \in \mathcal{A}$: $S \neq \varnothing$;

Partições

Definição

Sejam A um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq PA$. $\mathcal{A}$ diz-se partição de A quando

- para todo o $S \in \mathcal{A}$: $S \neq \varnothing$;
- A$= \bigcup\limits_{S \in \mathcal{A}} S$; e

Partições

Definição

Sejam A um conjunto e $\mathcal{A} \subseteq PA$. $\mathcal{A}$ diz-se partição de A quando

- para todo o $S \in \mathcal{A}$: $S \neq \varnothing$;
- $\mathrm{A} = \bigcup_{S \in \mathcal{A}} S$; e
- para todos os $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$: $S_1 \neq S_2 \implies S_1 \cap S_2 = \varnothing$.

Partições vs. Relações de equivalência

Teorema

- *Seja R uma relação de equivalência em A, então*

$$\{[x] \mid x \in A\}$$

é uma partição de A.

Partições vs. Relações de equivalência

Teorema

- *Seja R uma relação de equivalência em A, então*

$$\{[x] \mid x \in A\}$$

  é uma partição de A.

- *Seja $\mathcal{A} \subseteq PA$ uma partição em A. Então,*

$$x \, R \, y \text{ quando existe } S \in \mathcal{A} \text{ com } x, y \in S.$$

  é uma relação de equivalência em A.

Partições vs. Relações de equivalência

Teorema

- *Seja R uma relação de equivalência em A, então*

$$\{[x] \mid x \in A\}$$

é uma partição de A.

- *Seja $\mathcal{A} \subseteq PA$ uma partição em A. Então,*

$$x \, R \, y \text{ quando existe } S \in \mathcal{A} \text{ com } x, y \in S.$$

é uma relação de equivalência em A.

- *Os dois processos são inversos entre si.*

Funções

Definição

Uma relação f de A em B diz-se função quando, para todo o $x \in A$, *existe um único* $y \in B$ com $x\, f\, y$.
Escrevemos $y = f(x)$ em lugar de $x\, f\, y$, e

$$f\colon A \longrightarrow B,\ x \longmapsto f(x)$$

para indicar que f é uma função de A em B. Aqui A diz-se conjunto de partida e B conjunto de chegada.

Funções

Definição

Uma relação f de A em B diz-se função quando, para todo o $x \in A$, *existe um único* $y \in B$ com $x\, f\, y$.
Escrevemos $y = f(x)$ em lugar de $x\, f\, y$, e

$$f\colon A \longrightarrow B,\; x \longmapsto f(x)$$

para indicar que f é uma função de A em B. Aqui A diz-se conjunto de partida e B conjunto de chegada.

Exemplo

- A relação identidade I_A em A é uma função de A em A, denotado por

$$\mathrm{id}_A\colon A \longrightarrow A,\; x \longmapsto x.$$

Funções

Definição

Uma relação f de A em B diz-se função quando, para todo o $x \in A$, *existe um único* $y \in B$ com $x\,f\,y$.
Escrevemos $y = f(x)$ em lugar de $x\,f\,y$, e

$$f \colon A \longrightarrow B,\ x \longmapsto f(x)$$

para indicar que f é uma função de A em B. Aqui A diz-se conjunto de partida e B conjunto de chegada.

Exemplo

- A relação identidade I_A em A é uma função de A em A, denotado por

$$\mathrm{id}_A \colon A \longrightarrow A,\ x \longmapsto x.$$

- Para cada relação de equivalência R em A, temos a função
$$p \colon A \longrightarrow A/R,\ x \longmapsto [x].$$

Igualdade de funções

Definição

As funções $f, g\colon A \to B$ são iguais se e só se $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in A$.

Igualdade de funções

Definição

As funções $f, g\colon A \to B$ são iguais se e só se $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in A$.

Exemplos

Igualdade de funções

Definição

As funções $f, g\colon A \to B$ são iguais se e só se $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in A$.

Exemplos

- As funções

$$\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

  não são iguais porque os conjuntos de chegada são diferentes.

Igualdade de funções

Definição

As funções $f, g\colon A \to B$ são iguais se e só se $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in A$.

Exemplos

- As funções

$$\cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \cos\colon \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1]$$

  não são iguais porque os conjuntos de chegada são diferentes.
- As funções

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{Q} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto x \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

  não são iguais porque os conjuntos de partida são diferentes.

Igualdade de funções

Definição

As funções $f, g\colon A \to B$ são iguais se e só se $f(x) = g(x)$, para todo o $x \in A$.

Exemplos

- As funções

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto x^3 + x^2 - x - 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (x^2 - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

  são iguais.

Propriedades de funções

Definição

Seja $f : A \to B$ uma função. Então, f diz-se

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

Exemplos

- A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ é

Propriedades de funções

Definição

Seja $f: A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

Exemplos

- A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ é injetiva mas não é sobrejetiva.

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

Exemplos

- A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ é injetiva mas não é sobrejetiva.
- A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ é

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

Exemplos

- A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ é injetiva mas não é sobrejetiva.
- A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ é bijetiva.

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

Exemplos

- A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ é injetiva mas não é sobrejetiva.
- A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ é bijetiva.
- A função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{se } z \geq 0, \\ 2z-1 & \text{se } z < 0 \end{cases}$ é

Propriedades de funções

Definição

Seja $f\colon A \to B$ uma função. Então, f diz-se

- injetiva quando, para todos os $x, y \in A$,

$$f(x) = f(y) \implies x = y.$$

- sobrejetiva quando todo o $y \in B$ é imagem de algum $x \in A$; isto é, para todo o $y \in B$ existe um $x \in A$ com $f(x) = y$.
- bijetiva quando f é injetiva e sobrejetiva.

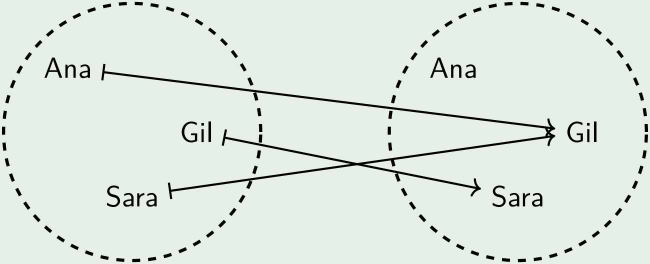
Exemplos

- A função $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto 2n$ é injetiva mas não é sobrejetiva.
- A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ é bijetiva.
- A função $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $z \mapsto \begin{cases} 2z & \text{se } z \geq 0, \\ 2z - 1 & \text{se } z < 0 \end{cases}$ é bijetiva.

Mais um Exemplo

Exemplo

A função g (gosta de) descrita por



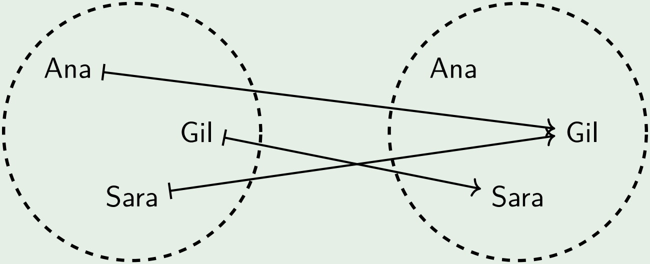
é a base de muitas telenovelas[a]. A função g

[a]Exemplo adaptado de F. William Lawvere e Stephen H. Schanuel. *Conceptual mathematics. A first introduction to categories*. 2ª ed. Cambridge University Press, 2009. xii + 390.

Mais um Exemplo

Exemplo

A função g (gosta de) descrita por



é a base de muitas telenovelas[a]. A função g nem é injetiva nem sobrejetiva; se g fosse injetiva, a telenovela seria bem diferente.

[a] Exemplo adaptado de F. William Lawvere e Stephen H. Schanuel. *Conceptual mathematics. A first introduction to categories*. 2ª ed. Cambridge University Press, 2009. xii + 390.

Funções particulares

Sequências

Para cada número natural, consideramos $[n] = \{1, \dots, n\}$.
Uma sequência (finita) de um conjunto A é uma função do tipo

$$a\colon [n] \longrightarrow A.$$

Escrevemos a_k em lugar de $a(k)$ e denotamos a sequência a por $(a_1, \dots, a_n)$.

Funções particulares

Sequências

Para cada número natural, consideramos $[n] = \{1, \ldots, n\}$.
Uma sequência (finita) de um conjunto A é uma função do tipo

$$a\colon [n] \longrightarrow A.$$

Escrevemos a_k em lugar de $a(k)$ e denotamos a sequência a por $(a_1, \ldots, a_n)$.

Sucessões

Uma sucessão de elementos de um conjunto A é uma função do tipo

$$a\colon \mathbb{N} \longrightarrow A.$$

Escrevemos a_k em lugar de $a(k)$ e denotamos a sucessão a por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Imagem (inversa)

Recordamos do cálculo com relações

Sejam $f : A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

Imagem (inversa)

Recordamos do cálculo com relações

Sejam $f\colon A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- imagem de X por f:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B \mid \text{existe } x \in X \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

Imagem (inversa)

Recordamos do cálculo com relações

Sejam $f\colon A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- imagem de X por f:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B \mid \text{existe } x \in X \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

- imagem inversa (ou recíproca) de Y por f:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A \mid \text{existe } y \in Y \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in Y\}. \end{aligned}$$

Imagem (inversa)

Recordamos do cálculo com relações

Sejam $f\colon A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- imagem de X por f:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B \mid \text{existe } x \in X \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

- imagem inversa (ou recíproca) de Y por f:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A \mid \text{existe } y \in Y \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in Y\}. \end{aligned}$$

- Escrevemos $f^{-1}(y)$ em lugar de $f^{-1}(\{y\})$.

Imagem (inversa)

Recordamos do cálculo com relações

Sejam $f\colon A \to B$ uma função, $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$.

- imagem de X por f:

$$\begin{aligned} f(X) &= \{y \in B \mid \text{existe } x \in X \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X\}. \end{aligned}$$

- imagem inversa (ou recíproca) de Y por f:

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &= \{x \in A \mid \text{existe } y \in Y \text{ com } f(x) = y\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in Y\}. \end{aligned}$$

- Escrevemos $f^{-1}(y)$ em lugar de $f^{-1}(\{y\})$.

Nota

$f\colon A \to B$ é sobrejetiva se e somente se $f(A) = B$.

A composição de funções

Teorema

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. A relação* $g \circ f$ *de* A *em* C *é uma função* $g \circ f: A \to C$ *dada por*

$$g \circ f(x) = g(f(x)),$$

para todo o $x \in X$*.*

A composição de funções

Teorema

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. A relação* $g \circ f$ *de* A *em* C *é uma função* $g \circ f: A \to C$ *dada por*

$$g \circ f(x) = g(f(x)),$$

para todo o $x \in X$.

Recordamos

- A composição de funções (e relações) é associativa.

A composição de funções

Teorema

Sejam $f: A \to B$ *e* $g: B \to C$ *funções. A relação* $g \circ f$ *de* A *em* C *é uma função* $g \circ f: A \to C$ *dada por*

$$g \circ f(x) = g(f(x)),$$

para todo o $x \in X$.

Recordamos

- A composição de funções (e relações) é associativa.
- As "funções identidades são identidades":

$$\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A .$$

Exemplo

Exemplo

Por exemplo, na época de exames vamos (possivelmente) definir a função

$$\begin{aligned} \mathrm{Sala}\colon \mathbb{N} &\longrightarrow \{23.1.5,\ 23.1.6,\ 23.1.7\} \\ n &\longmapsto \begin{cases} 23.1.5 & \text{para } n \leq 79500, \\ 23.1.6 & \text{para } 79500 < n \leq 80000, \\ 23.1.7 & \text{para } n > 80000; \end{cases} \end{aligned}$$

e a distribuição de alunos por sala é dada pela função composta da função Sala com a função

$$\text{N}^{\text{o}}\ \text{Mec}\colon \{\text{alunos}\} \longrightarrow \mathbb{N}.$$

Mais um exemplo

Exemplo

A função

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos(2x^2 - 3)$$

é a função composta $h = g \circ f$ das funções $g = \cos$ e

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x^2 - 3.$$

Mais um exemplo

Exemplo

A função

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos(2x^2 - 3)$$

é a função composta $h = g \circ f$ das funções $g = \cos$ e

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x^2 - 3.$$

Restrições de funções

Para uma função $f\colon A \to B$ e $X \subseteq A$, a função

$$f|_X\colon X \to B,\ x \mapsto f(x)$$

diz-se restrição de f a X (e f extensão de $f|_X$).

Mais um exemplo

Exemplo

A função

$$h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos(2x^2 - 3)$$

é a função composta $h = g \circ f$ das funções $g = \cos$ e

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 2x^2 - 3.$$

Restrições de funções

Para uma função $f : A \to B$ e $X \subseteq A$, a função

$$f|_X : X \to B,\ x \mapsto f(x)$$

diz-se restrição de f a X (e f extensão de $f|_X$).

Com $i\colon X \to A,\ x \mapsto x$ a função de inclusão, $f|_X = f \circ i$.

Exemplo (mais geral)

Nota

Dada funções $f_1 \colon A_1 \to A_2$, $f_2 \colon A_2 \to A_3$, ..., $f_p \colon A_p \to A_{p+1}$ ($p \in \mathbb{N}$), considera-se a função composta

$$\begin{aligned} f_p \circ \cdots \circ f_1 \colon A_1 &\longrightarrow A_{p+1} \\ x &\longmapsto f_p(\ldots f_1(x)). \end{aligned}$$

Exemplo (mais geral)

Nota

Dada funções $f_1\colon A_1 \to A_2$, $f_2\colon A_2 \to A_3$, $\dots$, $f_p\colon A_p \to A_{p+1}$ ($p \in \mathbb{N}$), considera-se a função composta

$$\begin{aligned} f_p \circ \dots \circ f_1\colon A_1 &\longrightarrow A_{p+1} \\ x &\longmapsto f_p(\dots f_1(x)). \end{aligned}$$

Exemplo

Consideramos a função

$$f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo (mais geral)

Nota

Dada funções $f_1 \colon A_1 \to A_2$, $f_2 \colon A_2 \to A_3$, ..., $f_p \colon A_p \to A_{p+1}$ $(p \in \mathbb{N})$, considera-se a função composta

$$\begin{aligned} f_p \circ \cdots \circ f_1 \colon A_1 &\longrightarrow A_{p+1} \\ x &\longmapsto f_p(\dots f_1(x)). \end{aligned}$$

Exemplo

Consideramos a função

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \dots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

Exemplo (mais geral)

Exemplo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \;\; n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \ldots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

Exemplo (mais geral)

Exemplo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \dots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

- $n_1 = 1, \ n_2 = f(1) = 4, \ n_3 = f(4) = 2, \ n_4 = f(2) = 1.$

Exemplo (mais geral)

Exemplo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \; n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \dots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

- $n_1 = 1,\; n_2 = f(1) = 4,\; n_3 = f(4) = 2,\; n_4 = f(2) = 1.$
- $n_1 = 2,\; n_2 = f(2) = 1.$

Exemplo (mais geral)

Exemplo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \; n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \ldots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

- $n_1 = 1,\ n_2 = f(1) = 4,\ n_3 = f(4) = 2,\ n_4 = f(2) = 1.$
- $n_1 = 2,\ n_2 = f(2) = 1.$
- $n_1 = 3,\ n_2 = f(3) = 5,\ n_3 = f(5) = 16,\ n_4 = f(16) = 8,$ $n_5 = f(8) = 4,\ n_6 = f(4) = 2,\ n_7 = f(2) = 1.$

Exemplo (mais geral)

Exemplo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \ n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \dots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

- $n_1 = 1,\ n_2 = f(1) = 4,\ n_3 = f(4) = 2,\ n_4 = f(2) = 1.$
- $n_1 = 2,\ n_2 = f(2) = 1.$
- $n_1 = 3,\ n_2 = f(3) = 5,\ n_3 = f(5) = 16,\ n_4 = f(16) = 8,$
  $n_5 = f(8) = 4,\ n_6 = f(4) = 2,\ n_7 = f(2) = 1.$
- $n_1 = 4,\ \dots.$

Exemplo (mais geral)

Exemplo

$$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \; n \longmapsto \begin{cases} 3n+1 & \text{se } n \text{ e ímpar,} \\ \frac{n}{2} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $n_1 \in \mathbb{N}$, considera-se a sucessão definida por

$$n_2 = f(n_1), \quad n_3 = f(n_2) = f \circ f(n_1), \dots, n_{k+1} = f(n_k) = f^k(n_1).$$

- $n_1 = 1$, $n_2 = f(1) = 4$, $n_3 = f(4) = 2$, $n_4 = f(2) = 1$.
- $n_1 = 2$, $n_2 = f(2) = 1$.
- $n_1 = 3$, $n_2 = f(3) = 5$, $n_3 = f(5) = 16$, $n_4 = f(16) = 8$, $n_5 = f(8) = 4$, $n_6 = f(4) = 2$, $n_7 = f(2) = 1$.
- $n_1 = 4$, $\dots$.

Conjetura de Collatz: Para cada $n \geq 1$, existe um $k \geq 1$ tal que $f^k(n) = 1$.

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Exemplo

A função "traduzir de português para o alemão"

$$\{\text{zero, um, dois, } \dots\} \xrightarrow{t_{p\to a}} \{\text{null, eins, zwei, } \dots\};$$

tem a função inversa

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Exemplo

A função "traduzir de português para o alemão"

$$\{\text{zero, um, dois, } \dots\} \xrightarrow{t_{p \to a}} \{\text{null, eins, zwei, } \dots\};$$

tem a função inversa "traduzir de alemão para o português"

$$\{\text{null, eins, zwei, } \dots\} \xrightarrow{t_{a \to p}} \{\text{zero, um, dois, } \dots\}.$$

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Teorema

$f\colon A \to B$ é invertível se e somente se f é injetiva e sobrejetiva.

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Teorema

$f\colon A \to B$ é invertível se e somente se f é injetiva e sobrejetiva.

Nota

Se f é bijetiva:

$$f^{-1}\colon B \longrightarrow A,\ y \longmapsto \text{aquele único } x \in A \text{ com } f(x) = y.$$

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Teorema

$f\colon A \to B$ é invertível se e somente se f é injetiva e sobrejetiva.

Nota

- A função identidade é invertível e $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Teorema

$f\colon A \to B$ é invertível se e somente se f é injetiva e sobrejetiva.

Nota

- A função identidade é invertível e $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.
- Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são invertíveis, então $g \circ f$ é invertível e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Funções invertíveis

Definição

Uma função $f\colon A \to B$ diz-se invertível quando existe uma função $g\colon B \to A$ com $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Notação: Se existe, uma tal função g é única e escrevemos f^{-1} em lugar de g. A função $f^{-1}\colon B \to A$ diz-se função inversa de f.

Teorema

$f\colon A \to B$ é invertível se e somente se f é injetiva e sobrejetiva.

Nota

- A função identidade é invertível e $\mathrm{id}_A^{-1} = \mathrm{id}_A$.
- Se $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ são invertíveis, então $g \circ f$ é invertível e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
- Se $f\colon A \to B$ é invertível, então $f^{-1}\colon B \to A$ é invertível e $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemplos

Exemplos

- A inversa da função

$$f : [0,1] \longrightarrow [0,2],\ x \longmapsto 2x$$

  é a função

Exemplos

Exemplos

- A inversa da função

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,2],\ x \longmapsto 2x$$

é a função

$$g\colon [0,2] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto \frac{x}{2}.$$

Exemplos

Exemplos

- A inversa da função

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,2],\ x \longmapsto 2x$$

é a função

$$g\colon [0,2] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto \frac{x}{2}.$$

- A inversa da função

$$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

é a função

Exemplos

Exemplos

- A inversa da função

$$f\colon [0,1] \longrightarrow [0,2],\ x \longmapsto 2x$$

é a função

$$g\colon [0,2] \longrightarrow [0,1],\ x \longmapsto \frac{x}{2}.$$

- A inversa da função

$$\exp\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

é a função

$$\ln\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

A relação de equipotência

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes. Aqui $|A|$ denota a cardinalidade[a] (= "número de elementos") de A.

[a] Embora não explicamos o significado de "cardinalidade" em geral.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes. Aqui $|A|$ denota a cardinalidade (= "número de elementos") de A.
- Um conjunto A diz-se finito quando $|A| = |\{1, \dots, n\}|$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes. Aqui $|A|$ denota a cardinalidade (= "número de elementos") de A.
- Um conjunto A diz-se finito quando $|A| = |\{1, \dots, n\}|$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso escrevemos $|A| = n$.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes. Aqui $|A|$ denota a cardinalidade (= "número de elementos") de A.
- Um conjunto A diz-se finito quando $|A| = |\{1, \ldots, n\}|$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso escrevemos $|A| = n$.
- Um conjunto diz-se infinito quando não é finito.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes. Aqui $|A|$ denota a cardinalidade (= "número de elementos") de A.
- Um conjunto A diz-se finito quando $|A| = |\{1, \dots, n\}|$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso escrevemos $|A| = n$.
- Um conjunto diz-se infinito quando não é finito.
- Um conjunto diz-se numerável quando é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Conjuntos equipotentes

Definição

Os conjuntos A e B dizem-se equipotentes quando existe uma função bijetiva $A \to B$.

Nota

- A "relação de equipotência" é reflexiva, simétrica e transitiva.
- Escrevemos também $|A| = |B|$ para indicar que A e B são equipotentes. Aqui $|A|$ denota a cardinalidade (= "número de elementos") de A.
- Um conjunto A diz-se finito quando $|A| = |\{1, \ldots, n\}|$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Neste caso escrevemos $|A| = n$.
- Um conjunto diz-se infinito quando não é finito.
- Um conjunto diz-se numerável quando é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Notação: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ "$\aleph$ – Aleph" (alfabeto hebraico)

Exemplos

Exemplos

- $|\{1,2,3\}| \neq |\{1,2,3,4\}|$.

Exemplos

Exemplos

- $|\{1,2,3\}| \neq |\{1,2,3,4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1,2,3,\dots\}| = |\{2,3,4,\dots\}|$.

Exemplos

Exemplos

- $|\{1, 2, 3\}| \neq |\{1, 2, 3, 4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1, 2, 3, \dots\}| = |\{2, 3, 4, \dots\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{0, 2, 4, 6, \dots\}| = |\{1, 3, 5, 7, \dots\}|$.

Exemplos

Exemplos

- $|\{1, 2, 3\}| \neq |\{1, 2, 3, 4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1, 2, 3, \dots\}| = |\{2, 3, 4, \dots\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{0, 2, 4, 6, \dots\}| = |\{1, 3, 5, 7, \dots\}|$.
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.

Exemplos

- $|\{1, 2, 3\}| \neq |\{1, 2, 3, 4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1, 2, 3, \ldots\}| = |\{2, 3, 4, \ldots\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{0, 2, 4, 6, \ldots\}| = |\{1, 3, 5, 7, \ldots\}|$.
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
- $|[0, 1]| = |[a, b]|$, para $a < b$.

Exemplos

Exemplos

- $|\{1,2,3\}| \neq |\{1,2,3,4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1,2,3,\ldots\}| = |\{2,3,4,\ldots\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{0,2,4,6,\ldots\}| = |\{1,3,5,7,\ldots\}|$.
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
- $|[0,1]| = |[a,b]|$, para $a < b$.
- $|\mathbb{R}| = |]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[|$ e $|\mathbb{R}| = |\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}|$.

Exemplos

Exemplos

- $|\{1,2,3\}| \neq |\{1,2,3,4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1,2,3,\dots\}| = |\{2,3,4,\dots\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{0,2,4,6,\dots\}| = |\{1,3,5,7,\dots\}|$.
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
- $|[0,1]| = |[a,b]|$, para $a < b$.
- $|\mathbb{R}| = |]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[|$ e $|\mathbb{R}| = |\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}|$.

Teorema

Para cada conjunto infinito X existe uma função injectiva $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$.

Exemplos

Exemplos

- $|\{1,2,3\}| \neq |\{1,2,3,4\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{1,2,3,\dots\}| = |\{2,3,4,\dots\}|$.
- $|\mathbb{N}| = |\{0,2,4,6,\dots\}| = |\{1,3,5,7,\dots\}|$.
- $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}|$.
- $|[0,1]| = |[a,b]|$, para $a < b$.
- $|\mathbb{R}| = |]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[|$ e $|\mathbb{R}| = |\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}|$.

Teorema

Para cada conjunto infinito X existe uma função injectiva $\mathbb{N} \xrightarrow{f} X$.

Teorema (Cantor – Dedekind)

Um conjunto é infinito se e só se é equipotente a um subconjunto próprio.

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$$\begin{array}{|llll}
(0,0) & (0,1) & (0,2) & \ldots \\
(1,0) & (1,1) & (1,2) & \ldots \\
(2,0) & (2,1) & (2,2) & \ldots \\
\ldots & & &
\end{array}$$

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
\text{Soma} & \color{red}{(0,0)} & (0,1) & (0,2) & \dots \\
0 & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\
 & (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\
 & \dots & & &
\end{array}
$$

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Soma	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$\ldots$
0	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$\ldots$
1	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$\ldots$
	$\ldots$			

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$$
\begin{array}{c|cccc}
\text{Soma} & (0,0) & (0,1) & \color{red}{(0,2)} & \ldots \\
0 & (1,0) & \color{red}{(1,1)} & (1,2) & \ldots \\
1 & \color{red}{(2,0)} & (2,1) & (2,2) & \ldots \\
2 & \ldots & & &
\end{array}
$$

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Soma} & (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ 0 & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ 1 & (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\ 2 & \dots & & & \end{array}$$

Definimos

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

onde (com $p = n + m$)

$$f(n, m) = (\text{número de pares com soma} < p) + n$$

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$$\begin{array}{c|cccc} \text{Soma} & (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\ 0 & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\ 1 & (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\ 2 & \dots & & & \end{array}$$

Definimos

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

onde (com $p = n + m$)

$$\begin{aligned} f(n,m) &= (\text{número de pares com soma} < p) + n \\ &= (1 + 2 + \cdots + p) + n \end{aligned}$$

Mais um exemplo

Exemplo

Temos $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

$$\begin{array}{c|cccc}
\text{Soma} & (0,0) & (0,1) & (0,2) & \dots \\
0 & (1,0) & (1,1) & (1,2) & \dots \\
1 & (2,0) & (2,1) & (2,2) & \dots \\
2 & \dots & & &
\end{array}$$

Definimos

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

onde (com $p = n + m$)

$$\begin{aligned}
f(n,m) &= (\text{número de pares com soma} < p) + n \\
&= (1 + 2 + \cdots + p) + n \\
&= \frac{(n+m)(n+m+1)}{2} + n.
\end{aligned}$$

Comparação de cardinalidades

Definição

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que a cardinalidade de A não é superior à cardinalidade de B quando existe uma função injetiva $f : A \to B$.

Notação: $|A| \leq |B|$.

Comparação de cardinalidades

Definição

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que a cardinalidade de A não é superior à cardinalidade de B quando existe uma função injetiva $f : A \to B$.

Notação: $|A| \leq |B|$.

Diz-se que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B quando $|A| \leq |B|$ mas A e B não são equipotentes.

Notação: $|A| < |B|$.

Comparação de cardinalidades

Definição

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que a cardinalidade de A não é superior à cardinalidade de B quando existe uma função injetiva $f : A \to B$.

Notação: $|A| \leq |B|$.

Diz-se que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B quando $|A| \leq |B|$ mas A e B não são equipotentes.

Notação: $|A| < |B|$.

Nota

- $|A| \leq |A|$.

Comparação de cardinalidades

Definição

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que a cardinalidade de A não é superior à cardinalidade de B quando existe uma função injetiva $f : A \to B$.

Notação: $|A| \leq |B|$.

Diz-se que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B quando $|A| \leq |B|$ mas A e B não são equipotentes.

Notação: $|A| < |B|$.

Nota

- $|A| \leq |A|$.
- Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| \leq |C|$.

Comparação de cardinalidades

Definição

Sejam A e B conjuntos. Diz-se que a cardinalidade de A não é superior à cardinalidade de B quando existe uma função injetiva $f : A \to B$.

Notação: $|A| \leq |B|$.

Diz-se que a cardinalidade de A é menor que a cardinalidade de B quando $|A| \leq |B|$ mas A e B não são equipotentes.

Notação: $|A| < |B|$.

Nota

- $|A| \leq |A|$.
- Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |C|$, então $|A| \leq |C|$.
- $|A| \leq |B|$ se e só se $A = \varnothing$ ou existe uma função sobrejetiva $g : B \to A$.

Um teorema importante

Teorema (Schröder – Bernstein)

Sejam A e B conjuntos. Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.[a]

[a] Feliz Bernstein (1878 – 1956), Ernst Schröder (1841 – 1902)

Um teorema importante

Teorema (Schröder – Bernstein)

Sejam A e B conjuntos. Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.[a]

Isto é: se existe uma função injetiva $f\colon A \to B$ e uma função injetiva $g\colon B \to A$, então existe uma função bijetiva $h\colon A \to B$.

[a] Feliz Bernstein (1878 – 1956), Ernst Schröder (1841 – 1902)

Um teorema importante

Teorema (Schröder – Bernstein)

Sejam A e B conjuntos. Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.[a]

Isto é: se existe uma função injetiva $f: A \to B$ e uma função injetiva $g: B \to A$, então existe uma função bijetiva $h: A \to B$.

[a] Feliz Bernstein (1878 – 1956), Ernst Schröder (1841 – 1902)

Exemplos

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$.

Um teorema importante

Teorema (Schröder – Bernstein)

Sejam A e B conjuntos. Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.[a]

Isto é: se existe uma função injetiva $f : A \to B$ e uma função injetiva $g : B \to A$, então existe uma função bijetiva $h : A \to B$.

[a] Feliz Bernstein (1878 – 1956), Ernst Schröder (1841 – 1902)

Exemplos

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. De facto, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ e $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.

Um teorema importante

Teorema (Schröder – Bernstein)

Sejam A e B conjuntos. Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.[a]

Isto é: se existe uma função injetiva $f: A \to B$ e uma função injetiva $g: B \to A$, então existe uma função bijetiva $h: A \to B$.

[a] Feliz Bernstein (1878 – 1956), Ernst Schröder (1841 – 1902)

Exemplos

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. De facto, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ e $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}| = |P\mathbb{N}|$.

Um teorema importante

Teorema (Schröder – Bernstein)

Sejam A e B conjuntos. Se $|A| \leq |B|$ e $|B| \leq |A|$, então $|A| = |B|$.[a]

Isto é: se existe uma função injetiva $f : A \to B$ e uma função injetiva $g : B \to A$, então existe uma função bijetiva $h : A \to B$.

[a] Feliz Bernstein (1878 – 1956), Ernst Schröder (1841 – 1902)

Exemplos

- $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$. De facto, $|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Q}|$ e $|\mathbb{Q}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$.
- $|\mathbb{R}| = |P\mathbb{N}|$. De facto, as funções

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow P\mathbb{Q},\ x \longmapsto \{z \in \mathbb{Q} \mid z < x\}$$

e

$$g : 2^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R},\ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto 0.a_0 a_1 a_2 \dots$$

são injetivas.

Nota (Recordamos)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Nota (Recordamos)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Nota

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, A é finito ou $|A| = |\mathbb{N}|$. Portanto, um conjunto X é numerável se e só se $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

Nota (Recordamos)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Nota

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, A é finito ou $|A| = |\mathbb{N}|$. Portanto, um conjunto X é numerável se e só se $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

Teorema

Para cada conjunto X, ASASE:

Nota (Recordamos)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Nota

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, A é finito ou $|A| = |\mathbb{N}|$. Portanto, um conjunto X é numerável se e só se $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

Teorema

Para cada conjunto X, ASASE:

(i) *X é numerável.*

Conjuntos enumeráveis

Nota (Recordamos)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Nota

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, A é finito ou $|A| = |\mathbb{N}|$. Portanto, um conjunto X é numerável se e só se $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

Teorema

Para cada conjunto X, ASASE:

(i) *X é numerável.*

(ii) *existe uma função injetiva $X \to \mathbb{N}$.*

Conjuntos enumeráveis

Nota (Recordamos)

Um conjunto A diz-se numerável (ou enumerável, ou contável) se A é finito ou equipotente ao conjunto $\mathbb{N}$.

Nota

Para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, A é finito ou $|A| = |\mathbb{N}|$. Portanto, um conjunto X é numerável se e só se $|X| \leq |\mathbb{N}|$.

Teorema

Para cada conjunto X, ASASE:

(i) *X é numerável.*

(ii) *existe uma função injetiva $X \to \mathbb{N}$.*

(iii) *existe uma função sobrejetiva $\mathbb{N} \to X$ ou $X = \varnothing$.*

O teorema do Cantor

Teorema (Cantor)

Para todo o conjunto A, $|A| < |PA|$.

Georg Cantor (1845 – 1918)

O teorema do Cantor

Teorema (Cantor)

Para todo o conjunto A, $|A| < |PA|$.

Mais concretamente, nenhuma função $f : A \to PA$ é sobrejetiva.

Georg Cantor (1845 – 1918)

O teorema do Cantor

Teorema (Cantor)

Para todo o conjunto A, $|A| < |PA|$.

Mais concretamente, nenhuma função $f : A \to PA$ é sobrejetiva.

Georg Cantor (1845 – 1918)

Portanto:

$$0 < 1 < 2 < \cdots < |\mathbb{N}| = \aleph_0 < |P\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| < |P\mathbb{R}| = |PP\mathbb{N}| < \ldots$$

O teorema do Cantor

Teorema (Cantor)

Para todo o conjunto A, $|A| < |PA|$.

Mais concretamente, nenhuma função $f : A \to PA$ é sobrejetiva.

Georg Cantor (1845 – 1918)

Portanto:

$0 < 1 < 2 < \cdots < |\mathbb{N}| = \aleph_0 < |P\mathbb{N}| = |\mathbb{R}| < |P\mathbb{R}| = |PP\mathbb{N}| < \ldots$

Também se verifica, para todos os conjuntos A e B:

$$|A| = |B| \quad \text{ou} \quad |A| < |B| \quad \text{ou} \quad |B| < |A|.$$

Ainda sobre o tamanho de conjuntos

Questão

Existe um conjunto X com $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

Ainda sobre o tamanho de conjuntos

Questão

Existe um conjunto X com $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

A origem da "teoria de conjuntos transfinitos"

Georg Cantor. «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre». Em: *Mathematische Annalen* **46**.(4) (1895), pp. 481–512.

Georg Cantor. «Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (zweiter Teil)». Em: *Mathematische Annalen* **49**.(2) (1897), pp. 207–246.

Ainda sobre o tamanho de conjuntos

Questão

Existe um conjunto X com $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

A formulação da questão

Q questão acima é o problema 1 em:

David Hilbert. «Mathematische Probleme». Em: *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1900** (1900), pp. 253–297. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900.

Ainda sobre o tamanho de conjuntos

Questão

Existe um conjunto X com $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

O túmulo de Hilbert

"Temos de saber, vamos saber."

Ainda sobre o tamanho de conjuntos

Questão

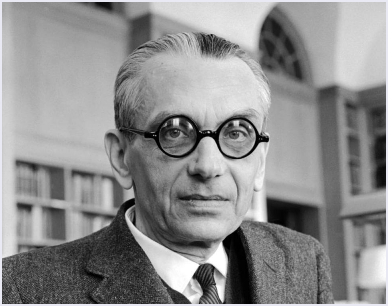
Existe um conjunto X com $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

A resposta (parte I):

Kurt Gödel, em 1940:

"Não podemos provar que existe."

Kurt Gödel. *The Consistency of the Continuum Hypothesis*. Princeton University Press, 1940.



Ainda sobre o tamanho de conjuntos

Questão

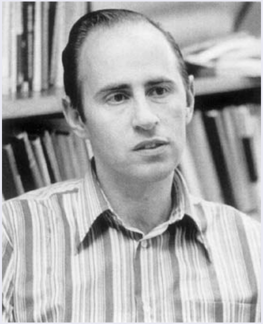
Existe um conjunto X com $|\mathbb{N}| < |X| < |\mathbb{R}|$?

A resposta (parte II):

Paul Cohen, em 1963:

"Não podemos provar que não existe"

Paul J. Cohen. «The Independence of the Continuum Hypothesis». Em: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **50**.(6) (1963), pp. 1143–1148.



Bibliografia complementar

- Paul R. Halmos. *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. Princeton, N. J.-Toronto-New York-London: van Nostrand Reinhold Company, 1960. vii + 104.
- F. William Lawvere e Robert Rosebrugh. *Sets for Mathematics*. Cambridge University Press, 2003. xi + 261.
- Tom Leinster. «Rethinking set theory». Em: *The American Mathematical Monthly* **121**.(5) (2014), pp. 403–415.