

Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos

Universidade de Aveiro 2017/2018

<http://moodle.ua.pt>

Grafos e subgrafos particulares

Problemas de caminho mais curto em grafos

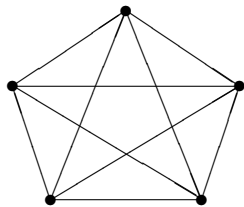
Algoritmo de Dijkstra

Grafos completos e grafos nulos

Definição (de grafo completo e grafo nulo)

Seja G um grafo simples de ordem $n > 0$. Diz-se que G é um **grafo completo** e denota-se por K_n quando todos os pares de vértices são adjacentes. Por sua vez, diz-se que G é um **grafo nulo** quando não tem arestas, ou seja, $E(G) = \emptyset$.

- **Exemplos:** grafos completos K_1, \dots, K_5 :

 K_1  K_2  K_3  K_4  K_5

Grafos regulares

Observação 1: A menos de isomorfismos, existe um único grafo completo de ordem n , K_n .

Observação 2: Todo o grafo nulo é o complementar de um grafo completo. Podemos denotar o grafo nulo de ordem n por K_n^c .

Definição (de grafo regular)

Um grafo diz-se k -regular se todos os seus vértices têm grau k e diz-se regular se é k -regular para algum k . Os grafos 3- regulares designam-se por grafos cúbicos.

Exemplos: o grafo K_n é $(n - 1)$ -regular e o grafo nulo é 0-regular.

Grafos bipartidos

Definição (de bipartido)

Um grafo G diz-se **bipartido** se existe uma partição do seu conjunto de vértices em X e Y tal que não existem arestas entre qualquer par de vértices de X nem entre qualquer par de vértices de Y (ou seja, cada aresta de G tem um extremo em X e outro em Y). Esta partição (X, Y) do conjunto dos vértices de G designa-se por **bipartição dos vértices** e, neste caso, G denota-se pelo terno (X, Y, E) onde $E = E(G)$.

Teorema

Um grafo G é bipartido se e só se não tem circuitos de comprimento ímpar.

- **Exercício:** provar o teorema anterior.

Grafos com custos não negativos nas arestas

- Um grafo simples com custos nas arestas representa-se pelo terno $G = (V, E, W)$, onde $W = (w_{ij})$ denota a matriz de custos.
- w_{ij} representa o custo associado à aresta ij , se uma tal aresta existe, ou $w_{ij} = \infty$ se $ij \notin E(G)$.
- Assume-se $w_{ii} = 0$ para cada i .
- Note-se que o custo de um caminho no grafo (digrafo) G é igual à soma dos custos ou pesos das suas arestas (dos seus arcos).

Notação

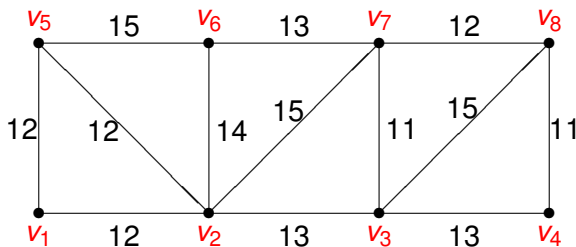
- *Marca*[v] - comprimento do caminho mais curto entre s e v de entre os caminhos já determinados;
- *Antecessor*[v] - antecessor do vértice v no caminho mais curto entre s e v de entre os já determinados;
- *Temporarios* - conjunto dos vértices com marca temporária;
- z - vértice com menor marca temporária corrente, a qual vai passar a marca permanente.

Algoritmo de Dijkstra

- ▶ **Entrada:** Grafo G , vértices s e t ;
- ▶ **Saída:** Marca.
- 1. Para todo $v \in V$ faz $\text{Marca}(v) \leftarrow \infty$; $\text{Antecessor}(v) \leftarrow 0$;
 $\text{Marca}(s) \leftarrow 0$; $\text{Temporários} \leftarrow V \setminus \{s\}$; $z \leftarrow s$;
- 2. Repetir
 - 2.1 $M \leftarrow \infty$;
 - 2.2 Para todo $u \in \text{Temporários}$ fazer
 - Se $\text{Marca}(u) > \text{Marca}(z) + w_{z,u}$ então
 - $\text{Marca}(u) \leftarrow \text{Marca}(z) + w_{z,u}$;
 - $\text{Antecessor}(u) \leftarrow z$;
 - Se $\text{Marca}(u) < M$ então $x \leftarrow u$; $M \leftarrow \text{Marca}(u)$;
 - 2.3 $\text{Temporários} \leftarrow \text{Temporários} \setminus \{x\}$; $z \leftarrow x$;
- até $x = t$;
- devolver $\text{Marca}[t]$

Exemplo

Utilizando algoritmo de Dijkstra, vamos determinar um caminho mais curto (e a respectiva distância) entre os vértices v_5 e v_8 do grafo.



Resolução

- A Tabela a seguir apresenta os valores obtidos em cada passo da aplicação do algoritmo de Dijkstra.

v_5	v_1	v_2	v_3	v_4	v_6	v_7	v_8
(0, -)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
	(12, v_5)	$(12, v_5)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(15, v_5)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
		(12, v_5)	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(15, v_5)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$
			$(25, v_2)$	$(\infty, -)$	(15, v_5)	$(27, v_2)$	$(\infty, -)$
			(25, v_2)	$(\infty, -)$		$(27, v_2)$	$(\infty, -)$
				$(38, v_3)$		(27, v_2)	$(40, v_3)$
				(38, v_3)			$(39, v_7)$
							(39, v_7)

- Note-se que nesta tabela, para cada vértice v , em cada passo determinamos um par $(\text{Marca}[v], \text{Antecessor}[v])$, onde $\text{Marca}[v]$ corresponde à distância corrente ao vértice inicial que aparece a negrito quando passa a permanente.