

Matemática Discreta

Elementos de Teoria dos Grafos

Universidade de Aveiro 2017/2018

<http://moodle.ua.pt>

Isomorfismos, grafos etiquetados e não etiquetados

Conceitos Métricos

Subgrafos, subgrafos induzidos e subgrafos abrangentes

Conexidade

Isomorfismos

- Se excluirmos a etiquetação dos vértices e arestas, verifica-se que existem grafos distintos que admitem representações idênticas.

Definição

Dois grafos $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ e $H = (V(H), E(H), \psi_H)$ dizem-se **isomorfos**, denotando-se esta relação de isomorfismo por $G \cong H$, se existirem duas bijecções $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ e $\theta : E(G) \rightarrow E(H)$ tais que

$$\psi_G(e) = uv \text{ se e só se } \psi_H(\theta(e)) = \phi(u)\phi(v).$$

- **Observação:** dois grafos dizem-se isomorfos se existe uma bijecção entre os respectivos conjuntos de vértices e uma bijecção entre os respectivos conjuntos de arestas que preservam as relações de adjacência e de incidência.

Exemplo

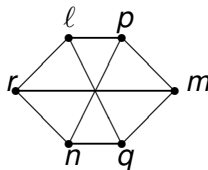
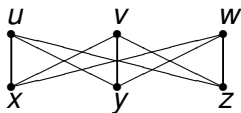
- A relação de isomorfismo entre grafos é uma relação de equivalência (verificar!)

Definição

Designa-se por isomorfismo entre dois grafos simples G e H uma bijecção $\phi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que

$$uv \in E(G) \text{ se e só se } \phi(u)\phi(v) \in E(H).$$

Exercício 1. Mostrar que os dois grafos seguintes são isomorfos.



Automorfismos de grafos

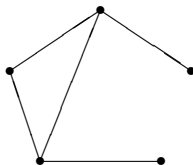
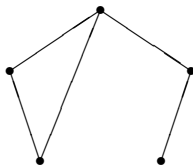
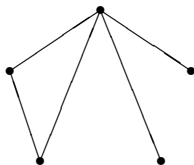
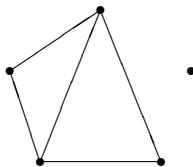
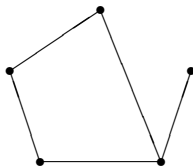
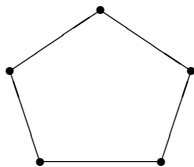
Exercício 2. Mostrar que os isomorfismos entre grafos preservam os graus dos vértices.

Definição (de automorfismo de um grafo)

Designa-se por automorfismo de um grafo G toda a bijecção $\phi : V(G) \rightarrow V(G)$ que preserva o número de arestas entre pares de vértices.

- Se G é um grafo simples, um automorfismo é um isomorfismo entre G e G .
- Se G é um multigrafo, para um dado automorfismo podem existir vários isomorfismos entre G e G .
- Qualquer grafo admite pelo menos um automorfismo que é a função identidade.

Representação gráfica de todos os grafos simples não isomorfos, com 5 vértices e 5 arestas.



Passeios em grafos

Definição (de passeio)

Dado um grafo G designa-se por passeio em G toda a sequência não vazia

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 \dots e_k v_k$$

tal que $v_0, v_1, \dots, v_k \in V(G)$, $e_1, e_2, \dots, e_k \in E(G)$ e os vértices v_{i-1} e v_i são vértices extremos da aresta e_i , para $i = 1, \dots, k$.

- O vértice v_0 designa-se por **vértice inicial** do passeio P e v_k designa-se por **vértice final** do passeio P . Por sua vez, os vértices v_1, \dots, v_{k-1} designam-se por **vértices intermédios** do passeio P . Neste caso diz-se que P é um passeio entre os vértices v_0 e v_k ou um **passeio**-(v_0, v_k).

Trajectos, caminhos, circuitos e ciclos

- Num grafo simples um passeio é determinado pela sequência dos sucessivos vértices, isto é, $P = v_0 v_1 \dots v_k$.

Definição (de trajecto e caminho)

Um **trajecto** é um passeio sem arestas repetidas.

Um **caminho** é um passeio que não repete vértices, com eventual excepção do vértice inicial e do vértice final, isto é,

- ▶ $v_i \neq v_j \quad i, j \in \{1, \dots, k-1\}, i \neq j$;
- ▶ $v_i \neq v_j \quad i \in \{0, k\}, j \in \{1, \dots, k-1\}$.

Um caminho diz-se fechado quando o vértice inicial coincide com o vértice final.

Definição (de circuito e ciclo)

Um **circuito** ou **trajecto fechado** é um trajecto com pelo menos uma aresta e tal que $v_0 = v_k$. Um **ciclo** é um caminho fechado.

Comprimento de passeios, trajectos e caminhos

Definição (de comprimento de um passeio, trajecto e caminho)

Dado um passeio P de um grafo G designa-se por **comprimento** de P e denota-se por $comp(P)$ o número de arestas (com eventual repetição) que o constitui. No caso dos caminhos (e também nos trajectos) o comprimento coincide exactamente com o respectivo número de arestas.

Exemplo: uma aresta é um caminho de comprimento 1 e um vértice é um caminho de comprimento 0.

Distância entre vértices

Definição (de distância entre vértices)

Dados dois vértices $x, y \in V(G)$, denotando por $\mathcal{P}_{x,y}$ o conjunto de todos os caminhos $-(x, y)$ de G , designa-se por **distância** entre vértices de G a função

$$\text{dist}_G : V(G) \times V(G) \rightarrow \{0, \dots, \nu(G) - 1, \infty\}$$

$$\text{tal que } \text{dist}_G(x, y) = \begin{cases} \min_{P \in \mathcal{P}_{x,y}} \text{comp}(P), & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{se } \mathcal{P}_{x,y} = \emptyset. \end{cases}$$

Teorema

Seja G um grafo simples. Se $\delta(G) \geq 2$, então G contém um caminho P e um ciclo C tais que $\text{comp}(P) \geq \delta(G)$ e $\text{comp}(C) \geq \delta(G) + 1$.

Cintura de um grafo e excentricidade de um vértice

Definição (de cintura)

Dado um grafo G designa-se por **cintura** de G e denota-se por $g(G)$ o comprimento do circuito de menor comprimento em G , caso tal circuito exista. Caso contrário, diz-se que o grafo tem cintura infinita e escreve-se $g(G) = \infty$.

Definição (de excentricidade de um vértice)

Se G é um grafo e v um vértice, então a maior distância entre v e todos os outros vértices de G designa-se por **excentricidade** de v e denota-se por $e_G(v)$ ou $e(v)$. Mais formalmente,

$$e(v) = \max_{u \in V(G)} dist_G(u, v).$$

Diâmetro e raio de um grafo

Definição (de diâmetro e raio)

Dado um grafo G , a maior excentricidade dos seus vértices designa-se por **diâmetro** e denota-se por $diam(G)$. Por sua vez, a menor excentricidade dos vértices de G designa-se por **raio** e denota-se por $r(G)$, ou seja,

- ▶ $diam(G) = \max_{u \in V(G)} e(u)$;
- ▶ $r(G) = \min_{v \in V(G)} e(v)$.

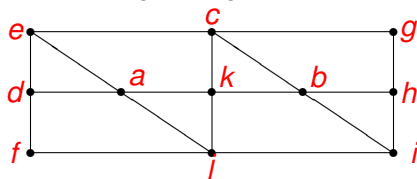
Exercício. Provar que dado um grafo arbitrário G se verificam as desigualdades $r(G) \leq diam(G) \leq 2r(G)$.

Vértice central e centro de um grafo

Definição (de vértice central e centro)

Um vértice $v \in V(G)$ diz-se **central** se a sua distância ao vértice mais distante é mínima, ou seja, $e(v) = r(G)$. O conjunto dos vértices centrais designa-se por **centro do grafo**.

Exercício. Considere o seguinte grafo G .



1. Determine a cintura do grafo G .
2. Determine a excentricidade dos vértices de G .
3. Determine o centro de G .

Subgrafos

Definição (de subgrafo)

Dados dois grafos G e H diz-se que H é um subgrafo de G e denota-se por $H \subseteq G$ se $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ e ψ_H é a restrição de ψ_G ao conjunto $E(H)$.

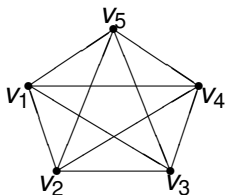
- Se $H \subseteq G$ e $H \neq G$, então H designa-se por subgrafo próprio de G e denota-se por $H \subset G$.
- Se H é um subgrafo de G , diz-se que G é supergrafo de H .

Definição (de subgrafo abrangente)

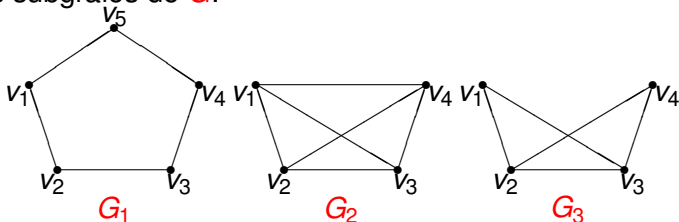
Diz-se que um grafo H é um subgrafo abrangente (ou de suporte) do grafo G se $H \subseteq G$ e $V(H) = V(G)$.

Exemplos

Considere o seguinte grafo G .



Alguns subgrafos de G :



Subgrafos induzidos

Definição (de subgrafo induzido)

Dado um grafo G e $\emptyset \neq \hat{V} \subseteq V(G)$ designa-se por **subgrafo** de G induzido por \hat{V} e denota-se por $G[\hat{V}]$, o subgrafo cujo conjunto de vértices é \hat{V} e o conjunto de arestas coincide com as arestas de G com extremos em \hat{V} .

- Denota-se por $G[V - \hat{V}]$ ou, simplesmente, $G - \hat{V}$ o subgrafo induzido após a eliminação dos vértices do subconjunto \hat{V} e de todas as arestas incidentes em \hat{V} .
- Se $\hat{V} = \{v\}$, escreve-se simplesmente $G - v$.

Definição (de subgrafo induzido pelas arestas)

Dado um grafo G e $\emptyset \neq \hat{E} \subseteq E$, designa-se por **subgrafo** de G induzido pelo subconjunto de arestas \hat{E} e denota-se por $G[\hat{E}]$ o subgrafo cujo conjunto de arestas é \hat{E} e o conjunto de vértices é constituído pelos vértices extremos das arestas de \hat{E} .

Subgrafos abrangentes

- Denota-se por $G - \hat{E}$ o subgrafo abrangente cujo conjunto de arestas é $E - \hat{E}$. Se $\hat{E} = \{e\}$ então usa-se a notação $G - e$.
- Obs.1: Em geral $G[E - \hat{E}]$ e $G - \hat{E}$ são distintos.
- Obs.2: Se $G = (V, E)$ então $G = G[V]$, mas $G = G[E]$ se e só se G não tem vértices isolados.

Relação de conexidade

Definição (de grafo conexo)

Um grafo diz-se **conexo** se entre cada par de vértices existe um caminho que os une. Caso contrário, o grafo diz-se não conexo (ou desconexo).

Definição (de vértices conexos)

Dado um grafo G , dois vértices $u, v \in V(G)$ dizem-se conexos se existe um caminho $-(u, v)$ em G .

- Num grafo conexo todos os pares de vértices distintos são conexos. A relação de conexidade entre os vértices é uma relação de equivalência (\sim) sobre o conjunto de vértices $V(G)$:

$$\forall x, y \in V(G), x \sim y \text{ sse } x \text{ e } y \text{ são vértices conexos}$$

Componentes conexas

- Supondo que $V(G)$ se parte nas classes de equivalência V_1, V_2, \dots, V_k , designa-se por **componente conexa** (ou, simplesmente, **componente**) de G cada um dos subgrafos induzidos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_k]$.

Notação: $cc(G)$ denota o número de componentes conexas de um grafo G .

Obs: Sendo G um grafo, $cc(G) = 1$ se e só se G é conexo.

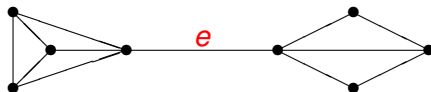
- Podemos definir componente conexa como sendo um subgrafo conexo maximal.
- Se G é um grafo conexo de ordem n , então $|E(G)| \geq n - 1$.

Pontes

Definição (de ponte)

Uma aresta e de um grafo G diz-se uma **ponte** ou uma aresta de corte se $cc(G - e) > cc(G)$. Isto é, a aresta e é uma ponte de G se a eliminação de e aumenta o número de componentes de G .

Exemplo. A aresta e , a seguir representada, é uma ponte.



Propriedades das pontes

Teorema

Se G é um grafo e $uv \in E(G)$, então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. a aresta uv é uma ponte de G ,
2. $cc(G - uv) = cc(G) + 1$,
3. os vértices u e v não são conexos em $G - uv$,
4. a aresta uv não está contida em nenhum circuito de G .