



Estudo autónomo para resolver na aula de 15-03-2018

1. Sendo p e q proposições, justifique a validade das seguintes fórmulas conhecidas como leis da absorção:

$$(a) \quad p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p ; \qquad (b) \quad p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p .$$

2. Seja a fórmula $p | q$ envolvendo o operador $|$ e interpretada pela seguinte tabela de verdade:

p	q	$p q$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Utilizando apenas os operadores lógicos \neg , \wedge e \vee , encontre fórmulas envolvendo p e q que sejam logicamente equivalentes a

$$(a) \quad p | (p | q) ; \qquad (b) \quad (p | q) | (p | q) .$$

3. A fórmula seguinte é uma tautologia ou é inconsistente?

$$[(p \vee q) \wedge (q \Rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg p)] \Rightarrow [\neg(p \wedge q)]$$

Justifique a sua resposta usando as leis da lógica, ou seja, sem recorrer a tabelas de verdade.

4. Numa rede de comunicações operam quatro servidores A , B , C e D . Traduza em linguagem formal em termos de proposições atómicas a , b , c e d as seguintes afirmações começando por dizer a que correspondem estas designações:

- (a) Se A está ligado então B e C também estão.
- (b) C está ligado só se A e B estão desligados.
- (c) D está ligado se e só se C está ligado e A não está.
- (d) C está ligado caso D não esteja, mas se D está ligado então B não está.
- (e) Uma condição necessária para que A esteja ligado é que B e C não estejam ligados quando D estiver.

5. Na caça a um tesouro foram encontradas três arcas, sendo que apenas uma delas contém o tesouro estando as outras duas vazias. Nas arcas estão impressas as seguintes pistas:

- Arca 1: "O tesouro não está aqui."
- Arca 2: "O tesouro não está aqui."
- Arca 3: "O tesouro está na Arca 2."

Sabendo que apenas uma das pistas é verdadeira, sendo as outras duas falsas, qual das arcas contém o tesouro?

Formalize o puzzle da caça ao tesouro usando a lógica proposicional e encontre a solução construindo uma tabela de verdade adequada.

6. Classifique a relação

$$\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \leq 5\}$$

quanto à reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade.

7. Seja $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \mathbb{R}\}$, com

$$A_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x + r\},$$

uma família de subconjuntos de \mathbb{R}^2 .

(a) Prove que \mathcal{A} é uma partição de \mathbb{R}^2 e descreva-a geometricamente.

(b) Defina a relação de equivalência induzida pela partição \mathcal{A} .

8. Considere as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h = g \circ f$. Mostre que:

(a) Se f e g são injetivas, então h é injetiva.

(b) Se h é injetiva, então f é injetiva.

(c) Se f e g são sobrejetivas, então h é sobrejetiva.

(d) Se h é sobrejetiva, então g é sobrejetiva.

9. Tome o conjunto \mathbb{N} como domínio e considere os seguintes predicados:

$$P(m, n) \equiv "m \mid n \text{ (} m \text{ divide } n \text{)}";$$

$$Q(m, n) \equiv "m < n";$$

Diga, justificando, qual o valor lógico das seguintes fórmulas:

$$(a) P(2, 4) \Rightarrow P(4, 5);$$

$$(b) \exists m \forall n P(m, n);$$

$$(c) \exists n \forall m Q(m, n);$$

$$(d) (\forall n \exists m P(m, n)) \Rightarrow (\exists m \forall n Q(m, n));$$

$$(e) (\forall m \exists n Q(m, n)) \Rightarrow (\forall m \exists n P(m, n)).$$

10. Considere o conjunto \mathbb{N} como domínio e definam-se os seguintes predicados:

$$P(n): "n \text{ é par}";$$

$$Primo(p): "p \text{ é primo}";$$

Usando a lógica de primeira ordem (LPO) com os predicados acima definidos, as operações $+$ (soma) e $>$ (maior que) como símbolos de funções binárias e 2 uma constante, traduza os factos:

(a) F : Cada número primo é ímpar ou é igual a 2;

(b) G : Todo o número par maior que 2 pode ser obtido como a soma de dois números primos.

(c) H : Existe um número primo que é maior que todos os outros.

(d) Obtenha na LPO uma fórmula bem formada que exprima a negação de G .

Apoio ao estudo autónomo (bibliografia recomendada em elearning.ua.pt):

- Matemática Discreta: Comb., Teoria dos Grafos e Algoritmos, *D. Cardoso, J.S., M.R.*, 2011.
- Tópicos de Matemática Discreta, *José S. Pinto*, Universidade de Aveiro, 1999.
- Estudo Autónomo: um objeto de aprendizagem ativa, *A.J. Neves, M.P. Carvalho*, MD 2016/2017.
- Slides de apoio às aulas.
- Orientações Tutoriais (OTs) e horário de atendimento do seu professor.