Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/aulas/

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

A lógica de primeira ordem

Índice

Introdução

Introdução

Neste momento podemos argumentar

$$\frac{\text{Se chover, fico em casa.} \quad \text{Chove}}{\text{Fico em casa.}}$$

Introdução

Neste momento podemos argumentar

$$\frac{\text{Se chover, fico em casa.} \quad \text{Chove}}{\text{Fico em casa.}}$$

Ainda não podemos argumentar

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

1. Aprender o alfabeto.

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

2. Aprender ortografia e gramática.

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

2. Aprender ortografia e gramática.

   Ou seja, que palavras (= sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma ...

Aprender português (ou alemão) significa ...

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

2. Aprender ortografia e gramática.

   Ou seja, que palavras (= sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

   Por exemplo, "futebol" conta mas "hhcdqwldb" não.

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

2. Aprender ortografia e gramática.

   Ou seja, que palavras (= sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

   Por exemplo, “futebol” conta mas “hhcdqwldb” não.

   “Eu sou do Porto” está ótimo mas “Porto sou Eu do” não.

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma . . .

Aprender português (ou alemão) significa . . .

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

2. Aprender ortografia e gramática.

   Ou seja, que palavras (= sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

   Por exemplo, "futebol" conta mas "hhcdqwldb" não.

   "Eu sou do Porto" está ótimo mas "Porto sou Eu do" não.

3. Aprender o que as palavras significam (a interpretação).

Aprender (um)a lógica é como aprender um idioma ...

Aprender português (ou alemão) significa ...

1. Aprender o alfabeto.

   Ou seja, que símbolos podemos utilizar.

2. Aprender ortografia e gramática.

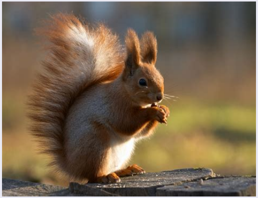
   Ou seja, que palavras (= sequências de símbolos) podemos escrever. E em que ordem.

   Por exemplo, "futebol" conta mas "hhcdqwldb" não.

   "Eu sou do Porto" está ótimo mas "Porto sou Eu do" não.

3. Aprender o que as palavras significam (a interpretação).

   Por exemplo, "Eichhörnchen" significa



O sintaxe

Linguagem de 1ª ordem

Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

Linguagem de 1ª ordem

Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,

Linguagem de 1ª ordem

Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos "$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$" da lógica proposicional,

Linguagem de 1ª ordem

Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos "$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$" da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos "$\exists$" (existe) e "$\forall$" (para todos),

Linguagem de 1ª ordem

Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos "$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$" da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos "$\exists$" (existe) e "$\forall$" (para todos),
4. (o símbolo de igualdade "$=$").

Linguagem de 1ª ordem

Definição

Um alfabeto de 1ª ordem consiste em:

1. uma coleção de variáveis,
2. os símbolos "$\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$, $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$" da lógica proposicional,
3. os quantificadores: os símbolos "$\exists$" (existe) e "$\forall$" (para todos),
4. (o símbolo de igualdade "$=$").
5. Além destes símbolos, e dependente do contexto, temos
   - uma coleção de símbolos de constante,
   - uma coleção de símbolos de função (aqui cada símbolo f tem uma "aridade" $n \in \mathbb{N}$ – o número de argumentos),
   - uma coleção de símbolos de predicado ($=$ relações) de n argumentos.

Exemplos

Exemplo (espaços vetoriais)

O alfabeto da teoria de espaços vetoriais consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de constante 0,
- para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o símbolo de função $\alpha \cdot -$ de aridade 1, e
- o símbolo de função $+$ de aridade 2.

Exemplos

Exemplo (espaços vetoriais)

O alfabeto da teoria de espaços vetoriais consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de constante 0,
- para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, o símbolo de função $\alpha \cdot -$ de aridade 1, e
- o símbolo de função $+$ de aridade 2.

Exemplo (a teoria de conjuntos)

O alfabeto da teoria de conjuntos consiste em (além dos símbolos de lógica e dos variáveis):

- o símbolo de predicado $\in$ de aridade 2.

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.
- $i(a)$, $i(x)$, $m(z, y)$, $m(a, z)$, ...

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \dots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \dots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.
- $i(a)$, $i(x)$, $m(z, y)$, $m(a, z)$, ...
- $m(i(x), x)$, $i(m(x, a))$, $m(m(z, a), i(x))$, ...

Termos

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de termo:

1. Cada variável e cada símbolo de constante é um termo.
2. Se f é um símbolo de função de n variáveis e $t_1, \ldots, t_n$ são termos, então $f(t_1, \ldots, t_n)$ é um termo.

Exemplo

Consideramos a linguagem com as variáveis x, y, z, um símbolo de constante a, um símbolos de função i de um argumento e um símbolo de função m de dois argumentos. Então, as seguintes expressões são termos:

- x, y, z, a.
- $i(a)$, $i(x)$, $m(z, y)$, $m(a, z)$, $\ldots$
- $m(i(x), x)$, $i(m(x, a))$, $m(m(z, a), i(x))$, $\ldots$
- $\ldots$

Fórmulas

Definição

Um átomo é uma expressão $P(t_1, \ldots, t_n)$ onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

Fórmulas

Definição

Um átomo é uma expressão $P(t_1, \ldots, t_n)$ onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

Nota

- Se consideramos também o símbolo "$=$",

$$t_1 = t_2$$

  é um átomo, para todos os termos t_1, t_2.

Fórmulas

Definição

Um átomo é uma expressão $P(t_1, \ldots, t_n)$ onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

Nota

- Se consideramos também o símbolo "$=$",

  $$t_1 = t_2$$

  é um átomo, para todos os termos t_1, t_2.
- As fórmulas $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$ consideram-se também como átomos.

Fórmulas

Definição

Um átomo é uma expressão $P(t_1, \ldots, t_n)$ onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de fórmula:

- Cada átomo é uma fórmula.

Fórmulas

Definição

Um átomo é uma expressão $P(t_1, \ldots, t_n)$ onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \ldots, t_n$ são termos.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de fórmula:

- Cada átomo é uma fórmula.
- Se φ e ψ são fórmulas, então

$$(\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \Rightarrow \psi),\ \neg\varphi,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}$$

  são fórmulas.

Fórmulas

Definição

Um átomo é uma expressão $P(t_1, \dots, t_n)$ onde P é um símbolo de predicado de n argumentos e $t_1, \dots, t_n$ são termos.

Definição

Definimos agora recursivamente o conceito de fórmula:

- Cada átomo é uma fórmula.
- Se φ e ψ são fórmulas, então

  $$(\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \Rightarrow \psi),\ \neg\varphi,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}$$

  são fórmulas.
- Se φ é uma fórmula e x é uma variável, então

  $$\forall x\, \varphi \qquad \text{e} \qquad \exists x\, \varphi$$

  são fórmulas.

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\,\varphi$ e $\exists x\,\varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".
- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\ x < y$".

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\ x < y$".

  O alcance de "$\exists$" é "$x < y$".

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\, (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".
- $(\forall x\, \exists y\; x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\; x < y$".

  O alcance de "$\exists$" é "$x < y$".
- $\forall x\, \exists y\; (x < y \wedge a < x)$:

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\ x < y$".

  O alcance de "$\exists$" é "$x < y$".

- $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\ (x < y \wedge a < x)$".

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  O alcance de "$\forall$" é "$(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$".

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\ x < y$".

  O alcance de "$\exists$" é "$x < y$".

- $\forall x\ \exists y\ (x < y \wedge a < x)$:

  O alcance de "$\forall$" é "$\exists y\ (x < y \wedge a < x)$".

  O alcance de "$\exists$" é "$x < y \wedge a < x$".

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma *ocorrência de uma variável* numa fórmula diz-se ligada se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se livre se essa ocorrência não é ligada.

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma *ocorrência de uma variável* numa fórmula diz-se ligada se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se livre se essa ocorrência não é ligada.

Uma *variável* numa fórmula diz-se livre quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula (e as vezes se diz que é ligada quando ocorre pelo menos uma vez ligada na fórmula).

Variáveis livres e ligadas

Alcance de um quantificador

Nas fórmulas da forma $\forall x\, \varphi$ e $\exists x\, \varphi$, a fórmula φ é o alcance do quantificador $\forall$ respetivamente $\exists$.

Variável livre e ligada

Uma *ocorrência de uma variável* numa fórmula diz-se ligada se a ocorrência da variável está dentro do alcance de um quantificador utilizado para essa variável. Uma ocorrência de uma variável numa fórmula diz-se livre se essa ocorrência não é ligada.

Uma *variável* numa fórmula diz-se livre quando ocorre pelo menos uma vez livre na fórmula (e as vezes se diz que é ligada quando ocorre pelo menos uma vez ligada na fórmula).

Nota

Uma fórmula diz-se fechada quando não tem variáveis livres.

Exemplos

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

Exemplos

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

Exemplos

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \land (a < x)$:

Exemplos

Exemplos

- $\forall x\ (\text{gato}(x) \Rightarrow \text{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \wedge (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada. A fórmula não é fechada

Exemplos

Exemplos

- $\forall x\ (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x\ \exists y\ x < y) \land (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada. A fórmula não é fechada

- $\forall x\ \exists y\ (x < y \land a < x)$:

Exemplos

Exemplos

- $\forall x \; (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garras}(x))$:

  A variável x ocorre ligada. A fórmula é fechada.

- $(\forall x \; \exists y \; x < y) \wedge (a < x)$:

  A variável y ocorre ligada e a variável x ocorre livre e ligada. A fórmula não é fechada

- $\forall x \; \exists y \; (x < y \wedge a < x)$:

  As variáveis x e y ocorrem ligadas. A fórmula é fechada

A semântica

Interpretação

Definição

Uma interpretação de uma alfabeto de 1ª ordem consiste em:

Interpretação

Definição

Uma interpretação de uma alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,

Interpretação

Definição

Uma interpretação de uma alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante associamos um elemento de D,

Interpretação

Definição

Uma interpretação de uma alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante associamos um elemento de D,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $D^n \to D$ (tipicamente também denotada por f),

Interpretação

Definição

Uma interpretação de uma alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante associamos um elemento de D,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $D^n \to D$ (tipicamente também denotada por f),
- a cada símbolo de predicado P com n argumentos associamos um subconjunto de D^n (ou, equivalentemente, uma função

$$P\colon D^n \longrightarrow \{0,1\}$$

onde $P(a_1,\ldots,a_n) = 1$ quando $(a_1,\ldots,a_n)$ pertence a este conjunto).

Interpretação

Definição

Uma interpretação de uma alfabeto de 1ª ordem consiste em:

- um conjunto D,
- a cada símbolo de constante associamos um elemento de D,
- a cada símbolo de função f com n argumentos associamos uma função $D^n \to D$ (tipicamente também denotada por f),
- a cada símbolo de predicado P com n argumentos associamos um subconjunto de D^n (ou, equivalentemente, uma função

  $$P\colon D^n \longrightarrow \{0,1\}$$

  onde $P(a_1,\ldots,a_n) = 1$ quando $(a_1,\ldots,a_n)$ pertence a este conjunto).
- (As vezes consideramos também: a cada variável associamos um elemento de D.)

Interpretação de termos

Interpretação de termos

Dada um interpretação (digamos I) de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in D.$$

Interpretação de termos

Interpretação de termos

Dada um interpretação (digamos I) de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in D.$$

Exemplo

Consideramos a linguagem com um símbolo de função binária f (ou seja, de dois argumentos) e um símbolo de constante a.

Para a interpretação I com $D = \mathbb{Z}$ e

$$f : D^2 \to D, (n, m) \mapsto |n| - |m|, \; I(a) = 0, \; I(x) = -2 \text{ e } I(y) = 1,$$

temos:

Interpretação de termos

Interpretação de termos

Dada um interpretação (digamos I) de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$I(f(t_1, \dots, t_n)) = f(I(t_1), \dots, I(t_n)) \in D.$$

Exemplo

Consideramos a linguagem com um símbolo de função binária f (ou seja, de dois argumentos) e um símbolo de constante a.

Para a interpretação I com $D = \mathbb{Z}$ e

$$f : D^2 \to D, \ (n, m) \mapsto |n| - |m|, \ I(a) = 0, \ I(x) = -2 \text{ e } I(y) = 1,$$

temos:

- $I(f(a, x)) = |0| - |-2| = -2.$

Interpretação de termos

Interpretação de termos

Dada um interpretação (digamos I) de uma linguagem, definimos recursivamente a interpretação de termos:

$$I(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(I(t_1), \ldots, I(t_n)) \in D.$$

Exemplo

Consideramos a linguagem com um símbolo de função binária f (ou seja, de dois argumentos) e um símbolo de constante a.

Para a interpretação I com $D = \mathbb{Z}$ e

$$f : D^2 \to D,\ (n, m) \mapsto |n| - |m|,\ I(a) = 0,\ I(x) = -2 \text{ e } I(y) = 1,$$

temos:

- $I(f(a, x)) = |0| - |-2| = -2.$
- $I(f(f(x, y), a)) = |(|-2| - |1|) - |0|| = 1.$

Interpretação de fórmulas

Dada uma interpretação I de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente a validade de fórmulas (relativa à I):

Interpretação de fórmulas

Interpretação de fórmulas

Dada uma interpretação I de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente a validade de fórmulas (relativa à I):

- A fórmula $P(t_1, \ldots, t_n)$ é válida quando

$$P(I(t_1), \ldots, I(t_2)) = 1.$$

Interpretação de fórmulas

Interpretação de fórmulas

Dada uma interpretação I de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente a validade de fórmulas (relativa à I):

- A fórmula $P(t_1, \ldots, t_n)$ é válida quando

$$P(I(t_1), \ldots, I(t_2)) = 1.$$

- A validade das fórmulas

$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \Rightarrow \psi), \quad \neg\varphi, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}$$

  define-se como na lógica proposicional.

Interpretação de fórmulas

Interpretação de fórmulas

Dada uma interpretação I de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente a validade de fórmulas (relativa à I):

- A fórmula $P(t_1, \ldots, t_n)$ é válida quando
$$P(I(t_1), \ldots, I(t_2)) = 1.$$
- A validade das fórmulas
$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \Rightarrow \psi), \quad \neg\varphi, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}$$
define-se como na lógica proposicional.
- A fórmula $\forall x\, \varphi$ é válida quando φ é válida para "*todas* as interpretações da variável x".

Interpretação de fórmulas

Interpretação de fórmulas

Dada uma interpretação I de um alfabeto de 1ª ordem, definimos recursivamente a validade de fórmulas (relativa à I):

- A fórmula $P(t_1, \ldots, t_n)$ é válida quando
$$P(I(t_1), \ldots, I(t_2)) = 1.$$
- A validade das fórmulas
$$(\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \Rightarrow \psi), \quad \neg\varphi, \quad \mathbf{0}, \quad \mathbf{1}$$
define-se como na lógica proposicional.
- A fórmula $\forall x\, \varphi$ é válida quando φ é válida para "*todas* as interpretações da variável x".
- A fórmula $\exists x\, \varphi$ é válida quando φ é válida para "*alguma* interpretação da variável x".

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos “comuns” têm o significado “habitual”).

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$?

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos “comuns” têm o significado “habitual”).

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos “comuns” têm o significado “habitual”).

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$?

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$? Interpretação: não valida.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$? Interpretação: não valida.
- $(\forall x\, x < 4) \Rightarrow 1 = 0$?

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$? Interpretação: não valida.
- $(\forall x\, x < 4) \Rightarrow 1 = 0$? Interpretação: valida.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$? Interpretação: não valida.
- $(\forall x\, x < 4) \Rightarrow 1 = 0$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, \exists y\, x < y$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$? Interpretação: não valida.
- $(\forall x\, x < 4) \Rightarrow 1 = 0$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, \exists y\, x < y$? Interpretação: valida.

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$?   Interpretação: 2.
- $3 < 4$?   Interpretação: valida.
- $x < 4$?   Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$?   Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$?   Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$?   Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$?   Interpretação: não valida.
- $(\forall x\, x < 4) \Rightarrow 1 = 0$?   Interpretação: valida.
- $\forall x\, \exists y\, x < y$?   Interpretação: valida.
- $\exists x\, \forall y\, x \leq y$?

Exemplos

Exemplos

Interpretamos as seguintes termos e fórmulas em $D = \mathbb{R}$ (onde os símbolos "comuns" têm o significado "habitual").

- $\cos(\pi) + 3$? Interpretação: 2.
- $3 < 4$? Interpretação: valida.
- $x < 4$? Não podemos interpretar exceto se sabemos a interpretação de x.
- $\forall x\, x < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, y < 4$? Interpretação: não valida.
- $\forall y\, \exists y\, y < 4$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, (x < 4 \Rightarrow 1 = 0)$? Interpretação: não valida.
- $(\forall x\, x < 4) \Rightarrow 1 = 0$? Interpretação: valida.
- $\forall x\, \exists y\, x < y$? Interpretação: valida.
- $\exists x\, \forall y\, x \leq y$? Interpretação: não valida.

Mais notação

Nota

- Se uma fórmula φ é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 1" (nesta interpretação).

Mais notação

Nota

- Se uma fórmula φ é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 1" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 0" (nesta interpretação).

Mais notação

Nota

- Se uma fórmula φ é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 1" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 0" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é *irrelevante*.

Mais notação

Nota

- Se uma fórmula φ é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 1" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 0" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é *irrelevante*.

Ainda mais notação

Se uma fórmula φ é válida numa interpretação I, diz-se também que

Mais notação

Nota

- Se uma fórmula φ é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 1" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 0" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é *irrelevante*.

Ainda mais notação

Se uma fórmula φ é válida numa interpretação I, diz-se também que

- I é um modelo de φ, ou

Mais notação

Nota

- Se uma fórmula φ é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 1" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não é válida numa interpretação, diz-se também que φ é "avaliada em 0" (nesta interpretação).
- Se uma fórmula φ não tem variáveis livres, a interpretação das variáveis é *irrelevante*.

Ainda mais notação

Se uma fórmula φ é válida numa interpretação I, diz-se também que

- I é um modelo de φ, ou
- I satisfaz φ.

Um Exemplo

Exemplo (Espaços vetoriais)

Um espaço vetorial é um modelo das fórmulas (no alfabeto da teoria de espaços vetoriais):

1. $\forall u \forall v \quad u + v = v + u$,
2. $\forall u \forall v \forall w \quad u + (v + w) = (u + v) + w$,
3. $\forall u \quad u + 0 = u$,
4. $\forall u \quad 0 \cdot u = 0$,
5. $\forall u \quad 1 \cdot u = u$,
6. $\forall u \quad \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$,
7. $\forall u \quad (\alpha + \beta) \cdot u = (\alpha \cdot u) + (\beta \cdot u)$,
8. $\forall u \forall v \quad \alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot u) + (\alpha \cdot v)$.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- consistente quando é válida em *alguma* interpretação.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- consistente quando é válida em *alguma* interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se inválida e uma fórmula não consistente diz-se inconsistente.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- consistente quando é válida em *alguma* interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se inválida e uma fórmula não consistente diz-se inconsistente.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- consistente quando é válida em *alguma* interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se inválida e uma fórmula não consistente diz-se inconsistente.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

  Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma contradição.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- consistente quando é válida em *alguma* interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se inválida e uma fórmula não consistente diz-se inconsistente.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

  Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma contradição.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

A validade de fórmulas

Tautologias e Fórmulas consistentes

Uma fórmula φ diz-se

- válida (ou uma tautologia) quando é válida em *cada* interpretação. **Notação:** Escreve-se $\models \varphi$ quando φ é válida.
- consistente quando é válida em *alguma* interpretação.

Nota

- Uma fórmula não válida diz-se inválida e uma fórmula não consistente diz-se inconsistente.
- Uma fórmula φ é inconsistente se e só se $\neg\varphi$ é válida.

  Portanto, uma fórmula inconsistente diz-se também uma contradição.

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia. Neste caso escrevemos $\varphi \equiv \psi$.

Consequência

Definição

Uma fórmula ψ diz-se consequência (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

$$\text{se } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ são válidas em } I \text{, então } \psi \text{ é valida em } I.$$

Consequência

Definição

Uma fórmula ψ diz-se consequência (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em I, então ψ é valida em I.

Em símbolos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Consequência

Definição

Uma fórmula ψ diz-se consequência (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em I, então ψ é valida em I.

Em símbolos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Teorema

Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e ψ fórmulas. Então, ψ é consequência de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se e só se a fórmula

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$$

é válida.

Consequência

Definição

Uma fórmula ψ diz-se consequência (semântica ou lógica) das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ quando, para toda a interpretação I,

se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são válidas em I, então ψ é valida em I.

Em símbolos: $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Teorema

Sejam $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e ψ fórmulas. Então, ψ é consequência de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ se e só se a fórmula

$$(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi$$

é válida. Ou seja:

$$\begin{aligned} \varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi \qquad & \textit{se e só se} \quad \models ((\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n) \Rightarrow \psi) \\ & \textit{se e só se} \quad \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \models \psi. \end{aligned}$$

Relações de equivalência outra vez...

Teorema

Seja R uma relação de equivalência num conjunto X. Então, para todos os $x, y \in X$,

$$x\,R\,y \quad \text{se e só se} \quad [x] = [y].$$

Recordamos: $[x] = \{z \in X \mid x\,R\,z\}$.

Relações de equivalência outra vez...

Teorema

Seja R uma relação de equivalência num conjunto X. Então, para todos os $x, y \in X$,

$$x \, R \, y \quad \text{se e só se} \quad [x] = [y].$$

Na linguagem de 1ª ordem

Relações de equivalência outra vez...

Teorema

Seja R uma relação de equivalência num conjunto X. Então, para todos os $x, y \in X$,

$$x \mathrel{R} y \quad \textit{se e só se} \quad [x] = [y].$$

Na linguagem de 1ª ordem

Precisamos um símbolo de relação R com dois argumentos, e consideramos as fórmulas:

Relações de equivalência outra vez...

Teorema

Seja R uma relação de equivalência num conjunto X. Então, para todos os $x, y \in X$,

$$x \, R \, y \quad \textit{se e só se} \quad [x] = [y].$$

Na linguagem de 1ª ordem

Precisamos um símbolo de relação R com dois argumentos, e consideramos as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x \; R(x, x), \\
\varphi_2 &\equiv \forall x \, \forall y \; (R(x, y) \Rightarrow R(y, x)), \\
\varphi_3 &\equiv \forall x \, \forall y \, \forall z \; ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)), \\
\psi &\equiv \forall x \, \forall y \; (R(x, y) \Leftrightarrow \forall z \, (R(z, x) \Leftrightarrow R(z, y))).
\end{aligned}$$

Relações de equivalência outra vez...

Teorema

Seja R uma relação de equivalência num conjunto X. Então, para todos os $x, y \in X$,

$$x\, R\, y \quad \text{se e só se} \quad [x] = [y].$$

Na linguagem de 1ª ordem

Precisamos um símbolo de relação R com dois argumentos, e consideramos as fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\equiv \forall x\; R(x, x), \\
\varphi_2 &\equiv \forall x\, \forall y\; (R(x, y) \Rightarrow R(y, x)), \\
\varphi_3 &\equiv \forall x\, \forall y\, \forall z\; ((R(x, y) \wedge R(y, z)) \Rightarrow R(x, z)), \\
\psi &\equiv \forall x\, \forall y\; (R(x, y) \Leftrightarrow \forall z\, (R(z, x) \Leftrightarrow R(z, y))).
\end{aligned}$$

O teorema acima escreve-se como: $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi$.

Como verificar consequências?

Na lógica proposicional

Por exemplo: $(p \Rightarrow q), \neg q \models \neg p.$

Como verificar consequências?

Na lógica proposicional

Por exemplo: $(p \Rightarrow q), \neg q \models \neg p.$

Podemos validar esta consequência verificando *todas* as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade).

Como verificar consequências?

Na lógica proposicional

Por exemplo: $(p \Rightarrow q), \neg q \models \neg p$.

Podemos validar esta consequência verificando *todas* as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade).

Na lógica de 1ª ordem

Como verificar (sobre relações de equivalências)

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi?$$

Como verificar consequências?

Na lógica proposicional

Por exemplo: $(p \Rightarrow q), \neg q \models \neg p$.

Podemos validar esta consequência verificando *todas* as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade).

Na lógica de 1ª ordem

Como verificar (sobre relações de equivalências)

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi?$$

Agora não podemos verificar todas as interpretações!!

Como verificar consequências?

Na lógica proposicional

Por exemplo: $(p \Rightarrow q), \neg q \models \neg p.$

Podemos validar esta consequência verificando *todas* as interpretações (ou seja, criar a tabela de verdade).

Na lógica de 1ª ordem

Como verificar (sobre relações de equivalências)

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \models \psi?$$

Agora não podemos verificar todas as interpretações!!

Tipicamente fazemos uma prova (= argumentação), ou seja, escrevemos uma sequência de fórmulas

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_3 \quad \ldots \quad \text{algo esperto}^a \quad \ldots \quad \psi$$

[a] Justificado pelo anterior

Aplicamos certas regras de inferência, por exemplo:

O que conta como uma prova? (informação complementar)

Aplicamos certas regras de inferência, por exemplo:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

O que conta como uma prova? (informação complementar)

Aplicamos certas regras de inferência, por exemplo:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$$

e

$$\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \vee \psi} \qquad \frac{(\varphi \vee \psi) \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \theta\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \theta\end{array}}}{\theta}$$

O que conta como uma prova? (informação complementar)

Aplicamos certas regras de inferência, por exemplo:

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \land \psi} \qquad \frac{\varphi \land \psi}{\varphi} \qquad \frac{\varphi \land \psi}{\psi}$$

e

$$\frac{\varphi}{\varphi \lor \psi} \qquad \frac{\psi}{\varphi \lor \psi} \qquad \frac{(\varphi \lor \psi) \quad \boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \theta\end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{c}\psi \\ \vdots \\ \theta\end{array}}}{\theta}$$

e

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\varphi \\ \vdots \\ \psi\end{array}}}{\varphi \Rightarrow \psi} \qquad \frac{\varphi \quad (\varphi \Rightarrow \psi)}{\psi} \qquad \ldots$$

Dedução (automática)

Índice

Introdução

Ainda sobre consequências

Definição

O conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se consistente quando existe um modelo I que satisfaz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Ainda sobre consequências

Definição

O conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se consistente quando existe um modelo I que satisfaz $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Teorema

$\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ *é inconsistente se e só se* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \mathbf{0}$.

Ainda sobre consequências

Definição

O conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se consistente quando existe um modelo I que satisfaz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Teorema

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *é inconsistente se e só se* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$.

Nota

$\neg\psi \equiv (\psi \Rightarrow \mathbf{0})$ e $\neg\neg\psi \equiv \psi$.

Ainda sobre consequências

Definição

O conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ de fórmulas diz-se consistente quando existe um modelo I que satisfaz $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Teorema

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ *é inconsistente se e só se* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$.

Nota

$\neg\psi \equiv (\psi \Rightarrow \mathbf{0})$ e $\neg\neg\psi \equiv \psi$.

Portanto:

$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$ é inconsistente se e só se

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi \models \mathbf{0}$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models (\neg\psi \Rightarrow \mathbf{0})$ se e só se $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$.

Ideia

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Ideia

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \mathbf{0}$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é "consequência" das fórmulas anteriores.

Ideia

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \mathbf{0}$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é "consequência" das fórmulas anteriores.

Consequência como?

Ideia

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \mathbf{0}$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é "consequência" das fórmulas anteriores.

Consequência como? Utilizando a regra[a] $\dfrac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}$.

[a]Neste momento ignoramos os quantificadores

Ideia

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \mathbf{0}$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é "consequência" das fórmulas anteriores.

Consequência como? Utilizando a regra $\dfrac{\psi \Rightarrow \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}$.

Ideia

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \ldots \quad \mathbf{0}$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é "consequência" das fórmulas anteriores.

Consequência como? Utilizando a regra $\dfrac{\neg\psi \vee \theta \quad \psi \vee \varphi}{\theta \vee \varphi}$.

Deduções

Questão: Como justificar $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \mathbf{0}$?

Como já observamos, uma dedução consiste numa sequência

$$\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots \quad \mathbf{0}$$

de fórmulas onde $\psi_i \in \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ou ψ_i é "consequência" das fórmulas anteriores.

Consequência como? Utilizando a regra $\dfrac{\neg\psi \lor \theta \quad \psi \lor \varphi}{\theta \lor \varphi}$.

Em particular:

$$\frac{\neg\psi \quad \psi \lor \varphi}{\varphi} \qquad \text{e} \qquad \frac{\neg\psi \quad \psi}{\mathbf{0}} \quad .$$

Também se escreve $\Diamond$ em lugar de $\mathbf{0}$.

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Para poder aplicar a regra de dedução, rescrevemos as fórmulas como

$$\varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \neg\psi.$$

Agora:

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Para poder aplicar a regra de dedução, rescrevemos as fórmulas como

$$\varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \neg\psi.$$

Agora: $\quad \varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi,$

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Para poder aplicar a regra de dedução, rescrevemos as fórmulas como

$$\varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \neg\psi.$$

Agora: $\quad \varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \psi,$

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Para poder aplicar a regra de dedução, rescrevemos as fórmulas como

$$\varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \neg\psi.$$

Agora: $\quad \varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \psi, \quad \neg\psi,$

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Para poder aplicar a regra de dedução, rescrevemos as fórmulas como

$$\varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \neg\psi.$$

Agora: $\qquad \varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \psi, \quad \neg\psi, \quad \Diamond.$

Um exemplo

Exemplo

Deduzimos agora

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi) \models \psi;$$

ou seja

$$\varphi, (\varphi \Rightarrow \psi), \neg\psi \models \mathbf{0}.$$

Para poder aplicar a regra de dedução, rescrevemos as fórmulas como

$$\varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \neg\psi.$$

Agora: $\qquad \varphi, \quad \neg\varphi \vee \psi, \quad \psi, \quad \neg\psi, \quad \Diamond.$

Exemplo (De facto: TPIJB)

$$(\varphi \vee \psi), (\varphi \Rightarrow \theta), (\psi \Rightarrow \theta) \ \models \ \theta$$

Formas normais de fórmulas

Fórmulas na forma normal

Definição

Fórmulas na forma normal

Definição

- Um literal é um átomo ou a negação de um átomo.
- Uma fórmula φ diz-se na forma normal conjuntiva (disjuntiva) quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

com literais L_i.

Fórmulas na forma normal

Definição

- Um literal é um átomo ou a negação de um átomo.
- Uma fórmula φ diz-se na forma normal conjuntiva (disjuntiva) quando

$$\varphi = \varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \qquad (\varphi = \varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n)$$

  onde cada φ_i é da forma

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k \qquad (L_1 \wedge \cdots \wedge L_k)$$

  com literais L_i.
- Uma fórmula da forma

$$Qx_1 \ \ldots \ Qx_n \quad \varphi$$

  onde φ é uma fórmula sem quantificadores e Q denota "$\exists$" ou "$\forall$" diz-se na na forma normal prenex.

Ainda sobre formas normais

Definição

Para $k \in \mathbb{N}$, uma *k-cláusula* é uma disjunção de k literais.

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k$$

Ainda sobre formas normais

Definição

Para $k \in \mathbb{N}$, uma *k-cláusula* é uma disjunção de k literais.

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k$$

Nota

- Uma 1-cláusula é apenas um literal.

Ainda sobre formas normais

Definição

Para $k \in \mathbb{N}$, uma *k-cláusula* é uma disjunção de k literais.

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k$$

Nota

- Uma 1-cláusula é apenas um literal.
- Uma 0-cláusula é a fórmula "falsa" $\mathbf{0}$. (No que se segue denotada também por $\Diamond$.)

Ainda sobre formas normais

Definição

Para $k \in \mathbb{N}$, uma *k*-cláusula é uma disjunção de k literais.

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k$$

Nota

- Uma 1-cláusula é apenas um literal.
- Uma 0-cláusula é a fórmula "falsa" $\mathbf{0}$. (No que se segue denotada também por $\Diamond$.)
- Portanto, uma fórmula na forma normal conjuntiva é uma conjunção de cláusulas.

Ainda sobre formas normais

Definição

Para $k \in \mathbb{N}$, uma *k-cláusula* é uma disjunção de k literais.

$$L_1 \vee \cdots \vee L_k$$

Nota

- Uma 1-cláusula é apenas um literal.
- Uma 0-cláusula é a fórmula "falsa" $\mathbf{0}$. (No que se segue denotada também por $\Diamond$.)
- Portanto, uma fórmula na forma normal conjuntiva é uma conjunção de cláusulas.
- Uma conjunto $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de cláusulas identificamos com a conjunção de cláusulas

$$\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n.$$

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$

$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

Mover $\neg$ mais para o interior

- $\neg(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \vee \neg\psi.$

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

Mover $\neg$ mais para o interior

- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi.$
- $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi$ e $\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi.$

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

Mover $\neg$ mais para o interior

- $\neg(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \vee \neg\psi.$
- $\neg\forall x\, \varphi \;\equiv\; \exists x\, \neg\varphi$ e $\neg\exists x\, \varphi \;\equiv\; \forall x\, \neg\varphi.$

Mover os quantificadores mais para o exterior

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

Mover $\neg$ mais para o interior

- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi.$
- $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi$ e $\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi.$

Mover os quantificadores mais para o exterior

- $(\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\psi \wedge \varphi).$

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

Mover $\neg$ mais para o interior

- $\neg(\varphi \vee \psi) \equiv \neg\varphi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi.$
- $\neg\forall x\, \varphi \equiv \exists x\, \neg\varphi$ e $\neg\exists x\, \varphi \equiv \forall x\, \neg\varphi.$

Mover os quantificadores mais para o exterior

- $(\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi) \equiv \forall x\, (\psi \wedge \varphi).$
- $(\exists x\, \varphi) \vee (\exists x\, \psi) \equiv \exists x\, (\psi \vee \varphi).$

Obter formas normais

Recordamos da lógica proposicional

- $\varphi \Rightarrow \psi \;\equiv\; \neg\varphi \vee \psi, \qquad \varphi \Leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi).$
- As leis de distributividade.

Mover $\neg$ mais para o interior

- $\neg(\varphi \vee \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \wedge \neg\psi$ e $\neg(\varphi \wedge \psi) \;\equiv\; \neg\varphi \vee \neg\psi$.
- $\neg\forall x\, \varphi \;\equiv\; \exists x\, \neg\varphi$ e $\neg\exists x\, \varphi \;\equiv\; \forall x\, \neg\varphi$.

Mover os quantificadores mais para o exterior

- $(\forall x\, \varphi) \wedge (\forall x\, \psi) \;\equiv\; \forall x\, (\psi \wedge \varphi)$.
- $(\exists x\, \varphi) \vee (\exists x\, \psi) \;\equiv\; \exists x\, (\psi \vee \varphi)$.
- Suponha que ψ não contém a variável x:

$$(\forall x\, \varphi) \wedge \psi \equiv \forall x\, (\varphi \wedge \psi), \qquad (\exists x\, \varphi) \wedge \psi \equiv \exists x\, (\varphi \wedge \psi),$$
$$(\forall x\, \varphi) \vee \psi \equiv \forall x\, (\varphi \vee \psi), \qquad (\exists x\, \varphi) \vee \psi \equiv \exists x\, (\varphi \vee \psi).$$

Forma normal de Skolem

Definição

Uma fórmula na forma normal de Skolem[a] é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

[a] Thoralf Albert Skolem, 1887 – 1963, matemático norueguês.

Forma normal de Skolem

Definição

Uma fórmula na forma normal de Skolem é uma fórmula fechada (= sem variáveis livres)

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad \varphi$$

onde φ é uma fórmula sem quantificadores na forma normal conjuntiva.

Nota

Como

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \, (\varphi \wedge \psi) \equiv (\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi) \wedge (\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \psi),$$

uma fórmula na forma normal de Skolem pode-se escrever como uma conjunção de fórmulas normal de Skolem $\forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi_i$ onde φ_i é uma cláusula $L_1 \vee \cdots \vee L_n$.

Como obter?

A partir da forma normal prenex

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$:

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$:
    1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n\, \varphi$ por c, e

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1\, \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ $(k > 1)$:

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\ Q_2 x_2 \ldots\ Q_n x_n\ \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots\ Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1\ \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\ Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\ Q_n x_n\ \varphi\ (k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k-1$ argumentos,

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1\, \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ $(k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k - 1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$, e

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1\, \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ $(k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k-1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$, e
  3. eliminar $\exists x_k$.

Como obter?

A partir da forma normal prenex

- No caso de $\exists x_1\, Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$:
  1. Escolher um novo símbolo de constante (digamos c),
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_1 em $Q_2 x_2 \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por c, e
  3. eliminar $\exists x_1$.
- No caso de $\forall x_1\, \ldots \forall x_{k-1}\, \exists x_k\, Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ $(k > 1)$:
  1. Escolher um novo símbolo de função (digamos f) de $k-1$ argumentos,
  2. substituir todas as ocorrências livres de x_k em $Q_{k+1} x_{k+1} \ldots\, Q_n x_n\, \varphi$ por $f(x_1, \ldots, x_{k-1})$, e
  3. eliminar $\exists x_k$.

Nota

Sejam $\psi_1, \ldots, \psi_n$ as "skolemizações" das fórmulas $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$:

$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \text{ é consistente se e só se } \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \text{ é consistente.}$$

Dedução com quantificadores

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\text{gato}(x) \Rightarrow \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom})$$

Aqui:

- "gato, garra" são símbolos de predicado de um argumento,
- "Tom" é um símbolo de constante.

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\, (\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$\forall x\ (\neg \mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x)),\ \ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}),\ \ \neg \mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\text{gato}(x) \Rightarrow \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$(\neg\text{gato}(x) \vee \text{garra}(x))^{a},\ \ \text{gato}(\text{Tom}),\ \ \neg\text{garra}(\text{Tom}).$$

[a] Não escrevemos os quantificadores (mas não os esquecemos)

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \models \mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$(\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x)),\ \ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}),\ \ \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Deduzimos agora:

$\mathrm{gato}(\mathrm{Tom})$, $\quad(\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x))$

.

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\text{gato}(x) \Rightarrow \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$(\neg\text{gato}(x) \vee \text{garra}(x)),\ \ \text{gato}(\text{Tom}),\ \ \neg\text{garra}(\text{Tom}).$$

Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom}),\quad \neg\text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom})$[a],

.

[a] Escrever "Tom" em lugar de "x"

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\, (\text{gato}(x) \Rightarrow \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$(\neg\text{gato}(x) \vee \text{garra}(x)),\ \ \text{gato}(\text{Tom}),\ \ \neg\text{garra}(\text{Tom}).$$

Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom})$, $\quad \neg\text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom})$[a], $\quad \text{garra}(\text{Tom})$,

.

[a] Escrever "Tom" em lugar de "x"

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.} \quad \text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\text{gato}(x) \Rightarrow \text{garra}(x)),\ \text{gato}(\text{Tom}) \models \text{garra}(\text{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$(\neg\text{gato}(x) \vee \text{garra}(x)),\ \ \text{gato}(\text{Tom}),\ \ \neg\text{garra}(\text{Tom}).$$

Deduzimos agora:

$\text{gato}(\text{Tom})$, $\neg\text{gato}(\text{Tom}) \vee \text{garra}(\text{Tom})$[a], $\text{garra}(\text{Tom})$,
$\neg\text{garra}(\text{Tom})$, .

[a] Escrever "Tom" em lugar de "x"

A dedução com quantificadores (a ideia)

Exemplo

$$\frac{\text{Todos os gatos têm garras.}\quad\text{Tom é um gato.}}{\text{Tom tem garras.}}$$

Na linguagem de 1ª ordem

$$\forall x\,(\mathrm{gato}(x) \Rightarrow \mathrm{garra}(x)),\ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \ \models\ \mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$$

Preparar para a dedução

$$(\neg\mathrm{gato}(x) \vee \mathrm{garra}(x)),\ \ \mathrm{gato}(\mathrm{Tom}),\ \ \neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom}).$$

Deduzimos agora:

$\mathrm{gato}(\mathrm{Tom})$, $\neg\mathrm{gato}(\mathrm{Tom}) \vee \mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$[a], $\mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$,
$\neg\mathrm{garra}(\mathrm{Tom})$, $\Diamond$.

[a] Escrever "Tom" em lugar de "x"

Substituição (de variáveis)

Definição

Uma substituição é uma função

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}.$$

Substituição (de variáveis)

Definição

Uma substituição é uma função

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}.$$

Se $\{v \mid \varphi(v) \neq v\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições "relevantes":

$$t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n$$

sendo $t_i = \sigma(v_i)$.

Substituição (de variáveis)

Definição

Uma substituição é uma função

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}.$$

Se $\{v \mid \varphi(v) \neq v\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições "relevantes":

$$t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n$$

sendo $t_i = \sigma(v_i)$.

A substituição

$$\{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\},\ v \longmapsto v$$

denotamos por ε.

Substituição (de variáveis)

Definição

Uma substituição é uma função

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}.$$

Se $\{v \mid \varphi(v) \neq v\} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é finito, podemos descrever a substituição σ indicando apenas as substituições "relevantes":

$$t_1/v_1, \ldots, t_n/v_n$$

sendo $t_i = \sigma(v_i)$.

A substituição

$$\{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\},\ v \longmapsto v$$

denotamos por ε. Ou seja, $\varepsilon = \varnothing$.

Substituição em termos

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \to \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

Substituição em termos

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \to \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.

Substituição em termos

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \to \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.
- $\widehat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c.

Substituição em termos

Estender substituições:

Cada substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \to \{\text{termos}\}$ se pode estender a uma função

$$\widehat{\sigma}\colon \{\text{termos}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

utilizando recursão:

- $\widehat{\sigma}(v) = \sigma(v)$, para cada variável v.
- $\widehat{\sigma}(c) = c$, para cada símbolo de constante c.
- $\widehat{\sigma}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f(\widehat{\sigma}(t_1), \ldots, \widehat{\sigma}(t_n))$, para cada símbolo de função f de n argumentos e termos $t_1, \ldots, t_n$.

$$\begin{tikzcd}
\{\text{termos}\} \arrow[r, "\widehat{\sigma}"] & \{\text{termos}\} \\
\{\text{variáveis}\} \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\sigma"'] &
\end{tikzcd}$$

Substituição em fórmulas

Estender ainda mais

Dada uma substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \to \{\text{termos}\}$ e uma fórmula E (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando $\widehat{\sigma}$ ao todos os termos em E.

Substituição em fórmulas

Estender ainda mais

Dada uma substituição $\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \to \{\text{termos}\}$ e uma fórmula E (sem quantificadores),

$$E\sigma$$

denota a fórmula obtida aplicando $\widehat{\sigma}$ ao todos os termos em E.

Para um conjunto $\mathcal{E}$ de fórmulas (sem quantificadores), definimos:

$$\mathcal{E}\sigma = \{E\sigma \mid E \in \mathcal{E}\}.$$

Exemplos

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

Exemplos

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x, y)) =$$

Exemplos

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x,y)) = R(f(z), A).$$

Exemplos

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

- $\sigma = \{f(z, y)/x, A/y\}$:

Exemplos

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

- $\sigma = \{f(z, y)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x, y)) =$$

Exemplos

Exemplos

- $\sigma = \{f(z)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z), A).$$

- $\sigma = \{f(z, y)/x, A/y\}$:

$$\widehat{\sigma}(R(x, y)) = R(f(z, y), A).$$

A composição de substituições

Definição

Sejam

$$\sigma, \theta \colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A composta de θ após σ é a função

$$\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma.$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{termos}\} \arrow[rr, "\widehat{\theta}"] & & \{\text{termos}\} \\
\{\text{variáveis}\} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[urr, "\theta \vartriangle \sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

A composição de substituições

Definição

Sejam

$$\sigma, \theta \colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

substituições. A composta de θ após σ é a função

$$\theta \vartriangle \sigma = \widehat{\theta} \circ \sigma.$$

$$\begin{tikzcd}
\{\text{termos}\} \arrow[rr, "\widehat{\theta}"] & & \{\text{termos}\} \\
\{\text{variáveis}\} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[urr, "\theta \vartriangle \sigma"'] & &
\end{tikzcd}$$

Nota

Para cada expressão (= termo, fórmula) E: $E(\theta \vartriangle \sigma) = (E\sigma)\theta$.

Exemplo

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\ g(x)/y,\ y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\ z/y,\ x/u\}.$$

Então,

$$\theta \vartriangle \sigma =$$

$$.$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \vartriangle \sigma = \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,$$

$$.$$

Exemplo

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\theta \vartriangle \sigma = \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,\, x/u\}$$

.

Exemplo

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\theta \vartriangle \sigma &= \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,\, x/u\} \\ &= \{A/x,\, g(f(y))/y,\, z/z,\, x/u\}\end{aligned}$$

.

Exemplo

Exemplo

Consideramos as substituições

$$\sigma = \{A/x,\, g(x)/y,\, y/z\}, \quad \theta = \{f(y)/x,\, z/y,\, x/u\}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\theta \vartriangle \sigma &= \{\widehat{\theta}(A)/x,\, \widehat{\theta}(g(x))/y,\, \widehat{\theta}(y)/z,\, x/u\}\\ &= \{A/x,\, g(f(y))/y,\, z/z,\, x/u\}\\ &= \{A/x,\, g(f(y))/y,\ x/u\}.\end{aligned}$$

Unificação

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$		

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$		

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x,\ f(f(A))/y\}$		

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x,\ f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x, f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

Unificação (um exemplo)

Exemplo

Consideramos as expressões $E_1 = x$ e $E_2 = y$:

Substituição	x	y
$\{y/x\}$	y	y
$\{x/y\}$	x	x
$\{f(f(A))/x,\ f(f(A))/y\}$	$f(f(A))$	$f(f(A))$

Nota:

$$\begin{aligned}\{f(f(A))/x,\ f(f(A))/y\} &= \{f(f(A))/y\} \triangle \{y/x\} \\ &= \{f(f(A))/x\} \triangle \{x/y\}.\end{aligned}$$

Unificação

Definição

- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição

$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$

diz-se unificador de $\mathcal{E}$ quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.

Unificação

Definição

- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição
$$\sigma : \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$
diz-se unificador de $\mathcal{E}$ quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.
- Um conjunto $\mathcal{E}$ de expressões diz-se unificável quando existe um unificador de $\mathcal{E}$.

Unificação

Definição

- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões (termos, fórmulas). Uma substituição
$$\sigma\colon \{\text{variáveis}\} \longrightarrow \{\text{termos}\}$$
diz-se unificador de $\mathcal{E}$ quando, para todos as expressões $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, $E_1\sigma = E_2\sigma$.
- Um conjunto $\mathcal{E}$ de expressões diz-se unificável quando existe um unificador de $\mathcal{E}$.
- Seja $\mathcal{E}$ um conjunto de expressões. Um unificador σ de $\mathcal{E}$ diz-se unificador mais geral (abreviação: mgu) de $\mathcal{E}$ quando, para qualquer unificador θ de $\mathcal{E}$, existe uma substituição λ tal que
$$\theta = \lambda \vartriangle \sigma.$$
(Ou seja, cada unificador de $\mathcal{E}$ se pode descrever como "acrescentar substituições acima do unificador mais geral".)

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(x))\}$

Exemplos

Exemplos

1. $\mathcal{E} = \{Q(x),\ Q(A)\}$ é unificável com $\sigma = \{A/x\}$.
2. $\mathcal{E} = \{R(x, y),\ Q(z)\}$ não é unificável.
3. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(z))\}$ é unificável com $\sigma = \{f(z)/x\}$.
4. $\mathcal{E} = \{f(x),\ f(f(x))\}$ não é unificável.

Como obter o unificador mais geral?

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

Como obter o unificador mais geral?

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.

Como obter o unificador mais geral?

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.

Como obter o unificador mais geral?

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.
3. Determinar o conjunto das diferenças de $\mathcal{E}_k$; isto é, o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de $\mathcal{E}_k$ são diferentes.

Como obter o unificador mais geral?

O procedimento

Seja $\mathcal{E} = \{E_1, \ldots, E_n\}$ um conjunto de expressões:

1. Começar com $k = 0$, $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$, $\sigma_0 = \varepsilon$.
2. **Se** $\mathcal{E}_k$ tem apenas uma expressão, **então** σ_k é unificador mais geral de $\mathcal{E}$ e podemos PARAR.
3. Determinar o conjunto das diferenças de $\mathcal{E}_k$; isto é, o conjunto $\mathcal{D}_k = \{D_1, \ldots\}$ das *primeiras* sub-expressões (a contar da esquerda) onde as expressões de $\mathcal{E}_k$ são diferentes.
4. **Se** existem uma variável v e um termo t em $\mathcal{D}$ e v não ocorre em t, **então**
   - $\sigma_{k+1} = (t/v) \vartriangle \sigma_k$,
   - $\mathcal{E}_{k+1} = \mathcal{E}_k(t/v)$,
   - $k := k + 1$ e voltar ao ponto (2);

   se não PARAR com a mensagem "Não é unificável".

Um Exemplo

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

Um Exemplo

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

Aqui:

- x, y, z são variáveis.
- A é um símbolo de constante.
- h é um símbolo de função de um argumento.
- P é um símbolo de predicado de dois argumentos.

Um Exemplo

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(y, z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x, z),\ P(x, h(x)),\ P(A, h(A))\}$$

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

Um Exemplo

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_2 = \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

2. $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$. Portanto:

$$\sigma_3 = \{h(A)/z\} \vartriangle \sigma_2 = \{h(A)/z,\ A/x,\ A/y\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A,h(A)),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\}$$

Um Exemplo

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(y,z),\ P(x,h(y)),\ P(A,h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{y,\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{x/y\}, \quad \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(x,z),\ P(x,h(x)),\ P(A,h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{x,\ A\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \{A/x\} \vartriangle \sigma_1 = \{A/x,\ A/y\}, \\ \mathcal{E}_2 &= \mathcal{E}_1\sigma_2 = \{P(A,z),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\} \end{aligned}$$

2. $\mathcal{D}_2 = \{z, h(A)\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \{h(A)/z\} \vartriangle \sigma_2 = \{h(A)/z,\ A/x,\ A/y\}, \\ \mathcal{E}_3 &= \mathcal{E}_2\sigma_3 = \{P(A,h(A)),\ P(A,h(A)),\ P(A,h(A))\} \end{aligned}$$

3. $\mathcal{E}_3 = \{P(A,h(A))\}$. Logo: $\text{mgu} = \{A/x,\ A/y,\ h(A)/z\}$.

Variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

Variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$.

Variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem “Não é unificável”.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \{A/x\}, \\ \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\} \end{aligned}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem "Não é unificável".

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem "Não é unificável".

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ x\} = \{h(x),\ x\}$.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ A\}$. Portanto:

$$\sigma_1 = \{A/x\},$$
$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}\sigma_1 = \{P(h(A), z),\ P(A, h(y)),\ P(A, h(A))\}$$

1. $\mathcal{D}_1 = \{h(A),\ A\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_1$, terminamos com a mensagem “Não é unificável”.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ P(x, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{h(x),\ x,\ x\} = \{h(x),\ x\}$. Como x (a única variável em $\mathcal{D}_0$) ocorre em $h(x)$ (o único termo em $\mathcal{D}_0$ diferente do x), terminamos com a mensagem “Não é unificável”.

Mais variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

Mais variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$.

Mais variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem "Não é unificável".

Mais variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem "Não é unificável".

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

Mais variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem “Não é unificável”.

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$.

Mais variações

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ \neg P(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{\neg\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem "Não é unificável".

Exemplo

Consideramos $\mathcal{E} = \{P(h(x), z),\ P(x, h(y)),\ Q(A, h(A))\}$:

0. $\mathcal{D}_0 = \{P, Q\}$. Como nenhuma variável pertence à $\mathcal{D}_0$, terminamos com a mensagem "Não é unificável".

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathsf{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathsf{BR}$$

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathsf{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathsf{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathsf{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathsf{Fator}$$

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

Recordamos

Para justificar que

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi$$

(ψ é consequência de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$), mostramos que

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi\}$$

é inconsistente.

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para "refutar" um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ de fórmulas, aplicamos os seguintes passos:

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathsf{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathsf{Fator}$$

O procedimento

Para "refutar" um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ de fórmulas, aplicamos os seguintes passos:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathsf{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathsf{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathsf{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathsf{Fator}$$

O procedimento

Para “refutar” um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ de fórmulas, aplicamos os seguintes passos:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. “ignorar” os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathrm{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathrm{Fator}$$

O procedimento

Para "refutar" um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ de fórmulas, aplicamos os seguintes passos:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. "ignorar" os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;

Resolvente e Fator

Utilizamos as regras

- Resolvente binária: $$\frac{\neg\psi \vee \theta \quad \varphi \vee \gamma}{(\theta \vee \gamma)\,\mathrm{mgu}(\psi, \varphi)}\,\mathsf{BR}$$
- Fator: $$\frac{\varphi \vee \psi \vee \theta}{(\varphi \vee \theta)\,\mathrm{mgu}(\varphi, \psi)}\,\mathsf{Fator}$$

O procedimento

Para "refutar" um conjunto $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ de fórmulas, aplicamos os seguintes passos:

1. transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem;
2. "ignorar" os quantificadores $\forall$ (já que não há outros e todas as variáveis são quantificadas);
3. renomear as variáveis em cada cláusula tal que são distintas;
4. sucessivamente aplicar as duas regras acima, até se obtém uma contradição (se for possível).

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\,(G(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\, G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2 \models F3$.

Aqui:

- G e P são símbolos de predicado de um argumento e L é um símbolo de predicado de dois argumentos.
- x, y são variáveis.

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\,(G(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\; G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y))$. **Negação:** $\forall x \exists y\, P(y) \wedge \neg L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2, \neg F3 \models \mathbf{0}$.

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\,(G(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\, G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y))$. **Negação:** $\forall x \exists y\, P(y) \wedge \neg L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2, \neg F3 \models \mathbf{0}$.

Obter a forma normal ("skolemização")

Exercício 19

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\,(G(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\; G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y))$. **Negação:** $\forall x \exists y\; P(y) \wedge \neg L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2, \neg F3 \models \mathbf{0}$.

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv$ $\forall x \forall y\,(\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.

Exercício 19

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\, (G(x) \Rightarrow \forall y\, (P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\, G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\, (P(y) \Rightarrow L(x,y))$. **Negação:** $\forall x \exists y\, P(y) \wedge \neg L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2, \neg F3 \models \mathbf{0}$.

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv$ $\forall x \forall y\, (\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow$ $G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.

Exercício 19

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\,(G(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\, G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y))$. **Negação:** $\forall x \exists y\, P(y) \wedge \neg L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2, \neg F3 \models \mathbf{0}$.

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv$ $\forall x \forall y\,(\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow$ $G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.
3. $\neg$F3 $\rightsquigarrow$ $\forall x\,(P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

   Aqui f é um símbolo de função de um argumento.

Exercício 19

Exercício 19

Consideramos:

F1: $\forall x\,(G(x) \Rightarrow \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y)))$.

F2: $\exists x\, G(x)$.

F3: $\exists x \forall y\,(P(y) \Rightarrow L(x,y))$. **Negação:** $\forall x \exists y\, P(y) \wedge \neg L(x,y))$.

Temos de verificar: $F1, F2, \neg F3 \models \mathbf{0}$.

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv$ $\forall x \forall y\,(\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow$ $G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.
3. $\neg$F3 $\rightsquigarrow \forall x\,(P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

   $$\equiv \forall x\, P(f(x)) \wedge \forall x\, \neg L(x, f(x)).$$

   Aqui f é um símbolo de função de um argumento.

Exercício 19 (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv\ \forall x \forall y\, (\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow\ G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.
3. $\neg$F3 $\rightsquigarrow \forall x\, (P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

   $\equiv (\forall x\, P(f(x))) \wedge (\forall x\, \neg L(x, f(x)))$.

   Aqui f é um símbolo de função de um argumento.

Exercício 19 (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv\ \forall x \forall y\, (\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow\ G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.
3. $\neg$F3 $\rightsquigarrow \forall x\, (P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

   $$\equiv (\forall x\, P(f(x))) \wedge (\forall x\, \neg L(x, f(x))).$$

   Aqui f é um símbolo de função de um argumento.

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),$$

Exercício 19 (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv$ $\forall x \forall y\, (\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow$ $G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.
3. $\neg$F3 $\rightsquigarrow$ $\forall x\, (P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

   $$\equiv (\forall x\, P(f(x))) \wedge (\forall x\, \neg L(x, f(x))).$$

   Aqui f é um símbolo de função de um argumento.

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y),\ G(c),\ P(f(x_1)),$$

Exercício 19 (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

1. F1 $\equiv \forall x \forall y\, (\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y))$.
2. F2 $\rightsquigarrow G(c)$.

   Aqui c é um símbolo de constante.
3. $\neg$F3 $\rightsquigarrow \forall x\, (P(f(x)) \wedge \neg L(x, f(x)))$

   $$\equiv (\forall x\, P(f(x))) \wedge (\forall x\, \neg L(x, f(x))).$$

   Aqui f é um símbolo de função de um argumento.

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y)$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y)$, $\quad \mathrm{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y)$, $\quad \text{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c,y)$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\; G(c),\; P(f(x_1)),\; \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y)$, $\quad \mathrm{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c, y)$
4. $P(f(x_1))$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y)$, $\quad \text{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c,y)$
4. $P(f(x_1))$, $\quad \text{mgu}(P(y), P(f(x_1)) = \{f(x_1)/y\}$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y)$, $\quad \mathrm{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c, y)$
4. $P(f(x_1))$, $\quad \mathrm{mgu}(P(y), P(f(x_1)) = \{f(x_1)/y\}$
5. $L(c, f(x_1))$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x, y)$, $\quad \text{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c, y)$
4. $P(f(x_1))$, $\quad \text{mgu}(P(y), P(f(x_1)) = \{f(x_1)/y\}$
5. $L(c, f(x_1))$
6. $\neg L(x_2, f(x_2))$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y)$, $\quad \text{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c,y)$
4. $P(f(x_1))$, $\quad \text{mgu}(P(y), P(f(x_1)) = \{f(x_1)/y\}$
5. $L(c, f(x_1))$
6. $\neg L(x_2, f(x_2))$, $\quad \text{mgu}(L(c, f(x_1)), L(x_2, f(x_2)) = \{c/x_2, c/x_1\}$

Exercício 19 (continuação)

Preparar as fórmulas

Portanto, temos as seguintes fórmulas:

$$\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y),\ G(c),\ P(f(x_1)),\ \neg L(x_2, f(x_2)).$$

A Dedução

1. $G(c)$
2. $\neg G(x) \vee \neg P(y) \vee L(x,y)$, $\quad \mathrm{mgu}(G(c), G(x)) = \{c/x\}$
3. $\neg P(y) \vee L(c,y)$
4. $P(f(x_1))$, $\quad \mathrm{mgu}(P(y), P(f(x_1)) = \{f(x_1)/y\}$
5. $L(c, f(x_1))$
6. $\neg L(x_2, f(x_2))$, $\quad \mathrm{mgu}(L(c, f(x_1)), L(x_2, f(x_2)) = \{c/x_2, c/x_1\}$
7. $\Diamond$.

Mais um exemplo

Exemplo

$\forall x\,(P(f(x)) \Rightarrow Q(a)),\ \forall x\, P(x) \models Q(a).$

Aqui:

- x é uma variável.
- a é um símbolo de constante.
- f é um símbolo de função de um argumento.
- P e Q são símbolos de relação de um argumento.

Mais um exemplo

Exemplo

$\forall x\,(P(f(x)) \Rightarrow Q(a)),\ \forall x\, P(x) \models Q(a).$

Consideramos as fórmulas

$$\neg P(f(x)) \vee Q(a),\ P(x),\ \neg Q(a).$$

Mais um exemplo

Exemplo

$\forall x\,(P(f(x)) \Rightarrow Q(a)),\ \forall x\,P(x)\ \models\ Q(a).$

Consideramos as fórmulas

$$\neg P(f(x)) \vee Q(a),\ P(x),\ \neg Q(a).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x)) \vee Q(a)$
2. $P(x)$

Mais um exemplo

Exemplo

$\forall x\,(P(f(x)) \Rightarrow Q(a)),\ \forall x\, P(x) \models Q(a)$.

Consideramos as fórmulas

$$\neg P(f(x)) \vee Q(a),\ P(x),\ \neg Q(a).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x)) \vee Q(a)$
2. $P(x)$, $P(f(x))$ e $P(x)$ não são unificáveis!!?

Mais um exemplo

Exemplo

$\forall x\,(P(f(x)) \Rightarrow Q(a)),\ \forall x\,P(x)\ \models\ Q(a).$

Consideramos as fórmulas

$$\neg P(f(x)) \vee Q(a),\ P(x),\ \neg Q(a).$$

A dedução:

1. $\neg P(f(x)) \vee Q(a)$
2. $P(x)$, $\qquad P(f(x))$ e $P(x)$ não são unificáveis!!?

Esquecemos renomear as variáveis: $P(x) \rightsquigarrow P(y) \quad \ldots$

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Lewis Caroll. *Symbolic Logic*. 1896.

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x))$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg B(x))$.

Ainda mais um exemplo

Exemplo (de Lewis Caroll)

- Ninguém que realmente aprecia o Beethoven falha de manter o silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Os porquinhos-da-índia são completamente ignorantes no que diz respeito à música.
- Ninguém que é completamente ignorante no que diz respeito à música consegue manter silêncio durante a sonata *Mondschein*.
- Portanto, os porquinhos-da-índia nunca realmente apreciam o Beethoven.

Na linguagem de 1ª ordem (português $\rightsquigarrow$ formulês)

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow \neg B(x))$. A negação: $\exists x\,(P(x) \land B(x))$.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg \exists x \, (B(x) \wedge \neg S(x))$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal (“skolemização”)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x))$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x))$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal (“skolemização”)

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x))$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x)$,

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y),$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z),$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c),$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c)$, $\neg P(y) \vee I(y)$,

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

$P(c)$, $\neg P(c) \vee I(c)$, [a]

[a] mgu de $P(c)$ e $P(y)$: c/y.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \qquad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \equiv \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \equiv \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \equiv \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \rightsquigarrow P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),\ \neg I(z) \vee \neg S(z)$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \land \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \lor S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \lor I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \land S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \lor \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \land B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \land B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \lor S(x), \quad \neg P(y) \lor I(y), \quad \neg I(z) \lor \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c),\ \neg P(c) \lor I(c),\ \ I(c),\ \neg I(c) \lor \neg S(c),$ [a]

[a] mgu de $I(c)$ e $I(z)$: c/z.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

$$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),\ \neg I(c) \vee \neg S(c),\ \ \neg S(c),$$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

$$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),\ \neg I(c) \vee \neg S(c),\ \ \neg S(c),\ \neg B(x) \vee S(x)$$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

$P(c)$, $\neg P(c) \vee I(c)$, $I(c)$, $\neg I(c) \vee \neg S(c)$, $\neg S(c)$, $\neg B(c) \vee S(c)$ [a]

[a] mgu de $S(c)$ e $S(x)$: c/x.

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),\ \neg I(c) \vee \neg S(c),\ \ \neg S(c),\ \neg B(c) \vee S(c)$

$\neg B(c),$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$$

A dedução

$$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),\ \neg I(c) \vee \neg S(c),\ \ \neg S(c),\ \neg B(c) \vee S(c)$$

$$\neg B(c),\ B(c),$$

Ainda mais um exemplo (continuação)

Obter a forma normal ("skolemização")

- $\neg\exists x\,(B(x) \wedge \neg S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg B(x) \vee S(x))$.
- $\forall x\,(P(x) \Rightarrow I(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg P(x) \vee I(x))$.
- $\neg\exists x\,(I(x) \wedge S(x)) \;\equiv\; \forall x\,(\neg I(x) \vee \neg S(x))$.
- $\exists x\,(P(x) \wedge B(x)) \;\rightsquigarrow\; P(c) \wedge B(c)$.

Consideramos as seguintes fórmulas

$\neg B(x) \vee S(x), \quad \neg P(y) \vee I(y), \quad \neg I(z) \vee \neg S(z), \quad P(c), \quad B(c).$

A dedução

$P(c),\ \neg P(c) \vee I(c),\ \ I(c),\ \neg I(c) \vee \neg S(c),\ \ \neg S(c),\ \neg B(c) \vee S(c)$

$\neg B(c),\ B(c),\ \Diamond.$

O método de resolução baseia-se no trabalho

John Alan Robinson. «A machine-oriented logic based on the resolution principle». Em: *Journal of the ACM* **12**.(1) (1965), pp. 23–41.

Este método é (correto e) completo na lógica de 1ª ordem no seguinte sentido:

Se

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \models \psi,$$

então existe uma dedução de uma contradição a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\psi$.

Mais informações

Sobre a programação (em lógica):

Harold Abelson e Gerald Jay Sussman. *Structure and interpretation of computer programs*. 2ª ed. MIT Press, 1996. URL: `mitpress.mit.edu/sicp/full-text/book/book.html`.

Em particular: 4.4. “Logical Programming”.

Vídeos em: `groups.csail.mit.edu/mac/classes/6.001/abelson-sussman-lectures/`