Matemática Discreta

Dirk Hofmann

Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
dirk@ua.pt, http://sweet.ua.pt/dirk/

Gabinete: 11.3.10

OT: Quinta, 14:00 – 15:00, Sala 11.2.24
Atendimento de dúvidas: Segunda, 13:30 – 14:30

Apresentação

Avaliação e Marcação de Faltas

Nota

Tuda a informação está disponível em

`http://elearning.ua.pt`.

Avaliação e Marcação de Faltas

Avaliação

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:
    1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
    2. No dia e hora do exame final.

  Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.

Avaliação e Marcação de Faltas

Avaliação

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:
  1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
  2. No dia e hora do exame final.

  Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.
- A matéria a abordar no primeiro teste será lecionada até ao dia 19 de abril de 2019 e a abordar no segundo teste será a lecionada depois do 19 de abril.

Avaliação e Marcação de Faltas

Avaliação

- O modelo de avaliação adotado é o modelo discreto, com exame final como alternativa. A avaliação discreta é constituída por dois testes, a realizar nas seguintes datas:
  1. 26 de Abril de 2019 (sexta-feira);
  2. No dia e hora do exame final.

  Por defeito todos os alunos estão inscritos em avaliação discreta.
- A matéria a abordar no primeiro teste será lecionada até ao dia 19 de abril de 2019 e a abordar no segundo teste será a lecionada depois do 19 de abril.
- Há registo de faltas e os alunos que não sejam estudantes trabalhadores e que faltem injustificadamente a mais de 30% das aulas teórico-práticas reprovam automaticamente à UC, ficando impedidos de se apresentar a qualquer das épocas de exame.

Programa

O programa

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
3. Princípios de Enumeração Combinatória
4. Permutações
5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
6. Recorrência e Funções geradoras
7. Introdução aos Números Combinatórios
8. Elementos de Teoria dos Grafos

Programa

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
   - Lógica proposicional
   - Teoria de Conjuntos
   - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
   - Estratégias de demonstração da implicação
   - Princípios de indução e de indução completa
   - Princípio da gaiola dos pombos

Programa

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
    - Lógica proposicional
    - Teoria de Conjuntos
    - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
    - Estratégias de demonstração da implicação
    - Princípios de indução e de indução completa
    - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa "a afirmação A é valida (verdadeira)"?

Programa

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
   - Lógica proposicional
   - Teoria de Conjuntos
   - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
   - Estratégias de demonstração da implicação
   - Princípios de indução e de indução completa
   - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa "a afirmação A é valida (verdadeira)"?
- Como justificamos? O que é uma prova?

Programa

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
   - Lógica proposicional
   - Teoria de Conjuntos
   - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
   - Estratégias de demonstração da implicação
   - Princípios de indução e de indução completa
   - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa "a afirmação A é valida (verdadeira)"?
- Como justificamos? O que é uma prova?
- Podemos provar todo o que é valido?

Programa

Conteúdo

1. Linguagem Matemática e Lógica Informal
   - Lógica proposicional
   - Teoria de Conjuntos
   - Lógica de primeira ordem
2. Contextos e Estratégias de Demonstração
   - Estratégias de demonstração da implicação
   - Princípios de indução e de indução completa
   - Princípio da gaiola dos pombos

Questões

- O que significa "a afirmação A é valida (verdadeira)"?
- Como justificamos? O que é uma prova?
- Podemos provar todo o que é valido?
- O que é um conjunto? (Não há resposta!!) Há tantos números reais como números naturais? Ou racionais?

Programa

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória
    - Princípio da bijecção
    - Princípios da adição e da multiplicação
    - Princípio de inclusão-exclusão

Programa

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória
   - Princípio da bijecção
   - Princípios da adição e da multiplicação
   - Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?

Programa

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória
   - Princípio da bijecção
   - Princípios da adição e da multiplicação
   - Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?

Programa

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória
    - Princípio da bijecção
    - Princípios da adição e da multiplicação
    - Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \ldots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?

Programa

Conteúdo

3. Princípios de Enumeração Combinatória
    - Princípio da bijecção
    - Princípios da adição e da multiplicação
    - Princípio de inclusão-exclusão

Questões

- Quantos sequências binárias de comprimento n existem?
- Quantos números de 4 algarismos (divisíveis por 5) se podem escrever com os dígitos $1, \dots, 9$?
- Quantas maneiras existem de colocar k bolas em n caixas?
- Quantas sequências binárias com k uns e $n-1$ zeros existem?
- ...

Programa

Conteúdo

4. Permutações
    - Composição de permutações e permutações inversas
    - Partição cíclica de uma permutação e tipos de permutações
    - Transposições, inversões e sinal de uma permutação

Programa

Conteúdo

4. Permutações
   - Composição de permutações e permutações inversas
   - Partição cíclica de uma permutação e tipos de permutações
   - Transposições, inversões e sinal de uma permutação

Questões

O "jogo do 15"

$\rightsquigarrow$

é possível?

Programa

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
    - Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
    - Combinações e permutações (com e sem repetição)
    - Identidades combinatórias

Programa

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
   - Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
   - Combinações e permutações (com e sem repetição)
   - Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Programa

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
   - Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
   - Combinações e permutações (com e sem repetição)
   - Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta:

Programa

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
    - Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
    - Combinações e permutações (com e sem repetição)
    - Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

Programa

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
    - Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
    - Combinações e permutações (com e sem repetição)
    - Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende . . . (do que consideramos diferente) . . .*

- Podemos repetir elementos?

Programa

Conteúdo

5. Agrupamentos e Identidades Combinatórias
    - Arranjos com repetição e arranjos e combinações simples
    - Combinações e permutações (com e sem repetição)
    - Identidades combinatórias

Questões

Quantas maneiras existem de escolher k elementos numa coleção de n elementos?

Resposta: *Depende ... (do que consideramos diferente) ...*

- Podemos repetir elementos?
- A ordem das escolhas interessa?

Programa

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras
    - Relações de recorrência
    - Funções geradoras

Programa

Conteúdo

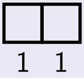
6. Recorrência e Funções/Séries geradoras
   - Relações de recorrência
   - Funções geradoras

Questões

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$

$$\vdots$$



Programa

Conteúdo

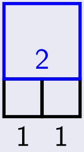
6. Recorrência e Funções/Séries geradoras
   - Relações de recorrência
   - Funções geradoras

Questões

Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$

$$\vdots$$

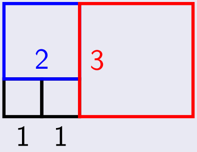


Programa

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras
   - Relações de recorrência
   - Funções geradoras

Questões



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

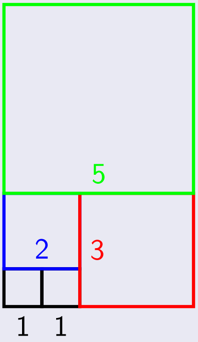
$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$\vdots$$

Programa

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras
   - Relações de recorrência
   - Funções geradoras

Questões



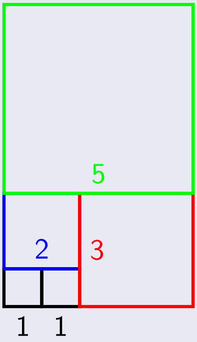
Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$a_4 = 5,$$
$$\vdots$$

Conteúdo

6. Recorrência e Funções/Séries geradoras
    - Relações de recorrência
    - Funções geradoras

Questões



Acrescentamos um quadrado no lado mais comprido.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1,$$
$$a_2 = 2,$$
$$a_3 = 3,$$
$$a_4 = 5,$$
$$\vdots$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

Programa

Conteúdo

7. Introdução aos Números Combinatórios
    - Factoriais e número binomiais
    - Números de Fibonacci e número de ouro
    - Outros números combinatórios

Programa

Conteúdo

7. Introdução aos Números Combinatórios
   - Factoriais e número binomiais
   - Números de Fibonacci e número de ouro
   - Outros números combinatórios

Questões

Dividimos uma reta

em duas partes (com comprimentos $a \geq b > 0$) tal que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}.$$

A razão $\frac{a}{b}$ é igual a ...

Programa

Conteúdo

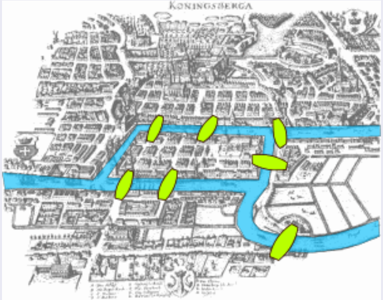
8. Elementos de Teoria dos Grafos
    - Conceitos e resultados fundamentais
    - Conexidade, caminhos e árvores

Programa

Conteúdo

8. Elementos de Teoria dos Grafos
    - Conceitos e resultados fundamentais
    - Conexidade, caminhos e árvores

Questões



Será possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por uma delas?

Bibliografia

Domingos Cardoso, J. Szymanski e Mohammad Rostami. *Matemática discreta: Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos*. Escolar Editora, 2009.

Bibliografia

- Domingos Cardoso, J. Szymanski e Mohammad Rostami. *Matemática discreta: Combinatória, Teoria dos Grafos e Algoritmos*. Escolar Editora, 2009.

- Domingos Cardoso e Paula Carvalho. «Noções de Lógica Matemática». 2007. Universidade de Aveiro.

- José Sousa Pinto. «Tópicos de Matemática Discreta». 1999. Universidade de Aveiro.

- Ronald L. Graham, Donald E. Knuth e Oren Patashnik. *Concrete mathematics: a foundation for computer science*. 2ª ed. Addison-Wesley, 1994.

- J. M. S. Simões Pereira. *Matemática Discreta: Tópicos de combinatória*. Editora Luz da Vida, 2006.

- J. M. S. Simões Pereira. *Matemática Discreta: Grafos, Redes, Aplicações*. Editora Luz da Vida, 2009.

Capítulo 1: Linguagem Matemática e Lógica Informal

Um texto matemático "típico"

in the model on the null relation $\Omega \in \mathrm{Rel}(A, B)$, consisting only of the pair $(0, 0)$, and the universal relation $\mho$, consisting of all pairs (a, b) for $a \in A$, $b \in B$. For these we assumed the following elementary axioms:

(III-1) *For each pair of objects A, B there exist $\Omega = \Omega_B{}^A$, $\mho = \mho_B{}^A$ in $Rel(A, B)$ such that $f \in Rel(A, B)$ implies $\Omega \subset f \subset \mho$,*

(III-2) $\Omega\mho = \Omega\mho$, $\quad \Omega\Omega = \Omega$, $\quad \mho\mho = \mho$,

(III-3) $\Omega\mho\Omega = \Omega$, $\quad \mho\Omega\mho = \mho$.

Here the first equation of (III-2) reads in full: For four objects A, B, C, D, $\Omega_B{}^C\mho_C{}^A = \Omega_B{}^D\mho_D{}^A$. (It actually suffices to assume the axiom only in the case $B = A = D$, deducing the more general case.) The other axioms are to be read similarly.

Clearly $\Omega^\# = \Omega$, $\mho^\# = \mho$. We also define

$$0 = 0_B{}^A = \Omega_B{}^B\mho_B{}^A, \qquad 0^\# = \mho\Omega; \tag{5.1}$$

in the model 0 is the graph of the zero homomorphism. By (III-3), the various composites are given by

$$0\Omega = \Omega = 00^\#, \qquad 0\mho = 0 = 00 = \Omega 0, \qquad 0^\# 0 = \mho = 0^\#\mho = \mho 0. \tag{5.2}$$

For any f, (III-1) and the other axioms give

$$\Omega f\Omega = \Omega, \qquad \mho f\mho = \mho, \qquad 0f0 = 0, \qquad 0f0^\# = \Omega. \tag{5.3}$$

LEMMA 5.1. *For $g \in Rel(A, B)$, $\Omega_B{}^B g = g \cap 0_B{}^A$.*

Proof: Since $\Omega g \subset 1g = g$ and $\Omega g \subset \Omega\mho = 0$, we have $\Omega g \subset g \cap 0$. For the converse inclusion, set $h = g \cap 0$. Then $h \subset g$, $h \subset 0$ give $h = hh^\# h \subset hh^\# g \subset 00^\# g = \Omega\mho\mho\Omega g = \Omega g$, q.e.d.

As a consequence of this lemma and its dual, note that

$$0 \cap 1 = \Omega, \qquad 0^\# \cup 1 = \mho. \tag{5.4}$$

LEMMA 5.2. *For each $s \subset 1_A$, and $\mho = \mho_A{}^A$,*

$$1 \cap s\mho = s, \qquad 0 \cup s\mho = s\mho, \qquad (1 \cup s0^\#)0 = s\mho. \tag{5.5}$$

Proof: By (II-c), $1 \cap s\mho \subset s^\# s = s$. Conversely, $1 \supset s$ and $s\mho \supset ss = s$, so $1 \cap s\mho \supset s$. Since $0 = \Omega\mho \subset s\mho$, the second equation follows. Next note that $D(s0^\#) = (s0^\#)^\# s0^\# \cap 1 = 0ss0^\# \cap 1 = 0s0^\# \cap 1 = \Omega \cap 1 = \Omega$ by (5.3). This allows us to apply the distributive law (II-*b*) to get $(1 \cup s0^\#)0 = 0 \cup s0^\# 0 = 0 \cup s\mho = s\mho$, as asserted.

With these preparations we can formulate

THEOREM 5.3. *For each object A there is a lattice isomorphism ϕ between the lattice of all $s \subset 1_A$ and that of all $q \supset 1_A$, given ($\phi^{-1} = \psi$) by*

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.

Exemplos:

- Cada espaço vetorial tem uma base.
- A função $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.
- A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ é diferenciável.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.

Além disso, temos:

- Axioma: Proposição que se aceita como verdadeira.

Sistemas matemáticos

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.
Além disso, temos:

- Axioma: Proposição que se aceita como verdadeira.
- Teorema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.
Além disso, temos:

- Axioma: Proposição que se aceita como verdadeira.
- Teorema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência.
- Lema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência.

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.
Além disso, temos:

- Axioma: Proposição que se aceita como verdadeira.
- Teorema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência.
- Lema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência. Tipicamente um resultado auxiliar (mas ver a próxima pagina).

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.
Além disso, temos:

- Axioma: Proposição que se aceita como verdadeira.
- Teorema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência.
- Lema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência. Tipicamente um resultado auxiliar (mas ver a próxima pagina).
- Corolário: Consequência dos resultados já estabelecidos.

Sistemas matemáticos

Sistemas matemáticos

Numa disciplina matemática estamos tipicamente interessados em certas afirmações (depende do contexto) que ou são verdadeiras ou falsas. Uma tal afirmação diz-se proposição.

Além disso, temos:

- Axioma: Proposição que se aceita como verdadeira.
- Teorema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência.
- Lema: Proposição que se obtém a partir dos axiomas aplicando as regras de inferência. Tipicamente um resultado auxiliar (mas ver a próxima pagina).
- Corolário: Consequência dos resultados já estabelecidos.
- Teoria ou sistema matemático: Coleção de axiomas, regras de inferência e resultados (teoremas, lemas e corolários).

Ainda sobre a nomenclatura

Nota

"Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit. A good lemma also survives a philosophical or technological revolution."[a]

[a] Paul Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Vol. 59. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. xi + 572.

Ainda sobre a nomenclatura

Nota

"Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit. A good lemma also survives a philosophical or technological revolution."

"... The importance of the result is undisputed, as is shown by the fact that it will shortly turn into a Lemma named after someone else, ..."[a]

---

[a] Paul Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Vol. 59. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. xi + 572.

Ainda sobre a nomenclatura

Nota

"Lemmas do the work in mathematics: Theorems, like management, just take the credit. A good lemma also survives a philosophical or technological revolution."

"... The importance of the result is undisputed, as is shown by the fact that it will shortly turn into a Lemma named after someone else, ..."[a]

[a] Paul Taylor. *Practical foundations of mathematics*. Vol. 59. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1999. xi + 572.

Nota

"The nice thing about standards is that you have so many to choose from."[a]

[a] Andrew Tanenbaum, cientista da computação norte-americano.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz.
- **Regras de inferência:**

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz.
- **Regras de inferência:**
  1. Proposições (neste caso: palavras) obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz, são proposições verdadeiras.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz.
- **Regras de inferência:**
  1. Proposições (neste caso: palavras) obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz, são proposições verdadeiras.
  2. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Um exemplo simples

Exemplo

As proposições deste sistema matemático são palavras do alfabeto $\{x, y, z\}$.

- **Axioma:** xyz.
- **Regras de inferência:**
  1. Proposições (neste caso: palavras) obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo x por xyz, são proposições verdadeiras.
  2. Proposições obtidas a partir de uma proposição verdadeira, substituindo xyz por yxz são proposições verdadeiras.

Exercício

Mostrar que $yyxzz$ é um teorema do sistema matemático considerado no exemplo anterior.

Propriedades

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente

- consistente significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)

Propriedades

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e (menos importante) independente.

- consistente significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)
- independente significa que nenhum axioma é consequência dos restantes.

Propriedades

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e (menos importante) independente.

- consistente significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)
- independente significa que nenhum axioma é consequência dos restantes.

Alem disso, um sistemas de axiomas diz se completo quando para toda a proposição p da teoria se pode deduzir p ou a sua negação $\neg p$.

Propriedades

Propriedades dos sistemas de axiomas

Um sistema de axiomas deve ser consistente e (menos importante) independente.

- consistente significa que não é possível deduzir uma contradição (ou seja, deduzir uma proposição e deduzir a sua negação)
- independente significa que nenhum axioma é consequência dos restantes.

Alem disso, um sistemas de axiomas diz se completo quando para toda a proposição p da teoria se pode deduzir p ou a sua negação $\neg p$.

Por outras palavras, o sistema e saturado no sentido que a adição de um qualquer axioma que não é consequência dos axiomas do sistema, torna o sistema não consistente.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

1. Dados dois pontos existe uma recta que os contém.
2. Todo o segmento de recta está contido numa recta.
3. Dado um ponto C e um real $r > 0$, existe uma única circunferência de centro C e raio r.
4. Todos os ângulos rectos são iguais.
5. *Axioma das paralelas*: dada uma recta e um ponto não pertencente a essa recta, existe uma única recta que contém o ponto e é paralela à recta dada.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.
7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.
8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.
9. Objetos coincidentes são iguais.
10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

   Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

9. Objetos coincidentes são iguais.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

   Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

   Ou seja, se $x = y$, então $x + z = y + z$.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

9. Objetos coincidentes são iguais.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

   Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

   Ou seja, se $x = y$, então $x + z = y + z$.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

   Ou seja, se $x = y$, então $x - z = y - z$.

9. Objetos coincidentes são iguais.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Axiomas da geometria euclidiana (Euclid 300AC)

6. Duas quantidades iguais a uma terceira são iguais.

   Ou seja, se $x = y$ e $y = z$, então $x = z$.

7. Se a quantidades iguais adicionarmos a mesma quantidade, as somas obtidas são iguais.

   Ou seja, se $x = y$, então $x + z = y + z$.

8. Se a quantidades iguais subtrairmos a mesma quantidade, as diferenças obtidas são iguais.

   Ou seja, se $x = y$, então $x - z = y - z$.

9. Objetos coincidentes são iguais.

   Ou seja, se $x = x$.

10. O todo é maior do que a parte.

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.
A teoria do David Hilbert tem

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

> David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.
A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.
A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.
- Seis relações: ...

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.
A teoria do David Hilbert tem

- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.
- Seis relações: ...
- Vários axiomas ...

Um sistema completo

Formulações mais modernas

Em

David Hilbert. *Grundlagen der Geometrie*. Teubner, 1899,

o matemático alemão David Hilbert formulou um fundamento rigoroso da geometria.
A teoria do David Hilbert tem

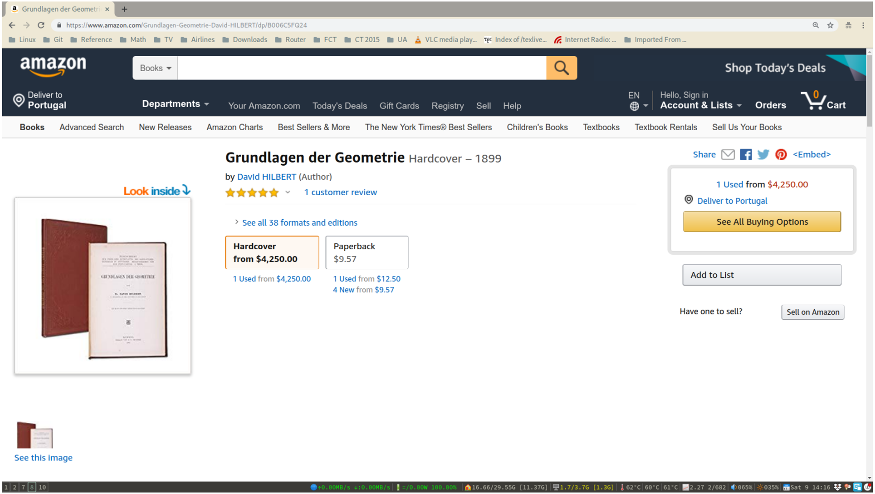
- três tipos de objetos: pontos, retas e planos.
- Seis relações: ...
- Vários axiomas ...

Nota

"Man muß jederzeit an Stelle von "Punkte, Geraden, Ebenen" "Tische, Stühle, Bierseidel" sagen können."[a]

[a] atribuído ao David Hilbert

Ainda uma curiosidade



Conjetura

O que é

Uma conjetura é uma afirmação ainda não provada nem "reprovada". Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Conjetura

O que é

Uma conjetura é uma afirmação ainda não provada nem "reprovada". Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- Conjectura de Goldbach: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7, \ldots !?$$

Conjetura

O que é

Uma conjetura é uma afirmação ainda não provada nem "reprovada". Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- Conjectura de Goldbach: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2, \ 6 = 3 + 3, \ 8 = 3 + 5, \ 10 = 3 + 7, \ldots !?$$

- Existe uma infinidade de números primos gémeos.

$$(3, 5), \ (5, 7), \ (11, 13), \ (17, 19), \ (29, 31), \ (41, 43), \ldots !?$$

Conjetura

O que é

Uma conjetura é uma afirmação ainda não provada nem "reprovada". Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- Conjectura de Goldbach: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7, \ldots !?$$

- Existe uma infinidade de números primos gémeos.

$$(3, 5),\ (5, 7),\ (11, 13),\ (17, 19),\ (29, 31),\ (41, 43), \ldots !?$$

- A hipótese do continuum. Foi uma conjetura por volta de 1900, entretanto sabemos que

Conjetura

O que é

Uma conjetura é uma afirmação ainda não provada nem "reprovada". Tipicamente existe a expectativa (as vezes errada) de se vir a encontrar uma prova.

Exemplos

- Conjectura de Goldbach: Todo o inteiro par superior a 2 é a soma de dois primos.

$$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7, \ldots !?$$

- Existe uma infinidade de números primos gémeos.

$$(3, 5),\ (5, 7),\ (11, 13),\ (17, 19),\ (29, 31),\ (41, 43), \ldots !?$$

- A hipótese do continuum. Foi uma conjetura por volta de 1900, entretanto sabemos que ... nunca vamos saber.

Bibliografia adicional

- Peter J. Cameron. *Sets, logic and categories*. Springer, 2005.
- Paul R. Halmos. *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. Princeton, N. J.-Toronto-New York-London: van Nostrand Reinhold Company, 1960. vii + 104.

Bibliografia adicional

- Peter J. Cameron. *Sets, logic and categories*. Springer, 2005.
- Paul R. Halmos. *Naive set theory*. The University Series in Undergraduate Mathematics. Princeton, N. J.-Toronto-New York-London: van Nostrand Reinhold Company, 1960. vii + 104.
- Saunders MacLane. *Mathematics Form and Function*. Springer, 1986.
- Andrej Bauer. «Five stages of accepting constructive mathematics». Em: *Bulletin of the American Mathematical Society* **54**.(3) (2016), pp. 481–498.
- Saunders MacLane. «Despite physicists, proof is essential in mathematics». Em: *Synthese* **111**.(2) (1997), pp. 147–154.

Lógica proposicional

Índice

Introdução

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos[a] – as chamadas proposições.

[a] O princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos[a] – as chamadas proposições.

[a] O princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído

Exemplos

- "O Porto é campeão" é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos[a] – as chamadas proposições.

[a] O princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído

Exemplos

- "O Porto é campeão" é uma proposição.
- "$3 < (2 + 7)$" é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos[a] – as chamadas proposições.

[a] O princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído

Exemplos

- "O Porto é campeão" é uma proposição.
- "$3 < (2 + 7)$" é uma proposição.
- "$x = 6$" não é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos[a] – as chamadas proposições.

[a] O princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído

Exemplos

- "O Porto é campeão" é uma proposição.
- "$3 < (2 + 7)$" é uma proposição.
- "$x = 6$" não é uma proposição.
- "O Porto é campeão ou não" é uma proposição.

Sobre o que é?

Proposições

Estudamos afirmações que são verdadeiras ou falsas mas não ambos os casos[a] – as chamadas proposições.

[a] O princípio da não contradição e princípio do terceiro excluído

Exemplos

- "O Porto é campeão" é uma proposição.
- "$3 < (2 + 7)$" é uma proposição.
- "$x = 6$" não é uma proposição.
- "O Porto é campeão ou não" é uma proposição.
- "Se está chover, então está chover" é uma proposição.

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..."   (infelizmente),

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..."   (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..."   (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação;

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..."   (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação; no entanto, a frase "Se está chover, então está chover" é verdadeira e nem temos de olhar fora ....

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..." (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação; no entanto, a frase "Se está chover, então está chover" é verdadeira e nem temos de olhar fora .... Procuramos *formas* de frases tal que, qualquer que seja o conteúdo, a frase é verdadeira.

Sobre o que é?

Nota

Observamos que certas construções ocorrem frequentemente:

- "... e ...",
- "... ou ...",
- "não ..."   (infelizmente),
- "Se ... então ...".

Notamos ainda que a frase "Se o Porto ganha todos os jogos, então é campeão" é verdadeira, mas precisa justificação; no entanto, a frase "Se está chover, então está chover" é verdadeira e nem temos de olhar fora .... Procuramos *formas* de frases tal que, qualquer que seja o conteúdo, a frase é verdadeira.

Decomposição de proposições

Uma proposição pode ser atómica ou composta por proposições e conetivos (operadores lógicos).

O sintaxe

Fórmulas

Fórmulas (bem formadas – "fbf")

Consideramos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições), e
- $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não . . .),
Conjunção:	$\wedge$	(. . . e . . .),
Disjunção:	$\vee$	(. . . ou . . .),
Implicação:	$\Rightarrow$	(se . . . então . . .),
Equivalência:	$\Leftrightarrow$	(. . . se e somente se. . .).

Fórmulas

Fórmulas (bem formadas – "fbf")

Consideramos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições), e
- $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$ e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não ...),
Conjunção:	$\wedge$	(... e ...),
Disjunção:	$\vee$	(... ou ...),
Implicação:	$\Rightarrow$	(se ... então ...),
Equivalência:	$\Leftrightarrow$	(... se e somente se...).

- Cada variável é uma fórmula, e $\mathbf{0}$ and $\mathbf{1}$ são fórmulas.

Fórmulas

Fórmulas (bem formadas – "fbf")

Consideramos

- uma coleção de variáveis (que representam as proposições), e
- **0** e **1** e os conetivos

Negação:	$\neg$	(não ...),
Conjunção:	$\wedge$	(... e ...),
Disjunção:	$\vee$	(... ou ...),
Implicação:	$\Rightarrow$	(se ... então ...),
Equivalência:	$\Leftrightarrow$	(... se e somente se...).

- Cada variável é uma fórmula, e **0** and **1** são fórmulas.
- Se p e q são fórmulas, então as expressões

$$\neg q, \quad (p \wedge q), \quad (p \vee q), \quad (p \Rightarrow q), \quad (p \Leftrightarrow q)$$

são fórmulas.

Exemplos

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p, q, r, ...

Exemplos

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p, q, r, ...
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$),

Exemplos

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p, q, r, ...
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \Rightarrow \mathbf{0}$, $\quad \neg\mathbf{1}$, $\quad \ldots$

Exemplos

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \Rightarrow \mathbf{0}$, $\quad \neg\mathbf{1}$, $\quad \ldots$
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$, $\quad (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$, $\quad \ldots$

Exemplos

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \Rightarrow \mathbf{0}$, $\quad \neg\mathbf{1}$, $\quad \ldots$
- $(p \wedge q) \Rightarrow q$, $\quad (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$, $\quad \ldots$
- $(p \wedge q) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q)$, $\quad \ldots$

Exemplos

Exemplos (de fórmulas)

- $\mathbf{1}$, $\mathbf{0}$, p, q, r, $\ldots$
- $(p \vee q)$ (escrevemos apenas $p \vee q$), $\quad p \Rightarrow \mathbf{0}, \quad \neg \mathbf{1}, \quad \ldots$
- $(p \wedge q) \Rightarrow q, \quad (p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q), \quad \ldots$
- $(p \wedge q) \Rightarrow ((p \vee q) \Rightarrow q), \quad \ldots$

Exemplos (não são fórmulas)

$$(\mathbf{1}\,\mathbf{0}), \quad (p\,q\,r), \quad (\mathbf{1} \Rightarrow), \quad (p \Rightarrow \wedge), \quad \ldots$$

A semântica

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

Semântica

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as "tabelas de verdade"):

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as "tabelas de verdade"):

p	$\neg p$
0	1
1	0

Semântica

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as "tabelas de verdade"):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Semântica

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as "tabelas de verdade"):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as "tabelas de verdade"):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Semântica

Interpretar formulas

Após associar a cada variável de uma fórmula um valor de verdade, podemos obter o valor de verdade da fórmula:

- $\mathbf{0}$ interpreta-se por 0 (falso), $\mathbf{1}$ por 1 (verdadeiro), e
- os conetivos por certas operações com os valores de verdade definidas pelas seguintes tabelas (as "tabelas de verdade"):

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2+2=4$, então a neve é preta.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2+2=4$, então a neve é preta. (Não)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2+2=4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês. . .

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês. . .

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 5$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2+2=4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2+2=4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2+2=5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2+2=5$. (Sim)

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2 + 2 = 5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2 + 2 = 4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês...

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2 + 2 = 5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 5$. (Sim)
- Se a neve é preta, então $2 + 2 = 4$.

Ainda sobre a implicação

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se $2+2=4$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é branca. (Sim)
- Se $2+2=5$, então a neve é preta. (Sim)
- Se $2+2=4$, então a neve é preta. (Não)

Um dito francês. . .

Com a ajuda da palavra "se" podes por Paris numa garrafa.

Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

- Se a neve é branca, então $2+2=4$. (Sim)
- Se a neve é branca, então $2+2=5$. (Não)
- Se a neve é preta, então $2+2=5$. (Sim)
- Se a neve é preta, então $2+2=4$. (Sim)

Um exemplo

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \Rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
0	0	0	1

Um exemplo

Exemplo

A interpretação da fórmula $(p \vee q) \Rightarrow q$

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 0$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
0	0	0	1

- para a interpretação das variáveis $p \mapsto 1$ e $q \mapsto 0$:

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \Rightarrow q$
1	0	1	0

Tautologias

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se consistente quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se consistente quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se consistente quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se consistente quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é inconsistente (ou uma contradição) quando não é consistente; isto é, se

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se consistente quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é inconsistente (ou uma contradição) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para cada a interpretação.

Fórmulas válidas e consistentes

Definição

Uma fórmula diz-se

- tautologia (ou fórmula válida) quando tem valor lógico 1 para *cada* a interpretação.
- Uma fórmula diz-se consistente quando tem valor lógico 1 para *alguma* interpretação.

Exemplo

A fórmula $(p \wedge q) \Rightarrow q$ é uma tautologia.

Nota

Uma fórmula é inconsistente (ou uma contradição) quando não é consistente; isto é, se tem valor lógico 0 para cada a interpretação. Portanto,

uma fórmula φ é uma contradição se e só se $\neg\varphi$ é válida.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.
2. *Se* $\varphi \equiv \psi$, *então* $\psi \equiv \varphi$.

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.
2. *Se $\varphi \equiv \psi$, então $\psi \equiv \varphi$.*
3. *Se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \theta$, então $\varphi \equiv \theta$.*

Fórmulas equivalentes

Definição

As fórmulas φ e ψ dizem-se equivalentes (em símbolos: $\varphi \equiv \psi$) quando $\varphi \Leftrightarrow \psi$ é uma tautologia.

Exemplo

$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg p \vee q)$.

Teorema

Sejam φ, ψ, θ fórmulas. Então:

1. $\varphi \equiv \varphi$.
2. *Se $\varphi \equiv \psi$, então $\psi \equiv \varphi$.*
3. *Se $\varphi \equiv \psi$ e $\psi \equiv \theta$, então $\varphi \equiv \theta$.*

Nota

Se $\varphi \equiv \psi$, então também $\theta \vee \varphi \equiv \theta \vee \psi$, $\quad \varphi \Rightarrow \theta \equiv \psi \Rightarrow \theta$, ...

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
0	0	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

- Idempotência:

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge p) \equiv p.$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

- Idempotência:

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge p) \equiv p.$$

- Distributividade:

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Algumas tautologias

- Comutatividade:

$$(p \wedge q) \equiv (q \wedge p) \quad \text{e} \quad (p \vee q) \equiv (q \vee p).$$

- Associatividade:

$$((p \vee q) \vee r) \equiv (p \vee (q \vee r)),$$
$$((p \wedge q) \wedge r) \equiv (p \wedge (q \wedge r)).$$

- Idempotência:

$$(p \vee p) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge p) \equiv p.$$

- Distributividade:

$$(p \wedge (q \vee r)) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$(p \vee (q \wedge r)) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

- Leis de De Morgan:

$$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p \wedge \neg q) \quad \text{e} \quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q).$$

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$

- Modus ponens:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

  é uma tautologia.

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$

- Modus ponens:

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

  é uma tautologia.

- Modus tollens:

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

  é uma tautologia.

Mais tautologias

- Lei da contraposição e da dupla negação:
$$(p \Rightarrow q) \equiv (\neg q \Rightarrow \neg p) \quad \text{e} \quad \neg\neg p \equiv p.$$
- Modus ponens:
$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$
é uma tautologia.
- Modus tollens:
$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$
é uma tautologia.
- Corte:
$$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$$
é uma tautologia.

Ainda mais tautologias

- $\neg\mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$ e $\neg\mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.

Ainda mais tautologias

- $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$ e $\neg \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv \mathbf{0}$ e $(\neg p \vee p) \equiv \mathbf{1}$.

Ainda mais tautologias

- $\neg\mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$ e $\neg\mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv \mathbf{0}$ e $(\neg p \vee p) \equiv \mathbf{1}$.
- $(p \vee \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$ e $(p \wedge \mathbf{1}) \equiv p$.
- $(p \vee \mathbf{0}) \equiv p$ e $(p \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.

Ainda mais tautologias

- $\neg\mathbf{0} \equiv \mathbf{1}$ e $\neg\mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv \mathbf{0}$ e $(\neg p \vee p) \equiv \mathbf{1}$.
- $(p \vee \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$ e $(p \wedge \mathbf{1}) \equiv p$.
- $(p \vee \mathbf{0}) \equiv p$ e $(p \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.
- As fórmulas

$$p \Rightarrow (p \vee q) \quad \text{e} \quad q \Rightarrow (p \vee q)$$

são tautologias.

Ainda mais tautologias

- $\neg \mathbf{0} \equiv \mathbf{1} \quad \text{e} \quad \neg \mathbf{1} \equiv \mathbf{0}$.
- $(\neg p \wedge p) \equiv \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (\neg p \vee p) \equiv \mathbf{1}$.
- $(p \vee \mathbf{1}) \equiv \mathbf{1} \quad \text{e} \quad (p \wedge \mathbf{1}) \equiv p$.
- $(p \vee \mathbf{0}) \equiv p \quad \text{e} \quad (p \wedge \mathbf{0}) \equiv \mathbf{0}$.
- As fórmulas
  $$p \Rightarrow (p \vee q) \quad \text{e} \quad q \Rightarrow (p \vee q)$$
  são tautologias.
- As fórmulas
  $$(p \wedge q) \Rightarrow p \quad \text{e} \quad (p \wedge q) \Rightarrow q$$
  são tautologias.

Ou exclusivo

Nota

As vezes utiliza-se a expressão "ou" no sentido exclusivo; ou seja "p ou q mas não ambos". Neste caso escrevemos

$$p \dot{\vee} q$$

como abreviação de

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q).$$