E2

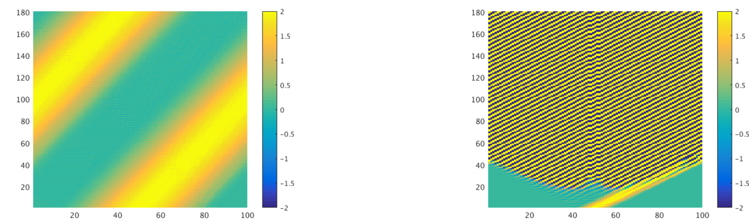
Pedraza-Espitia S.

1. Esquema de discretización estable para la ecuación de advección

El código siguiente y la Figura 1 muestran como con la condición CFL igual a 1 el esquema se mantiene estable, pero aumentando Del_T a 2.1 el esquema se vuelve inestable, esto es porque $c\Delta t/\Delta x = 2.1 > 1$

```
clear
close all
u(1:1:100) = 0;
c= 1;
Del_T = 1; % con 2.1; se vuelve inestable
Del_X = 1;

%condicion inicial
for jj = -40:40
    u(1,jj+50) = 1 + cos(pi*jj/40);
end
plot(u)

% se incluye la cond inicial
u2(:,1) = u;

n=1;
for jj = 2:80
    u2(jj,n+1) = u2(jj,n) - c*(Del_T/2*Del_X)*(u2(jj+1,n) - u2(jj-1,n));
end

hold on
plot(u2);

%a partir del tiempo 2

for n=2:180
    for jj=2:99
            u2(jj,n+1) = u2(jj,n-1) - c*(Del_T/2*Del_X)*(u2(jj+1,n) - u2(jj-1,n));
    end
    u3=u2;
    u2(1,n+1) = u3(99,n+1);
    u2(100,n+1) = u3(2,n+1);
    plot(u2(:,n))
    pause(.1)
```

```
end
figure
pcolor(u2'), caxis([-2 2]), shading flat, colorbar
```



(a) (b)

Figura 1: Gráficas (a) estable e (b) inestable.

2. Utilizando el criterio de von Neumann

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \tag{1}$$

La solución analítica es

$$u = u_0 e^{ik(x-ct)} \tag{2}$$

La solución numérica es

$$u_j^n = u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D n\Delta t)} \tag{3}$$

Vamos a desarrollar los términos en (1) con la ayuda de la Ecuación 3

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D(n+1)\Delta t)} \\ &= u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D n\Delta t - c_D\Delta t)} \\ &= u_j^n e^{-ikc_D\Delta t} \end{aligned} \tag{4}$$

definiendo $\lambda \equiv e^{-ikc_D\Delta t}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n \lambda \tag{5}$$

$$\begin{aligned} u_j^{n-1} &= u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D(n-1)\Delta t)} \\ &= u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D n\Delta t + c_D\Delta t)} \\ &= u_j^n e^{ikc_D\Delta t} \\ &= u_j^n \lambda^{-1} \end{aligned} \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
u_{j+1}^{n} =& u_0 e^{ik((j+1)\Delta x - c_D n \Delta t)} \\
=& u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D n\Delta t + \Delta x)} \\
=& u_j^n e^{ik\Delta x}
\end{aligned} \tag{7}
$$

De la misma forma

$$
\begin{aligned}
u_{j-1}^{n} =& u_0 e^{ik((j-1)\Delta x - c_D n \Delta t)} \\
=& u_0 e^{ik(j\Delta x - c_D n\Delta t - \Delta x)} \\
=& u_j^n e^{-ik\Delta x}
\end{aligned} \tag{8}
$$

Sustituimos los resultados en Ecuación 1

$$
\frac{u_j^n \lambda - u_j^n \lambda}{2\Delta t} + c\frac{u_j^n e^{ik\Delta x} - u_j^n e^{-ik\Delta x}}{2\Delta x} = 0 \tag{9}
$$

multiplico por $\frac{2\lambda\Delta t}{u_j^n}$

$$
\lambda^2 - 1 + c\Delta t \frac{\left(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x}\right)}{\Delta x} = 0 \tag{10}
$$

Usamos la identidad trigonométrica

$$
\lambda^2 + \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(2i\,\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\lambda - 1 = 0 \tag{11}
$$

Resolvemos para λ

$$
\begin{aligned}
\lambda =& \frac{\left[-\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(2i\,\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\right] \pm \sqrt{\left[\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(2i\,\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\right]^2 + 4}}{2} \\
=& -i\frac{c\Delta t}{\Delta x}\,\mathrm{sen}(k\Delta x) \pm \sqrt{1 - \left[\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\right]^2}
\end{aligned} \tag{12}
$$

λ es un número complejo, si calculamos su valor absoluto y consideramos que $\left[\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\right]^2 \leq 1$, entonces

$$
|\lambda|^2 = \left[\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\right]^2 + \left\{\sqrt{1 - \left[\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\mathrm{sen}(k\Delta x)\right)\right]^2}\right\}^2 = 1 \tag{13}
$$

Si Ecuación 13 se cumple:

$$
\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left|\mathrm{sen}(k\Delta x)\right| \leq 1 \tag{14}
$$

y debido a que $|\operatorname{sen}(k\Delta x)| \leq 1 \Rightarrow$ Obtenemos la condición de estabilidad

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{15}$$

o bien

$$c\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \tag{16}$$

Ahora para entender que pasaría en el caso en que

$$\left[\frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\operatorname{sen}(k\Delta x)\right)\right] > 1 \tag{17}$$

definimos $\gamma \equiv \frac{c\Delta t}{\Delta x}\left(\operatorname{sen}(k\Delta x)\right)$, entonces $\gamma^2 > 1$, y

$$|\lambda| = -i\gamma \pm i\sqrt{\gamma^2 - 1} = i\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}\right) \tag{18}$$

$$|\lambda|^2 = \left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1}\right)^2 = \gamma^2 \pm 2\gamma\sqrt{\gamma^2 - 1} + \gamma^2 - 1 \tag{19}$$

la ec (19) tiene al menos un raiz mayor que 1, por tanto $c > \Delta x/\Delta t$ y en este caso $|\lambda| > 1$, *i.e.* es inestable.