Tarea 4

Pedraza-Espitia S.

1. Circulación atmosférica y circulación oceánica

Componentes de los modelos son las condiciones iniciales (en el tiempo), las condiciones de frontera (en el espacio), eso nos permite modelar cada parcela, como se muestra en la Figura 1.1. Las condiciones de frontera pueden indicar valores fijos, y variaciones de propiedades (como intercambios de energía o momento). También se pueden agregar términos que indiquen fuentes, sumideros, amortiguamientos, forzamientos, etc.

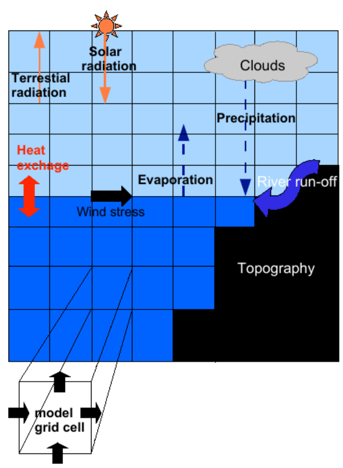


Figura 1.1: Esquema (Döös et. al., 2016)

2. Modelo de circulación atmosférica

Las ecuaciones de conservación de momento (en las tres componentes de la velocidad), ecuación de conservación de masa (continuidad) y energía (basado en la primera ley de la termodinámica). Ecuación de de estado de los gases.

3. Elípticas, parabólicas o hiperbólicas

La ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de segundo orden con coeficientes constantes

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \tag{3.1}$$

donde $a, b, \ldots, g$ son constantes, se clasifican de acuerdo a los criterios de la tabla en la Sección 4.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ (o bien } f(x, y)) \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = c_0 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ donde } k > 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0 \tag{3.5}$$

Ecuación 3.2 $a \longrightarrow 1$, $b \longrightarrow 1$ y $c \longrightarrow -c_0^2$
entonces $b^2 - 4ac = 4c_0^2 > 0 \Longrightarrow$ hiperbólica
Ecuación 3.3 $a \longrightarrow 1$, $b \longrightarrow 0$ y $c \longrightarrow 1$
entonces $b^2 - 4ac = -4 < 0 \Longrightarrow$ Elíptica
Ecuación 3.4 $u \longrightarrow T$, $a \longrightarrow k$, $b \longrightarrow 0$ y $c \longrightarrow 0$
entonces $b^2 - 4ac = 0 \Longrightarrow$ Parabólica
Ecuación 3.5 $a \longrightarrow 1$, $b \longrightarrow 0$ y $c \longrightarrow 1$
entonces $b^2 - 4ac = -4 < 0 \Longrightarrow$ Elíptica

4. … criterio de clasificación

Elíptica	$b^2 - 4ac < 0$
Parabólica	$b^2 - 4ac = 0$
hiperbólica	$b^2 - 4ac > 0$

Otros ejemplos de Ecuaciones Diferenciales Parciales (3.1) son:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k(E - V)u = 0 \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = q \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);\ v = \sqrt{gH} \tag{4.3}$$

Elíptica	Ecuación 4.1 (ec de Schrödinger)
Parabólica	Ecuación 4.2 (ec de calor con fuente)
hiperbólica	Ecuación 4.3 (propagación tsunami)

5. Criterio de Courant-Friedrichs-Lewy

El criterio de Courant-Friedrichs-Lewy es una condición que debe cumplirse para que el método de diferencias finitas se mantenga estable. Restringe el tamaño del paso de tiempo y/o espacio.

Se debe cumplir

$$c \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{5.1}$$

6. Aproximación de la derivada en diferencias hacia adelante, hacia atrás y centradas

$$x_{j+1} = x_j + (\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j + \frac{1}{3!}(\Delta t)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j + \cdots \tag{6.1}$$

$$\frac{x_{j+1} - x_j}{(\Delta t)} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j + \frac{1}{3!}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j + \cdots \tag{6.2}$$

$$x_{j-1} = x_j - (\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j - \frac{1}{3!}(\Delta t)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j + \cdots \tag{6.3}$$

$$\frac{x_{j-1} - x_j}{(\Delta t)} = -\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j - \frac{1}{3!}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j + \cdots \tag{6.4}$$

De las ecs (6.2) y (6.4) se deduce la aproximación de $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j$ en diferencias hacia adelante (Ecuación 6.5), diferencias hacia atrás (Ecuación 6.6)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j \approx \frac{x_{j+1} - x_j}{(\Delta t)} \tag{6.5}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j \approx \frac{x_j - x_{j-1}}{(\Delta t)} \tag{6.6}$$

y diferencias centradas (Ecuación 6.7)

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j \approx \frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2(\Delta t)} \tag{6.7}$$

En la Ecuación 6.7 significa que calculamos la derivada alrededor de un tiempo j tomando la diferencia de los valores correspondientes a un tiempo adelante que j: $j+1$ y un tiempo atrás de j: $j-1$ dividido por dos veces el tamaño de paso de tiempo.

7. El esquema numérico de diferencias finitas hacia atrás es de orden 1

$$x_{j-1} = x_j - (\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j - \frac{1}{3!}(\Delta t)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j + \cdots \tag{7.1}$$

$$\frac{x_{j-1} - x_j}{(\Delta t)} = -\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j - \frac{1}{3!}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j + \cdots \tag{7.2}$$

$$\frac{x_j - x_{j-1}}{(\Delta t)} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_j - \frac{1}{2}(\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j + \frac{1}{3!}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j - \cdots \tag{7.3}$$

$$\epsilon = -\frac{1}{2}(\Delta t)\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)_j + \frac{1}{3!}(\Delta t)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3}\right)_j - \cdots \tag{7.4}$$

$$\therefore \epsilon = O(\Delta t) \tag{7.5}$$

Ahora para mostrar que las diferencias centradas tienen hasta un error de orden 2, aproximamos u_{j+1} y u_{j-1} expandiendo la serie de Taylor alrededor del punto j

$$u_{j+1} = u_j + (\Delta x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)_j + \frac{1}{3!}(\Delta x)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \cdots \tag{7.6}$$

$$u_{j-1} = u_j - (\Delta x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{2}(\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)_j - \frac{1}{3!}(\Delta x)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \cdots \tag{7.7}$$

Restamos las dos ecs y luego dividiremos por $2(\Delta x)$
(7.6) - (7.7):

$$u_{j+1} - u_{j-1} = 0 + 2(\Delta x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + 0 + \frac{2}{3!}(\Delta x)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + 0 + \frac{2}{5!}(\Delta x)^5\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \cdots \tag{7.8}$$

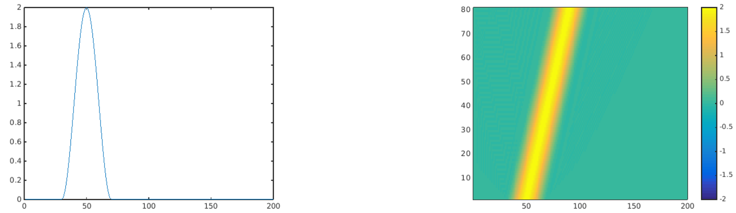
(7.8) / $(2(\Delta x))$:

$$\frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2(\Delta x)} = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{3!}(\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \frac{1}{5!}(\Delta x)^4\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \cdots \tag{7.9}$$

$$\therefore \epsilon = O((\Delta x)^2) \tag{7.10}$$

8. Ecuación de advección con el esquema de diferencias centradas

```
clear
close all

%% condicion inicial
u(1:1:200) = 0;
for jj = -20:20
    u(1,jj+50) = 1 + cos(pi*jj/20);
end
%plot(u)


c = .5;
Del_T = 1;
Del_X = 1;

u5(1:200,1:80)=0;
u5(:,1)=u;

%% primer paso t=1
n=1;
for jj = 2:99
    u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/2*Del_X)*(u5(jj+1,n) - u5(jj-1,n));
end

%% pasos t = 2:80
for n=2:80
    for jj=3:198
        u5(jj,n+1) = u5(jj,n-1) - ...
            c*2*(Del_T/Del_X)*( ((4/6)*(u5(jj+1,n) -u5(jj-1,n)) ) - ...
            (1/12)*( u5(jj+2,n) - u5(jj-2,n)) );
    end
    for jj = 199:199
        if c>0
           u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj,n) - u5(jj-1,n));
        else
           u5(jj,n+1) = u5(jj,n) -  c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj+1,n) - u5(jj,n));
        end
    end

    for jj = 2:2
        if c>0
           u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj,n) - u5(jj-1,n));
        else
           u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj+1,n) - u5(jj,n));
        end
    end
u5(1,n+1) = u5(199,n+1);
u5(200,n+1) = u5(2,n+1);
end

figure
pcolor(u5'), caxis([-2,2]), shading flat,colorbar
```



(a) **(b)**

Figura 8.1: a) condicion inicial y b) su evolución.

9. Esquema de salto de rana y estabilidad

```
clear
close all

%% condicion inicial
u(1:1:200) = 0;
for jj = -20:20
    u(1,jj+50) = 1 + cos(pi*jj/20);
end
%plot(u)

%c = -.5;
c = 2;
%Del_T = 1;
Del_T = .35; % delta_t <= delta_x / c,
% en este caso delta_x/c = 1/2,
% entonces delta_t debe ser menor a 1/2
% por tanto delta_t = .35 cumple esta condicion
Del_X = 1;

u5(1:200,1:80)=0;
u5(:,1)=u;

%% primer paso t=1
n=1;
for jj = 2:99
    u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/2*Del_X)*(u5(jj+1,n) - u5(jj-1,n));
end

%% pasos t = 2:80
for n=2:80
    for jj=3:198
        u5(jj,n+1) = u5(jj,n-1) - ...
            c*2*(Del_T/Del_X)*( ((4/6)*(u5(jj+1,n) -u5(jj-1,n)) ) - ...
            (1/12)*( u5(jj+2,n) - u5(jj-2,n)) );
    end
    for jj = 199:199
        if c>0
          u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj,n) - u5(jj-1,
```

```
    n));
        else
            u5(jj,n+1) = u5(jj,n) -  c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj+1,n) - u5(jj
    ,n));
        end
    end

    for jj = 2:2
        if c>0
            u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj,n) - u5(jj-1,
    n));
        else
            u5(jj,n+1) = u5(jj,n) - c*(Del_T/Del_X)*(u5(jj+1,n) - u5(jj,
    n));
        end
    end
u5(1,n+1) = u5(199,n+1);
u5(200,n+1) = u5(2,n+1);
end

figure
pcolor(u5'), caxis([-2,2]), shading flat,colorbar
```

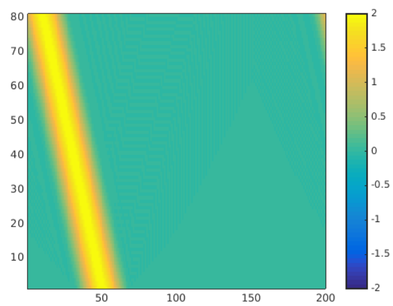


Figura 9.1: $c = -.5$

En la Figura 9.1 se muestra el resultado de cambiar el valor de c a $-.5$, es decir el coseno desfasado en la vertical de la condición inicial se mueve a la izquierda con el paso del tiempo.

También se encontró que la resolución temporal (Δt) debe ser menor a .35 cuando se fija el valor de $c = 2$, así la Ecuación 5.1 se sigue respetando.

10. Esquema de diferencias centradas con $O\left((\Delta x)^4\right)$ error de orden 4

$$u_{j+2} = u_j + (2\Delta x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{2}(2\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)_j + \frac{1}{3!}(2\Delta x)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \cdots \tag{10.1}$$

$$u_{j-2} = u_j - (2\Delta x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{2}(2\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)_j - \frac{1}{3!}(2\Delta x)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \cdots \tag{10.2}$$

(10.1) - (10.2):

$$u_{j+2}-u_{j-2} = 0+2(2\Delta x)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j +0+\frac{2}{3!}(2\Delta x)^3\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j +0+\frac{2}{5!}(2\Delta x)^5\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j +\cdots \tag{10.3}$$

$$\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{2(2\Delta x)} = \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{3!}(2\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \frac{1}{5!}(2\Delta x)^4\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \cdots \tag{10.4}$$

El objetivo es eliminar el término con orden cuadrático $(2\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j$, necesitamos los coeficientes apropiados $\frac{4}{3}$ y $\frac{1}{3}$

$$\frac{4}{3}\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2(\Delta x)} = \frac{4}{3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{4}{3}\frac{1}{3!}(\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \frac{4}{3}\frac{1}{5!}(\Delta x)^4\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \cdots \tag{10.5}$$

$$\frac{1}{3}\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{2(2\Delta x)} = \frac{1}{3}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \frac{1}{3}\frac{1}{3!}(2\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \frac{1}{3}\frac{1}{5!}(2\Delta x)^4\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \cdots \tag{10.6}$$

Hacemos (4/3)(7.9) - (1/3)(10.4) = (10.5) - (10.6):

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2(\Delta x)} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{2(2\Delta x)} = {} & \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \cancel{\left[\frac{4}{3}\frac{1}{3!} - \frac{1}{3}\frac{1}{3!}(2)^2\right]}(\Delta x)^2\left(\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}\right)_j + \\ & \left[\frac{4}{3}\frac{(\Delta x)^4}{5!} - \frac{1}{3}\frac{(2\Delta x)^4}{5!}\right]\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \\ & \left[\frac{4}{3}\frac{(\Delta x)^6}{7!} - \frac{1}{3}\frac{(2\Delta x)^6}{7!}\right]\left(\frac{\mathrm{d}^7u}{\mathrm{d}x^7}\right)_j + \cdots\end{aligned} \tag{10.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\frac{u_{j+1}-u_{j-1}}{2(\Delta x)} - \frac{1}{3}\frac{u_{j+2}-u_{j-2}}{2(2\Delta x)} = {} & \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_j + \left[-\frac{1}{30}\right](\Delta x)^4\left(\frac{\mathrm{d}^5u}{\mathrm{d}x^5}\right)_j + \\ & \left[-\frac{1}{252}\right](\Delta x)^6\left(\frac{\mathrm{d}^7u}{\mathrm{d}x^7}\right)_j + \cdots\end{aligned} \tag{10.8}$$

$$\therefore \epsilon = O\left((\Delta x)^4\right) \tag{10.9}$$