Wykresy funkcji w programie Geogebra

Program GeoGebra, służący do wykonywania dynamicznych konstrukcji geometrycznych, jest równocześnie doskonałym narzędziem tworzenia wykresów funkcji. Na wykresie można dodatkowo zwizualizować pewne własności funkcji, na przykład jej miejsca zerowe, przedziały dodatniości i ujemności i inne. Wykres może być dynamiczny – zmieniać się w zależności od zmiany jakiegoś parametru.

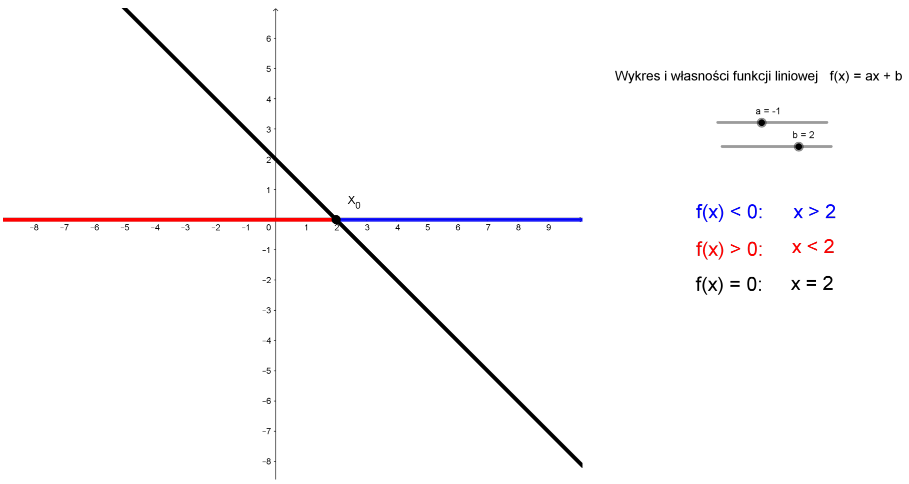
W pierwszej częsci niniejszego opracowania pokazano, jak w programie Geogebra tworzyć bogate wizualnie i dynamiczne wykresy funkcji. W drugiej jego części zilustrowano na szeregu przykładów użycie odpowiednio wzbogaconych wykresów funkcji do rozwiązywania równań i nierówności.

Zakłada się wstępną znajomość tego programu, to znaczy znajomość jego podstawowymi narzędzi służących do rysowania obiektów geometrycznych.

Wszystkie aplikacje Geogebry, o których mowa tekście, znajdują się na płycie CD dołączonej do opracowania.

Funkcja liniowa

Aplikacja `fliniowa.ggb`.



Aplikacja przedstawia wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Wartości parametrów a i b można zmieniać przy pomocy suwaków. Niebieska półprosta na osi ox przestawia zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$, czerwona półprosta na osi ox przestawia zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$. Punkt X_0 na osi OX przedstawia miejsce zerowe funkcji.

Jak wykonano tę aplikację

Objaśnienia: Polecenie: `nazwa` oznacza: wpisz (wprowadź) w linii poleceń `nazwa` i zatwierdź. Właściwości `obiekt` oznacza: zmodyfikuj we wskazany sposób w oknie właściwości `obiektu` wpisy w odpowiednich polach.

1. W oknie Grafiki 2 wstawiamy suwaki liczbowe `a` i `b`.
2. W oknie Grafiki 1: polecenie: `f(x) = a x + b`.
3. Polecenie: `X0 = Przecięcie(f, OśX, 1)`.
4. Polecenie: `h1 = Półprosta(X0, X0 - (1, 0))`.
   Właściwości półprostej `h1`/Zaawansowane/Kolory dynamiczne
   Czerwony: `a < 0`
   Zielony `0`
   Niebieski `a > 0`
5. Polecenie: `h2 = Półprosta(X0, X0 + (1, 0))`.
   Właściwości półprostej `h2`/Zaawansowane/Kolory dynamiczne
   Czerwony: `a > 0`
   Zielony `0`
   Niebieski `a < 0`
6. Polecenie: `ox = Prosta((0, 0), (1, 0))`.
   Właściwości prostej `ox`/Zaawansowane/Kolory dynamiczne
   Czerwony: `a = 0 \land b > 0`
   Zielony `0`
   Niebieski `a = 0 \land b < 0`
   Właściwości prostej `ox`/Zaawansowane/Warunek wyświetlania obiektu:
   `a = 0`
7. W oknie Grafiki 2 wstawienie tekstu `f(x) = 0`, `f(x) > 0`, `f(x) < 0`.
8. W oknie Grafiki 2 polecenia

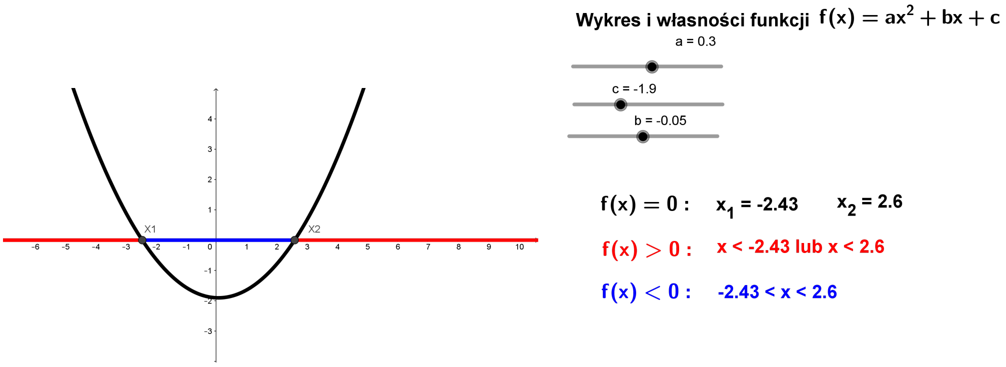
```
tmz = Jeżeli(a != 0, "x = " + (Tekst(x(X0))),
 Jeżeli(b != 0, "brak", "R"))

tnie1=Jeżeli( a > 0, " x > " + x(X0),
 Jeżeli( a < 0, "x < " + x(X0), Jeżeli(b > 0, "R", "brak")))

tnie2=Jeżeli( a < 0, " x > " + x(X0),
 Jeżeli( a > 0, "x < " + x(X0), Jeżeli(b < 0, "R", "brak")))
```

Funkcja kwadratowa

Otwórz aplikację `fkwadratowa.ggb`.



Aplikacja przedstawia wykres funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$. Wartości parametrów a, b i c można zmieniać przy pomocy suwaków. Niebieski podzbiór osi ox przedstawia zbiór rozwiązań nierówności $f(x) < 0$, czerwony podzbiór osi ox reprezentuje zbiór rozwiązań nierówności $f(x) > 0$. Punkty X_1 i X_2 na osi ox są miejscami zerowymi funkcji.

Jak wykonano tę aplikację

1. W oknie Grafiki 2 wstawiamy suwaki liczbowe `a`, `b` i `c`.
2. W oknie Grafiki 1: polecenie: `f(x) = ax^2 + bx +c`.
   Właściwości obiektu `f`/Zaawansowane/Warunek wyświetlania obiektu:
   `a != 0`
3. Polecenia

   ```
   X1 = Przecięcie(f, OśX, 1)
   X2 = Przecięcie(f, OśX, 2)
   ```

4. Polecenie `x1x2 = Odcinek(X1, X2)`.
   Właściwości odcinka `x1x2`/Zaawansowane/Kolory dynamiczne
   Czerwony: `a < 0`
   Zielony `0`
   Niebieski `a > 0`
5. Polecenia

   ```
   h1 = Półprosta(X1, X1 + (-1, 0))
   h2 = Półprosta(X2, X2 + (1, 0))!.
   ```

Właściwości obu półprostych /Zaawansowane/Kolory dynamiczne
Czerwony: `a > 0`
Zielony `0`
Niebieski `a < 0`

6. W oknie Grafiki 2 wstawienie tekstu `f(x) = 0`, `f(x) > 0`, `f(x) < 0`.

7. W oknie Grafiki 2 polecenia

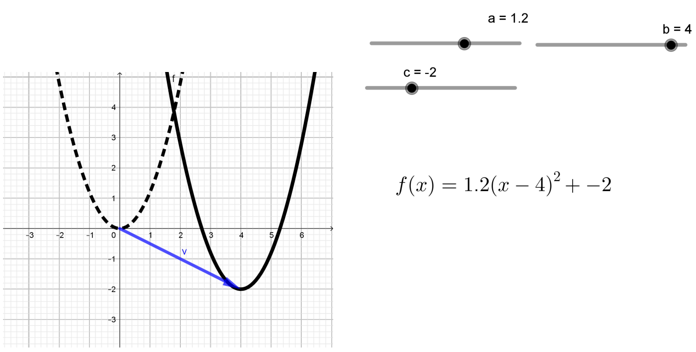
```
tmz1 = Jeżeli(CzyZdefiniowany(X1), "x_1 = " + (Tekst(x(X1))), "")
tmz2 = Jeżeli(CzyZdefiniowany(X2), "x_2 = " + (Tekst(x(X2))), "")

tnie2 = Jeżeli(CzyZdefiniowany(X2),
  jeżeli(a < 0, Tekst(x(X1)) + " < x < " + Tekst(x(X2)),
 "x < " + Tekst(x(X1)) +" lub x < " + Tekst(x(X2))),"" )

tnie1 = Jeżeli(CzyZdefiniowany(X2),
  jeżeli(a > 0, Tekst(x(X1)) + " < x < " + Tekst(x(X2)),
 "x < " + Tekst(x(X1)) +" lub x < " + Tekst(x(X2))),"" )
```

Funkcja kwadratowa – przesunięcie wykresu

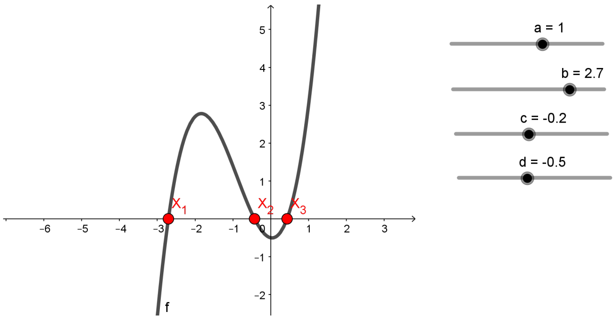
Otwórz aplikacje `fkwadratowaprzes.ggb`.



Aplikacja przedstawia wykres funkcji $f(x) = a(x-b)^2 + c$. Wartości parametrów a, b i c można zmieniać przy pomocy suwaków. Wykres funkcji f powstaje z wykresu funkcji $g(x) = ax^2$ przez przesuniecie o wektor $v = (b, c)$.

Funkcja wielomianowa

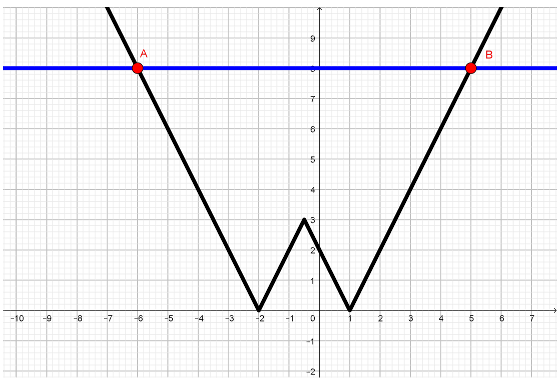
Otwórz aplikację `fwiel3stopnia.ggb`.



Aplikacja przedstawia wykres funkcji $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wartości parametrów a, b, c i c można zmieniać przy pomocy suwaków. Punkty X_1, X_2 i X_3 na osi ox przedstawiają miejsce zerowe funkcji.
Zadanie: dobierz wartości współczynników tak, aby funkcja f miała
1) jedno miejsce zerowe dodatnie,
2) dwa miejsca zerowe ujemne, jedno dodatnie.

Zastosowania

Zadanie 1. Rozwiązać równanie $|3 - |2x + 1|| = 8$.
Aplikacja `zadanie1.ggb`.
Z wykresu funkcji $f(x) = |3 - |2x + 1||$



odczytujemy dwa rozwiązania: $x = 5$ lub $x = -6$.
Standardowe rozwiązanie algebraiczne:

$$\begin{cases} 3 - |2x+1| = 8 \quad \text{lub} \\ 3 - |2x+1| = -8 \end{cases}, \quad \begin{cases} |2x+1| = -5 \quad \text{lub} \\ |2x+1| = 11 \end{cases}$$

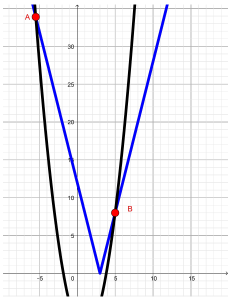
Pierwsze równanie układu nie ma rozwiązań, rozwiązania drugiego to $x = 5$ lub $x = -6$.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $4|x-3| = x^2 - 2x - 7$.

$$\begin{cases} x \geq 3 \text{ i } 4(x-3) = x^2 - 2x - 7 \quad \text{lub} \\ x < 3 \text{ i } 4(4-x) = x^2 - 2x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \text{ i } x^2 - 6x + 5 = 0 \quad \text{lub} \\ x < 3 \text{ i } x^2 + 2x - 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

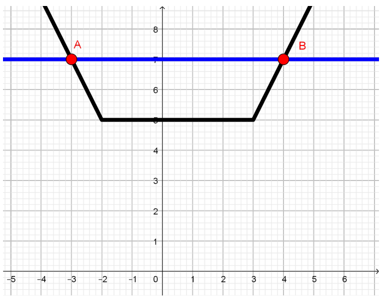
$$\begin{cases} x = 5 \quad \text{lub} \\ x = -1 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Wykresy funkcji $f(x) = x^2 - 2x - 7$, $g(x) = 4|x-3|$ pokazują, że są dwa rozwiązania równania (jedno łatwo odczytać: $x = 5$).



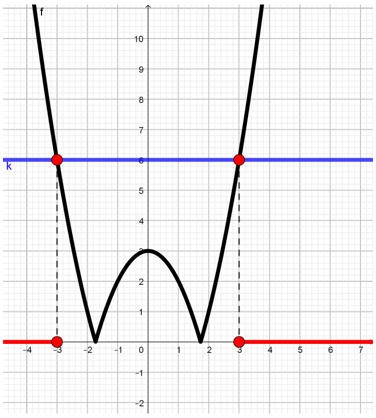
Zadanie 3. Rozwiązać równanie $|x+2| + |x-3| = 7$.
Aplikacja `zadanie3.ggb`.

Z wykresu funkcji $f(x) = |x+2| + |x-3|$



otrzymujemy rozwiązanie $x = -3$ lub $x = 4$.

Zadanie 4. Rozwiązać nierówność $|x^2 - 3| \geq 6$.
Aplikacja `zadanie4.ggb`.
Z wykresu funkcji $f(x) = |x^2 - 3|$



odczytujemy rozwiązanie: $x \in (-\infty,\ -3] \cup [3,\ +\infty)$.
Standardowe rozwiązanie algebraiczne:
Nierówność $|x^2 - 3| \geq 6$ jest równoważna układowi

$$\begin{cases} x^2 - 3 \leq -6 \text{ lub} \\ x^2 - 3 \geq 6 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 \leq -3 \text{ lub} \\ x^2 \geq 9 \end{cases}$$

Pierwsza nierówność nie ma rozwiązań, rozwiązaniem drugiej jest
$x \in (-\infty,\ -3] \cup [3,\ +\infty)$.

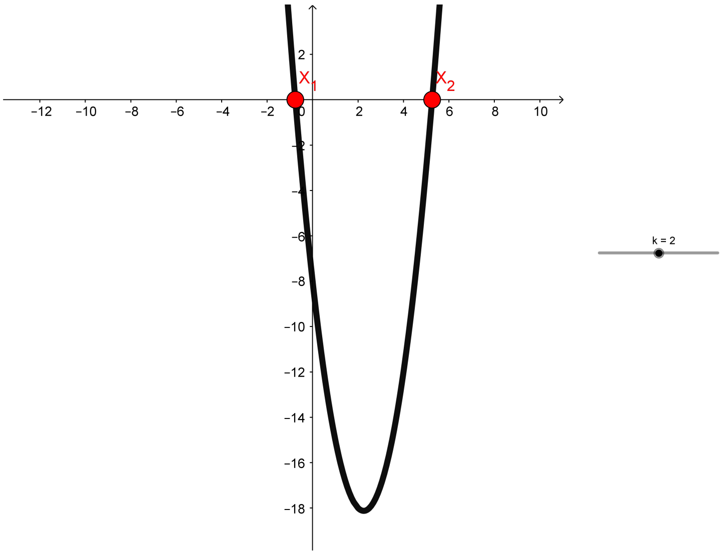
Zadanie 5. Zbadać, dla jakich k równanie

$$2x^2 + (3k - 15) - 8 = 0$$

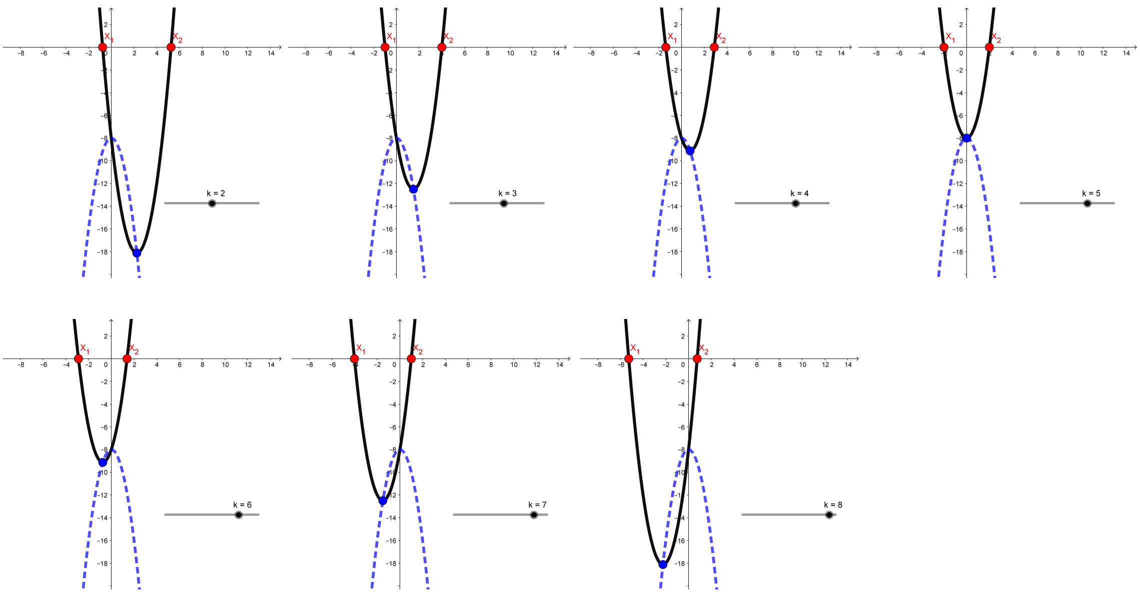
ma dwa pierwiastki będące liczbami przeciwnymi.
Aplikacja `zadanie5.ggb`.
Standardowe „mechaniczne" rozwiązanie: trójmian $2x^2 + (3k - 15) - 8$ ma dwa (niekoniecznie różne) pierwiastki $x_1,\ x_2$ takie, że $x_1 = -x_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy jego wyróżnik $\Delta = (3k - 15)^2 + 64$ jest nieujemny oraz $x_1 + x_2 = -\frac{3k-15}{2} = 0$ (wzory Viety). Rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} (3k - 15)^2 + 64 \geq 0 \\ -\frac{3k-15}{2} = 0 \end{cases}$$

jest $k = 3$.
Przyjrzyjmy się wykresowi funkcji $f(x) = 2x^2 + (3k - 15) - 8$. Wartość parametru k można zmieniać.



Zmieniając wartość parametru k od $k = 2$ do $k = 8$ obserwujemy przesuwanie się wykresu funkcji f. Można zauważyć, że wierzchołek wykresu przesuwa się po pewnej paraboli.



Widać więc, że pierwiastki x_1, x_2 równania $2x^2 + (3k - 15) - 8 = 0$ będą liczbami przeciwnymi tylko wtedy, gdy oś OY jest osią symetrii wykresu, czyli gdy $k = 5$.

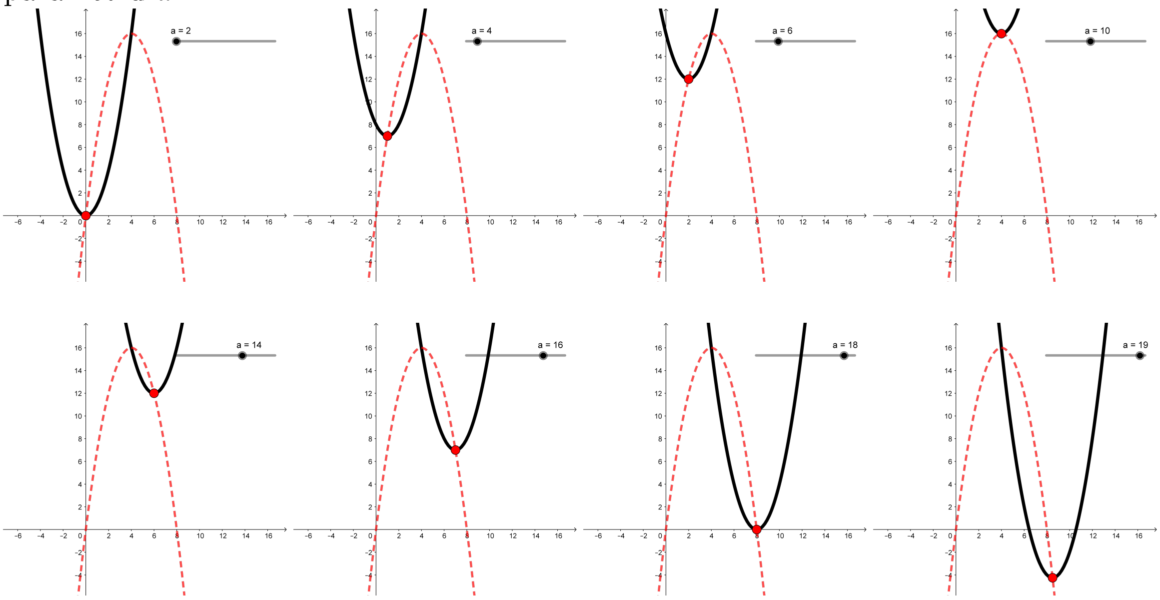
Zadanie 6. Dla jakich a równanie

$$x^2 + (2 - a)x + 4a - 8 = 0$$

ma dwa różne pierwiastki dodatnie?
Aplikacja `zadanie6.ggb`.
Standardowe rozwiązanie:

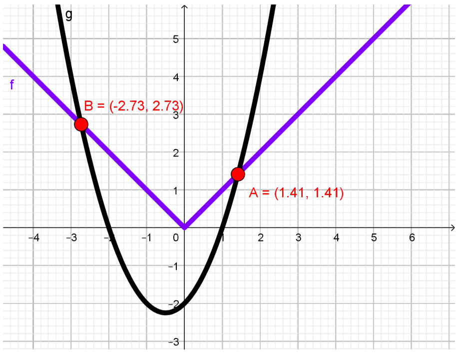
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 - 4(4a-8) > 0 \\ a - 2 > 0 \\ 4a - 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 18.$$

Przyjrzyjmy się wykresowi funkcji $f(x) = x^2 + (2-a)x + 4a - 8$. Wartość parametru a można zmieniać.



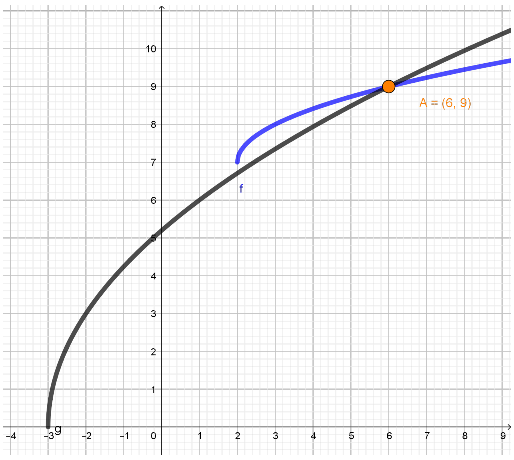
Widać więc, że pierwiastki x_1, x_2 równania $x^2 + (2-a)x + 4a - 8 = 0$ będą różnymi liczbami dodatnimi, gdy $a > 18$.

Zadanie 7. Rozwiązać graficznie równanie $|x| = x^2 + x - 2$.
Aplikacja `zadanie7.ggb`.
Tworzymy wykresy funkcji $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2 + x - 2$ w jednym układzie współrzędnych.



Wykresy przecinają się w dwu punktach A i B. Rozpoznajemy $x_1 = \sqrt{2}$ i $x_2 = -1 - \sqrt{3}$.

Zadanie 8. Rozwiązać równanie $3\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 7$.
Aplikacja `zadanie8.ggb`.



Wykresy przecinają się w jednym punkcie A.
Rozpoznajemy $x_1 = 6$.

Literatura

1. K. Winkowska-Nowak, E. Pobiega, K. Pobiega, *ABC GeoGebry. Poradnik dla początkujących,* Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro

2. https://www.geogebra.org/materials