Universidade Federal do Ceará
Campus Quixadá

Sistemas de Informação
Matemática Básica

Casa Dos Pombos

Ulisses Queiroz Da Silva

2019

1 Introdução

A ánalise combinatória é considerada, por muitos, um dos termos mais difíceis da matemática, porém existem alguns recursos que podem facilitar a resolução de vários problemas e o princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das gavetas de Dirichlet é um deles.

O princípio da casa dos pombos pode ser anunciado em sua versão mais simples: Se tivermos n + 1 pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos." Dessa forma é nos apresentado uma ideia de simples, mas pode ser algo um tanto que desafiador para utilizar na resolução de problemas de análise combinatória.

2 Príncipio da Casa dos Pombos

Teorema 1.1 *"Se tivermos n + 1 pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos".*
Descrição: Se tivermos $n + 1$ pombos, é obvio que, na pior das hipóteses, se distribuimos exatamente um pombo para cada casa, sobrará um pombo para ser colocado em qualquer casa. Logo uma das casas deverá conter pelo menos pois bombos: *" casa1: um pombo; casa2: um pombo; casa3: um pombo; casaN: um pombo; pombo ?"*
Também conhecido como princípio das gavetas pode ser resumido da seguinte forma: Temos n objetos para serem colocados em m gavetas. Se n ¿ m, então pelo menos uma gaveta deverá conter mais de um objeto.

Exemplo 1.2: Mostre que, em um ano não bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas há pelo menos duas que farão aniversário no mesmo dia.
Demonstração: Neste caso temos:

- Casas: dias do ano (365);
- Pombos: pessoas (366);
- Relação: Cada pesso astá associada ao dia do seu aniversário.

Pelo Princípio da Casa dos pombos, para $n = 365$ temos que pelo menos uma "casa" deverá conter pelo menos dois "pombos", isto é, pelo menos duas pessoas farão aniversário no mesmo dia.

Generalizando 1.3: Mos tre que em um calendário qualquer com dias e um conjunto contendo $n + 1$ pessoas, há pelo menos duas pessoas deste conjunto que farão aniversário no mesmo dia.
Demonstração: Neste caso temos:

- Casas: dias do ano;
- Pombos: pessoas;
- Relação: Cada pesso astá associada ao dia do seu aniversário.

Pelo princípio da casa dos pombos, $n + 1$ "pombos" para serem distribuidos em

n "casas", logo uma casa deverá conter pelo menos dois "pombos", isto é, pelo menos duas pessoas farão aniversário no mesmo dia.

Exemplo 1.4: Mostre que em um conjunto de três pessoas A, B, C há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.
Demonstração: Observando que uma pessoa do conjunto conhece no mínimo zero e no máximo duas pessoas, para resolver este problema iremos dividi-lo em dois casos:

- Caso 1: Todas as pessoas do conjunto A, B, C conhecem pelo menos uma pessoa do mesmo conjunto. Assim temos quatro possiveis. Situação 1: A conhece duas pessoas, B conhece duas pessoas e c conhece duas pessoas. Situação 2: A conhece duas pessoas, B conhece uma pessoa e C conhece uma pessoa. Situação 3: A conhece uma pssoa, B conhce duas pessoas e C conhece uma pessoa. Situação 4: A conhece uma pessoa, B conhece uma pessoa e C conhece duas pessoas.

  Como podemos observar em todas as situações possíveis, há pelo menos duas pessoas de A, B, C que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas deste conjunto. Este mesmo resultado seria obtido aplicando o Princípio da Casa dos Pombos para$n$=2, onde:
  Demonstração: Neste caso temos:

  – Casas: Número de pessoas que cada um dos indivíduos do conjunto conhece(note que as casas são rotuladas de 1 a 2);
  – Pombos: Indivíduos do conjunto;
  – Relação:Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.

- Caso 2: Há pessoas no conjunto que não conhecem ninguém. Situação 1: A, B e C não conhcen ninguém. Situação 2: A não conhce ninguém ninguém, B e C conhcem uma pessoa cada. Situação 3: A conhce uma pessoa, B não conhce ninguém e C conhece uma pessoa. Situação 4: A e B conhecem uma pessoa cada e C não conhce ninguém.
  Observando todas as situações possíveis vemos que em cada uma delas há pelo menos duas pessoas de A, B, C que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas deste conjunto, conforme obteríamos aplicando o Princípio da Casa dos Pombos para $n = 2$ onde:

  – Casas: Número de pessoas que cada um dos indivíduos do conjunto conhece (note que as casas são rotuladas de 0 a 1);
  – Pombos: Indivíduos do conjunto;
  – Relação:Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.

Comparando os Casos 1 e 2 vemos que, em ambos, há situações que garantem o resultado; o que muda de um caso para outro são os rótulos das casas. Logo há pelo menos duas pessoas do conjunto que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

Generalização 1.5: Mostre que em um conjunto de n pessoas há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.
Demosntração: Sabendo que qualquer pessoa do conjunto pode conhecer no mínimo zero e no máximo$n$ - 1 pessoas, dividiremos a solução deste problema em dois casos, analogamente a que foi feito no exemplo anterior.

- Caso 1: Todas as pessoas conhecem pelo menos outra pessoa do conjunto. Se todas as pessoas do conjunto conhecem pelo menos uma pessoa do conjunto, cada pesso tem um número de conhecidos que varia de 1 a n-1 (pois uma pessoa não conhece a simesma). Podemos assim aplicar o Princípio da Casa dos Pombos da seguinte forma:
  Demonstração: Neste caso temos:
  - Casas: Número de pessoas que cada um dos indivíduos do conjunto conhece (note que as casas são rotuladas de 1 a n-1);
  - Pombos: Indivíduos do conjunto;
  - Relação:Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.

  Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos há pelo menos duas pessoas do conjunto que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

- Caso 2: Há uma pessoa no conjunto que não conhecem ninguém. Se há uma pessoa do conjunto que não conhece ninguém, cada pessoa tem um número de conhecidos que varia de 0 a n-2 (pessoas que não conhecem ninguém, pessoas que conhecem exatamente uma pessoa, pessoas que conhecem exatamente 2 pessoas, até pessoas que conhecem exatamente n-2 pessoas), pois ao considerarmos que uma pessoa não conhece ninguém, obrigatoriamente estamos excluindo a possibilidade de alguém conhecer n-1 pessoas. Sendo assim, podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos de modo análogo ao que foi feito no caso anterior, com a diferença de que agora as casas são rotuladas de 0 a n-2. Assim procedendo, concluímos que também neste caso há pelo menos duas pessoas do conjunto que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

3 Pincípio Geral

Muitas vezes é interessante enunciarmos o Princípio da Casa dos Pombos de maneira mais geral.
Teorema 2.1: *Se n casas são ocupadas por (nk +1)pombos, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos (k + 1) pombos.*
Demonstração: A demonstração é óbvia. Se temos n casas e cada casa contiver no máximo k pombos, então teremos $n.k$ pombos distribuídos. Como temos (nk + *1*)

Exemplo 2.2: Numa festa de aniversário com 37 crianças, mostre que pelo menos quatro nasceram no mesmo mês.
Demonstração: Neste casa temos:

- Casas: meses do ano(12);

- Pombos: crianças(37);
- Relação: Cada criança está associada ao mês de seu aniversário.

Temos assim n casa para serem ocupadas por *(nk + 1)* pombos, onde $n = 12$ e *nk + 1* = 37. Se *12k + 1* = 37 então $k = 3$. Logo , pelo Teorema2.1 temos que pelo menos quatro crinaças nasceram no mesmo mês.

Exemplo 2.3: Um aurna contém 5 bolas pretas, 4 bolas vermelhas, 6 bolas amarelas, 7 bolas verdes e 9 bolas azuis. Qual o menor número de bolas que devem ser retiradas sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 4 bolas de uma mesma cor? **Demonstração:** Neste caso temos:

- Casas: Cores (5);
- Pombos: Bolas retiradas;
- Relação:Cada bola está associada a sua cor.

Queremos, utilizando o Teorema 2.1 para $n = 5$, garantir que em uma "casa" tenha, pelo menos, 4 = *k + 1* "pombos" (bolas de uma mesma cor). Assim, basta tomar $k = 3$. De fato, pelo Teorema2.1, se tivermos *nk + 1 = 5 . 3 + 1 = 16* retiradas, então podemos garantir que retiramos pelo menos 4 bolas de uma mesma cor. Note que 16 é o número mínimo de retiradas. De fato, se retiramos menos que 16 bolas, é possível sempre considerar uma situação na qual não tenhamos obtido pelo menos 4 bolas de uma mesma cor. Por exemplo, a retirada de 15 bolas pode ser feita de modo a obtermos 3 bolas pretas, 3 bolas vermelhas, 3 bolas amarelas, 3 bolas verdes e 3 bolas azuis.

4 Conclusão

Assim podemos concluir que o princípio da casa dos pombos pode ser utilizado para resolver vários porblemas de análise combinatório de formas mais simples de se compreender.