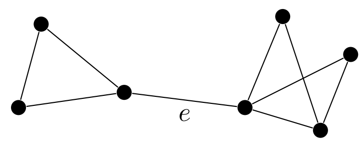
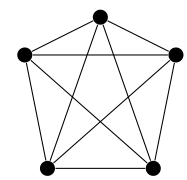
Teorema: Una arista e es una arista de corte sii no pertenece a ningún ciclo

Sea $W(G)$ la cantidad de componentes de un grafo G, decimos que una arista es de corte sii $W(G-e) > W(G)$, es decir que al eliminar la arista el número de componentes sea mayor al del grafo original (G).



$W(G-e) > W(G)$



Grafo sin aristas de corte

Note que para que e sea una arista de corte $\exists\, u, v \in V(G)$ tal que u, v son adyacentes en G. Pero no lo son en $G - e$, es decir todo uv-camino contiene a e (definición arista de corte)

Lema: Dado e una arista de corte $\exists\, u, v \in V(G)$ tal que u, v son adyacentes en G y u, v NO son adyacentes en $G - e$ sii todo u, v-camino contiene a e.

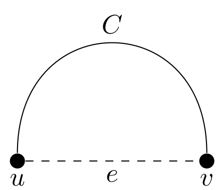
Demostración: e es de corte sii e no pertenece a ningún ciclo. $\equiv$ e NO es arista de corte sii e pertenece a un ciclo . ($p \iff q \equiv \neg p \iff \neg q$).

Note que si e esto implica que $W(G) = W(G-e)$ de este modo la proposición anterior es equivalente a demostrar que: $W(G) = W(G-e)$ sii e pertenece a un ciclo . ($p \iff q \equiv \neg p \iff \neg q$).

Sin perdida de generalidad suponga que G es conexo, ya que de otro modo usamos la componente conexa a la que e pertenece.

$\Rightarrow$

Luego de aclarar que G es conexo y por hipostesis $G - e$ también lo es, suponga que una arista e que relaciona a uv. Por lo tanto $\exists$ uv-trayectoria que vamos a llamar C en $G - e$.



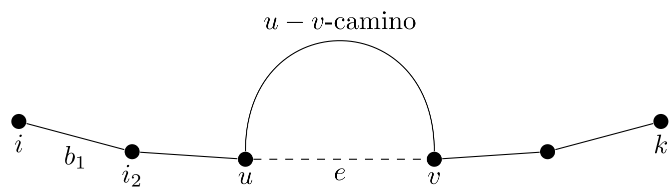
$G - e$

Pero de este modo el camino $Cveu$ es un ciclo en G al que pertenece e (Quedando demostrado en este sentido).

$\Leftarrow$

Si e pertenece a un ciclo $C = (u, e, v, e_1, v_2, ..., e_k, v_k = u)$ es decir un $u - u$ciclo. Ahora bien en $G - e$, Sean $i, k \in V(G-e)$, del mismo modo $i, k \in V(G)$. Como G es un grafo conexo, observe que $\exists$ ik-camino en G al que llamaremos C' de este modo aparecen dos casos.

1. Si e no aparece en C' entonces C' es un ik-camino de $G - e$.
2. Si e aparece en C' entonces $C' = (i, b_1, i_2, ..., b_z, u, e, v, b_{j+2}, ..., k)$.Teniendo en cuenta que e pertenece a un ciclo dada la hipótesis $\exists$ $C'' = (i, b_1, i_2, ..., u, e_k, v_{k+1}, v, b_{j+2}, ..., k)$.



De este modo C'' es ik-camino en $G - e$, quedando así demostrado que $G - e$ conexo.