



Universidad de Granada
Teselaciones en el Plano Euclídeo

Alex Jurado González

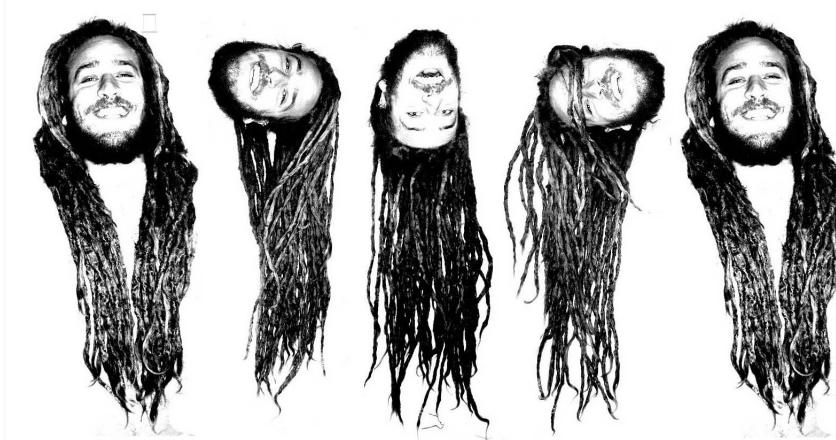


Figura 1: Rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ bajo los efectos de la gravedad

Tutor: Miguel Ortega Titos
Grado en Matemáticas
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada, Julio 2014.

A Ángeles, Juan y Patricia, un apoyo incondicional siempre.

*Del arte a las matemáticas
solo hay un paso,
el cual se hace por la Naturaleza,
si no, que le pregunten a Kepler
cuando decían que lo que estaba haciendo
eran matemáticas.*

Índice general

I	Introducción	7
II	Un poco de álgebra	13
1.	Preliminares	15
1.1.	Acción de un grupo sobre un conjunto	15
1.2.	Isometrías Euclídeas en \mathbb{R}^2	16
1.3.	Clasificación de Isometrías en \mathbb{R}^2	18
1.3.1.	Movimientos Directos	18
1.3.2.	Movimientos inversos	19
2.	Grupos Ornamentales del plano	21
2.1.	Grupo de Simetrías	21
2.1.1.	Grupos de Leonardo	21
2.1.2.	Grupos generados por Isometrías Euclídeas	22
2.2.	Grupos de Rosáceas o Rosetones	22
2.3.	Grupos de Frisos	24
2.3.1.	Definición y Propiedades	24
2.3.2.	Identificación de los grupos	26
2.4.	Grupos Cristalográficos	29
2.4.1.	Notación	29
2.4.2.	Identificación de los grupos	31
III	Teselaciones	41
3.	Teselaciones Periódicas	45
3.1.	Teselaciones generadas por polígonos regulares	46
3.1.1.	Teselaciones Regulares	48
3.1.2.	Teselaciones semiregulares o Arquímedeas	49
3.2.	Teselaciones irregulares	53

3.2.1.	Algoritmo de clasificación	57
3.2.2.	Ejemplos gráficos	57
3.3.	Frisos	60
3.3.1.	Algoritmo de clasificación de frisos	60
3.3.2.	Ejemplos gráficos	60
4.	Teselaciones Aperiódicas o Cuasiperiódicas.	63
4.1.	Introducción histórica y definición.	63
4.2.	Teselaciones de Robinson	64
4.3.	Teselaciones de Penrose	69
4.3.1.	Conjunto de teselas P1	70
4.3.2.	Conjunto de teselas P2	71
4.3.3.	Conjunto de teselas P3	73
4.4.	Teselaciones de Ammann	75
4.4.1.	Conjunto de teselas A1	75
4.4.2.	Conjunto de teselas A2	76
4.5.	Teselaciones aperiódicas especiales	78
4.5.1.	Teselaciones de Kepler	79
4.5.2.	Rosaceas	81
IV	Resumen en lengua Inglesa	83

Parte I

Introducción

Solo hace falta observar nuestro entorno cotidiano para darnos cuenta que las teselaciones conviven con el ser humano de una manera sorprendentemente natural. Sin salir de casa siquiera, ya podemos contar innumerables teselados. El suelo que pisamos tiene las baldosas encajadas aparentemente de una manera perfecta, el parquet de la habitación, los azulejos del baño y los de la cocina. Salimos a la calle, y seguimos con la misma historia, las aceras están teseladas con esos peculiares cuadrados rojos y blancos. Los edificios de obra vista, las cornisas de los edificios y las vallas de las casas. Pero no todo queda aquí, no todo es meramente funcional. Si damos un paseo por los bosques, campos o cualquier medio natural quedamos completamente impresionados con la necesidad que tiene la naturaleza de teselar. Las abejas nos dejan atónitos con esos hexágonos perfectos que muestran en la construcción de los panales. Las telas de araña son tan perfectas y simétricas como la estructura de las flores y el caparazón de algunas tortugas.

¿Podemos asegurar que se trata de arte?. Varios estudios aseguran que para el ser humano lo bello, es más bello cuanto más simétrico sea. Las paredes las empapelamos con patrones simétricos dotados de gran belleza, al fin y al cabo los usamos para decorar. ¿Quién no busca unas cortinas con un estampado bonito?. Esto es arte, pero vayamos un poco mas allá. Cuando hacemos una visita a la Alhambra de Granada, nos cautivan los teselados de las paredes. Al igual que si vamos al Alcazar de Sevilla o a la Mezquita de Córdoba. Nos fascinan los frisos del Partenón de Atenas, y los de la catedral de Notre Dame en París. Incluso quien no conoce los mosaicos de Escher o el famoso dodecaedro del cuadro de Dalí.

Pero este fenómeno que sucede no es casualidad, ni esta generado al azar. Lleva un lenguaje muy mágico detrás, este es el lenguaje de las matemáticas, el cual, acabamos encontrando en todas las cosas que nos rodean.

Este fenómeno ha sido lo que ha motivado mi encuentro con las teselaciones. El desarrollo de este trabajo se centrará en el estudio de las matemáticas que hay detrás de estas. Es un campo de estudio inmenso y sorprendentemente muy moderno. Con esto me refiero a que todavía a día de hoy se está buscando explicación y desarrollando teorías al respecto. Digo sorprendente porque a lo largo de la Historia observamos innumerables teselaciones. Desde construcciones egipcias, romanas e incluso precolombinas. Pero no fue hasta siglos muy posteriores que se empezaron a proporcionar resultados matemáticos.

Para trabajar en estas obras de arte, que son las teselaciones, se observa que podemos encontrar un grupo tal que haciéndolo actuar sobre una región del plano, se obtiene la teselación deseada. Por consiguiente, haremos un estudio previo antes de entrar en las teselaciones en sí.

Este estudio se basará en un poco de álgebra para encontrar dichos grupos. Para poder llenar el plano necesitaremos de un patrón que se repita. Tam-

bien veremos casos en los que no se requiere de una periodicidad. Este patrón no puede deformarse en su repetición, luego necesitamos de aplicaciones que no deformen nuestra región. Estas son las llamadas isometrías, que como sabemos, conservan las distancias. Por tanto, haremos un previo estudio sobre isometrías y veremos que estas forman un grupo bajo la composición.

Dicho esto, los grupos buscados deberán de ser subgrupos de este grupo de isometrías. Estos serán los que llamaremos grupos ornamentales del plano, debido a su finalidad de ornamentar y teselar el plano. Entre ellos encontraremos los grupos de frisos, grupos de rosáceas y grupos cristalográficos. Haremos una identificación, clasificación y desarrollo de estos. Proporcionaremos también resultados importantes que nos ayudaran a establecer relaciones y reglas a la hora de trabajar en teselaciones como tal.

Una vez hecho un estudio algebraico de dichos grupos, entraremos a estudiar teselaciones. Como he dicho es un estudio muy amplio, y debemos centrarnos en unos objetivos a estudiar. Por tanto nos centraremos en dos tipos de teselaciones, las que llamaremos periódicas, es decir, que se generan bajo la repetición de un patrón. Esto es, tomaremos una región del plano que llamaremos fundamental y haremos actuar uno de los grupos ornamentales para generar la teselación. Por otra parte estudiaremos las que llamaremos teselaciones aperiódicas. Es un hecho sorprendente el poder teselar con ausencia de patrón y periodicidad, es decir, encajar teselas de una manera distinta en cada paso hasta llenar la infinidad del plano Euclídeo. Este estudio es mucho más reciente, hablamos de los últimos 40 años. Veremos el desarrollo de dicho estudio a través de trabajos de autores como Penrose o Robinson. En el campo de las teselaciones periódicas estudiaremos las generadas por polígonos regulares y las generadas por teselas irregulares, sin restricción de forma. Haremos un estudio del grupo que las genera y estudiaremos algoritmos de identificación. En el caso de las teselaciones aperiódicas, trataremos dos tipos de problemas. Uno de ellos la búsqueda del número mínimo de teselas para llenar todo el plano sin periodicidad. El otro se basará en el estudio de congruencias entre las teselas buscadas. Veremos también la influencia de la proporción áurea y la naturaleza a la hora de encontrar dichas teselaciones.

La intención con este trabajo es dar una idea clara de todos los conceptos y proporcionar información suficiente para que el lector se adentre y comprenda las matemáticas que hay detrás de las teselaciones. Como he dicho es un campo muy amplio y disperso. Entonces trataremos de hacer un proceso de investigación y sintetización del estudio existente para proporcionarlo de una manera clara y personal. No se trata de un trabajo dibulgativo. Pero sí nos centraremos en hacer un estudio que pueda ser entendido, sin necesidad de estudios previos, por toda persona con unos conocimientos básicos en

matemáticas.

Parte II

Un poco de álgebra

Capítulo 1

Preliminares

Una parte de las teselaciones que veremos se generan a partir de la acción de un grupo sobre una región del plano, para ello definimos el siguiente concepto.

1.1. Acción de un grupo sobre un conjunto

Definición 1.1.1. Sea X un conjunto, G un grupo. Diremos que $\varphi : G \times X \rightarrow X$ es una acción de G sobre X si cumple:

1. $\varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(g \circ h, x), \forall x \in X, g, h \in G$, \circ la operación en G .
2. $\varphi(x, e) = x, \forall x \in X$, e elemento neutro en G .

Para facilitar la notación, notaremos: $g \circ h$ como gh y $\varphi(g, x) \mapsto g(x)$

(Ver [7], [11])

Definición 1.1.2. Sea φ una acción de G sobre X definimos:

- **Transiciones:** Funciones $\varphi_g : X \rightarrow X$ con $\varphi_g(x) = g(x), g \in G$.

Por los axiomas de la definición anteriormente mencionados, tenemos que φ_g tiene inversa, notada por $\varphi_{g^{-1}}$. Por tanto las transiciones φ_g son elementos de $Bi(y(X, X))$, definido como el conjunto de las biyecciones de X en si mismo, tal que forman un grupo bajo la composición. Luego si G actúa sobre X tenemos que

$$\begin{aligned}\phi : G &\rightarrow Bi(y(X, X)) \\ g &\mapsto \varphi(g)\end{aligned}$$

es un homomorfismo de grupos.

- **Grupo de Transformaciones:** la terna (G, X, φ)

Veamos algunos elementos que usaremos posteriormente.

Definición 1.1.3. Para un grupo de transformaciones (G, X, φ) , definimos:

- **Orbita:** $O_x = \{g(x) : g \in G\} \subset X$
- **Estabilizador:** $G_x = \{g \in G : g(x) = x\}$
- **Punto fijo:** x es punto fijo si $G_x = G$

(Ver [7], [11])

1.2. Isometrías Euclídeas en \mathbb{R}^2

En esta sección estudiaremos las isometrías Euclídeas en \mathbb{R}^2 . Veremos el comportamiento de estas, también como podemos identificarlas y clasificarlas.

A partir de ahora trabajaremos en el plano Euclídeo, ya que es aquí donde desarrollaremos las teselaciones. Por consiguiente veamos la métrica que dota el espacio Euclídeo en \mathbb{R}^2 . Definimos entonces el producto escalar como:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad x \cdot y = x^t y = x_1 y_1 + x_2 y_2, \text{ con } x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

Definimos la norma

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

Por tanto la distancia en el espacio Euclídeo viene dada por:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Tenemos ya los elementos necesarios para dar una definición de isometría. (Ver [31], [8]).

Definición 1.2.1. Una isometría en \mathbb{R}^2 es una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ invertible tal que

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

es decir, que conserva las distancias. (Ver [31], [8])

Al conservar las distancias, estamos tratando con lo que llamaremos *Grupo de Simetrías*. Más adelante veremos que dichas isometrías en \mathbb{R}^2 forman un grupo bajo la composición, el cual notaremos $Sim(\mathbb{R}^2)$

Veamos ahora que isometrías en un espacio Euclídeo podemos verlas como aplicaciones afines lineales. Esto nos facilitará el trabajo con estas.

Para ello necesitamos antes definir el grupo ortogonal, que viene dado por

$$O(n) = \{A \in M_{n \times n} : AA^t = Id\}$$

Lema 1.2.2. $f(x) = Ax$ con $A \in O(2) \iff f(x)$ es una isometría que deja fijo el origen.

Dem:

$$\begin{aligned} \Rightarrow] & \text{Sea } f(x) = Ax, A \in O(2). \text{ Dados } x, y \in \mathbb{R}^2 \\ & d(Ax, Ay)^2 = \|Ax - Ay\|^2 = \|A(x - y)\|^2 (A(x - y))^t \cdot A(x - y) \\ & = (x - y)^t A^t A(x - y) = (x - y) \cdot (x - y) = d(x, y)^2 \\ \Rightarrow & f \text{ es una isometría.} \end{aligned}$$

$\Leftarrow]$ Suponemos que f es una isometría lineal que deja fijo el origen. Por definición de isometría se cumple $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$. Además en la métrica Euclídea se da la siguiente igualdad:

$$2(x \cdot y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2 = d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 + d(x, y)^2 = d(f(x), 0)^2 + d(f(y), 0)^2 + d(f(x), f(y))^2 = 2(f(x) \cdot f(y))$$

Esto implica $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$ por tanto f conserva el producto escalar.

Veamos ahora que es lineal.

Sea $\vec{e} = (e_1, e_2)$ la base ortonormal estándar de \mathbb{R}^2 , puesto que f conserva el producto escalar $f(\vec{e})$ es otra base ortonormal. Para cada vector $x \in \mathbb{R}^2$

$$x = \sum (x \cdot e_i) e_i$$

También

$$f(x) = \sum (f(x) \cdot f(e_i)) f(e_i) = \sum (x \cdot e_i) f(e_i)$$

Luego tenemos que f es una aplicación lineal. Por tanto podemos escribir f como $f(x) = Ax$, con $A \in M_{2 \times 2}$, $x \in \mathbb{R}^2$

$$f : \sum (x \cdot e_i) e_i \mapsto \sum (x \cdot e_i) A e_i$$

Consecuentemente $A \in O(2)$. \square

(Ver [1], [8],[4]).

Definición 1.2.3. Una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ se llama una transformación lineal afín si existe una matriz $A \in M_{n \times n}$ y un vector $b \in \mathbb{R}^2$ tal que f se puede escribir como $f(x) = Ax + b$, (Ver [31], [8]).

Proposición 1.2.4. *Toda isometría Euclídea de \mathbb{R}^2 es una transformación afín con $f(x) = Ax + b$, donde $A \in O(2)$ y $b \in \mathbb{R}^2$.*

Dem: Tomamos f un isometría en \mathbb{R}^2 . Definimos ahora una aplicación como

$$g(x) = f(x) - f(0)$$

veamos que es una isometría

$$d(g(x), g(y)) = \|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - f(0) - (f(y) - f(0))\| = \|f(x) - f(y)\| = d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Entonces g es una isometría, ademas se cumple que $g(0) = 0$, es decir, que fija el origen. Por el Lema anterior tenemos que para toda isometría que fija el origen existe $A \in O(2)$ tal que se puede escribir como $g(x) = Ax$, luego si llamamos $b = f(0)$ tenemos que $f(x) = g(x) + f(0) = Ax + b$, composición de una isometría lineal y una traslación a través del vector b .

□ (Ver [20], [8],[4], [1])

1.3. Clasificación de Isometrías en \mathbb{R}^2

Orientamos \mathbb{R}^2 con la base usual. Para una Isometría Euclídea en \mathbb{R}^2 descrita como $f(x) = Ax + b$ hacemos la siguiente clasificación:

1.3.1. Movimientos Directos

Definición 1.3.1. Decimos que una una isometría es un movimiento directo si conserva la orientación, es decir, $\det(A) = 1$.

En \mathbb{R}^2 existen los siguientes movimientos directos:

- **Identidad:** Todos los puntos son fijos, es decir, f es de la forma $f(x) = x$.

- **Traslación:** Ningún punto queda fijo bajo f , todos los puntos son trasladados en la dirección de un vector \vec{b} , tomando $A = Id$. Luego f es de la forma $f(x) = x + \vec{b}$.
- **Rotación:** Existe un único punto fijo, el cual se llama centro de rotación. Si podemos escribir $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, entonces, f se llama rotación (o giro) de ángulo θ .

1.3.2. Movimientos inversos

Definición 1.3.2. Decimos que una una isometría es un movimiento inverso si no conserva la orientación, es decir, $\det(A) = -1$.

En \mathbb{R}^2 existen los siguientes movimientos inversos:

- **Reflexión:** Existe una recta L de puntos fijos, esto es $f(x) = x, \forall x \in L$. A esta recta se le llama eje de simetría. Todos los puntos que no pertenecen a L se reflejan a través de dicho eje.
- **Reflexión con deslizamiento:** Existe una recta L' que queda invariante, esto es, $f(L') = L'$. Hay una reflexión con eje de simetría L' seguida de una traslación a través de un vector \vec{b} el cual lleva la dirección de L' . Entonces podríamos definir una Reflexión con deslizamiento como la composición de una reflexión y una traslación.

(Ver [4], [8],[1])

Capítulo 2

Grupos Ornamentales del plano

En este capítulo haremos un estudio de lo que llamamos *grupos ornamentales del plano*. Reciben este nombre debido a que cuando hacemos una acción de estos grupos sobre una región del plano obtenemos una teselación de \mathbb{R}^2 . De tal manera, que usando estos grupos para teselar se consigue una ornamentación artística de plano.

2.1. Grupo de Simetrías

Los grupos que trabajaremos a continuación dejan invariante la región del plano en la que actúan. Por esta razón, serán de gran importancia en nuestro estudio de teselaciones, mas concretamente cuando hablamos de teselaciones periódicas.

2.1.1. Grupos de Leonardo

Definición 2.1.1. El grupo Cíclico de orden n es el grupo generado por un único generador. Lo denotamos como

$$C_n = \langle r \rangle = \{r : r^n = Id\} = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}\}$$

Definición 2.1.2. El grupo Diédrico está generado por dos generadores. Denotamos el grupo Diédrico de orden 2n como:

$$D_n = \{r, s : r^n = s^2 = Id, sr = r^{-1}s\} = \{Id, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

(Ver [4], [8])

2.1.2. Grupos generados por Isometrías Euclídeas

Previamente hemos estudiado las Isometrías en un espacio Euclídeo. Veamos ahora que estas forman un grupo bajo la composición. Para ello, comprobamos que cumplen las propiedades para las cuales se obtiene una estructura de grupo. Sean $f(x) = Ax + a$, $g(x) = Bx + b$, $h(x) = Cx + c$ Isometrías Euclídeas, luego se verifican las siguientes propiedades:

- **Asociativa:** $(f \circ g) \circ h(x) = A(B(Cx + c) + b) + a = f \circ (g \circ h)(x)$
- **Elemento neutro:** Tomamos $Id(x) = x$. Bajo la composición, la identidad actúa como elemento neutro.
- **Inverso:** Tomamos $s(x) = Ax + b$ una Isometría cualquiera, si tomamos $s^{-1}(x) = A^{-1}x - A^{-1}b$ tenemos que bajo la composición es inversa de $s(x)$ ya que $A(A^{-1}x - A^{-1}b) + b = x$ luego toda isometría tiene inversa.

(Ver [8], [4])

Hemos visto ya que las Isometrías Euclídeas forman un grupo. A este grupo le llamamos grupo de simetrías del plano, el cual denotamos como:

$$Sim(\mathbb{R}^2) = \{f : f(x) = Ax + b, b \in \mathbb{R}^2, A \in O(2)\}.$$

Un subgrupo muy importante de $Sim(S)$ con el que trabajaremos en nuestro estudio, es el que llamaremos *grupo Puntual*. Este grupo esta generado por las Isometrías Euclídeas de \mathbb{R}^2 tales que no admiten subgrupos de traslaciones. Consecuentemente contiene al menos un punto fijo. Este grupo lo denotamos como

$$Punt(\mathbb{R}^2) = \{f \in Sim(\mathbb{R}^2) : f(x) = Ax, A \in O(2)\}$$

(Ver [8], [4], [51])

2.2. Grupos de Rosáceas o Rosetones

Dentro de los grupos ornamentales del plano, tenemos los *Grupos de Rosáceas*. Estos grupos reciben este nombre debido a que son los que generan las que llamaremos más adelante *Rosáceas*. Profundizaremos más en esto en el capítulo de teselaciones.

Veamos ahora el teorema de Leonardo, un resultado que nos facilitara la interpretación y el estudio de éstos.

Teorema 2.2.1 (Leonardo). *Todo subgrupo finito de $Punt(\mathbb{R}^2)$ es isomorfo o bien a un Grupo Cíclico C_n o a un Grupo Diédrico D_n*

Dem: Sea $G \leqslant \text{Punt}(\mathbb{R}^2)$. Luego por hipótesis $\#G$ es finito. Tomamos $p \in \mathbb{R}^2$, y sea G_p la órbita de $p \Rightarrow \#G_p \leqslant \#G \Rightarrow$ Órbita finita. Procedemos ahora a identificar los elementos de G .

- Supongamos que $\exists T_v$, $v \neq 0$ traslación en G . Entonces el subgrupo generado por dicha traslación $\langle T_v \rangle \cong \mathbb{Z} < G$ donde llegamos a una contradicción puesto que G es finito. Tenemos entonces que G no contiene traslaciones. Consecuentemente no contiene simetrías deslizantes ya que estas son composición de simetrías axiales con traslaciones.
- Sean r_1, r_2 dos rotaciones y c_1, c_2 sus respectivos centros de rotación (tomamos dichos centros de rotación en el eje $y = 0$). Suponemos que $c_1 \neq c_2$ y consideramos el subgrupo $H = \langle r_1, r_2 \rangle$. Tomamos $\pi_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < a, c_1 = (a, 0)\}$ y $\pi_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > a', c_2 = (a', 0)\}$. Sabemos que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $c_3 = r_2^{n_1}(c_1) \in \pi_2$. Luego $d(c_2, c_3) = d(c_2, c_1)$ y $d(c_3, c_1) > d(c_2, c_1)$. También $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $c_4 = r_1^{n_2}(c_3) \in \pi_2$ con $d(c_2, c_4) > d(c_1, c_3) > d(c_1, c_2)$. Observamos que estamos generando una sucesión creciente de centros. Luego $\exists \{C_n\}_n \rightarrow \infty \subseteq H_{c_2}$ tal que $\{d(c_1, c_n)\}_n \rightarrow \infty$. Esto implica que la órbita de H_{c_2} sea infinita, $H_{c_2} = \infty$. Con lo que llegamos a una contradicción puesto que $\#G$ es finito. Por tanto si existen rotaciones tienen el mismo centro. (Vease justificación en [51])
- Si G contiene dos simetrías axiales, estamos ante dos casos. Un caso es que los ejes de simetría se interesecan en un punto p . En este caso tenemos una rotación con centro p (vease justificación en [20], [35]). Pero como hemos visto en el punto anterior, no puede haber dos centros de rotación. Consecuentemente todas las simetrías en G tienen que intersecarse en un único punto p . En el otro caso que nos encontramos, es que los ejes de simetría sean paralelos. Estamos ante una traslación (vease justificación en [20],[35]) en contradicción con el punto primero. Por tanto G no puede contener dos simetrías distintas con ejes paralelos.

Vistos estos puntos. Si $G \leqslant \text{Punt}(\mathbb{R}^2)$ contiene únicamente rotaciones, tenemos que es isomorfo a un grupo cíclico C_n según el orden de rotación. Si además contiene simetrías G es isomorfo a el grupo diédrico D_n \square
(Ver [34], [8], [4], [51])

Veamos una definición rigurosa de estos grupos:

Definición 2.2.2. Llamamos *Grupos de Rosáceas* a los subgrupos finitos del grupo de isometrías.

$$R \subset \text{Punt}(\mathbb{R}^2)$$

Observaciones:

- Por el Teorema de Leonardo vemos que todo *Grupo de Rosáceas* es C_n o D_n para algún n . Por tanto, podemos afirmar que existen infinitos *Grupos de Rosáceas*. Esto implica que todo *Grupo de Rosáceas* tiene al menos un punto fijo.

(Ver [6], [15])

2.3. Grupos de Frisos

En esta sección hablaremos de los llamados *Grupos de Frisos*. Estos grupos son los que generan lo que más adelante llamaremos *Frisos*, unos patrones de gran importancia artística y arquitectónica a lo largo de la historia.

2.3.1. Definición y Propiedades

Definición 2.3.1. Un grupo de frisos es un subgrupo del grupo de Simetrías $F < \text{Sim}(\mathbb{R}^2)$ tal que admite un único subgrupo maximal de traslaciones, el cual tiene un único generador, $\langle T_v \rangle$. Luego

$$F \subset \text{Punt}(\mathbb{R}^2) \oplus T_v$$

o bien

$$\text{Sim}(\mathbb{R}^2) \cap F = \langle T_v \rangle$$

Como observación directa de la definición, tenemos que todo *grupo de friso* F deja invariante una recta l .

Puesto que los grupos de Frisos son un subgrupo del grupo de simetrías, podemos afirmar que los elementos de F están contenidos en $\text{Sim}(\mathbb{R}^2)$. Veamos entonces qué elementos generan dichos grupos.

Observaciones:

- **Rotaciones:** Existen únicamente rotaciones de ángulo π con centro en l . Por hipótesis todo *grupo de friso* deja invariante una recta l . Observamos que si tomamos una rotación r de ángulo $\theta \neq (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $r(l)$ es de la forma $r(l) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}(vx+p)+v$ por tanto $r(l) \cap l \neq l$
- **Simetrías:** Existen dos tipos de simetrías que dejan invariante la recta l . Una a la que llamaremos *simetría horizontal*, la cual tiene como eje

de simetría la propia recta l , y otra que llamaremos *simetría vertical*, la cual tiene como eje una recta s donde s es perpendicular a l . Si tomamos cualquier otra simetría con ejes distintos a s y l , al simetrizar cualquier punto de l , la imagen de este no pertenece a l en contradicción con la definición.

- **Simetrías con deslizamiento:** Una simetría con deslizamiento, es una simetría seguida de una traslación, luego como únicamente tenemos la traslación T_v . Tenemos una única simetría deslizante es la que tiene como eje de simetría l y traslación T_v .

(Ver [36], [6], [35], [4], [8], [20], [51])

Para poder trabajar con estos elementos de una manera práctica, vamos a dotarlos de una notación.

Id: Identidad.

T: traslación T_v .

r: rotación de orden 2.

sh: Simetría horizontal.

sv: Simetría vertical.

sd: Simetría deslizante.

Una vez dada una notación procedemos a identificar cuales son estos grupos. Veamos antes algunos resultados sobre los elementos notados.

Observación: $sd = sh \circ T$, $sh^2 = Id$, $sv^2 = Id$.

Proposición 2.3.2. : $T \circ sv = sv \circ T^{-1}$

Dem: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + c, y)$ y $sv(x, y) = (-x, y)$, luego

$$T(sv(x, y)) = T((-x, y)) = (-x + c, y)$$

$$sv(T^{-1}(x, y)) = sv(x - c, y) = (-x + c, y)$$

□(Ver [35], [20])

Proposición 2.3.3. : $T \circ sh = sh \circ T$

Dem: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + c, y)$ y $sh(x, y) = (x, -y)$, luego

$$T(sh(x, y)) = T((x, -y)) = (x + c, -y)$$

$$sh(T(x, y)) = sh(x + c, y) = (x + c, -y).$$

□(Ver [35], [20])

Proposición 2.3.4. : $sv \circ sh = r$

Dem: Sea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(\pi) & \sin(\pi) \\ -\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $sh(x, y) = (x, -y)$, $sv(x, y) = (-x, y)$, luego

$$sv(sh(x, y)) = sv((x, -y)) = (-x, -y)$$

$$r((x, y)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-x, -y)$$

□(Ver [35], [20])

2.3.2. Identificación de los grupos

Veamos algunos ejemplos de *grupos de Frisos*. Nos ajustamos a una notación llamada *Fejes Tóth* la cual se nota de la siguiente manera: Reciben el nombre de F debido al nombre *Frieze*, los ornamentos del plano generados bajo la acción de estos grupos. Luego notamos F_j^i , donde j denota el mayor orden de rotación e i toma valores 1,2 o 3, 1 si contiene simetría horizontal, 2 si contiene simetría vertical y 3 si contiene simetría deslizante.(ver [52])

- $F_1 = \langle T \rangle = \{T^k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_1^1 = \langle T, sh \rangle = \{sh^m T^k : m \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_1^2 = \langle T, sv \rangle = \{sv^m T^k : m \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_1^3 = \langle sd \rangle = \{sd^k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_2 = \langle T, r \rangle = \{r^m T^k : m \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_2^1 = \langle T, sh, r \rangle = \{sh^m r^l T^k : m, l \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_2^2 = \langle sd, r \rangle = \{r^l sd^k : l \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$

Estos grupos, en ocasiones, están notados con la que llamamos *notación cristalográfica*. Esta la especificaremos cuando hablaremos de *grupos cristalográficos*. Para verlos de una manera mas intuitiva, veamos un ejemplo gráfico de cada uno de ellos:

El grupo F_1 se compone de una única traslación T en la dirección de la recta invariante l .



El grupo F_1^1 se compone de una simetría horizontal sh , seguida de una traslación T .



El grupo F_1^2 se compone de una simetría vertical sv , seguido de una traslación.



El grupo F_1^3 se compone de una simetría deslizante sd .



El grupo F_2 se compone de una rotación r , seguida de una traslación T .



El grupo F_2^1 se compone de una simetría horizontal sh seguida de una rotación r , seguida de una traslación T .



El grupo F_2^2 se compone de una rotación r seguida de una simetría deslizante sd .



(Ver [36], [6], [35], [4], [8], [20], [51], [15], [26])

El siguiente teorema nos determinará cuales son exactamente los *grupos de frisos*:

Teorema 2.3.5. *Si F es un grupo de frisos, es necesariamente uno de los nombrados anteriormente. Luego existen 7 y solo 7 grupos de frisos.*

Dem: Para la demostración del teorema consideramos $sh, sv, sd, r \in Sim(\mathbb{R}^2)$. Puesto que estos son los únicos elementos que pueden formar un *grupo de friso*, procedemos a ver todas los grupos que se generan con la combinación de estos. Observaremos que si es un *grupo de friso* es uno de los anteriores.

Nos restringimos a 4 elementos posibles ya que por definición, todo *grupo de friso* debe de contener a T . Por consiguiente el número de combinaciones posibles es el siguiente:

$$\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

- • $\langle T \rangle = F_1$.
- • $\langle T, sv \rangle = F_1^2$
 - $\langle T, sh \rangle = F_1^1$
 - $\langle sd \rangle = F_1^3$
 - $\langle T, r \rangle = F_2$
- • $sd \circ sv = ((T \circ sh) \circ sv) = T \circ r$, por tanto $\langle T, r \rangle = F_2$
 - $sd \circ sh = ((T \circ sh) \circ sh) = T$, por tanto $\langle T \rangle = F_1$
 - $\langle sd, r \rangle = F_2^2$
 - $sv \circ sh = r$, por tanto $\langle T, r \rangle = F_2$
 - $sv \circ r = (sv \circ (sv \circ sh)) = sh$, por tanto $\langle T, sh \rangle = F_1^1$
 - $sh \circ r = (sh \circ (sh \circ sv)) = sv$, por tanto $\langle T, sv \rangle = F_1^2$

- • $sd \circ sh \circ sv = ((T \circ sh) \circ sh \circ sv) = T \circ sv$, por tanto $\langle T, sv \rangle = F_1^2$
- $sd \circ sv \circ r = (T \circ sh) \circ sv \circ (sv \circ sh) = T$, por tanto $\langle T \rangle = F_1$
- $sd \circ sh \circ r = (T \circ sh) \circ sh \circ r = T \circ r$, por tanto $\langle T, r \rangle = F_2$
- $sv \circ sh \circ r = sv \circ sh \circ (sh \circ sv) = Id$, por tanto $\langle T \rangle = F_1$

- • $sd \circ sv \circ sh \circ r = sd \circ Id = sd$, por tanto $\langle sd \rangle = F_1^3$.

□(Ver [24])

2.4. Grupos Cristalográficos

En esta sección trabajaremos los *grupos cristalográficos*. Se trata de una serie de subgrupos del grupo de simetrías tales que contienen dos traslaciones independientes. Las teselaciones generadas por estos grupos han sido estudiadas a lo largo de la historia. Estos reciben el nombre de *cristalográficos* debido a que se trata de una restricción del estudio de la formación de los cristales en tres dimensiones al plano. En la formación de cristales en la naturaleza se observó que se siguen unos patrones, los cuales se les dota de unos grupos de simetría. En el desarrollo de este estudio, se observó, que sucedía, cuando se trasladaba al plano, observando que existían 17 grupos. Dichos grupos generan muchas de las teselaciones que observamos en la naturaleza, en tantas obras de arte y en construcciones arquitectónicas.

Definición 2.4.1. Llamamos grupo cristalográfico a los subgrupos del grupo de simetrías $W \subset Sim(\mathbb{R}^2)$ tales que contienen dos traslaciones independientes, es decir, $T_{\vec{u}}$ y $T_{\vec{v}}$, con \vec{u} y \vec{v} linealmente independientes y $\langle T_u, T_v \rangle$ es discreto.

$$W \subset Punt(\mathbb{R}^2) \oplus \langle T_u, T_v \rangle$$

esto es

$$Sim(\mathbb{R}^2) \cap W = \langle T_u, T_v \rangle = \{T_{au+bv} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$

Antes de entrar en el estudio de dichos grupos definimos el concepto de *región fundamental*. Llamamos *región fundamental* a la menor región del plano sobre la que actúa un grupo para generar una teselación.

2.4.1. Notación

Para identificar los *grupos cristalográficos* vamos a fijar una notación. Para ello usaremos la notación estándar, llamada *notación cristalográfica* basada

en la cristalografía y estandarizada por la Unión Internacional de Cristalografía. Esta se basa en expresar cada *grupo cristalográfico* con cuatro caracteres a_1, a_2, a_3, a_4 .

■ **a_1 :**

- Toma el valor p si la región fundamental es primitiva. Esto es, los dos ejes que forman las traslaciones coinciden con los lados de la región fundamental.
- Toma el valor c si la región fundamental es centrada. Esto es si alguno de los dos ejes que forman las traslaciones atraviesa la región fundamental.

■ **a_2 :** Indica el mayor orden de rotación de las rotaciones que contiene el grupo , 1(ausencia de rotaciones), 2, 3, 4 o 6

■ **a_3 :** Indica ejes de simetría perpendiculares al eje de la región fundamental:

- Toma el valor m si tiene un eje de simetría perpendicular a un lado de la región fundamental.
- Toma el valor g si tiene un eje de simetría con deslizamiento perpendicular a un lado de la región fundamental.
- Toma el valor 1 en el resto de los casos.

■ **a_4 :** Indica ejes de simetría con ángulo θ respecto los lados de la región fundamental. El orden de rotación n debe ir relacionado con θ de la siguiente manera: $[n, \theta]=[2, \frac{\pi}{2}], [4, \frac{\pi}{4}]$ o bien $[3 \text{ o } 6, \frac{\pi}{6}]$

- Toma el valor m si contiene simetrías axiales cumpliendo la relación $[n, \theta]$
- Toma el valor g si contiene simetrías deslizantes cumpliendo la relación $[n, \theta]$
- Toma el valor 1 en el resto de los casos.

(Ver [52], [53])

Notamos que en algunos casos se suprimen los términos de la notación cuando proporcionan información redundante. A esta se le llama notación cristalográfica reducida.

2.4.2. Identificación de los grupos

Para identificar los elementos que componen estos *grupos cristalográficos*, vamos a ver un teorema de gran importancia en el estudio de dichos grupos. Este es, el *teorema de restricción cristalográfica* el cual nos determina el orden de las simetrías rotacionales que caracterizan estos grupos.

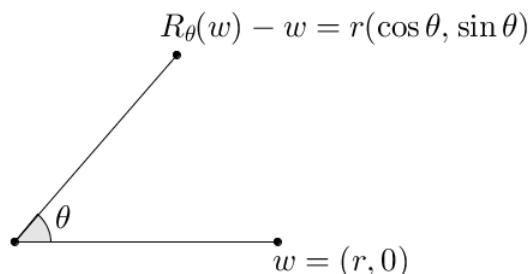
Teorema 2.4.2 (Restricción Cristalográfica). *Sea W un grupo cristalográfico, las rotaciones contenidas en W son de orden 2, 3, 4 o 6.*

Dem: Sea $w \in \langle T_u, T_v \rangle$ minimal con $\|w\| = r$, $r > 0$. Tomamos el conjunto

$$S = \{w \in \langle T_u, T_v \rangle : \|w\| = r\}$$

Tomamos $\overline{B}(0, r)$ como la bola de radio r y centro 0. Tenemos que S es discreto en $\overline{B}(0, r)$. Luego aplicamos el *teorema de Bolzano-Weierstrass*, el cual nos dice que todo conjunto discreto en un compacto es finito. Por tanto, puesto que $\langle T_u, T_v \rangle$ es discreto en $\overline{B}(0, r)$, por el *teorema de Bolzano-Weierstrass*, S es finito. Además al hacer actuar el grupo puntual de cualquier W , un *grupo cristalográfico*, en el conjunto S , deja a este invariante. Por consiguiente obtenemos que las rotaciones de W tienen orden finito.

Veamos ahora el orden de dichas rotaciones. Tomamos R_θ una rotación minimal, luego $\theta \in [0, \pi]$. Tenemos que $R_\theta(w) - w \in \langle T_u, T_v \rangle$, con $\|R_\theta(w) - w\| \geq r$.



Entonces $\|R_\theta(w) - w\| = \|(r(\cos \theta - 1), r \sin \theta)\| = r\sqrt{2(1 - \cos \theta)} \geq r \Rightarrow 1 - \cos \theta \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \theta \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi]$. Pero θ debe verificar $\theta = \frac{2\pi}{n}$ luego $\theta \in [\frac{\pi}{3}, \pi] \Leftrightarrow n = 2, 3, 4, 5, 6$.

Procedemos ahora a rechazar el caso $n = 5$:

Sea $R_{\frac{2\pi}{5}}$ una rotación de orden 5. Si tomamos $R_{\frac{2\pi}{5}}^2(w) + w \in \langle T_u, T_v \rangle$, tenemos que: $\|R_{\frac{2\pi}{5}}^2(w) + w\| = r\sqrt{(\cos \frac{2\pi}{5} - 1)^2 + \sin^2 \frac{2\pi}{5}} \geq r \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{5} - 1 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{2\pi}{5} \geq \frac{3}{2}$ con lo que llegamos a una contradicción. Lo que descarta el caso

$$\theta = \frac{2\pi}{5}.$$

□ (Ver [8], [51])

Procedemos ahora a describir cada uno de los 17 *grupos cristalográficos*. Para ello damos un gráfico conceptual de la región fundamental. La notación usada se basa en la imagen de una elipse, un triángulo, un cuadrado o un hexágono para denotar orden de rotación 2, 3, 4 y 6 respectivamente. Nótese que las rotaciones de orden 4 tienen contenidas rotaciones de orden 2 y las rotaciones de orden 6 tienen contenidas rotaciones de orden 2 y 3. Par notar las simetrías, se le asigna un segmento rojo a los ejes de simetría de una simetría axial, y un segmento rojo discontinuo para los ejes de simetrías deslizantes. Los segmentos negros delimitan la región fundamental.

- **p1 (p111)**: Es el grupo generado por dos traslaciones independientes, luego podemos notarlo como $p1 = \langle T_u, T_v \rangle$.



- **pm (p1m1)**: Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes y simetrías axiales con ejes paralelos al eje de una de estas traslaciones. Luego podemos notarlo como $pm = \langle T_u, T_v, sh \rangle$, siendo sh dicha simetría.

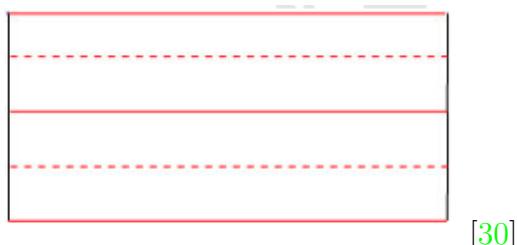


- **pg (p1g1)**: Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes y simetrías deslizantes con ejes paralelos al eje de una de estas traslaciones. Luego podemos notarlo como $pg = \langle T_u, sd \rangle$, siendo sd dicha simetría.



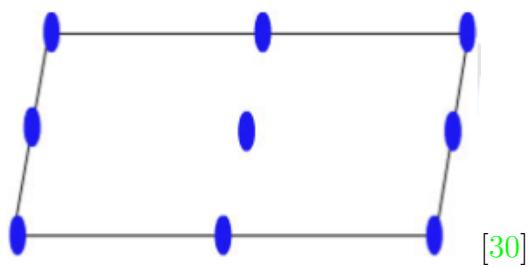
[30]

- **cm (c1m1)**: Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales y simetrías deslizantes, con ejes paralelos al eje de una de estas traslaciones. Luego podemos notarlo como $cm = \langle T_u, T_v, sh, sd \rangle$, siendo sh, sd dichas simetrías.



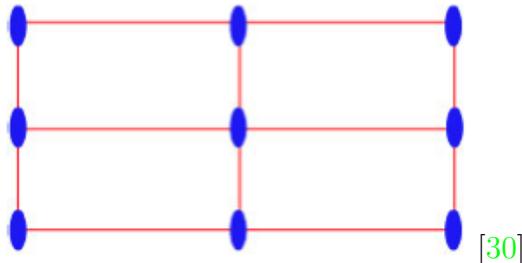
[30]

- **p2 (p211)**: Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes y rotaciones de orden dos. Luego podemos notarlo como $p2 = \langle T_u, T_v, r_2 \rangle$, siendo r_2 dicha rotación.

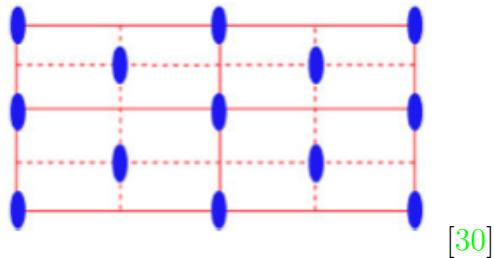


[30]

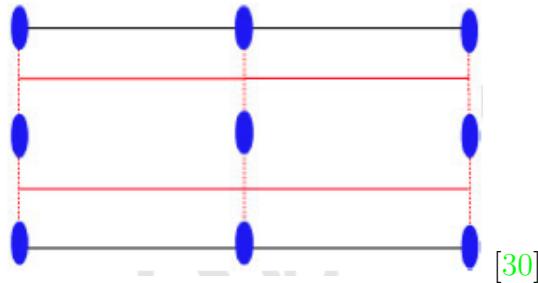
- **pmm (p2mm)**: Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales y rotaciones de orden 2. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales unas con eje l en la dirección de T_u y otras con eje l' en la dirección de T_v , las cuales notamos como sl y sl' respectivamente. Las rotaciones de orden 2, contienen el centro de giro en la intersección de l y l' , las cuales notamos r_2 . Por tanto notamos el grupo como $p2mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', r_2 \rangle$



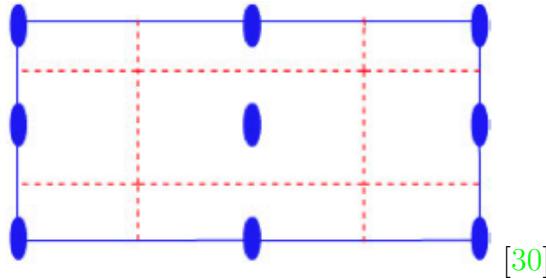
- **cmm (c2mm):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes y rotaciones de orden 2. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales y deslizantes, con ejes l en la dirección de T_u y con ejes l' en la dirección de T_v , las cuales notamos como sl y sl' para las simetrías axiales y sdl y sdl' para las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 2, contienen el centro de giro o bien en la intersección de los ejes no paralelos de las simetrías axiales, o bien en la intersección de los ejes no paralelos de las simetrías deslizantes. Estas las notamos como r_2 . Por tanto notamos el grupo como $c2mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', sdl, sdl', r_2 \rangle$



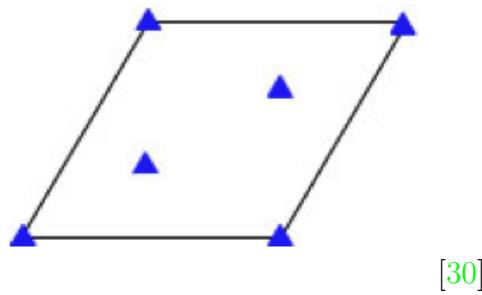
- **pmg (p2mg):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes y rotaciones de orden 2. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales con ejes l en la dirección de T_u y simetrías deslizantes con ejes l' en la dirección de T_v . Notamos como sl las simetrías axiales y sdl' las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 2, contienen el centro de giro en los ejes de las simetrías y en el centro de la región del plano sobre la que actúan. Estas las notamos como r_2 . Por tanto notamos el grupo como $p2mg = \langle T_u, T_v, sl, sdl', r_2 \rangle$



- **pgg (p2gg):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías deslizantes y rotaciones de orden 2. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías deslizantes unas con eje l en la dirección de T_u y otras con eje l' en la dirección de T_v , las cuales notamos como sdl y sdl' respectivamente. Las rotaciones de orden 2, contienen el centro de giro en los ejes que delimitan la región del plano sobre la que actúan y en el centro de esta, las cuales notamos r_2 . Por tanto notamos el grupo como $p2gg = \langle T_u, T_v, sdl, sdl', r_2 \rangle$

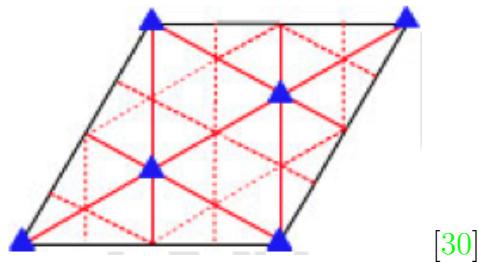


- **p3 (p311):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes y rotaciones de orden tres. Luego podemos notarlo como $p3 = \langle T_u, T_v, r_3 \rangle$, siendo r_3 dicha rotación.

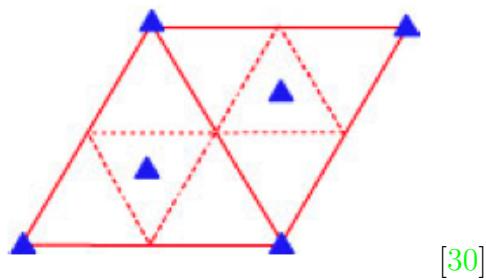


- **p3m1:** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes y rotaciones de orden 3. Notamos

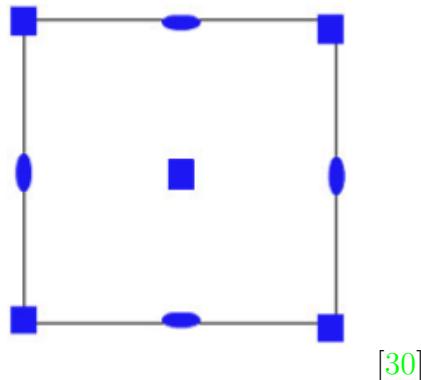
T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales y deslizantes, con ejes l, l', l'' donde l lleva la dirección de $T_u \circ T_v$, ademas estos ejes forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ dos a dos. Notamos sl, sl' y sl'' a las simetrías axiales y sdl, sdl' y sdl'' a las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 3, contienen el centro de giro en la intersección de los ejes de las simetrías axiales. Estas las notamos como r_3 . Por tanto notamos el grupo como $p3m1 = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sdl, sdl', sdl'', r_3 \rangle$



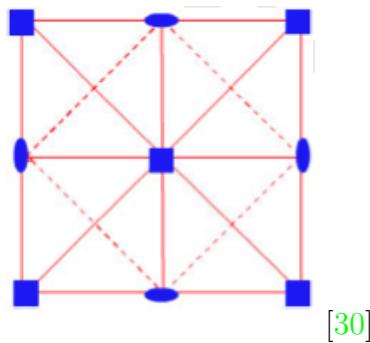
- **p31m:** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes y rotaciones de orden 3. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales y deslizantes, con ejes l, l', l'' donde l lleva la dirección de T_u , l' la dirección de T_v y l'' forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con l y l'' . Notamos sl, sl' y sl'' a las simetrías axiales y sdl, sdl' y sdl'' a las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 3, contienen el centro de giro en la intersección de los ejes de las simetrías axiales y en el centro de la región que delimitan las simetrías deslizantes. Estas las notamos como r_3 . Por tanto notamos el grupo como $p31m = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sdl, sdl', sdl'', r_3 \rangle$



- **p4 (p411):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes y rotaciones de orden dos y cuatro. Luego podemos notarlo como $p4 = \langle T_u, T_v, r_2, r_4 \rangle$, siendo r_2, r_4 las rotaciones de orden dos y orden 4 respectivamente.

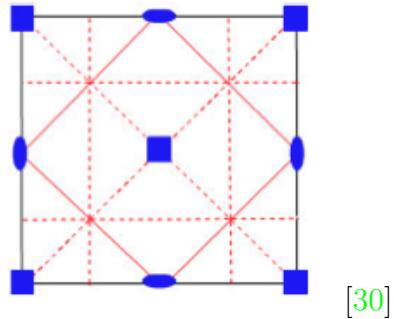


- **p4m (p4mm):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes, rotaciones de orden 2 y rotaciones de orden 4. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales y deslizantes, con ejes l, l', l'', l''' , donde l lleva la dirección de T_u , l' la dirección de T_v , l'' la dirección de $T_u \circ T_v$ y l''' la dirección de $T_u \circ T_v^{-1}$. Notamos sl, sl', sl'' y sl''' a las simetrías axiales y sdl'' y sdl''' a las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 2, contienen el centro de giro en la intersección de los ejes de las simetrías deslizantes. Mientras que las rotaciones de orden 4, contienen el centro de giro en la intersección de los ejes de las simetrías axiales. Por tanto notamos el grupo como $p4mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sl''', sdl'', sdl''', r_2, r_4 \rangle$, siendo r_2, r_4 las rotaciones de orden dos y orden 4 respectivamente.

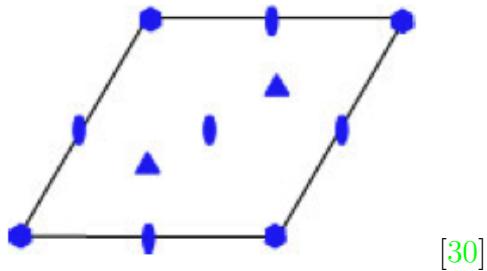


- **p4g (p4gg):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes, rotaciones de orden 2 y rotaciones de orden 4. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales y deslizantes con ejes l, l', l'', l''' , donde l lleva la dirección de T_u , l' la dirección de T_v , l'' la dirección de $T_u \circ T_v$ y l''' la dirección de $T_u \circ T_v^{-1}$. Notamos sl'' y sl''' a las simetrías axiales y sdl, sdl', sdl'' y sdl''' a las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 2, contienen

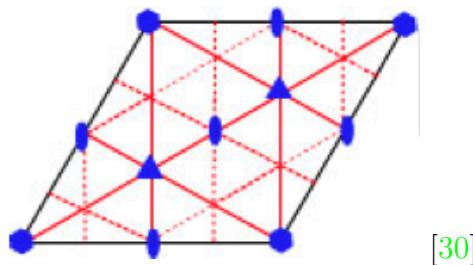
el centro de giro en la intersección de los ejes de las simetrías axiales. Mientras que las rotaciones de orden 4, contienen el centro de giro en los ejes de las simetrías deslizantes con ejes l'' y l''' . Por tanto notamos el grupo como $p4mm = \langle T_u, T_v, sl'', sl''', sdl, sdl', sdl'', sdl''', r_2, r_4 \rangle$, siendo r_2, r_4 las rotaciones de orden 2 y 4 respectivamente.



- **p6 (p611):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes y rotaciones de orden 2, 3 y 6. Luego podemos notarlo como $p6 = \langle T_u, T_v, r_2, r_3, r_6 \rangle$, siendo r_2, r_3 y r_6 las rotaciones de orden 2, 3 y 6 respectivamente.



- **p6m (p6mm):** Es el grupo que contiene dos traslaciones independientes, simetrías axiales, simetrías deslizantes y rotaciones de orden 2, 3 y 6. Notamos T_u y T_v a las dos traslaciones. En este caso existen simetrías axiales y deslizantes, con ejes l, l', l'' donde l lleva la dirección de $T_u \circ T_v$, ademas estos ejes forman un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ dos a dos. Notamos sl, sl' y sl'' a las simetrías axiales y sdl, sdl' y sdl'' a las simetrías deslizantes. Las rotaciones de orden 3, contienen el centro de giro en la intersección de los ejes de las simetrías axiales. Por tanto notamos el grupo como $p6mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sdl, sdl', sdl'', r_3 \rangle$, siendo r_2, r_3 y r_6 las rotaciones de orden 2, 3 y 6 respectivamente.



Una vez identificados los grupos cristalográficos, vemos el teorema de Fedorov. El cual en 1891, fué demostrado por el propio Federov. Este trata de ver que existen únicamente 17 grupos cristalográficos y lo enunciamos de la siguiente manera:

Teorema 2.4.3 (Fedorov). *Si G es un grupo cristalográfico, es necesariamente uno de los nombrados anteriormente. Luego existen 17 y solo 17 grupos cristalográficos del plano.*

(Ver [32], [15], [34], [27], [8], [20], [51], [26], [4], [1])

Parte III

Teselaciones

En esta parte trataremos las teselaciones en el plano Euclídeo. Estudiaremos como llenar el plano con la geometría, a través de lo que llamaremos teselas. Esto ha sido motivo de estudio durante muchos años. Desde tiempos antes de Cristo, se han intentado decorar paredes, aceras, edificios, telas... Unas veces con un sentido artístico o arquitectónico, y otras en un sentido de optimización de espacio, materiales... Esto ha sido lo que ha motivado el estudio de estas, las teselaciones.

Haremos un estudio de clasificación, identificación, patrones, autores... Puesto que es un campo muy amplio, trabajaremos en adquirir una base, la cual nos de pie para estudiar todo tipo de casos específicos. Las teselaciones pueden ser generadas por la acción de un grupo sobre las teselas. Hemos estudiado previamente los grupos ornamentales. También son generadas por patrones geométricos, observados en la naturaleza y extraídos de la geometría matemática, estas las llamaremos periódicas. En otros casos veremos como a pesar de la ausencia de patrones, haciendo una buena selección de las teselas podemos teselar el plano, serán las llamadas aperiódicas. Observaremos como dandole una poco de matemáticas al arte se genera una gran belleza.

Empecemos por una definición de teselación.

Definición 2.4.4. Llamamos teselación (o mosaico) del plano, a una colección de compactos conexos $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con interior no vacío, llamadas teselas, tales que:

- $\partial A_i \cong \mathbb{S}^1, \forall i \in \mathbb{N}$
- $\mathring{A}_j \bigcap_{i \neq j} \mathring{A}_i = \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}$
- $\bigcup_i A_i = \mathbb{R}^2$

(Ver [20], [15]).

Capítulo 3

Teselaciones Periódicas

En este capítulo, estudiaremos un tipo de teselaciones que llamaremos periódicas. Estas fueron las primeras en estudiarse, debido a que intuitivamente, tan solo mirando la naturaleza, podemos observarlas. La naturaleza está llena de patrones que se repiten, donde muchos de estos casos intuyen a la construcción de ciertas teselaciones.

El hecho de que estas teselaciones se generen a través de patrones nos intuye a que podemos encontrar un grupo que las genere. En el caso de las teselaciones periódicas. Hemos estudiado los *grupos cristalográficos* y los *grupos de frisos*, que serán con los que trabajaremos en este capítulo. Estos grupos son los generados por el grupo de isometrías, los cuales son los que nos permiten hacer patrones rígidos. Contienen un único subgrupo finito de traslaciones. Esto es, según si nos movemos a través de una recta o en todo el plano. Por tanto haremos una clasificación de estas, a través de los resultados que se han ido generando a lo largo de la historia.

Demos una definición formal de teselación periódica:

Definición 3.0.5. Las teselaciones periódicas son las generadas a través de la acción de un grupo cristalográfico o un grupo de friso sobre una tesela. Consecuentemente están generadas por teselas idénticas.

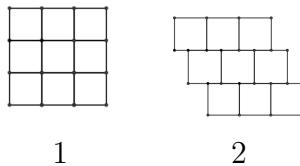
Las teselaciones periódicas las clasificaremos según las teselas que las generan. Si están formadas por polígonos regulares o bien si son irregulares. (Ver [20], [15], [29]).

3.1. Teselaciones generadas por polígonos regulares

Haremos un estudio de teselaciones generadas por polígonos regulares convexos. A los lados los llamaremos *aristas*. A cada uno de estos polígonos regulares los llamaremos $n - \text{gono}$, en función de n , numero de lados. Una observación directa es que $n \geq 3$, por propia definición. Estudiaremos lo que llamaremos teselaciones *regulares* y *semirregulares*, también llamadas *Arquimedeanas*.

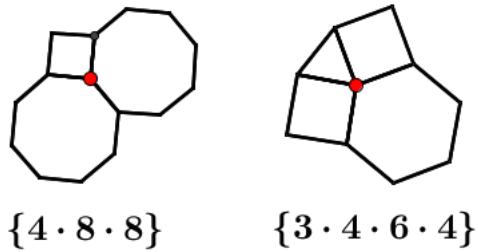
Para caracterizar bien las teselas que forman estas teselaciones, definimos el concepto de vértice. Un vértice es el punto de intersección de las aristas de los polígonos regulares de n_i lados que se intersecan.

Lo que caracteriza a estas teselaciones es lo que notaremos *de lado a lado*. Esto es, que si dos $n_i - \text{gonos}$ se intersecan, la intersección de estos es o bien en un vértice o bien en una arista. Esto implica que las aristas de dos $n_i - \text{gonos}$ que se intersecan son de la misma longitud. Veamos este concepto de una manera mas gráfica:

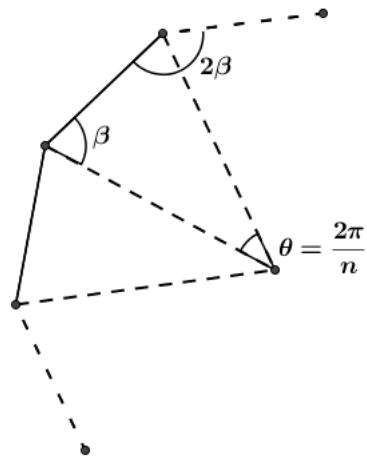


La figura 1 cumple con la definición *de lado a lado*, cosa que no ocurre en la figura 2

Las teselas de estas teselaciones están conformadas por una composición de polígonos regulares de n_i lados con $i = 1, \dots, k$ que se intersecan en un vértice. Luego notamos un vértice como la expresión de los $n_i - \text{gonos}$ que intersecan en el. Esto es, que cada vértice lo escribiremos como $\{n_1 \cdot n_2 \cdots n_k\}$, en la notación usual. En el caso particular en que $n_r = n_m$, para algún r y m podemos escribir $n_r \cdot n_m$ como n_r^2 . Cada tesela esta compuesta de k $n_i - \text{gonos}$ que intersecan en un único vértice, por tanto definimos una tesela como el vértice que contiene. Veamoslo en un par de ejemplos.



Caracterizamos ahora el ángulo interior de cada $n_i - gono$. Observamos la siguiente imagen:



Tenemos la relación $\beta + \beta + \theta = \pi \Rightarrow 2\beta = \pi - \frac{2\pi}{n} = \pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$. Por tanto el ángulo interior de un n es

$$\pi \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Hemos notado que una tesela la definimos como el vértice que contiene, por tanto si los $n_i - gono$ s que se intersecan en dicho vértice tienen ángulo interior $\pi \left(1 - \frac{2}{n_i}\right)$, para $i = 1, 2, \dots, k$ se verifica la relación:

$$2\pi = \sum_{i=1}^k \pi \left(1 - \frac{2}{n_i}\right)$$

Notamos que esta relación se verifica bajo la definición la cual hemos llamado *de lado a lado*.

(Ver [20], [15], [28], [9], [25], [5]).

3.1.1. Teselaciones Regulares

Definición 3.1.1. Una teselación regular, es una teselación periódica generada por teselas compuestas por polígonos regulares de n lados con mismo n . Esto es, con polígonos regulares idénticos.

Veamos ahora que existen únicamente tres tipos de teselaciones regulares. Caracterizamos estas con el siguiente resultado.

Teorema 3.1.2. *Las únicas teselaciones regulares son las generadas por las teselas $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$, $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$ y $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$.*

Dem: Por la ecuación (1) tenemos que

$$2 = \sum_{i=1}^k 1 - \frac{2}{n_i}$$

Pero al ser los n_i iguales la ecuación se nos reduce a

$$2 = k \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

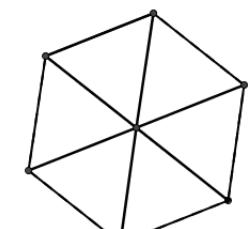
Obteniendo $k = \frac{2n}{n-2}$ y $n = \frac{2k}{k-2}$ pertenecientes a \mathbb{Z} .

- Puesto que $0 < n \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \geq 3$
- Puesto que $3 \leq n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = \frac{2k}{k-2} \geq 3 \Rightarrow 2k \geq 3k - 6 \Rightarrow 6 \geq k$

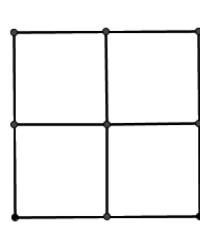
De lo que deducimos que los únicos valores de k posibles son $k = 3, 4, 5, 6$ y respectivamente $n = 6, 4, \frac{10}{3}, 3$, pero por la hipótesis de que $n \in \mathbb{Z}$ descartamos el caso $k = 5$. Consecuentemente tenemos que las únicas teselas posibles son 3^6 , 4^4 y 6^3 . \square

(Ver [20], [5])

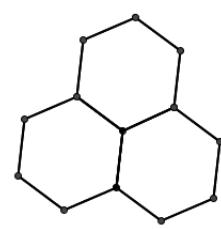
Veamos estas teselas de una forma gráfica:



$\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\}$



$\{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4\}$

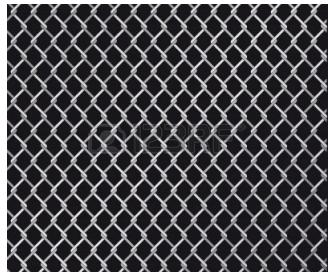


$\{6 \cdot 6 \cdot 6\}$

Resaltamos a lo largo del estudio que este tipo de teselaciones las encontramos en nuestra naturaleza y entorno. Veamos algunos ejemplos de teselaciones generadas por estas teselas:



3^6 [55]



4^4 [56]



6^3 [54]

3.1.2. Teselaciones semirregulares o Arquímedeas

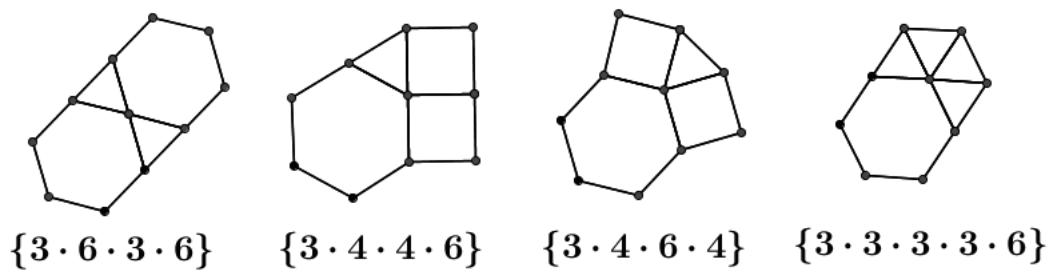
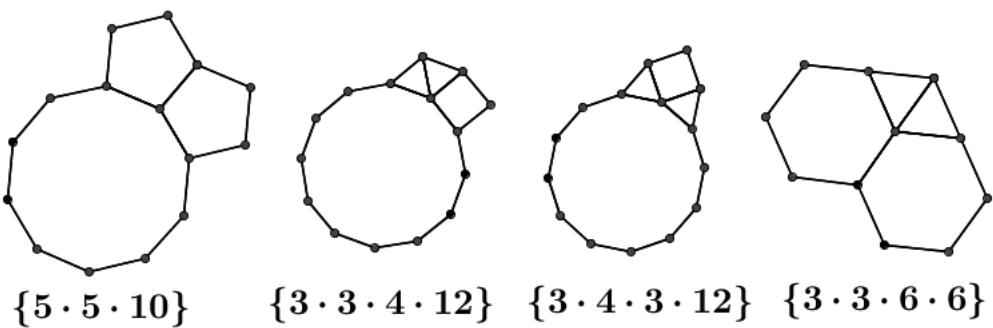
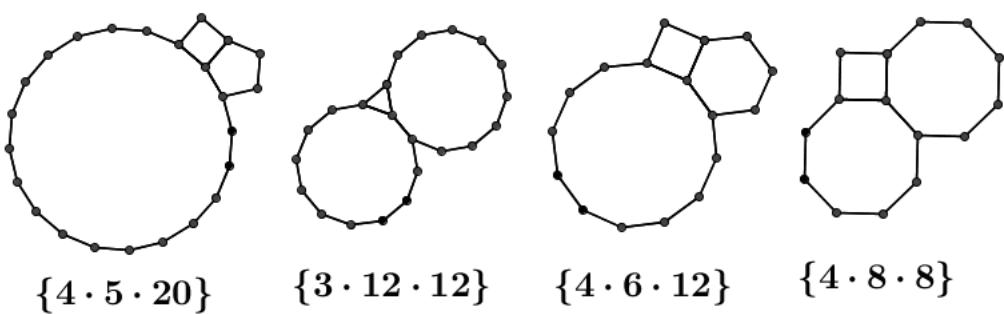
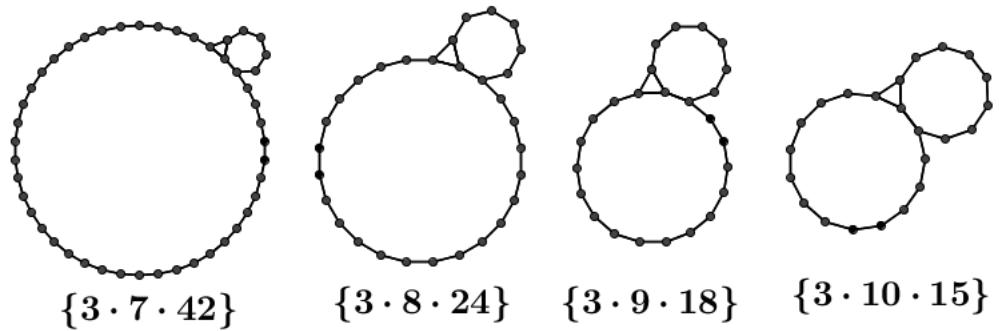
Definición 3.1.3. Una teselación semirregular es una teselación (periódica) generada por teselas compuestas por polígonos regulares de n_i lados para $i = 1, \dots, k$, con al menos n_i y n_j distintos para algún i, j .

El primer matemático en estudiar teselaciones semirregulares fue Johannes Képler en 1619. Publicadas en su trabajo *Harmonice Mundi*, aquí fue donde se hizo la primera clasificación de teselaciones semirregulares. Képler observó que existían solo ocho teselaciones semirregulares que llenaran el plano. Años mas tarde se usaron estos resultados para el estudio de casos particulares y desarrollo de teorías en teselaciones. Un resultado muy importante debido a que proporciona una reducción importante del tipo de teselas a estudiar a la hora de crear una teselación.

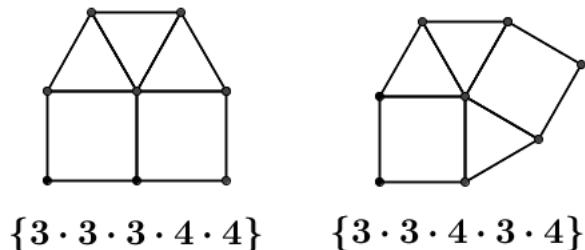
Hemos deducido anteriormente que las teselas deben cumplir la ecuación:

$$2 = \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{2}{n_i}\right)$$

Tenemos que las únicas soluciones posibles de esta ecuación son las siguientes, representadas también gráficamente.



3.1. TESELACIONES GENERADAS POR POLÍGONOS REGULARES 51

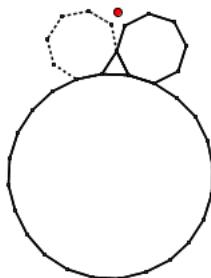


Notamos que las tres teselas regulares vistas anteriormente también cumplen con la ecuación, pero no con la definición de tesela semiregular. No todas estas cumplen con las hipótesis de las teselaciones a estudiar. Las clasificamos a través del siguiente resultado. Como hemos dicho anteriormente formulado por Képler, hecho por el cual se le atribuye su nombre. (Ver [20], [15], [9], [25], [5]).

Teorema 3.1.4. *Képler Las únicas teselaciones semirregulares posibles son con las siguientes teselas:*

$$\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4\}, \{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6\}, \{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4\}, \{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4\}, \{3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6\}, \\ \{3 \cdot 12 \cdot 12\}, \{4 \cdot 6 \cdot 12\}, \{4 \cdot 8 \cdot 8\}$$

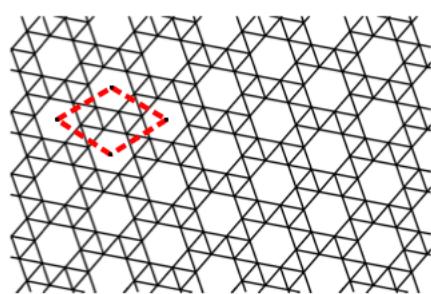
Puesto que anteriormente hemos notado las 18 teselas posibles. La demostración de este resultado se reduce a comprobar si cada una de estas teselas rellena el plano completamente. Por ejemplo, cuando encajamos dos teselas de una de las siguientes formas $\{3 \cdot 7 \cdot 42\}$, $\{3 \cdot 8 \cdot 24\}$, $\{3 \cdot 9 \cdot 18\}$, $\{5 \cdot 5 \cdot 10\}$, $\{4 \cdot 5 \cdot 20\}$ y $\{3 \cdot 10 \cdot 15\}$ obtenemos huecos con ángulos tal que no existe ningún polígono regular con n lados que lo rellene. Veamos un ejemplo gráfico:



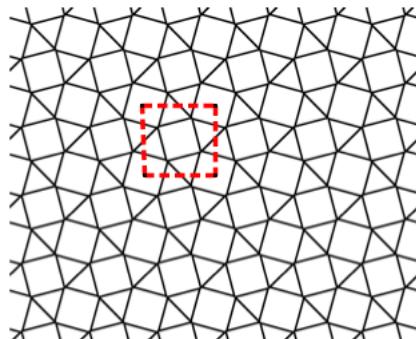
Por tanto hemos descartado 6 posibilidades. Por otra parte las teselas $\{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 12\}$, $\{3 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 6\}$, $\{3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 12\}$ y $\{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 12\}$ cuando encajamos dos,

se produce un ángulo que necesita de un polígono regular que no corresponde con ninguno de los que conforman la tesela. Luego no es posible hacer la teselación. Dicho esto, dejamos como un bonito ejercicio para el lector la comprobación de los 18 casos. (Ver [20], [15], [25], [5]).

Las teselaciones semirregulares posibles son las siguientes \mathcal{A}_i , $i = 1, ., 8$:

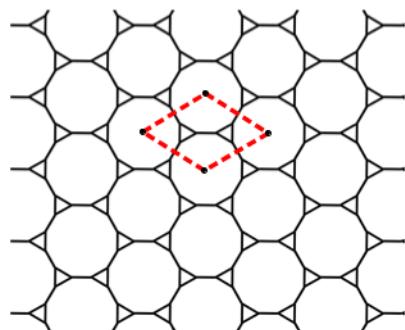


$$\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6\}$$

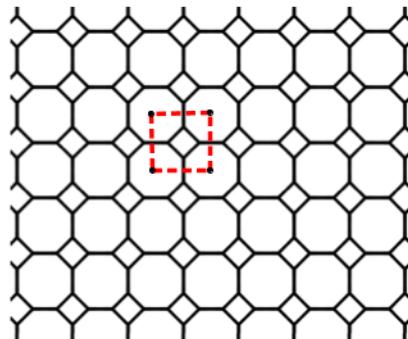


$$\{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4\}$$

[20]

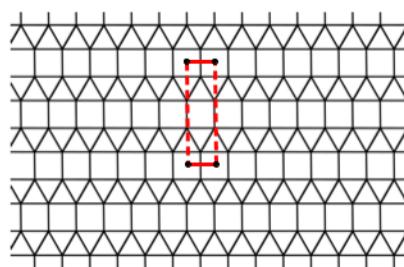


$$\{3 \cdot 12 \cdot 12\}$$

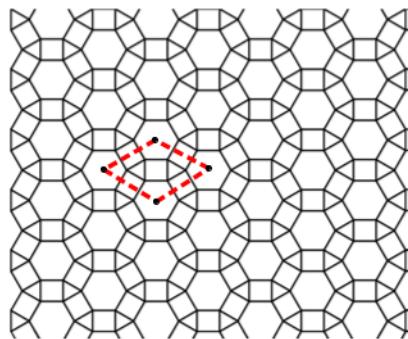


$$\{3 \cdot 8 \cdot 8\}$$

[20]

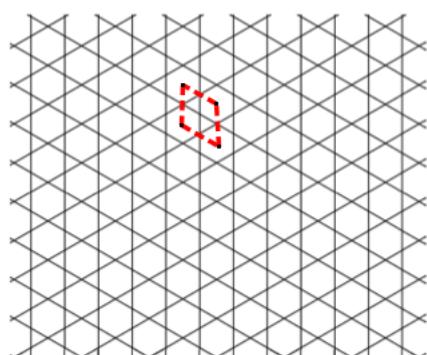


$$\boxed{\{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4\}}$$

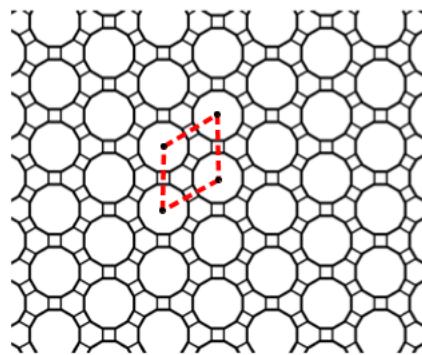


$$\{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4\}$$

[20]



$\{3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6\}$



$\{4 \cdot 6 \cdot 12\}$

[20]

Notamos que hemos marcado con líneas discontinuas en color rojo, la región fundamental que genera cada ejemplo a partir del grupo de simetría. Esto nos permite identificar el *grupo cristalográfico* que lo genera, quedando así completamente determinado el estudio de teselaciones semirregulares. A continuación damos la lista de dichos grupos cristalográficos correspondientes a cada teselación.

- $\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4\}$ está generada por el grupo $c2mm$.
- $\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6\}$ está generada por el grupo $p6$.
- $\{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4\}$ está generada por el grupo $p4gm$.
- $\{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4\}$ está generada por el grupo $p6mm$.
- $\{3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6\}$ está generada por el grupo $p6mm$.
- $\{3 \cdot 12 \cdot 12\}$ está generada por el grupo $p6mm$.
- $\{4 \cdot 8 \cdot 8\}$ está generada por el grupo $p4mm$.

(Ver [20], [29])

3.2. Teselaciones irregulares

En esta sección estudiamos lo que llamamos *teselaciones irregulares*. Irregulares debido a que las teselas no tienen ninguna restricción de forma, únicamente que rellenen el plano al hacer actuar un *grupo cristalográfico* sobre la región fundamental. Demos una definición de estas.

Definición 3.2.1. Llamamos teselación irregular a aquella que no corresponde con la definición de teselación regular y teselación semiregular. Esto es, que si las teselas son polígonos regulares, la teselación no contiene la propiedad de *de lado a lado*.

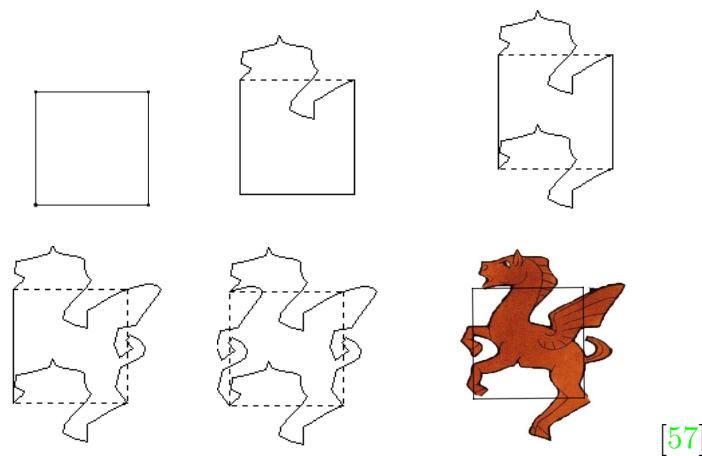
Vamos a Identificar las teselas de este tipo de teselaciones, también como es la construcción de estas.

En un primer caso estudiamos las teselas con frontera completamente irregular. Esto es, que la frontera no es un polígono regular. Al tratar de una teselación periódica, debemos de poder teselar el plano. Por esta razón y según el estudio desarrollado ahora, este tipo de teselas las podemos generar haciendo una deformación de una tesela regular, semiregular o bien de una región fundamental de uno de los grupos cristalográficos. A pesar de esto, se suelen usar teselas sencillas para变形, puesto que se hace complicado trabajar con teselas complejas. También hay otros tipos de teselaciones irregulares partiendo de teselas que no hemos estudiado, como por ejemplo las estrelladas.

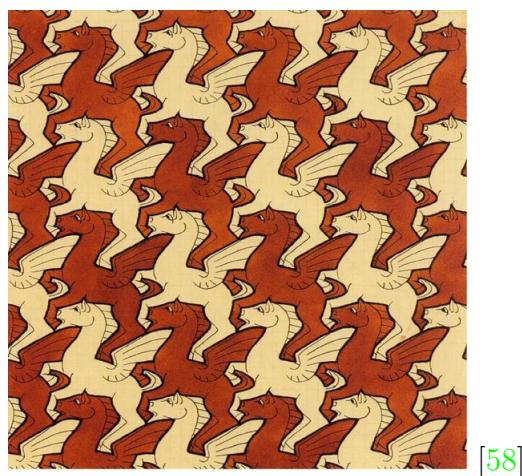
Fijándonos en las que hemos estudiado, la deformación se hace de una forma simétrica. Esto es, trazamos una curva en un lado de nuestra tesela, tomamos otra curva idéntica y le aplicamos o bien una rotación o bien una reflexión. Esta la colocamos en el que llamamos *lado congruente* del lado que contiene la primera curva. Definimos *lados congruentes* a los lados que se identifican en la unión de dos teselas. Esto es, el lado donde intersecan dos teselas idénticas. La transformación geométrica que se le aplica a la curva se hace en función del grupo que vaya a actuar posteriormente para generar la teselación.

(Ver [15] [20] [29] [26])

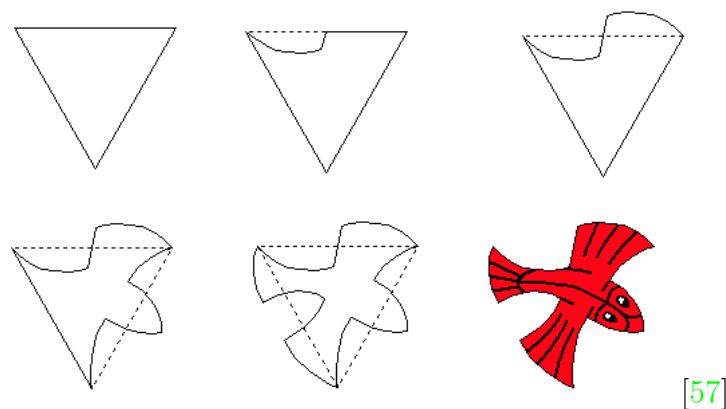
Veamos unos ejemplos gráficos para entender esto de una manera mas intuitiva. Veamoslo en la construcción de una teselación del dibujante holandés M. C. Escher. Primero un ejemplo tomando curvas sin transformaciones geométricas.



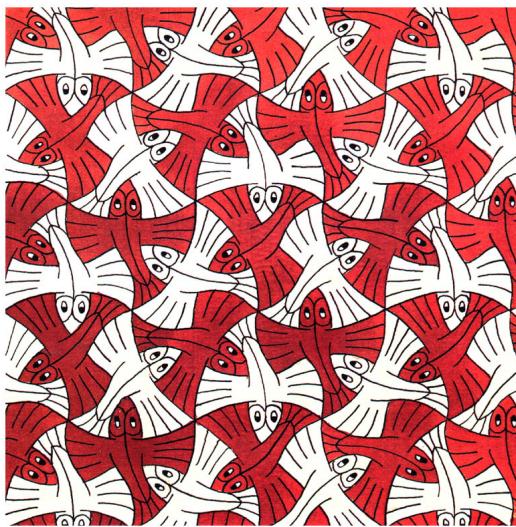
Podemos observar en la secuencia anterior la deformación del cuadrado. Veamos ahora como efectivamente obtenemos la teselación.



Ahora veamos un ejemplo aplicando transformaciones geométricas a las curvas.



Donde obtenemos la teselación:



[58]

En otros casos teselamos el plano con figuras que no están construidas como hemos notado anteriormente. En este caso estamos obligados a recubrir dicha figura con una tesela regular, semiregular o una región fundamental del grupo cristalográfico que queramos actuar. Veamos un ejemplo. Introducimos nuestra figura en un polígono regular de 4 lados, el cual será nuestra tesela:



[61]

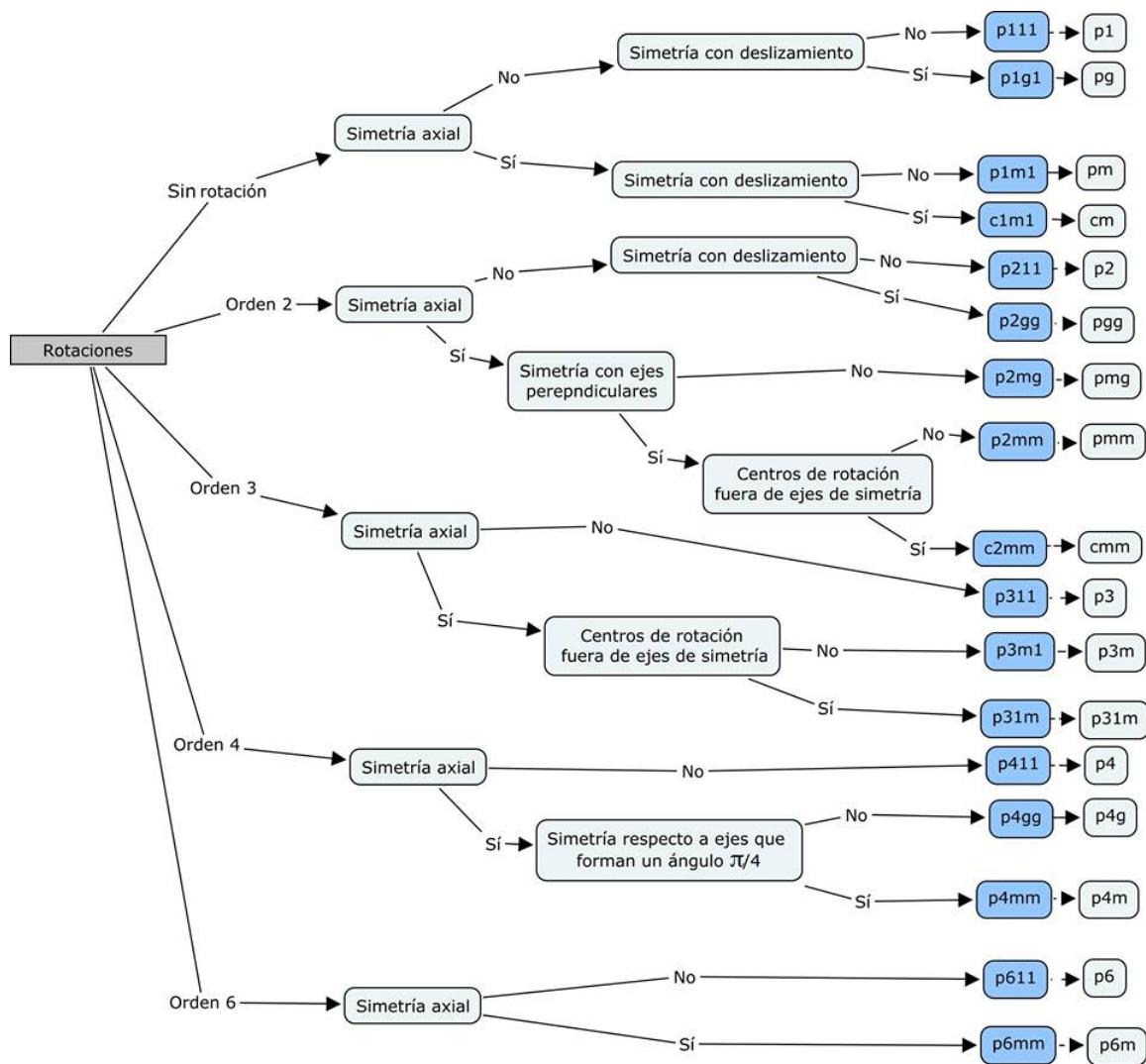
Hacemos actuar el grupo pertinente y obtenemos la siguiente teselación:



[61]

3.2.1. Algoritmo de clasificación

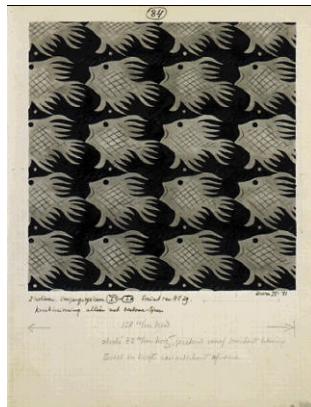
Hemos estudiado como generar dichas teselaciones. Procedemos ahora a el estudio de como identificar la creación de una teselación. Esto es, identificar el grupo cristalográfico que ha actuado para generarla. Para ello tenemos el siguiente algoritmo de clasificación (ver [26] [15]):



3.2.2. Ejemplos gráficos

Veamos un ejemplo de teselación generada bajo la acción de cada uno de los grupos cristalográficos. La mayoría de estos ejemplos son creados por el

dibujante holandés M. C. Escher. Notamos que a la hora de identificar los grupos despreciaremos los colores.



p1 [58]



pg [58]



pm [58]



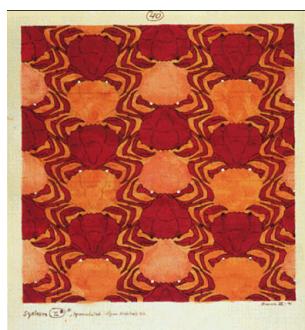
cm [58]



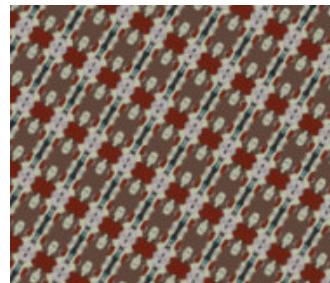
p2 [58]



pgg [58]



pmg [58]



pmm [59]



cmm [59]



p3 [58]



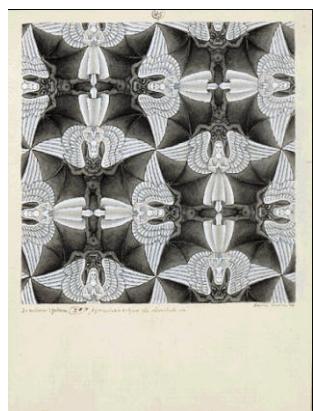
p3m1 [58]



p31m [49]



p4 [58]



p4g [58]



p4m [60]



p6 [58]



p6m [60]

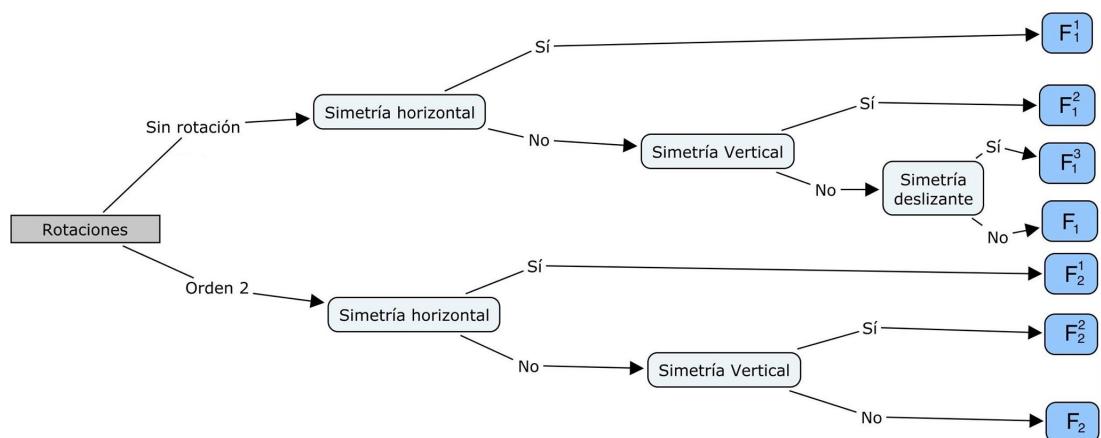
3.3. Frisos

Hemos estudiado matemáticamente que es un grupo de Friso. Dichos grupos generan los llamados frisos, unos patrones que se repiten en una dirección, usados principalmente para la decoración. La particularidad de que recubran en una dirección del plano, dota a los frisos de una estructura impuesta por el generador, esto es, que pueden ser deformados según convenga. Por tanto pueden adquirir la altura deseada según el patrón utilizado para así adaptarse al elemento a decorar. Esto hecho convierte a un friso un elemento muy utilizado en la arquitectura. Grandes obras arquitectónicas como el Partenon o la catedral de Notre Dame están dotadas de frisos, los cuales constituyen gran parte de su belleza. También son usados para decorar jarrones, telares, joyas y paredes. Elementos muy usados en muchas culturas, veremos ejemplos a lo largo de esta sección. En nuestro estudio resaltamos la particularidad de que todo friso que podamos encontrar, estará generado por únicamente uno de los 7 grupos de frisos estudiados. Por este motivo, daremos un algoritmo de identificación del grupo de friso correspondiente al friso.

Normalmente no se interpreta un friso como una teselación periódica, pero con las definiciones que hemos proporcionado, podemos tomar un friso como una teselación periódica en una sola dirección.

(Ver [26] [15])

3.3.1. Algoritmo de clasificación de frisos

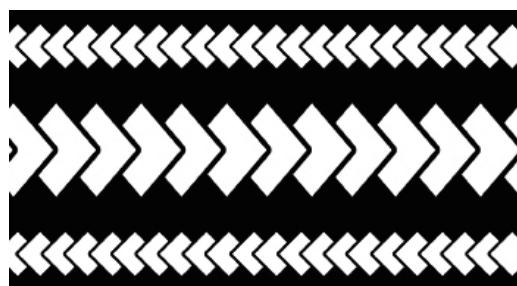


3.3.2. Ejemplos gráficos

Veamos como se han interpretado estos patrones en las diferentes culturas a lo largo de la historia.



Friso de arte romano F₁ [41]



Motivo samoano F₁¹ [46]



Friso en arte Egipcio F₂² [42]



Telar Inca F₁³ [40]



Monumento Maya en Xunantunich F₂ [44]



Friso en Alcazar de Sevilla F_2^1 [43]



Friso en la Alhambra de Granada F_2^2 [45]

Capítulo 4

Teselaciones Aperiódicas o Cuasiperiódicas.

4.1. Introducción histórica y definición.

En este capítulo estudiaremos lo que llamamos *Teselaciones aperiódicas*. Comprobaremos que no siempre es necesario un patrón que se repite para llenar el plano. Kepler en el siglo 17 creó unas teselaciones trabajando con pentágonos y estrellas las cuales abrieron la posibilidad de la creación de teselaciones aperiódicas.

Hasta el siglo 20 no se retomó el estudio de estas. Un profesor de la Universidad de Harvard, Hao Wang, en la dedada de los 60 comenzó a estudiar las teselaciones aperiódicas en el plano. Partió de una combinación de aristas que coincidían por colores. Pero Wang concluyó que si existía un recubrimiento aperiódico del plano lo acabaría haciendo periódicamente. Años mas tarde, en 1966, un alumno suyo llamado Robert Berger dió un contraejemplo a la conjectura de Wang, proporcionando una teselación con 20.426 teselas distintas las cuales generaban un recubrimiento completamente aperiódico. Era un numero muy elevado de teselas necesarias. Posteriormente redujo dicho numero a 104 teselas. Fue Berger el primero en encontrar una teselación de este tipo. Este resultado dio pie a que posteriormente otros autores profundizaran más en este estudio. Raphael Robinson y Robert Ammann redujeron el numero de teselas a tan solo 6. Seguidamente varios autores reforzaron el estudio con 6 teselas. Hasta que finalmente, Roger Penrose, construyó teselaciones con tan solo dos teselas distintas. Penrose observó trabajos de Kepler y usando la proporción áurea creó el dardo y la cometa, un gran avance en este tipo de teselaciones. Tras los resultados de Penrose surgieron muchos avances con dos teselas. El mismo Ammann creó una teselación muy importante generada

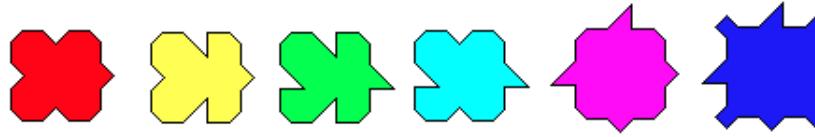
por dos teselas.(Ver [16], [39], [21], [20])

Demos una definición formal de teselación aperiódica:

Definición 4.1.1. Llamamos teselación aperiódica a la teselación generada por un grupo finito, por tanto, dicho grupo no admite traslaciones.

4.2. Teselaciones de Robinson

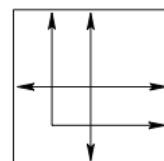
Raphael Robinson en 1966, basandose en los estudios de Wang, consiguió probar que existe un recubrimiento aperiódico del plano, llamado $R1$, con las siguientes 6 teselas:



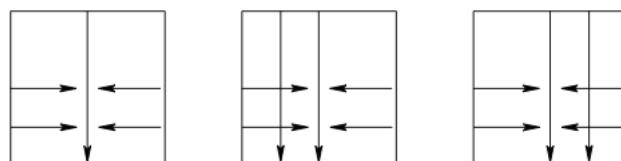
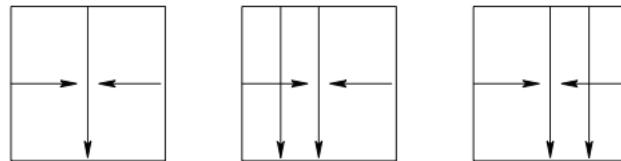
[37]

Fue un avance muy importante, ya que redujo en gran numero de teselas la teselación de Berger. Proporcionó una demostración rigurosa de dicho recubrimiento. Robinson se basó en estudios de Wang, cuando este trataba de encontrar teselaciones aperiódicas. Wang no consiguió encontrarlas, pero si facilitar herramientas para ello. Wang estableció congruencias entre lados de teselas a traves de colores, variando la incidencia en cada encaje entre ellas. Robinson aprovechó estos resultados para configurar una teselación aperiódica. En lugar de colores, utilizó flechas. Un recurso util para poder orientar las teselas y encontrar congruencias basandose en estas. (ver [16], [39], [21]) Veamos un ejemplo de la construcción que hizo Robinson para de demostración de este resultado.

El conjunto de teselas en las que Robinson se basó son las siguientes:



cruz[20]

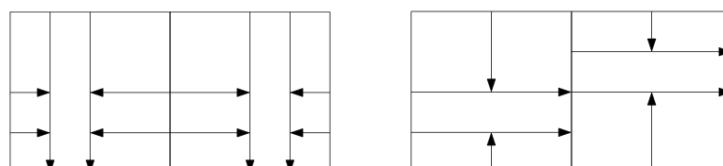


brazos[20]

Los llamados brazos y cruces. Podemos rotar cada tesela, obteniendo así cuatro orientaciones posibles en cada caso. Luego tenemos 28 teselas posibles.

Demos ahora una caracterización de estas. Hemos pintado unas flechas centrales las cuales marcan la dirección y orientación. Las cruces se denominan con este término, debido a que contienen dos direcciones perpendiculares. En cambio, los brazos tienen una sola flecha principal y la dirección de la cual, la llamaremos dirección principal. Los brazos también tienen la orientación de norte a sur y las flechas laterales con dirección a la dirección principal. Hecho que impide un numero infinito de combinaciones.

Por tanto, las congruencias entre teselas vienen dadas por la coincidencia de flechas, es decir, cada tesela que se identifica con otra debe identificarse con las flechas, en sentido y posición. Veamos un ejemplo de lo que no puede suceder, flechas opuestas y flechas sin coincidir.

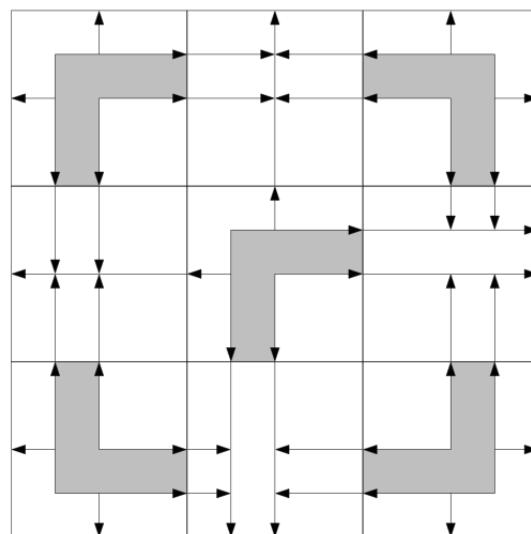


Congruencia no valida [33] Congruencia no valida [33]

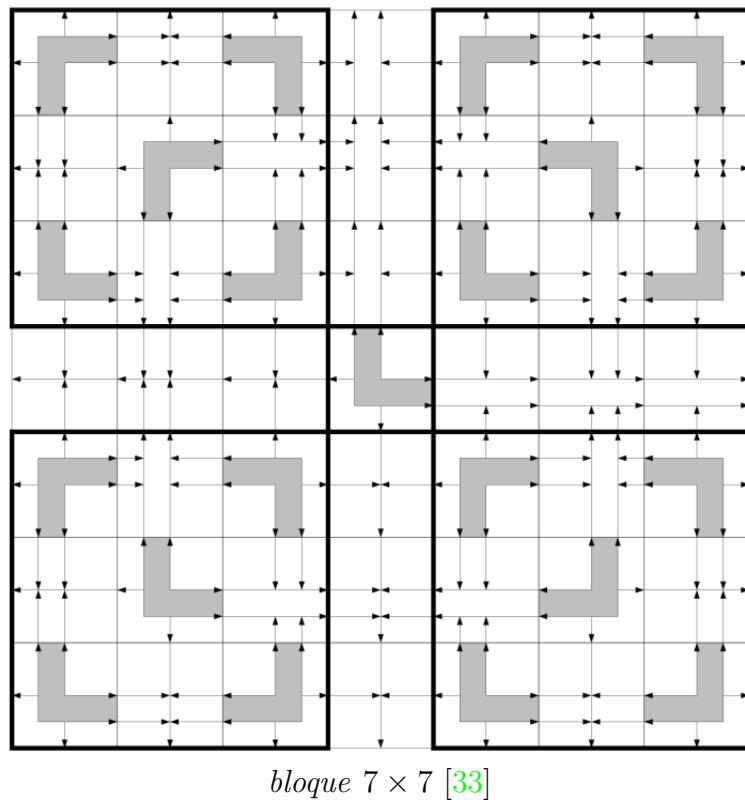
Si cuadriculamos con las teselas posibles, tal y como las hemos definido, el objetivo es buscar que las intersecciones entre teselas vengan marcadas por cruces.

Notamos las posiciones con el producto cartesiano. Entonces fijándonos en la orientación de las flechas de los brazos, observamos que los brazos no pueden ocupar las posiciones (*impar, impar*) ni (*n, n*), con *n* par. Por tanto estas posiciones deben de estar ocupadas por cruces.(Vease justificación en [15], [21], [20])

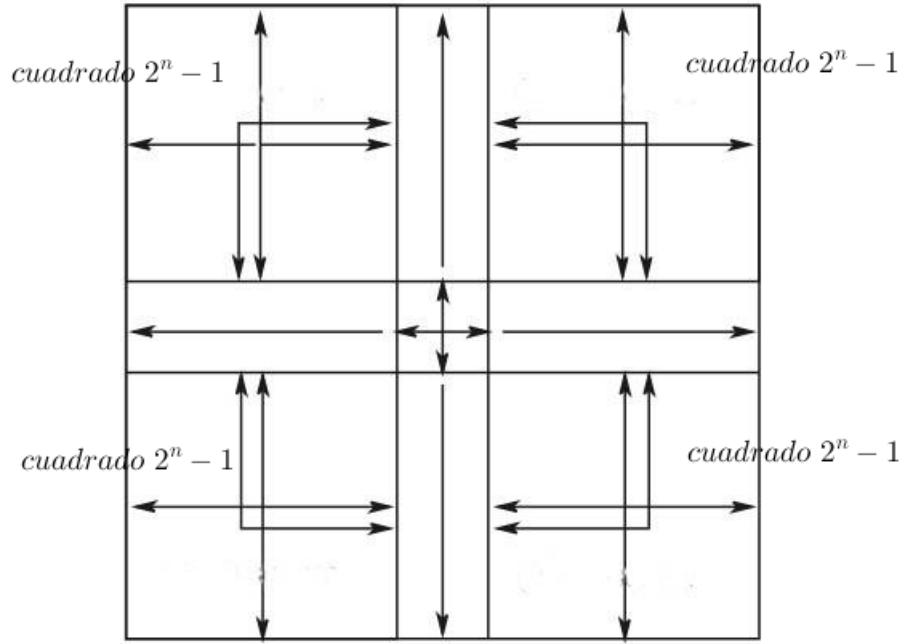
Veamos ahora las combinaciones posibles de las teselas. Bajo la construcción de los brazos y las cruces, podemos construir bloques cuadrados con $(2^n - 1)$ cuadrados. Es decir de la forma 3×3 , 7×7 , ... , $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$, los cuales se definen de forma recursiva siguiendo la regla de (par, par) e $(impar, impar)$ para las cruces. Este tipo de cuadrados son los únicos posibles bajo las congruencias buscadas. Veamos algún ejemplo:



bloque 3 × 3 [33]



Por tanto podemos generalizar a bloques de la forma:



bloque $(2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1)$ [20]

Puesto que tenemos 4 orientaciones por cruz, para cada n existen cuatro bloques distintos de la forma $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ hecho que nos permite construir el siguiente bloque $(2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1)$. (Ver [15], [33], [21], [20]) Veamos unas propiedades de estos bloques:

- Bajo las hipótesis dadas es valida la construcción de un único bloque $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ para cada n , salvo orientación.
- Las flechas de las teselas que se encuentran en la frontera de cada bloque tienen sentido hacia el exterior de este. Hecho que implica que deben ser brazos.

La demostración de estas propiedades la hacemos por inducción sobre n . Podemos encontrarla en([21], [20]). Veamos ahora la siguiente proposición:

Proposición 4.2.1. *Cada bloque $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ pertenece a un bloque $(2^{n+1} - 1) \times (2^{n+1} - 1) \forall n \in \mathbb{N}$.*

La demostración de esta proposición se basa en identificar los vecinos de cada bloque, los cuales en las esquinas son cruces. Estas esquinas son de la forma (*impar, impar*) y cumplen que pertenecen al centro de solo un bloque $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$. haciendo inducción en n se llega al resultado deseado. Podemos encontrar la demostración completa en [15], [21], [38] [20]

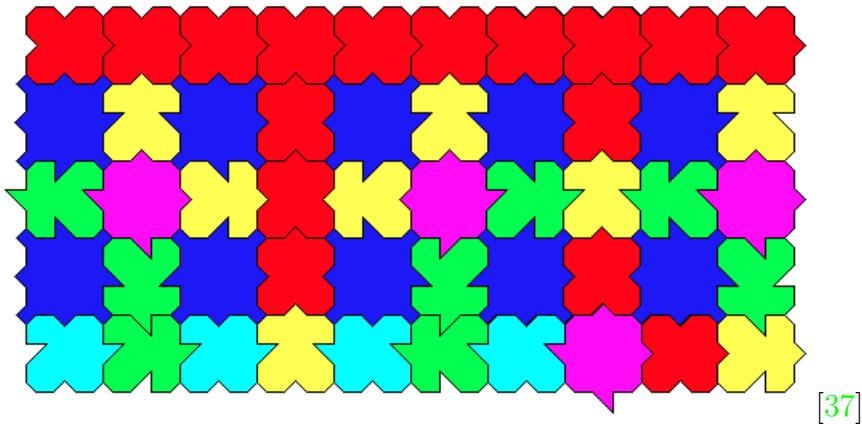
Esto nos induce que para cada n podemos construir un bloque, el cual nos generará el siguiente bloque y así sucesivamente. Esto nos lleva a poder formular el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2. *Las teselas de Robinson generan una teselación aperiódica del plano.*

Dem: $\forall n \in \mathbb{N}$ es valida la construcción arbitraria de un bloque $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$. Por otro lado los centros de cada bloque $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ son cruces separadas por $(2^{n-1} - 1)$ brazos. Entonces como la teselación que se va generando contiene bloques $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$, la teselación contiene cruces alineadas horizontalmente las cuales están separadas por arbitrariamente largas secuencias de brazos. Hecho que impide un periodo horizontal. Luego no es posible que la teselación sea periódica. \square

(Ver [15], [33], [21], [20], [38])

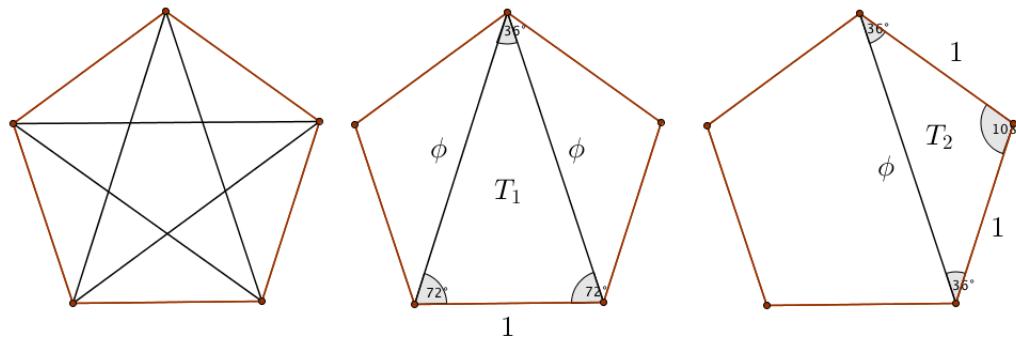
Una vez visto este resultado. Tenemos que la teselación de Robinson $R1$ queda de la siguiente manera:



4.3. Teselaciones de Penrose

Entre 1973 y 1974 Roger Penrose descubrió tres conjuntos de teselas que generaban una teselación aperiódica. Estas las llamó; P1 basada en estrellas y pentágonos, P2 basadas en lo que llamó la cometa y el dardo y P3 basada en rombos. Todas las teselas de Penrose se obtienen observando las propiedades del pentágono, completamente relacionadas con la proporción áurea. Algo muy interesante, ya que Penrose observó como se comportaba la naturaleza para obtener una teselación aperiódica.

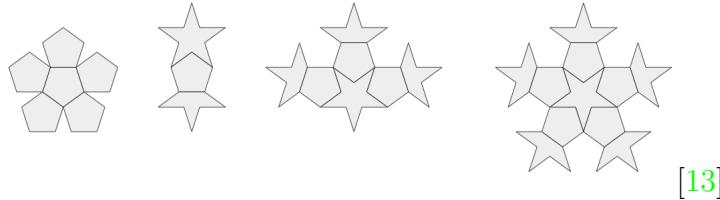
Veamos previamente ciertas propiedades de los pentágonos regulares:



Penrose creó todas sus teselas partiendo del pentágono, la estrella pitagórica y los triángulos T_1 y T_2 , los cuales tienen lados de longitud 1 y $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Procedemos ahora al desarrollo de cada conjunto de teselas.

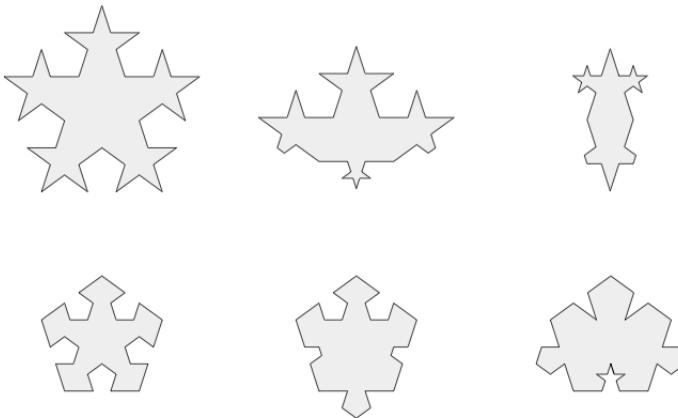
4.3.1. Conjunto de teselas P1

El conjunto de teselas $P1$ parte de modificaciones de la estrella pitagórica y de modificaciones de pentágonos, consta de 6 teselas.



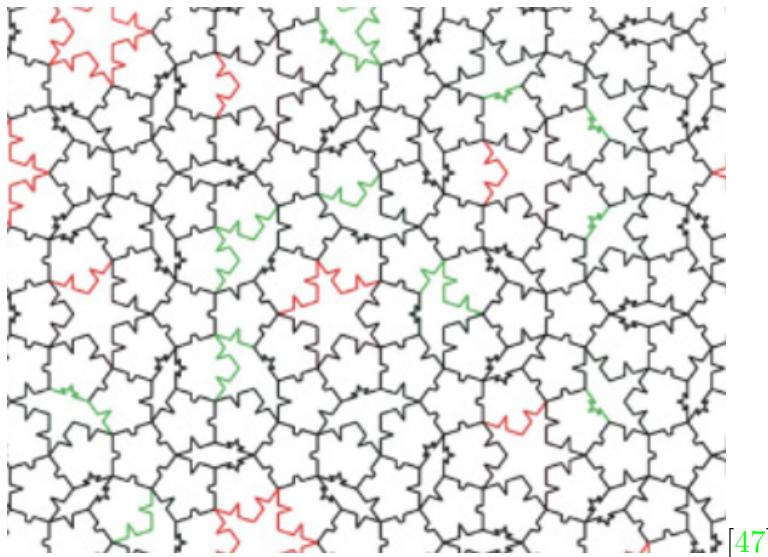
[13]

Penrose creó estas teselas observando teselaciones de Kepler, las cuales las veremos en la siguiente sección. $P1$ esta conformado por las siguientes teselas:



[13]

Generando la siguiente teselación:

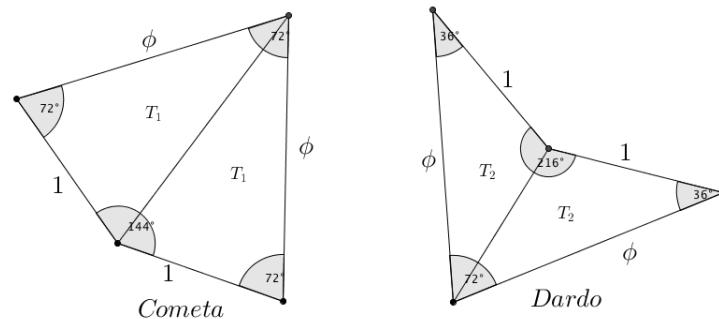


Teorema 4.3.1. *El conjunto de teselas P_1 genera una teselación aperiódica.*

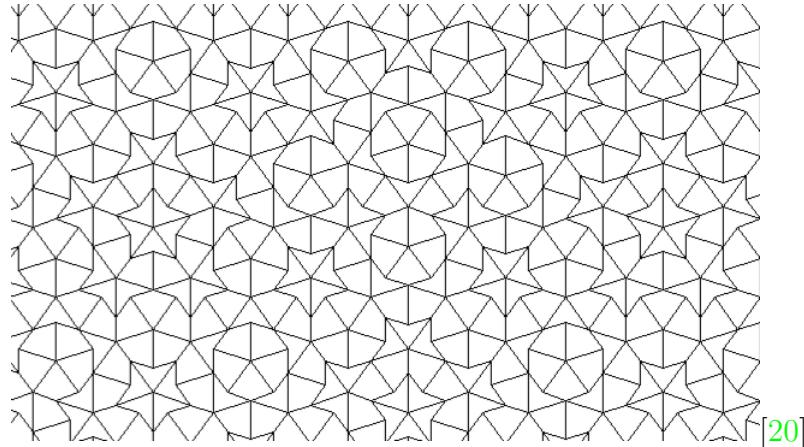
La demostración de este resultado la podemos encontrar integra en [15]. Penrose hizo también modificaciones del conjunto P_1 . Incluso redujo este conjunto a 5 teselas. Todas las variaciones siguen el mismo patrón de estrellas y pentágonos (ver [15], [47], [13]).

4.3.2. Conjunto de teselas P_2

El conjunto de teselas P_2 está formado por lo que Penrose llamó la cometa y el dardo. Es una teselación muy importante en el mundo de las teselaciones aperiódicas ya que fue la primera en construirse con tan solo dos teselas. La cometa y el dardo se construyen a partir de los triángulos que hemos llamado T_1 y T_2 . Dejando constancia de la importancia de estos y la divina proporción. La cometa y el dardo se construyen de la siguiente manera:



Estas generan la siguiente teselación:

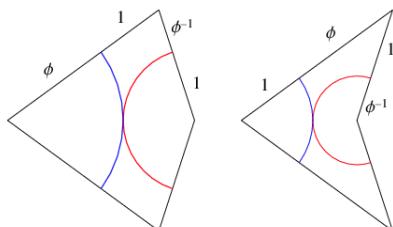


Teorema 4.3.2. *El conjunto de teselas P_2 generan una teselación aperiódica, la cual admite una rotación de orden 5.*

Para la demostración ver [15], [20], [10].

A partir del dardo y la cometa se han hecho modificaciones en estos, las cuales también teselan el plano con las mismas propiedades. Estas modificaciones las podemos clasificar en dos tipos.

Uno de estos, haciendo pequeñas deformaciones en la frontera de cada figura o bien rellenando el interior. Veamos algún ejemplo:

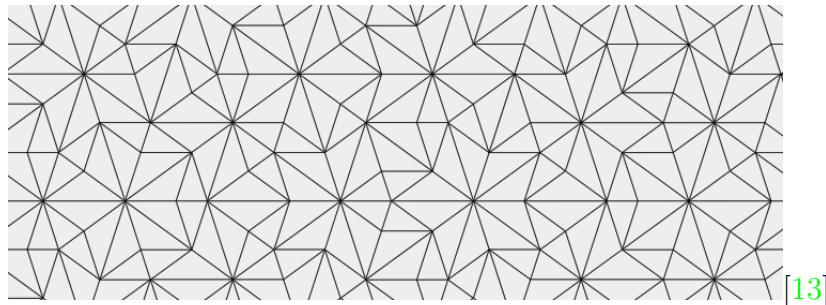


[48]

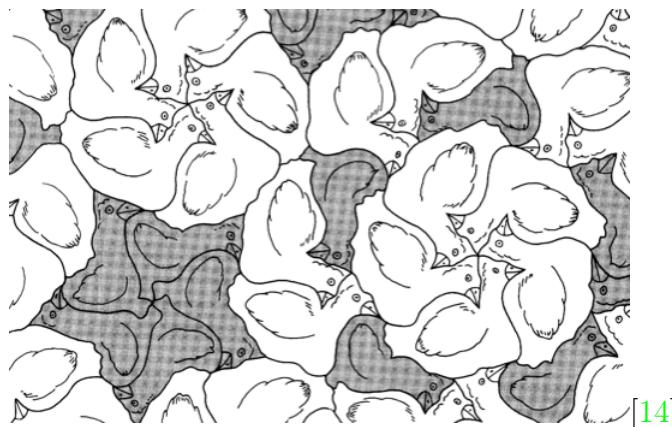


[20]

Otro tipo de modificación se basa en cambiar las proporciones de los triángulos T_1 y T_2 de la siguiente forma. Sabemos que $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ por tanto podemos obtener nuevos triángulos ϕT_1 , ϕT_2 y $\phi^2 T_1$, $\phi^2 T_2$ los cuales forman un nuevo dardo y cometa. Además podemos crear nuevos triángulos inscritos en ellos haciendo particiones de estos. Podemos generar teselaciones como la siguiente:



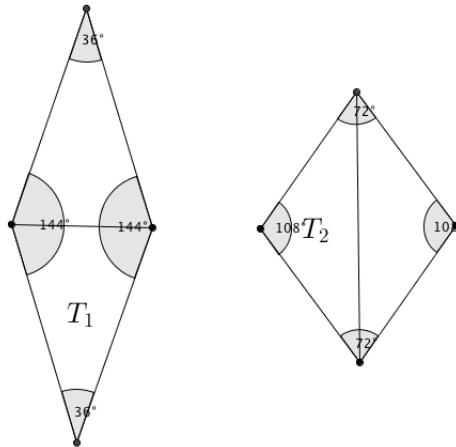
Notamos también algo curioso. Penrose a partir de una deformación del dardo y la cometa creó una teselación llamada *teselación de los pollos*. Penrose era amigo del dibujante holandés Escher, notando en esta teselación influencia de Escher. (Ver [14])



(Ver [15], [20], [14], [10], [13])

4.3.3. Conjunto de teselas P3

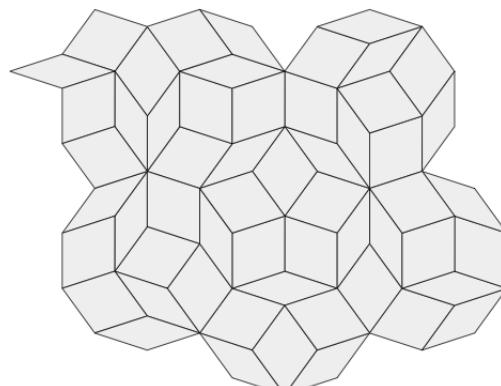
El conjunto de teselas $P3$ está constituido por dos rombos. Generados a partir de T_1 y T_2 de la siguiente forma:



El desarrollo de esta teselación $P3$ es bastante análogo al de la cometa y el dardo debido a que podemos encontrar relaciones directas entre ellos.(Ver [15], [14], [10], [2]). Hecho que nos prueba el siguiente resultado.

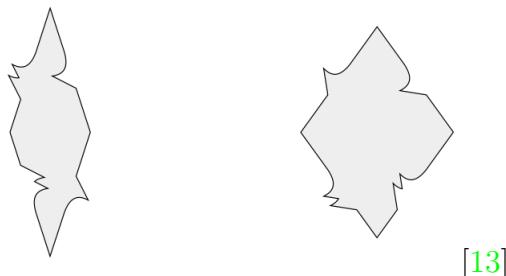
Teorema 4.3.3. *El conjunto de teselas $P3$ generan una teselación aperiódica.*

Para la demostración ver [15], [20], [10].
La teselación generada es la siguiente:



[13]

Al igual que en el dardo y la cometa también podemos hacer deformaciones de estos para obtener distintas teselaciones. La deformación más común es la siguiente:



[13]

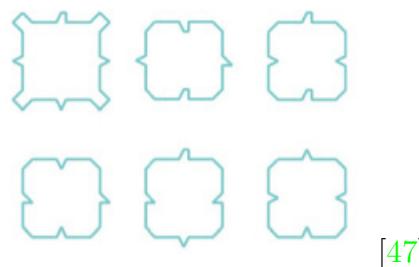
A partir de estas teselas se abrió un campo muy amplio a estudiar, para teselaciones aperiódicas.

4.4. Teselaciones de Ammann

Robert Ammann fue un autor muy importante en el estudio de teselaciones aperiódicas. Fue contemporáneo de Penrose. En la década de los 70 proporcionó un conjunto de dos teselas llamado *A2* el cual fue de gran importancia por su desarrollo y sus propiedades. Amman tomó un camino distinto de Penrose. Estos conjuntos junto a los de Penrose fueron muy utilizados en el estudio de los llamados cuasicristales. Veremos también otro conjunto de 6 teselas llamado *A1*. No fueron los únicos conjuntos de Ammann pero si los que tuvieron una repercusión relevante en el estudio de teselaciones aperiódicas [17].

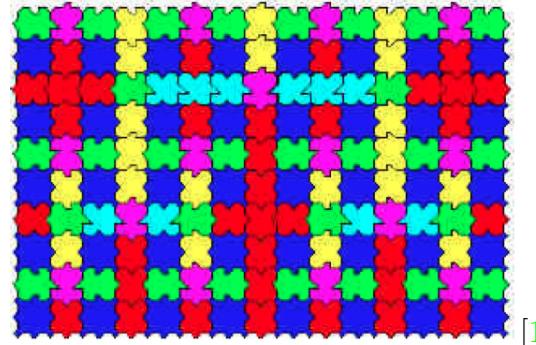
4.4.1. Conjunto de teselas A1

El conjunto de teselas *A1* está formado por 6 teselas, con un desarrollo muy análogo a las teselas de Robinson. Por este motivo solo las notaremos para ver su estructura y observar una alternativa a los conjuntos de Robinson. El conjunto es el siguiente:



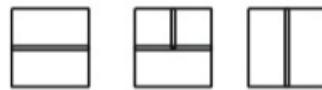
[47]

Generando la teselación:



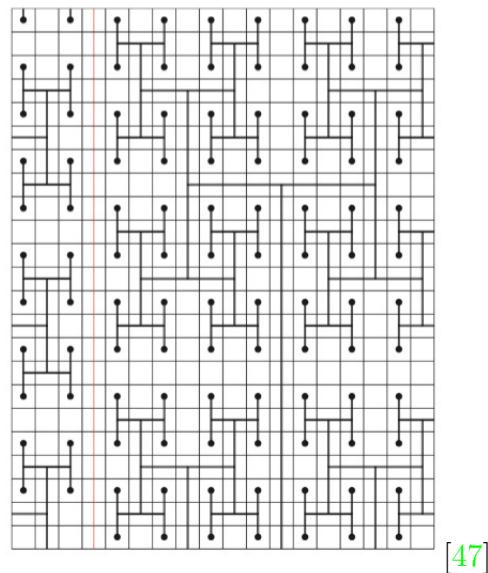
[16]

Este conjunto es análogo al de Robinson, pero Ammann también le dio un enfoque distinto el cual cumple perfectamente con las congruencias que el desarrolla. El conjunto es el siguiente:



[47]

El cual genera la siguiente teselación:

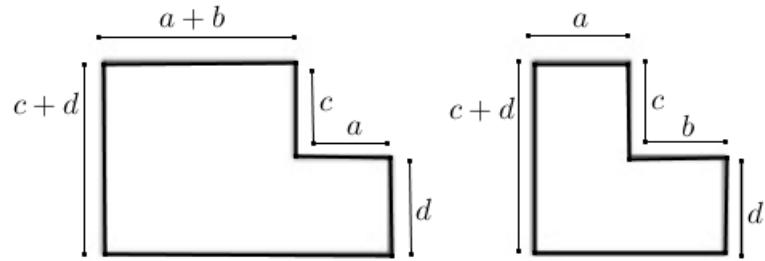


[47]

4.4.2. Conjunto de teselas A2

El conjunto de teselas A_2 esta formado como hemos dicho por dos únicas teselas. Al igual que Penrose, Ammann crea estas teselas haciendo propor-

ciones con ϕ . Algo que vuelve a poner de manifiesto la importancia de esta proporción de la naturaleza. La teselas de Ammann son las siguientes:



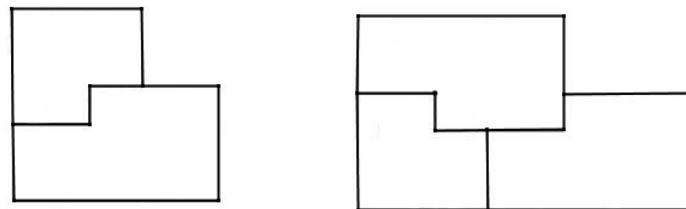
Hemos notado a, b, c, d las longitudes de los respectivos lados de las figuras. Dichas longitudes cumplen las siguientes proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \phi$$

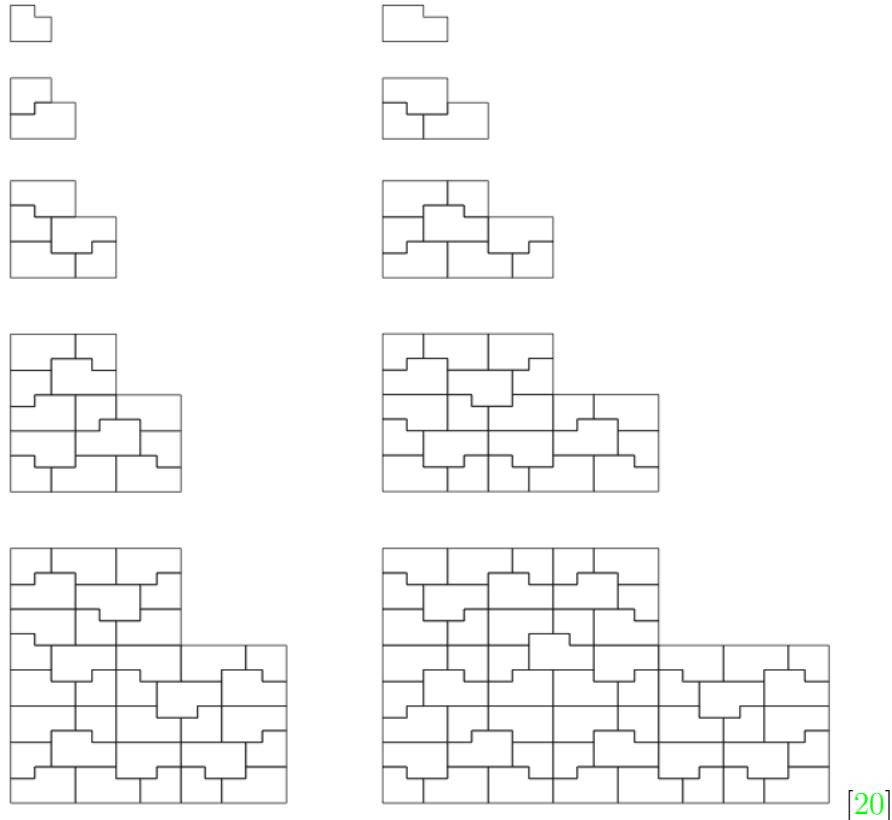
Ademas:

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{b} , \quad \frac{d}{c} = \frac{c+d}{d}$$

Las figuras de $A2$ tienen la propiedad que si hacemos los encajes correspondientes entre ellas, volvemos a obtener dos figuras con las mismas proporciones [15],[3], [12]. Veamoslo en la siguiente figura:



Este mismo proceso lo podemos hacer recursivamente:



Esto nos permite intuir que siempre podemos ir haciendo cada pieza más grande. Además, sabemos que con la recursividad siguen encajando debido a las propiedades de las proporciones dadas. Esto nos proporciona información sobre las simetrías que podemos aplicarle a la teselación final, la cual sera una rotación de orden 2. (Ver [20], [15]). Enunciamos esconces el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1. *El conjunto de teselas A2 genera una teselación aperiódica, la cual admite una rotación de orden 2.*

Para la demostración rigurosa de este resultado ver [15], [20], [3], [12].

4.5. Teselaciones aperiódicas especiales

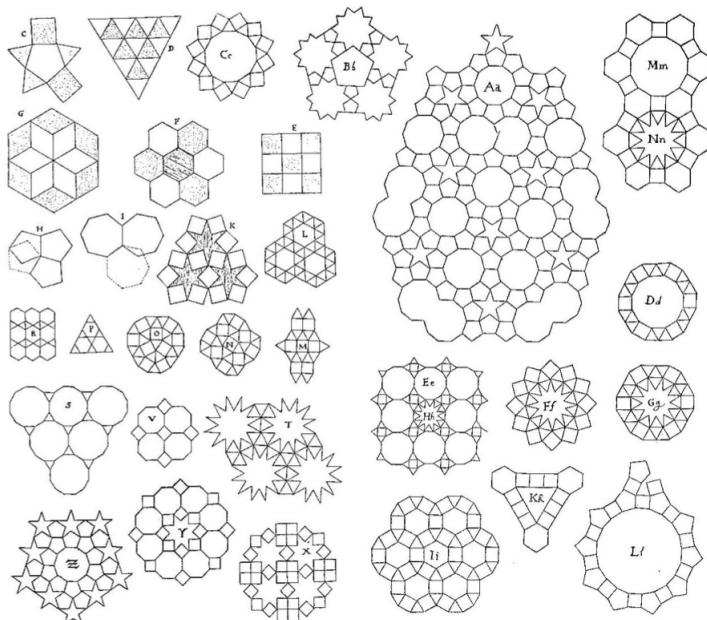
En esta sección trataremos un tipo de teselaciones aperiódicas las cuales llamamos *especiales*. Las notamos de esta manera porque tienen la peculiaridad que las definimos como teselaciones que teselan una región del plano, no todo el plano. Aun así cumplen con la definición de teselación aperiódica,

por este motivo las incluimos en este capítulo ya que es importante notarlas y saber de su existencia. Estas teselaciones son las llamadas *teselaciones de Kepler y Rosaceas*. Ambas teselaciones de gran importancia a lo largo de la historia. Las de Kepler por su influencia en la creación de teselaciones aperiódicas en el último siglo y las rosáceas por su uso en arquitectura y arte.

4.5.1. Teselaciones de Kepler

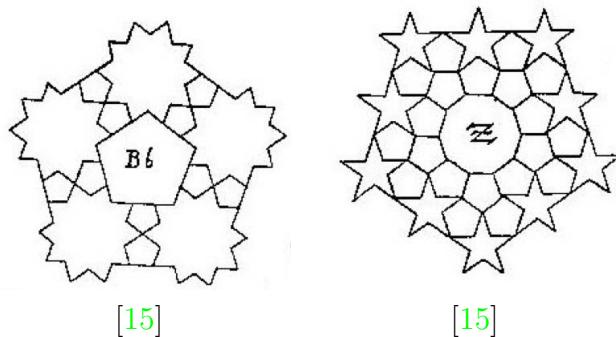
A esta sección la llamamos teselaciones de Kepler, no por ello estudiaremos todas las teselaciones y resultados que creó. Kepler en su libro *Harmonices Mundi, 1619*, hizo un estudio de muchos tipos de teselaciones, las semiregulares, como vimos en el capítulo anterior entre otras. Pero en esta sección nos centraremos a las que sirvieron de inspiración para el estudio de teselaciones aperiódicas. Kepler fue pionero en observar las propiedades pentagonales, parte de su estudio, en la estrella pitagórica y su uso en teselaciones. Entre estos resultados destacamos el estudio sobre teselaciones estrelladas regulares, las cuales no hemos estudiado pero si hemos notado en alguna ocasión.(Ver [15], [23], [22])

En su libro, *Harmonices Mundi* Kepler crea unos conjuntos compuestos por polígonos regulares y estrellas. Muchos de estos dan pie a generar una teselación periódica los cuales están generados bajo la acción de los *grupos de Leonardo*. En cambio otros forman parte del inicio de una teselación aperiódica. Estos conjuntos son los siguientes:



[15]

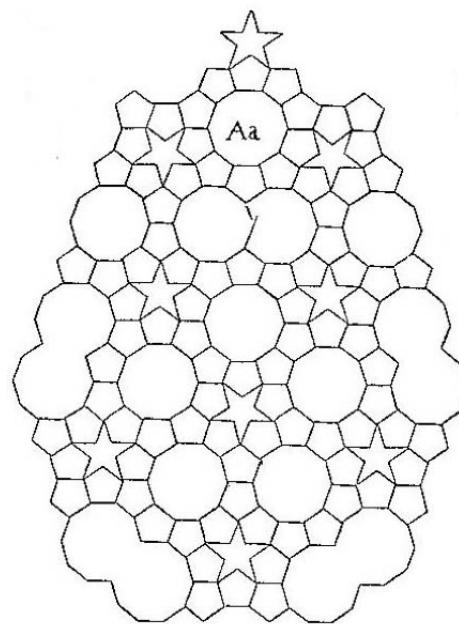
Estas ilustraciones son originales del libro *Harmonices Mundi*. Como hemos notado, nos centraremos en las que intuyen a una teselación aperiódica. Primero destacamos dos creaciones pentagonales, las cuales no pueden teselar el plano pero muestran el planteamiento de teselar con pentágonos, aún así de una manera periódica. El grupo que actúa sobre ellas es el diédrico de orden 10, D_5 .



[15]

[15]

Y a destacar entre todas las ilustraciones, la ilustración que muestra claramente una composición aperiódica. Un conjunto que sirvió de inspiración a Penrose para su estudio sobre recubrimientos aperiódicos, centrando su atención en las propiedades pentagonales. Kepler con este conjunto proporcionó el primer patrón aperiódico en estudio de teselaciones. Puede probarse que no podemos teselar el plano con este conjunto (Ver [15], [22]). A pesar de esto, ha sido de gran relevancia en la historia. El conjunto es el siguiente:

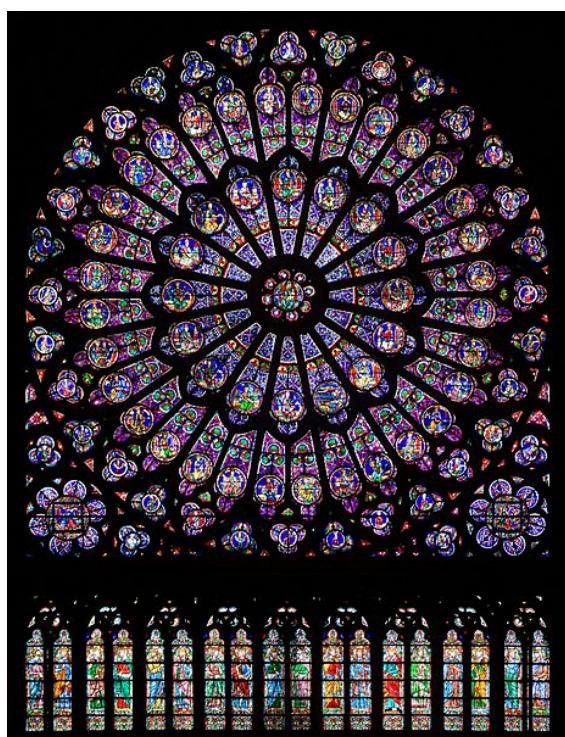


[15]

4.5.2. Rosaceas

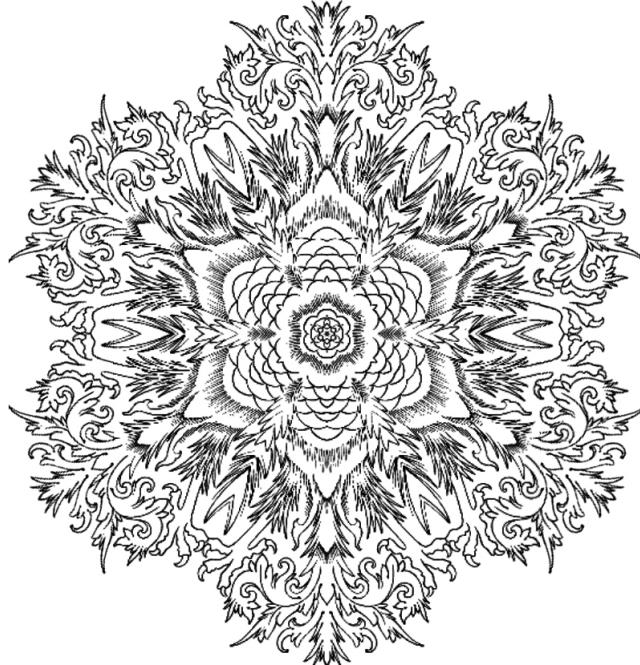
Esta sección estudiaremos las *rosáceas*, en muchas ocasiones las encontraremos como *rosetones* o *pétalos geométricos*. El nombre se debe a que la estructura que define una rosacea se asemeja a la estructuras de ciertas flores, especialmente las rosas. Empezó a llamarse rosácea a las ventanas con estructura circular que se incluían en las construcciones góticas, principalmente en iglesias. Pero con el paso del tiempo se le ha atribuido este termino a todo elemento geométrico que cumpla con las propiedades de una rosacea. También, según el estudio, se pueden encontrar con otros términos, por ejemplo en culturas orientales se les denota como *mandalas*. La estructura de esta, se compone de una estructura circular con un punto fijo en el centro. Hemos estudiado los *grupos de Leonardo*, estos son únicos grupos que pueden generarlas. Esto nos proporciona mucha información acerca de estas. Esta sección la dedicaremos a observar ejemplos de varias culturas e identificar el grupo de Leonardo que las genera. [15]

La siguiente imagen representa una rosacea la cual se encuentra en la catedral de Notre Dame de Paris. Es creada en el siglo 18 y mide 21 metros de diámetro. Observamos que contiene rotaciones de orden 16 y simetrías axiales. Por tanto el grupo que la genera es el grupo diédrico de orden 16, D_8 .



[49] Rosacea en la catedral de Notre Dame, Paris

La siguiente imagen representa un mandala con motivos hindúes. Observamos que contiene rotaciones de orden 6 y simetrías axiales. Por tanto el grupo que la genera es el grupo diédrico de orden 6, D_3 .



[19] *Mandala creado por Thomas Hooper*

Por ultimo vemos una rosacea que no contiene simetrías axiales pero si rotaciones de orden 3. Por tanto el grupo que la genera es el cíclico de orden 3, C_3



[50] *Trisquel calado de Castromao*

Parte IV

Resumen en lengua Inglesa

The tilings coexist with the human being in a really connected way. We can find them in our daily life, for instance at the sidewalks, the tilings or the houses walls. We also find them in an artistic way, on the wonderful Nazari Art tilings in the Alhambra of Granada or in the friezes of the Athene Pantheon. However, that's not all, the Nature is constantly showing us tilings really interesting as the honeycombs and cobwebs.

This phenomenon is what encourage us to study the tilings, which are not built in an aleatory or a random way, to create them is necessary to use maths. We will do a rigorous study of the hidden mathematical part behind the tilings.

Most of the tilings are made by the action of a set on a plane region. Before going into details itself we are going to do a previous algebraic study of its sets, which we will call them *ornamental groups of the plane*.

We will develop the study in the Euclidean plane, so we will work with the Euclidean metric with the scalar product $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$, $x \cdot y = x^t y$, with the norm $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ and with distance $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$. To study the periodic tilings we require some maps which must not deform the shapes that create the tiling. It is the reason why we define the maps called isometries, as an invertible maps that preserves the distances, that is, $d(x, y) = d(f(x), f(y))$. Each isometry can be written as a affine map in the following way $f(x) = Ax + b$, $b \in \mathbb{R}^2$, $A \in O(2)$.

These isometries generate a group under the composition that we call $Sim(\mathbb{R}^2)$. So the ornamental groups are subgroups of the $Sim(\mathbb{R}^2)$, which we will classified them in the *Rosete groups*, *Frieze groups* and *Cristallographic groups*.

We define the *Rosete groups* by the Leonard's theorem as a group isomorphic bonded to a *Cyclic group* C_n or to a *Dihedral group* D_n . These groups generate what we would call *Rosetes*.

Frieze groups are defined as a subgroup of the $Sim(\mathbb{R}^2)$ which allows only one maximal subgroup of translations with a single generator, in other words, if F is a frieze group, then $Sim(\mathbb{R}^2) \cap F = \langle T_v \rangle$. This implies us that the friezes groups leave invariant a line l . Therefore, the friezes groups just allow the following elements noted as; *Id*: Identity, *T*: traslation T_v , *r*: rotation of second order, *sh*: horizontal reflection with axis in l , *sv*: vertical reflection with perpendicular axis in l and *sd*: glide reflection in the l direction. So we will label the frieze groups with the the *Fejes Toth* notation as:

- $F_1 = \langle T \rangle = \{T^k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_1^1 = \langle T, sh \rangle = \{sh^m T^k : m \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_1^2 = \langle T, sv \rangle = \{sv^m T^k : m \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_1^3 = \langle sd \rangle = \{sd^k : k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_2 = \langle T, r \rangle = \{r^m T^k : m \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_2^1 = \langle T, sh, r \rangle = \{sh^m r^l T^k : m, l \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$
- $F_2^2 = \langle sd, r \rangle = \{r^l sd^k : l \in \mathbb{Z}_2, k \in \mathbb{Z}\}$

We also have the following theorem:

Theorem: If F is a Frieze group, it is necessary one of those named above. Then we can conclude that there exist 7 and only 7 Friezes groups.

The *Crystallographic groups* can be define as a subgroup of the $Sim(\mathbb{R}^2)$ such that it allows just a only one maximal subgroup of translations with two generators. In other words, if G is a cristallographic group, then $Sim(\mathbb{R}^2) \cap G = \langle T_v, T_u \rangle$. The result that we get is the one that give us the information of the elements that we have to look for, the Crystallographic Restriction theorem.

Theorem: (Crystallographic Restriction). When G is a Crystallographic group, the spins that we get in G are of order 2, 3, 4 or 6 .

Then following the *Crystallographic notation* we label the crystallographic groups as:

- $p1 = \langle T_u, T_v \rangle.$
- $pm = \langle T_u, T_v, sh \rangle.$
- $pg = \langle T_u, sd \rangle.$
- $cm = \langle T_u, T_v, sh, sd \rangle.$
- $p2 = \langle T_u, T_v, r_2 \rangle.$
- $p2mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', r_2 \rangle.$
- $g2mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', r_2 \rangle.$
- $p2mg = \langle T_u, T_v, sl, sdl', r_2 \rangle.$

- $p2gg = \langle T_u, T_v, sdl, sdl', r_2 \rangle$.
- $p3 = \langle T_u, T_v, r_3 \rangle$.
- $p3m1 = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sdl, sdl', sdl'', r_3 \rangle$.
- $p31m = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sdl, sdl', sdl'', r_3 \rangle$.
- $p4 = \langle T_u, T_v, r_2, r_4 \rangle$.
- $p4mm = \langle T_u, T_v, sl'', sl''', sdl, sdl', sdl'', sdl''', r_2, r_4 \rangle$.
- $p6 = \langle T_u, T_v, r_2, r_3, r_6 \rangle$.
- $p6mm = \langle T_u, T_v, sl, sl', sl'', sdl, sdl', sdl'', r_3 \rangle$.

Once we have identified the crystallographic groups we have the Federov theorem.

Theorem: (Federov). If G is a crystallographic group is necessarily one of the named above. Then there exist 17 and only 17 Crystallographic groups.

Once we already have all the tools, we become able to work with the tilings themselves. We are going to start giving a definition of what is a tiling. **Definition:**

We call tiling (or tessellation) of a plane, to a collection of compact subsets $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ with not empty interior, called tesserae, such that:

- $\partial A_i \cong \mathbb{S}^1, \forall i \in \mathbb{N}$,
- $\mathring{A}_j \bigcap_{i \neq j} \mathring{A}_i = \emptyset, \forall i, j \in \mathbb{N}$,
- $\bigcup_i A_i = \mathbb{R}^2$.

To classify the tilings, it is necessary to focus on if they are generated or not when the pattern is repeated which have a different classification depending in if it is periodic or aperiodic.

We can define *periodic tiling* as the tiling made by the action of a frieze or a crystallographic group. In the periodic tilings we study the ones that are generated by regular polygons which have the property that the intersection between them are or in one side of the polygon or in a vertex which is called

edge to edge.

We name $n-gon$ the regular polygons with n sides and we define a tile as a regular polygon that incise in a vertex. Therefore, we could identify a tile as a vertex that it has, the following manner: When n_i-gon with $i = 1 \dots r$ are the polygons that incise in a vertex, we will name the tile that holds in this vertex as $\{n_1, \dots, n_r\}$. Due to the fact that we know that the sum of the angles must be 2π we can infer this equation:

$$2\pi = \sum_{i=1}^k \pi \left(1 - \frac{2}{n_i}\right)$$

. We can make a difference between what we call *regular* and *semiregular* tilings ones. The regular have tiles made of $n-gon$ with the same n . Hence, the equation that we have inferred above can ensure that the only possible tiles are: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$, $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4$ y $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$. On the other hand, the semiregular tilings are the ones that their tiles are made by $n-gons$ with different n . Kepler shows that the only possible semiregular tiles are the following ones: $\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4\}$, $\{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6\}$, $\{3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4\}$, $\{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4\}$, $\{3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6\}$, $\{3 \cdot 12 \cdot 12\}$, $\{4 \cdot 6 \cdot 12\}$, $\{4 \cdot 8 \cdot 8\}$.

In the periodic tilings we study the ones called *irregulars*, whose tiles do not have any shape restriction. These tiles come from deformations made in the tiles by curves in the sides, which are called *congruent edges*. The hardwork in this type of tilings stays in looking for the fundamental region and also in to identify the group that generates them.

Lastly, we are going to study the *aperiodic tilings* which are defined as the ones that are generated under the action of a group without translations. The study that has been made in this tilings just started 40 years ago. Wang formulated the hypothesis that was impossible to create this kind of tilings, but some years later, Berguer, Wang's student, exposed a contraexample to Wang's hypothesis providing a group of more than 20.000 tiles, which later was reduced to 104 of them. Thanks to Berguer and Wang's results was possible to create a study focus in this type of tilings. Robinson provided a group of just 6 tiles based on congruences between their sides, calling them arms and legs.

After a while Roger Penrose, by looking into Kepler's work and the pentagon properties, he provided a set of two tiles which he called kite and dart. At the same time he also got a different set focused in diamonds.

Contemporaneous to Penrose, Ammann took a different way, but he also get

a set of two tiles that were able to cover the plane in an aperiodic way. The last thing that we will study is what we call *special aperiodic tilings*. These tiles are just in one region of the plane. We distinguish between what we call Kepler, who was really relevant launching the study of pentagonal structures and the early indications of the existance of aperiodic coating. On the other hand there are the Rosetes, which got this name because they look like flowers, specially like roses, and they are generated by the Rosete groups. For instance, we can see this kind of tilings in paintings and decorations in architecture, specially in Gothic architecure.

Bibliografía

- [1] J.M. Aarts, *Plane and Solid Geometry*, Springer Science, 2008.
- [2] Andy Adamatsky, *Game of Life Cellular Automata , chapter 18*, Springer, 2010.
- [3] Shigeki Akiyama, *A note on aperiodic Ammann tiles*, *Discrete and Computational Geometry*, vol.48 (2012).
- [4] Andrew Baker, *Groups and Symmetry*, 2005.
- [5] Sarah-Marie Belcastro, Carolyn Yackel, *Crafting by Concepts: Fiber Arts and Mathematics*, CRC Press, 2011.
- [6] Y. Bossard, *Rosaces, frises et pavages. vol 1: étude pratique*. CEDIC, Paris 1997.
- [7] E. Bujalance, J.M. Gamboa, J.J. Etayo, *Teoria elemental de grupos*, Universidad Nacional de Educación a distancia, 1987.
- [8] T.K. Carne, *Geometry and Groups*. University of Cambridge, 2012.
- [9] Darrah Chavey, *Tilings by regular polygons ——: Dodecagon-Dense tilings.*, 2013.
- [10] N.G. De Bruijn, *Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings of the plane*, Eindhoven, University of Technology, 1981.
- [11] D.S.Dummit, R.M. Foote, *Abstract Algebra*, University of Vermont, 1991.
- [12] B.Durand, A.Shen, N.Vereshchagin *Ammann tilings: a classification and an application*. Jan 2013.
- [13] Thomas Fernique, *Penrose Tilings*, Moscow, 2011.
- [14] Martin Gardner, *Penrose Tiles to trapdoor ciphers*, The Mathematical Association of America.

- [15] B.Grunbaum, *Tilings and Patterns*, shephard. New York, W.H. Freeman and Company,1987.
- [16] J.Muñoz, J.A.Hans, A.Fernandez, *Jugando con teselas*, Numeros: Revisa de didactica de las matemáticas, 2011.
- [17] E.O. Harriss, J.S.W. Lamb, *Canonical substitutions tilings of Ammann and Beenker type* Department of Mathematics, Imperial College London, London SW7 2AZ, UK,2004.
- [18] David Hestenes, *Symmetry Groups*,1999.
- [19] Thomas Hooper, *Book of lines, volume 1*, New York, 2009.
- [20] Jarkko Kari, *Tilings and Patterns*, University of Turku, 2012.
- [21] J. Kari, P. Papasoglu, *Deterministic aperiodic tile sets*, Birkhäuser Verlag, Basel 1999.
- [22] Craig S. Kaplan, *A meditation on Kepler Aa*, University of Waterloo, 2006.
- [23] Peter Kramer, *Symmetry in Physics* Institut für Theoretische Physik der Universität Tübingen, Germany, 2010.
- [24] Rick Lakin, *Te Seven Frieze Groups*, 2006.
- [25] Nils Lenngren, *k-uniform tilings by regular polygons*, Uppsala University, 2009.
- [26] Yanxi Liu, Robert T. Collins, *Frieze and Wallpaper Symmetry Groups Classification under Affine and Perspective Distortion*, Carnegie Mellon University, 1998.
- [27] Patrick J. Morandi, *Symmetry Groups:The Classifcation of Wallpaper Patterns Mathematics 482/526*, New Mexico State University, 2007.
- [28] Joseph Myers, *Tiling with Regular Star Polygons*.
- [29] M. O'Keeffe and B. G. Hyde, *Crystal Structures I: Patterns and Symmetry*, Mineralogical society of America. Washington, D.C. 1996.
- [30] Celia M.Pascual, *Cristalografía geométrica*.
- [31] I.Sánchez, *De la diagonalización a las isometrías*, Universidad de Granada, 2014.

- [32] Doris Schattschneider, *The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation*, American Mathematical Monthly, Volume 85, Issue 6, 1978.
- [33] Rich Schwartz, *The Robinson Tiles*, 2007.
- [34] Thomas Q. Sibley, *The Geometric Viewpoint: A Survey in Geometries*, 1998.
- [35] Maxwell Stolarski, *Frieze Groups in \mathbb{R}^2* .
- [36] C.Ruiz et al, *Simetría Dinámica*, Síntesis, Madrid 1989.
- [37] <https://www.uwgb.edu/dutchs/symmetry/aperiod.htm>
- [38] <http://users.utu.fi/jkari/tilings/robinson.pdf>
- [39] <http://www.mathpages.com/home/kmath540/kmath540.htm>
- [40] <http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-weaving>
- [41] <http://dawnaronson.com/page1.html>
- [42] <http://harrisonvargas.blogspot.com.es>
- [43] <http://matesguillena.blogspot.com.es>
- [44] <http://journals.worldnomads.com>
- [45] <http://ainhoayangeles.blogspot.com.es>
- [46] <http://www.ottoskins.com>
- [47] <http://grahamshawcross.com/2012/10/12/aperiodic-tiling>
- [48] <http://mathworld.wolfram.com/PenroseTiles.html>
- [49] <http://commons.wikimedia.org>
- [50] <http://www.musarqourense.xunta.es>
- [51] <http://users.monash.edu.au/~normd/documents/MATH-348-lecture-24.pdf>
- [52] <http://www.acorral.es/notacion.htm>
- [53] <http://www.math.arq.uva.es/gycga/apuntes/NotaCristal/NotaCristal.html>

- [54] <http://www.quimicaweb.net>
- [55] <http://www.delikatissen.com>
- [56] <http://catralexport.com>
- [57] <http://britton.disted.camosun.bc.ca>
- [58] <http://www.mcescher.com>
- [59] <http://champagnedesign.files.wordpress.com>
- [60] <http://www.josleys.com>
- [61] <http://www.wallpaperfo.com>
- [62] SOFTWARE UTILIZADO: *GeoGebra*.