

Plantilla ejemplo

Ejemplo GeoGebra

Teorema 0.1. *En cualquier grupo de seis personas existen siempre tres que se conocen mutuamente, o que se desconocen entre sí.*

Nota

Es útil abordar este problema con la terminología de grafos. Se considera un grafo con 6 vértices, donde cada vértice es una persona distinta, y los segmentos que los unen son las relaciones entre ellos. A este tipo de grafo se le conoce como grafo completo. En particular, cuando un grafo tiene n vértices y cada par de vértices está conectado, se le denota como K_n .

Tip

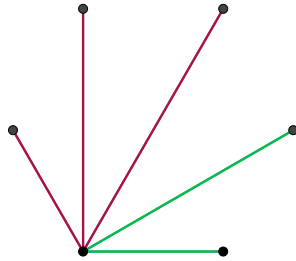
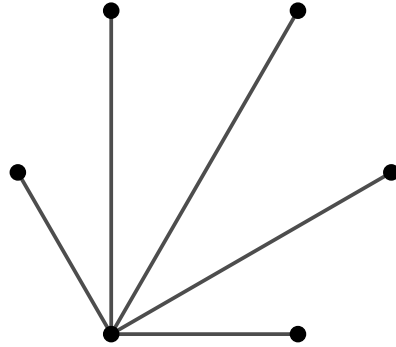
Por ejemplo, un grafo completo de 3 vértices se representa como K_3 , o como un ciclo de longitud 3 C_3 , conocido como triángulo.

Se considera ahora un K_6 , que tiene un total de 15 aristas. Si se colorean las aristas con rojo o verde dependiendo de si las personas representadas por los vértices incidentes son conocidas o desconocidas entre sí, respectivamente, el **teorema de la amistad** establece lo siguiente:

Independientemente de cómo se colorean las aristas de K_6 con rojo o verde, siempre habrá un triángulo rojo, es decir, un conjunto de tres personas que son mutuamente desconocidas, o un triángulo verde, que representa tres personas que se conocen entre sí.

Demostración

Se elige uno de los vértices P . Se encuentran 5 aristas incidentes sobre P , cada una coloreada con color rojo (desconocidos) o verde (conocidos). Se aplica el **Principio del Palomar** que afirma que, al menos, 3 aristas son del mismo color.



Sean A, B, C los otros vértices de estas 3 aristas del mismo color, supongamos que son de color rojo. Si alguna de las aristas AB, AC, BC es roja, junto a las aristas incidentes sobre P se encuentra el triángulo rojo (personas desconocidas entre sí). Si ninguna de las 3 aristas

anteriores es roja, se tiene que las 3 son verdes obteniendo un triángulo de color verde ABC (personas mutuamente conocidas).

