



Universidad de Granada

## Trabajo Fin de Máster

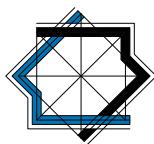
JUAN CAPARRÓS COBO

# Aplicación de GeoGebra a la resolución de problemas

**Tutores:** *María Burgos Navarro*  
Departamento de Didáctica  
de la Matemática

Septiembre 2017

*Pedro A. García Sánchez*  
Departamento de Álgebra



MÁSTER EN MATEMÁTICAS – FACULTAD DE CIENCIAS



---

# Índice general

---

<b>1. Clásicos</b>	<b>4</b>
1.1. Raíz cuadrada de Euclides . . . . .	4
1.2. La esfera de Arquímedes . . . . .	8
1.3. Teorema de Pappus y Pascal . . . . .	16
1.3.1. Teorema del hexágono de Pappus . . . . .	16
1.3.2. Teorema de Pascal . . . . .	17
1.4. Completación de cuadrados: Babilonia y el islam . . . . .	22
1.4.1. Mesopotamia . . . . .	22
1.4.2. Islam . . . . .	25
1.5. La cúbica de Omar Khayyam . . . . .	29
1.6. Espiral de Fibonacci, proporción áurea . . . . .	30
1.7. Recta y círculo de Euler . . . . .	36
1.7.1. Recta de Euler . . . . .	37
1.7.2. Círculo de Euler . . . . .	41
<b>2. Problemas de aproximación</b>	<b>44</b>
2.1. Raíces Babilónicas . . . . .	44
2.2. Problema de exhaución de Arquímedes . . . . .	46
2.3. Método del Kai-Fan y Fan Fa . . . . .	51
2.3.1. Método del kai-fan . . . . .	51
2.3.2. Método del Fan Fa . . . . .	52
2.4. Método de integración de Montecarlo . . . . .	54
2.4.1. Integral de Montecarlo . . . . .	56
2.4.2. Método de Montecarlo por bombardeo . . . . .	58
2.5. Método de Simpson . . . . .	59

---

# Introducción

---

GeoGebra es un software matemático interactivo escrito en lenguaje Java. Es de carácter libre y fue creado por su autor para apoyar la educación en sus diversas etapas, desde el colegio hasta la universidad.

Una de las cualidades más destacables del programa GeoGebra es su versatilidad. Es esta cualidad la que lo convierte en una herramienta interesante en actividades como la docencia y la investigación, que se pueden llevar a cabo en campos como las matemáticas, la física y la economía.

Una de las motivaciones principales por los que he realizado el Máster en Matemáticas es la de perfeccionar y ampliar mis conocimientos matemáticos para posteriormente poderlos aplicar en la docencia. Fue así como surgió la posibilidad de realizar el trabajo final de máster relacionado con el programa informático de carácter libre GeoGebra.

Entre las diversas posibilidades que presenta GeoGebra, encontramos construcciones geométricas de todo tipo, representaciones gráficas, hojas de cálculo, etc. Estas posibilidades permiten acercar conceptos abstractos a los alumnos, facilitando así el proceso de transferencia enseñanza - aprendizaje.

Este trabajo final de máster, pretende guiar la resolución de problemas clásicos con construcciones basadas en GeoGebra. Por ejemplo, construcciones geométricas ilustran el problema del cálculo del volumen de la esfera dada por Arquímedes; uso de hojas de cálculo para resolver problemas de aproximación como el método de Simpson y el método de integración de Montecarlo; y representaciones gráficas para el método de Kai-fan y Fan-fa, entre otros.

GeoGebra no sólo se ha utilizado en este trabajo para crear applets que recrean las soluciones clásicas dadas a los problemas que hemos seleccionado, también se ha empleado para ilustrar demostraciones. Casi todas las figuras de esta memoria están realizadas con GeoGebra.

La memoria engloba problemas clasificados por orden de antigüedad, lo cual nos ha ayudado a contextualizarlos temporal y geográficamente. Por ejemplo el estudio de las raíces cuadradas ha sido atacado desde el punto de vista griego, mesopotámico, islámico y chino.

El interés por estos problemas es que son susceptibles de ser realizados como talleres en secundaria. Algunos de ellos ya se han llevado a la práctica.

# CLÁSICOS

## 1.1. Raíz cuadrada de Euclides

Sabemos muy poco sobre la vida de **Euclides de Alejandría** (aproximadamente 325-265 a.C.). Las leyendas lo pintan como un viejo amable y gentil que hacía muy poco hincapié en los aspectos prácticos de la materia. Se sabe que impartió matemáticas en el Museo de Alejandría durante el reinado de Ptolomeo I. El Museo era más un instituto de investigación que una universidad como la concebimos hoy en día. En él no existía una enseñanza reglada, sino una transmisión de conocimientos de sabios expertos a jóvenes capaces. Por el carácter de la obra de Euclides se puede suponer que habría estudiado con los discípulos de Platón.

Fue un gran sintetizador. Euclides escribió al menos diez textos sobre matemáticas, pero sólo cinco de ellos han llegado hasta nuestros días a través de copias posteriores. Los cinco supervivientes euclidianos son *los Elementos, la División de figuras, los Datos, los Fenómenos y la Óptica*. (Para más información sobre Euclides puede consultarse [5, El autor de los Elementos] y [29, páginas 30-31].)

*Los Elementos* es la obra maestra geométrica de Euclides, y ofrece un tratamiento definitivo de la geometría de dos y tres dimensiones. Se divide en 13 libros, que se siguen unos a otros de manera lógica.

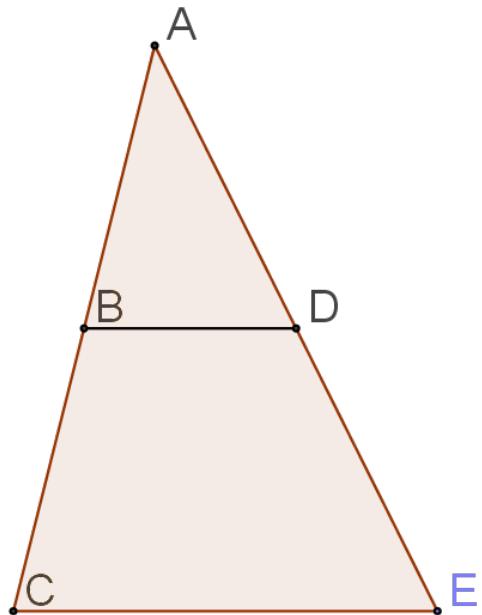
De entre sus múltiples resultados y por el interés que suscita en los siguientes epígrafes, nos centraremos en el método de cálculo de la raíz cuadrada de un número positivo. Serán necesarias algunas definiciones previas (pueden consultarse en [31]).

Se llama **proporción** a la relación de las magnitudes de dos o más elementos o de las partes de algo con la totalidad.

Dos **magnitudes** son **directamente proporcionales** si al multiplicar o dividir una de ellas por un número, la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número.

La **constante de proporcionalidad** es el cociente entre dos magnitudes directamente proporcionales.

**Teorema 1.1.1. (de Tales [11, Teorema de Thales])** *Si en un triángulo se traza una linea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.*

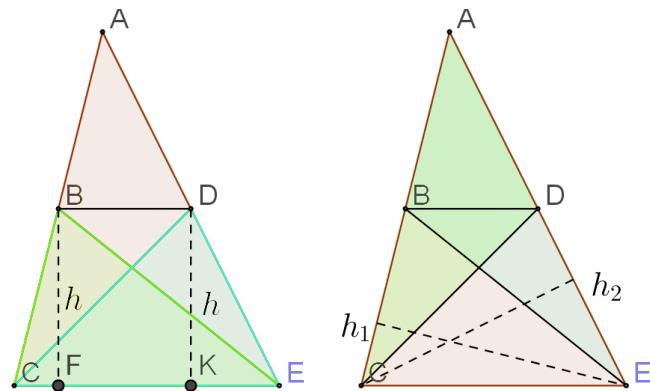


*Demostración.* La demostración de esta primera aproximación del teorema de Tales la dividiremos en una serie de etapas.

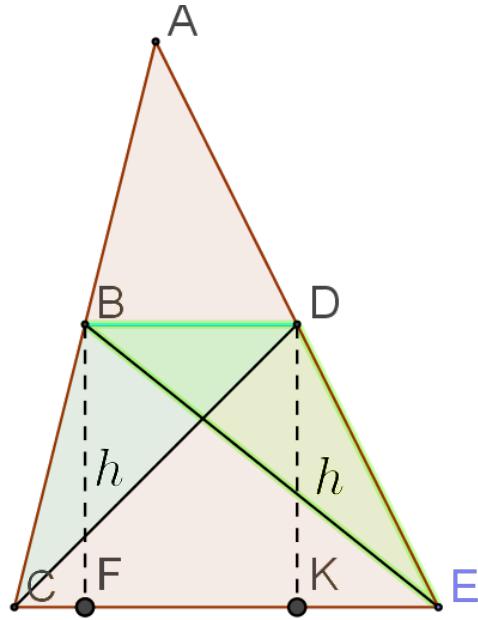
- El área del triángulo CED es igual a la del triángulo CEB. Ambos tienen la misma base y altura  $h$  (distancia entre los segmentos paralelos CE y BD). Obtenemos pues la siguiente relación

$$\frac{AD \times h_2}{2} = \frac{AB \times h_1}{2}$$

necesaria para los cálculos posteriores, donde  $h_1$  es la altura del triángulo DBE en el cual hemos tomado el lado DB como base, y  $h_2$  es la altura del triángulo CDE, en el que se toma como base el lado DE.

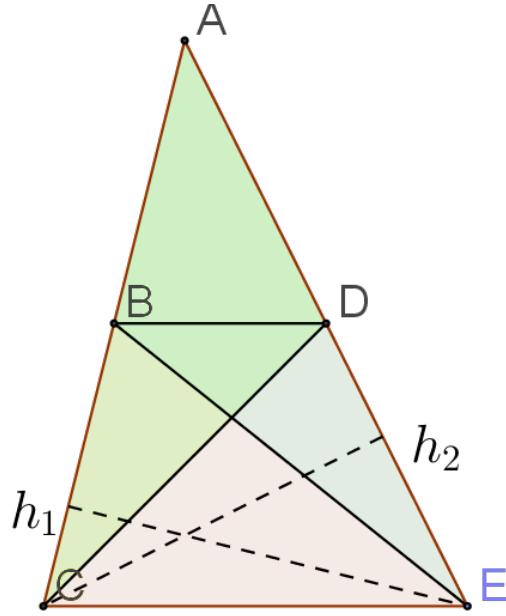


- El área del triángulo CBD es igual a la del triángulo EBD. Ambos tienen la misma base y altura  $h$  (distancia entre los dos segmentos paralelos).



- El área del triángulo CDA es igual a la del triángulo EBA. Este resultado es obvio si consideramos que a los triángulos del apartado anterior se les ha sumado la misma cantidad, a saber, el área del triángulo ABD. Tenemos así

$$\frac{DE \times h_2}{2} = \frac{BC \times h_1}{2}.$$



Despejando y dividiendo

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DE} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}.$$

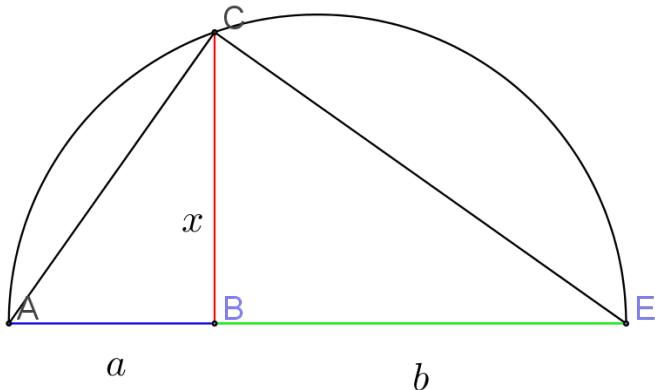
□

**Definición 1.1.1.** Dados dos segmentos  $a$  y  $b$ , la **media proporcional** es otro segmento  $x$  tal que  $a$  es a  $x$  como  $x$  es a  $b$ , esto es,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

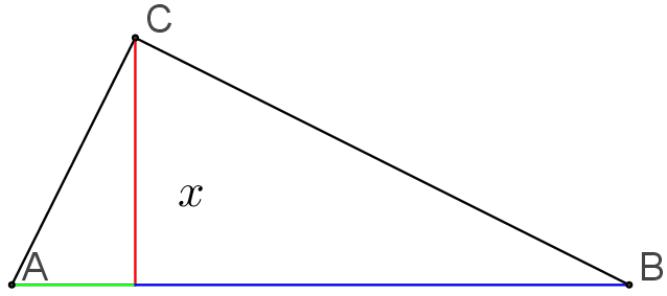
Obsérvese que, si  $x$  es la media proporcional de  $a$  y  $b$ , entonces  $x^2 = ab$ . En particular, si  $a$  es un entero positivo y tomamos  $b = 1$ ,  $x$  es pues la raíz cuadrada (positiva) de  $a$ .

Sean  $a$  y  $b$  dos segmentos de tamaño arbitrario, que podemos considerar situados sobre la misma recta. Tomemos la semicircunferencia centrada en el punto medio del segmento unión de  $a$  y  $b$  que parte del origen A del segmento  $a$  y tiene como final el punto E del segmento  $b$ . Sea C el punto de intersección de la semicircunferencia y la perpendicular a los dos segmentos que pasa por el nexo de unión de los mismos, B.



Según la Proposición III.31 de los Elementos de Euclides (véase la prueba del Teorema 1.2.1, página 7) el triángulo ACE es un triángulo rectángulo. Como veremos a continuación, la media proporcional de dos segmentos se puede obtener utilizando el Teorema de la altura, consecuencia de la Proposición VI.8 de los Elementos de Euclides. Esta proposición dice: “*Si en un triángulo rectángulo se dibuja una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al triángulo entero y entre sí*”.

**Teorema 1.1.2. (de la altura, [22, Sección 5.6])** *En todo triángulo rectángulo, la altura trazada sobre la hipotenusa es media proporcional entre los dos segmentos en que divide a ésta.*



## 1.2. La esfera de Arquímedes

**Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.)** Arquímedes nació en Siracusa, en la Magna Grecia (la actual Sicilia). Hijo del astrónomo Fideas, visitó Alejandría (Egipto) donde por un tiempo se cree que estudió con los discípulos de Euclides y mantuvo correspondencia con los matemáticos alejandrinos. Son pocos los detalles que conocemos de su vida; la escasa información acerca de él se tiene gracias a la historia de la vida del general Marcelo escrita por Plutarco.

Sus habilidades matemáticas fueron insuperables y de amplio espectro. Les dio un uso práctico y construyó enormes máquinas (garfios, catapultas, palancas, etc) que contribuyeron a la defensa de su ciudad, Siracusa, frente al asedio romano.

Sus libros conservados (sólo en copias posteriores) son: *Sobre equilibrios en el plano*, *La cuadratura de la parábola*, *Sobre la esfera y el cilindro*, *Sobre los cuerpos flotantes*, *Medidas del círculo* y *El arenario*, que junto con *El Método* fue descubierto en 1906 por Johan Heiberg. (Véanse [5, El asedio de Siracusa] y [29, pág 36].)

### El volumen de la esfera

El método propuesto por Arquímedes está descrito en la Proposición 2 de *El Método*. La demostración que damos a continuación se basa en [5, El volumen de la esfera] y [12]. Para su mejor lectura, he añadido algunas aclaraciones explicando los pasos intermedios.

**Teorema 1.2.1.** *Cualquier segmento esférico es al cono de la misma base y la misma altura en la misma razón que la suma del radio de la esfera y la altura del segmento complementario es a la altura del segmento complementario.*

*Demostración.* El teorema se sigue de una propiedad de equilibrios que descubrió Arquímedes y que puede comprobarse fácilmente en términos de formas modernas. Sea AQDCP una sección diametral de una esfera de centro O y diámetro AC (Figura 1.1), y sea AUV una sección plana del cono circular recto de eje AC y con UV como diámetro de la base. Sea IJUV un cilindro circular recto de eje AC y de diámetro IJ = UV, y sea por último AH = AC. Si trazamos un plano perpendicular al diámetro AC

por uno de sus puntos S, este plano cortará al cono, a la esfera y al cilindro en círculos de radios  $r_1 = SR$ ,  $r_2 = SP$  y  $r_3 = SN$ , respectivamente.

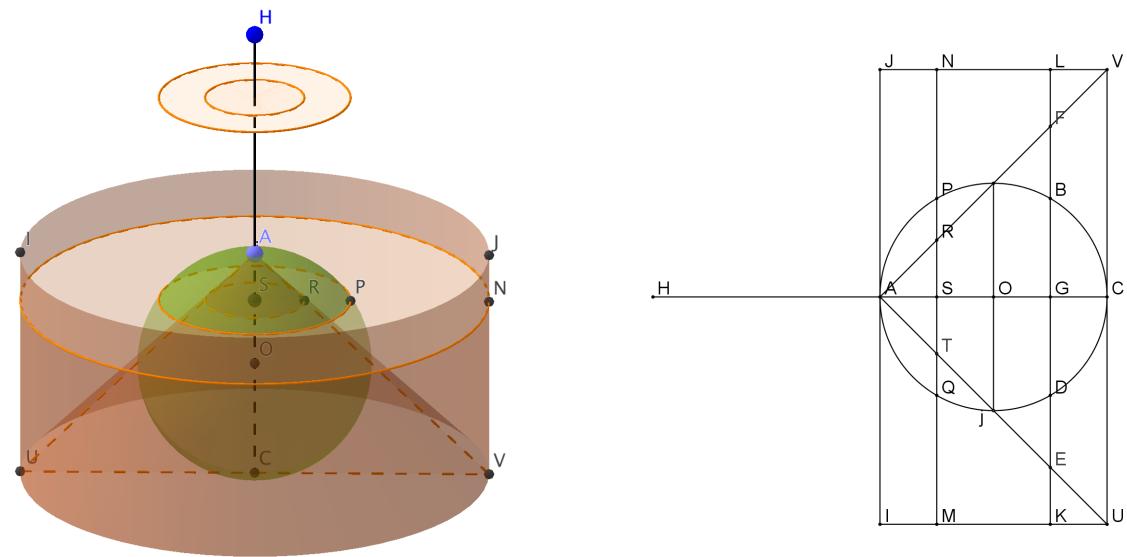
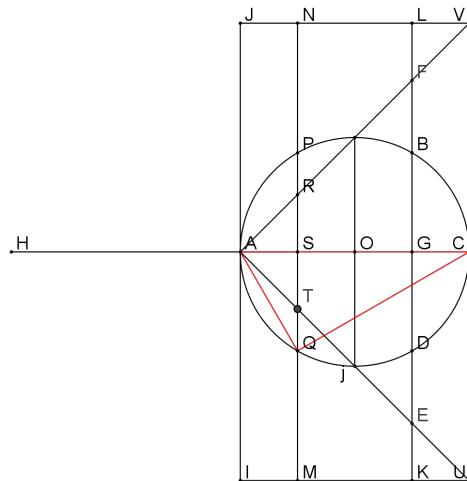


Figura 1.1

De la geometría de la figura, Arquímedes va obteniendo las siguientes identidades:

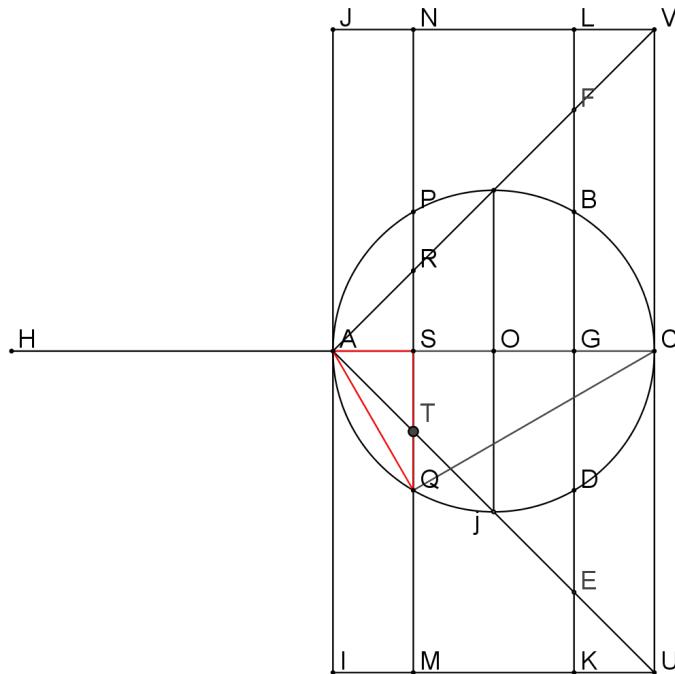
1. La Proposición III.31 de los Elementos de Euclides establece que *un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto*. Por tanto, el triángulo AQC es rectángulo. Si aplicamos el Teorema del cateto (según el cual, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de un cateto es igual al producto de la hipotenusa por la proyección ortogonal de ese cateto sobre la hipotenusa) a AQ, obtenemos que

$$AQ^2 = AC \times AS.$$



2. Según la Proposición I.47 de los Elementos de Euclides, *en un triángulo rectángulo, el cuadrado sobre el lado opuesto al ángulo recto es igual a la suma de los cuadrados sobre los lados que contienen al ángulo recto*. Si aplicamos este resultado al triángulo rectángulo ASQ, llegamos a

$$AQ^2 = QS^2 + AS^2.$$



3. El triángulo AST es rectángulo e isósceles por lo que  $AS = ST$ . Lo mismo ocurre con el triángulo ASR luego  $AS = ST = SR$ . Por tanto

$$MS \times SR = AC \times AS = (AQ)^2 = (QS)^2 + (SR)^2.$$

4. Recordemos que  $AH = AC$ . Además, como el cono es recto,  $AC = CU = MS$ . Así,

$$\frac{AH}{AS} = \frac{MS}{SR} = \frac{MS^2}{MS \times SR} = \frac{MS^2}{QA^2} = \frac{MS^2}{QS^2 + SR^2}.$$

5. Sean ahora  $A_1, A_2, A_3$  las áreas de los círculos de radio  $r_1, r_2$  y  $r_3$  respectivamente. La Proposición XII.2 de los Elementos de Euclides (véase [15, pág 181]), asegura que *los círculos son unos a otros como los cuadrados de sus diámetros*, por lo que

$$\frac{AH}{AS} = \frac{MS^2}{QS^2 + SR^2} = \frac{r_3^2}{r_2^2 + r_1^2} = \frac{A_3}{A_2 + A_1}.$$

(Para esta igualdad hemos usado que  $\frac{A_1 + A_2}{A_3} = \frac{A_1}{A_3} + \frac{A_2}{A_3}$ , y se ha aplicado la Proposición XII.2 arriba citada.)

*Nota.* La Proposición XII.2 no compara números, sino figuras geométricas: compara círculos con cuadrados, esto es figuras planas de frontera curva con figuras planas de frontera rectilínea. Identifica por tanto el círculo con su área. (Véase [15, pág 181].)

Esta última relación geométrica,

$$\frac{AH}{AS} = \frac{A_3}{A_2 + A_1},$$

es básica para emprender el método mecánico de la palanca: cuando el círculo  $A_3$  del cilindro permanece en su lugar, estará en equilibrio respecto del punto A (fulcro de la palanca) con los círculos  $A_1$  y  $A_2$  trasladados y colocados sobre el punto H, de tal manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea H.

Podemos realizar el mismo proceso para todas las paralelas MN a UV y los círculos que se obtienen sobre la esfera, el cilindro y el cono. Llenamos con tales círculos el cilindro (o segmento de cilindro), la esfera (o segmento de esfera) y el cono (o segmento de cono). Si el cilindro (segmento) permanece en su lugar, estará en equilibrio, respecto del punto A, con la esfera (segmento) y el cono (segmento) juntos, trasladados y colocados sobre la palanca en el punto H, de manera que el centro de gravedad de cada uno de ellos sea H.

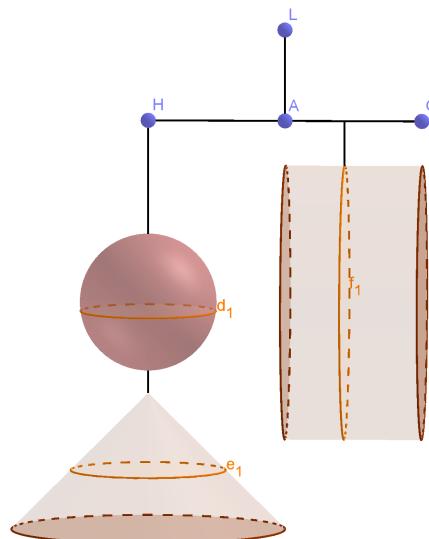


Figura 1.2

Por lo tanto, si llamamos a los volúmenes de la esfera, el cono y el cilindro  $V_1$ ,  $V_2$  y  $V_3$  respectivamente, aplicando el método mecánico, Arquímedes muestra que

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{2}V_3.$$

Según la Proposición XII.10 de los elementos de Euclides,  $V_2 = \frac{1}{3}V_3$ . El volumen de la esfera debe de ser pues igual a un sexto del volumen del cilindro. Dado que el volumen

del cilindro era ya conocido (a partir de los trabajos de Demócrito y Eudoxo), también resulta conocido el volumen de la esfera, que en notación moderna se expresa

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

(Puede consultarse en [5, El volumen de la esfera].) □

Presentamos una demostración alternativa del cálculo del volumen de la esfera basada en [18, pág 33- pág 36].

*Demostración alternativa.* Consideremos una esfera de radio  $r$ , un cono recto cuya base tiene radio  $2r$  y altura  $2r$ , y un cilindro con la misma base y altura que el cono. Superpongamos imaginariamente las tres figuras geométricas tal como se muestra en la Figura 1.3. Tomemos ahora una rebanada de grosor  $d$ , paralela a la base del cono, a una altura arbitraria.

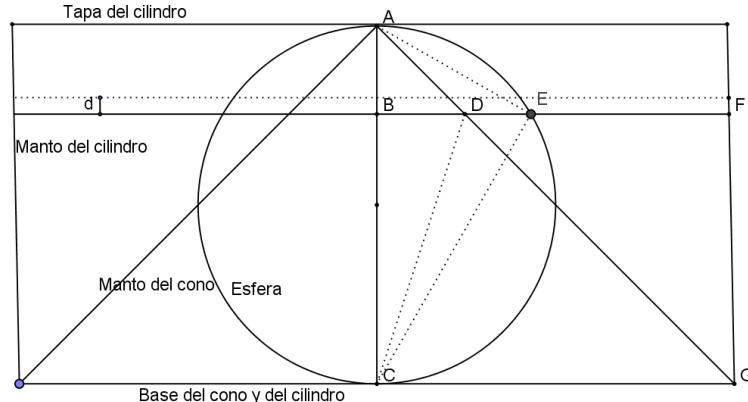


Figura 1.3

El triángulo ABE es rectángulo, luego, aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene

$$AB^2 + BE^2 = AE^2. \quad (1.2.1)$$

Puesto que AEC es un triángulo rectángulo, el Teorema 1.1.2 (de la altura), asegura que

$$\begin{aligned} AB \times BC &= BE^2 \\ &= AE^2 - AB^2, \end{aligned}$$

o sea,

$$\begin{aligned} AE^2 &= AB^2 + AB \times BC \\ &= AB \times (AB + BC) \\ &= AB \times AC. \end{aligned}$$

Usando esta igualdad en (1.2.1) y teniendo en cuenta que por construcción  $AB = BD$  (el ángulo de elevación del cono es de  $45^\circ$ ), se obtiene:

$$BE^2 + BD^2 = AB \times AC.$$

Multipliquemos ambos lados de la última ecuación por  $2r$  y usemos el hecho de que  $2r = AC = BF$ . De esta manera se obtiene

$$2R \times (BE^2 + BD^2) = BF^2 \times AB.$$

Multiplicando esta última igualdad en ambos lados por  $\pi \times d$  se obtiene finalmente que

$$2r \times [\pi \times BE^2 \times d + \pi \times BD^2 \times d] = [\pi \times BF^2 \times d] \times AB.$$

Notemos ahora que el término que aparece en el corchete al lado derecho de la última identidad corresponde al volumen de la rebanada del cilindro, mientras que en el corchete del lado izquierdo se tiene la suma de los volúmenes de la rebanada del cono más el de la esfera. Ahora, tal como hizo Arquímedes, reinterpretaremos esta ecuación desde el punto de vista de la Ley de la palanca [5, La ley de la palanca]. De acuerdo a esa ley para palancas de dos brazos, si se colocan las rebanadas del cono y de la esfera a un lado a una distancia  $2r$  del fulcro (centro), y al otro lado la rebanada del cilindro a una distancia  $AB$ , la balanza se encontrará en equilibrio.

Imaginemos que dividimos la esfera, el cono y el cilindro en infinitas rebanadas infinitamente delgadas y realicemos para todas ellas el proceso recién descrito. Al concluir tendremos a un lado de la balanza, a una distancia  $2r$ , colgados la esfera y el cono, mientras que al otro lado estarán colgadas (a una distancia de  $2r$  del pivote) las distintas rebanadas del cilindro. Podemos desplazar las rebanadas del cilindro hasta tener finalmente todo el cilindro colgado a una distancia  $r$  del pivote.

Usando la Ley de la palanca y recordando que la masa de las figuras es directamente proporcional a su volumen, se deduce que

$$2r(V_{\text{esfera}} + V_{\text{cono}}) = rV_{\text{cilindro}}$$

Conocidos los volúmenes del cilindro

$$V_{\text{cilindro}} = 2r\pi(2r)^2 = 8\pi r^3,$$

y del cono

$$V_{\text{cono}} = 2r \frac{1}{3}\pi(2r)^2 = \frac{8}{3}\pi r^3,$$

se encuentra finalmente que

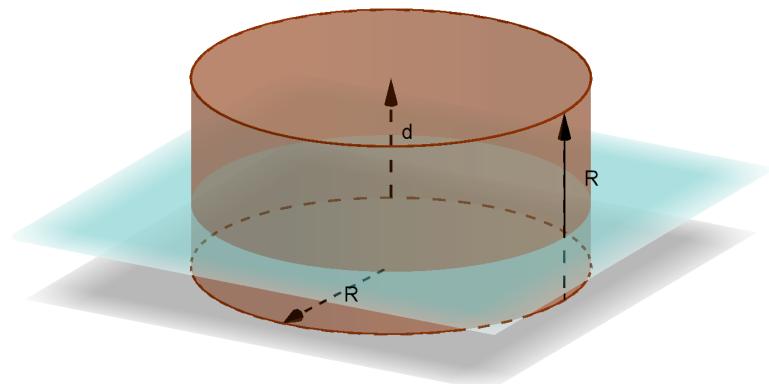
$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

□

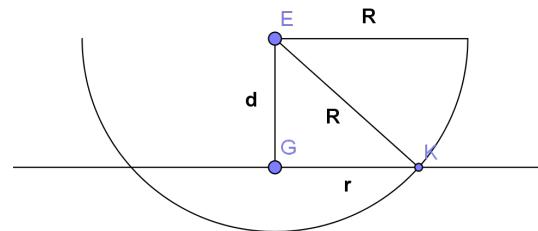
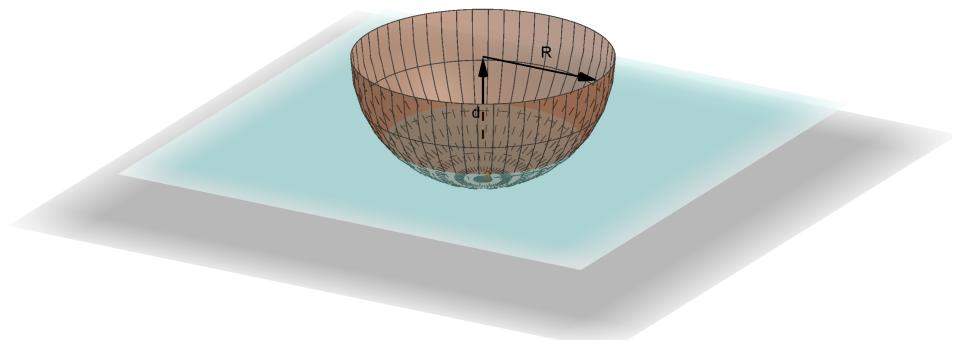
Por último revisaremos una demostración basada en [3].

*Demostración alternativa II.* Se parte de una semiesfera de radio  $R$ , un cono recto y un cilindro circular recto, ambos con base de radio  $R$ . Cortamos las tres figuras con un plano paralelo a la base del cilindro que quedará a una distancia  $d$  de la parte superior de las tres figuras.

- La sección del cilindro es una circunferencia de radio  $R$ .

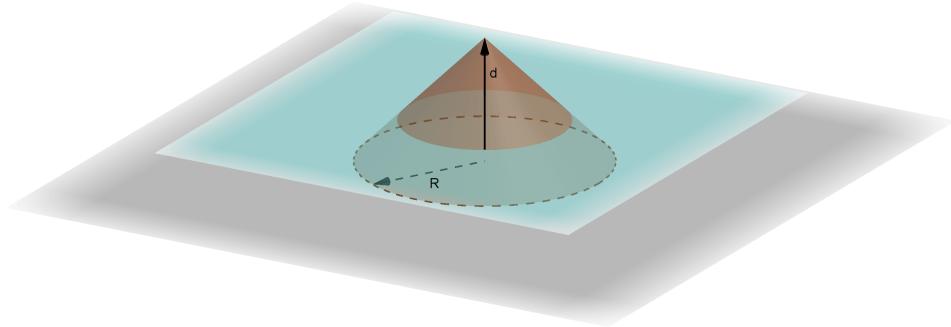


- La sección de la semiesfera también es una circunferencia de radio  $r$ .



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo EGK,  $r^2 + d^2 = R^2$ .

- La sección del cono es una circunferencia de radio  $d$ , ya que el cono es recto.



Por tanto,

$$\pi R^2 = \pi(r^2 + d^2) = \pi r^2 + \pi d^2,$$

a saber,

**Sección cilindro= Sección semiesfera + Sección cono.**

Dado que las colecciones de todos los indivisibles correspondientes de las figuras (planos) tienen la misma cantidad de magnitud, se puede aplicar el principio de Cavalieri a la colección de figuras para así obtener que el volumen del cilindro es la suma del volumen de la semiesfera y el volumen del cono. Conocidos los volúmenes de la semiesfera y el volumen del cilindro y del cono:

$$V_{\text{cilindro}} = \pi R^3, \quad V_{\text{cono}} = \frac{1}{3} \pi R^3,$$

se tiene pues

$$V_{\text{semiesfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{cono}} = \pi R^3 - \frac{1}{3} \pi R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3.$$

Finalmente, multiplicando por dos obtenemos el volumen de una esfera de radio  $R$ :

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

□

Una vez finalizada esta sección, me gustaría resaltar los distintos usos que hemos hecho del programa GeoGebra. El primero ha sido la elaboración de representaciones gráficas que apoyaban las distintas demostraciones usadas. El segundo uso ha sido la creación de dos applets que se corresponden con la figuras 1.1 y 1.2, respectivamente.

Ambos applets desarrollan animaciones basadas en la intersección de las superficies con planos que varían en función de un parámetro. El primero (figura 1.1) adapta los pasos de la prueba geométrica, y el segundo (figura 1.2) recurre a la aplicación de la ley de la palanca en la demostración.

## 1.3. Teorema de Pappus y Pascal

### 1.3.1. Teorema del hexágono de Pappus

**Pappus de Alejandría** (290-350 a.C.) fue el último gran matemático de la escuela alejandrina. Hacia el año 320 escribió su obra más importante, *Colección matemática*. Ésta constaba originariamente de ocho libros, de los cuales el primero y la primera parte del segundo se han perdido. No obstante se puede conjeturar qué tipo de material se ha perdido por encontrarse en otras obras.

*La Colección* es una obra importante por diversos motivos. El primero es que nos presenta un panorama histórico de máximo valor de partes de la matemática griega que de otra manera serían desconocidas por tratarse de obras perdidas. La segunda es que incluye demostraciones alternativas y lemas suplementarios a proposiciones de Euclides, Arquímedes, Apolonio y Ptolomeo. Por último, este tratado incluye nuevos descubrimientos y generalizaciones que no se encontraban en ninguna obra anterior [5, Pappus de Alejandría]. Entre estos aportes figura Teorema del hexágono de Pappus. Puede considerarse como un caso particular del Teorema de Pascal que afirma lo mismo para cualquier cónica y no sólo para un par de rectas (que podemos considerar como una cónica degenerada).

**Teorema 1.3.1** (del hexágono de Pappus, [19, Theorem 1.2]). *Si en un par de rectas se escogen tres puntos al azar en cada una de ellas y se unen dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen estarán en una línea recta.*

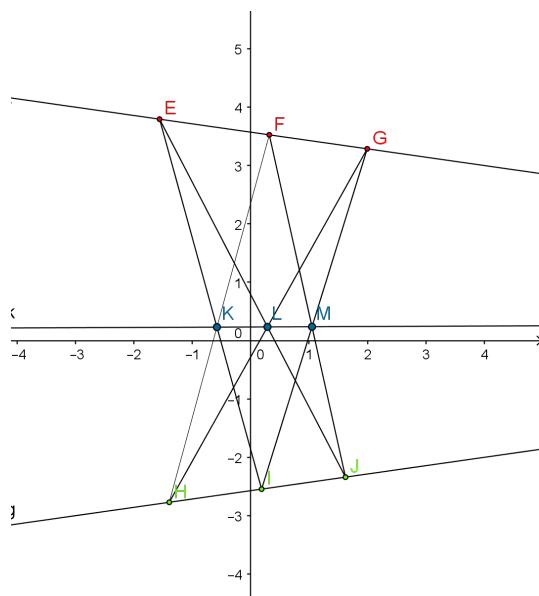


Figura 1.4

No demostraremos este teorema y sí el de Pascal, porque como hemos dicho con anterioridad, el Teorema de Pappus se puede considerar como un caso degenerado del teorema de Pascal.

### 1.3.2. Teorema de Pascal

Es imposible empezar esta sección sobre el Teorema de Pascal sin hacer una breve mención sobre la vida del genial matemático **Blaise Pascal** (1623-1662 a.C.). Pascal nació en el seno de una familia noble en la ciudad de Clermont y pronto demostró ser un auténtico prodigo de las matemáticas. A los catorce años ya acompañaba a su padre, Étienne Pascal, a las reuniones informales de la *Academia de Mersenne* en París. Aquí fue donde se familiarizó con las ideas de Desargues, y dos años más tarde, cuando contaba sólo con diecisésis años, publicó su *Essay pour les coniques*.

Este artículo consistía en una única hoja impresa, donde aparece la proposición que el autor describe como el *mysterium hexagrammicum*, y que se conoce desde entonces como el teorema de Pascal. (Más información puede encontrarse en [5, Blaise Pascal].)

**Teorema 1.3.2** (de Pascal, [5]). *Si un hexágono arbitrario ABCDEF se encuentra inscrito en alguna sección cónica, y se extienden los pares de lados opuestos hasta que se cruzan, los tres puntos IPQ en los que se intersecan se encuentran ubicados en una línea recta, denominada la recta de Pascal de esta configuración.*

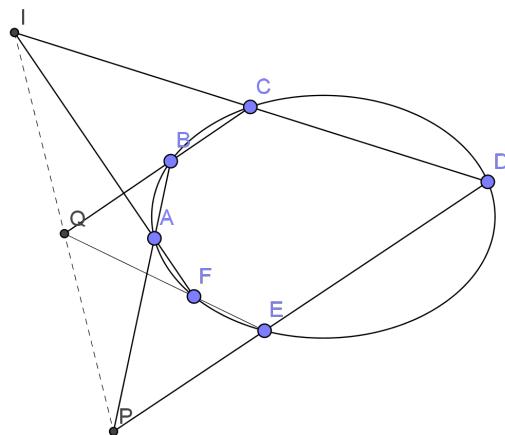


Figura 1.5

Pascal obtiene como consecuencia de este teorema un procedimiento para construir la tangente a una cónica por un punto de ella [5, Blaise Pascal].

Además de estos resultados, Pascal es conocido por sus contribuciones al diseño y construcción de calculadoras mecánicas (pascalina), aportes a la teoría de la probabilidad (triángulo de Pascal), investigaciones sobre fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío.

Otra versión conocida del teorema del hexágono de Pascal, es la dada para un hexágono auto-intersecante inscrito en una elipse. Los puntos alineados (recta de Pas-

cal) resultan del corte de los propios lados del polígono, sin necesidad de prolongarlos. Puede consultarse en [7].

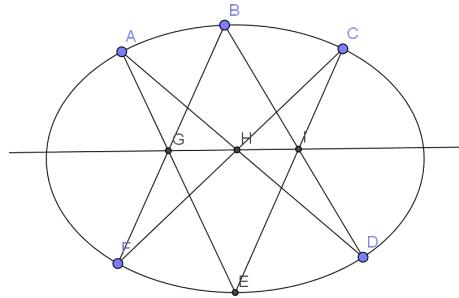


Figura 1.6

**Teorema 1.3.3.** *Los puntos P, Y y X de intersección de los tres lados opuestos AQ y BZ, BC y AR, QC y RZ, respectivamente, de un hexágono no necesariamente convexo, AQCZR, inscrito en una circunferencia, están en una recta.*

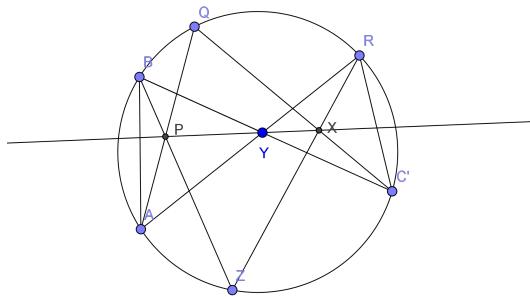
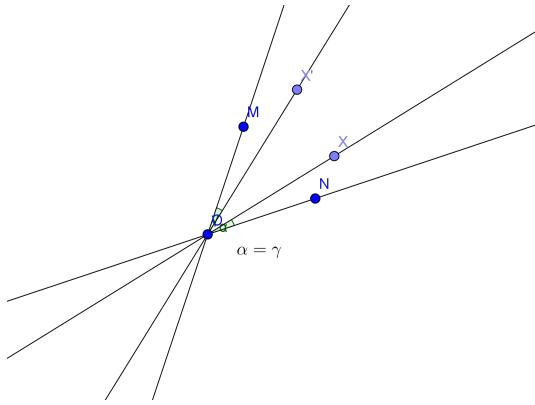


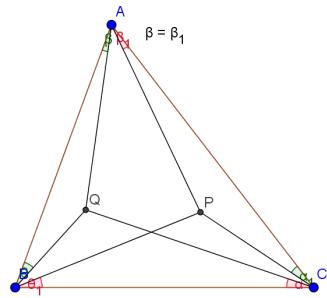
Figura 1.7

Para la demostración de esta versión del Teorema de Pascal, necesitaremos la definición de rectas conjugadas isogonales y el teorema de J. J. A. Mathieu incluidos en [7]; así como la definición de cuadrilátero cíclico (véase [22, páginas 213 - 214]).

**Definición 1.3.1.** Sean OX y OX' rayos que pasan por el vértice O del ángulo MON simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo MON. Entonces OX y OX' se llaman par de **rectas conjugadas isogonales** para el ángulo MON.

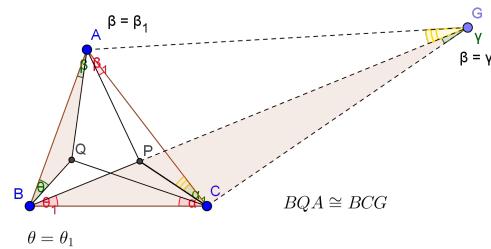


**Teorema 1.3.4** (de J. J. A. Mathieu, [7]). *Si  $BP$  y  $BQ$  son conjugadas isogonales del ángulo  $CBA$  del triángulo  $ABC$ , y también  $CP$  y  $CQ$  son conjugadas isogonales para el ángulo  $ACB$ , entonces  $AP$  y  $AQ$  son conjugadas isogonales para el ángulo  $BAC$*

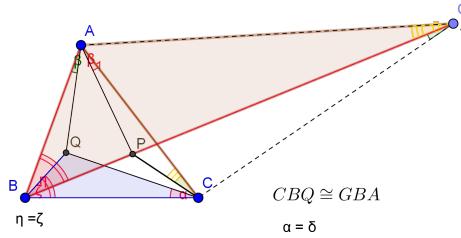


Para su mejor lectura, he añadido algunas aclaraciones explicando los pasos intermedios de las demostraciones.

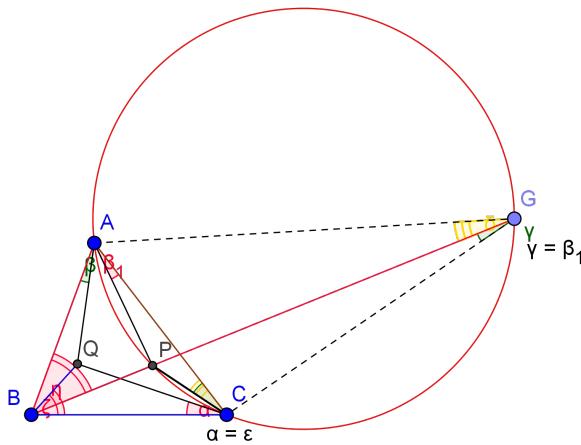
*Demostración.* Prolongamos  $BP$  hasta  $G$  de modo que los ángulos  $BGC$  y  $BAQ$  sean iguales y los denotaremos por  $\beta$ . Los triángulos  $BQA$  y  $BCG$  son semejantes porque tienen dos parejas de ángulos iguales,  $BGC$  y  $BAQ$  y los ángulos  $ABQ$  y  $GBC$  que también son iguales por ser  $CP$  y  $CQ$  conjugadas isogonales.



Por semejanza de triángulos  $BC = BQ \times k$  y  $BG = AB \times k$  donde  $k$  es la constante de proporcionalidad. Como  $\angle CBQ = \angle PBA$ , tendremos que los triángulos  $CBQ$  y  $GBA$  también son semejantes. Así los ángulos  $\angle BCQ$  y  $\angle BGA$  son iguales.



Pero como los ángulos  $\angle BCQ$  y  $\angle PCA$  son iguales, el cuadrilátero  $CPCA$  se puede inscribir en una circunferencia. Entonces los ángulos  $\angle PGC$  y  $\angle PAC$  coinciden, es decir  $\beta = \beta_1$ .

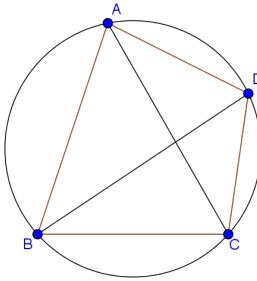


□

**Definición 1.3.2.** Un **cuadrilátero cíclico** es aquel cuyos cuatro vértices se encuentran en una misma circunferencia. (De ellos se dice que son concílicos.)

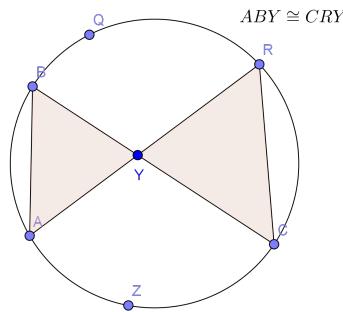
Una condición necesaria y suficiente para que un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , sea cíclico, es que los ángulos que forman un lado y una diagonal y el lado opuesto con la otra diagonal sean iguales, es decir:

- $BAC = BDC$ ,
- $ADB = ACB$ ,
- $DCA = DBA$ ,
- $CBD = CAD$ .

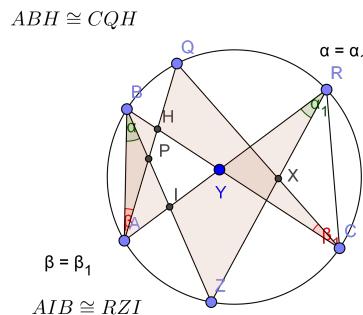


Con los resultados anteriores podemos comenzar con la demostración del Teorema 1.3.3.

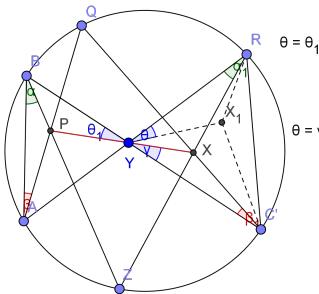
*Demuestra*ón. Hemos llamado P, Y y X a los puntos de intersección de los tres lados opuestos AQ y BZ, BC y AR, QC y RZ, respectivamente. Los triángulos ABY y CRY son semejantes, por ser ABRC un cuadrilátero cíclico.



Como puede verse en la siguiente construcción, los puntos P y X no son homólogos, es decir, no se encuentran en la misma posición en los dos triángulos semejantes. Entonces,  $BAQ = BCQ = \beta = \beta_1$  y  $ABZ = ZRA = \alpha = \alpha_1$ , dado que los pares de triángulos BHA y QHC, y ABI y ZIR son semejantes.



Construimos el punto  $X_1$  homólogo de  $P$ . Entonces  $RYX_1 = \theta = BYP = \theta_1$  y por el teorema anterior, el ángulo  $XYC = \gamma$  sera igual a  $\theta$  puesto que  $YX$  y  $X_1Y$  son isogonales. Esto prueba que  $P, Y$  y  $X$  son colineales.



□

La aportación del GeoGebra a esta sección ha sido el diseño de representaciones gráficas para apoyar las demostraciones, y la creación de tres applets, figuras 1.4, 1.5, 1.6, y 1.7. Estos applets permiten ver como varían las rectas, al mover los puntos dentro de las cónicas.

## 1.4. Completación de cuadrados: Babilonia y el islam

### 1.4.1. Mesopotamia

La resolución de ecuaciones es casi tan antigua como la aritmética. Existen ciertas evidencias en tablillas con escritura cuneiforme, que se remontan hasta el 1700 a.C. de que los babilonios ya resolvían ecuaciones complejas y problemas más sencillos.

En la Tablilla YBC 4652 del periodo babilónico antiguo (1800-1600 a.C) se pueden encontrar 11 problemas de ecuaciones lineales para resolver, si bien el texto de la tablilla indica que originariamente había 22. En estas tablillas era común el uso del método de la *falsa posición*, también usado en Egipto. Sin el concepto de números negativos y sin la manipulación simbólica, encontrar una solución a estos problemas no era tan simple.

Históricamente son más importantes las aportaciones de la matemática babilónica a las ecuaciones cuadráticas, que en formulación moderna toman la siguiente forma,

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

El enfoque babilónico para resolver las ecuaciones cuadráticas se ejemplifica en un problema en la Tablilla BM 13901, en el que se quiere resolver una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx = c,$$

donde los coeficientes toman los valores siguientes:  $a = 11$ ,  $b = 7$  y  $c = 6;15$ . Nótese que  $6;15$  es la forma simplificada de la notación sexagesimal babilónica  $6 + \frac{15}{60}$ . La tablilla le da una especie de receta al lector, que transcribimos a continuación en notación moderna.

1. Multiplicar  $c$  por  $a$ , lo que da  $ac$ .
2. Dividir  $b$  por 2, que es  $\frac{b}{2}$ .
3. Elevar  $\frac{b}{2}$  al cuadrado para obtener  $\frac{b^2}{4}$ .
4. Sumar esto a  $ac$ , que es  $ac + \frac{b^2}{4}$
5. Tomar su raíz cuadrada  $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}}$ .
6. Restar  $\frac{b}{2}$ , lo que hace  $\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$ .
7. Dividir esto por  $a$ , y la respuesta es  $x = \frac{\sqrt{ac + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}}{a}$ .

(Puede consultarse en [29, Ecuaciones].)

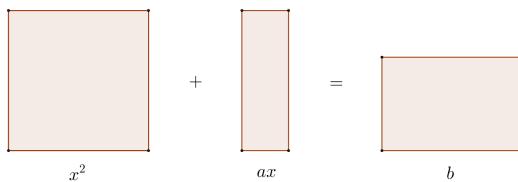
Ante la dificultad que conlleva no poder considerar las raíces negativas, la solución de las ecuaciones cuadráticas completas de la forma  $x^2 + px + q = 0$  donde  $p$  y  $q$  son números positivos, hubo de esperar hasta la época moderna. Así pues, en la época antigua, medieval e incluso a comienzos de la edad moderna, las ecuaciones cuadráticas se clasificaban en tres tipos ([5, Las ecuaciones cuadráticas]):

1.  $x^2 + px = q$ ,
2.  $x^2 = px + q$ ,
3.  $x^2 + q = px$ .

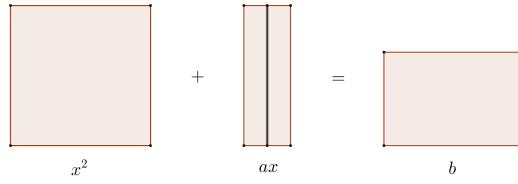
Parece probable que la idea que subyace en el procedimiento babilonio para solucionar ecuaciones, sea la idea geométrica de completar cuadrados [16]. Dicha idea se puede observar en la resolución de un caso particular para  $a = 0;40$  y  $b = 0;35$  de la ecuación del tipo,

$$x^2 + ax = b.$$

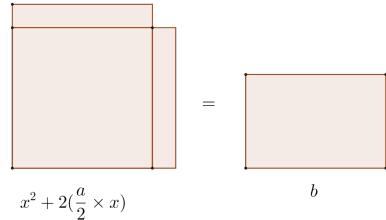
Pensando en áreas de cuadrados y rectángulos,



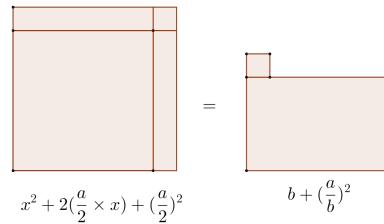
La receta babilónica divide el primer rectángulo en dos piezas,



y las reordena pegándolas en los bordes del cuadrado.



Completabamos el cuadradito que falta en la izquierda y lo añadimos también en la derecha.



Esta representación geométrica es equivalente al siguiente enunciado algebraico,

$$x^2 + 2\left(\frac{a}{2} \times x\right) + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

que se puede reescribir como,

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = b + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Identifica  $x + \frac{a}{2}$  como el lado del cuadrado completo de la izquierda de la representación gráfica. En el primer miembro aparece un cuadrado perfecto. Por tanto,

$$x + \frac{a}{2} = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

donde para obtener la raíz cuadrada que aparece en el miembro de la derecha de la identidad, los babilonios usaban el método que describiremos en la Sección Raíces babilónicas. Finalmente despejamos  $x$  y nos queda,

$$x = \sqrt{b + \left(\frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{2}.$$

(Véase [29, Ecuaciones].)

### 1.4.2. Islam

**Al-Khwarizmi** (780-850 d.C.) fue un matemático, astrónomo y geógrafo, persa-musulmán.

Se cree que estudió y trabajó en Bagdad en la primera mitad del siglo IX, en la corte del califa Al-Mamun, fundador en Bagdad de la *Casa de la Sabiduría*, comparable al *Museo* de Alejandría. Sus *tablas astronómicas, tratados sobre el astrolabio y el reloj de sol*, obras enfocadas en el campo de la astronomía, estaban basadas probablemente en el *Sindhind* recibido de la India. Además escribió dos libros sobre aritmética y álgebra que han desempeñado un papel muy importante en la historia de las matemáticas.

El libro sobre aritmética, nos ha llegado sólo a través de una copia única de una traducción latina del siglo XII con el título de *De numero indorum*. En esta obra Al-Khwarizmi daba una exposición completa del sistema de numeración hindú. Debido a esta obra la palabra *algoritmo*, que deriva del nombre de Al-Khwarizmi, se ha convertido en una palabra de uso común en todos los idiomas.

La palabra *Álgebra* es otra de las palabras trasmitidas gracias a Al-Khwarizmi. Álgebra deriva del título de su obra más importante, el *Hisab Al-jabr wa'l muqabalah*. Esta es una obra totalmente retórica que trata de la exposición directa y elemental de la resolución de ecuaciones, especialmente las de segundo grado. (Véase [5, Al-jabr, Las ecuaciones cuadráticas].)

La traducción latina del Álgebra de Al-Khwarizmi comienza con una breve introducción acerca del principio de notación posicional para los números, y a continuación se expone, en seis breves capítulos, la solución de los seis tipos de ecuaciones que resultan al considerar simultáneamente los tres tipos de cantidades: cuadrados (tesoros), raíces y números (es decir  $x^2$ ,  $x$ , y constantes).

Así, los seis tipos de ecuaciones diferentes son los siguientes:

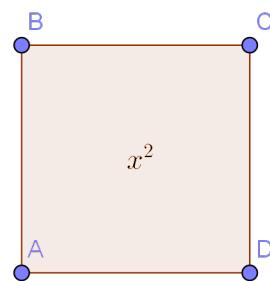
1. raíces iguales a cuadrados:  $bx = ax^2$
2. raíces iguales a números:  $bx = c$ ,
3. cuadrados iguales a números:  $ax^2 = c$ ,
4. cuadrados y raíces iguales a números:  $ax^2 + bx = c$ ,
5. raíces y números iguales a cuadrados:  $bx + c = ax^2$ ,
6. cuadrados y números iguales a raíces:  $ax^2 + c = bx$ ,

([8], [5, Las ecuaciones cuadráticas]) donde  $a$ ,  $b$ , y  $c$  son números enteros positivos. Los tipos 4, 5 y 6 son los más interesantes porque son los tres casos clásicos que presentan las ecuaciones cuadráticas completas. Las soluciones consisten en distintas *recetas* aplicadas a cada caso para “completar el cuadrado”, referidas a ejemplos concretos (veremos un ejemplo a continuación).

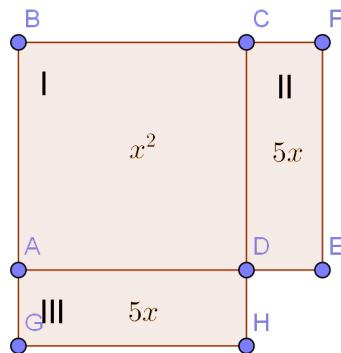
Los capítulos IV, V y VI son los que se encargan de estos tipos de ecuaciones. En los tres sólo aparecen las soluciones positivas. Además, Al-Khwarizmi propone en el capítulo V un ejemplo en el que da las dos soluciones positivas y llama la atención en este caso sobre el hecho de que, lo que nosotros llamamos discriminante de la ecuación, debe ser positivo. En el libro VI, el autor nos advierte que si el coeficiente de la  $x^2$  no es la unidad, entonces se debe reducir la ecuación a esta forma dividiendo ambos miembros por dicho coeficiente.

En el capítulo VI nos encontramos con una frase: “*Ya hemos dicho lo suficiente en lo que se refiere a los números, acerca de los seis tipos de ecuaciones. Ahora es necesario, sin embargo que demostremos geométricamente la verdad de los mismos problemas que hemos explicado con números*”, que pueda servir para situar en la matemática griega la inspiración del álgebra de Al-Khwarizmi. (Véase [5, El padre del álgebra].)

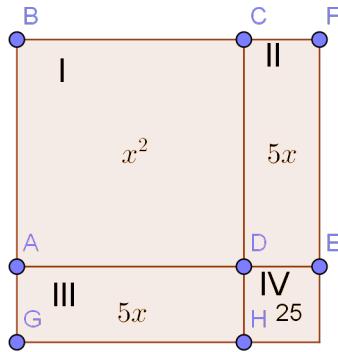
Para resolver la ecuación  $x^2 + 10x = 39$  el autor de Al-Jabr traza un cuadrado ABCD donde AB representa el valor de la incógnita (la raíz)  $x$ .



Prolonguemos CD hasta H y CF hasta F de manera que DH = CF = 5 que es la mitad del coeficiente de la  $x$ . Las áreas de I, II, y III son  $x^2$ ,  $5x$  y  $5x$  respectivamente, la suma de las tres es el primer miembro de la ecuación.



Añadimos a ambos lados el área IV.



El cuadrado completo tiene área  $39 + 25 = 64$  y su lado debe de valer 8. Por lo tanto AD o CD es  $8 - 5 = 3$ . Éste es el valor de  $x$ .

La imagen que representa, sin embargo es

$\frac{25}{4}$	$\frac{5x}{2}$	$\frac{25}{4}$
$\frac{5x}{2}$	$x^2$	$\frac{5x}{2}$
$\frac{25}{4}$	$\frac{5x}{2}$	$\frac{25}{4}$

argumentando que son equivalentes, [4, pág 7 - pág 8].

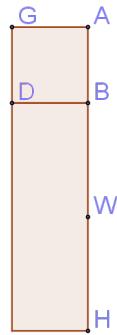
Otra forma de afrontar el problema de encontrar la solución de ecuación cuadrática es el propuesto por el matemático Thabit Ibn-Qurra, que a continuación expomos.

**Thabit Ibn-Qurra** (826-901 d.C.), fue un traductor y comentarista de las obras clásicas griegas. En este empeño, Thabit incluso llegó a proponer modificaciones y generalizaciones a algunos apartados de las mismas, por ejemplo, son ampliamente conocidas la generalización del Teorema de Pitágoras y las modificaciones en la teorías astronómicas de Aristóteles y Ptolomeo (puede consultarse al respecto [5, Thabit Ibn-Qurra]).

Thabit Ibn-Qurra no realiza ninguna operación a la figura, sino que que identifica el problema sin resolver con un problema que ya está resuelto en los Elementos de Euclides. Examinaremos cómo lo hace utilizando como ejemplo la cuarta forma canónica: *cuadrados y raíces iguales a números*, o lo que es lo mismo,  $x^2 + ax = b$ ,

(suponemos que el coeficiente del cuadrado es uno). La primera diferencia de planteamiento con Al-Khwarizmi es que Thabit resuelve la forma canónica tomada como un problema enunciado en términos generales, [23, páginas 97-98].

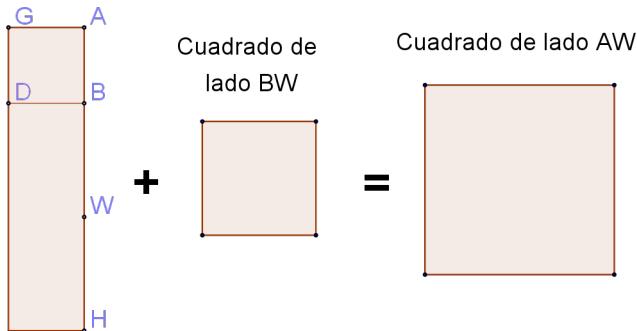
El tesoro  $x^2$  es el cuadrado ABDG, el producto de AB por BH es igual a las raíces del problema,  $ax$ , donde  $a$  es igual a la longitud de BH. El producto de AB por BH es la superficie del rectángulo de vértices opuestos DH que también es igual a las raíces del problema, debido a que AB es igual a BD. Por lo tanto la superficie del rectángulo de vértices opuestos GH es igual al tesoro con las raíces,  $x^2 + ax$ , que es igual al número  $b$  superficie del rectángulo conocido.



La proposición sexta del libro segundo de Euclides, establece lo siguiente.

**Proposición 1.4.1.** *Si se divide en dos partes iguales una linea recta y se le añade, en linea recta, otra recta; el rectángulo comprendido por la recta entera (con la recta añadida) y la recta añadida junto con el cuadrado de la mitad, es igual al cuadrado de la recta compuesta por la mitad y la recta añadida.*

Por tanto, Thabit recurre a esta proposición para cortar en dos mitades la línea BH, en el punto W, de modo que el producto de HA por AB añadido al cuadrado de lado BW es igual al cuadrado de AW.



Ahora bien, el producto de HA por AB es igual a la superficie del rectángulo con vértices opuestos GH (que es conocida) y el cuadrado de lado BW tiene área conocida

$(\frac{a}{2})^2$ . Así, el cuadrado de lado AW es conocido y por tanto lo es el lado AW. Restando de él BW (como lado), que es conocido, obtenemos finalmente AB.

En esta sección hemos utilizado GeoGebra para la creación de representaciones gráficas que apoyan las demostraciones realizadas.

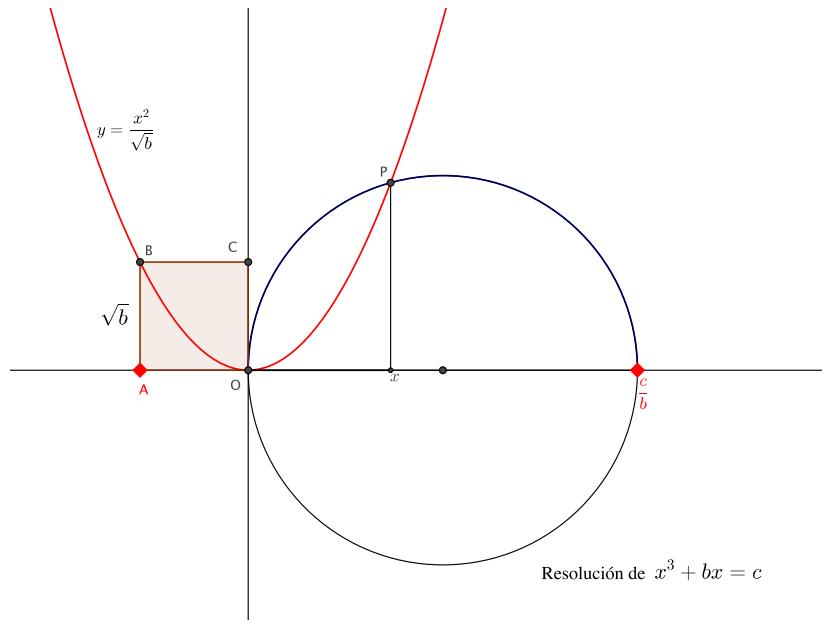
## 1.5. La cúbica de Omar Khayyam

**Omar Khayyam** (1048-1131 d.C.) fue matemático, astrónomo y uno de los más grandes poetas persas. Su obra poética más destacada son los Rubaiyat. La traducción literal de su apellido es “fabricante de tiendas”, profesión de la que se supone habría tradición en su familia.

Khayyam nació y murió en Nishapur, y es en esta ciudad, en donde, junto a la ciudad de Balj recibió una sólida educación en ciencias y filosofía. En 1070 se trasladó a Samarcanda, para completar su *Tesis sobre Demostraciones de Álgebra y Comparación*, bajo el patrocinio del jurista Abú Taher. Ante el reconocimiento y prestigio que adquirió debido a su tesis, Khayyam fue llamado por el sultán Malik Shah I, quien le encargó la construcción de un observatorio astronómico en Marv. (Véanse [5, Omar Khayyam] y [30].)

Siguiendo la tradición de sus predecesores árabes, Omar Khayyam considera dos tipos de soluciones, aritméticas y geométricas, para las ecuaciones cuadráticas. Respecto a las ecuaciones cúbicas en general, únicamente proporcionó soluciones geométricas. Alrededor de 1075, clasificó las ecuaciones cúbicas en 14 tipos y demostró como resolver cada tipo usando intersecciones de cónicas en su obra “*Sobre las demostraciones de los problemas de álgebra y comparación*”. La idea de utilizar intersecciones de cónicas para resolver ecuaciones cúbicas no era nueva sino que había sido ya explotada por Menecmo, Arquímedes y Alhazen, ([5, Omar Khayyam]). Pero Omar Khayyam dio el paso definitivo de generalizar el método para cubrir todas las ecuaciones cúbicas que tengan alguna raíz positiva.

Los complicados procedimientos que aplicaba Omar Khayyam los podemos formular ahora de manera más breve y accesible, usando notación algebraica, como sigue. Sea la ecuación cúbica  $x^3 + ax^2 + b^2x + c^3 = 0$ . Si sustituimos en ella  $x^2$  por  $2py$  obtenemos  $2pxy + 2apy + b^2x + c^3 = 0$ , que es la ecuación de una hipérbola, mientras que la ecuación  $x^2 = 2py$  de la sustitución representa una parábola. Está claro, que si representamos las hipérbola y la parábola anteriores en un mismo sistema de ejes de coordenadas, entonces las abscisas de los puntos de intersección de las curvas, si es que los hay, serán las raíces de la ecuación cúbica dada.



Para esta sección se ha desarrollado un applet en GeoGebra que permite, mediante la asignación de parámetros, la visualización de las soluciones tras la realización del cambio de variable.

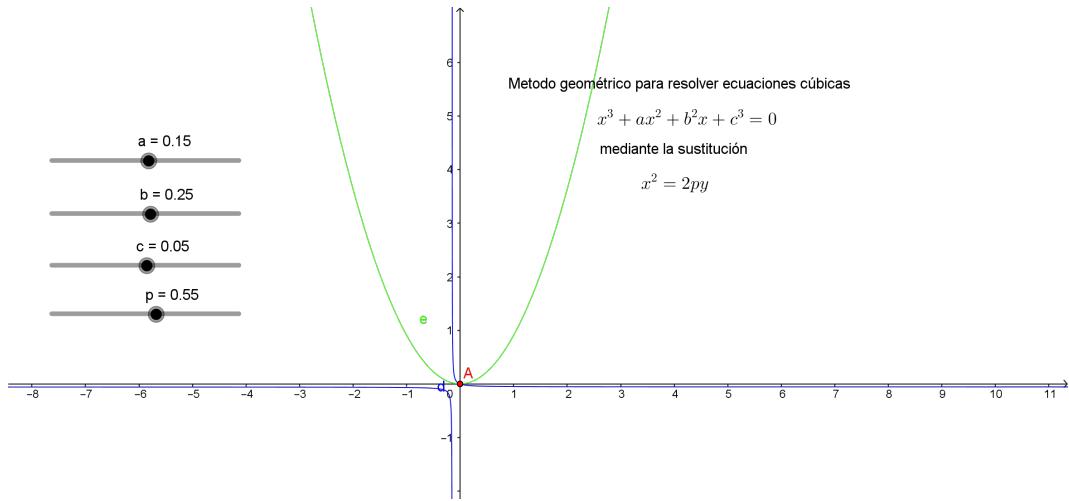


Figura 1.8

## 1.6. Espiral de Fibonacci, proporción áurea

**Leonardo de Pisa** (1180-1250 a.C.), nacido en Italia, creció en África del Norte, donde su padre trabajaba como diplomático en nombre de los mercaderes que comerciaban en Bugia (la actual Argelia). La profesión de su padre, le permitió acompañarlo en numerosos viajes por Egipto, Siria y Grecia, donde recibió la formación de manos de los

grandes maestros musulmanes. De ellos, Leonardo aprendió los métodos algebraicos así como el uso de los numerales indo-arábigos.

Su obra *Liber Abbaci* publicada en 1202, es un tratado muy completo sobre problemas algebraicos en el que se recomienda el uso de los numerales indoarábigos, además de introducir el uso de la barra horizontal en una fracción, notación que aún sigue en uso hoy en día.

Leonardo es a veces conocido por su apodo “Fibonacci”, que significa “hijo de Bonaccio”, pero no hay registro de este nombre antes del siglo XVIII, y probablemente fue inventado entonces por Guillaume Libri. (Puede consultarse [5, La propagación de los numerales hindú-arábigos y La sucesión de Fibonacci].)

Mucho antes de ser conocida en occidente, la sucesión de Fibonacci ya estaba descrita en la matemática hindú, [13, pág 126]. La sucesión fue tratada y dada a conocer por Fibonacci en occidente como la solución a un problema de la cría de conejos.

*¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando con una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?*

Dicha solución viene descrita por la siguiente sucesión:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots, f_n, \dots,$$

donde  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$  para  $n \geq 3$ , es decir, donde cada término se obtiene a partir de la suma de los dos anteriores, exceptuando los dos primeros.

Para analizar la sucesión de Fibonacci es conveniente obtener otras maneras de representarla matemáticamente.

## 1. Función generatriz

Una función generatriz para una sucesión cualquiera  $a_n$  es la función descrita como la serie formal de potencias donde cada coeficiente es un elemento de la sucesión  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ .

Es conocido que la sucesión de Fibonacci tiene por función generatriz

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2},$$

es decir, cuando esta función se expande en potencias de  $x$ , los coeficientes resultan ser la sucesión de Fibonacci,

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = 0x^0 + 1x + 1x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots$$

## 2. Fórmula explícita

Se puede obtener una forma explícita de la sucesión de Fibonacci. Para ello, se considera la relación de recurrencia, [1]

$$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = 0,$$

con las siguientes condiciones iniciales

$$f_0 = 0 \text{ y } f_1 = 1,$$

donde  $f_n$  indica el valor de la sucesión de Fibonacci en la posición  $n$ -ésima.

El polinomio característico de esta relación es  $t^2 - t - 1 = 0$ , y sus raíces vienen dadas por  $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Así pues, la fórmula explícita de la sucesión de Fibonacci tendrá la forma

$$f_n = b \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + d \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos el sistema de ecuaciones

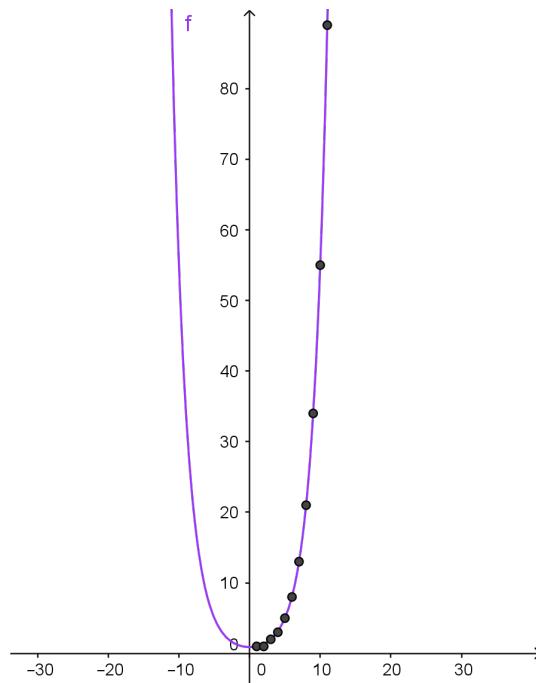
$$\begin{cases} b + d = 0, \\ b \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + d \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1, \end{cases}$$

cuya solución viene dada por  $b = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $d = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Por lo tanto, cada término de la sucesión de Fibonacci puede ser expresado como:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Esta última propiedad se puede observar en la siguiente imagen. Con GeoGebra hemos superpuesto la gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^x - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^x$  con los valores de la sucesión de Fibonacci, calculados mediante la hoja de cálculo que tiene GeoGebra.



Para simplificar si consideramos el número áureo  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , la ecuación se reduce a la conocida como Fórmula de Binet:

$$f_n = \frac{\phi^n - (1-\phi)^n}{\sqrt{5}}.$$

### 3. Forma matricial

Si consideramos el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} f_n &= f_n, \\ f_{n-1} + f_n &= f_{n+1}. \end{cases}$$

Este sistema se puede representar mediante su expresión matricial como:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Conociendo  $f_0 = 0$  y  $f_1 = 1$ , al aplicar la fórmula anterior  $n$  veces se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son precisamente  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  y  $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ , donde  $\psi = \frac{-1}{\phi} = 1 - \phi$ , y sus autovectores  $(\psi, -1)$  y  $(\phi, -1)$ , [2].

En la vista CAS de GeoGebra, podemos calcular los autovalores como sigue. Definimos **M** e **I**:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{I} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

El comando Resuelve(Determinante(M-x I)) da

$$\left\{ x = \frac{-\sqrt{5} + 1}{2}, x = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right\}.$$

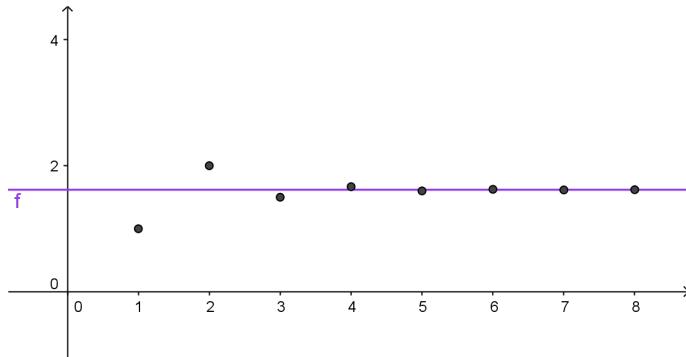
Una de las principales propiedades que relacionan la sucesión de Fibonacci y el número áureo es la siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \phi.$$

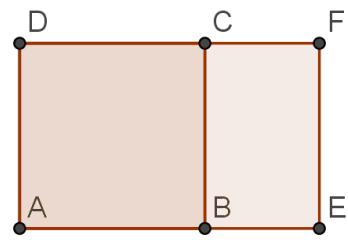
En efecto:

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}^{\rightarrow 0}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}^{\rightarrow 0}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.
 \end{aligned}$$

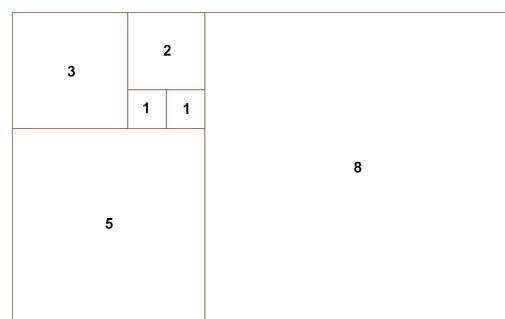
Con GeoGebra hemos creado una hoja de cálculo con los valores de dicho cociente para  $n \in \{1, \dots, 39\}$ , dando lugar a la gráfica:



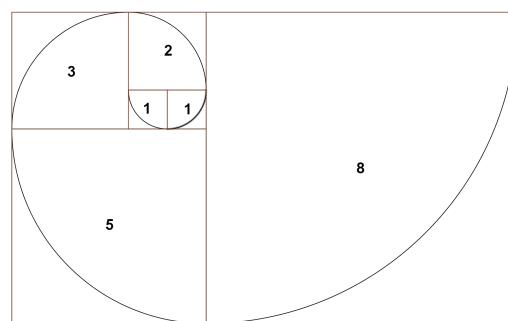
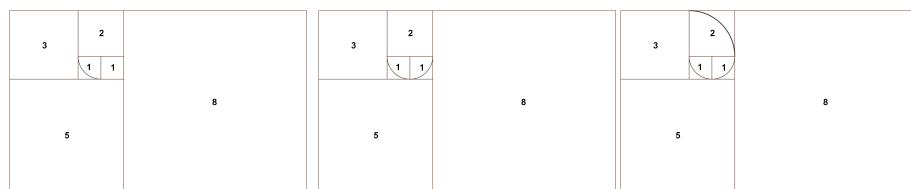
Si en un rectángulo áureo (la proporción entre sus lados es la razón áurea) trazamos un cuadrado cuyo lado tenga de longitud la del lado más pequeño del rectángulo, el rectángulo que nos queda también es un rectángulo áureo.



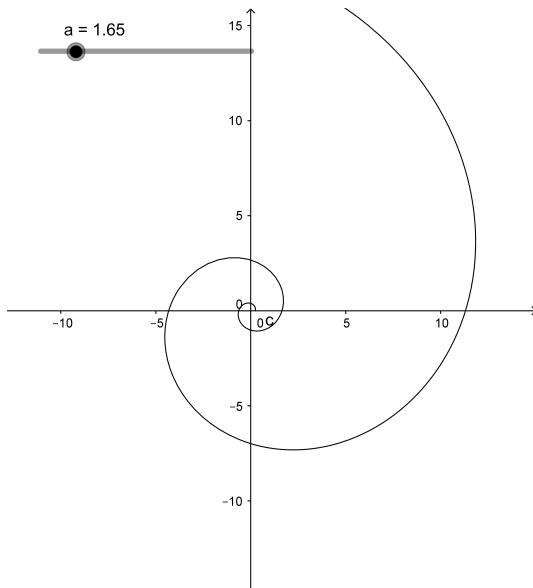
Al construir bloques cuya longitud de lado sean números de Fibonacci se obtiene un dibujo que se asemeja al rectángulo áureo.



La espiral de Fibonacci se genera dibujando arcos circulares conectando las esquinas opuestas de los cuadrados ajustados a los valores de la sucesión de Fibonacci.



La espiral de Fibonacci se considera una aproximación de la espiral áurea. Ésta se puede generar mediante la representación de sus coordenadas paramétricas polares  $r = ae^{b\theta}$ , con  $b = \frac{\ln(\phi)}{\pi/2}$ . Hemos creado un applet en GeoGebra que dibuja la espiral áurea en función de  $a$ .



## 1.7. Recta y círculo de Euler

**Leonhard Euler (1707-1783 a.C.)** Leonhard Euler fue un matemático y físico nacido en la ciudad de Basilea, Suiza. En su juventud estudió con Jean Bernoulli junto a sus hijos Nicolaus y Daniel. El padre de Euler que fue alumno de Jacques Benoulli, participó en la formación de su hijo en los aspectos más básicos de la matemática. En cualquier caso, Euler obtuvo una educación muy completa en distintas materias diferentes de las matemáticas como eran el estudio de la teología, la medicina, la astronomía, la física y las lenguas orientales.

Encontró trabajo en la Academia de San Petesburgo como catedrático de filosofía natural. Tras la muerte de Nicolaus y la marcha de Daniel Bernoulli, Euler se erigió como uno de los matemáticos más relevantes de la academia. Su vida se centró en dos focos principales, la investigación matemática y la creación de una familia que llegó a incluir a trece hijos. En 1735 perdió la vista de su ojo derecho, pero este accidente no disminuyó en lo más mínimo su capacidad para investigar. Se calcula que mantuvo un promedio anual aproximado de 800 páginas anuales.

En 1741 Euler recibió una invitación de Federico el Grande de Prusia para incorporarse a la academia de Berlín, en donde pasó veinticinco años. Su estancia en Berlín no fue todo lo agradable que el hubiese deseado por lo que terminó por volver a Rusia en 1766. Este mismo año Euler se enteró de que estaba perdiendo la visión de su ojo izquierdo por una afección de cataratas. Esto lo llevó a vivir sus últimos diecisiete

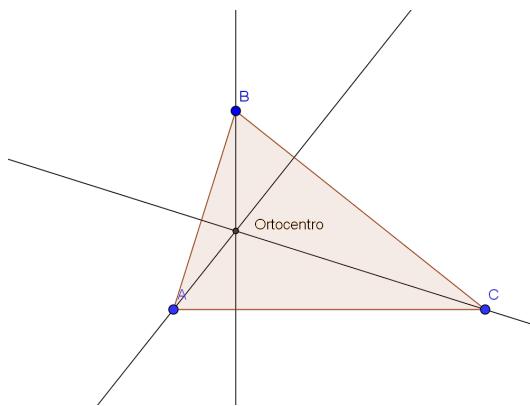
años de su vida en una ceguera total, lo cual, no impidió que Euler siguiera con sus investigaciones y publicaciones, hasta su muerte en 1783 a la edad de 76 años.

Su producción se centró en áreas tan diversas como Cálculo o la Teoría de Grafos. Introdujo notación matemática particularmente para el área del Análisis Matemático, como puede ser la noción de función. Asimismo se le conoce por sus trabajos en los campos de la mecánica, óptica y astronomía. (Véase [5, La vida de Euler].)

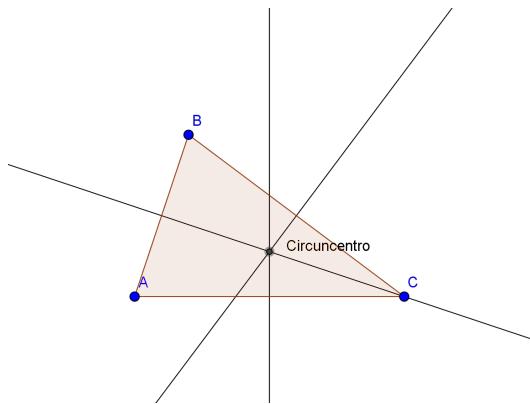
### 1.7.1. Recta de Euler

Antes de centrarnos en la recta de Euler propiamente dicha, recordamos una serie de conceptos que nos ayudaran a una mejor comprensión del teorema.

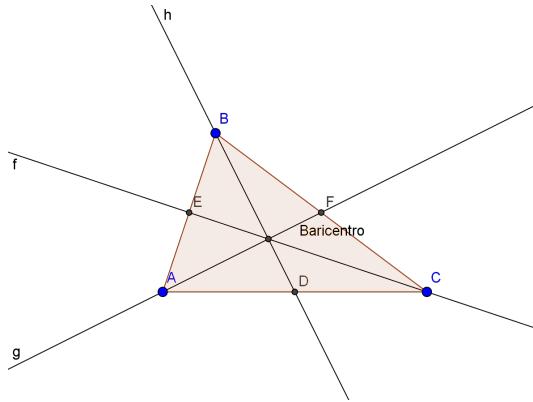
El **ortocentro** es el punto de intersección de las alturas (la altura de un triángulo respecto de un lado es el segmento perpendicular a dicho lado o a su prolongación y que pasa por el vértice opuesto) de un triángulo.



Se llama **circuncentro** al punto de intersección de las rectas perpendiculares trazadas desde el centro de los lados del triángulo (mediatrices).



El **baricentro** es el punto de intersección de las medianas (segmentos que unen cada vértice con el punto medio de su lado opuesto) de un triángulo.



Euler demostró que en cualquier triángulo el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados.

Una propiedad de la recta de Euler es que el centro de la circunferencia de los nueve puntos notables pasa por dicha recta (más adelante en la Sección 1.7.2 recordaremos la definición de dicha circunferencia). En los triángulos equiláteros, este punto coincide con el ortocentro, circuncentro y baricentro, pero ésto no ocurre en cualquier otro triángulo. La recta de Euler queda determinada por dos cualesquiera de esos cuatro puntos.

El centro de la circunferencia de los nueve puntos notables se encuentra a mitad de camino a lo largo de la recta de Euler entre el ortocentro y el circuncentro, y la distancia desde el baricentro al circuncentro es un medio de la distancia entre el baricentro y el ortocentro.

La expresión analítica de la recta de Euler es la siguiente:

$$\operatorname{sen}(2\alpha)\operatorname{sen}(\beta - \gamma)x + \operatorname{sen}(2\beta)\operatorname{sen}(\gamma - \alpha)y + \operatorname{sen}(2\gamma)\operatorname{sen}(\alpha - \beta)z = 0,$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  denotan los ángulos que tienen por vértices a A, B y C.

En la siguiente figura se muestra una captura de un applet que hemos creado para representar la recta de Euler. Los vértices del triángulo se pueden desplazar y todos los elementos de la construcción se redefinen a partir de ellos.

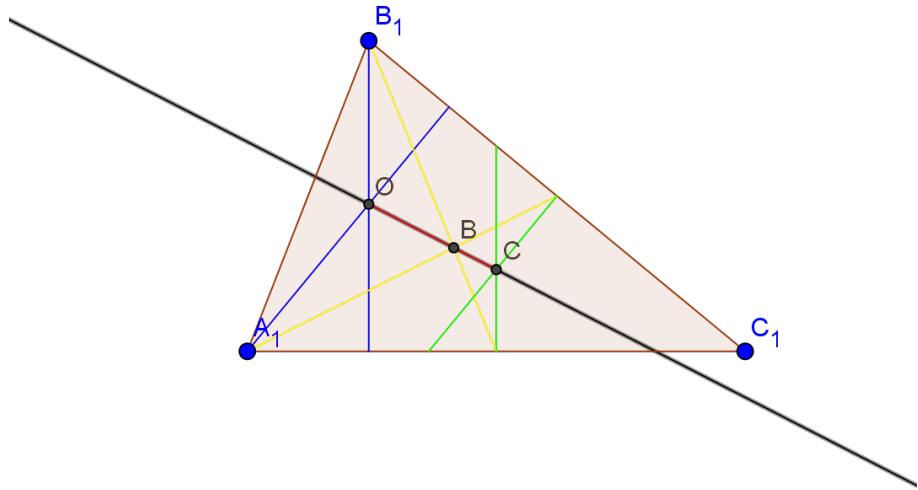
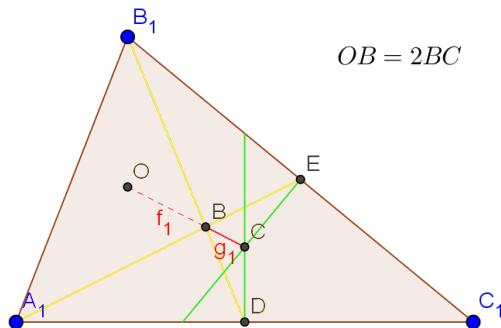


Figura 1.9: Recta de Euler

**Teorema 1.7.1** ([25, Transformaciones afines y Recta de Euler] y [34]). *La recta de Euler de un triángulo es aquella en la que están situados el ortocentro, el circuncentro y el baricentro.*

*Demostración.* En un triángulo  $A_1B_1C_1$ , se determinan D como el punto medio del lado  $B_1C_1$ , y E como el punto medio del lado  $C_1A_1$ . Entonces  $A_1E$  y  $B_1D$  son medianas que se intersecan en el baricentro B. Trazando las perpendiculares por D y E se localiza el circuncentro C.

A continuación se prolonga la recta que pasa por los puntos C y B en sentido hacia B hasta un punto O, de modo que el segmento BO tenga el doble de longitud que el segmento CB.

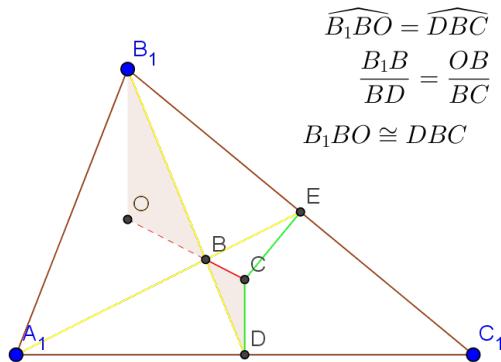


Por ser B el baricentro del triángulo  $A_1B_1C_1$ , este divide a las medianas en razón 2:1; es decir,  $B_1B = 2BD$ . Así:

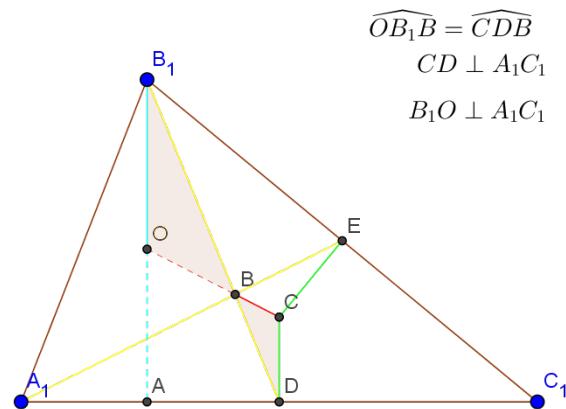
$$\frac{B_1B}{BD} = 2 = \frac{OB}{BC}.$$

Por otro lado, los ángulos  $\widehat{B_1BO}$  y  $\widehat{DBC}$  son opuestos por el vértice y por tanto iguales.

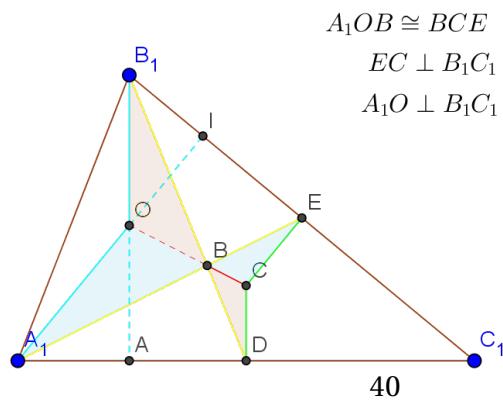
Si consideramos los dos triángulos  $B_1BO$  y  $DBC$ , como los ángulos  $\widehat{B_1BO}$  y  $\widehat{DBC}$  son iguales, y como los lados que forman dichos ángulos son proporcionales por la relación anterior, entonces los dos triángulos son semejantes.



De la semejanza de los triángulos  $B_1BO$  y  $DBC$  se concluye que los ángulos  $\widehat{OB_1B}$  y  $\widehat{CDB}$  son iguales. De este modo, la recta que pasa por  $OB_1$  y la recta que pasa por  $DC$  son paralelas. Finalmente, dado que  $CD$  es perpendicular a  $A_1C_1$ , entonces  $OB_1$  también lo será, es decir,  $OB_1$  es la altura del triángulo.



Un argumento similar prueba que los triángulos  $A_1OB$  y  $EBC$  son semejantes y por tanto  $A_1O$  también es una altura. Esto demuestra que  $O$  es el punto de intersección de las alturas y por lo tanto  $O$  es el ortocentro del triángulo.



### 1.7.2. Círculo de Euler

La *circunferencia de los nueve puntos* es aquella que pasa por los siguientes nueve puntos notables, seis de los cuales están sobre el mismo triángulo (salvo que sea obtusángulo):

- los puntos medios de los tres lados del triángulo,
- los pies de las alturas del triángulo,
- los puntos medios de los segmentos que unen los tres vértices con el ortocentro del triángulo.

En la siguiente figura se muestra una captura del applet que hemos creado para representar la circunferencia de los nueve puntos. En este applet los vértices del triángulo se pueden desplazar y todos los elementos de la construcción se redefinen a partir de ellos.

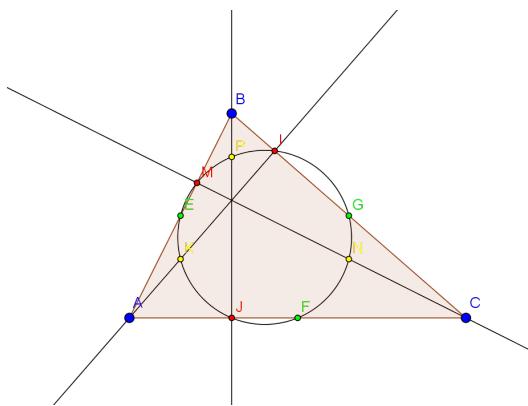


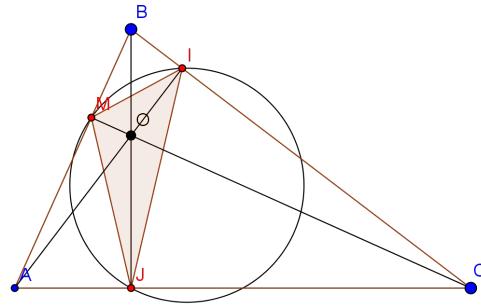
Figura 1.10

Poncelet la llamó circunferencia de los nueve puntos, pero también se la conoce como círculo de Feuerbach, círculo de Euler, círculo de los seis puntos o círculo medioinscrito, [20].

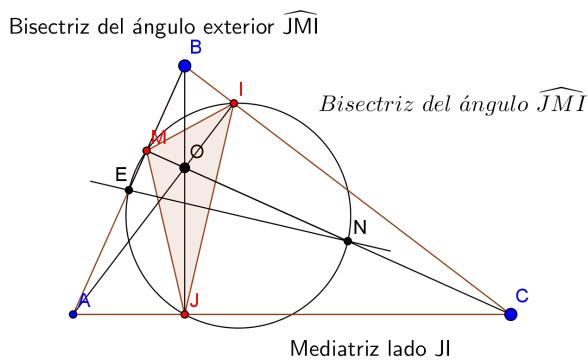
La demostración que damos a continuación se basa en [28]. Para su mejor lectura, he añadido algunas aclaraciones explicando los pasos intermedios.

**Teorema 1.7.2** (de los nueve puntos). *Los puntos medios de los tres lados de un triángulo, los puntos medios de las rectas que van del ortocentro a los tres vértices y los pies de las alturas están en la misma circunferencia.*

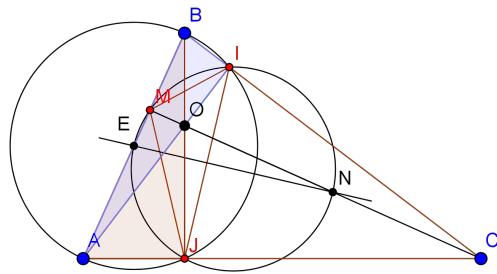
*Demostración.* Consideremos las alturas del triángulo ACB: AI, BJ y CM (como se observa en la figura). El triángulo MIJ es el triángulo órtico (es decir, aquel que tiene por vértices las bases de las alturas de otro triángulo) del triángulo ACB, y el punto O es el ortocentro del triángulo ACB. Las alturas de éste, son las bisectrices de los ángulos internos de aquel. Los lados del triángulo ACB son las bisectrices exteriores del triángulo MIJ.



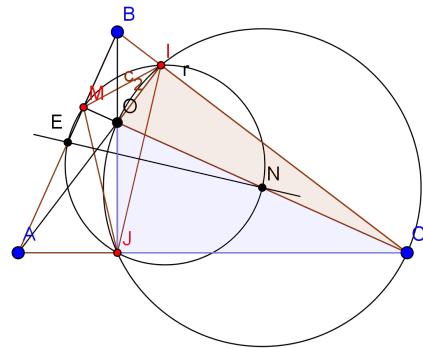
Las bisectrices de ángulo JMI (interior y exterior) cortan a la mediatrix del lado opuesto IJ, en los puntos E y N que se hallan en la circunferencia circunscrita.



Observamos que los triángulos ABJ y ABI son dos triángulos rectángulos que tienen al lado AB como hipotenusa. Se sigue que los cuatro puntos A, B, I y J se hallan en una misma circunferencia cuyo centro se encuentra en la intersección de la hipotenusa AB con la mediatrix del segmento IJ, esto es el punto E. Por tanto E es el punto medio del segmento AB.



De modo semejante los triángulos IOC y JOC son triángulos rectángulos que comparten la hipotenusa CO. Por lo tanto, los puntos E, O, J y C se encuentran en una misma circunferencia con centro la intersección de la hipotenusa CO con la mediatrix del segmento IJ, esto es el punto N.



De igual forma se prueba que los puntos G y F son los puntos medios de los lados BC y AC respectivamente, y que los puntos K, P son puntos medios de los segmentos AO y BO. Es decir, hemos demostrado que: los puntos que bisecan los segmentos que unen los vértices y el ortocentro P, K y N, los puntos medios E, F y G de los lados del triángulo ABC, y los pies de las alturas I, M y J del triángulo ABC, están todos en una misma circunferencia.  $\square$

# PROBLEMAS DE APROXIMACIÓN

## 2.1. Raíces Babilónicas

El algoritmo babilónico se basa en el hecho de que cada lado de un cuadrado es la raíz cuadrada del área. Este algoritmo fue utilizado durante muchos años para calcular raíces cuadradas a mano debido a su gran eficacia y rapidez.

Para calcular una raíz, dibuje un rectángulo cuya área sea el número al que se le busca la raíz, y luego aproxime la base y la altura de dicho rectángulo hasta formar o por lo menos aproximar un cuadrado.

Este algoritmo tiene dos posibles criterios de parada:

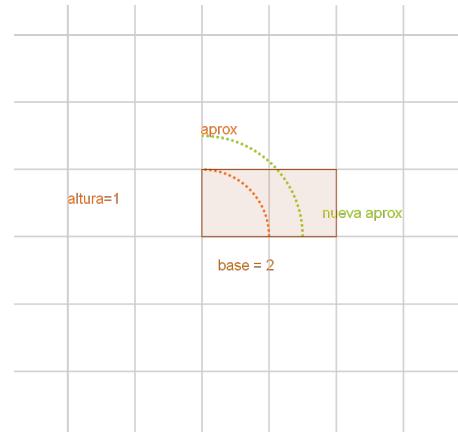
1. el número de iteraciones prefijado,
2. que  $|b - h|$  sea menor que una cantidad preestablecida.

Para calcular la raíz de  $a$ , el algoritmo se puede enunciar como sigue:

1. Escoja dos números  $b$  y  $h$  tales que  $bh = a$ . Preferentemente y siempre que se pueda tomamos como  $b$ , el número natural cuyo cuadrado más se aproxime inferiormente a  $a$ . Por lo tanto  $h = \frac{a}{b}$ .
2. Si  $h = b$ , o se han alcanzado las iteraciones preestablecidas, o  $|b - h|$  es menor que el error de entrada, devuelva  $b$ .
3. Asigne  $\frac{h + b}{2}$  como nuevo valor de  $b$ .
4. Asigne  $\frac{a}{b}$  como nuevo valor de  $h$ .
5. Vaya al paso 2.

A continuación calculamos  $\sqrt{2}$  con un error de 0,01. El applet que hemos usado puede consultarse en <http://www.ugr.es/~mariaburgos/babilonia.html>.

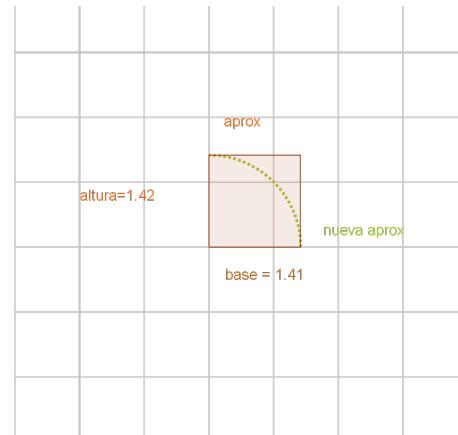
1. Tomo como valores iniciales  $b = 2$  y  $h = 1$ . En este caso no he tomado el valor de  $b$  cuyo cuadrado más se aproxima a 2 para resaltar que se llega igualmente a la solución.



2. Tomo como nuevos valores de  $b = \frac{3}{2}$  y  $h = \frac{4}{3}$ .



3. Tomo como nuevos valores de  $b = \frac{17}{12}$  y  $h = \frac{24}{17}$ .



4. Como  $|b - h| < 0,01$  devuelve  $b = \frac{17}{12}$ .

Este algoritmo aproxima la raíz cuadrada de cualquier número real tanto como se desee. Esta claro que no se necesita conocer el valor de  $h$ , puesto que depende directamente de  $a$  y  $b$ .

Además en cada iteración el área del rectángulo se aproxima a  $a$  independientemente del valor de  $b > 0$  inicial. El algoritmo anterior se puede expresar de forma recursiva como sigue.

$$f_0(x) = x,$$

$$f_n(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{f_{n-1}(x)} + f_{n-1}(x) \right).$$

de manera tal que  $f_n(a)$  es la  $n$ -ésima aproximación a  $\sqrt{a}$ .

Existe una correspondencia entre el método de las raíces babilónicas y el conocido método de Newton-Raphson.

Para  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  función derivable definida en el intervalo real  $[a, b]$ , y un valor inicial  $x_0$ , se considera para cada número natural  $n$ ,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

donde  $f'$  denota la derivada de  $f$ .

Tomemos  $f(x) = x^2 - a$ . Entonces  $f'(x) = 2x$ , con lo cual el método de Newton-Raphson aplicado a esta función se traduce de la siguiente manera:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

Por otro lado, la  $n$ -ésima iteración del método de las raíces babilónicas se corresponde con:

$$b_{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b_n} + b_n \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{b_n^2 + a}{b_n} \right).$$

## 2.2. Problema de exhaución de Arquímedes

Arquímedes desarrolló una estimación de la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro. Partiendo del hexágono regular inscrito en la circunferencia, calcula los perímetros obtenidos duplicando sucesivamente el número de lados hasta llegar al polígono regular de 96 lados. El proceso iterativo que utiliza para estos polígonos se relaciona con lo que se conoce como *algoritmo de Arquímedes*. (Véase [5, La medida del círculo].)

Estos resultados estaban incluidos en la proposición 3 del libro *Sobre la medida del círculo*.

**Proposición 2.2.1** ([24, pág 12]). *El perímetro de todo círculo es igual al triple del diámetro aumentado en un segmento comprendido entre  $\frac{10}{71}$  y  $\frac{10}{70}$  de dicho diámetro.*

Esta proposición puede reformularse en términos de una aproximación del número  $\pi$ . (Véase [5, La medida del círculo].)

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

Para demostrarla, Arquímedes requiere de los siguientes resultados previos.

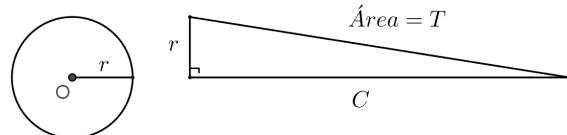
1. *El área de un polígono regular es  $\frac{P \times a}{2}$ , donde P representa el perímetro y a la apotema.*

Arquímedes demuestra este resultado descomponiendo el polígono en triángulos semejantes.

2. *El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los catetos es igual al radio y el otro a la longitud de la circunferencia del círculo [24, pág 11].*

$$\text{Circunferencia} = C$$

$$\text{Área} = A$$



*Demostración.* Dado un círculo de centro O y radio  $r$ , denotemos por  $A$  el área del círculo y por  $C$  la longitud de la circunferencia. Sea  $T$  el área del triángulo rectángulo de altura  $r$  y base  $C$ .

Supongamos primero que que  $A > T$ , equivalentemente  $A - T > 0$ .

Arquímedes sabía que dentro del círculo se podía inscribir un polígono regular cuya área difiriera de la del círculo en una cantidad positiva tan pequeña como uno quiera. Llamaremos  $S$  al área del polígono inscrito.

$$0 < A - S < A - T.$$

Por tanto,

$$T < S.$$

El área del triángulo es  $T = \frac{1}{2}rC$  y  $S = \frac{1}{2}hP$ , con  $h$  la apotema del polígono y  $P$  el perímetro de éste. Como el polígono está inscrito en la circunferencia,  $h < r$  y  $P < C$ . Por tanto, se tiene

$$S = \frac{1}{2}hP < \frac{1}{2}rC = T,$$

$$S < T,$$

lo cual es una contradicción.

Supongamos ahora que  $A < T$ .

Razonando de forma análoga, se puede circunscribir al círculo un polígono regular de área  $L$  menor que  $T$ , el área del triángulo. Pero en este polígono, su apotema  $h = r$ , mientras que su perímetro  $P > C$ . Luego

$$L = \frac{1}{2}hP > \frac{1}{2}rC = T,$$

lo cual contradice  $L < T$ .

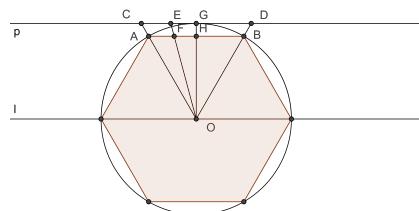
Queda por tanto demostrado que  $A = T$ . □

*Demostración de la Proposición 2.2.1, [24, página 12].* Arquímedes busca la constante que subyace en la fórmula de la longitud y el área de la circunferencia. Para hallarla recurre a los perímetros de los polígonos regulares inscritos y circunscritos.

Designemos por  $I_6, I_{12}, \dots, I_{96}$  los perímetros de los polígonos regulares inscritos y por  $C_6, C_{12}, \dots, C_{96}$  los de los polígonos regulares circunscritos de 6, 12, ..., 96 lados, respectivamente. Arquímedes llegó a la conclusión de que

$$C_{2n} = \frac{2C_n \times I_n}{C_n + I_n}, \quad I_n = \sqrt{C_{2n} \times I_n}.$$

Veamos como llegó Arquímedes a este resultado, particularizando para  $n = 3$ . Consideraremos los hexágonos inscritos y circunscritos a la circunferencia.



Resulta que

$$I_6 = 6AB = 12AH,$$

$$C_6 = 6CD = 12CG.$$

Puesto que  $OE$  es la bisectriz del ángulo  $\widehat{COG}$ , y aplicando el teorema de los senos [25, pág 14] a los triángulos resultantes, obtenemos:

$$\frac{EG}{EC} = \frac{OG}{OC} = \frac{OA}{OC}.$$

Como los triángulos  $COG$  y  $AOH$  son semejantes, se tiene que,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AH}{CG},$$

es decir,

$$\frac{OA}{OC} = \frac{AH}{CG} = \frac{12AH}{12CG} = \frac{I_6}{C_6}.$$

Por tanto,

$$\frac{EC}{EG} = \frac{C_6}{I_6}.$$

Sumando 1 a ambos miembros de dicha identidad y operando,

$$\frac{EC}{EG} + 1 = \frac{C_6}{I_6} + 1,$$

esto es,

$$\frac{EC + EG}{EG} = \frac{C_6 + I_6}{I_6},$$

o equivalentemente

$$\frac{I_6}{C_6 + I_6} = \frac{EG}{CG}.$$

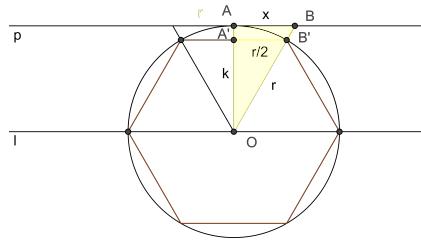
Finalmente multiplicando y dividendo por 24, obtenemos,

$$\frac{24EG}{24CG} = \frac{C_{12}}{2C_6},$$

de donde

$$C_{12} = \frac{2C_6I_6}{C_6 + I_6}.$$

A continuación Arquímedes determina el lado del hexágono circunscrito para así obtener el perímetro  $C_6$ .



Aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo  $OA'B'$  resulta:

$$k^2 = \frac{3}{4}r^2,$$

donde  $k$  es la longitud del segmento  $OA$  y  $r$  es la longitud del segmento  $OB$ . Como los triángulos  $OAB$  y  $OA'B'$  son semejantes  $\frac{x}{r/2} = \frac{r}{k}$ , siendo  $x$  la longitud del segmento  $AB$ . Por tanto  $xk = \frac{r^2}{2}$  y así

$$x = \frac{r\sqrt{3}}{3}.$$

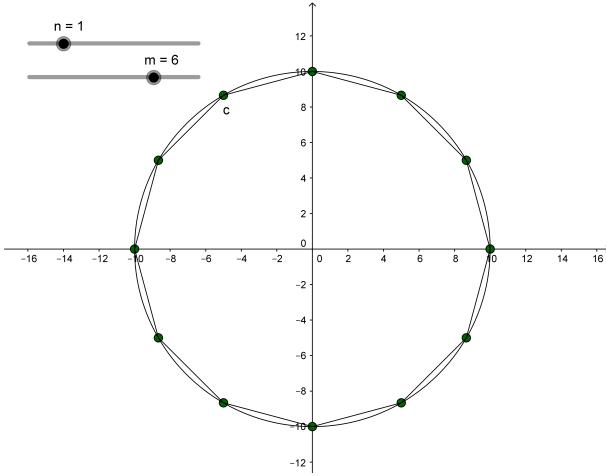
Para calcular el perímetro,  $C_6 = 6x$ , Arquímedes recurrió a un valor aproximado de  $\sqrt{3}$ , [24, pág 14]:

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}.$$

Arquímedes continuó dividiendo por la mitad los lados del dodecágono, para obtener un polígono regular de 24 lados, luego de 48 y finalmente de 96. En cada cálculo tuvo que aproximar raíces cuadradas. Al llegar al de 96 lados obtuvo, tomando como  $r = 0,5$  y approximando hasta las milésimas, el siguiente resultado.

$$I_{96} = 3,141 < \pi < 3,142 = C_{96}. \quad \square$$

En la siguiente figura se muestra la captura de un applet creado para apreciar la convergencia hacia la circunferencia de los polígonos regulares circunscritos descritos por Arquímedes. Se utilizan dos deslizadores. El correspondiente al valor  $m$  es el número de lados del polígono de partida inscrito en la circunferencia (en este caso un hexágono). El valor de  $n$  determina el número de subdivisiones de los lados del mismo (en la figura ya se ha hecho una subdivisión, por lo que se tiene un dodecágono).



## 2.3. Método del Kai-Fan y Fan Fa

### 2.3.1. Método del kai-fan

Empezaremos esta sección con una pequeña reseña sobre la obra *Chui-Chang Suang-Shu* y *Liu Hui*, véanse [5, Los nueve capítulos y Los valores de  $\pi$  en China] y [26, Chiu Chang].

El **Chui-Chang Suang-Shu** o también llamado los *Nueve Capítulos sobre el Arte Matemático* fue una obra escrita sobre el 250 a.C, un poco antes del advenimiento de la dinastía Han, en plena Dinastía Zhou. Este libro siguiendo la tradición egipcia y babilónica de colecciónar conjuntos de problemas concretos, se compone de 246 problemas sobre diversos campos como la agrimensura, cálculo, ingeniería, impuestos etc. En él se dan reglas correctas para obtener las áreas de los triángulos rectángulos y trapecios, problemas resueltos mediante reglas de tres, etc. Es en el capítulo cuarto en el que se pueden observar problemas dedicados a obtener la raíz cuadrada de un número. El método usado para la resolución de los mismos es el llamado **Kai- fan o abriendo el cuadrado**.

No es hasta la aparición de Liu Hui, importante comentarista de libro de los Nueve capítulos, en el siglo III d.C, que no se puede encontrar una explicación detallada del método, apoyada visualmente en razonamientos sobre figuras geométricas.

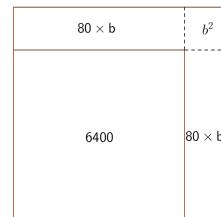
Explicaremos el método mediante la resolución de un ejemplo concreto, extraído de [9]: *calcular el lado del campo cuadrado de superficie 7396 bu<sup>2</sup>*.

- Averiguemos cuántas cifras tendrá el número de bu solución del problema. Teniendo en cuenta:

$$9^2 = 81 < 100, \quad 99^2 = 9,801 < 10,000, \quad 999^2 = 998,001 < 1,000,000,$$

un número de cuatro cifras tendrá por raíz un número de dos cifras  $ab$ , que tendría por expresión polinómica  $10a + b$ .

- Se considera ahora el número original dividido en dos partes:  $N = 7396 = 7300 + 96$ .
- Se busca un número  $a$  cuyo cuadrado aproxime a 73. De esta forma  $100a^2$  estará próximo a 7300.  $N = 7396 = 7300 + 96 = (10a + b)^2$ .
- Tomamos  $a = 8$ . Entonces  $100a^2 = 6400$  y aún quedaría por justificar una diferencia de  $7396 - 6400 = 996$ .



- Tenemos que buscar una longitud  $b$  que complete el cuadrado de lado  $10a$ .
- Despreciando (por ahora) el valor de  $b^2$  debe cumplir  $2(10ab) \leq 996$ .  $160b \leq 996 \Rightarrow b \leq \frac{996}{160} = 6,225$ . Tomamos por tanto  $b = 6$ .

Por último, se considera el valor de  $b^2$  para comprobar que este número es adecuado:  $2(10ab) + b^2 = 2 \times 10 \times 8 \times 6 + 36 = 996$ , que es el número de unidades buscadas. La solución es

$$\sqrt{7396} = 86.$$

### 2.3.2. Método del Fan Fa

El método del Fan Fa se le atribuye al matemático chino Chu Shih-Chieh (siglos XIII y XIV). Chu Shih-Chieh fue el último y más importante matemático chino del periodo Sung. Se sabe poco de su vida, aunque se conservan dos trabajos matemáticos de su autoría. El primero de ellos fue *Introducción a los estudios matemáticos*, en él, se incluyen 260 problemas que explican operaciones de la aritmética y el álgebra.

El segundo libro es *El precioso espejo de los cuatro elementos*, con este trabajo el autor eleva el álgebra china al más alto nivel. En él se estudian: ecuaciones y sistemas de hasta grado 14, se describe el conocido actualmente como Triángulo de Pascal, indicando que servía para obtener los coeficientes de la potencia  $n$ -ésima de un binomio, y se estudia el *Método del Fan Fa*.

Este es un método de cambio de variable que se usa para obtener soluciones aproximadas de ecuaciones polinómicas. Este método suele conocerse en Occidente como *Método de Horner* (Horner fue un matemático que vivió medio siglo más tarde, [5, páginas 266 a 267]).

Describiremos el método del Fan Fa a través de un ejemplo: *dar una solución aproximada de la ecuación*

$$x^2 + 252x - 5292 = 0$$

(véase [5, pág 267]).

- En primer lugar obtendremos por tanteo una primera aproximación por defecto a la raíz de la ecuación.

Esta primera aproximación se consigue dándole valores a  $x$  y evaluando la expresión  $x^2 + 252x$  hasta encontrar el primer resultado que excede 5292. Nos quedaremos con el  $x$  anterior al encontrado.

En este caso tomaremos la aproximación  $a = 19$ . Esto significa que la ecuación tiene una raíz entre 19 y 20.

- En segundo lugar, una vez obtenida esta primera aproximación  $a$  se realiza el siguiente cambio de variable,  $y = x - a$ . Con él, obtendremos una nueva ecuación que tendrá una raíz entre 0 y 1.

En el ejemplo, el cambio  $y = x - 19$ , proporcionará la siguiente ecuación:

$$(y + 19)^2 + 252(y + 19) - 5292 = 0$$

es decir,

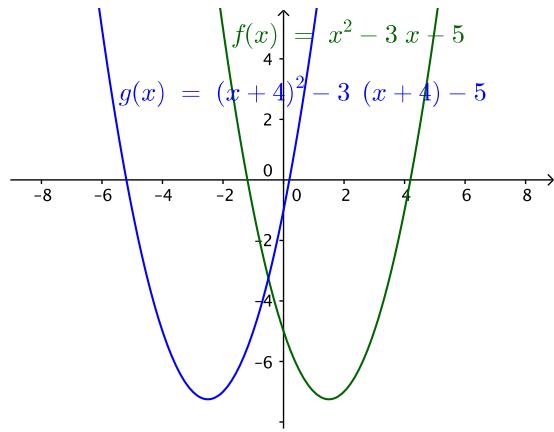
$$y^2 + 290y - 143 = 0.$$

- Dado que la ecuación anterior tiene una raíz  $b$  entre 0 y 1, y para un número  $b \in (0, 1)$ , podemos aproximar  $b$  por  $b^2$ , una solución de la ecuación  $y^2 + 290y = 143$  será aproximadamente igual a la de la siguiente ecuación  $y + 290y = 143$ . Por tanto  $y(1 + 290) = 143$  con lo que  $y = \frac{143}{1 + 290}$ . Deshaciendo el cambio,

$$x = 19 + \frac{143}{291}.$$

*Nota.* Si la primera aproximación no es la más idónea, el método se puede aplicar igualmente. Esto producirá un aumento en el número de pasos, hasta dar con la solución que se encuentre en el intervalo  $(0, 1)$ .

La siguiente figura muestra el método Fan-Fa aplicado a  $x^2 - 3x - 5 = 0$ . El cambio de variable  $x \leftarrow x + 4$  traslada la raíz positiva al intervalo  $[0, 1]$ . En la nueva función,  $g(x) = x^2 + 5x - 1$ , la raíz se estima por  $x = \frac{1}{6}$ , y por tanto la aproximación de la raíz de  $x^2 - 3x - 5$  es de  $4 + \frac{1}{6}$  (el valor real es  $(3 + \sqrt{29})/2$ ).



## 2.4. Método de integración de Montecarlo

El Método de Montecarlo es un método no determinista, o estadístico numérico, usado para aproximar expresiones matemáticas complejas y costosas de evaluar con exactitud. El método se llamó así en referencia al casino de Montecarlo por ser la capital del juego de azar, al ser la ruleta un generador simple de números aleatorios. El nombre y el desarrollo sistemático de los métodos de Montecarlo datan aproximadamente de 1944.

El uso de estos métodos proviene del trabajo realizado en el desarrollo de la bomba atómica durante la segunda guerra mundial en el laboratorio de los Álamos en Estados Unidos. La invención del método se le asigna a Stanislaw Ulam y a John von Neumann, [33].

Los Métodos de integración de Montecarlo son algoritmos para encontrar una evaluación aproximada de una integral definida. La gran diferencia entre los métodos deterministas y los métodos de Montecarlo es que estos últimos eligen de forma aleatoria los puntos en los que se evaluará la función, [33].

Estos métodos se basan en una serie de resultados probabilísticos como son la Ley de los grandes números y el Teorema fundamental de Montecarlo. La Desigualdad de Markov y la Desigualdad de Chebyshev, sirven para apreciar la velocidad de convergencia de la Ley de los grandes números. A continuación recordaremos dichos resultados (véase [14, Teoremas importantes]).

### Ley de los grandes números

El promedio de  $N$  variables aleatorias  $X_i$  idénticamente distribuidas que una variable aleatoria  $X$ ,  $\bar{X}_i = \frac{S_N}{N}$  converge a  $E[X]$  cuando  $N$  es grande, es decir,

$$P\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{X}_N = E[X]\right) = 1.$$

donde  $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$  y  $E[X]$  simboliza la esperanza de la variable aleatoria  $X$ .

### Desigualdad de Markov

Sea  $X$  una variable aleatoria que sólo puede tomar valores no negativos. Entonces para cualquier  $x > 0$ ,

$$P(X \geq x) \leq \frac{E[x]}{x}.$$

Esto se debe a que si  $f$  es la función de densidad de  $X$ ,

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_0^x t f(t) dt + \int_x^\infty t f(t) dt \geq \int_x^\infty t f(t) dt \geq \int_x^\infty x f(t) dt \\ &= x P(X \geq x). \end{aligned}$$

*Nota.* Cualquier función no negativa que cumple la siguiente propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

será una función de densidad.

### Desigualdad de Chebyshev

Si  $X$  tiene esperanza  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ , la variable aleatoria  $D^2 = (X - \mu)^2$  tiene esperanza  $\sigma^2$ , ya que  $E[D^2] = E[(X - \mu)^2] = \text{var}[X] = \sigma^2$ . La desigualdad de Markov aplicada a  $D^2$  nos dice que  $P(D^2 \geq x^2) \leq \frac{\sigma^2}{x^2}$ . Por tanto,

$$P(|X - \mu| \geq x) \leq \frac{\sigma^2}{x^2}.$$

### Teorema fundamental de Montecarlo

Consideremos la variable aleatoria  $G_N$ , promedio de una función  $g(X_i)$  de variables idénticamente distribuidas a una variable aleatoria  $X$ ,

$$G_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i),$$

cuya esperanza y varianza son respectivamente

$$E[G_N] = E[g(X)], \quad \text{var}(G_N) = \frac{\text{var}(g(X))}{N}.$$

Al promedio  $G_N$  se le llama estimador de  $E[g(X)]$ , pues su esperanza vale

$$E[G_N] = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx,$$

donde  $X_i \sim f$ . Es decir, podemos evaluar la integral anterior generando un conjunto de  $N$  variables aleatorias  $X_i$  segun  $f(x)$  y hallando  $g(x)$  para cada una. El estimador  $G_N$  nos da el valor de la integral.

Veamos que la varianza del estimador disminuye al crecer  $N$ . De hecho, aplicando la desigualdad de Chebyshev a la variable aleatoria  $G_N$  con  $\sigma^2 = \text{var}(G_N)$ ,  $x^2 = \frac{\sigma^2}{\delta}$  y  $\delta > 0$  tenemos

$$P\left(|G_N - E[G_N]| \geq \left[\frac{\text{var}(G_N)}{\delta}\right]^{\frac{1}{2}}\right) \leq \delta,$$

o bien,

$$P\left(|G_N - E[G_N]| \geq \left[\frac{\text{var}(g(X))}{N\delta}\right]^{\frac{1}{2}}\right) \leq \delta,$$

lo que significa que, generando una muestra suficientemente grande  $N \gg \frac{1}{\delta}$ , la probabilidad de que el estimador se aleje del valor esperado de  $g(X)$  es tan pequeña como se deseé.

### 2.4.1. Integral de Montecarlo

A continuación, expondremos los distintos métodos de integración de Montecarlo más adecuados para encontrar evaluaciones aproximadas de una integral definida. Los clasificaremos atendiendo a los diferentes intervalos de integración, [10].

#### Integral en el intervalo $(0, 1)$

Sean  $U_1, U_2, \dots, U_N$  variables aleatorias idénticamente distribuidas con distribución uniforme en  $(0, 1)$ , es decir,  $U(0, 1)$ , entonces  $g(U_1), g(U_2), \dots, g(U_N)$  son variables aleatorias idénticamente distribuidas con esperanza  $\theta$ . Luego por la Ley de los grandes números,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{g(U_i)}{N} = \theta.$$

Además si  $X \sim U(0, 1)$ , entonces, por el Teorema Fundamental de Montecarlo  $\theta = E[g(X)] = \int_0^1 g(x) dx$ , con lo que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \frac{g(U_i)}{N} = \int_0^1 g(x) dx.$$

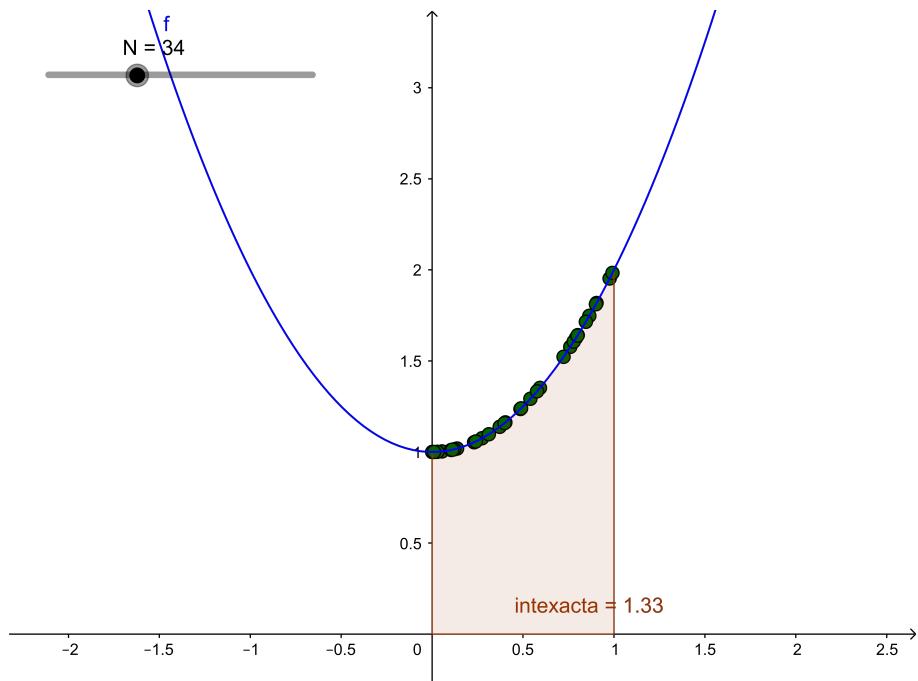
Luego para empezar a trabajar debemos de generar los valores de las  $N$  variables aleatorias, mediante algún tipo de generador de números pseudoaleatorios. Un método podría ser el método de los Generadores congruentes lineales. (Véase [21].)

Este método consiste en generar una secuencia de números mediante la forma recursiva

$$x_{i+1} = (ax_i + c) \bmod m,$$

donde el valor inicial  $x_0$  se llama semilla y  $a$ ,  $c$  y  $m$  son parámetros enteros positivos llamados multiplicador, incremento y módulo, respectivamente. Cada  $x_i$  puede tomar valores en el conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$  y la secuencia se repetirá al cabo de un número de pasos que será como máximo  $m$ . Para conseguir este máximo se deben satisfacer ciertos criterios. Para lograr que dichos números se encuentren entre 0 y 1 solamente hay que dividirlos por el valor de  $m$ . En este caso en concreto  $m = N$ .

La siguiente figura muestra la captura de imagen de un applet creado para apreciar el método de integración de Montecarlo en el intervalo  $(0, 1)$  aplicado a la función  $f(x) = x^2 + 1$ . En él se ha generado una lista de  $N$  números aleatorios mediante la orden `UniformeAleatoria(0, 1, N)`. Esta  $N$  se puede variar mediante un deslizador. Calculamos otra lista con las imágenes mediante la función de los números aleatorios generados, y sumamos los elementos de esta nueva lista. La aproximación de la integral de dicha función será el cociente de dicha suma y el valor de  $N$ .



### Integral en el intervalo $(a, b)$

Sea  $\theta = \int_a^b g(x) dx$ , con  $a < b$ . Realizamos el cambio de variable,

$$y = \frac{x-a}{b-a}, \quad dy = \frac{1}{b-a} dx.$$

$$\int_a^b g(x) dx = \int_0^1 g(a + (b-a)y)(b-a) dy = (b-a) \int_0^1 g(a + (b-a)y) dy.$$

Una vez obtenidos los  $N$  valores aleatorios  $x_i$  comprendidos en el intervalo  $[0, 1]$  se sustituirán en la siguiente fórmula:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{i=1}^N g(a + (b-a)x_i) = \int_a^b g(x) dx.$$

## Integral en el intervalo $(0, \infty)$

Sea  $\theta = \int_0^\infty g(x) dx$ . Realizamos el cambio de variable,

$$y = 1 - \frac{1}{x+1}, \quad dy = \frac{1}{(x+1)^2} dx = (y-1)^2 dx.$$

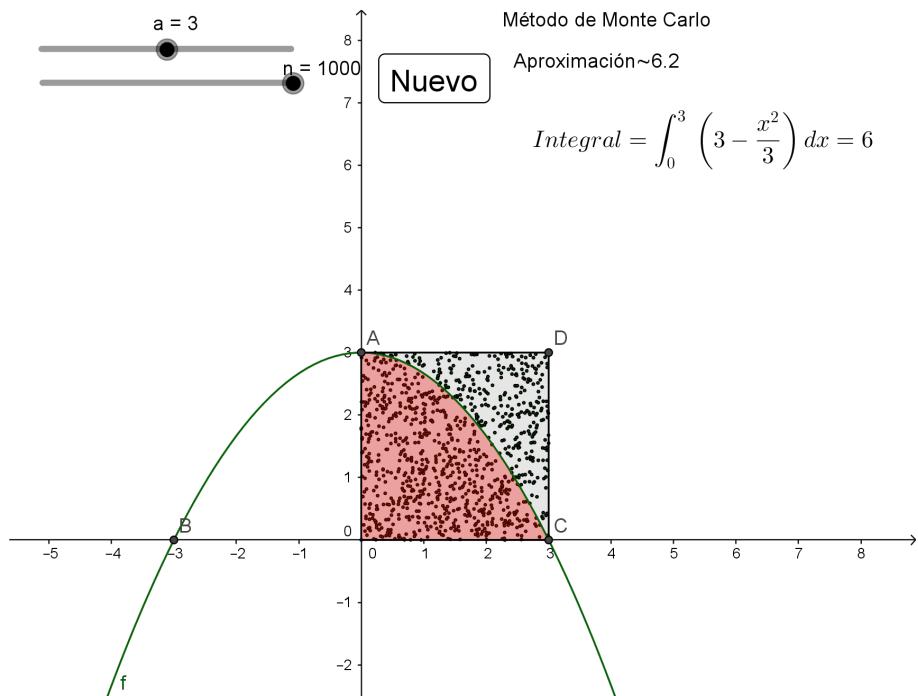
$$\int_0^\infty g(x) dx = \int_0^1 \frac{g\left(\frac{-y}{y-1}\right)}{(y-1)^2} dy = \int_0^1 h(y) dy.$$

Una vez obtenidos los  $N$  valores aleatorios  $x_i$  comprendidos en el intervalo  $[0, 1]$  se sustituirán en la siguiente fórmula.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f\left(\frac{-x_i}{x_i - 1}\right) (x_i + 1)^2 = \int_a^b f(x) dx.$$

### 2.4.2. Método de Montecarlo por bombardeo

Otro método de integración de Montecarlo es el que aparece ilustrado en la siguiente figura.



La integral se aproxima de la siguiente manera. Usando una hoja de cálculo, se crean 1000 coordenadas aleatorios en el intervalo a integrar, y se evalúa la función en dichas coordenadas. Obtenemos así 1000 puntos. Se determinan cuántos de ellos tienen la segunda coordenada por debajo de la gráfica de la función, y se calcula la

proporción de éstos entre todos los creados. La aproximación de la integral es la proporción obtenida, multiplicada por el área del recinto que delimita la gráfica de la función en el intervalo en el que queremos integrar.

El applet está inspirado en

<https://www.geogebra.org/material/show/id/1085455>.

## 2.5. Método de Simpson

**Thomas Simpson** (1710-1761 d.C) fue un matemático inglés, nacido en el seno de una familia modesta. Aprendió matemáticas de forma autodidacta, mientras trabajaba en otros oficios. A partir de 1725 comenzó a trabajar de matemático, hasta 1743 que empezó a trabajar en la Royal Military Academy en Londres.

Son diversos los campos en los que Simpson hizo sus aportaciones. Por ejemplo, en el campo de la integración matemática con la regla que lleva su nombre. En el estudio de la aproximación numérica de soluciones, se sabe que la forma abstracta  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  del método de Newton es suya. Además hizo aportaciones a la teoría de la probabilidad y la teoría de errores, [32].

Los siguientes párrafos han sido obtenidos de los apuntes de clase impartidos en la asignatura Cálculo Numérico de 4º de la Licenciatura de Matemáticas por los profesores Jerónimo Llorente Pardo y Óscar Sánchez Romero.

### Abstracción del problema

A veces es necesario calcular el valor de  $\mathbb{L}(f)$ , que un funcional  $\mathbb{L}$  asigna a la función  $f$  perteneciente a un conjunto  $\mathbb{F}$ . En todos los casos,  $\mathbb{L}$  será una función lineal.

Un ejemplo es el cálculo del valor  $\int_a^b f(x) dx$  para una función  $f$  integrable en  $[a, b]$  de la que no se conoce una primitiva, por lo tanto no se le puede aplicar la regla de Barrow.

Es posible que se conozca el valor de  $f$  en algunos puntos del intervalo  $[a, b]$ , a veces, en todos los puntos del intervalo, incluso puede que el valor de derivadas de  $f$  en puntos del mismo.

### Fórmulas de tipo interpolatorio

Sea  $\mathbb{F}$  un espacio vectorial y  $\mathbb{L}$  un operador lineal  $\mathbb{L} : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{R}$ , pretendemos aproximar dicho operador por una combinación lineal de otros operadores  $\mathbb{L}_i$ .

$$\mathbb{L} \approx \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i, \alpha_i \in \mathbb{R},$$

$$\mathbb{L}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(f) + R(f), f \in \mathbb{F}, \quad (2.5.1)$$

donde  $R(f)$  representa el error de la fórmula.

Como casos particulares de nuestro interés están las fórmulas de derivación e integración numéricas.

Una fórmula de derivación numérica para calcular la derivada primera en un punto  $a$  de  $f(x)$  conocidos los valores de ésta en puntos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  es una expresión del tipo,

$$f'(a) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + R(f).$$

Aquí,  $\mathbb{L}(f) = f'(a)$  y los funcionales  $\mathbb{L}_i(f) = f(x_i)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Análogamente a la fórmula de derivación numérica, una fórmula de integración numérica tiene la forma

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) + R(f).$$

Ahora el funcional es  $\mathbb{L}(f) = \int_a^b f(x) dx$  y  $\mathbb{L}_i(f) = f(x_i)$ ,  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Lo interesante será encontrar valores concretos para los  $\alpha_i$  que nos proporcionen fórmulas particulares que tengan propiedades de interés. Para ello podemos usar distintas estrategias. Una primera, es la de usar polinomios de interpolación que aproximen a la función en  $n$  puntos.

### Criterios de interpolación

**Definición 2.5.1. Fórmula de tipo interpolatorio** La fórmula (2.5.1) es de tipo interpolatorio si se obtiene a través del interpolante  $p \in \mathbb{H} \subset \mathbb{F}$  de  $f$ , es decir,

$$\mathbb{L}(f) = \mathbb{L}(p) + R(f),$$

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(f) = \mathbb{L}(p),$$

donde  $\mathbb{H}$  es el subespacio vectorial en el que se construye el interpolante  $p$ ,  $\dim(\mathbb{H}) = n+1$  y  $\mathbb{L}_i(f) = \mathbb{L}_i(p)$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Si  $\mathbb{H} = \mathbb{P}_n$ , diremos que la fórmula es de tipo interpolatorio clásico.

Si el polinomio interpolante que utilizamos es el polinomio de Lagrange

$$p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x),$$

donde  $l_i(x)$  son los polinomios fundamentales de Lagrange

$$l_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

$$l_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)},$$

entonces

$$\mathbb{L}(p(x)) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \mathbb{L}(l_i(x)),$$

por lo que

$$\alpha_i = \mathbb{L}(l_i(x)).$$

*Nota.* Se puede obtener una expresión de  $R(f)$  a partir del error del polinomio de interpolación. Así, si  $E(f) = f - p$  es el error de interpolación, entonces

$$R(f) = \mathbb{L}(f) - \mathbb{L}(p) = \mathbb{L}(f - p) = \mathbb{L}(E(f)).$$

Otra opción es imponer exactitud en un cierto espacio de funciones elementales.

### Imponiendo exactitud

**Definición 2.5.2.** Diremos que una fórmula es exacta para una función  $f$  si  $\mathbb{L}(f) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(f)$ , es decir,  $R(f) = 0$  (el resto es cero). Se dice que una fórmula tiene grado de exactitud  $m$  si la fórmula es exacta para  $1, x, \dots, x^m$  y  $R(x^{m+1}) \neq 0$ .

**Teorema 2.5.1.** Una fórmula (2.5.1) es de tipo interpolatorio clásico, si y sólo si, tiene grado de exactitud al menos  $n$ .

*Demuestra.* Necesidad. Por ser la fórmula de interpolación clásica tenemos,  $\mathbb{L}(f) = \mathbb{L}(p) + R(f)$  y  $\mathbb{L}(p) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(p)$  donde  $p \in \mathbb{H} \subseteq \mathbb{F}$ ,  $\mathbb{H} = \mathbb{P}_n$  es el subespacio vectorial en el que se construye el interpolante  $p$ ,  $\dim(\mathbb{H}) = n+1$ , con lo cual  $\mathbb{L}_i(f) = \mathbb{L}_i(p)$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ .

Si tomamos por  $p$  el polinomio de interpolación de Lagrange, que es un polinomio de grado  $n$ , como  $R(f) = 0$  entonces es exacta de, al menos, grado  $n$ .

Suficiencia. Si es exacta de grado al menos  $n \Rightarrow R(1) = R(x) = \dots = R(x^n) = 0$   $p(x) \in \langle 1, \dots, x^n \rangle$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(f) &= \mathbb{L}(p) + R(f) \\ \mathbb{L}(f) &= \mathbb{L}(p) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(p) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(f) \\ \mathbb{L}(f) &= \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbb{L}_i(f) + R(f) \\ \Rightarrow R(f) &= 0. \end{aligned}$$

□

## Fórmula de Simpson

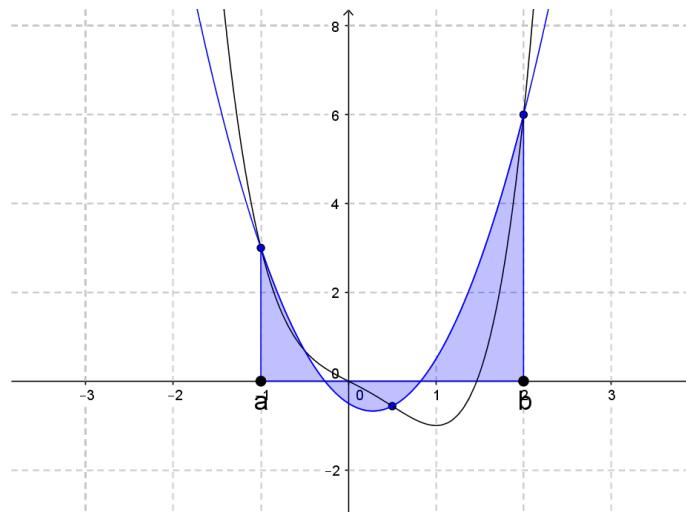
Si consideramos el polinomio interpolador de orden dos, que aproxima a la función  $f(x)$  entre los nodos  $a$ ,  $\frac{a+b}{2}$  y  $b$ , su representación gráfica es una parábola.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right),$$

$$R(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f''(\xi).$$

$\xi$  es un valor comprendido dentro del intervalo  $[a, b]$ .

La siguiente figura ilustra una captura de un applet inspirado en <https://www.geogebra.org/material/show/id/497635>. En ella se ve como sustituimos el cálculo de la integral de la función  $f(x) = x^4 - x^3 - x$  en  $[a, b]$ , por el cálculo de la integral en  $[a, b]$  del polinomio interpolador en los puntos  $a$ ,  $\frac{a+b}{2}$ ,  $b$ , que resulta ser una parábola.



Como con el polinomio de Newton la función  $f(x) = p(x) + f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$ , el error cometido es

$$R(f) = \int_a^b f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n) dx.$$

## Fórmula de Simpson Compuesta

Sea  $\{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$  una partición del intervalo  $[a, b]$  entonces,

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n F_i + R_{FC}(f).$$

donde  $F_i$  representa la fórmula de integración numérica para el subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  y  $R_{FC}$  es el error total de la fórmula compuesta que puede obtenerse a partir de los errores para cada  $F_i$ ; es decir,

$$R_{FC}(f) = \sum_{i=1}^n R_i(f).$$

*Nota.* Tomamos una partición uniforme de paso  $h = \frac{b-a}{n}$  y la siguiente notación  $f_i = f(x_i)$  y  $f_{i-\frac{1}{2}} = f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})$

Si usamos las fórmulas,  $F_i = \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i)$ , la Fórmula de Simpson Compuesta queda,

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{h}{6} \left( f(a) + 4 \sum_{i=1}^n f_{i-\frac{1}{2}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + f(b) \right) + R_{SC}(f)$$

cuyo error es  $R_{SC}(f) = \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{iv'}(\xi)$

---

## Bibliografía

---

- [1] Alegría, P. Sucesiones de recurrencia en la matemática recreativa. Revista Eureka sobre enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 6(3).(2009).
- [2] Aznar.E. Números de Fibonacci, su complejidad y su programación.<http://www.ugr.es/~eaznar/fibo.htm>
- [3] Barrios J. (1993) La geometría de los indivisibles: Buenaventura Cavalieri, Seminario Orotava de Historia de la ciencia, Departamento de análisis matemático, Universidad de la Laguna.
- [4] Bartel L. Van der Warden. A History of Algebra. Ed. Springer. Berlín 1985.
- [5] Boyer.C. B. Historia de la matemática. Ed. Alianza Universidad Textos. Madrid 1986.
- [6] Delgado,A.M., Nieto. J, Robles, A.M, Sánchez,O. Métodos numéricos básicos con Octave. Ed Editorial Técnica AVICAM. 2016.
- [7] Donaire, M. F. Una prueba elemental del teorema de Pascal. Revista OIM, 39 (Agosto 2010).
- [8] Espinosa, M. C. (2014). La solución de la ecuación de tercer grado según Omar Al-Khayyām (Tesis doctoral).
- [9] Fernández, S. La raíz cuadrada y la matemática china. Revista SUMA 8/1991.
- [10] Flesia,G. Integración por el método de Monte Carlo. [http://www.mate.uncor.edu/~jgimenez/Modelos20y20Simulacion/2012/clase6\\_pr.pdf](http://www.mate.uncor.edu/~jgimenez/Modelos20y20Simulacion/2012/clase6_pr.pdf)
- [11] Godino, J. D., y Ruíz, F. Geometría y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática 2002.
- [12] González, P.M . La Curvatura y la Cuadratura de la Esfera en EL MÉTODO de Arquímedes. divulgaMAT.
- [13] Goonatilake, S. Toward a Global Science. Indiana University Press 1998.
- [14] Illana, J.I. Método de integración de Montecarlo [www.ugr.es/~jillana/Docencia/FM/mc.pdf](http://www.ugr.es/~jillana/Docencia/FM/mc.pdf).

- [15] Jiménez, D. El problema del área en los Elementos de Euclides. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. XVII, No. 2 (2010). [https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol17/BAMV\\_XVII-2\\_p179-207.pdf](https://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol17/BAMV_XVII-2_p179-207.pdf).
- [16] Kleiner. A History of Abstract Algebra. Springer, Science & Business Media, 2007.
- [17] López, R. Problemas sobre cuadriláteros. (Trabajo final de Máster) <http://www.ugr.es/~anillos/textos/pdf/2014/Geometria4.pdf>
- [18] Massmann,H. Revista del Profesor de Matemáticas 1.
- [19] Mosquera, S. El Teorema de Pappus. En la adicción y en la multiplicación. Revista Sigma. Volumen VIII (2008), pág 35-43.
- [20] Nápoles, J.E. Iole de Campia,N. Foro-Red-Mat: Revista electrónica de contenido matemático, ISSN 1405-1745, Vol. 14, Nº. 3, 2003.
- [21] Park,S.K. and Miller,K.W. Random Number Generators: Good Ones Are Hard To Find. Communications of the ACM. 31 (10): 1192–1201. 1988.
- [22] Pérez, M.A . Una historia de las matemáticas: retos y conquistas a través de sus personajes. Ed. Visión Libros 2013.
- [23] Puig, L. (2011). Historias de al-Khwārizmī (7<sup>a</sup> entrega). Figuras y demostraciones. Suma, 68, pp. 93-102.
- [24] Rodriguez de Rivera, A. Arquímedes. El genio de Siracusa.
- [25] Ros,A. Tema 1. Triángulos y circunferencias.<http://www.ugr.es/~aros/geom2/Triangulosycircunferencias.pdf>.
- [26] Ruíz, A. Historia y filosofía de las matemáticas. Ed. EUNED, 2003.
- [27] Sanz-Serna, J.M. Diez lecciones del cálculo numérico. Ed. UNIVERSIDAD DE VALLADOLID. SECRETARIADO DE PUBLICACIONES E I. 2004.
- [28] Shively, L.S. Introducción a la geometría moderna, Cia. Editorial Continental, 1961.
- [29] Stewart, I. Historia de las matemáticas en los últimos 10000 años. Ed. Crítica. Barcelona 2012.
- [30] Biografía de Omar Khayyam.<https://www.britannica.com/biography/Omar-Khayyam-Persian-poet-and-astronomer>
- [31] Proporcionalidad. <https://es.slideshare.net/epvmanantiales/proportionalidad-10578418>.

- [32] Wikipedia, biografía de Thomas Simpson.[https://es.wikipedia.org/wiki/Thomas\\_Simpson](https://es.wikipedia.org/wiki/Thomas_Simpson).
- [33] Wikipedia, Método de Montecarlo.[https://es.wikipedia.org/wiki/Metodo\\_de\\_Montecarlo](https://es.wikipedia.org/wiki/Metodo_de_Montecarlo).
- [34] Wikipedia, Recta de Euler. [https://es.wikipedia.org/wiki/Recta\\_de\\_Euler](https://es.wikipedia.org/wiki/Recta_de_Euler).