Computação Gráfica e Processamento de Imagens

CGPI: Filtros no mínimo da frequência

Unidade 4 – Seção 2

Esta webaula apresenta a Transformada de Fourier, o teorema da convolução e os filtros no domínio da frequência.

Transformada de Fourier

A transformada de Fourier leva uma função com coordenadas no domínio espacial para coordenadas no domínio da frequência, e possui uma importante relação com a operação de convolução.
A transformada de Fourier contínua unidimensional é definida por:

$$\Im\left\{f\left(x\right)\right\} = F\left(u\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x\right) \cdot e^{-j2\pi ux} dx$$

▪ A integral da transformada de Fourier elimina a variável espacial x, e a função resultante é uma função F(u).

▪ A variável u aparecerá sempre como argumento das funções seno e cosseno, portanto, F(u) é da forma $A(cos(u) + jsin(u))$ para um valor fixo de u, onde A é constante.

▪ Assim, a função F(u) representa o conjunto de senos e cossenos que, combinados, compõem a função f(x).

▪ Como u está multiplicado por 2π, u representa exatamente as frequências desses senos e cossenos. Por esse motivo dizemos que F(u) está no domínio da frequência

A função f(x) pode ser recuperada a partir de F(u), sem perdas, pela **transformada inversa de Fourier**, definida por

$$\Im^{-1}\left\{F\left(u\right)\right\} = f\left(x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(u\right) \cdot e^{j2\pi ux} du$$

.

Considerando que $f\left(x\right) = \Im^{-1}\left\{F\left(u\right)\right\}$, dizemos que $f \leftrightarrow F$ é um par de transformadas de Fourier.

Teorema da convolução

Seja uma imagem f e um filtro g, a convolução de f por g pode ser obtida pela transformada de Fourier inversa da multiplicação ponto a ponto das transformadas de Fourier de f e g. Esta propriedade é chamada de **teorema da convolução**.
Em outras palavras, o teorema da convolução diz que uma convolução no domínio espacial é equivalente a uma multiplicação no domínio da frequência.

Transformada Discreta de Fourier

A definição da transformada de Fourier unidimensional contínua pode ser estendida para funções discretas e bidimensionais, para se definir a **Transformada Discreta de Fourie**r (DFT, de *discrete Fourier transform*).

A DFT e sua inversa (iDFT) em uma dimensão são dadas respectivamente por:

$$F\left(u\right) = \sum_{x=0}^{M-1} f\left(x\right) \cdot e^{\frac{-j2\pi ux}{M}}, u = 0 ,1,2,..., M-1$$

$$f\left(x\right) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} F\left(u\right) \cdot e^{\frac{j2\pi ux}{M}}, x = 0 ,1,2,..., M-1$$

Note que os valores de u são também discretos. Em duas dimensões, a DFT e sua inversa, para uma imagem digital M×N, são definidas por:

$$F\left(u, v\right) = \sum_{y=0}^{N-1} \sum_{x=0}^{M-1} f\left(x, y\right) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

$$f(x, y) \leftrightarrow F(u, v)$$

Espectro de Fourier

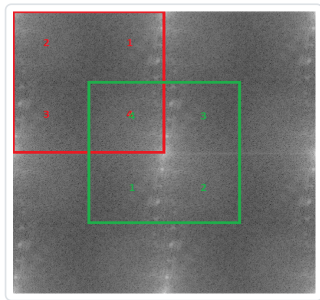
Para um par de DFTs $f(x, y) \leftrightarrow F(u, v)$, se f(x,y) é de dimensões M×N, F(u,v) também o é. No entanto, o valor de cada pixel (contradomínio da imagem) em F(u,v) pertence ao conjunto dos números complexos. Como não é possível exibir uma imagem de números complexos, exibe-se sua magnitude $|F(u, v)| = \sqrt{R^2\left(u, v\right) + I^2\left(u, v\right)}$, onde R e I são as componentes real e imaginária, respectivamente a qual chamamos de espectro de Fourier.

Deslocamento do centro da DFT para melhor visualização: em vermelho, janela com o centro da DFT em (0,0). Em verde, janela com o centro da DFT em (xs/2,ys/2).

Espectro de Fourier imagem original

Fonte: o Autor.

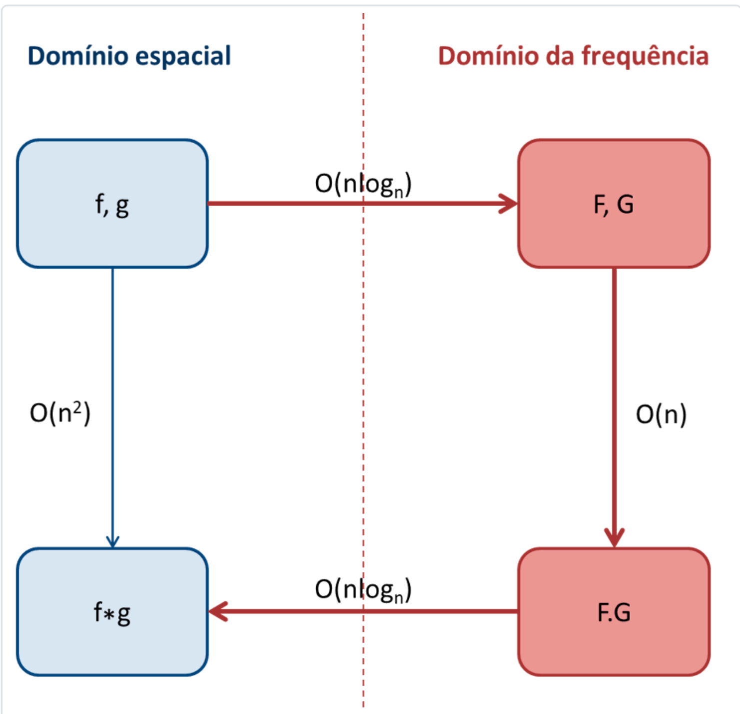
Espectro de Fourier com centro deslocado



Fonte: o Autor.

Transformada rápida de Fourier (FFT, de *fast Fourier transform*)

O resultado é um algoritmo que calcula a DFT com complexidade $O(n\log_n)$. Com isto, torna-se vantajoso utilizar o teorema da convolução e filtrar as imagens no domínio da frequência como ilustra figura a seguir, transforma a imagem e o filtro para o domínio da frequência, multiplica e transforma o resultado de volta, que é mais rápido ($O(n\log_n)$) do que aplicar o filtro por convolução no domínio espacial ($O(n^2)$).

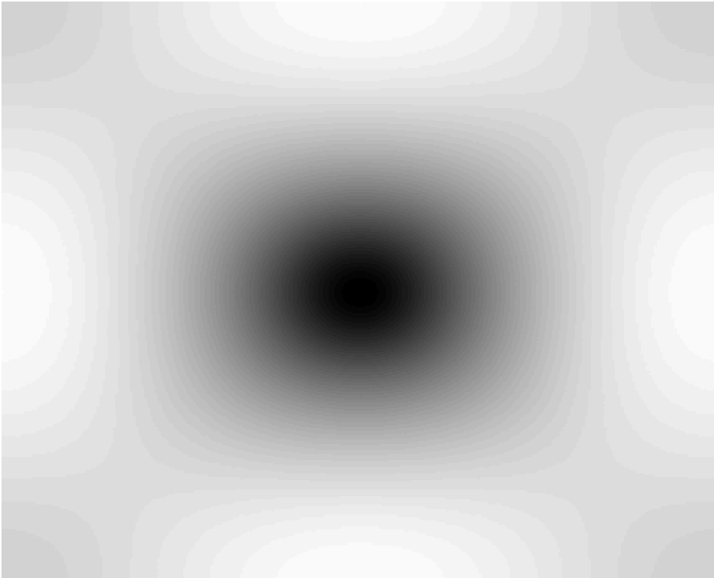


Fonte: o Autor.

Filtros de aguçamento e laplaciano

As frequências mais baixas estão próximas ao centro das imagens. Esses filtros são filtros passa-alta, porque atenuam (multiplicam por valores baixos, representados em tons de cinza mais escuros) as frequências baixas, e destacam (multiplicam por valores altos, representados em tons de cinza mais claros) as altas frequências.

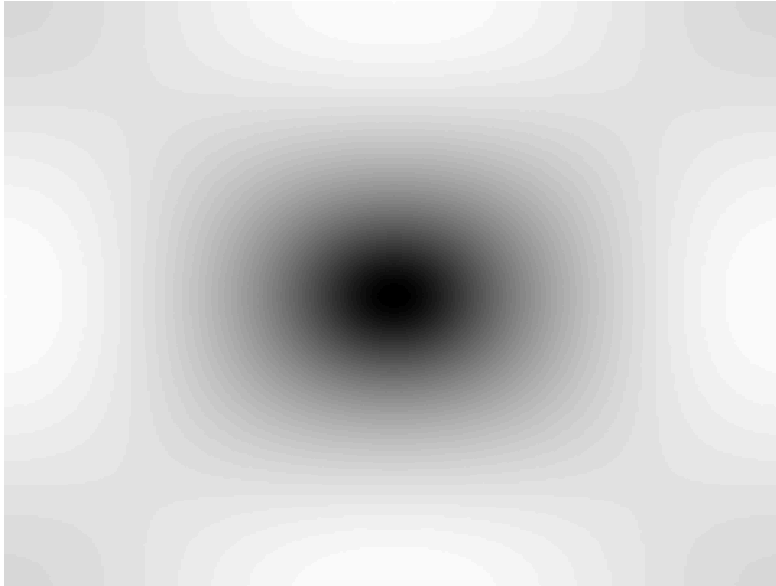
Aguçamento



$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fonte: o Autor.

Laplaciano



$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 9 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Fonte: o Autor.

Simetria conjugada

Ao criar um filtro diretamente no domínio da frequência é importante observar uma propriedade da transformada de Fourier: a simetria conjugada. Essa propriedade diz que a transformada de Fourier de uma função real bidimensional é simétrica com relação à sua diagonal, ou seja, F(u,v) = F(-u,-v). Se, ao aplicar o filtro G no domínio da frequência ($F.G$), esta propriedade for preservada, garante-se que a iDFT de $F.G$ ($f * g$) será uma função real. Se esta propriedade não for preservada, $f * g$ será uma função complexa.

Outros exemplos de uso do domínio da frequência

Existem outras transformadas que levam as imagens do domínio espacial para o domínio da frequência. A **transformada cosseno discreta** (DCT, do inglês *discrete cosine transform*) é um exemplo. A DCT é uma transformada similar à DFT, utilizada principalmente para a compressão de imagens (formato JPG) e vídeo (formato MPEG).

Além da DCT, podemos citar as transformadas de Hadamard, Walsh e wavelets (SHAPIRO E STOCKMAN, 2001). Todas podem ser usadas para compressão de imagens ou outros sinais unidimensionais, como os sinais de áudio. As transformadas *wavelets* são largamente utilizadas em pré-processamento de imagens para fins de segmentação.

Nesta webaula vimos a Transformada de Fourier, o teorema da convolução e os filtros no domínio da frequência.