Métodos Matemáticos

Zero de funções

Você sabia que seu material didático é interativo e multimídia? Isso significa que você pode interagir com o conteúdo de diversas formas, a qualquer hora e lugar. Na versão impressa, porém, alguns conteúdos interativos ficam desabilitados. Por essa razão, fique atento: sempre que possível, opte pela versão digital. Bons estudos!

Nesta webaula, conheceremos três métodos que podemos utilizar quando queremos encontrar, numericamente, a solução para a equação $f(x) = 0$, onde f é uma função qualquer.

Método da bisseção

O passo inicial desse método é encontrar dois pontos, x e y, tais que $f(x) \geq 0$ e $f(y) \leq 0$. Se $f(x) = 0$ ou $f(y) = 0$, nós paramos o método. Se $f(x) = 0$, então x é a raiz da equação, e o mesmo vale para y quando $f(y) = 0$.

E nos casos fora dessas situações?

Vamos considerar $f : [a,\ b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a)\, f(b) < 0$. Seja m o ponto médio de $[a,\ b]$. Observe que se $f(a)\, f(m) < 0$, então, pelo teorema do valor intermediário, temos uma raiz no intervalo $[a, m]$. Por outro lado, se $f(a)\, f(m) > 0$, então temos que $f(a)\, f(m)\, f(a)\, f(b)$ = $[f(a)]^2 f(m)\, f(b) < 0$, pois $[f(a)]^2 > 0$. Assim, segue que $f(m)\, f(b) < 0$ e, portanto, a raiz está localizada no intervalo $[m,\ b]$. Dessa forma, chamando $[a_k,\ b_k]$ e $b_0 = b$ e aplicando-se diversas vezes a bissecção, teremos os intervalos $a_0 = a$ e pontos médios m_k.

Logo, segue que:

$$|b_k - a_k| = b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

Ou seja, o método da bissecção trabalha com uma sequência convergente com base em intervalos encaixados. Esse método em particular é extremamente lento, mas a convergência é garantida se *f* for uma função contínua.

Método do ponto fixo

Inicialmente, dizemos que *C* é um ponto fixo para *f* se $f(c) = c$. Agora, seja $f(x) = 0$ tal que escrevemos $\varphi(x) = x$ e seja x_0 aproximação inicial e $\varepsilon > 0$ para o erro aceitável (ou tolerância para o erro admitindo o método), seguimos os passos (ANDRADE, 2012):

1. Se $|f(x_0)| < \varepsilon$ faça $c = x_0$ e pare.
2. $k = 1$.
3. $x_k = \varphi(x_{k-1})$.
4. Se $|f(x_k)| < \varepsilon$ ou $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$ faça $c = x_k$ e pare.
5. $x_{k-1} = x_k$.
6. $k = k + 1$ e volte ao passo 3.

Matematicamente, tal método irá gerar uma sequência (x_n) utilizando a seguinte regra: $x_{n+1} = \varphi(x_n)\,,\ n \geq 0$, onde a aproximação inicial x_0 é sempre dada.

Método de Newton-Rhapson

Esse método é um dos mais comuns e também um dos métodos mais eficientes quando trabalhamos com a solução numérica de $f\left(x\right) \ = \ 0$.

Para iniciar, vamos supor que $f\left(x\right)$ tenha uma raiz simples no intervalo $[a, \ b]$, tal que $f(x_0) \approx 0$ e $f(x_0 + h) = 0$. Pelo teorema de Taylor, temos:

$$f\left(x\right) = \ f\left(x_n\right) + f'\left(x_n\right)\left(x - \ x_n\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\xi_n\right)\left(x - \ x_n\right)^2,$$

onde ξ_n está entre x e x_n. Assim, se α é a solução, então:

$$0 \ = \ f\left(x_n\right) + \ f'\left(x_n\right)\left(\alpha - \ x_n\right) + \frac{1}{2!}f''\left(\xi_n\right)\left(\alpha - \ x_n\right)^2,$$

Por outro lado, se x_n está suficientemente próximo de α, então desprezamos o resto $\frac{1}{2!}f''\left(\xi_n\right)\left(\alpha - \ x_n\right)^2$, obtendo assim uma aproximação para α, isto é,

$$\alpha \ \approx \ x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

desde que $f'\left(x_n\right) \neq \ 0$. Portanto, obtemos assim o método de Newton-Rhapson, que nos dá x_{n+1} como uma aproximação para a raiz α por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n \geq 0$$

Mas e na prática, como trabalhamos com esse método?

Dado $f\left(x\right) \ = \ 0$, vamos escrever $\varphi\left(x\right) = \ x \ - \ \frac{f(x)}{f'(x)}$, tal que x_0 seja uma aproximação inicial e $\varepsilon \ > \ 0$ tolerância. Para trabalhar com o método de Newton-Rhapson, seguimos os seguintes passos (ANDRADE, 2012):

1. Se $\left|f\left(x_0\right)\right| \ < \ \varepsilon$ faça $c \ = \ x_0$ e pare.
2. $k \ = \ 1$.
3. $x_k = \varphi\left(x_{k-1}\right)$.
4. Se $\left|f\left(x_k\right)\right| \ < \ \varepsilon$ ou $\left|x_k \ - \ x_{k-1}\right| \ < \ \varepsilon$ faça $c \ = \ x_k$ e pare.
5. $x_{k-1} \ = \ x_k$.
6. $k \ = \ k \ + \ 1$ e volte ao passo 3.

Saiba mais

Para saber mais detalhes sobre o método de Newton-Rhapson, consulte o material a seguir

UFRGS. **Método de Newton-Raphson**. UFRGS - IME - Recursos Educacionais Abertos de Matemática. 2020.

Pesquise mais

Aprender a utilizar os métodos numéricos faz parte da vida de um profissional da área da Engenharia, por exemplo. Além disso, o profissional deve estar apto para, também, implementar em programas computacionais que facilitam nas resoluções de problemas.