Métodos Matemáticos

Integração numérica

Você sabia que seu material didático é interativo e multimídia? Isso significa que você pode interagir com o conteúdo de diversas formas, a qualquer hora e lugar. Na versão impressa, porém, alguns conteúdos interativos ficam desabilitados. Por essa razão, fique atento: sempre que possível, opte pela versão digital. Bons estudos!

Nesta webaula conheceremos dois tópicos: a fórmula do trapézio e a regra de Simpson. Ambos os tópicos são utilizados para aproximar o valor de uma integral, consequentemente de uma área, usando métodos numéricos.

Fórmula dos trapézios

Também conhecida como regra dos trapézios, esta fórmula corresponde, basicamente, à interpolação da função a ser integrada por um **polinômio de grau 1** (ANDRADE, 2012). A interpolação linear, nesse caso, necessita de dois pontos, então, vamos trabalhar com os extremos do intervalo de integração, isto é, $a = x_0$ e $b = x_1$.

Logo, o polinômio linear interpolador é dado por:

$$p_1\left(x\right) = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

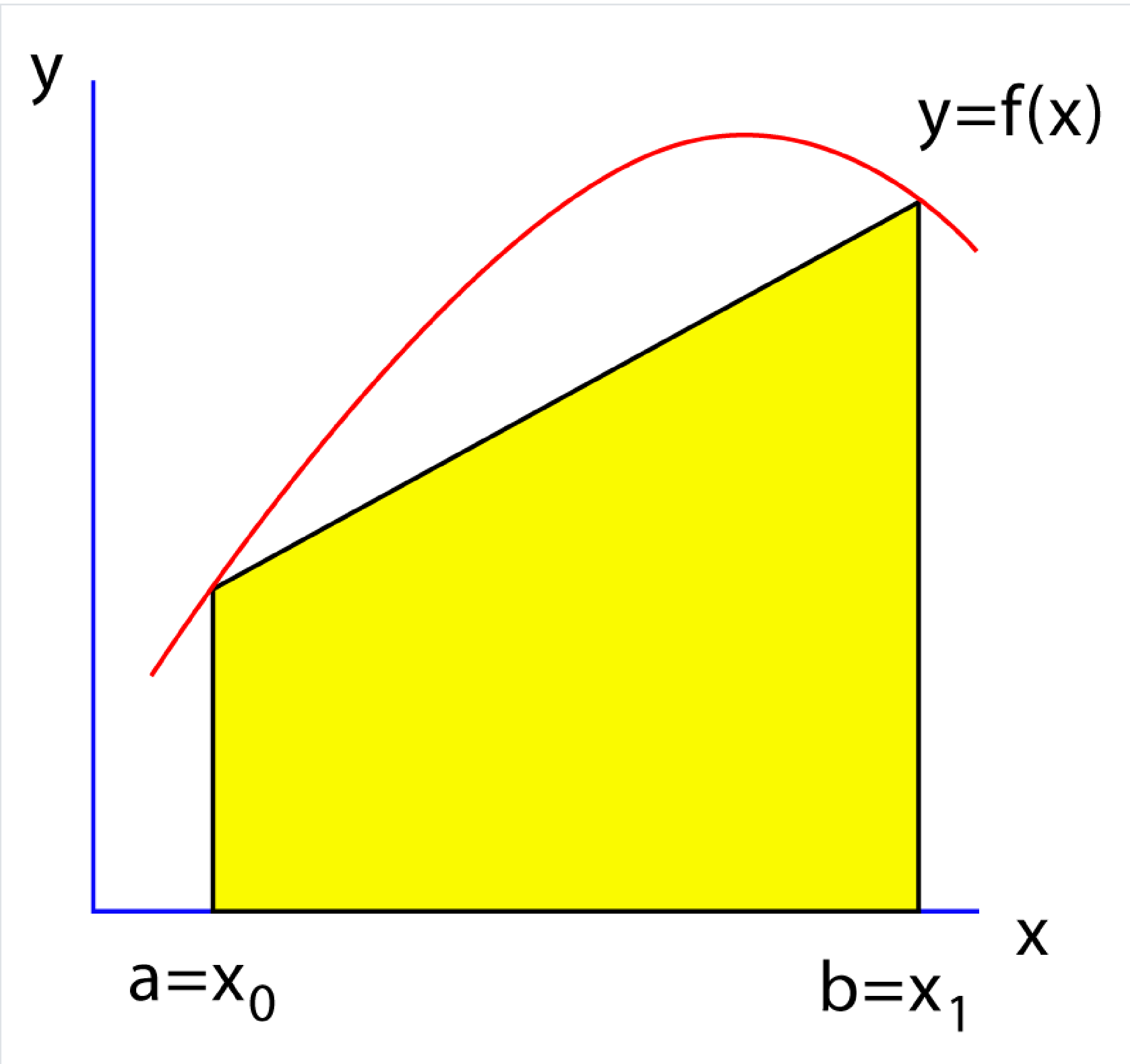
em que $y_0 = f\left(x_0\right), y_1 = f\left(x_1\right)$ são as coordenadas de y. E os pesos são dados por:

$$\omega_0 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} dx = \frac{h}{2},$$

$$\omega_1 = \int_{x_0}^{x_1} \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} dx = \frac{h}{2}$$

Para uma melhor visualização dessa ideia, vamos trabalhar com o gráfico exposto a seguir:

Regra dos trapézios



Fonte: elaborada pelo autor.

Da observação da figura, partindo dos pesos, temos que:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) + erro\,,$$

onde o erro é descrito pela seguinte equação:

$$E_T = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_0} f''(\alpha)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,dx,$$

Onde $\alpha = \alpha X$ é um ponto entre x_0 e x_1. Agora, usando o teorema do valor médio para integrais, obtemos que existe $\beta \in (x_0,\ x_1)$, tal que:

$$E_T = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_0} f''(\alpha)\,(x - x_0)\,(x - x_1)\,dx = -\frac{f''(\beta)h^3}{12}$$

Portanto, podemos escrever a fórmula dos trapézios para a integração numérica como:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) - \frac{f''(\beta)h^3}{12}$$

onde $\beta \in (a,\ b)$ não é conhecido.

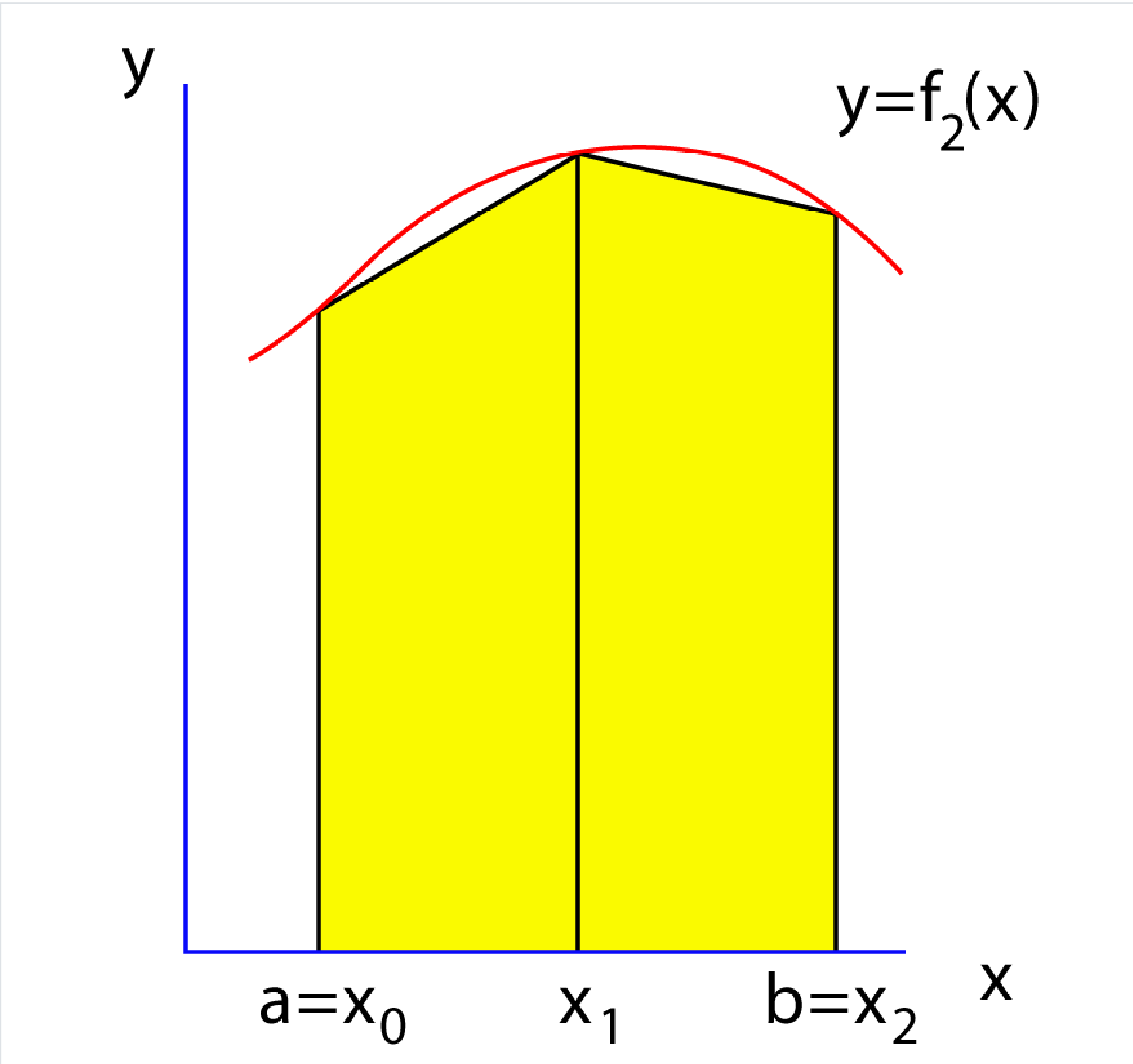
Regra de Simpson

Para esta regra, vamos interpolar $F(x)$ usando um polinômio de grau 2 que coincida com essa função em $a = x_0$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $b = x_2$. Assim, o polinômio interpolar de grau 2 é dado pela equação:

$$p_2\left(x\right) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

em que $y_0 = f(x_0)\,, y_1 = f(x_1)\,, y_2 = f(x_2)$ são as coordenadas de y. Para uma melhor visualização dessa ideia, vamos trabalhar com o gráfico a seguir.

Regra de Simpson



Fonte: elaborada pelo autor.

Dessa forma, a partir dos polinômios de Lagrange, obtemos os pesos da fórmula de Simpson:

$$\omega_0 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_1)(x-x_2)}{(x_0- x_1)(x_0-x_2)} dx = \frac{h}{3}$$

$$\omega_1 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x-x_2)}{(x_1- x_0)(x_1-x_2)} dx = \frac{h}{3}$$

$$\omega_2 = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x - x_0)(x-x_1)}{(x_2- x_0)(x_2-x_1)} dx = \frac{h}{3}$$

Assim, obtemos a seguinte solução para a integral:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + erro$$

onde o erro é dado pela seguinte expressão:

$$E_S = \frac{1}{3!} \int_{x_0}^{x_1} f^{(3)}(\alpha)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\, dx = -\left[\frac{h^5}{90}\right] f^{(4)}(\beta)$$

para algum $\beta \in (x_0, x_2)$. Portanto, a fórmula de Simpson para a integração numérica é descrita pela equação:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\, dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + -\left[\frac{h^5}{90}\right] f^{(4)}(\beta)$$

Saiba mais

A regra de Simpson é uma das principais regras para lidar com integração numérica. Essa regra também é conhecida como Regra 1/3 de Simpson e também Regra dos 3/8 de Simpson. A primeira é a simples e a segunda é a composta, para mais detalhes, leia o material a seguir:

HFM. **Integração Numérica**. CN15. 2010.

Pesquise mais

Para finalizar é mencionar que os dois tópicos apresentado são ferramentas importantes, pois, na prática, raramente temos figuras regulares ou até mesmo funções bem-comportadas. A maioria dos problemas são resolvidos usando métodos numéricos devido à versatilidade desses métodos.

Para visualizar o vídeo, acesse seu material digital.