Os Fundamentos: Lógica de Predicados

Introdução à Lógica Computacional

2022/1

Introdução

Lógica de predicados: Introdução

- A lógica proposicional, que estudamos até agora, cobre a análise de proposições compostas, i.e., proposições simples ligadas por conectivos

$$\neg, \quad \wedge, \quad \vee, \quad \oplus, \quad \rightarrow, \quad \leftrightarrow, \quad \ldots$$

- Entretanto, a lógica proposicional não é expressiva o suficiente para capturar todas as afirmações matemáticas.

- Por exemplo, suponha que saibamos que

  1. *"Todos os matriculados em Introdução à Lógica Computacional são estudantes dedicados"*, e que
  2. *"Felipe está matriculado em Introdução à Lógica Computacional"*.

  Intuitivamente, podemos, então, concluir que

  3. *"Felipe é um estudante dedicado."*

  Este tipo de inferência só é possível após introduzirmos o conceito de predicados e quantificadores, que é o que faremos aqui.

Predicados

Predicados: Introdução

- Afirmações como as seguintes são comuns em matemática:
  1. $x \geq 12$,
  2. $x + y = z$,
  3. O aluno x tirou a maior nota da sala na prova.

- Tais afirmações são escritas em termos de variáveis.

  A menos que os valores das variáveis sejam especificados, as afirmações não são verdadeiras nem falsas.

  Como não possuem valor de verdade, elas não são proposições.

Predicados: Introdução

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ A afirmação

"x é um número real"

pode ser dividida em duas partes:

1. a primeira parte, a **variável** x, é o sujeito da afirmação,
2. a segunda parte *"é um número real"* é um **predicado**, ou seja, uma propriedade que o sujeito da afirmação pode ou não satisfazer.

A afirmação *"x é um número real"* pode ter valores de verdade diferentes dependendo do valor que a variável x assumir.

- Quando $x = \pi$, a afirmação *"x é um número real"* é verdadeira.
- Quando $x = \sqrt{-2}$, a afirmação *"x é um número real"* é falsa.

Predicados: Introdução

- $\boxed{\text{Exemplo 1}}$ (Continuação)

  Podemos ver esta afirmação como uma **função proposicional**

  $$P(x)\text{: } \textit{“x é um número real”}$$

  que mapeia valores de x para valores de verdade (verdadeiro ou falso):

  - $P(\pi) = T$.
  - $P(\sqrt{-2}) = F$.

$\triangleleft$

Predicados

- Um **predicado** é uma sentença que contém um número finito de variáveis e que se torna uma proposição quando as variáveis são substituídas por valores específicos.

  Intuitivamente, predicados:

  - dão qualidades a sujeitos,
  - relacionam sujeitos entre si, ou
  - relacionam sujeitos a objetos.

- Os predicados são classificados de acordo com o número de suas variáveis.

  Um predicado

  $$P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

  de n variáveis é chamado de um **predicado** n-**ário**.

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 2}}$ Seja $P(x)$ o predicado unário (de 1 variável) *"$x \geq 10$"*.
  - $P(15) = T$,

    pois substituindo x por 15 em *"$x \geq 10$"*, obtemos uma afirmação <u>verdadeira</u>.
  - $P(\pi) = F$,

    pois substituindo x por π em *"$x \geq 10$"*, obtemos uma afirmação <u>falsa</u>.

$\triangleleft$

- $\boxed{\text{Exemplo 3}}$ Seja $C(x, y)$ o predicado binário *"x é capital de y"*.
  - $C(\texttt{Brasília}, \texttt{Brasil}) = T$,

    pois substituindo x por `Brasília` e y por `Brasil` em *"x é capital de y"*, obtemos uma afirmação <u>verdadeira</u>.
  - $C(\texttt{Paris}, \texttt{Inglaterra}) = F$,

    pois substituindo x por `Paris` e y por `Inglaterra` em *"x é capital de y"*, obtemos uma afirmação <u>falsa</u>.

$\triangleleft$

Predicados

- $\boxed{\text{Exemplo 4}}$ Seja $S(x, y, z)$ o predicado ternário *"$x + y = z$"*.
  - $S(1, 4, 5) = T$,

    pois substituindo x por 1, y por 4 e z por 5 em *"$x + y = z$"*, obtemos uma afirmação verdadeira.
  - $S(4, 5, 1) = F$,

    pois substituindo x por 4, y por 5 e z por 1 em *"$x + y = z$"*, obtemos uma afirmação falsa.
  - $S(0, 0, 0) = T$,

    pois substituindo x por 0, y por 0 e z por 0 em *"$x + y = z$"*, obtemos uma afirmação verdadeira.

$\triangleleft$

Quantificadores: Introdução

- Como um predicado não tem valor de verdade em si, é preciso instanciar os valores de suas variáveis para transformá-lo em uma proposição.
- Para transformar um predicado em uma proposição, podemos
  1. atribuir valores específicos para todas variáveis (como fizemos até agora), ou
  2. quantificar em qual faixa de valores de cada variável a proposição pode ser considerada verdadeira.

     Em português, usamos palavras como "*nenhum*", "*todos*" e "*algum*" para quantificar predicados.

     Por exemplo, o predicado

     "O computador x do laboratório está ligado"

     não tem valor de verdade em si, mas as seguintes proposições têm:

     1. *"Nenhum computador do laboratório está ligado."*
     2. *"Todos os computadores do laboratório estão ligados."*
     3. *"Algum computador do laboratório está ligado."*

Quantificadores: Domínio ou universo de discurso

- Dado um predicado de várias variáveis, o **domínio de discurso**, ou **universo de discurso**, ou simplesmente **domínio** é o conjunto de valores que as variáveis podem, em princípio, assumir.

  1. No predicado

     $$\text{“}x \geq 2\text{”},$$

     o domínio de discurso pode ser o conjunto dos reais $\mathbb{R}$ ou o dos inteiros $\mathbb{Z}$.

  2. No predicado

     “A pessoa x nasceu no país y”,

     o domínio de x pode ser o conjunto de todas as pessoas, e o domínio de y pode ser o conjunto de países no mundo.

- O domínio de um predicado é essencial para sua quantificação.

Quantificador universal

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação universal** é

$$\forall x : P(x)$$

significando

"Para todos os valores x no domínio, $P(x)$ é verdadeiro"

ou simplesmente

"Para todo x no domínio, $P(x)$"

- O símbolo $\forall$ é o símbolo de **quantificador universal**.
- A proposição $\forall x : P(x)$ é
  - verdadeira se $P(x)$ é verdadeiro para todo x no domínio,
  - falsa se há algum x no domínio tal que $P(x)$ seja falso.

    Um elemento x tal que $P(x) = F$ é um **contra-exemplo** para $\forall x : P(x)$.

Quantificação universal

- $\boxed{\text{Exemplo 5}}$ Considere o universo de discurso $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. A proposição

$$\forall x : x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que

$$1^2 \geq 1, \quad 2^2 \geq 2, \quad 3^2 \geq 3, \quad 4^2 \geq 4, \text{ e } \quad 5^2 \geq 5.$$

Portanto temos que $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$ e $P(5)$ são todos verdadeiros, e a proposição universal é, consequentemente, também verdadeira. $\triangleleft$

Quantificação universal

- É possível definir o universo de discurso já na proposição quantificada:
  1. $\forall x \in \mathbb{R} : x + 1 > x$ estabelece como universo de discurso os números reais.
  2. $\forall y \in \mathbb{Z}^+ : -y \leq -5$ estabelece como universo de discurso os inteiros positivos.
- $\boxed{\text{Exemplo 6}}$ A proposição

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos o contra-exemplo

$$(1/2)^2 = 1/4 \not\geq 1/2,$$

logo $P(1/2)$ é falso e, consequentemente, a proposição universal é falsa. $\lhd$

Quantificação existencial

- Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação existencial** é

$$\exists x : P(x)$$

  significando

  "Existe um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro"

  ou simplesmente

  "Existe x no domínio tal que $P(x)$"

- O símbolo $\exists$ é o símbolo de **quantificador existencial**.

- A proposição $\exists x : P(x)$ é
  - <u>verdadeira</u> se $P(x)$ é verdadeiro para ao menos um x no domínio,
  - <u>falsa</u> se para todo x no domínio $P(x)$ é falso.

    Um elemento x tal que $P(x) = T$ é uma **testemunha** de $\exists x : P(x)$.

- $\boxed{\text{Exemplo 7}}$ Seja $E = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ o universo de discurso. A proposição

$$\exists m : m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Analisando todos os casos, obtemos

$$5^2 = 25 \neq 5, \qquad 6^2 = 36 \neq 6, \qquad 7^2 = 49 \neq 7,$$

$$8^2 = 64 \neq 8, \qquad 9^2 = 81 \neq 9, \text{ e } \qquad 10^2 = 100 \neq 10.$$

Portanto a proposição existencial é falsa.

$\triangleleft$

Quantificação existencial

- $\boxed{\text{Exemplo 8}}$ Seja $\mathbb{Z}$ o universo de discurso. A proposição

$$\exists m : m^2 = m$$

é verdadeira ou falsa?

Solução.

Temos que $1^2 = 1$, logo 1 é uma testemunha de que $m^2 = m$ para pelo menos um inteiro m.

Portanto a proposição existencial é verdadeira.

$\triangleleft$

- Note que nos dois exemplos anteriores o predicado usado foi o mesmo ($\exists m : m^2 = m$), mas a alteração do universo de discurso fez com que uma proposição quantificada fosse falsa (quando $m \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$) , enquanto a outra fosse verdadeira (quando $m \in \mathbb{Z}$).

Quantificação sobre domínios finitos

- Quando o domínio de um quantificador é finito, podemos expressar os quantificadores universal e existencial em termos da lógica proposicional.
- A proposição universal em um domínio finito $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para todo $x \in D$:

$$\forall x : P(x) \qquad \equiv \qquad P(x_1) \wedge P(x_2) \cdots \wedge P(x_n).$$

- A proposição existencial em um domínio finito $D = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ é verdadeira sse $P(x)$ é verdadeiro para pelo menos um $x \in D$:

$$\exists x : P(x) \qquad \equiv \qquad P(x_1) \vee P(x_2) \cdots \vee P(x_n).$$

Quantificadores com domínio restrito

- Frequentemente usamos abreviações para restringir o domínio de um quantificador.

  Por exemplo, considere o universo de discurso como sendo os números reais.

  1. A proposição quantificada

     $$\forall x < 0 : x^2 > 0 \qquad \text{significa} \qquad \forall x : (x < 0 \rightarrow x^2 > 0).$$

     Note que a proposição <u>não significa</u> $\forall x : (x < 0 \land x^2 > 0)$.

  2. A proposição quantificada

     $$\exists y > 0 : y^2 = 2 \qquad \text{significa} \qquad \exists y : (y > 0 \land y^2 = 2).$$

     Note que a proposição <u>não significa</u> $\exists y : (y > 0 \rightarrow y^2 = 2)$.

Ordem de precedência dos quantificadores

- Os quantificadores $\forall$ e $\exists$ têm precedência sobre todos os operadores da lógica proposicional ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\ldots$).

  Por exemplo:

  1. A proposição

     $$\forall x : P(x) \vee Q(x)$$

     significa

     $$(\,\forall x : P(x)\,) \;\vee\; Q(x).$$

     Note que a proposição <u>não significa</u>

     $$\forall x : (\,P(x) \vee Q(x)\,).$$

     Use parênteses com cuidado para expressar o que realmente você quer!

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Quando um quantificador é utilizado em uma variável x, dizemos que x é uma **variável ligada**.

  Uma variável que não é ligada a nenhum quantificador é chamada de **variável livre**.

  1. Em

     $$\forall x : x + y = 2,$$

     x é uma variável ligada, e y é uma variável livre.

- Os nomes das variáveis ligadas de uma expressão quantificada são irrelevantes.

  1. A expressão

     $$\exists x : x + 1 \neq x \quad \text{equivale a} \quad \exists y : y + 1 \neq y \quad \text{e a} \quad \exists num : num + 1 \neq num.$$

Quantificadores: Variáveis ligadas e escopo

- Cada quantificador tem um **escopo** sobre o qual ele vale.

1. Em

$$\exists x : (\, P(x) \land Q(x)\,) \quad \lor \quad \forall x : R(x)$$

todas as variáveis são ligadas, mas o escopo de cada x é diferente.

O primeiro quantificador, $\exists x$, tem como escopo apenas

$$(\, P(x) \land Q(x)\,).$$

O segundo quantificador, $\forall x$, tem como escopo apenas

$$R(x).$$

Podemos renomear variáveis ligadas em escopos diferentes sem alterar a expressão lógica (o que muitas vezes torna a expressão mais fácil de ser lida):

$$\exists x : (\, P(x) \land Q(x)\,) \quad \lor \quad \forall y : R(y)$$

Equivalências lógicas envolvendo quantificadores

- Afirmações envolvendo predicados são logicamente equivalentes se, e somente se, elas têm o mesmo valor de verdade independentemente de quais predicados e domínios de discurso são utilizados.

  Usamos

  $$S \equiv T$$

  para denotar que S e T são equivalentes.

Negando expressões quantificadas

- A negação de expressões quantificadas é dada por equivalências conhecidas como **leis de De Morgan**:

Leis de De Morgan para quantificadores
$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

- Equivalências que seguem das leis de De Morgan são:

Outras equivalências de negação
$\forall x : P(x) \equiv \neg\exists x : \neg P(x)$
$\exists x : P(x) \equiv \neg\forall x : \neg P(x)$

Negando expressões quantificadas universais

- $\boxed{\text{Exemplo 9}}$

$$P: \quad \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0$$

$$\neg P: \quad \neg\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0 \quad \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R} : \neg(x^2 \geq 0) \quad \equiv \quad \exists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$$

$\triangleleft$

- $\boxed{\text{Exemplo 10}}$

P : *"Todos os programas de computador são finitos."*

$\neg P$: *"Nem todos os programas de computador são finitos."* $\equiv$
"Existe um programa de computador que não é finito."

$\triangleleft$

- $\boxed{\text{Exemplo 11}}$

P : *"Todo mundo gosta de sorvete ou de bolo."*

$\neg P$: *"Nem todo mundo gosta de sorvete ou de bolo."* $\equiv$
"Existe uma pessoa que não gosta de sorvete nem de bolo."

$\triangleleft$

Negando expressões quantificadas existenciais

- $\boxed{\text{Exemplo 12}}$

$$P: \quad \exists x \in \mathbb{N} : x^2 = x$$

$$\neg P: \quad \neg\exists x \in \mathbb{N} : x^2 = x \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N} : \neg(x^2 = x) \quad \equiv \quad \forall x \in \mathbb{N} : x^2 \neq x$$

$\triangleleft$

- $\boxed{\text{Exemplo 13}}$

P : *“Alguns peixes respiram ar.”*

$\neg P$: *“Nenhum peixe respira ar.”*

$\triangleleft$

- $\boxed{\text{Exemplo 14}}$

P : *“Alguns esportistas são brasileiros e jovens.”*

$\neg P$: *“Nenhum esportista é brasileiro e jovem.”* $\equiv$
“Todo esportista não é brasileiro ou não é jovem.”

$\triangleleft$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural:
  - *"Nenhuma arara é pequena."*
  - *"Araras são coloridas e grandes."*
  - *"Existe uma arara que não é colorida, nem pequena."*

Solução.

Primeiro tomamos como universo de discurso o conjunto de todos os animais, então definimos os seguintes predicados:

$$A(x): \quad \text{“}x \text{ é uma arara”}$$

$$C(x): \quad \text{“}x \text{ é colorido”}$$

$$P(x): \quad \text{“}x \text{ é pequeno”}$$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ (Continuação)

  Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal como abaixo.

  (Neste problema, assumimos que tudo que não é pequeno é grande, sem meio termo.)

  - *"Nenhuma arara é pequena"*:

    $$\neg\exists x : (\, A(x) \land P(x)\,)$$

    Forma equivalente:

    $$\forall x : (\, A(x) \to \neg P(x)\,)$$

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 15}}$ (Continuação)

  - *"Araras são coloridas e grandes"*:

$$\forall x : (\ A(x)\ \rightarrow\ C(x) \wedge \neg P(x)\ )$$

  - *"Existe uma arara que não é colorida, nem pequena"*:

$$\exists x : (\ A(x) \wedge \neg C(x) \wedge \neg P(x)\ )$$

$\lhd$

- $\boxed{\text{Exemplo 16}}$ Encontre uma forma equivalente para as duas últimas expressões quantificadas do exemplo anterior, trocando o quantificador existencial pelo universal e vice-versa. (Note que você pode usar a negação de quantificadores sempre que necessário.)

  Solução. Exercício para o(a) estudante! $\lhd$

Quantificadores aninhados

Quantificadores aninhados: Introdução

- Muitas expressões usam múltiplos **quantificadores aninhados**.

  Por exemplo, no universo de discurso dos números reais, temos o seguinte.

  1. A expressão

     $$\forall x : \forall y : (\ (x > 0) \land (y < 0) \ \rightarrow \ (xy < 0)\,)$$

     significa

     "O produto de quaisquer dois reais de sinais opostos é um real negativo."

  2. A expressão

     $$\forall x : \exists y : (x + y = 0)$$

     significa

     "Todo número real tem um número real oposto
     (isto é, que somado ao original resulta em zero)."

- Nesta seção estudaremos quantificadores aninhados.

Entendendo quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 17}}$ Seja o seguinte predicado sobre o domínio de todas as pessoas:

$$A(x, y) : \quad \text{“}\textit{A pessoa } x \textit{ ama a pessoa } y\text{”}$$

  - $\forall x : \exists y : A(x, y)$ significa *“Todo mundo ama alguém.”*
  - $\exists y : \forall x : A(x, y)$ significa *“Existe alguém que é amado por todo mundo.”*
  - $\forall y : \exists x : A(x, y)$ significa *“Todo mundo é amado por alguém.”*
  - $\exists x : \forall y : A(x, y)$ significa *“Existe alguém que ama todo mundo.”*

$\triangleleft$

A ordem dos quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 18}}$ Seja o universo de discurso o conjunto dos números reais. Para cada sentença, diga o que ela significa em linguagem natural e se ela é verdadeira ou falsa.

  - $\forall x : \exists y : x < y$ significa

    "Para todo número real x, existe outro real maior que x."

    Esta sentença é <u>verdadeira</u>.

  - $\exists y : \forall x : x < y$ significa

    "Existe um número real que é maior que todos os demais números reais."

    Esta sentença é <u>falsa</u>.

  As sentenças do exemplo anterior não são equivalentes logicamente.

  <u>Em geral, ao se trocar a ordem de quantificadores de tipo diferente, o sentido da proposição se altera.</u>

◁

Quantificação sobre duas variáveis

- Quantificadores podem ser aninhados em vários níveis.

  Em particular, é comum encontrar quantificadores aninhados em dois níveis.

Afirmação	**Quando é verdadeira?**	**Quando é falsa?**
$\forall x : \forall y : P(x, y)$ $\forall y : \forall x : P(x, y)$	$P(x, y)$ é verdadeiro para todo par x, y.	Existe um par x, y tal que $P(x, y)$ é falso.
$\forall x : \exists y : P(x, y)$	Para cada x existe um y tal que $P(x, y)$ é verdadeiro.	Existe um x tal que $P(x, y)$ é falso para todo y.
$\exists x : \forall y : P(x, y)$	Existe um x tal que $P(x, y)$ é verdadeiro para todo y.	Para cada x existe um y tal que $P(x, y)$ é falso.
$\exists x : \exists y : P(x, y)$ $\exists y : \exists x : P(x, y)$	Exite um par x, y tal que $P(x, y)$ é verdadeiro.	$P(x, y)$ é falso para todo par x, y.

Traduzindo de sentenças quantificadas para linguagem natural

- $\boxed{\text{Exemplo 19}}$ Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$C(x): \quad \text{“}x \textit{ tem um computador”}$$

$$F(x,y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos”}$$

  - $\forall x : (\ C(x) \lor \exists y : (\ C(y) \land F(x,y)\ )\ )$ significa

    *“Todo estudante tem um computador
    ou tem um amigo que tenha um computador.”*

  - $\exists x : \forall y : \forall z : (\ F(x,y) \land F(x,z) \land (y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z)\ )$ significa

    “Existe um estudante cujos amigos não são amigos entre si.”

$\triangleleft$

Traduzindo de linguagem natural para sentenças lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ Expresse como expressões quantificadas as seguintes afirmações em linguagem natural, considerando que estamos falando apenas de estudantes da universidade:
  - *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir."*
  - *"Há um estudante que não sabe dirigir nem tem amigos que saibam."*
  - *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir."*

Solução.

Primeiro definimos os seguintes predicados sobre o universo de todos os estudantes da universidade:

$$D(x): \quad \text{“}x \textit{ sabe dirigir}\text{”}$$

$$A(x, y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos}\text{”}$$

Assim podemos traduzir as sentenças para linguagem formal como a seguir.

Traduzindo de linguagem natural para expressões lógicas

- $\boxed{\text{Exemplo 20}}$ (Continuação)

1. *"Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x : \exists y : (\, A(x, y) \wedge \neg D(y)\,)$$

2. *"Há um estudante que não sabe dirigir nem tem amigos que saibam."*:

$$\exists x : (\, \neg D(x) \;\wedge\; \forall y : (\, A(x, y) \rightarrow \neg D(y)\,)\,)$$

3. *"Cada estudante tem exatamente um amigo que não sabe dirigir"*:

$$\forall x : \exists y : (\; A(x, y) \;\wedge\; \neg D(y) \;\wedge\; \forall z : (\, A(x, z) \wedge \neg D(z) \;\rightarrow\; y = z\,)\;)$$

ou, de forma equivalente:

$$\forall x : \exists y : (\; A(x, y) \;\wedge\; \neg D(y) \;\wedge\; \forall z : (\, A(x, z) \wedge y \neq z \;\rightarrow\; D(z)\,)\;)$$

◁

Negação de quantificadores aninhados

- A negação de quantificadores aninhados usa as mesmas leis de De Morgan para negação de quantificadores.

Leis de De Morgan para negação
$\neg\forall x : P(x) \equiv \exists x : \neg P(x)$
$\neg\exists x : P(x) \equiv \forall x : \neg P(x)$

Notando que $P(x)$ pode ser ela mesma uma expressão quantificada.

- $\boxed{\text{Exemplo 21}}$ Seja $A(x, y)$ a proposição *"A pessoa x ama a pessoa y"* com universo de discurso como sendo todas as pessoas do mundo.

$$P : \quad \forall x : \exists y : A(x, y) \qquad \text{“Todo mundo ama alguém”}$$

$$\begin{aligned} \neg P : \quad & \neg\forall x : \exists y : A(x, y) \quad \equiv \\ & \exists x : \neg\exists y : A(x, y) \quad \equiv \\ & \exists x : \forall y : \neg A(x, y) \qquad \text{“Existe alguém que não ama ninguém.”} \end{aligned}$$

◁

Negação de quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \textit{“x sabe dirigir”}$$

$$A(x, y): \quad \textit{“x e y são amigos”}$$

Proposição P:

$$\text{P}: \quad \forall x : \exists y : (\, A(x, y) \land \neg D(y)\,)$$

Afirmativa: *“Todo estudante tem um amigo que não sabe dirigir.”*

$$\neg\text{P}: \quad \exists x : \forall y : (\, A(x, y) \rightarrow D(y)\,)$$

Negação: *“Existe um estudante cujos amigos todos sabem dirigir.”*

Negação de quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{“}x \textit{ sabe dirigir”}$$

$$A(x,y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos”}$$

Proposição Q:

$$Q: \quad \exists x : (\neg D(x) \wedge \forall y : (A(x,y) \rightarrow \neg D(y)))$$

Afirmativa: *“Há um estudante que não sabe dirigir e que não tem”*
“nenhum amigo que saiba.”

$$\neg Q: \quad \forall x : (D(x) \vee \exists y : (A(x,y) \wedge D(y)))$$

Negação: *“Todo estudante sabe dirigir, ou tem um amigo que sabe.”*

Negação de quantificadores aninhados

- $\boxed{\text{Exemplo 22}}$ (Continuação)

Sejam os seguintes predicados sobre o domínio de estudantes:

$$D(x): \quad \text{“}x \textit{ sabe dirigir”}$$

$$A(x,y): \quad \text{“}x \textit{ e } y \textit{ são amigos”}$$

Proposição R:

$$\text{R}: \quad \forall x : \exists y : (A(x,y) \land \neg D(y) \land \forall z : (A(x,z) \land \neg D(z) \to y = z))$$

Afirmativa: *“Cada estudante tem exatamente um amigo que”*
“não sabe dirigir.”

$$\neg\text{R}: \quad \exists x : \forall y : (A(x,y) \land \neg D(y) \to \exists z : (A(x,z) \land \neg D(z) \land y \neq z)))$$

Negação: *“Existe um estudante que não possui amigos que não dirijam”*
“ou que possui ao menos dois amigos que não dirijam.”

Outros tipos de quantificadores

- Até agora introduzimos os quantificadores existencial e universal.

  Estes quantificadores são os mais importantes em matemática e em computação.

- Nada impede, entretanto, que se definam outros quantificadores, como:

  1. *"Existem pelo menos 3"*
  2. *"Existem no máximo 100"*
  3. *"Existe exatamente 1"*
  4. *"Existem entre 12 e 27"*

  Neste curso, entretanto, vamos nos ater apenas aos quantificadores existencial e universal, por duas boas razões:

  1. os demais podem ser representados usando apenas os quantificadores existencial e universal; e
  2. as regras de inferência que veremos mais adiante no curso são muito mais simples se usarmos apenas estes quantificadores.

  A seguir veremos alguns exemplos de como esses novos quantificadores podem ser escritos em função apenas do existencial e do universal.

Outros tipos de quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 23}}$ Dado um predicado $P(x)$, vamos definir o conceito de **quantificação de no máximo 1**

$$\exists_{\leq 1} x : P(x)$$

significando

"Existe no máximo um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro",

que é verdadeira se zero ou exatamente um valor de x no domínio torna $P(x)$ verdadeira, e é falsa se dois ou mais valores de x no domínio tornam $P(x)$ verdadeira.

Mostre que o quantificador $\exists_{\leq 1}$ pode ser escrito usando apenas os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$.

Outros tipos de quantificadores

- $\boxed{\text{Exemplo 23}}$ (Continuação)

Solução.

Note que falar que existe no máximo um valor de x que satisfaz $P(x)$ significa dizer que se há dois valores x_1 e x_2 que satisfazem $P(x)$, então x_1 e x_2 são iguais:

$$\exists_{\leq 1} x : P(x) \quad \equiv \quad \forall x_1 : \forall x_2 : (\ P(x_1) \land P(x_2) \ \rightarrow \ x_1 = x_2 \ )$$

Alternativamente, podemos tomar a contrapositiva e dizer que se x_1 e x_2 são diferentes, então não podemos ter $P(x_1)$ e $P(x_2)$ verdadeiros ao mesmo tempo:

$$\exists_{\leq 1} x : P(x) \quad \equiv \quad \forall x_1 : \forall x_2 : (\ x_1 \neq x_2 \ \rightarrow \ \neg P(x_1) \lor \neg P(x_2) \ )$$

◁

Outros tipos de quantificadores: O quantificador de unicidade

- $\boxed{\text{Exemplo 24}}$ Dado um predicado $P(x)$, sua **quantificação de unicidade** é

$$\exists! x : P(x)$$

significando

"Existe exatamente um valor de x no domínio tal que $P(x)$ é verdadeiro",

que é <u>verdadeira</u> se exatamente um valor de x no domínio torna $P(x)$ verdadeira, e é <u>falsa</u> se zero ou mais de um valor de x no domínio tornam $P(x)$ verdadeira.

Mostre que o quantificador $\exists!$ pode ser escrito usando apenas os quantificadores existencial $\exists$ e universal $\forall$.

Solução. Desafio para o(a) estudante! $\lhd$

(Relembrando: nas listas nas provas é esperado que você use apenas os quantificadores existencial e universal!)

Material complementar: Proposições condicionais universais

Proposição condicional universal

- Uma **proposição condicional universal** tem a forma

$$\forall x : (\, P(x) \to Q(x) \,)$$

- Proposições desta forma são muito comuns.

1. *"Se um número real é maior que 2 então seu quadrado é maior que 4"*:

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\ (x > 2) \to (x^2 > 4)\ )$$

2. *"Todo byte tem oito bits"*:

$$\forall x : \text{ ``\textit{se x é um byte, então x tem oito bits}''.}$$

- Lembre-se de que as duas proposições seguintes são equivalentes:

$$\forall x : (\, x \in D \to P(x) \,) \quad \equiv \quad \forall x \in D : P(x)$$

No geral prefere-se a segunda forma.

Negação de proposições condicionais universais

- A negação de uma proposição condicional universal é derivada como:

$$\begin{aligned}\neg\forall x : (\,P(x) \to Q(x)\,) &\equiv \exists x : \neg(\,P(x) \to Q(x)\,) && \text{(por De Morgan)}\\ &\equiv \exists x : \neg(\,\neg P(x) \vee Q(x)\,) && \text{(por equiv. de impl.)}\\ &\equiv \exists x : (\,P(x) \wedge \neg Q(x)\,) && \text{(por De Morgan)}\end{aligned}$$

- $\boxed{\text{Exemplo 25}}$

P : *"Toda pessoa loira tem olhos azuis."*

$\neg P$: *"Existe uma pessoa loira que não tem olhos azuis."*

$\lhd$

- $\boxed{\text{Exemplo 26}}$

P : *"Se um programa foi escrito em C, ele tem um erro."*

$\neg P$: *"Existe pelo menos um programa escrito em C que não tenha erro."*

$\lhd$

Verdade por vacuidade de proposições universais

- Lembre-se de que se a premissa p é falsa, a implicação

$$p \to q$$

é sempre verdadeira, independente de q.

- Portanto, se $P(x)$ é falso para cada x no universo de discurso D, então uma proposição da forma

$$\forall x \in D : (\, P(x) \to Q(x) \,)$$

é verdadeira, já que a implicação $P(x) \to Q(x)$ é verdadeira para todo x.

Verdade por vacuidade de proposições universais

- $\boxed{\text{Exemplo 27}}$ Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.
  - **Cenário 1**: três bolas azuis e uma branca são colocadas no prato.

    A afirmação

    "Todas as bolas no prato são azuis"

    é verdadeira ou falsa?

    Para ver que a afirmação é falsa, note que sua negativa é verdadeira:

    "Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul."

Verdade por vacuidade de proposições universais

- $\boxed{\text{Exemplo 27}}$ (Continuação)

Sejam cinco bolas azuis, cinco brancas e um prato.

- **Cenário 2**: nenhuma bola é colocada no prato.

  A afirmação

  "Todas as bolas no prato são azuis"

  é verdadeira ou falsa?

  Para ver que a afirmação é <u>verdadeira</u>, note que sua negativa é falsa:

  "Existe pelo menos uma bola no prato que não é azul."

  Uma outra maneira para ver que a afirmação é verdadeira é escrevê-la explicitamente como uma proposição universal em que a hipótese da implicação é sempre falsa (e, portanto, a implicação é sempre verdadeira):

  "Para toda bola, temos que se ela está no prato, então ela é azul."

◁