Métodos Matemáticos

Sistemas lineares

Você sabia que seu material didático é interativo e multimídia? Isso significa que você pode interagir com o conteúdo de diversas formas, a qualquer hora e lugar. Na versão impressa, porém, alguns conteúdos interativos ficam desabilitados. Por essa razão, fique atento: sempre que possível, opte pela versão digital. Bons estudos!

Nesta webaula conheceremos o método da matriz inversa que é comumente utilizado em situações problemas de sistemas lineares. Sabemos que existem diversos tipos de matrizes, por isso é importante identificar as principais características de uma matriz inversa para facilitar no momento da resolução.

Matriz inversa

Para trabalhar com inversão de matrizes, dois fatores são importantes: as operações elementares e a forma matriz-linha reduzida à forma escada. Neste aspecto, dizemos que uma matriz A é invertível se sua matriz-linha reduzida à forma escada é a matriz identidade. Além disso, sendo A^{-1} a inversa de A, o produto $A \cdot A^{-1}$ resulta na matriz identidade. Veremos como esse procedimento funciona na prática. Como exemplo, considere a matriz A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para começar o processo de inversão da matriz A, colocamos a matriz identidade junto à matriz A e aplicamos as operações elementares com as linhas, a fim de reduzir a parte esquerda (que corresponde a A) à forma escada da linha reduzida. Além disso, as operações devem ser feitas simultaneamente na parte direita. Isto é,

$$\left[\overbrace{\begin{matrix} 2 & 1 & 0 & 0| \\ 1 & 0 & -1 & 1| \\ 0 & 1 & 1 & 1| \\ -1 & 0 & 0 & 3| \end{matrix}}^{\textbf{Matriz A}} \; \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}^{\textbf{Matriz identidade}} \right]$$

A primeira operação elementar que faremos é trocar a primeira linha com a segunda linha, isto é, $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1| & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0| & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1| & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3| & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A segunda operação que faremos é somar a quarta linha e a segunda linha, a primeira linha multiplicada por -2, isto é $L_4 = L_4 - 2L_1$; $L_2 = L_2 - 2L_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Como terceira operação, faremos a subtração da segunda linha da terceira linha, isto é,: $L_3 = L_2 - L_3$.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Em seguida, trocaremos o sinal da terceira linha, isto é, $L_3 = (-1)L_3$ e, em seguida, anularemos o que falta na terceira coluna, isto é,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Por fim, obtemos a identidade à esquerda e a inversa de A à direita, isto é,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 2 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Você pode verificar se, de fato, a matriz encontrada é a matriz inversa da matriz A por meio do produto $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}\ ;\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$, em que I_4 é a matriz identidade de ordem 4.

Saiba mais

O método de eliminação de Gauss é semelhante ao escalonamento para resolver um sistema linear. A diferença é que ele faz o uso de pivôs para a eliminação dos elementos respectivos na coluna. Para saber mais sobre o método, leia o seguinte material:

RINCON, M.; FAMPA, M. **Álgebra linear**. Aula 13: método de eliminação de Gauss. Rio de Janeiro, RJ: CEDERJ, [s.d.].

Pesquise mais

Para finalizar, é importante enfatizar que, assim como as demais matrizes, a matriz inversa surgiu da necessidade de um método para a resolução de sistemas lineares. Por sua vez, os sistemas lineares são utilizados em muitas situações, por exemplo tráfego de veículos e balanceamento de equações químicas. Portanto, conhecer e se familiarizar com os métodos na utilização de matrizes se faz necessário.