Métodos Matemáticos

Interpolação

Você sabia que seu material didático é interativo e multimídia? Isso significa que você pode interagir com o conteúdo de diversas formas, a qualquer hora e lugar. Na versão impressa, porém, alguns conteúdos interativos ficam desabilitados. Por essa razão, fique atento: sempre que possível, opte pela versão digital. Bons estudos!

Nesta webaula conheceremos o método de Lagrange que consiste em aproximar uma função usando polinômios.

Método de Lagrange

Vamos considerar dados $(n + 1)$ pontos distintos $x_0, \ x_1, \ . \ . \ . \ , \ x_n$ e $y_i = f(x_i), \ i = 0, 1, . \ . \ . \ , \ n$. Para cada $k = 0, 1, . \ . \ . \ , \ n$ seja:

$$L_{k(x)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

Ou resumidamente,

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \ k = 0,1, \ldots, \ n.$$

Podemos notar que:

a. $L_k(x_k) = 1$,

b. $L_k(x_j) = 0, \ j \neq k$,

c. $L_k(x)$ é um polinômio de grau n.

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema (Lagrange): Sejam $x_0, \ x_1, \ . \ . \ . \ , \ x_n$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, . \ . \ . \ , \ n$ dados. Então, existe um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n que interpola f nesses pontos. Além disso, $p_n(x)$ é dado por:

$$p_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdot \cdot \cdot + y_n L_n(x),$$

onde:

$$L_k(x) = \prod_{i=0, i \neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \ k = 0,1, \ldots, \ n.$$

E o erro? Como podemos estimá-lo com base no método de Lagrange?

Vamos considerar $(n + 1)$ nós distintos $x_0, \ x_1, . \ . \ . \ , \ x_n$ no intervalo $[a, \ b]$ e $f : [a, \ b] \rightarrow \mathbb{R}$ de uma função. Então, para cada $x \in [a, \ b]$ existe $\xi_x \in (a, \ b)$, tal que:

$$f(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n+1)(\xi x)}}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1) \cdot \cdot \cdot (x - x_n).$$

Assim, o erro para o polinômio de Lagrange é dado pela diferença $|f(x) - p_n(x)|$

Para finalizar, é importante enfatizar que o métodos de Lagrange é utilizado nas mais diversas áreas. No âmbito computacional, por exemplo, é possível escrever um código no software Maple que pode ser utilizado para encontrar o polinômio interpolador de Lagrange. Assim, a habilidade na utilização desse método poderá facilitar nas resoluções de situações problemas.