Anhanguera

Aqui o seu esforço ganha força.

Faculdade Anhanguera de Taubaté – Unidade II

Curso de Ciência da Computação e Engenharias

Disciplina: ***Métodos Numéricos***
Professor: ***Marcello Benevides***

Aula 05 Sistemas lineares A

Sistemas Lineares

- **Forma Geral**

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n
\end{array}
$$

onde:

a_{ij} → **coeficientes**

x_i → **incógnitas**

b_i → **termos independentes**

Sistemas Lineares

- **Exemplo 01**

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 5 \\
4x_1 + 1x_2 - 5x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

2, 4, -5, 4, 1, -5, 2, 4 e 5 → coeficientes

x_1, x_2 e x_3 → incógnitas

5, 2 e -1 → termos independentes

Sistemas Lineares

- **Forma Matricial**

$$Ax = b$$

na qual:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- **Exemplo 02**
  - **Forma Geral**

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 4x_2 - 5x_3 &= 5 \\
4x_1 + 1x_2 - 5x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= -1
\end{aligned}
$$

  - **Forma Matricial**

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 4 & 1 & -5 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}
$$

Sistemas Lineares

- **Classificação I**
  - **Impossível** → **Não possui solução**
    - **Exemplo 03**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- **Classificação II**
  - **Possível** → **Possui 1 ou mais soluções**
    - **Determinado** → **Solução única**
      - **Exemplo 04**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = 8 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- **Classificação III**
  - **Possível** → **Possui 1 ou mais soluções**
    - **Indeterminado** → **Mais de uma solução**
      - **Exemplo 05**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- **Classificação IV**
  - **Possível** → **Possui 1 ou mais soluções**
    - **Homogêneo** → **Vetor b=0 (x=0 sempre existe solução)**
      - **Exemplo 06**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemas Lineares

- **Sistemas Triangulares:**
  - **Possibilidade de resolução de forma Direta**
    - **Inferior**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- **Sistemas Triangulares:**
  - **Possibilidade de resolução de forma Retroativa**
    - **Superior**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Solução Retroativa

- **Exemplo 7:**
  - **Dado o sistema:**

$$\begin{array}{rrrrl} 3x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +x_4 & = -10 \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = -1 \\ & & 4x_3 & -5x_4 & = 3 \\ & & & 2x_4 & = 2 \end{array}$$

  - **Primeiro passo para sua resolução:**

$$x_4 = \frac{2}{2} = 1$$

Solução Retroativa

- **Exemplo 7:**
  - **Segundo passo:**

$$4x_3 - 5x_4 = 3$$
$$4x_3 - 5 \cdot 1 = 3$$
$$x_3 = 2$$

  - **Terceiro passo:**

$$x_2 + x_3 - 2x_4 = -1$$
$$x_2 + 2 - 2 \cdot 1 = -1$$
$$x_2 = -1$$

Solução Retroativa

- **Exemplo 7:**
  - **Último passo:**

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10$$
$$3x_1 + 4 \cdot (-1) - 5 \cdot 2 + 1 = -10$$
$$x_1 = 1$$

Métodos Numéricos

- **Diretos**
  - **Solução pode ser encontrada a partir de um número finito de passos**
    - **Método de Gauss**
    - **Método da Eliminação de Jordan**
    - **Fatoração LU**

Métodos Numéricos

- **Iterativos**
  - Solução a partir de uma **seqüência de aproximações** para o valor do vetor solução **x**, até que seja obtido um valor que satisfaça à precisão pré-estabelecida
    - **Método de Jacobi**
    - **Método de Gauss – Seidel**

Método de Gauss

- **Propósito**
  - **Transformação do sistema linear a ser resolvido em um sistema linear triangular;**
  - **Resolução do sistema linear triangular de forma retroativa.**

Método de Gauss

- **Transformação do Sistema Linear**
  - **Troca da ordem das linhas;**
  - **Multiplicação de uma das equações por um número real não nulo;**
  - **Substituição de uma das equações por uma combinação linear dela mesma com outra equação.**

Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**
  - **Construção da matriz aumentada Ab**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} & b_n \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**
  - **Passo 1:**
    - **Eliminar os coeficientes de x_1 presentes nas linhas 2,3,...,n - sendo $a_{21} = a_{31,} = \ldots = a_{n1} = 0$ - sendo a_{11} chamado de pivô da coluna**
    - **Substituir a linha 2, L_2, pela combinação linear**

$$L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad na \quad qual: \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**
  - **Substituir a linha 3, L_3, pela combinação linear:**

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad na \quad qual: \; m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}}$$

Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**
  - **Continuar a substituição até a linha n;**
  - **Caso algum elemento $a_{pp}=0$, achar outra linha k onde $a_{kp} \neq 0$ e trocar tais linhas. Caso a linha k não exista, o sistema linear não possui solução.**

Método de Gauss

- **Passos do Método de Gauss**

  - **Eliminar os coeficientes de x_2 nas linhas 3, 4, ..., n (fazer $a_{32}=a_{42}=...=a_{n2} = 0$);**

  - **Eliminar os coeficientes de x_3 nas linhas 4, 5, ..., n (fazer $a_{43}=a_{53}=...=a_{n3} = 0$) e assim sucessivamente.**

Método de Gauss

- **Exemplo 8:**
  - **Resolver o sistema:**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

  - **Matriz aumentada Ab**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Exemplo 8:**
  - **Faz-se:**

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1, \quad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 2$$

  - **Assim:**

$$L_2 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} - 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- **Exemplo 8:**
  - **Faz-se:**

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1, \quad m_{23} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 1$$

  - **Assim:**

$$L_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- **Exemplo 8:**
  - **Obtém-se a matriz:**

$$[Ab] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Exemplo 8:**
  - **Substituindo a linha 3 por:**

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_1, \quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 3$$

  - **Têm-se:**

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- Exemplo 8:
  - A matriz [Ab] fica assim com os seguintes valores:

$$[Ab]=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Exemplo 8:**
  - **Usa-se a solução retroativa:**

$$\begin{cases} 5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3 \\ \\ -2x_2 - x_3 = -7 \Rightarrow -2x_2 - 3 = 7 \Rightarrow x_2 = 2 \\ \\ 2x_1 + 3 \cdot x_2 - x_3 = 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x_1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{cases}$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **Resolver o sistema.**

$$\begin{aligned} 1{,}5x_1 + 5{,}4x_2 + 3{,}3x_3 &= 10 \\ 4{,}2x_1 + 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 &= 11{,}7 \\ 2{,}7x_1 + 5{,}7x_2 + 7{,}8x_3 &= 8{,}9 \end{aligned}$$

  - **Representando o sistema pela matriz aumentada:**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1{,}5 & 5{,}4 & 3{,}3 & 10 \\ 4{,}2 & 2{,}3 & 4{,}5 & 11{,}7 \\ 2{,}7 & 5{,}7 & 7{,}8 & 8{,}9 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **Escolhendo a primeira linha como pivô, obtém-se:**

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = \begin{bmatrix} 4{,}2 & 2{,}3 & 4{,}5 & 11{,}7 \end{bmatrix} - (4{,}2/1{,}5) \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 & 5{,}4 & 3{,}3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & -12{,}82 & -4{,}74 & -16{,}3 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = \begin{bmatrix} 2{,}7 & 5{,}7 & 7{,}8 & 8{,}9 \end{bmatrix} - (2{,}7/1{,}5) \cdot \begin{bmatrix} 1{,}5 & 5{,}4 & 3{,}3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -4{,}02 & -1{,}86 & -9{,}1 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **Representando o sistema pela matriz aumentada:**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 5,4 & 3,3 & 10 \\ 0 & -12,82 & -4,74 & -16,3 \\ 0 & -4,02 & -1,86 & -9,1 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **Escolhendo agora a segunda linha como pivô, têm-se:**

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_1$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & -4{,}02 & -1{,}86 & -9{,}1 \end{bmatrix} - \left(-4{,}02 / -12{,}82\right) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -12{,}82 & -4{,}74 & -16{,}3 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3{,}3463 & -3{,}9888 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **Obtêm-se a seguinte matriz ampliada:**

$$[AB] = \left[\begin{array}{ccc:c} 1{,}5 & 5{,}4 & 3{,}3 & 10 \\ 0 & -12{,}82 & -4{,}74 & -16{,}3 \\ 0 & 0 & 3{,}3463 & -3{,}9888 \end{array}\right]$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **O que termina com a triangulação:**

$$\begin{cases} 1{,}5x_1 + 5{,}4 \cdot x_2 + 3{,}3 \cdot x_3 = 10 \\ 0 \cdot x_1 - 12{,}82 \cdot x_2 - 4{,}74 \cdot x_3 = -16{,}3 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3{,}3463 \cdot x_3 = -3{,}9888 \end{cases}$$

Método de Gauss

- **Exemplo 9:**
  - **Com solução:**

$x_3 = -3{,}9888/3{,}3463 = -1{,}1918$

$x_2 = [-16{,}3 - (-4{,}74)\cdot(-1{,}1920)]/(-12{,}82) = 1{,}7121$

$x_1 = [10 - 5{,}4(1{,}7122) - 3{,}3(-1{,}1920)]/1{,}5 = 3{,}1251$

Método do Pivoteamento Parcial

- Semelhante ao método de Gauss;
- Minimiza a amplificação de erros de arredondamento durante as eliminações;
- Consiste em escolher o elemento de maior módulo em cada coluna para ser o pivô.

Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**
  - **Resolver o sistema com precisão de 4 casas decimais**

$$
\begin{aligned}
1{,}5x_1 + 5{,}4x_2 + 3{,}3x_3 &= 10 \\
4{,}2x_1 + 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 &= 11{,}7 \\
2{,}7x_1 + 5{,}7x_2 + 7{,}8x_3 &= 8{,}9
\end{aligned}
$$

Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**
  - **Matriz aumentada original deve ser ajustada:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1{,}5 & 5{,}4 & 3{,}3 & 10 \\ 4{,}2 & 2{,}3 & 4{,}5 & 11{,}7 \\ 2{,}7 & 5{,}7 & 7{,}8 & 8{,}9 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4{,}2 & 2{,}3 & 4{,}5 & 11{,}7 \\ 1{,}5 & 5{,}4 & 3{,}3 & 10 \\ 2{,}7 & 5{,}7 & 7{,}8 & 8{,}9 \end{array}\right]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**
  - **Sistema inalterado, elemento pivô 4,2.**
  - **Encontrar as novas linhas:**

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = [1{,}5 \quad 5{,}4 \quad 3{,}3 \quad 10] - (1{,}5/4{,}2) \cdot [4{,}2 \quad 2{,}3 \quad 4{,}5 \quad 11{,}7]$$

$$L_2 = [0 \quad 4{,}5786 \quad 1{,}6929 \quad 5{,}8214]$$

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = [2{,}7 \quad 5{,}7 \quad 7{,}8 \quad 8{,}9] - (2{,}7/4{,}2) \cdot [4{,}2 \quad 2{,}3 \quad 4{,}5 \quad 11{,}7]$$

$$L_3 = [0 \quad 4{,}2214 \quad 4{,}9071 \quad 1{,}3786]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**
  - **A matriz ampliada fica da forma:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4{,}2 & 2{,}3 & 4{,}5 & 11{,}7 \\ 0 & 4{,}5786 & 1{,}6929 & 5{,}8214 \\ 0 & 4{,}2214 & 4{,}9071 & 1{,}3786 \end{array}\right]$$

  - **Como o elemento 4,5786 já é o pivô da 2^a coluna, tem-se:**

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad 4{,}2214 \quad 4{,}9071 \quad 1{,}3786] - (4{,}2214/4{,}5786) \cdot [0 \quad 4{,}5786 \quad 1{,}6929 \quad 5{,}8214]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 3{,}3463 \quad -3{,}9886]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**
  - **A matriz ampliada fica na forma:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4{,}2 & 2{,}3 & 4{,}5 & 11{,}7 \\ 0 & 4{,}5786 & 1{,}6929 & 5{,}8214 \\ 0 & 0 & 3{,}3463 & -3{,}9886 \end{array}\right]$$

Método do Pivoteamento Parcial

- **Exemplo 10:**
  - **A solução do sistema triangular que resultou dessas operações é:**

$$x_3 = -3,9886/3,3463 = -1,1919$$

$$x_2 = [5,8214-1,6929 \cdot (-1,1919)]/(4,5786) = 1,7121$$

$$x_1 = [11,7- 2,3(1,7121)- 4,5(-1,1919)]/4,2 = 3,1252$$

Método do Pivoteamento Parcial

Exemplo 9: Exemplo 10 (com pivoteamento):

$x_3 = -1{,}1918$	$x_3 = -1{,}1919$
$x_2 = 1{,}7121$	$x_2 = 1{,}7121$
$x_1 = 3{,}1252$	$x_1 = 3{,}1251$

Solução encontrada no Matlab:

$x_1 = -1{,}19198135198135$

$x_2 = 1{,}71216783216783$

$x_3 = 3{,}12522144522145$

Método de Jordan

- **Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema, com a finalidade de obter um sistema diagonal equivalente;**

- **Um sistema diagonal é aquele em que os elementos a_{ij} da matriz coeficiente [A] são iguais a zero, para $i \neq j$,**

$i, j = 1,2,\ldots,n$.

Método de Jordan

- **Sistema diagonal equivalente:**

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **A partir do sistema:**

$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

  - **Com matriz aumentada:**

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **Substituindo a linha 2 por:**

$$L_2 = L_2 - m_{21} \cdot L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} - (1/5) \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4,6 & 0,4 & 0,6 \end{bmatrix}, \qquad m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 1/5 = 0,2$$

  - **Substituindo a linha 3 por :**

$$L_3 = L_3 - m_{31} \cdot L_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} - (2/5) \cdot \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2,2 & 0,8 & 3,2 \end{bmatrix}, \qquad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = 2/5 = 0,4$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **A matriz ampliada resulta em:**

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 2{,}2 & 0{,}8 & 3{,}2 \end{bmatrix}$$

  - **Substituindo a linha 3 por:**

$$L_3 = L_3 - m_{32} \cdot L_2 = [0 \quad 2{,}2 \quad 0{,}8 \quad 3{,}2] - (2{,}2/4{,}6) \cdot [0 \quad 4{,}6 \quad 0{,}4 \quad 0{,}6]$$

$$L_3 = [0 \quad 0 \quad 0{,}609 \quad 2{,}913], \qquad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = 2{,}2/4{,}6 = 0{,}478$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **A matriz ampliada resulta em:**

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

  - **Substituindo a linha 2 por**

$$L_2 = L_2 - m_{23} \cdot L_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4{,}6 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} -$$

$$(0{,}4/0{,}609) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4{,}6 & 0 & -1{,}313 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **Matriz ampliada resulta em:**

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4,6 & 0 & -1,313 \\ 0 & 0 & 0,609 & 2,913 \end{bmatrix}$$

  - **Substituindo a linha 1 por**

$$L_1 = [5 \quad 2 \quad 3 \quad 1] - (2/4,6) \cdot [0 \quad 4,6 \quad 0 \quad -1,313],$$

$$L_1 = [5 \quad 0 \quad 3 \quad 1,571], \qquad m_{12} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = 2/4,6$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **Substituindo a linha 1 por:**

$$L_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 & 1{,}571 \end{bmatrix} - (3/0.609) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -12{,}779 \end{bmatrix} \qquad m_{13} = \frac{a_{13}}{a_{33}} = 3/0{,}609$$

  - **A matriz ampliada fica da seguinte forma:**

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & -12{,}779 \\ 0 & 4{,}6 & 0 & -1{,}313 \\ 0 & 0 & 0.609 & 2{,}913 \end{bmatrix}$$

Método de Jordan

- **Exemplo 11:**
  - **E as soluções são:**
    - $x_1 = -2,556$, $x_2 = -0,285$, $x_3 = 4,783$

Decomposição em LU

- O objetivo é fatorar a matriz dos coeficientes **A** em um produto de duas matrizes **L** e **U**.
  - Seja:

$$[LU] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição em LU

- **E a matriz coeficiente A:**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

  - **Tem-se, então:**

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix} = [LU] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Decomposição em LU

- **Para se obter os elementos da matriz L e da matriz U, deve-se calcular os elementos das linhas de U e os elementos da colunas de L como segue.**

Decomposição em LU

- **1ª linha de U:** Faze-se o **produto** da **1ª** linha de **L** por **todas** as colunas de **U** e a iguala com todos os elementos da **1ª** linha de **A**, assim:

$$\begin{cases} 1 \cdot u_{11} = a_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}, \\ 1 \cdot u_{12} = a_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}, \\ \qquad \vdots \\ 1 \cdot u_{1n} = a_{1n} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}, \\ u_{1j} = a_{1j}, j = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- **1ª coluna de L:** **Faz-se o produto de todas as linhas de L, (da 2ª a até a nª), pela 1ª coluna de U e a iguala com os elementos da 1ª coluna de A, (abaixo da diagonal principal), obtendo ,**

$$\begin{cases} l_{21} \cdot u_{11} = a_{21} \Rightarrow l_{21} = \dfrac{a_{21}}{u_{11}}, \\ l_{31} \cdot u_{11} = a_{31} \Rightarrow l_{31} = \dfrac{a_{31}}{u_{11}}, \\ \quad\vdots \\ l_{l1} \cdot u_{11} = a_{l1} \Rightarrow l_{l1} = \dfrac{a_{l1}}{u_{11}}, \\ l_{l1} = \dfrac{a_{l1}}{u_{11}}, l = 1,2,\ldots,n. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- **2ª linha de U: Faz-se o produto da 2ª linha de L por todas as colunas de U, (da 2ª até a nª), e igualando com os elementos da 2ª linha de A, (da diagonal principal em diante), obtêm-se ,**

$$\begin{cases} l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = a_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21} \cdot u_{12}, \\ l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = a_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21} \cdot u_{13}, \\ \qquad \vdots \\ l_{21} \cdot u_{1n} + u_{2n} = a_{2n} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21} \cdot u_{1n}, \\ u_{2j} = a_{2j} - l_{21} \cdot u_{1j}, j = 3,\ldots,n. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- **2ª coluna de L: Faz-se o produto de todas as linhas de L (da 3ª até a nª) pela 2ª coluna de U e a iguala com os elementos da 2ª coluna de A, (abaixo da diagonal principal), obtendo ,**

$$
\begin{cases}
l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = a_{32} \Rightarrow l_{32} = \dfrac{a_{32} - l_{31} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \\
l_{41} \cdot u_{12} + l_{42} \cdot u_{22} = a_{42} \Rightarrow l_{42} = \dfrac{a_{42} - l_{41} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \\
\vdots \\
l_{l1} \cdot u_{12} + l_{l2} \cdot u_{22} = a_{l2} \Rightarrow l_{l2} = \dfrac{a_{l2} - l_{l1} \cdot u_{12}}{u_{22}}, \\
l_{l2} = \dfrac{a_{l2} - l_{l1} \cdot u_{12}}{u_{22}}, l = 3,\ldots,n.
\end{cases}
$$

Decomposição em LU

- **Temos a seguinte fórmula geral:**

$$\begin{cases} u_{lj} = a_{lj} - \sum_{k=1}^{l-1} l_{lk} \cdot u_{kj}, & l \le j, \\ l_{lj} = (a_{lj} - \sum l_{lk} \cdot u_{kj}) / u_{jj}, & l > j. \end{cases}$$

Decomposição em LU

- Resumo de Passos:
  - Seja um sistema $Ax = b$ de ordem n, onde A satisfaz as condições fatoração LU.
  - Então, o sistema $Ax = b$ pode ser escrito como:
    - $\mathbf{LUx = b}$

Decomposição em LU

- **Resumo dos Passos:**
  - **Fazendo $Ux = y$, a equação acima reduz-se a $Ly = b$.**
  - **Resolvendo o sistema triangular inferior $Ly = b$, obtém-se o vetor y.**

Decomposição em LU

- **Resumo dos Passos:**
  - **Substituição do valor de y no sistema Ux = y ⇒ Obtenção de um sistema triangular superior cuja solução é o vetor x procurado;**
  - **Aplicação da fatoração LU na resolução de sistemas lineares ⇒ Necessidade de solução de dois sistemas triangulares**

Erros - Avaliação de Erros

- No sistema $A \cdot x = b$, no qual:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

o **erro da solução** é $x - x'$.

Erros - Avaliação de Erros

- **Procedimento de Determinação do Erro**
  - **Determinar:**
    - $A \cdot x' = b'$

Erros – Resíduo

- **Procedimento de Determinação do Erro**
  - **Fazer:**
    - **Resíduo = b – b′**

Resíduo = $b - b' = A \cdot x - A \cdot x' = A \cdot (x - x') = A \cdot erro$

Erros – Resíduo

- **Verifica-se que:**
  - **O resíduo não é o erro, apenas uma estimativa do mesmo;**
  - **Quanto menor for o resíduo, menor será o erro.**

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Refinar a solução do sistema:**

$$
\begin{aligned}
1{,}5x_1 + 5{,}4x_2 + 3{,}3x_3 &= 10 \\
4{,}2x_1 + 2{,}3x_2 + 4{,}5x_3 &= 11{,}7 \\
2{,}7x_1 + 5{,}7x_2 + 7{,}8x_3 &= 8{,}9
\end{aligned}
$$

  - **Cuja solução encontrada através pelo método de Gauss, utilizando a solução retroativa é:**

$$x^{(0)} = [3{,}1252 \quad 1{,}7121 \quad -1{,}1918]'$$

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **O resíduo calculado é:**

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -0.0002 \\ -0.0006 \\ -0.0010 \end{bmatrix}$$

  - **Vê-se pelo resíduo que a precisão alcançada não foi satisfatória.**
  - **O vetor $\mathbf{x}^{(0)}$ é chamado de vetor solução.**

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Com o intuito de melhorar a solução, considera-se um novo vetor $\mathbf{x}^{(1)}$ chamado de vetor solução melhorado.**

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **De forma que : $x^{(1)} = x^{(0)} + \delta^{(0)}$, onde $\delta^{(0)}$ é o vetor de correção. Assim:**

$$Ax^{(1)} = b$$
$$A(x^{(0)} + \delta^{(0)}) = b$$
$$Ax^{(0)} + A\delta^{(0)} = b$$
$$A\delta^{(0)} = b - Ax^{(0)}$$
$$A\delta^{(0)} = r^{(0)}$$

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Calcular o vetor de correção:**

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1,5 & 5,4 & 3,3 & 10 \\ 4,2 & 2,3 & 4,5 & 11,7 \\ 2,7 & 5,7 & 7,8 & 8,9 \end{array}\right] . \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0002 \\ -0,0006 \\ -0,0010 \end{bmatrix}$$

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **A solução é:**

$$\delta^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ 0{,}0001 \\ 0{,}0002 \end{bmatrix}$$

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Desta forma, a solução melhorada será:**

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3{,}1252 \\ 1{,}7122 \\ -1{,}1920 \end{bmatrix}$$

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Cujo novo resíduo é:**

$$\mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Em exemplos onde o resíduo ainda não seja satisfeito pode-se utilizar o mesmo procedimento:**

    $$x^{(2)}=x^{(1)}+\delta^{(1)}$$

  - **Assim, o vetor correção $\delta^{(1)}$, será calculado por $A\,\delta^{(1)}=r^{(1)}$.**

Erros – Resíduo

- **Exemplo 12:**
  - **Acha-se assim, sempre uma solução melhorada e com resíduo tendendo a zero.**

Sistemas Lineares - Bibliografia

- Ruggiero, M. A. Gomes & Lopes, V. L. da R. Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais. MAKRON Books, 1996, 2ª ed.
- Asano, C. H. & Colli, E. Cálculo Numérico: Fundamentos e Aplicações. Departamento de Matemática Aplicada – IME/USP, 2007.
- Sanches, I. J. & Furlan, D. C. Métodos Numéricos. DI/UFPR, 2006.
- Paulino, C. D. & Soares, C. Erros e Propagação de Erros, Notas de aula, SE/ DM/ IST [Online] http://www.math.ist.utl.pt/stat/pe/qeb/semestre_1_2004-2005/PE_erros.pdf [Último acesso 07 de Junho de 2007].

kroton
paixão por educar

Anhanguera fama pitágoras UNIASSELVI unic UNIDERP unime UNIRONDON unopar