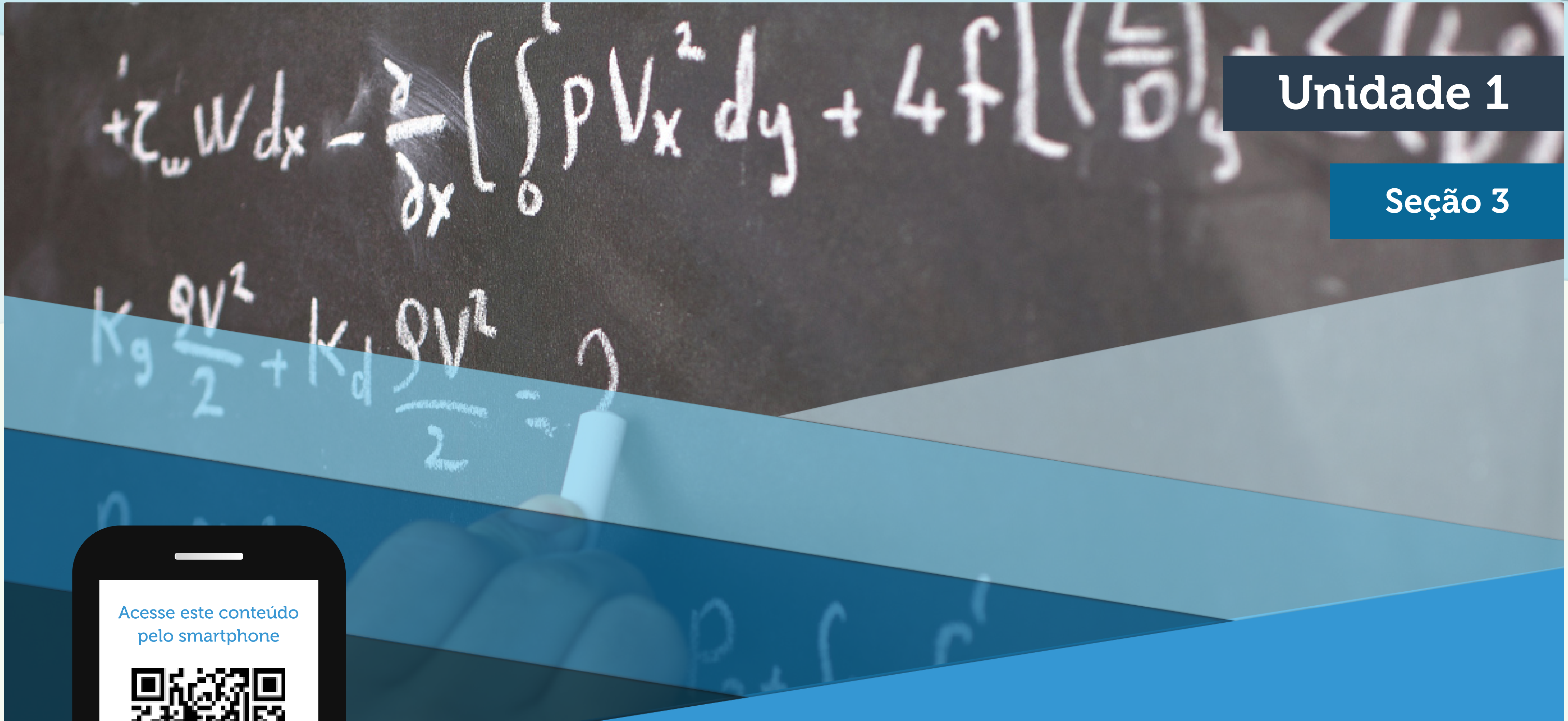
Unidade 1

Seção 3



Acesse este conteúdo pelo smartphone

O que é isso?
Clique no código e saiba mais.

Métodos Numéricos Aplicados

iStock 2017

Webaula 3

Outros métodos iterativos para determinação de zeros de funções

Método de Newton Raphson

O método de Newton Raphson consiste em aplicar, sucessivamente, a função de iteração a partir de um valor inicial até que o critério de parada seja alcançado.

Fixada uma precisão ξ, podemos finalizar o referido processo iterativo quando $|x_{k+1} - x_k| \leq \xi$ ou $|f(x_{k+1})| \leq \xi$ ou se o número máximo de iterações for alcançado.

É importante mencionar que o método de Newton Raphson não é capaz de determinar o zero desejado de uma função se, para um dado x_n, $f'(x_n) \cong 0$, pois na função de iteração a derivada da função é o denominador, e a divisão de um número por outro muito próximo a zero resulta em um número muito grande, o que inviabiliza a convergência na região de interesse.

Vamos verificar isso no caso de:

$f(x) = \exp(x) - \text{sen}(x)$, com $x_0 = -1{,}3$

Para uma função $f(x)$ contínua em um intervalo $[a, b]$, que possui apenas uma raiz, e $f'(x)$ bem como $f''(x)$ (derivada segunda da função, obtida a partir da derivada de $f'(x)$) não nulas e que preservam o sinal, podemos definir a função de iteração do método de Newton Raphson a partir de uma série de passos, que veremos a seguir, na interpretação geométrica do método Newton Raphson:

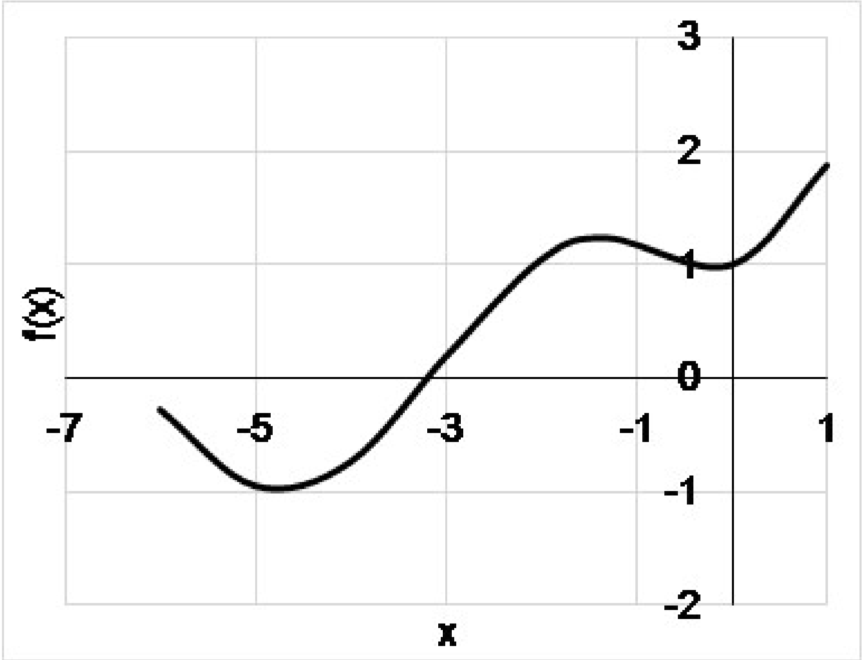
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \qquad \text{para } k = 0,1,2,\ldots$$

Na figura 1, temos que o zero mais próximo a esta estimativa inicial está contido no intervalo [-5, -3].

Contudo, se aplicássemos o referido procedimento numérico, encontraríamos como zero -251,327, efetuando-se os cálculos com 3 casas decimais e adotando como critério de convergência

$$|x_{k+1} - x_k| < 0,1$$

Figura 1 - Gráfico de *f(x)* = exp(*x*) - *sen(x)*.



Fonte: elaborada pela autora.

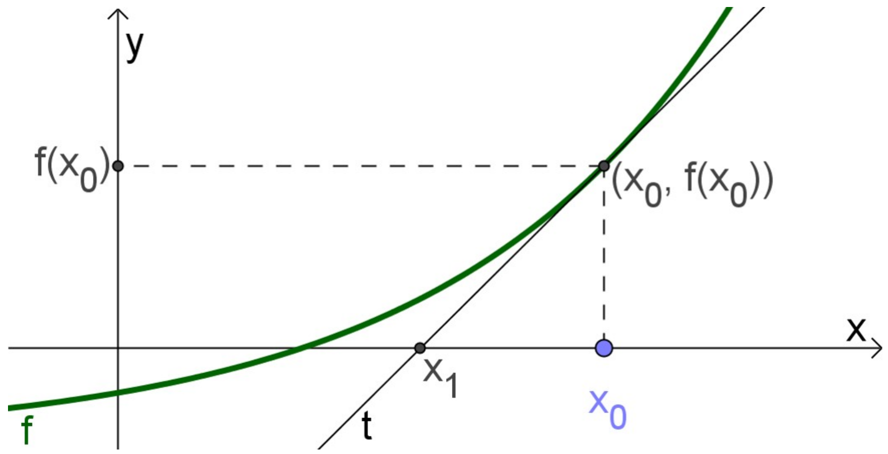
Interpretação geométrica do método de Newton Raphson

Consideraremos uma função em que x_0 é a estimativa inicial do zero de $f(x)$.

Podemos melhorar essa estimativa a partir do traçado da reta tangente t no ponto $(x_0, f(x_0))$, conforme figura 2.

Observe que $(x_0, f(x_0))$ é um ponto aleatório, assim, podemos posicioná-lo em qualquer outro local.

Figura 2 - Gráfico de *f(x)* para método de Newton Raphson com tangente em x_0.



Fonte: adaptado de <https://goo.gl/YkAMTZ>. Acesso em: 28 maio 2017.

A inclinação da reta tangente t que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, definida previamente por $f'(x)$, pode ser calculada por:

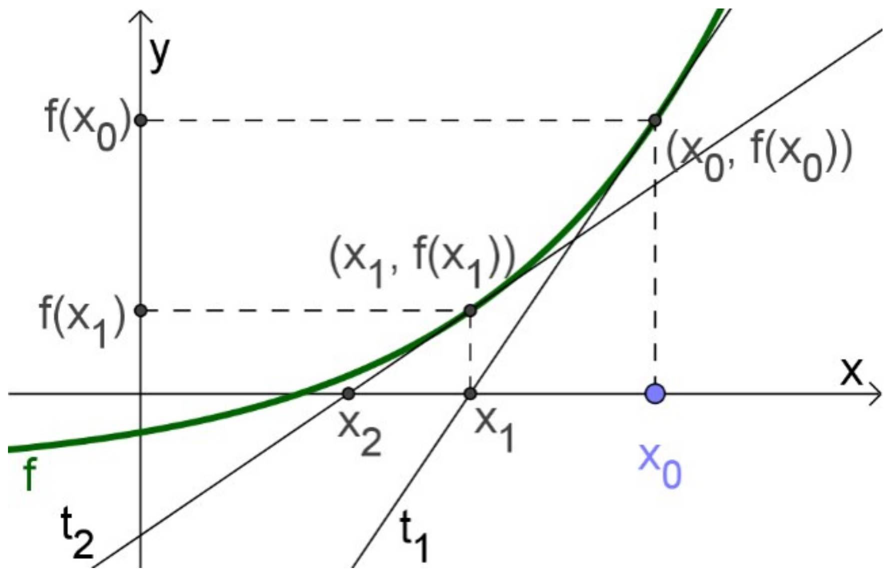
$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}$$

Na equação acima, podemos isolar o ponto x_1 obtido pela intersecção da reta t com o eixo x, de forma que representa um "zero melhorado" da função e possui o seguinte valor:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Com esse novo zero, repetimos o procedimento, ou seja, traçamos outra reta tangente no ponto $(x_1, f(x_1))$, conforme pode ser visto na figura 3.

Figura 3 - Gráfico de *f(x)* para método de Newton Raphson com tangente em x_1.



Fonte: adaptado de <https://goo.gl/YkAMTZ>. Acesso em: 28 maio 2017.

E, assim, obtemos x_2 como uma nova intersecção da reta tangente t_2 com o eixo x, cujo valor pode ser determinado pelo mesmo procedimento realizado anteriormente, resultando em:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Podemos repetir esse procedimento para $x_3, x_4, \ldots, x_k$, até nos aproximarmos suficientemente do zero da função.

A+

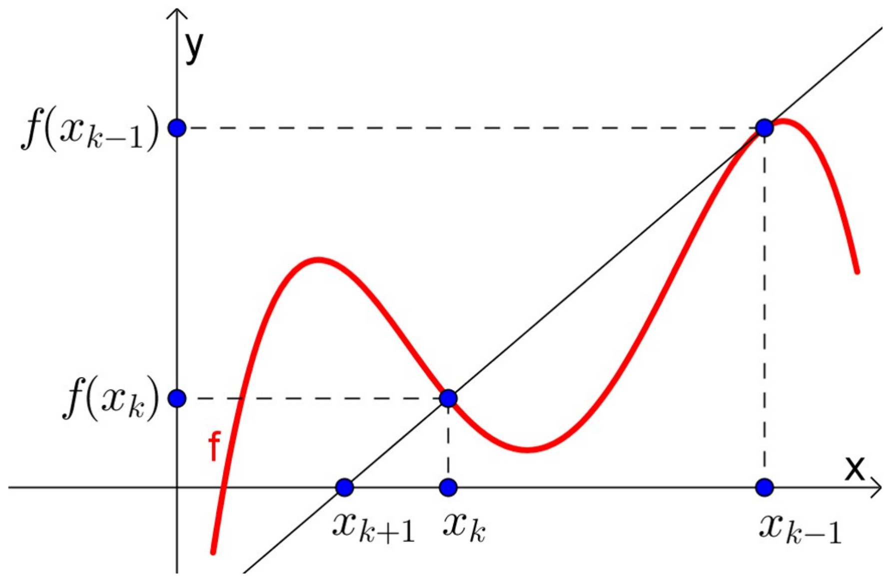
A-

Interpretação geométrica do método da secante

Podemos driblar a necessidade de determinar a derivada de uma função através da seguinte estratégia:

Traçar uma reta secante em dois pontos de coordenadas: $(x_{k-1}, f(x_{k-1}))$ e $(x_k, f(x_k))$. O prolongamento dessa reta cruza com o eixo x, originando o ponto x_{k+1} , como na figura 4.

Figura 4 - Interpretação geométrica do método da secante.



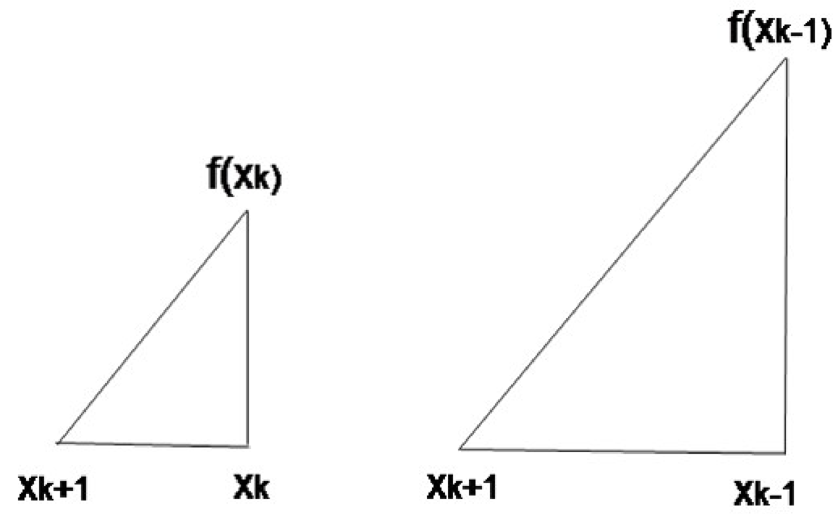
Fonte: elaborada pela autora.

Na figura 4, formaram-se dois triângulos. A partir da técnica de semelhança de triângulos, temos: $\frac{f(x_{k-1})}{f(x_k)} = \frac{x_{k-1} - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}$.

Rearranjando a equação, obtemos a função de iteração do método da secante, cujas estimativas iniciais são x_{k-1} e x_k , sendo que o procedimento é repetido até que um critério de parada, semelhante ao apresentado no método de Newton Raphson, seja alcançado:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}, \text{ para k=1,2}$$

Figura 5 - Triângulos oriundos da reta secante.



Fonte: elabora pela autora.

Vídeo de encerramento

Você já conhece o Saber?

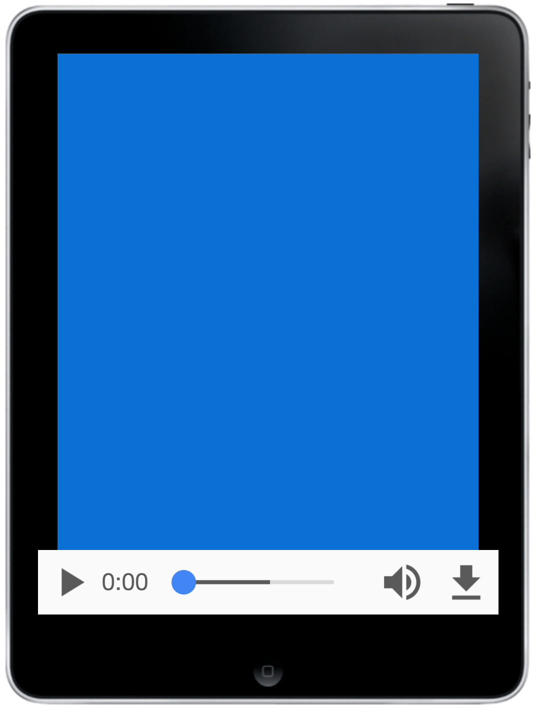
Aqui você tem na palma da sua mão a **biblioteca digital** para sua **formação profissional**.

Estude no celular, tablet ou PC em qualquer hora e lugar sem pagar mais nada por isso.

Mais de 475 livros com interatividade, vídeos, animações e jogos para você.

DISPONÍVEL NA Google play
Android:
https://goo.gl/yAL2Mv

Baixar na App Store
iPhone e iPad - IOS:
https://goo.gl/OFWqcq



Bons estudos!