# Computação gráfica e processamento de imagens

CGPI: Transformações geométricas

Unidade 2 - Seção 1

Toda animação gráfica depende da aplicação de transformações geométricas sobre imagens digitais ou vetoriais ou sobre modelos tridimensionais. Desde um simples efeito de minimização de janela do seu sistema operacional até a movimentação de uma câmera em um jogo digital são produzidos por transformações geométricas.

Sendo assim, nesta webaula apresentaremos as transformações geométricas básicas de **escala**, **translação** e **rotação**. Esses conceitos são a base para quem deseja implementar aplicativos com qualquer tipo de animação.

## Escala

A transformação de escala de um ponto ( $X_1$, $Y_1$ ), por uma escala ( $S_x S_y$ ), se dá pelas equações:

$$x_2 = s_x x_1$$

$$y_2 = s_y y_1$$

As equações também podem ser representadas na forma de matriz como:

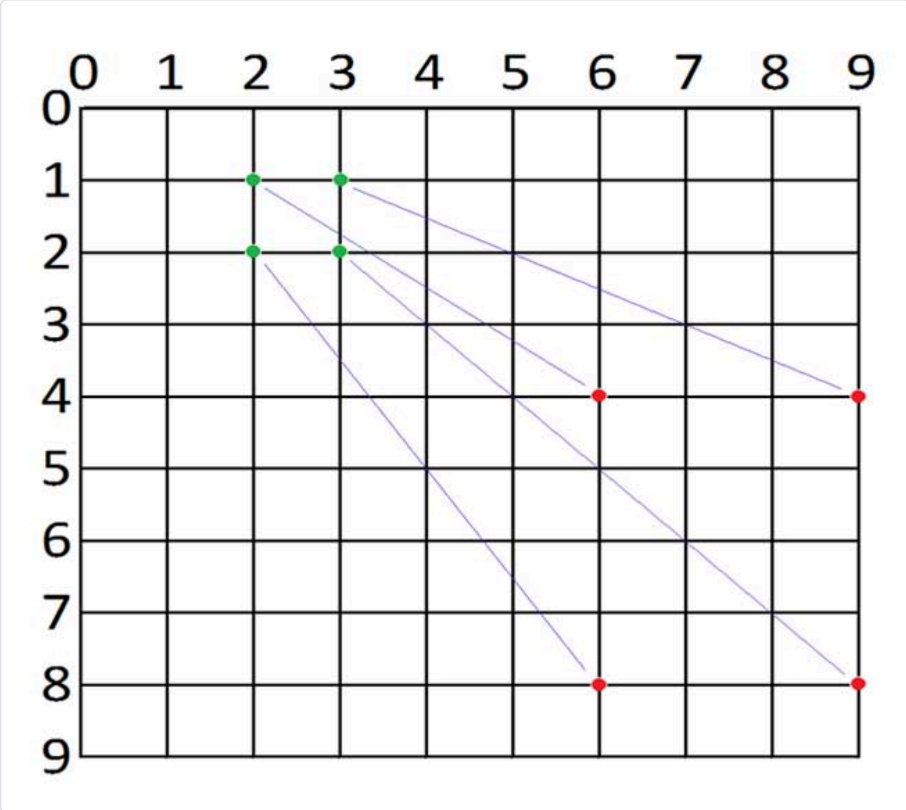
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

E pode ser estendido para três dimensões como:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

As escalas $S_x$ e $S_y$ podem ser inteiras ou reais. No caso de imagens matriciais o uso de escalas reais pode levar o ponto para um ponto fora da grade inteira e exigir aproximações. Para aplicar a transformação sobre um objeto qualquer, aplica-se a transformação para cada ponto do objeto. Na figura, por exemplo, observa-se a transformação de escala de quatro pontos: (2,1), (3,1), (2,2), (3,2). A escala aplicada foi de três vezes, no eixo x, e quatro vezes, no eixo y: ( $S_x$, $S_y$ ) = (3,4).

**Transformação de escala. Em verde os pontos originais e em vermelho os pontos após transformação.**




Fonte: elaborado pelo autor.

## Translação

A segunda transformação mais simples é a translação. A translação de um ponto ( $X_1$, $Y_1$ ) por ( $T_x$, $T_y$ ) se dá pelas equações:

$$x_2 = x_1 + t_x$$

$$y_2 = y_1 + t_y$$

As equações também podem ser representadas na forma de matriz como:

2D: $$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3D: $$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Rotação

Com base nos conceitos da geometria plana e relações trigonométricas (BOLDRINI ET AL 1986; KREYSZIG, 2015), vemos que:

$$x_2 = r\cos(\theta + \alpha) = r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha$$

$$y_2 = r\sin(\theta + \alpha) = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha$$

Porém, $x_1 = r\cos\theta$, $y_1 = r\sin\theta$, então:

$$x_2 = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha$$

$$y_2 = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha$$

Logo, a matriz de rotação 2D em torno da origem é:

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Apresentamos, nesta webaula, como realizar as transformações de escala, translação e rotação a partir do plano cartesiano. Continue seus estudos e saiba mais sobre como realizar composições a partir destas e como implementá-las a partir de programação Phyton.