Trabalho da Área 1: Mecânica Celeste

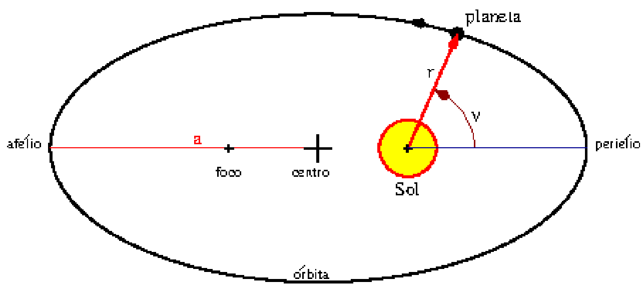
Prof. José Eduardo Costa, Dep. Astronomia - Instituto de Física - UFRGS

7 de abril de 2025

O objetivo deste trabalho é familiarizá-lo com conceitos de *mecânica celeste* aplicados ao cálculo dos *elementos orbitais* dos planetas do Sistema Solar. O método aqui apresentado foi introduzido por *Johannes Kepler* no século XVII, sendo utilizado até hoje, não somente no cálculo posição dos planetas, mas também para calcular a posição das luas, de satélites artificiais e até de planetas extrassolares em relação à estrela em torno da qual orbitam.

Órbitas Planetárias

Os planetas se movem ao redor do Sol em *órbitas elípticas*, tendo o Sol em um dos focos[1] e geometricamente caracterizadas por dois parâmetros: o *semieixo maior* (a) e a *excentricidade* (e). O plano que contém a órbita é chamado de *plano orbital*. Qualquer reta perpendicular ao plano orbital pode ser usada para definir as direções norte e sul, sendo que para um observador ao norte, os planetas se movem em *sentido anti-horário*.



O tempo necessário para um planeta completar uma volta ao redor do Sol é chamado de *período orbital* (P). Em uma órbita elíptica, o ponto de maior aproximação ao Sol é chamado de *periélio* e o de maior afastamento, de *afélio*, localizados nos extremos do eixo maior órbita. A *posição orbital* do planeta pode ser convenientemente expressa por uma coordenada radial, a distância Sol-planeta (r) e por uma coordenada angular, chamada *anomalia verdadeira* (ν), medida a partir de alguma *linha de referência* ligando o Sol a algum ponto particular sobre a órbita.

Num dos dois extremos do eixo maior da órbita está o ponto de maior aproximação do planeta ao Sol, *periélio* e, no extremo oposto, o ponto de maior distanciamento ao Sol, *afélio*[2]. A linha imaginária que conecta o Sol ao ponto de periélio é chamada de *direção de periélio*, sendo uma direção de referência na órbita.

A *posição orbital* do planeta pode ser expressa convenientemente por duas coordenadas: uma coordenada radial (r) que expressa a distância do planeta ao Sol e por uma coordenada angular (ν) que expressa a distância angular entre a linha que conecta o Sol ao planeta e a direção de periélio, medida no sentido anti-horário. Por razões históricas, a coordenada angular ν é chamada de *anomalia verdadeira*. Usando esta convenção, no periélio a anomalia verdadeira é $\nu = 0^o$ e no afélio, $\nu = 180^o$.

O intervalo de tempo entre duas passagens consecutivas do planeta pelo ponto de periélio, ou seja, para completar uma volta ao redor do Sol, é chamado de *período orbital* (P) (ou *período sideral*, uma vez que a direção de periélio pode se estender ao espaço sideral). Os períodos orbitais dos planetas do Sistema Solar são todos muito bem determinados e seguem a

[1] Primeira Lei de Kepler.

[2] Para uma órbita ao redor de uma estrela qualquer, os pontos de maior aproximação e de maior afastamento são chamados *periastro* e *apoastro*, respectivamente.

terceira Lei de Kepler, $P^2 \propto a^3$.

Como a distância do planeta ao Sol não é constante ao longo da órbita, a velocidade angular ω do planeta também, ora acelerando, ora desacelerando. A *velocidade angular média* é dada $\bar{\omega} = 2\pi/P$, sendo igual à velocidade angular de um planeta fictício em uma órbita circular, com mesmo comprimento de semieixo maior e, portanto, mesmo período orbital P. A posição angular deste planeta fictício é chamada de *anomalia média* e denotada por M, podendo ser facilmente calculada por:

$$M = M_0 + \bar{\omega}\, t \quad ,$$

onde, t é o tempo e $M_0 = M(0)$ é a anomalia média no instante $t = 0$. A posição do planeta real só é igual à posição do planeta fictício ($\nu = M$) em dois pontos da órbita; ao longo do resto da órbita, $\nu \gtrapprox M$ ou $\nu \lessapprox M$.

Os valores de r e ν para um dado instante de tempo t podem ser calculados pelo método de Kepler.

O Método de Kepler

1. calcular a **anomalia média** (M): utilize a fórmula para o cálculo de M fornecida para cada planeta.

2. calcular a **anomalia excêntrica** (E):

$$M = E - e \sin E$$

3. calcular a **anomalia verdadeira** (ν):

$$\tan\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}}\,\tan\frac{E}{2}$$

4. calcular a **distância** do planeta ao Sol (r):

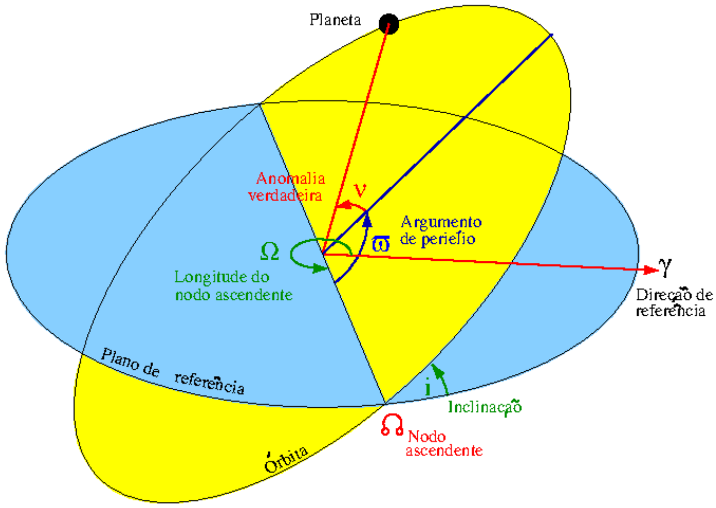
$$r = \frac{a\,(1-e^2)}{1 + e\,\cos\nu}$$

Os valores de M, e e a devem ser calculados para o instante t conforme as fórmulas fornecidas mais adiante para cada planeta.

Elementos Orbitais

A *única coisa em comum* entre as órbitas de todos os planetas do Sistema Solar é que todas têm o Sol em um dos focos. Os planos orbitais não são coplanares e a direção de periélio, utilizada como direção de referência na medida na anomalia verdadeira ν, é diferente para cada uma. Torna-se necessário o uso de outros *elementos orbitais* que caracterizem a orientação espacial de cada órbita em relação a um referencial comum.

O referencial comumente usando em mecânica celeste utiliza o plano orbital da Terra, também chamado de *eclíptica*, como *plano de referência* e a direção do *ponto vernal* (ou *ponto*-γ) como *direção de referência.*



A anomalia verdadeira é o ângulo ν medido sobre o *plano orbital do planeta*, no sentido anti-horário, entre a linha Sol-Planeta e a a *direção de periélio* (indicado na figura acima pela reta azul). Cada planeta tem um sistema próprio de coordenadas com uma orientação espacial diferente dos demais planetas, o que torna necessário expressar a orientação de cada órbita e a posição de cada planeta em relação a um sistema de coordenadas comum.

O plano orbital da Terra (plano da eclíptica) é utilizado como *plano de referência* para o sistema de *coordenadas eclípticas.* e a linha imaginária entre o Sol e o ponto-γ (*ponto vernal*), é utilizada como *linha de referência.*

Notações

$$\begin{aligned}
\Omega &= \text{longitude do nodo ascendente} \\
i &= \text{inclinação em relação à eclíptica} \\
\varpi &= \text{argumento de periélio} \\
a &= \text{semieixo maior da órbita} \\
e &= \text{excentricidade da órbita} \\
M &= \text{anomalia média} \\
E &= \text{anomalia excêntrica} \\
\nu &= \text{anomalia verdadeira} \\
P &= \text{período orbital}
\end{aligned}$$

Se o plano orbital tem um *ângulo de inclinação* i em relação ao plano de referência, a órbita do planeta intercepta o plano de referência em dois pontos chamados *nodos*: um, onde o planeta passa do hemisfério sul para o hemisfério norte celeste (*nodo ascendente*) e outro onde passa do hemisfério norte para o hemisfério sul (*nodo descendente*). A linha que passa pelos dois nodos e pelo Sol é chamada de *linha nodal* e sua orientação pode ser expressa pela *longitude do nodo ascendente*, Ω, isto é, o ângulo entre a direção do ponto-γ e a direção do nodo ascendente, medido no sentido anti-horário sobre o plano de referência.

Como a linha nodal é uma linha comum entre os dois planos, a direção do nodo ascendente pode ser usada como referência para indicar a posição angular da direção de periélio. Isso é feito através do *argumento de periélio*[3] , ϖ.

Cálculo dos Elementos Orbitais

A medida que um planeta se desloca ao longo de sua órbita, a anomalia média varia, $M = M(t)$. Os demais elementos orbitais, Ω, i, ϖ, a e e, seriam constantes se o movimento do planeta ao redor do Sol não sofresse ação de forças externas. Mas, as interações gravitacionais entre os planetas causam perturbações nos movimentos orbitais fazendo com que esses elementos orbitais variem lentamente ao longo do tempo, junto com a evolução dinâmica do sistema.

Por este motivo, no cálculo de órbitas planetárias para um dado instante de tempo t, deve-se usar para Ω, i, ϖ, a e e os valores para aquele instante de tempo. Estes valores são obtidos por meio de *equações polinomiais empíricas* do tipo:

$$x = x(t) = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + a_3\,t^3 + \ldots \quad ,$$

onde x representa um elemento orbital qualquer, e a_0, a_1, a_2, etc, são coeficientes numéricos determinados empiricamente a partir de observações. Quanto maior for a *ordem* do polinômico, i.e., quanto maior o número de coeficientes considerados na equação, maior será a exatidão no cálculo de x.

A seguir, são apresentadas as equações empíricas de *primeira ordem*[4], para cálculo dos elementos orbitais de cada planeta do Sistema Solar em função do tempo t, dado em [dias]. Com exceção da excentricidade e, que é *adimensional*, todo os demais elementos são expressos em graus de arco. As unidades do coeficiente no termo de primeira ordem é [dias^{-1}] no cálculo de e e [$^\circ \cdot \text{dias}^{-1}$] para todos os demais, mas foram omitidas nas equações para maior clareza visual. No cálculo dos semieixos maiores, a, deve-se usar como *unidade astronômica* (au), seu valor de definição:

$$1 \;\; \text{ua} = 149\,597\,870\,700 \quad \text{metros} \; .$$

Elementos orbitais de Mercúrio:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 48^o.3313 + 3.24587 \times 10^{-5} * t \\
i &= 7^o.0047 + 5.00 \times 10^{-8} * t \\
\varpi &= 29^o.1241 + 1.01444 \times 10^{-5} * t \\
a &= 0.387098 \text{ (au)} \\
e &= 0.205635 + 5.59 \times 10^{-10} * t \\
M &= 168^o.6562 + 4^o.0923344368 * t
\end{aligned}$$

Elementos orbitais de Vênus:

$$\begin{aligned}
\Omega &= 76^o.6799 + 2.46590 \times 10^{-5} * t \\
i &= 3^o.3946 + 2.75 \times 10^{-8} * t \\
\varpi &= 54^o.8910 + 1.38374 \times 10^{-5} * t \\
a &= 0.723330 \text{ (au)} \\
e &= 0.006773 - 1.302 \times 10^{-9} * t \\
M &= 48^o.0052 + 1^o.6021302244 * t
\end{aligned}$$

[3] O símbolo ϖ é uma variante da letra grega π.

[4] Fonte: `https://www.stjarnhimlen.se/comp/ppcomp.html`

Elementos orbitais da Terra:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 0^o.0 \\
i &= 0^o.0 \\
\varpi &= 282^o.9404 + 4.70935 \times 10^{-5} * t \\
a &= 1.000000 \text{ (au)} \\
e &= 0.016709 - 1.151 \times 10^{-9} * t \\
M &= 356^o.0470 + 0^o.9856002585 * t
\end{aligned}
$$

Elementos orbitais de Marte:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 49^o.5574 + 2.11081 \times 10^{-5} * t \\
i &= 1^o.8497 - 1.78 \times 10^{-8} * t \\
\varpi &= 286^o.5016 + 2.92961 \times 10^{-5} * t \\
a &= 1.523688 \text{ (au)} \\
e &= 0.093405 + 2.516 \times 10^{-9} * t \\
M &= 18^o.6021 + 0^o.5240207766 * t
\end{aligned}
$$

Elementos orbitais de Júpiter:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 100^o.4542 + 2.76854 \times 10^{-5} * t \\
i &= 1^o.3030 - 1.557 \times 10^{-7} * t \\
\varpi &= 273^o.8777 + 1.64505 \times 10^{-5} * t \\
a &= 5.20256 \text{ (au)} \\
e &= 0.048498 + 4.469 \times 10^{-9} * t \\
M &= 19^o.8950 + 0^o.0830853001 * t
\end{aligned}
$$

Elementos orbitais de Saturno:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 113^o.6634 + 2.38980 \times 10^{-5} * t \\
i &= 2^o.4886 - 1.081 \times 10^{-7} * t \\
\varpi &= 339^o.3939 + 2.97661 \times 10^{-5} * t \\
a &= 9.55475 \text{ (au)} \\
e &= 0.055546 - 9.499 \times 10^{-9} * t \\
M &= 316^o.9670 + 0^o.0334442282 * t
\end{aligned}
$$

Elementos orbitais de Urano:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 74^o.0005 + 1.3978 \times 10^{-5} * t \\
i &= 0^o.7733 + 1.9 \times 10^{-8} * t \\
\varpi &= 96^o.6612 + 3.0565 \times 10^{-5} * t \\
a &= 19.18171 - 1.55 \times 10^{-8} * t \text{ (au)} \\
e &= 0.047318 + 7.45 \times 10^{-9} * t \\
M &= 142^o.5905 + 0^o.011725806 * t
\end{aligned}
$$

Elementos orbitais de Netuno:

$$
\begin{aligned}
\Omega &= 131^o.7806 + 3.0173 \times 10^{-5} * t \\
i &= 1^o.7700 - 2.55 \times 10^{-7} * t \\
\varpi &= 272^o.8461 - 6.027 \times 10^{-6} * t \\
a &= 30.05826 + 3.313 \times 10^{-8} * t \text{ (au)} \\
e &= 0.008606 + 2.15 \times 10^{-9} * t \\
M &= 260^o.2471 + 0^o.005995147 * t
\end{aligned}
$$

Nas equações acima, para a unidade astronômica (au), deve-se usar o valor de definição:

$$1 \ \text{ua} = 149\,597\,870\,700 \quad \text{metros} \ .$$

Tempo

O tempo t nas equações anteriores é expresso em termos do número de *dias* computados a partir de 0.0 UT de 01/01/2000. Portanto, $t = 0$ às 0h UT de 01/01/2000, $t < 0$ para datas anteriores e $t > 0$ para datas posteriores. Horas e minutos são expressas como frações de um dia: 1/24 e 1/1440, respectivamente. Computar segundos é irrelevante neste cálculo.

Para calcular t para uma data qualquer, utilize:

$$t = 367\,y - \left\lfloor \frac{7\,\left(y + \left\lfloor \frac{m+9}{12} \right\rfloor\right)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{275\,m}{9} \right\rfloor + d - 730\,530$$

onde y =ano (com 4 dígitos), m =mês (1-12), d =dia (0-31). O *função piso*[5], $\lfloor x \rfloor$, retorna a *parte inteira* de

[5]Formalmente: $\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$.

x, sem arredondamentos; por exemplo, $\lfloor 9.78 \rfloor = 9$ e $\lfloor 5.12 \rfloor = 5$. Portanto, as divisões na equação acima são divisões INTEIRAS. Considere apenas a parte inteira do resultado, sem arredondamentos.

Finalmente, adicione hora e minutos ao valor obtido para t:

$$\frac{\text{horas}}{24} + \frac{\text{minutos}}{1440} \quad ,$$

considerando apenas 3 casas decimais.

Exemplo 1 — Calcule o tempo t para 17h15 de 19/Set/1990:

$$\begin{aligned} \text{d} &= 19 \\ \text{m} &= 9 \\ \text{y} &= 1\,990 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= 367 \times 1\,990 - \left\lfloor \frac{7\ \left(1\,990 + \lfloor \frac{9+9}{12} \rfloor\right)}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{275 \times 9}{9} \right\rfloor + 19 \\ &\quad -730\,530 \\ &= 730\,330 - \left\lfloor \frac{7\ (1\,990 + \lfloor 1.5 \rfloor)}{4} \right\rfloor + \lfloor 275 \rfloor - 730\,511 \\ &= -181 - \left\lfloor \frac{7\ (1\,990 + 1)}{4} \right\rfloor + 275 \\ &= 94 - \lfloor 3\,484.25 \rfloor \\ &= 94 - 3\,484 \\ &= -3\,390 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{horas} &= 17 \\ \text{minutos} &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t &= -3\,390 + \frac{17}{24} + \frac{15}{1440} \\ t &= -3\,389.281 \end{aligned}$$

Portanto, $t = -3389.281$ dias, sendo negativo porque a data é anterior a 0h UT de 1/1/2000.

Precisão

Para qualquer tempo t dentro de um intervalo de 1 000 anos antes ou depois de 1/1/2000, o erro estimado na posição (M) do Sol e dos planetas internos é da ordem de 1 arcmin (minuto de arco). Para intervalos maiores do que 1 000 anos ou para cálculos mais acurados é necessário incluir nas equações termos de ordem 2 ou maior.

Um erro de 1 arcmin é equivalente a $1/60$ de 1^o, ou seja, $\sim 0^o.02$. Portanto, você não deve usar menos do que 2 casas decimais para expressar o valor final de M, porque senão estaria perdendo informação, nem usar mais do que 3 casas decimais, porque elas não são significantes. Utilize 3 casas decimais para expressar o valor final de M.

Exemplo 2 — Calcule a anomalia média M para Vênus para o tempo encontrado no Exemplo 1.

A equação para o cálculo da anomalia média de Vênus é:

$$M = 48^{\rm o}.005\,2 + 1^{\rm o}.602\,130\,224\,4 * t$$

O primeiro termo da equação é o valor da anomalia média M no instante $t = 0$: $M_0 = 48^{\rm o}.005\,2$. O coeficiente no segundo termo, é a taxa com que a anomalia média M está variando no tempo, ou seja, é a velocidade angular média[6] expressa em graus por dia: $\bar{\omega} = 1^{\rm o}.602\,130\,224\,4/$ dia.

Para $t = -3389.281$ dias,

$$\begin{aligned} M &= 48^{\rm o}.005\,2 + 1^{\rm o}.602\,130\,224\,4 \times (-3389.281) \\ &= 48^{\rm o}.005 - 5430^{\rm o}.070 \\ &= -5382^{\rm o}.065 \end{aligned}$$

Medidas angulares (salvo exceções, quando mencionadas) devem ter valores positivos entre $0^{\rm o}$ e $360^{\rm o}$. Quando o ângulo cai fora deste intervalo, deve-se somar ou subtrair $360^{\rm o}$ tantas vezes quantas forem necessárias para assuma um valor dentro deste intervalo. No caso,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{|M|}{360^{\rm o}} \right\rfloor &= \left\lfloor \frac{|-5382^{\rm o}.065|}{360^{\rm o}} \right\rfloor \\ &= 15 \end{aligned}$$

[6] Cuidado para não confundir $\bar{\omega}$ com ϖ.

Fazendo

$$
\begin{aligned}
M + 15 \times 360^{\circ} &= -5382^{\circ}.065 + 5400^{\circ} \\
&= 17.935^{\circ}
\end{aligned}
$$

Portanto, $M = -5382^{\circ}.065$ é equivalente a $M = 17.935^{\circ}$ e é este o valor que deve ser usado para M. O mesmo se aplica a todos os demais elementos orbitais que envolvem medidas angulares.

Cálculo da Anomalia Excêntrica

Tendo calculado a *anomalia média* M e a *excentricidade* e para o instante t, torna-se possível o cálculo da *anomalia excêntrica* E a partir da equação de Kepler:

$$M = E - e \sin E \quad .$$

sendo que as anomalias M e E são dadas em radianos.

A equação de Kepler é uma equação transcendental, sem solução analítica, podendo ser resolvida apenas numericamente ou por métodos gráficos. Abaixo, é descrito um método iterativo que permite estimar E, com excelente precisão, a partir de um valor aproximado, $\tilde{E}$, e calcular a correção ΔE que deve ser somada a este "chute" para se obter um valor mais próximo, $E \simeq \tilde{E} + \Delta E$:

1. assuma como valor aproximado inicial: $\tilde{E} = M$;

2. calcule a correção de $\tilde{E}$:

$$\Delta E = \frac{M - \tilde{E} + e \sin \tilde{E}}{1 - e \cos \tilde{E}}$$

3. calcule uma melhor aproximação para E:

$$E \simeq \tilde{E} + \Delta E$$

4. se $|\Delta E| > 5 \times 10^{-6}$, faça $\tilde{E}$ igual ao valor obtido no passo (3), isto é, $\tilde{E} = E$, e volte para o passo (2). Se $|\Delta E| \leq 5 \times 10^{-6}$, o valor que você encontrou para E já está suficientemente bom como solução para a equação de Kepler.

Cálculo da Anomalia Verdadeira

Tendo calculado a anomalia excêntrica E, pode-se agora calcular a *anomalia verdadeira* ν para o instante t a partir da equação:

$$\tan \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{(1+e)}{(1-e)}} \tan \frac{E}{2} \quad .$$

Cálculo da Distância do Planeta ao Sol

A distância do planeta ao Sol, r, no instante t pode ser calculada por:

$$r = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} \quad ,$$

sendo que r é dado em termos do valor de definição da unidade astronômica.

Cálculo das Coordenadas Cartesianas

A partir da posição $(r,\, \nu)$ do planeta em sua órbita e dos elementos orbitais Ω, ϖ e i, pode-se calcular a posição do planeta em termos de coordenadas $(X,\, Y,\, Z)$ em um sistema de *coordenadas cartesianas*, cujo plano XY de referência é o plano da eclíptica, i.e., o plano da órbita da Terra, com o eixo-X orientado na direção do ponto-γ e o eixo-Z perpendicular ao plano da eclíptica:

$$
\begin{aligned}
X &= r\,[\cos\Omega \cos(\varpi + \nu) - \sin\Omega \sin(\varpi + \nu) \cos i] \\
Y &= r\,[\sin\Omega \cos(\varpi + \nu) + \cos\Omega \sin(\varpi + \nu) \cos i] \\
Z &= r\, \sin(\varpi + \nu) \sin i
\end{aligned}
$$

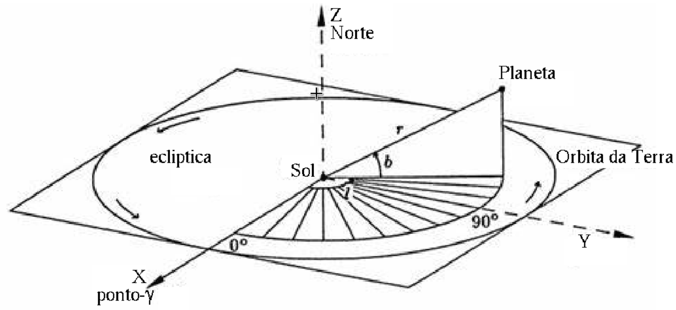
As coordenadas cartesianas $(X,\, Y,\, Z)$ são expressas em unidades de comprimento, em geral em km, e utilizadas em cálculos computacionais e como um passo intermediário para o cálculo da posição do planeta em outros sistemas de coordenadas, como é o caso de coordenadas eclípticas heliocêntricas.

Cálculo das Coordenadas Eclípticas Heliocêntricas

As coordenadas eclípticas heliocêntricas são $(\ell,\ b)$, onde ℓ é a *longitude eclíptica* e b a *latitude eclíptica* do planeta, as quais podem ser calculadas a partir dos arcos-tangentes de:

$$\begin{aligned} \tan \ell &= \frac{Y}{X} \quad , \\ \tan b &= \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}} \quad . \end{aligned}$$

A longitude ℓ é expressa em graus, com valores entre 0º e 360º . Caso, em seus cálculos seja obtido $\ell < 0^\circ$, basta somar 360º ao valor encontrado. Exemplo: $\ell = -30^\circ$ fica $\ell = 330^\circ$. A latitude b é expressa em graus, com valores entre -90º e +90º .



Baricentro do Sistema Solar

A partir das coordenadas retangulares $(X_k,\ Y_k,\ Z_k)$ e das massas $\mathcal{M}_k$ do Sol e dos 8 planetas, pode-se calcular a posição $(X_{\rm cm},\ Y_{\rm cm},\ Z_{\rm cm})$ do centro de massa ou **baricentro** do Sistema Solar:

$$\begin{aligned} X_{\rm cm} &= \sum_{k=0}^{8} \frac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_{\rm Tot}}\, X_k \\ Y_{\rm cm} &= \sum_{k=0}^{8} \frac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_{\rm Tot}}\, Y_k \\ Z_{\rm cm} &= \sum_{k=0}^{8} \frac{\mathcal{M}_k}{\mathcal{M}_{\rm Tot}}\, Z_k \end{aligned}$$

onde, as massas $\mathcal{M}_k$ estão listadas na tabela a seguir e $\mathcal{M}_{\rm Tot}$ é a massa total do Sistema Solar, considerando apenas o Sol e os 8 planetas:

$$\mathcal{M}_{\rm Tot} = \sum_{k=0}^{8} \mathcal{M}_k \quad .$$

k	Objeto	Massa $\mathcal{M}_k$
0	Sol	1.9885×10^{30} kg
1	Mercúrio	3.3011×10^{23} kg
2	Vênus	4.8675×10^{24} kg
3	Terra	5.9722×10^{24} kg
4	Marte	6.4171×10^{23} kg
5	Júpiter	1.8981×10^{27} kg
6	Saturno	5.6834×10^{26} kg
7	Urano	8.6810×10^{25} kg
8	Netuno	1.0241×10^{26} kg

Para um observador externo, os 8 planetas e o Sol movem-se em torno do baricentro do Sistema Solar. A distância Δ, em km, entre o baricentro do Sistema Solar, $(X_{\rm cm},\ Y_{\rm cm},\ Z_{\rm cm})$, e o ponto central do Sol, $(X_0,\ Y_0,\ Z_0)$, pode ser calculada por:

$$\Delta_{\ (km)} = \sqrt{(X_{\rm cm}-X_0)^2 + (Y_{\rm cm}-Y_0)^2 + (Z_{\rm cm}-Z_0)^2} \quad .$$

O raio do Sol é $R_\odot = 696\,340$ km e dependendo das posições dos planetas, o baricentro do Sistema Solar pode estar dentro do Sol ou fora dele. Por isso, é mais informativo expressar a distância entre o baricentro e o centro do Sol em termos de raios solares:

$$\Delta = \frac{\Delta_{\ (km)}}{R_\odot} \quad .$$

Se $\Delta \le 1$, o baricentro está dentro do Sol e se $\Delta > 1$, fora.

Questões

Execute os cálculos a seguir com base nas explicações do texto. É muito importante expressar os resultados corretamente, observando:

- as unidades (graus, au, dias, etc);
- o intervalo de valores para ângulos (0º a 180º ; 0º a 360º ; -90º a + 90º ; etc)
- o número de casas decimais;

1. Para cada estudante foi definida aleatoriamente uma **data** e **hora**. Veja no Moodle que data lhe corresponde. Todos os cálculos serão feitos para o instante de tempo t correspondente a esta data e hora. Anote a data e hora utilizadas em seus cálculos nos campos correspondentes do formulário anexo.

2. Calcule os elementos orbitais Ω, i, a, e e M para o instante t, para os planetas Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno. Expresse valores angulares em graus, com valores entre 0^o e 360^o (e entre 0^o e 180^o para i), utilizando não mais do que 3 casas decimais.

3. Calcule a anomalia excêntrica E no instante t, para cada um dos planetas. Expresse o valor em graus, com valores entre 0^o e 360^o, utilizando não mais do que 3 casas decimais.

4. Calcule a anomalia verdadeira ν no instante t, para cada um dos planetas. Expresse o valor em graus, com valores entre 0^o e 360^o, utilizando não mais do que 3 casas decimais.

5. Calcule a distância de cada planeta ao Sol no instante t. Expresse o valor em termos de unidades astronômicas.

6. Calcule as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) de cada planeta. Expresse as coordenadas em km, sem nenhuma casa após o ponto decimal.

7. Calcule as coordenadas eclípticas (ℓ, b) de cada planeta. Expresse as coordenadas em graus, com valores entre 0^o e 360^o, utilizando não mais do que 3 casas decimais.

8. Calcule as coordenadas ($X_{\rm cm}$, $Y_{\rm cm}$, $Z_{\rm cm}$) do baricentro do Sistema Solar, em km.

9. Calcule a distância Δ entre o centro do Sol e o baricentro do Sistema Solar, expressando esta distância em termos de raios solares. Para a sua data, o baricentro está dentro ou fora do Sol?

10. Utilize a longitude heliocêntrica ℓ para expressar a posição angular de cada planeta no instante t, no diagrama polar anexo, em relação à direção do ponto-γ (indicada pelo semieixo a 0^o). Para melhor visualização, a posição radial de cada planeta é indicada pelo respectivo índice k (1=Mercúrio, 2=Vênus, 3=Terra, ...) e não pela distância radial r anteriormente calculada.

Enviando os Resultados

Escreva seus resultados na tabela a seguir. Você pode: escrever os resultados à caneta, diretamente na tabela, digitalizá-los editando o pdf, ou reproduzir uma tabela idêntica, digitalmente.

Expresse a e r em termos de unidades astronômicas (ua) e as demais grandezas em termos de graus de arco, no intervalo de 0^o a 360^o (ou de -90^o a $+90^o$ para i e b), observando o número de algarismos significantes.

Anexe seus cálculos. Caso tenha efetuado os cálculos por meio de um programa ou script **escrito por você**, envie, por e-mail, o arquivo com o código utilizado, mencionando o método utilizado na resolução da equação de Kepler.

* * * * *

FIS02015 – Trabalho 1: Cálculo dos Elementos Orbitais

1. **Data & hora:**

Data:	
Hora:	

Nome:	
Cartão:	

2. **Elementos orbitais:**

Planeta	Ω (^{o})	i (^{o})	ϖ (^{o})	a (ua)	e	M (^{o})	E (^{o})	ν (^{o})	r (ua)
Mercúrio									
Vênus									
Terra									
Marte									
Júpiter									
Saturno									
Urano									
Netuno									

3. **Coordenadas retangulares e coordenadas eclípticas:**

k	Planeta	X (km)	Y (km)	Z (km)	ℓ (^{o})	b (^{o})
1	Mercúrio					
2	Vênus					
3	Terra					
4	Marte					
5	Júpiter					
6	Saturno					
7	Urano					
8	Netuno					

4. **Baricentro do Sistema Solar:**

X_{cm} (km)	Y_{cm} (km)	Z_{cm} (km)	$\Delta_{\ (km)}$	Δ	?Fora ou dentro?

5. **Posições angulares dos planetas:**

1 Mercúrio
2 Vênus
3 Terra
4 Marte
5 Júpiter
6 Saturno
7 Urano
8 Netuno