Categorías derivadas y geometría birracional

Pedro Núñez

Red de Doctorandos en Matemáticas UCM

22 de Marzo de 2022

Motivación histórica

1. Topología algebraica.

Motivación histórica

1. Topología algebraica.

2. Álgebra homológica.

Motivación histórica

1. Topología algebraica.
2. Álgebra homológica.
3. Categorías derivadas como herramienta.

Motivación histórica

1. Topología algebraica.
2. Álgebra homológica.
3. Categorías derivadas como herramienta.
4. Simetría especular homológica, hipótesis DK...

Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."

—Richard Thomas.

[1] CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen[1] espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.

[1] CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen[1] espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.
- Motivación práctica: los grupos de cohomología no son el dual de los grupos de homología, pero el complejo de cocadenas sí que es el dual del complejo de cadenas.

[1] CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.
- Motivación práctica: al final del día nos interesan los invariantes algebraicos del espacio topológico, así que nos conviene en cualquier caso identificar complejos de cadenas casi-isomorfos.

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos.

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de $\mathbf{Ab}$ es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de $\mathbf{Ab}$ es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

1. Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces $Q(f)$ es un isomorfismo.

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de $\mathbf{Ab}$ es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

1. Si $f: A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces $Q(f)$ es un isomorfismo.
2. Para todo functor $F\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$ con la propiedad anterior existe un functor $G\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$ único salvo isomorfismo tal que $F \cong G \circ Q$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbf{C} \\
\mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \arrow[ur, dashed, bend right, "\exists! G"'] &
\end{tikzcd}$$

Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas $A^\bullet$.

Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas $A^\bullet$.
- Los morfismos $A^\bullet \to B^\bullet$ en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son clases de equivalencia de diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "\text{casi-iso}"'] \arrow[dr] & \\ A^\bullet & & B^\bullet, \end{tikzcd}$$

Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas $A^\bullet$.
- Los morfismos $A^\bullet \to B^\bullet$ en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son clases de equivalencia de diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "\text{casi-iso}"'] \arrow[dr] & \\ A^\bullet & & B^\bullet, \end{tikzcd}$$

y dos diagramas son equivalentes si están dominados por un tercer diagrama de tal forma que el diagrama resultante conmute módulo homotopía.

Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

1. El primer paso es natural y conveniente:
   - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
   - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.

Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

1. El primer paso es natural y conveniente:
   - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
   - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.
2. El segundo paso es necesario, no todo casi-isomorfismo es una equivalencia de homotopía. Por ejemplo:

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.

Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$.

Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$. Pero esta categoría admite una *estructura triangulada*, que nos permite reemplazar las secuencias exactas por triángulos exactos

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)^\bullet \to A^\bullet[1].$$

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
2. Para todo $f : X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \mathrm{Cone}(f).$$

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
2. Para todo $f : X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta
$$X \to Y \to \mathrm{Cone}(f).$$
3. Para $j\colon Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}(f)$ se tiene $\mathrm{Cone}(j) \simeq \Sigma X$.

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
2. Para todo $f: X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \mathrm{Cone}(f).$$

3. Para $j\colon Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}(f)$ se tiene $\mathrm{Cone}(j) \simeq \Sigma X$.
4. Iterando obtenemos la secuencia coexacta de Puppe:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{g} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C(f) \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma^2 X \to \cdots$$

Véase G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, §VII.5.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.
- Si $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho* $\mathbf{R}F\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$, que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.
- Si $F\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{A}$ es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho* $\mathbf{R}F\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$, que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular $\mathbf{R}F(A^\bullet)$ como $F(I^\bullet)$, donde $I^\bullet$ es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a $A^\bullet$.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.
- Si $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho* $\mathbf{R}F\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$, que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular $\mathbf{R}F(A^\bullet)$ como $F(I^\bullet)$, donde $I^\bullet$ es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a $A^\bullet$.
- Si A es un grupo abeliano, podemos recuperar los functores derivados clásicos $R^iF(A)$ como

$$R^iF(A) = H^i(\mathbf{R}F(A)).$$

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo *equivalencia birracional*, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo *equivalencia birracional*, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.
- Por ejemplo, la esfera de Riemann y el plano complejo son birracionales.

Curvas: único representante proyectivo y liso

- Dada una curva cualquiera, existe un único representante proyectivo y liso en su clase de equivalencia birracional.

Superficies: demasiados posibles representantes

- Problema: blow-up produce nuevo representante distinto pero también proyectivo y liso.

Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S.

Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S.
2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?

Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S.
2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?
   - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
   - No: S es un modelo minimal; FIN.

Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S.
2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?
   - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
   - No: S es un modelo minimal; FIN.
3. Sea $\pi \colon S \to X$ la contracción de C. Es $\dim(X) < \dim(S)$?

Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S.
2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?
   - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
   - No: S es un modelo minimal; FIN.
3. Sea $\pi : S \to X$ la contracción de C. Es $\dim(X) < \dim(S)$?
   - Sí: π es una fibración de Mori; FIN.
   - No: X es una superficie proyectiva lisa y π es un blow-up; repetir paso 1 con X.

La categoría derivada de una variedad

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría $\mathbf{Coh}(X)$ de haces coherentes sobre X.

La categoría derivada de una variedad

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría $\mathbf{Coh}(X)$ de haces coherentes sobre X.
- $\mathbf{Coh}(X)$ es abeliana, y definimos $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) := \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Coh}(X))$.

La categoría derivada de una variedad

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría $\mathbf{Coh}(X)$ de haces coherentes sobre X.
- $\mathbf{Coh}(X)$ es abeliana, y definimos $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) := \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Coh}(X))$.
- Meta-lema: todo haz coherente $\mathcal{F}$ admite una resolución finita $\mathcal{E}^{\bullet}$ formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$.

La categoría derivada de una variedad

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría $\mathbf{Coh}(X)$ de haces coherentes sobre X.
- $\mathbf{Coh}(X)$ es abeliana, y definimos $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) := \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbf{Coh}(X))$.
- Meta-lema: todo haz coherente $\mathcal{F}$ admite una resolución finita $\mathcal{E}^{\bullet}$ formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$.
- $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ detecta conexión, dimensión y anillo canónico.

Descomposiciones semiortogonales

- $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ significa que no hay morfismos no nulos de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ y que la subcategoría triangulada más pequeña de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ que contiene a $\mathbf{A}$ y a $\mathbf{B}$ es $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$.

Descomposiciones semiortogonales

- $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$ significa que no hay morfismos no nulos de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ y que la subcategoría triangulada más pequeña de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ que contiene a $\mathbf{A}$ y a $\mathbf{B}$ es $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$.
- Idea: los morfismos del MMP se reflejan en forma de descomposiciones semiortogonales de $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$.

Ejemplo: fibración de Mori

La fibración de Mori $\pi\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \{*\}$ induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

Ejemplo: fibración de Mori

La fibración de Mori $\pi\colon \mathbb{P}^2 \longrightarrow \{*\}$ induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

La idea de la semiortogonalidad es

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2)}(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}[i]) &= \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2)) \\ &= H^i(\mathbf{R}\,\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2))) \\ &= H^i(\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(-2)) \\ &= H^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(-2)) = 0. \end{aligned}$$

Ejemplo: blow-up

El blow-up $\pi\colon \tilde{X} \to X$ de una superficie proyectiva lisa X en un punto $p \in X$ induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) = \langle \mathcal{O}_E(-E), \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) \rangle.$$

Hipótesis DK

Conjetura: Sean X e Y dos variedades proyectivas lisas K-equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa Z y morfismos birracionales

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

tales que $f^*K_X \sim g^*K_Y$.

Hipótesis DK

Conjetura: Sean X e Y dos variedades proyectivas lisas K-equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa Z y morfismos birracionales

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

tales que $f^*K_X \sim g^*K_Y$. Entonces X e Y son D-equivalentes, es decir, existe una equivalencia triangulada $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) \cong \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$.

Descomposiciones en superficies

Pregunta: Sea X una superficie proyectiva lisa minimal con $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \neq 0$. Es $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ indecomponible?

Gracias por vuestra atención!

S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra.* 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-12492-5.

D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry.* 2006. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001.

Y. Kawamata. "Birational geometry and derived categories". In: 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1710.07370.

K. Matsuki. *Introduction to the Mori program.* 2002. DOI: 10.1007/978-1-4757-5602-9.