Categorías derivadas y geometría birracional

Pedro Núñez

Red de Doctorandos en Matemáticas UCM

22 de Marzo de 2022

1. Topología algebraica.

Motivación histórica

- 1. Topología algebraica.
- 2. Álgebra homológica.



Motivación histórica

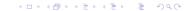
- 1. Topología algebraica.
- 2. Álgebra homológica.
- 3. Categorías derivadas como herramienta.

Motivación histórica

- 1. Topología algebraica.
- 2. Álgebra homológica.
- 3. Categorías derivadas como herramienta.
- 4. Simetría especular homológica, hipótesis DK...

Categorías derivadas 00000000

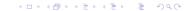
"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal." -Richard Thomas.



Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

 Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen¹ espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.



Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen¹ espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.
- Motivación práctica: los grupos de cohomología no son el dual de los grupos de homología, pero el complejo de cocadenas sí que es el dual del complejo de cadenas.



¹CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

 Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.



Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.
- Motivación práctica: al final del día nos interesan los invariantes algebraicos del espacio topológico, así que nos conviene en cualquier caso identificar complejos de cadenas casi-isomorfos.

Sea Ch(Ab) la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos.

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de \mathbf{Ab} es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q \colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de \mathbf{Ab} es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})\to\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

1. Si $f: A^{\bullet} \to B^{\bullet}$ es un casi-isomorfismo, entonces Q(f) es un isomorfismo.

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de \mathbf{Ab} es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q \colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

- 1. Si $f: A^{\bullet} \to B^{\bullet}$ es un casi-isomorfismo, entonces Q(f) es un isomorfismo.
- 2. Para todo functor $F \colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$ con la propiedad anterior existe un functor $G \colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$ único salvo isomorfismo tal que $F \cong G \circ Q$.

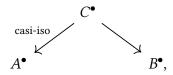
$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{F} & \mathbf{C} \\
\downarrow & & \uparrow \\
\mathbf{D}(\mathbf{Ab}) & & \exists ! G
\end{array}$$

Descripción explícita

• Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas A^{\bullet} .

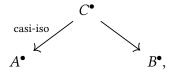
Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas A^{\bullet} .
- Los morfismos $A^{\bullet} \to B^{\bullet}$ en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son clases de equivalencia de diagramas de la forma



Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas A^{\bullet} .
- Los morfismos $A^{\bullet} \to B^{\bullet}$ en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son clases de equivalencia de diagramas de la forma



y dos diagramas son equivalentes si están dominados por un tercer diagrama de tal forma que el diagrama resultante conmute módulo homotopía.

Construcción (dos pasos)

$$Ch(Ab) \xrightarrow{\text{M\'odulo homotop\'ia}} K(Ab) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} D(Ab)$$

Construcción (dos pasos)

$$Ch(Ab) \xrightarrow{\text{M\'odulo homotop\'ia}} K(Ab) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} D(Ab)$$

- 1. El primer paso es natural y conveniente:
 - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
 - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.

Construcción (dos pasos)

$$Ch(Ab) \xrightarrow{\text{M\'odulo homotop\'ia}} K(Ab) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} D(Ab)$$

- 1. El primer paso es natural y conveniente:
 - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
 - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.
- 2. El segundo paso es necesario, no todo casi-isomorfismo es una equivalencia de homotopía. Por ejemplo:

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

Estructura triangulada

• $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.

Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en D(Ab).



Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en D(Ab). Pero esta categoría admite una *estructura triangulada*, que nos permite reemplazar las secuencias exactas por triángulos exactos

$$A^{\bullet} \xrightarrow{f} B^{\bullet} \to \operatorname{Cone}(f)^{\bullet} \to A^{\bullet}[1].$$

1. Si $i: X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.

- 1. Si $i: X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
- 2. Para todo $f: X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \operatorname{Cone}(f)$$
.

- 1. Si $i: X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
- 2. Para todo $f: X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \operatorname{Cone}(f)$$
.

3. Para $j: Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$ se tiene $\text{Cone}(j) \simeq \Sigma X$.

- 1. Si $i: X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
- 2. Para todo $f: X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \operatorname{Cone}(f)$$
.

- 3. Para $j: Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$ se tiene $\text{Cone}(j) \simeq \Sigma X$.
- 4. Iterando obtenemos la secuencia coexacta de Puppe:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{g} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C(f) \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma^{2} X \to \cdots$$

Véase G. E. Bredon, Topology and Geometry, §VII.5.

 Un functor *F*: **Ab** → **A** que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: **D**(**Ab**) → **D**(**A**) de forma directa, no estaría bien definido.

- Un functor *F*: **Ab** → **A** que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: **D**(**Ab**) → **D**(**A**) de forma directa, no estaría bien definido.
- Si F: Ab → A es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su functor derivado derecho
 RF: D⁺(Ab) → D⁺(A), que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.

- Un functor *F*: Ab → A que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: D(Ab) → D(A) de forma directa, no estaría bien definido.
- Si F: Ab → A es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su functor derivado derecho
 RF: D⁺(Ab) → D⁺(A), que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular $\mathbf{R}F(A^{\bullet})$ como $F(I^{\bullet})$, donde I^{\bullet} es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a A^{\bullet} .

- Un functor *F*: **Ab** → **A** que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: **D**(**Ab**) → **D**(**A**) de forma directa, no estaría bien definido.
- Si F: Ab → A es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su functor derivado derecho
 RF: D⁺(Ab) → D⁺(A), que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular $\mathbf{R}F(A^{\bullet})$ como $F(I^{\bullet})$, donde I^{\bullet} es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a A^{\bullet} .
- Si A es un grupo abeliano, podemos recuperar los functores derivados clásicos $R^iF(A)$ como

$$R^i F(A) = H^i(\mathbf{R} F(A)).$$

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

• Clasificar módulo isomorfismo es difícil.



Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo equivalencia birracional, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo equivalencia birracional, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.
- Por ejemplo, la esfera de Riemann y el plano complejo son birracionales.

Curvas: único representante proyectivo y liso

 Dada una curva cualquiera, existe un único representante proyectivo y liso en su clase de equivalencia birracional.

Superficies: demasiados posibles representantes

• Problema: blow-up produce nuevo representante distinto pero también proyectivo y liso.

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S .



- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S .
- 2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?

- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S .
- 2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?
 - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
 - No: *S* es un modelo minimal; FIN.

- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S .
- 2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?
 - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
 - No: *S* es un modelo minimal; FIN.
- 3. Sea $\pi: S \to X$ la contracción de C. Es dim $(X) < \dim(S)$?

- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico K_S .
- 2. Hay alguna curva $C \subseteq S$ tal que $K_S \cdot C < 0$?
 - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
 - No: *S* es un modelo minimal; FIN.
- 3. Sea $\pi: S \to X$ la contracción de C. Es dim $(X) < \dim(S)$?
 - Sí: π es una fibración de Mori; FIN.
 - No: X es una superficie proyectiva lisa y π es un blow-up; repetir paso 1 con X.

Sea *X* una variedad proyectiva lisa.

• (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría $\mathbf{Coh}(X)$ de haces coherentes sobre X.



Sea *X* una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría Coh(X) de haces coherentes sobre X.
- Coh(X) es abeliana, y definimos $D^b(X) := D^b(Coh(X))$.

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría Coh(X) de haces coherentes sobre X.
- $\operatorname{\mathbf{Coh}}(X)$ es abeliana, y definimos $\operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(X) \coloneqq \operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(\operatorname{\mathbf{Coh}}(X))$.
- Meta-lema: todo haz coherente F admite una resolución finita E• formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en D^b(X).

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría Coh(X) de haces coherentes sobre X.
- $\operatorname{\mathbf{Coh}}(X)$ es abeliana, y definimos $\operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(X) \coloneqq \operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(\operatorname{\mathbf{Coh}}(X)).$
- Meta-lema: todo haz coherente ℱ admite una resolución finita ℰ formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en D^b(X).
- $\mathbf{D}^{b}(X)$ detecta conexión, dimensión y anillo canónico.

Descomposiciones semiortogonales

D^b(X) = \langle A, B \rangle significa que no hay morfismos no nulos de B a A y que la subcategoría triangulada más pequeña de D^b(X) que contiene a A y a B es D^b(X).

Descomposiciones semiortogonales

- D^b(X) = ⟨A, B⟩ significa que no hay morfismos no nulos de B a A y que la subcategoría triangulada más pequeña de D^b(X) que contiene a A y a B es D^b(X).
- **Idea:** los morfismos del MMP se reflejan en forma de descomposiciones semiortogonales de $\mathbf{D}^{b}(X)$.

La fibración de Mori $\pi\colon \mathbb{P}^2 \to \{*\}$ induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

La fibración de Mori $\pi\colon \mathbb{P}^2 \to \{*\}$ induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

La idea de la semiortogonalidad es

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}^{b}(\mathbb{P}^{2})}(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}[i]) = \operatorname{Ext}^{i}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2))$$

$$= H^{i}(\mathbf{R} \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2)))$$

$$= H^{i}(\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}^{2}, \mathcal{O}(-2)))$$

$$= H^{i}(\mathbb{P}^{2}, \mathcal{O}(-2)) = 0.$$

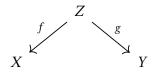
Ejemplo: blow-up

El blow-up $\pi\colon \tilde X\to X$ de una superficie proyectiva lisa X en un punto $p\in X$ induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) = \langle \mathcal{O}_{E}(-E), \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) \rangle.$$

Hipótesis DK

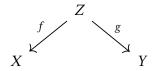
Conjetura: Sean X e Y dos variedades proyectivas lisas K-equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa Z y morfismos birracionales



tales que $f^*K_X \sim g^*K_Y$.

Hipótesis DK

Conjetura: Sean X e Y dos variedades proyectivas lisas K-equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa Z y morfismos birracionales



tales que $f^*K_X \sim g^*K_Y$. Entonces X e Y son D-equivalentes, es decir, existe una equivalencia triangulada $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) \cong \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$.

Descomposiciones en superficies

Pregunta: Sea X una superficie proyectiva lisa minimal con $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \neq 0$. Es $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$ indecomponible?

Gracias por vuestra atención!



S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-12492-5.



D. Huybrechts. Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry. 2006. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001.



Y. Kawamata. "Birational geometry and derived categories". In: 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1710.07370.



K. Matsuki. *Introduction to the Mori program.* 2002. DOI: 10.1007/978-1-4757-5602-9.

