Categorías derivadas y geometría birracional

Pedro Núñez

Red de Doctorandos en Matemáticas UCM

22 de Marzo de 2022

Motivación histórica (demasiado simplificada)

1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.

Motivación histórica (demasiado simplificada)

1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.
2. Álgebra homológica: sistematizar y generalizar métodos y herramientas disponibles en la categoría de grupos abelianos, permitiéndonos definir invariantes con valores en otras categorías (en categorías abelianas).

Motivación histórica (demasiado simplificada)

1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.
2. Álgebra homológica: sistematizar y generalizar métodos y herramientas disponibles en la categoría de grupos abelianos, permitiéndonos definir invariantes con valores en otras categorías (en categorías abelianas).
3. Las categorías derivadas surgen como herramienta técnica necesaria para generalizar la dualidad de Poincaré al contexto relativo (dualidad de Verdier).

Motivación histórica (demasiado simplificada)

1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.
2. Álgebra homológica: sistematizar y generalizar métodos y herramientas disponibles en la categoría de grupos abelianos, permitiéndonos definir invariantes con valores en otras categorías (en categorías abelianas).
3. Las categorías derivadas surgen como herramienta técnica necesaria para generalizar la dualidad de Poincaré al contexto relativo (dualidad de Verdier).
4. Con el tiempo las categorías derivadas adquieren interés propio, gracias por ejemplo a la simetría especular homológica o a conexiones con la geometría birracional.

Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."

—Richard Thomas.

[1] CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."

—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen[1] espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.

[1] CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen[1] espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.
- Motivación práctica: los grupos de cohomología no son el dual de los grupos de homología, pero el complejo de cocadenas sí que es el dual del complejo de cadenas.

[1] CW-complejo simplemente conexo.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.

Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.
- Motivación práctica: al final del día nos interesan los invariantes algebraicos del espacio topológico, así que nos conviene en cualquier caso identificar complejos de cadenas casi-isomorfos.

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos.

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de $\mathbf{Ab}$ es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de $\mathbf{Ab}$ es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

1. Si $f : A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces $Q(f)$ es un isomorfismo.

Definición mediante propiedad universal

Sea $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$ la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de $\mathbf{Ab}$ es una categoría $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ junto con un functor $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ tal que:

1. Si $f\colon A^\bullet \to B^\bullet$ es un casi-isomorfismo, entonces $Q(f)$ es un isomorfismo.
2. Para todo functor $F\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$ con la propiedad anterior existe un único functor $G\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$ tal que $F = G \circ Q$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathbf{C} \\
\mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \arrow[ur, dashed, bend right, "\exists! G"'] &
\end{tikzcd}$$

Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas $A^\bullet$.

Descripción explícita

- Los objetos de $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son complejos de cadenas $A^\bullet$.
- Los morfismos $A^\bullet \to B^\bullet$ en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ son clases de equivalencia de diagramas de la forma

$$\begin{tikzcd} & C^\bullet \arrow[dl, "\text{casi-iso}"'] \arrow[dr] & \\ A^\bullet & & B^\bullet, \end{tikzcd}$$

y dos diagramas son equivalentes si están dominados por un tercer diagrama de tal forma que el diagrama resultante conmute módulo homotopía.

Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

1. El primer paso es natural y conveniente:
   - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
   - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.

Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

1. El primer paso es natural y conveniente:
   - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
   - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.
2. El segundo paso es necesario, no todo casi-isomorfismo es una equivalencia de homotopía. Por ejemplo:

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.

Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$. Pero esta categoría admite una *estructura triangulada*, que nos permite reemplazar las secuencias exactas por triángulos exactos

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)^\bullet \to A^\bullet[1]$$

y seguir usando argumentos similares al lema de los 5 o a la secuencia exacta larga en cohomología.

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
2. Para todo $f : X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \mathrm{Cone}(f).$$

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
2. Para todo $f : X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta
$$X \to Y \to \mathrm{Cone}(f).$$
3. Para $j\colon Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}(f)$ se tiene $\mathrm{Cone}(j) \simeq \Sigma X$.

Motivación topológica de los triángulos

1. Si $i\colon X \hookrightarrow Y$ es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia $X \hookrightarrow Y \to Y/X$ es coexacta.
2. Para todo $f : X \to Y$ se tiene una secuencia coexacta corta
$$X \to Y \to \mathrm{Cone}(f).$$
3. Para $j\colon Y \hookrightarrow \mathrm{Cone}(f)$ se tiene $\mathrm{Cone}(j) \simeq \Sigma X$.
4. La suspensión preserva la coexactitud, así que obtenemos una secuencia coexacta larga (secuencia de Puppe):
$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{g} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C(f) \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma^2 X \to \cdots$$

Véase G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, §VII.5.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.
- Si $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho* $\mathbf{R}F\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$, que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.
- Si $F\colon \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{A}$ es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho* $\mathbf{R}F\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \longrightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$, que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular $\mathbf{R}F(A^\bullet)$ como $F(I^\bullet)$, donde $I^\bullet$ es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a $A^\bullet$.

Functores derivados

- Un functor $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ que no sea exacto no puede inducir un functor $F\colon \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{A})$ de forma directa, no estaría bien definido.
- Si $F\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{A}$ es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho* $\mathbf{R}F\colon \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$, que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular $\mathbf{R}F(A^\bullet)$ como $F(I^\bullet)$, donde $I^\bullet$ es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a $A^\bullet$.
- Si A es un grupo abeliano, podemos recuperar los functores derivados clásicos $R^iF(A)$ como

$$R^iF(A) = H^i(\mathbf{R}F(A)).$$

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

Clasificar módulo isomorfismo es difícil. En vez de ello, intentamos clasificar módulo equivalencia birracional (módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos).

Curvas: único representante proyectivo y liso

Clasificación según el género, es decir, según el grado del divisor canónico.

Superficies: demasiados posibles representantes proyectivos y lisos

Problema: blow-up produce nuevo representante distinto pero también proyectivo y liso.

Superficies: criterio de Castelnuovo

Las curvas contractibles se manifiestan como curvas con intersección negativa con el divisor canónico.

Superficies: algoritmo del MMP

Contraer curvas negativas. Posibles resultados:

1. Contracción divisorial.
2. Fibración de Mori.

La categoría derivada de una variedad

Fibrados vectoriales no bastan, por eso consideramos haces coherentes.

Propiedades reflejadas en la categoría derivada

1. Conexitud (en concreto, irreducibilidad).
2. Dimensión.
3. Anillo canónico.

Descomposiciones semiortogonales

Las ortogonales no son posibles.

Descomposición del espacio proyectivo

Descomposición inducida por un blow-up

Hipótesis DK

Descomposiciones en superficies

Gracias por vuestra atención!

S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra.* 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-12492-5.

D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry.* 2006. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001.

Y. Kawamata. "Birational geometry and derived categories". In: 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1710.07370.

K. Matsuki. *Introduction to the Mori program.* 2002. DOI: 10.1007/978-1-4757-5602-9.