

# Categorías derivadas y geometría birracional

Pedro Núñez

Red de Doctorandos en Matemáticas UCM

22 de Marzo de 2022

# Motivación histórica

## 1. Topología algebraica.

# Motivación histórica

1. Topología algebraica.
2. Álgebra homológica.

# Motivación histórica

1. Topología algebraica.
2. Álgebra homológica.
3. Categorías derivadas como herramienta.

# Motivación histórica

1. Topología algebraica.
2. Álgebra homológica.
3. Categorías derivadas como herramienta.
4. Simetría especular homológica, hipótesis DK...

# Motivación más concreta: objetos

“Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal.”  
—Richard Thomas.

# Motivación más concreta: objetos

“Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal.”  
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): la homología *de las triangulaciones* de un espacio simplemente conexo determina el tipo de homotopía.

# Motivación más concreta: objetos

“Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal.”  
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): la homología *de las triangulaciones* de un espacio simplemente conexo determina el tipo de homotopía.
- Motivación práctica:  $H^i(X) \neq \text{Hom}(H_i(X), \mathbb{Z})$ .



# Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

# Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere identificar triangulaciones casi-isomorfas.

# Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere identificar triangulaciones casi-isomorfas.
- Motivación práctica: al final nos interesa la homología.

# Definición mediante propiedad universal

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos.

# Definición mediante propiedad universal

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de  $\mathbf{Ab}$  es una categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  junto con un functor  $Q: \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  tal que:

# Definición mediante propiedad universal

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de  $\mathbf{Ab}$  es una categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  junto con un functor  $Q: \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  tal que:

1. Si  $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es un casi-isomorfismo, entonces  $Q(f)$  es un isomorfismo.

# Definición mediante propiedad universal

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de  $\mathbf{Ab}$  es una categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  junto con un functor  $Q: \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  tal que:

1. Si  $f: A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  es un casi-isomorfismo, entonces  $Q(f)$  es un isomorfismo.
2. Para todo functor  $F: \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{C}$  con la propiedad anterior existe un functor  $G: \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{C}$  único salvo isomorfismo tal que  $F \cong G \circ Q$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{F} & \mathbf{C} \\ Q \downarrow & \nearrow \exists! G & \\ \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) & & \end{array}$$

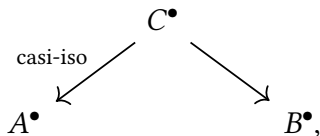
# Descripción explícita

- Los objetos de  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son complejos de cadenas  $A^\bullet$ .



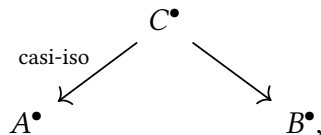
# Descripción explícita

- Los objetos de  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son complejos de cadenas  $A^\bullet$ .
- Los morfismos  $A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  en  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son clases de equivalencia de diagramas de la forma



# Descripción explícita

- Los objetos de  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son complejos de cadenas  $A^\bullet$ .
- Los morfismos  $A^\bullet \rightarrow B^\bullet$  en  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son clases de equivalencia de diagramas de la forma



y dos diagramas son equivalentes si están dominados por un tercer diagrama de tal forma que el diagrama resultante conmute módulo homotopía.

# Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

# Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

## 1. El primer paso es natural y conveniente:

- Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
- Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.

# Construcción (dos pasos)

$$\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Módulo homotopía}} \mathbf{K}(\mathbf{Ab}) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$$

1. El primer paso es natural y conveniente:
  - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
  - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.
2. El segundo paso es necesario, no todo casi-isomorfismo es una equivalencia de homotopía. Por ejemplo:

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

# Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y  $Q$  es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.

# Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y  $Q$  es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de secuencias exactas en  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$ .

# Estructura triangulada

- $D(\mathbf{Ab})$  sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y  $Q$  es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de secuencias exactas en  $D(\mathbf{Ab})$ . Pero esta categoría admite una *estructura triangulada*, que nos permite reemplazar las secuencias exactas por triángulos exactos

$$A^\bullet \xrightarrow{f} B^\bullet \rightarrow \text{Cone}(f)^\bullet \rightarrow A^\bullet[1].$$



# Motivación topológica de los triángulos

1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \rightarrow Y/X$  es coexacta.

# Motivación topológica de los triángulos

1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \rightarrow Y/X$  es coexacta.
2. Para todo  $f: X \rightarrow Y$  se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \rightarrow Y \rightarrow \text{Cone}(f).$$

# Motivación topológica de los triángulos

1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \rightarrow Y/X$  es coexacta.
2. Para todo  $f: X \rightarrow Y$  se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \rightarrow Y \rightarrow \text{Cone}(f).$$

3. Para  $j: Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$  se tiene  $\text{Cone}(j) \simeq \Sigma X$ .

# Motivación topológica de los triángulos

1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \rightarrow Y/X$  es coexacta.
2. Para todo  $f: X \rightarrow Y$  se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \rightarrow Y \rightarrow \text{Cone}(f).$$

3. Para  $j: Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$  se tiene  $\text{Cone}(j) \simeq \Sigma X$ .
4. Iterando obtenemos la secuencia coexacta de Puppe:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{g} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C(f) \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma^2 X \rightarrow \dots$$

Véase G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, §VII.5.

# Funtores derivados

- Un functor  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  que no sea exacto no puede inducir un functor  $F: \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  de forma directa, no estaría bien definido.

# Funtores derivados

- Un functor  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  que no sea exacto no puede inducir un functor  $F: \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  de forma directa, no estaría bien definido.
- Si  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho*  $\mathbf{R}F: \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$ , que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.

# Funtores derivados

- Un functor  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  que no sea exacto no puede inducir un functor  $F: \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  de forma directa, no estaría bien definido.
- Si  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho*  $\mathbf{R}F: \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$ , que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular  $\mathbf{R}F(A^\bullet)$  como  $F(I^\bullet)$ , donde  $I^\bullet$  es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a  $A^\bullet$ .

## Funtores derivados

- Un functor  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  que no sea exacto no puede inducir un functor  $F: \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}(\mathbf{A})$  de forma directa, no estaría bien definido.
- Si  $F: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{A}$  es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su *functor derivado derecho*  $\mathbf{R}F: \mathbf{D}^+(\mathbf{Ab}) \rightarrow \mathbf{D}^+(\mathbf{A})$ , que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular  $\mathbf{R}F(A^\bullet)$  como  $F(I^\bullet)$ , donde  $I^\bullet$  es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a  $A^\bullet$ .
- Si  $A$  es un grupo abeliano, podemos recuperar los funtores derivados clásicos  $R^iF(A)$  como

$$R^iF(A) = H^i(\mathbf{R}F(A)).$$



# Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.

# Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo *equivalencia birracional*, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.

# Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo *equivalencia birracional*, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.
- Por ejemplo, la esfera de Riemann y el plano complejo son birracionales.

# Curvas: único representante proyectivo y liso

- Dada una curva cualquiera, existe un único representante proyectivo y liso en su clase de equivalencia birracional.

# Superficies: demasiados posibles representantes

- Problema: blow-up produce nuevo representante distinto pero también proyectivo y liso.

# Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa  $S$  con divisor canónico  $K_S$ .

# Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa  $S$  con divisor canónico  $K_S$ .
2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?

# Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa  $S$  con divisor canónico  $K_S$ .
2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?
  - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
  - No:  $S$  es un modelo minimal; FIN.



# Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa  $S$  con divisor canónico  $K_S$ .
2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?
  - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
  - No:  $S$  es un modelo minimal; FIN.
3. Sea  $\pi: S \rightarrow X$  la contracción de  $C$ . Es  $\dim(X) < \dim(S)$ ?

# Superficies: algoritmo del MMP

1. Input: superficie proyectiva lisa  $S$  con divisor canónico  $K_S$ .
2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?
  - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
  - No:  $S$  es un modelo minimal; FIN.
3. Sea  $\pi: S \rightarrow X$  la contracción de  $C$ . Es  $\dim(X) < \dim(S)$ ?
  - Sí:  $\pi$  es una fibración de Mori; FIN.
  - No:  $X$  es una superficie proyectiva lisa y  $\pi$  es un blow-up; repetir paso 1 con  $X$ .

# La categoría derivada de una variedad

Sea  $X$  una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre  $X$  no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría **Coh**( $X$ ) de haces coherentes sobre  $X$ .

# La categoría derivada de una variedad

Sea  $X$  una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre  $X$  no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría  $\mathbf{Coh}(X)$  de haces coherentes sobre  $X$ .
- $\mathbf{Coh}(X)$  es abeliana, y definimos  $\mathbf{D}^b(X) := \mathbf{D}^b(\mathbf{Coh}(X))$ .

# La categoría derivada de una variedad

Sea  $X$  una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre  $X$  no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría  $\mathbf{Coh}(X)$  de haces coherentes sobre  $X$ .
- $\mathbf{Coh}(X)$  es abeliana, y definimos  $\mathbf{D}^b(X) := \mathbf{D}^b(\mathbf{Coh}(X))$ .
- **Meta-lemma:** todo haz coherente  $\mathcal{F}$  admite una resolución finita  $\mathcal{E}^\bullet$  formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en  $\mathbf{D}^b(X)$ .

# La categoría derivada de una variedad

Sea  $X$  una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre  $X$  no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría  $\mathbf{Coh}(X)$  de haces coherentes sobre  $X$ .
- $\mathbf{Coh}(X)$  es abeliana, y definimos  $\mathbf{D}^b(X) := \mathbf{D}^b(\mathbf{Coh}(X))$ .
- **Meta-lemma:** todo haz coherente  $\mathcal{F}$  admite una resolución finita  $\mathcal{E}^\bullet$  formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en  $\mathbf{D}^b(X)$ .
- $\mathbf{D}^b(X)$  detecta conexión, dimensión y anillo canónico.



# Descomposiciones semiortogonales

- $\mathbf{D}^b(X) = \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$  significa que no hay morfismos no nulos de  $\mathbf{B}$  a  $\mathbf{A}$  y que la subcategoría triangulada más pequeña de  $\mathbf{D}^b(X)$  que contiene a  $\mathbf{A}$  y a  $\mathbf{B}$  es  $\mathbf{D}^b(X)$ .
- **Idea:** los morfismos del MMP se reflejan en forma de descomposiciones semiortogonales de  $\mathbf{D}^b(X)$ .



# Ejemplo: fibración de Mori

La fibración de Mori  $\pi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \{*\}$  induce una descomposición

$$\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

# Ejemplo: fibración de Mori

La fibración de Mori  $\pi: \mathbb{P}^2 \rightarrow \{*\}$  induce una descomposición

$$\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

La idea de la semiortogonalidad es

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}^b(\mathbb{P}^2)}(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}[i]) &= \mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2)) \\ &= H^i(\mathbf{R}\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2))) \\ &= H^i(\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(-2))) \\ &= H^i(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}(-2)) = 0. \end{aligned}$$

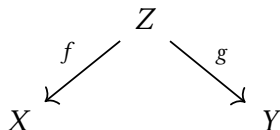
# Ejemplo: blow-up

El blow-up  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  de una superficie proyectiva lisa  $X$  en un punto  $p \in X$  induce una descomposición

$$\mathbf{D}^b(\tilde{X}) = \langle \mathcal{O}_E(-E), \mathbf{D}^b(X) \rangle.$$

# Hipótesis DK

**Conjetura:** Sean  $X$  e  $Y$  dos variedades proyectivas lisas  $K$ -equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa  $Z$  y morfismos birracionales



tales que  $f^*K_X \sim g^*K_Y$ .

# Hipótesis DK

**Conjetura:** Sean  $X$  e  $Y$  dos variedades proyectivas lisas  $K$ -equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa  $Z$  y morfismos birracionales

$$\begin{array}{ccc} & Z & \\ f \swarrow & & \searrow g \\ X & & Y \end{array}$$

tales que  $f^*K_X \sim g^*K_Y$ . Entonces  $X$  e  $Y$  son  $D$ -equivalentes, es decir, existe una equivalencia triangulada  $\mathbf{D}^b(X) \cong \mathbf{D}^b(Y)$ .

# Descomposiciones en superficies

**Pregunta:** Sea  $X$  una superficie proyectiva lisa minimal con  $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \neq 0$ . Es  $\mathbf{D}^b(X)$  indecomponible?

# Gracias por vuestra atención!



S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. 2003. DOI: [10.1007/978-3-662-12492-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12492-5).



D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. 2006. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001).



Y. Kawamata. “Birational geometry and derived categories”. In: 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1710.07370>.



K. Matsuki. *Introduction to the Mori program*. 2002. DOI: [10.1007/978-1-4757-5602-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5602-9).