

Categorías derivadas y geometría birracional

Pedro Núñez

Red de Doctorandos en Matemáticas UCM

22 de Marzo de 2022

Plan de la charla

Categorías derivadas

El Programa del Modelo Minimal

Categorías derivadas de variedades

Problemas abiertos

Referencias

Homología relativa a un subespacio

Sequencia exacta de complejos produce sequencia exacta larga de homología.

Categorías abelianas

Es una propiedad, no una estructura (importante por el contraste con las trianguladas). Definición. Ejemplo: grupos abelianos. Contraejemplo: conjuntos. Complejos y secuencias exactas.

Objetivo

Partiendo de una categoría abeliana (la de grupos abelianos, por tener un ejemplo concreto en mente), construir una categoría cuyos objetos sean complejos de cadenas y cuyos morfismos nos permitan identificar complejos con la misma homología.

Definición de la categoría derivada

Mediante propiedad universal.

Construcción: primer paso

Identificar morfismos homotópicos.

Ejemplo: primer paso no basta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

Observación: podemos detectar equivalencias débiles con conos

Observación: estructura triangulada

Construcción: segundo paso

Cociente de Verdier (localización con cálculo de fracciones).

Ejemplo: funtores derivados

Por qué hace falta derivarlos, compatibilidad con la estructura triangulada.

Objetivo: clasificar variedades algebraicas

Clasificar módulo isomorfismo es difícil. En vez de ello, intentamos clasificar módulo equivalencia birracional (módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos).

Curvas: único representante proyectivo y liso

Clasificación según el género, es decir, según el grado del divisor canónico.

Superficies: demasiados posibles representantes proyectivos y lisos

Problema: blow-up produce nuevo representante distinto pero también proyectivo y liso.

Superficies: criterio de Castelnuovo

Las curvas contractibles se manifiestan como curvas con intersección negativa con el divisor canónico.

Superficies: algoritmo del MMP

Contraer curvas negativas. Posibles resultados:

1. Contracción divisorial.
2. Fibración de Mori.

La categoría derivada de una variedad

Fibrados vectoriales no bastan, por eso consideramos haces coherentes.

Propiedades reflejadas en la categoría derivada

1. Conexitud (en concreto, irreducibilidad).
2. Dimensión.
3. Anillo canónico.

Descomposiciones semiortogonales

Las ortogonales no son posibles.

Descomposición del espacio proyectivo

Descomposición inducida por un blow-up

Hipótesis DK

Descomposiciones en superficies

Gracias por vuestra atención!



S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. 2003. DOI: [10.1007/978-3-662-12492-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-12492-5).



D. Huybrechts. *Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry*. 2006. DOI: [10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001](https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001).



Y. Kawamata. “Birational geometry and derived categories”. In: 2017. URL: <https://arxiv.org/abs/1710.07370>.



K. Matsuki. *Introduction to the Mori program*. 2002. DOI: [10.1007/978-1-4757-5602-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-5602-9).