# Categorías derivadas y geometría birracional

Pedro Núñez

Red de Doctorandos en Matemáticas UCM

22 de Marzo de 2022

1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.

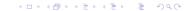
- 1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.
- 2. Álgebra homológica: sistematizar y generalizar métodos y herramientas disponibles en la categoría de grupos abelianos, permitiéndonos definir invariantes con valores en otras categorías (en categorías abelianas).

- 1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.
- 2. Álgebra homológica: sistematizar y generalizar métodos y herramientas disponibles en la categoría de grupos abelianos, permitiéndonos definir invariantes con valores en otras categorías (en categorías abelianas).
- 3. Las categorías derivadas surgen como herramienta técnica necesaria para generalizar la dualidad de Poincaré al contexto relativo (dualidad de Verdier).

- 1. Topología algebraica: asociar invariantes algebraicos a espacios topológicos, por ejemplo la homología.
- 2. Álgebra homológica: sistematizar y generalizar métodos y herramientas disponibles en la categoría de grupos abelianos, permitiéndonos definir invariantes con valores en otras categorías (en categorías abelianas).
- 3. Las categorías derivadas surgen como herramienta técnica necesaria para generalizar la dualidad de Poincaré al contexto relativo (dualidad de Verdier).
- 4. Con el tiempo las categorías derivadas adquieren interés propio, gracias por ejemplo a la simetría especular homológica o a conexiones con la geometría birracional.

Categorías derivadas 00000000

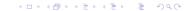
"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal." -Richard Thomas.



### Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

 Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen<sup>1</sup> espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.



#### Motivación más concreta: objetos

"Complejos de cadenas bien, grupos de homología mal."
—Richard Thomas.

- Motivación conceptual (teorema de Whitehead): los grupos de homología no determinan el tipo de homotopía de un buen<sup>1</sup> espacio topológico, pero los complejos de cadenas sí.
- Motivación práctica: los grupos de cohomología no son el dual de los grupos de homología, pero el complejo de cocadenas sí que es el dual del complejo de cadenas.



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>CW-complejo simplemente conexo.

#### Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

#### Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

 Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.



#### Motivación más concreta: morfismos

Un morfismo de complejos de cadenas se llama *casi-isomorfismo* si induce isomorfismos en homología.

- Motivación conceptual: el teorema de Whitehead sugiere que nos gustaría considerar los casi-isomorfismos como verdaderos isomorfismos.
- Motivación práctica: al final del día nos interesan los invariantes algebraicos del espacio topológico, así que nos conviene en cualquier caso identificar complejos de cadenas casi-isomorfos.

Sea Ch(Ab) la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos.

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de  $\mathbf{Ab}$  es una categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  junto con un functor  $Q \colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  tal que:

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de  $\mathbf{Ab}$  es una categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  junto con un functor  $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})\to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  tal que:

1. Si  $f: A^{\bullet} \to B^{\bullet}$  es un casi-isomorfismo, entonces Q(f) es un isomorfismo.

Sea  $\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})$  la categoría de los complejos de cadenas de grupos abelianos. La *categoría derivada* de  $\mathbf{Ab}$  es una categoría  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  junto con un functor  $Q\colon \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab})\to \mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  tal que:

- 1. Si  $f: A^{\bullet} \to B^{\bullet}$  es un casi-isomorfismo, entonces Q(f) es un isomorfismo.
- 2. Para todo functor  $F: \mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$  con la propiedad anterior existe un único functor  $G: \mathbf{D}(\mathbf{Ab}) \to \mathbf{C}$  tal que  $F = G \circ Q$ .

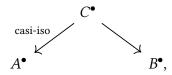
$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{Ch}(\mathbf{Ab}) & \xrightarrow{F} & \mathbf{C} \\
\downarrow & & \uparrow \\
\mathbf{D}(\mathbf{Ab}) & & \exists ! G
\end{array}$$

# Descripción explícita

• Los objetos de  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son complejos de cadenas  $A^{\bullet}$ .

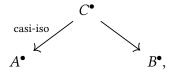
#### Descripción explícita

- Los objetos de  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son complejos de cadenas  $A^{\bullet}$ .
- Los morfismos  $A^{\bullet} \to B^{\bullet}$  en  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son clases de equivalencia de diagramas de la forma



#### Descripción explícita

- Los objetos de  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son complejos de cadenas  $A^{\bullet}$ .
- Los morfismos  $A^{\bullet} \to B^{\bullet}$  en  $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  son clases de equivalencia de diagramas de la forma



y dos diagramas son equivalentes si están dominados por un tercer diagrama de tal forma que el diagrama resultante conmute módulo homotopía.

#### Construcción (dos pasos)

$$Ch(Ab) \xrightarrow{\text{M\'odulo homotop\'ia}} K(Ab) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} D(Ab)$$

#### Construcción (dos pasos)

$$Ch(Ab) \xrightarrow{\text{M\'odulo homotop\'ia}} K(Ab) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} D(Ab)$$

- 1. El primer paso es natural y conveniente:
  - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
  - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.

#### Construcción (dos pasos)

$$Ch(Ab) \xrightarrow{\text{M\'odulo homotop\'ia}} K(Ab) \xrightarrow{\text{Invertir casi-isos}} D(Ab)$$

- 1. El primer paso es natural y conveniente:
  - Las equivalencias de homotopía son ejemplos habituales de casi-isomorfismos.
  - Trabajar módulo homotopía nos permite invertir casi-isomorfismos usando cálculo de fracciones.
- 2. El segundo paso es necesario, no todo casi-isomorfismo es una equivalencia de homotopía. Por ejemplo:

$$\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \cdots$$

#### Estructura triangulada

• **D**(**Ab**) sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y *Q* es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.

#### Estructura triangulada

- $\mathbf{D}(\mathbf{Ab})$  sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en D(Ab).

- **D**(**Ab**) sigue teniendo la propiedad de ser aditiva (y Q es aditivo), pero no llega a tener la propiedad de ser abeliana.
- Por tanto no podemos hablar de sequencias exactas en **D**(**Ab**). Pero esta categoría admite una *estructura* triangulada, que nos permite reemplazar las secuencias exactas por triángulos exactos

$$A^{\bullet} \xrightarrow{f} B^{\bullet} \to \operatorname{Cone}(f)^{\bullet} \to A^{\bullet}[1]$$

y seguir usando argumentos similares al lema de los 5 o a la secuencia exacta larga en cohomología.

1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \to Y/X$  es coexacta.

- 1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \to Y/X$  es coexacta.
- 2. Para todo  $f: X \to Y$  se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \operatorname{Cone}(f)$$
.

- 1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \to Y/X$  es coexacta.
- 2. Para todo  $f: X \to Y$  se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \operatorname{Cone}(f)$$
.

3. Para  $j: Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$  se tiene  $\text{Cone}(j) \simeq \Sigma X$ .

- 1. Si  $i: X \hookrightarrow Y$  es la inclusión de un buen subespacio, entonces la secuencia  $X \hookrightarrow Y \to Y/X$  es coexacta.
- 2. Para todo  $f: X \to Y$  se tiene una secuencia coexacta corta

$$X \to Y \to \operatorname{Cone}(f)$$
.

- 3. Para  $j: Y \hookrightarrow \text{Cone}(f)$  se tiene  $\text{Cone}(j) \simeq \Sigma X$ .
- 4. Iterando obtenemos la secuencia coexacta de Puppe:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{j} C(f) \xrightarrow{g} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma j} \Sigma C(f) \xrightarrow{\Sigma g} \Sigma^{2} X \to \cdots$$

Véase G. E. Bredon, Topology and Geometry, §VII.5.

 Un functor *F*: **Ab** → **A** que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: **D**(**Ab**) → **D**(**A**) de forma directa, no estaría bien definido.

- Un functor *F*: Ab → A que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: D(Ab) → D(A) de forma directa, no estaría bien definido.
- Si F: Ab → A es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su functor derivado derecho
   RF: D<sup>+</sup>(Ab) → D<sup>+</sup>(A), que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.

- Un functor *F*: Ab → A que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: D(Ab) → D(A) de forma directa, no estaría bien definido.
- Si F: Ab → A es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su functor derivado derecho
   RF: D<sup>+</sup>(Ab) → D<sup>+</sup>(A), que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular  $\mathbf{R}F(A^{\bullet})$  como  $F(I^{\bullet})$ , donde  $I^{\bullet}$  es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a  $A^{\bullet}$ .

- Un functor *F*: **Ab** → **A** que no sea exacto no puede inducir un functor *F*: **D**(**Ab**) → **D**(**A**) de forma directa, no estaría bien definido.
- Si F: Ab → A es exacto izquierdo, lo apropiado es considerar su functor derivado derecho
   RF: D<sup>+</sup>(Ab) → D<sup>+</sup>(A), que sí está bien definido y además preserva los triángulos exactos.
- Podemos calcular  $\mathbf{R}F(A^{\bullet})$  como  $F(I^{\bullet})$ , donde  $I^{\bullet}$  es un complejo de objetos inyectivos casi-isomorfo a  $A^{\bullet}$ .
- Si A es un grupo abeliano, podemos recuperar los functores derivados clásicos  $R^iF(A)$  como

$$R^i F(A) = H^i(\mathbf{R} F(A)).$$

# Objetivo: clasificar variedades algebraicas

• Clasificar módulo isomorfismo es difícil.



# Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo equivalencia birracional, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.

# Objetivo: clasificar variedades algebraicas

- Clasificar módulo isomorfismo es difícil.
- En vez de ello, intentamos clasificar módulo equivalencia birracional, es decir, módulo tener abiertos de Zariski densos isomorfos.
- Por ejemplo, la esfera de Riemann y el plano complejo son birracionales.

### Curvas: único representante proyectivo y liso

 Dada una curva cualquiera, existe un único representante proyectivo y liso en su clase de equivalencia birracional.

#### Superficies: demasiados posibles representantes

• Problema: blow-up produce nuevo representante distinto pero también proyectivo y liso.

1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico  $K_S$ .



- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico  $K_S$ .
- 2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?

- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico  $K_S$ .
- 2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?
  - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
  - No: *S* es un modelo minimal; FIN.

- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico  $K_S$ .
- 2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?
  - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
  - No: *S* es un modelo minimal; FIN.
- 3. Sea  $\pi: S \to X$  la contracción de C. Es dim $(X) < \dim(S)$ ?

- 1. Input: superficie proyectiva lisa S con divisor canónico  $K_S$ .
- 2. Hay alguna curva  $C \subseteq S$  tal que  $K_S \cdot C < 0$ ?
  - Sí: podemos contraerla; pasamos al siguiente paso.
  - No: *S* es un modelo minimal; FIN.
- 3. Sea  $\pi: S \to X$  la contracción de C. Es dim $(X) < \dim(S)$ ?
  - Sí:  $\pi$  es una fibración de Mori; FIN.
  - No: X es una superficie proyectiva lisa y  $\pi$  es un blow-up; repetir paso 1 con X.

Sea *X* una variedad proyectiva lisa.

• (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría  $\mathbf{Coh}(X)$  de haces coherentes sobre X.



Sea *X* una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría Coh(X) de haces coherentes sobre X.
- Coh(X) es abeliana, y definimos  $D^b(X) := D^b(Coh(X))$ .

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría Coh(X) de haces coherentes sobre X.
- $\operatorname{\mathbf{Coh}}(X)$  es abeliana, y definimos  $\operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(X) \coloneqq \operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(\operatorname{\mathbf{Coh}}(X))$ .
- Meta-lema: todo haz coherente f admite una resolución finita ε formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en D<sup>b</sup>(X).

Sea X una variedad proyectiva lisa.

- (Haces de secciones de) fibrados vectoriales sobre X no forman una categoría abeliana, necesitamos considerar la categoría Coh(X) de haces coherentes sobre X.
- $\operatorname{\mathbf{Coh}}(X)$  es abeliana, y definimos  $\operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(X) \coloneqq \operatorname{\mathbf{D}}^{\operatorname{b}}(\operatorname{\mathbf{Coh}}(X)).$
- Meta-lema: todo haz coherente 
   £ admite una resolución finita 
   £ formada por fibrados vectoriales, así que la mayoría de isomorfismos canónicos del álgebra lineal siguen siendo válidos en D<sup>b</sup>(X).
- $\mathbf{D}^{b}(X)$  detecta conexión, dimensión y anillo canónico.

# Descomposiciones semiortogonales

D<sup>b</sup>(X) = \langle A, B \rangle significa que no hay morfismos no nulos de B a A y que la subcategoría triangulada más pequeña de D<sup>b</sup>(X) que contiene a A y a B es D<sup>b</sup>(X).

# Descomposiciones semiortogonales

- D<sup>b</sup>(X) = \langle A, B \rangle significa que no hay morfismos no nulos de B a A y que la subcategoría triangulada más pequeña de D<sup>b</sup>(X) que contiene a A y a B es D<sup>b</sup>(X).
- Idea: los morfismos del MMP se reflejan en forma de descomposiciones semiortogonales de  $\mathbf{D}^{b}(X)$ .

La fibración de Mori  $\pi\colon \mathbb{P}^2 \to \{*\}$  induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

La fibración de Mori  $\pi\colon \mathbb{P}^2 \to \{*\}$  induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{P}^2) = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2) \rangle.$$

La idea de la semiortogonalidad es

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{D}^{b}(\mathbb{P}^{2})}(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}[i]) = \operatorname{Ext}^{i}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2))$$

$$= H^{i}(\mathbf{R} \operatorname{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(-2)))$$

$$= H^{i}(\mathbf{R}\Gamma(\mathbb{P}^{2}, \mathcal{O}(-2)))$$

$$= H^{i}(\mathbb{P}^{2}, \mathcal{O}(-2)) = 0.$$

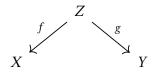
# Ejemplo: blow-up

El blow-up  $\pi\colon \tilde X\to X$  de una superficie proyectiva lisa X en un punto  $p\in X$  induce una descomposición

$$\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(\tilde{X}) = \langle \mathcal{O}_{E}(-E), \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) \rangle.$$

#### Hipótesis DK

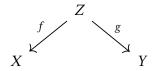
**Conjetura:** Sean X e Y dos variedades proyectivas lisas K-equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa Z y morfismos birracionales



tales que  $f^*K_X \sim g^*K_Y$ .

#### Hipótesis DK

**Conjetura:** Sean X e Y dos variedades proyectivas lisas K-equivalentes, es decir, existe una variedad proyectiva lisa Z y morfismos birracionales



tales que  $f^*K_X \sim g^*K_Y$ . Entonces X e Y son D-equivalentes, es decir, existe una equivalencia triangulada  $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X) \cong \mathbf{D}^{\mathrm{b}}(Y)$ .

# Descomposiciones en superficies

**Pregunta:** Sea X una superficie proyectiva lisa minimal con  $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X)) \neq 0$ . Es  $\mathbf{D}^{\mathrm{b}}(X)$  indecomponible?

#### Gracias por vuestra atención!



S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. 2003. DOI: 10.1007/978-3-662-12492-5.



D. Huybrechts. Fourier-Mukai transforms in algebraic geometry. 2006. DOI: 10.1093/acprof:oso/9780199296866.001.0001.



Y. Kawamata. "Birational geometry and derived categories". In: 2017. URL: https://arxiv.org/abs/1710.07370.



K. Matsuki. *Introduction to the Mori program.* 2002. DOI: 10.1007/978-1-4757-5602-9.

