$\xi \quad \xi$

$(n+1)! = (n+1) \cdot n!$

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} y^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi), \quad x < \xi < x+h \quad (1.1)$$

ERRO DE APROX.

OBS: O FATORIAL DE n+1 É IGUAL A n+1 VEZES O FATORIAL DE n PORQUE, AO EXPANDIR A MULTIPLICAÇÃO, O n+1 ENTRA COMO O PRIMEIRO FATOR SEGUIDO POR TODOS OS FATORES DE n!

$$P_n(h) = y(x) + y'(x) \cdot h + \frac{y''(x)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(x)}{n!} h^{(n)}$$

→ Se $n = 1$ em 1.1

$$y(x+h) = \underset{0! = 1}{y(x)} + \frac{\overset{h^0 = 1}{h}}{1!} y'(x) + \text{ERRO} \qquad x < \xi < h$$

$$y(x+h) = \frac{y(x) \cdot 1}{1} + \frac{h^1 \cdot y'(x)}{1} + \frac{h^{1+1}}{(1+1)!} \cdot y^{(1+1)}(\xi)$$

$$* \; y(x+h) = y(x) + h \cdot y'(x) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi)$$

ISOLAR $y'(x)$, PARA OBTER UMA APROX. PARA A DERIVADA CONHECIDA COMO FÓRMULA PROGRESSIVA

$$y(x+h) - y(x) - \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi) = h \cdot y'(x)$$

$$\frac{2y(x+h) - 2y(x) - h^2 \cdot y''(\xi)}{2 \cdot h} = y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{h y''(\xi)}{2}$$

ERRO

D S T Q Q S S
D L M M J V S

NOTAÇÃO!

UTILIZAREMOS → $\Delta y(x) = y(x+h) - y(x)$ ← VARIAÇÃO

LOGO

ERRO $= \frac{h}{2} y''(\xi)$

$$y'(x) = \frac{\Delta y(x)}{h} - \text{ERRO}$$

SE SUBSTITUIRMOS h POR −h EM (1.1)
AINDA COM n=1 OBTEREMOS A FÓRMULA REGRESSIVA.

$$y(x+h) = y(x) + h\,y'(x) + \frac{h^2}{2}.y''(\xi)$$

$$y(x+h) = y(x) - h\,y'(x) - \frac{h^2}{2}.y''(\xi)$$

→ QUEREMOS A APROXIMAÇÃO PARA $y'(x)$
POIS QUANDO DERIVAMOS UMA FUNÇÃO $f(x)$, ESTAMOS BUSCANDO SUA TAXA DE VARIAÇÃO INSTANTÂNEA, DEFINIDA COMO O LIMITE DO QUOCIENTE INCREMENTAL.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

MAS NA PRÁTICA, MUITAS VEZES NÃO TEMOS ACESSO AO LIMITE, APENAS A VALORES DISCRETOS DE $f(x)$.
ENTÃO USAMOS APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS COMO A DIFERENÇA PROGRESSIVA E A REGRESSIVA.

Jandaia

tag tag

D S T Q Q S S
D L M M J V S

· PERGUNTAS:

POR QUE ISOLAMOS A PRIMEIRA DERIVADA?

POR QUE O ERRO É CALCULADO ENTRE x E $x+h$? $(x < \xi < x+h)$

NÃO ENTENDI COMO O INTERVALO, MÁX E MÍN JUSTIFICAM A JUNÇÃO DE ξ_1 E ξ_2 NA DIFERENÇA CENTRADA.

↳ GUIDORIZZI VOL 1 TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO.

A SEGUNDA DERIVADA $f''(x)$, MEDE A CURVATURA DA FUNÇÃO.

$$y(x+h) - y(x) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi) = -h y'(x)$$

$$y'(x) = -\frac{y(x+h)}{h} + \frac{y(x)}{h} - \frac{h}{2} \cdot y''(\xi) \quad \text{ERRO}$$

$$y'(x) = \frac{-y(x+h) + y(x)}{h} - \frac{h y''(\xi)}{2}$$

NOTAÇÃO: $\nabla y(x) = -y(x+h) + y(x)$ (NABLA OU OP. GRADIENTE)

$$y'(x) = \frac{\nabla y(x)}{h} - \frac{h y''(\xi)}{2}$$ É DITA DIFERENÇA REGRESSIVA

Jandaia

tag tag

FAZENDO $n=2$ EM (1.1), E REESCREVENDO (1.1) PARA h E $-h$, RESPECTIVAMENTE

$$y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_1) \quad (*)$$

E $$y(x-h) = y(x) - hy'(x) + \frac{h^2}{2!}y''(x) - \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_2) \quad (**)$$

OS ÍNDICES ÍMPARES SÃO NEGATIVOS QUANDO h É NEGATIVO.

SUBTRAINDO $(**)$ DE $(*)$ OBTEMOS A FÓRMULA CENTRADA OU FÓRMULA DE DIFERENÇAS CENTRAIS.

$$y(x+h) - y(x-h) = \cancel{y(x)} + hy'(x) + \cancel{\frac{h^2}{2!}y''(x)} + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_1)$$
$$- \cancel{y(x)} + hy'(x) - \cancel{\frac{h^2}{2!}y''(x)} + \frac{h^3}{3!}y'''(\xi_2)$$

$$y(x+h) - y(x-h) = +2hy'(x) + 2\frac{h^3}{3!}y'''(\xi)$$

QUEREMOS ISOLAR $y'(x)$ $\quad \frac{2h^3}{2h} = h^2$

$$\rightarrow y(x-h) - y(x-h) - 2\frac{h^3}{6}y'''(\xi) = 2hy'(x)$$

$$\frac{y(x-h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^3}{6.h}y'''(\xi) = y'(x)$$

$$y'(x) = \frac{y(x-h) - y(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{3!}y'''(\xi) \quad (1.2)$$

ONDE $\xi \in (x-h, x+h)$ E FOI UTILIZADO O TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO VÁLIDO PARA FUNÇÕES CONTÍNUAS:

$$\frac{1}{2}\left(y'''(\xi_1) + y'''(\xi_2)\right) = y'''(\xi)$$

PARA ALGUM $\xi \in [\min\{\xi_1, \xi_2\}, \max\{\xi_1, \xi_2\}]$

A NOTAÇÃO UTILIZADA PARA DENOTAR A DIFERENÇA CENTRAL É $\delta_h y(x)$ E A EQUAÇÃO (1.2) NOS FORNECE O ERRO DESSA FÓRMULA, OU SEJA:

$$y'(x) = \frac{\delta_h y(x)}{2h} - \frac{h^2}{3!} y'''(\xi)$$

D S T Q Q S S
D L M M J V S

ERRO E ORDEM DE APROXIMAÇÃO DE UMA FÓRMULA DE DIFERENÇA

$$y^{(q)}(x) = F(x,h) + \mathcal{E}(x,h)$$

POR QUE FAZENDO $n=3$ OBTEMOS A FÓRMULA DE ORDEM 2? ~~SE LINEAR~~
SE $n=x$ A ORDEM É $x-1$?

ACREDITO QUE PORQUE QUEREMOS ISOLAR A DERIVADA DE ORDEM 2 POR EXEMPLO, SE $n=2$, $y''(x)$, SERÁ ZERADA, POR ISSO SE QUEREMOS A DERIVADA DE ORDEM 2, FAZEMOS $n=3$, SENDO ASSIM $y'''(x)$ E NÃO $y''(x)$, FICANDO AINDA COM UM ERRO $n+1=4$.

A ORDEM DO E NÃO É A MESMA DA DERIVADA, DEPENDE DA FÓRMULA
EX: SE ORDEM 4, $n=5$ E ERRO $= \dfrac{y^{4}(x)}{6!}$ $(n+1)!$

→ QUANTO MAIOR A ORDEM, MELHOR A APROXIMAÇÃO?

FOCAR EM REGRESSIVA, PROGRESSIVA E CENTRADA

* OPERADOR MÉDIA APENAS DIVIDE POR 2, QUAL A IMPORTÂNCIA DE SE DEFINIR μ COMO ABREVIAÇÃO DA DIVISÃO POR 2, É MUITO UTILIZADO!?

$h = \Delta$ → INDICA A VARIAÇÃO QUE OCORRE EM CADA APROXIMAÇÃO E O SEU ERRO DE CÁLCULO ENVOLVIDO? OBS: 1.3.4

PROBLEMAS DE ALTA ORDEM, SEMPRE NECESSITAM DE REFINAMENTO DO PASSO?

SINGOLARIDA → VELOCIDADE TENDE A ZERO
PRESSÃO E AS DERIVADAS DA
VELOCIDADE TENDEM
'A ∞

ADIMENSIONALIZAÇÃO.

Solução de Similaridade

D S T Q Q S S
D L M M J V S

↳ PROBLEMA UNIDIMENSIONAL

SEJA x_0 UM NÚMERO REAL QUALQUER, E H UM NÚMERO POSITIVO. DEFINIMOS MALHA DE PASSO H ASSOCIADA A x_0 COMO O CONJUNTO DE PONTOS

$$x_i = x_0 \pm iH \ , \quad i = 1, 2, \dots N.$$

NOS PONTOS DESSA MALHA SERÃO CALCULADAS APROXIMAÇÕES PARA UMA FUNÇÃO $y(x)$ E SUAS DERIVADAS. A FERRAMENTA MATEMÁTICA BÁSICA NO CÁLCULO DE APROXIMAÇÕES PARA AS DERIVADAS É A SÉRIE DE TAYLOR QUE RELACIONA VALORES DA FUNÇÃO E SUAS DERIVADAS, NUM PONTO x, COM VALORES DESSA MESMA FUNÇÃO NUMA VIZINHANÇA DE x, OU SEJA, COM $y(x+H)$. SE $y(x)$ TEM DERIVADAS ATÉ A ORDEM $N+1$ EM x, PODEMOS ESCREVER:

$$y(x+H) = y(x) + Hy'(x) + \frac{H^2}{2!}y''(x) + \dots$$

$$\dots + \frac{H^N}{N!}y^{(N)}(x) + \frac{H^{N+1}}{(N+1)!}y^{(N+1)}(\xi), \ x < \xi < x+H$$

$$\rightarrow y(x+H) = \frac{y(x) \cdot H^0}{0!} + \frac{y'(x) \cdot H^1}{1!} + \frac{y''(x) \cdot H^2}{2!} + \dots$$

Jandaia

tag tag