

2ª Apresentação - Estudo do livro: Cálculo Numérico de Neide Bertoldi Franco Métodos Iterativos

Pedro Henrique Visentini Pantarotto
Orientador: Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

FCT-Unesp
ICSB - Iniciação Científica Sem Bolsa



Métodos Iterativos

Capítulo 5: Introdução

- Matriz Esparsa
- Autocorreção de Erros

Classificação do Método Iterativo

- Estacionário
- S-Cíclico

Definição 5.1

- Dada uma sequência de vetores $x^{(k)} \in E$ e uma norma sobre E , onde E é um espaço vetorial, dizemos que a sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para $x \in E$ se $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$, quando $k \rightarrow \infty$.

Conceitos de Linearidade

Termo	O que é	Linearidade?
Equação linear	1 equação com variáveis de 1 ^a grau	Sim
Sistema linear	Várias equações lineares com mesmas variáveis	Sim
Equação/sistema não linear	Contém termos não lineares (quadrado, seno, etc.)	Não

Autovalores e Autovetores

Termo	Definição
Autovalor λ	Escalar tal que $Av = \lambda v$ para algum vetor não nulo v
Autovetor v	Vetor não nulo que satisfaz $Av = \lambda v$
Equação característica	$\det(A - \lambda I) = 0$

Símbolo	Significado neste contexto
x^k	Aproximação na iteração k
x^*	Solução exata do sistema
e^k	Erro na iteração k , ou seja, $x^k - x^*$
e^0	Erro inicial, isto é, $x^0 - x^*$
e	Número de Euler $\approx 2,718$ (outro contexto)

Norma em um Espaço Vetorial E

Uma **norma** é uma função que mede o “tamanho” ou “comprimento” de um vetor:

$$\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Ela deve satisfazer, para todo $x, y \in E$ e escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades:

- **Positividade:** $\|x\| \geq 0$, e $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- **Homogeneidade:** $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- **Desigualdade triangular:** $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemplo: Norma euclidiana em \mathbb{R}^n :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Definição de um K -Espaço Vetorial

Seja K um corpo (campo) e E um conjunto não vazio. Dizemos que E é um **K -espaço vetorial** se:

- Há uma operação de **adição** entre vetores:

$$+ : E \times E \rightarrow x + y \in E$$

satisfazendo as propriedades:

(A1) **Comutatividade**: $u + v = v + u$, $\forall u, v \in E$

(A2) **Associatividade**: $(u + v) + w = u + (v + w)$, $\forall u, v, w \in E$

(A3) **Elemento neutro (Vetor Nulo)**: Existe $0 \in E$ tal que

$$u + 0 = u, \quad \forall u \in E$$

(A4) **Elemento inverso**: Para cada $u \in E$, existe $-u \in E$ tal que

$$u + (-u) = 0$$

Definição de um K -Espaço Vetorial

- Há uma operação de **multiplicação por escalar**:

$$\cdot : K \times E \rightarrow x \times y \in E$$

satisfazendo as propriedades:

(M1) Compatibilidade com multiplicação em K :

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in E$$

(M2) Elemento neutro: $1 \cdot u = u$, $\forall u \in E$, onde $1 \in K$ é o elemento neutro multiplicativo

(M3) Distributividade em relação à adição em E :

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in K, \forall u, v \in E$$

(M4) Distributividade em relação à adição em K :

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in E$$

Qualquer conjunto genérico que satisfaça as 8 condições especificadas acima será um espaço vetorial.

Definição 1.1

- Seja um K -espaço vetorial. Sejam v_1, v_2, \dots, v_n, n vetores de E . Dizemos que o vetor $v \in E$ é **combinação linear**, de v_1, v_2, \dots, v_n se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ tais que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n =$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Os escalares $\alpha_i, i = 1, \dots, n$ são os **coeficientes** da combinação linear.

Definição 1.2

Seja E um K -espaço vetorial. Dizemos que um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq E$ é:

- **Linearmente dependente** se existem escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$, **nem todos nulos**, tais que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

- **Linearmente independente** se a igualdade acima só ocorre quando:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Observação: Dizer que E é um K -espaço vetorial significa que os vetores de E podem ser somados entre si e multiplicados por escalares do corpo K , obedecendo às propriedades da estrutura vetorial.

Exemplos de Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 1 — Dependência em \mathbb{R}^2 :**

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Temos $v_2 = 2v_1$ os vetores são **linearmente dependentes**.

- **Exemplo 2 — Independência em \mathbb{R}^2 :**

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nenhum é múltiplo do outro os vetores são **linearmente independentes**.

- **Exemplo 3 — Dependência em \mathbb{R}^3 :**

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

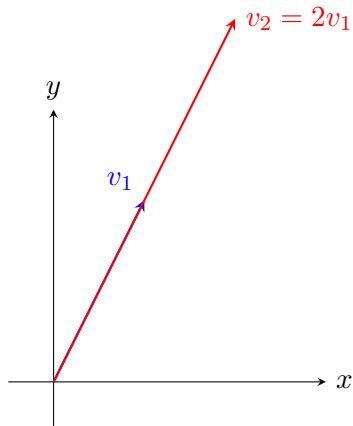
Todos estão na mesma direção **dependentes**.

- **Exemplo 4 — Independência em \mathbb{R}^3 :**

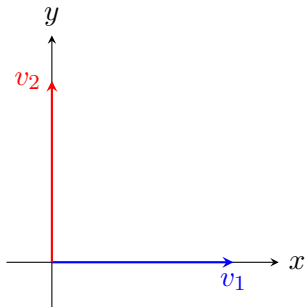
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base canônica \Rightarrow ***independentes***.

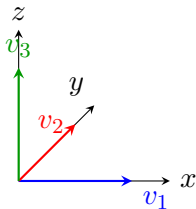
Dependentes em \mathbb{R}^2



Independentes em \mathbb{R}^2



Independentes em \mathbb{R}^3



Definição 1.3

Um K -espaço vetorial tem **dimensão** n se:

- a) Existem n vetores linearmente independentes, ou seja, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros. Isso significa que eles são "essenciais" para gerar o espaço.
- b) Qualquer conjunto com $n + 1$ vetores é sempre linearmente dependente, ou seja, pelo menos um vetor desse conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Esses n vetores linearmente independentes **formam uma base do espaço**, pois geram todo o espaço vetorial sem redundância.

Definição 1.4 — Bases e Combinações Lineares

- **Todo espaço vetorial tem mais de uma base:**

Uma base não é única! Existem infinitas bases possíveis para um mesmo espaço.

Ex: em \mathbb{R}^2 , tanto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ quanto $\{(1, 1), (1, -1)\}$ são bases válidas.

- **Qualquer vetor do espaço pode ser representado como combinação linear dos vetores da base:**

Se $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é uma base do espaço E , então qualquer vetor $x \in E$ pode ser escrito como:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

para alguns escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$.

Seja $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de um espaço vetorial E :

- Qualquer vetor $x \in E$ pode ser escrito como:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$$

onde $\alpha_i \in K$ são escalares.

- Todas essas combinações formam o **subconjunto gerado** por \mathcal{B} , que é o próprio espaço E .
- Esse conjunto é:
 - Fechado sob adição e multiplicação escalar;
 - Contém o vetor nulo e o oposto de qualquer vetor;
 - Portanto, é um **subespaço vetorial** — neste caso, o próprio espaço.

Exemplo de base em \mathbb{R}^3

Considere os vetores em \mathbb{R}^3 :

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

- Esses três vetores são linearmente independentes.
- Qualquer vetor em \mathbb{R}^3 pode ser escrito como combinação linear deles.

Portanto, $\{v_1, v_2, v_3\}$ formam uma **base** de \mathbb{R}^3 , e a dimensão desse espaço é 3.

Quantos vetores formam uma base?

(Pergunta) Bastam 2 vetores linearmente independentes para gerar uma base?

Para um conjunto de vetores formar uma **base** de um espaço vetorial, é necessário que:

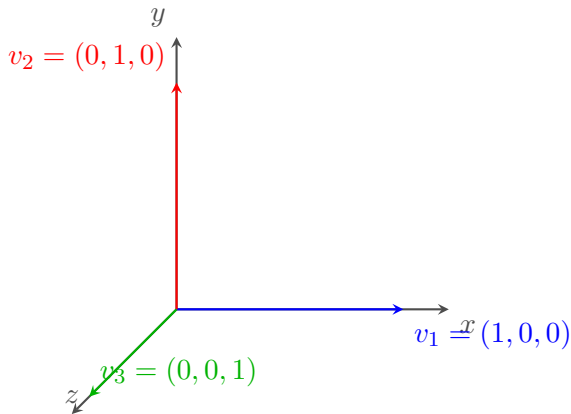
- sejam **linearmente independentes**;
- o número de vetores seja igual à **dimensão do espaço**.

Exemplos:

Espaço	2 vetores independentes formam base?	Dimensão
\mathbb{R}^1	Não (precisa de 1)	1
\mathbb{R}^2	Sim	2
\mathbb{R}^3	Não (precisa de 3)	3
\mathbb{R}^n	Não (precisa de n)	n

Conclusão: dois vetores linearmente independentes só formam base se o espaço for bidimensional.

Base em \mathbb{R}^3 – Visualização



Esses vetores são linearmente independentes e geram todo o espaço \mathbb{R}^3 , formando uma base.

Exemplo — Dimensão de \mathbb{R}^2

Considere o espaço vetorial \mathbb{R}^2 :

- a) Os vetores $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 1)$ são linearmente independentes. Logo, \mathbb{R}^2 tem dimensão 2.
- b) Se adicionarmos um terceiro vetor, como $v_3 = (2, 3)$, então o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ será linearmente dependente. Pois v_3 pode ser escrito como combinação linear de v_1 e v_2 :

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2.$$

Definição 5.1 — Convergência em Espaços Vetoriais

- Seja E um espaço vetorial com uma norma $\|\cdot\|$.
- Uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\} \subset E$ converge para $x \in E$ se:

$$\|x^{(k)} - x\| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

- **Interpretação em métodos iterativos:**

- Em um sistema linear $Ax = b$, buscamos a solução x^* .
- Os métodos iterativos geram aproximações sucessivas $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- Dizemos que o método **converge** se essas aproximações tendem para a solução exata:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \rightarrow 0.$$

- Isso nos leva a perguntar: *em que condições essa convergência ocorre?*

→ Esta questão será respondida pelo Teorema 5.1, a seguir.

Teorema 5.1 — Convergência de Métodos Iterativos

Considere o sistema linear $Ax = b$ e um método iterativo do tipo:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

onde B é a **matriz de iteração** e c é um vetor constante.

Teorema 5.1: A sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para a solução exata x^* , qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)}$, **se, e somente se,**

$$\rho(B) < 1,$$

onde $\rho(B)$ é o **raio espectral** de B , ou seja, o maior valor absoluto dos autovalores de B .

Consequência: Se $\rho(B) \geq 1$, o método não converge em geral.

Intuição: Por que $\rho(B) < 1$ garante convergência?

- Em cada iteração de um método iterativo:

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)} \quad \Rightarrow \quad e^{(k)} = B^k e^{(0)}.$$

- Assim, a norma do erro satisfaz:

$$\|e^{(k)}\| \leq \|B^k\| \cdot \|e^{(0)}\|.$$

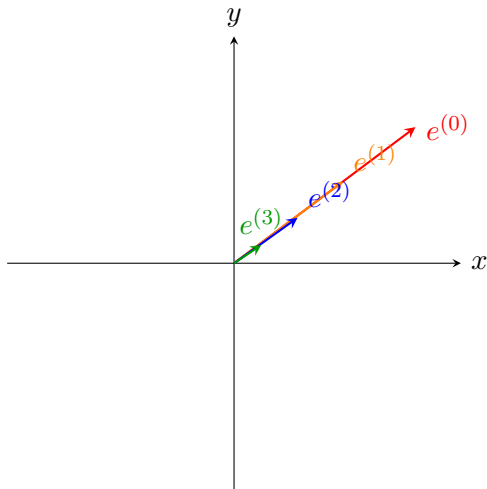
- Se $\rho(B) < 1$, então $\|B^k\| \rightarrow 0$ à medida que $k \rightarrow \infty$.
- Consequentemente, $\|e^{(k)}\| \rightarrow 0$, ou seja:

$$x^{(k)} \rightarrow x^*.$$

- Geometricamente: o erro é "encolhido" a cada iteração.

→ A seguir: visualização gráfica.

Visualização: Convergência do Erro



A matriz B vai "encolhendo" o erro: $B^k e^{(0)} \rightarrow 0$.

- Dado um sistema linear $Ax = b$, podemos aplicar um método iterativo da forma:

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$$

com $x^{(0)}$ escolhido como aproximação inicial.

- A sequência $\{x^{(k)}\}$ gera aproximações sucessivas da solução exata x^* , refinando a solução.

- O processo para quando a aproximação é **numericamente satisfatória**, ou seja, o erro relativo é pequeno o suficiente:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \varepsilon$$

onde $\varepsilon > 0$ é uma tolerância previamente fixada.

- A norma usada pode ser, por exemplo, a norma euclidiana:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- Se o teste for satisfeito, considera-se que $x^{(k)} \approx x^*$ com a precisão desejada.

Erro Relativo em Métodos Iterativos

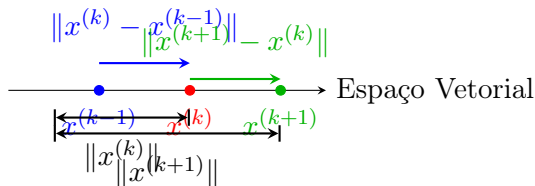
- O erro relativo pode ser calculado de duas formas comuns:

Forma 1:
$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|}$$

Forma 2:
$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|}$$

- Ambas medem a mudança relativa entre iterações consecutivas, porém:
 - **Forma 1** normaliza pela norma da aproximação atual $x^{(k)}$;
 - **Forma 2** normaliza pela norma da próxima aproximação $x^{(k+1)}$.
- A escolha depende do momento em que o critério de parada é avaliado:
 - Forma 2 é usada após calcular $x^{(k+1)}$, refletindo a precisão da última aproximação;
 - Forma 1 pode ser usada para comparar aproximações já calculadas.
- Quando a sequência converge, $x^{(k)} \approx x^{(k+1)}$, e as duas fórmulas produzem valores muito próximos.
- Portanto, nenhuma delas está errada — é questão de convenção e contexto do método.

Ilustração do Erro Relativo



- **Erro relativo forma 1:** distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$, normalizada por $\|x^{(k)}\|$.
- **Erro relativo forma 2:** distância entre $x^{(k+1)}$ e $x^{(k)}$, normalizada por $\|x^{(k+1)}\|$.
- Ambas medem o tamanho relativo da mudança entre iterações consecutivas.

- **Simplicidade Conceitual e Computacional:**

- O método é direto e fácil de implementar computacionalmente.
- Não exige resolução de sistemas internos ou substituições sucessivas.

- **Atualizações Independentes:**

- Cada variável de $x^{(k+1)}$ é calculada apenas com base nos valores de $x^{(k)}$.
- Isso permite fácil paralelização do método.

- **Aplicabilidade em Sistemas Esparsos:**

- Muito útil quando a matriz A é esparsa (muitos zeros).
- Evita armazenamento e operações desnecessárias.

- **Importância Didática:**

- É o primeiro contato com métodos iterativos em cursos de álgebra linear e métodos numéricos.
- Serve de introdução aos conceitos de erro, convergência e normas.

- **Base para Métodos Mais Avançados:**

- Ajuda a entender variações como Gauss-Seidel e SOR.
- A estrutura $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$ é comum a muitos métodos.

- **Condições de Convergência:**

- A convergência depende da matriz de iteração B .
- Uma condição suficiente é que $\rho(B) < 1$ (raio espectral).

Método de Jacobi-Richardson: Forma Iterativa

Sistema linear: $Ax = b$

- A matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é decomposta como:

$$A = D + L + U$$

onde:

- D : parte diagonal de A
 - L : parte estritamente inferior
 - U : parte estritamente superior
- A fórmula iterativa é:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(k)})$$

- A cada iteração, calcula-se a nova aproximação $x^{(k+1)}$ usando apenas os valores anteriores $x^{(k)}$.
- O processo continua até que:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

Exemplo Numérico: Método de Jacobi

Sistema linear:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(7 - x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 - 2x_1^{(k)})$$

Exemplo Numérico: Método de Jacobi

Fórmulas iterativas:

Iteração 0 (inicial): $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Iteração 1:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(7 - 0) = 1.75 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(8 - 0) = 2.67 \end{aligned} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 2.67 \end{bmatrix}$$

Iteração 2:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(7 - 2.67) \approx 1.08 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1.75) = 1.5 \end{aligned} \Rightarrow x^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 1.08 \\ 1.50 \end{bmatrix}$$

Continue até que o erro relativo seja menor que ε .

Teorema 5.1: Convergência de Métodos Iterativos

Considere um sistema linear $Ax = b$ resolvido iterativamente por:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

Teorema 5.1: A sequência $\{x^{(k)}\}$ converge para a solução x^* para qualquer $x^{(0)}$ se, e somente se,

$$\rho(B) < 1$$

onde $\rho(B)$ é o **raio espectral** de B , isto é, o maior valor absoluto entre os autovalores de B .

Critério de Parada (Erro Relativo):

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

- ε : precisão desejada (ex: 10^{-4})
- O teste avalia se o método convergiu numericamente.

Iterações:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,67 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 1,08 \\ 1,50 \end{bmatrix}$$

Erro absoluto:

$$x^{(2)} - x^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 1,08 - 1,75 \\ 1,50 - 2,67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,67 \\ -1,17 \end{bmatrix} \Rightarrow \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \approx \sqrt{(-0,67)^2 + (-1,17)^2}$$

Norma de $x^{(2)}$:

$$\|x^{(2)}\| \approx \sqrt{(1,08)^2 + (1,50)^2} \approx \sqrt{1,17 + 2,25} \approx \sqrt{3,42} \approx 1,85$$

Erro relativo:

$$\frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{\|x^{(2)}\|} \approx \frac{1,34}{1,85} \approx 0,724$$

Conclusão: o erro ainda é alto, então continuamos iterando.

Exemplo Prático: Iteração 0

Sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$

Iteração 0 (inicial):

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iteração 1:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(7 - 0) = 1,75 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(8 - 0) = 2,67 \end{aligned} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,67 \end{bmatrix}$$

Erro absoluto:

$$e^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,67 \end{bmatrix} \quad \|e^{(1)}\| = \sqrt{1,75^2 + 2,67^2} \approx 3,18$$

Iteração 2:

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(7 - 2,67) \approx 1,08 \\x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1,75) = 1,5\end{aligned} \Rightarrow x^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 1,08 \\ 1,50 \end{bmatrix}$$

Erro absoluto:

$$e^{(2)} = x^{(2)} - x^{(1)} \approx \begin{bmatrix} -0,67 \\ -1,17 \end{bmatrix} \quad \|e^{(2)}\| \approx \sqrt{(-0,67)^2 + (-1,17)^2} \approx 1,34$$

Erro Relativo na Iteração 2

Erro relativo:

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{\|x^{(2)}\|} \approx \frac{1,34}{\sqrt{1,08^2 + 1,50^2}} \approx \frac{1,34}{1,84} \approx 0,73$$

Interpretação: A aproximação ainda está longe da solução. O erro deve ser comparado com uma tolerância ε para decidir se deve parar.

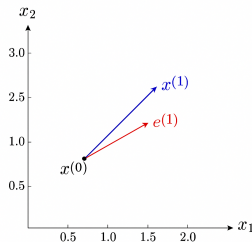


Figura 1: Gráfico 1

Critério de Convergência - Linhas

- Seja $B = (b_{ij})$ a matriz de iteração de um método iterativo.
- O critério de convergência por linhas diz que:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$$

- Ou seja, para cada linha da matriz, a soma dos valores absolutos dos elementos deve ser menor que 1.
- Intuitivamente, isso significa que o efeito combinado de todas as variáveis na atualização do vetor aproximações diminui a cada iteração, garantindo que a sequência converja.
- Esse critério é simples de verificar e útil para garantir a estabilidade do método.

Critério de Convergência - Colunas

- Para a mesma matriz $B = (b_{ij})$, o critério por colunas é dado por:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1$$

- Isso significa que para cada coluna, a soma dos valores absolutos dos elementos deve ser menor que 1.
- Interpretando, cada variável no sistema não pode exercer influência excessiva sobre as variáveis atualizadas na próxima iteração.
- Assim, o processo iterativo é controlado e garante convergência.
- Esse critério é complementar ao critério por linhas e pode ser usado em análises específicas.