

# 2<sup>a</sup> Apresentação - Estudo do livro: Cálculo Numérico de Neide Bertoldi Franco

## Métodos Iterativos

Pedro Henrique Visentini Pantarotto  
Orientador: Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

FCT-Unesp  
ICSB - Iniciação Científica Sem Bolsa



# Capítulo 5

## Métodos Iterativos

# Capítulo 5: Introdução

- Matriz Esparsa
- Autocorreção de Erros

# Classificação do Método Iterativo

- Estacionário
- S-Cíclico

## Definição 5.1

- Dada uma sequência de vetores  $x^{(k)} \in E$  e uma norma sobre  $E$ , onde  $E$  é um espaço vetorial, dizemos que a sequência  $\{x^{(k)}\}$  converge para  $x \in E$  se  $\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0$ , quando  $k \rightarrow \infty$ .

# Conceitos de Linearidade

Termo	O que é	Linearidade?
<b>Equação linear</b>	1 equação com variáveis de 1 <sup>a</sup> grau	Sim
<b>Sistema linear</b>	Várias equações lineares com mesmas variáveis	Sim
<b>Equação/sistema não linear</b>	Contém termos não lineares (quadrado, seno, etc.)	Não

# Autovalores e Autovetores

Termo	Definição
<b>Autovalor <math>\lambda</math></b>	Escalar tal que $Av = \lambda v$ para algum vetor não nulo $v$
<b>Autovetor <math>v</math></b>	Vetor não nulo que satisfaz $Av = \lambda v$
<b>Equação característica</b>	$\det(A - \lambda I) = 0$

# Símbolos em Métodos Iterativos

Símbolo	Significado neste contexto
$x^k$	Aproximação na iteração $k$
$x^*$	Solução exata do sistema
$e^k$	Erro na iteração $k$ , ou seja, $x^k - x^*$
$e^0$	Erro inicial, isto é, $x^0 - x^*$
$e$	Número de Euler $\approx 2,718$ (outro contexto)

# Norma em um Espaço Vetorial $E$

Uma **norma** é uma função que mede o “tamanho” ou “comprimento” de um vetor:

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

Ela deve satisfazer, para todo  $x, y \in E$  e escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , as seguintes propriedades:

- **Positividade:**  $\|x\| \geq 0$ , e  $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- **Homogeneidade:**  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- **Desigualdade triangular:**  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

**Exemplo:** Norma euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

# Definição de um $K$ -Espaço Vetorial

Seja  $K$  um corpo (campo) e  $E$  um conjunto não vazio. Dizemos que  $E$  é um  **$K$ -espaço vetorial** se:

- Há uma operação de **adição** entre vetores:

$$+ : E \times E \rightarrow x + y \in E$$

satisfazendo as propriedades:

(A1) Comutatividade:  $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in E$

(A2) Associatividade:  $(u + v) + w = u + (v + w), \quad \forall u, v, w \in E$

(A3) Elemento neutro(Vetor Nulo): Existe  $0 \in E$  tal que

$$u + 0 = u, \quad \forall u \in E$$

(A4) Elemento inverso: Para cada  $u \in E$ , existe  $-u \in E$  tal que

$$u + (-u) = 0$$

# Definição de um $K$ -Espaço Vetorial

- Há uma operação de **multiplicação por escalar**:

$$\cdot : K \times E \rightarrow x \times y \in E$$

satisfazendo as propriedades:

(M1) Compatibilidade com multiplicação em  $K$ :

$$\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in E$$

(M2) Elemento neutro:  $1 \cdot u = u, \quad \forall u \in E$ , onde  $1 \in K$  é o elemento neutro multiplicativo

(M3) Distributividade em relação à adição em  $E$ :

$$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v, \quad \forall \alpha \in K, \forall u, v \in E$$

(M4) Distributividade em relação à adição em  $K$ :

$$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall u \in E$$

Qualquer conjunto genérico que satisfaça as 8 condições especificadas acima será um espaço vetorial.

## Definição 1.1

- Seja um K-espaço vetorial. Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n, n$  vetores de  $E$ . Dizemos que o vetor  $v \in E$  é **combinação linear**, de  $v_1, v_2, \dots, v_n$  se existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$  tais que:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n =$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

Os escalares  $\alpha_i, i = 0, 1, \dots, n$  são os **coeficientes** da combinação linear.

## Definição 1.2

Seja  $E$  um  $K$ -espaço vetorial. Dizemos que um conjunto de vetores  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq E$  é:

- **Linearmente dependente** se existem escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ , **nem todos nulos**, tais que:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$$

- **Linearmente independente** se a igualdade acima só ocorre quando:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

**Observação:** Dizer que  $E$  é um  $K$ -espaço vetorial significa que os vetores de  $E$  podem ser somados entre si e multiplicados por escalares do corpo  $K$ , obedecendo às propriedades da estrutura vetorial.

# Exemplos de Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 1 — Dependência em  $\mathbb{R}^2$ :**

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Temos  $v_2 = 2v_1$  os vetores são **linearmente dependentes**.

- **Exemplo 2 — Independência em  $\mathbb{R}^2$ :**

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nenhum é múltiplo do outro os vetores são **linearmente independentes**.

# Exemplos de Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 3 — Dependência em  $\mathbb{R}^3$ :**

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

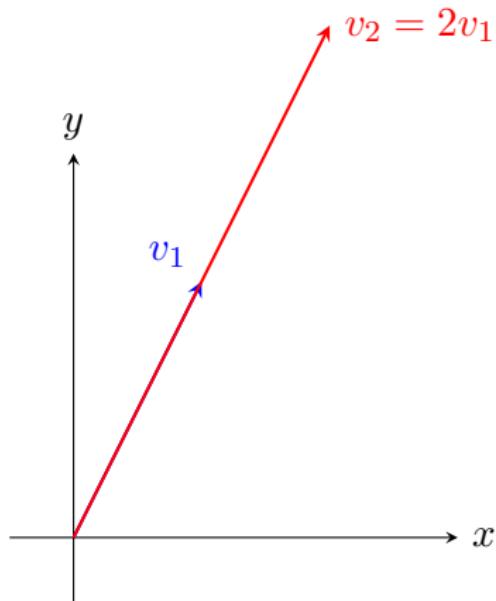
Todos estão na mesma direção **dependentes**.

- **Exemplo 4 — Independência em  $\mathbb{R}^3$ :**

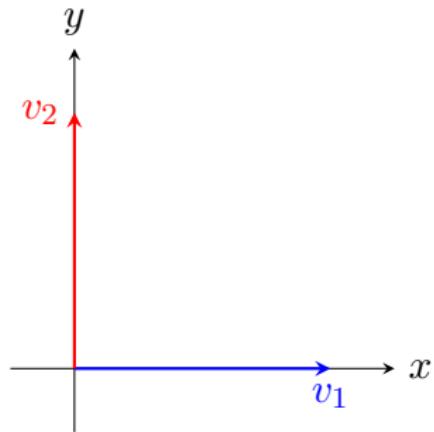
$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Base canônica  $\Rightarrow$  **independentes**.

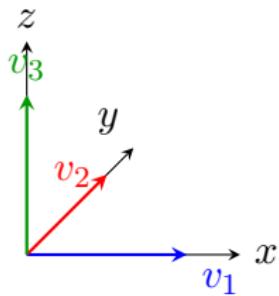
# Dependentes em $\mathbb{R}^2$



# Independentes em $\mathbb{R}^2$



# Independentes em $\mathbb{R}^3$



## Definição 1.3

Um  $K$ -espaço vetorial tem **dimensão  $n$**  se:

- a) Existem  $n$  vetores linearmente independentes, ou seja, nenhum deles pode ser escrito como combinação linear dos outros. Isso significa que eles são "essenciais" para gerar o espaço.
- b) Qualquer conjunto com  $n + 1$  vetores é sempre linearmente dependente, ou seja, pelo menos um vetor desse conjunto pode ser escrito como combinação linear dos demais.

Esses  $n$  vetores linearmente independentes **formam uma base do espaço**, pois geram todo o espaço vetorial sem redundância.

## Definição 1.4 — Bases e Combinações Lineares

- **Todo espaço vetorial tem mais de uma base:**

Uma base não é única! Existem infinitas bases possíveis para um mesmo espaço.

Ex: em  $\mathbb{R}^2$ , tanto  $\{(1, 0), (0, 1)\}$  quanto  $\{(1, 1), (1, -1)\}$  são bases válidas.

- **Qualquer vetor do espaço pode ser representado como combinação linear dos vetores da base:**

Se  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é uma base do espaço  $E$ , então qualquer vetor  $x \in E$  pode ser escrito como:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

para alguns escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ .

# Combinação Linear e Geração do Espaço

Seja  $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  uma base de um espaço vetorial  $E$ :

- Qualquer vetor  $x \in E$  pode ser escrito como:

$$x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$$

onde  $\alpha_i \in K$  são escalares.

- Todas essas combinações formam o **subconjunto gerado** por  $\mathcal{B}$ , que é o próprio espaço  $E$ .
- Esse conjunto é:
  - Fechado sob adição e multiplicação escalar;
  - Contém o vetor nulo e o oposto de qualquer vetor;
  - Portanto, é um **subespaço vetorial** — neste caso, o próprio espaço.

## Exemplo de base em $\mathbb{R}^3$

Considere os vetores em  $\mathbb{R}^3$ :

$$v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

- Esses três vetores são linearmente independentes.
- Qualquer vetor em  $\mathbb{R}^3$  pode ser escrito como combinação linear deles.

Portanto,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  formam uma **base** de  $\mathbb{R}^3$ , e a dimensão desse espaço é 3.

# Quantos vetores formam uma base?

(Pergunta) Bastam 2 vetores linearmente independentes para gerar uma base?

Para um conjunto de vetores formar uma **base** de um espaço vetorial, é necessário que:

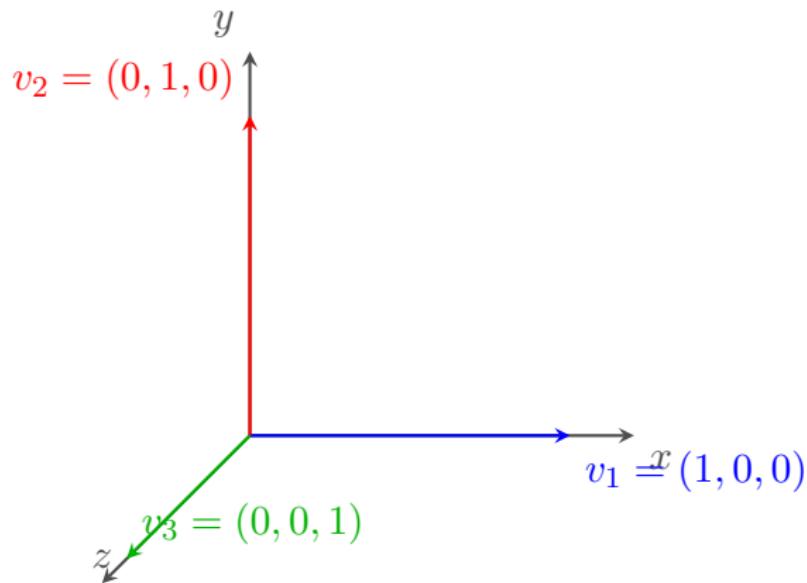
- sejam **linearmente independentes**;
- o número de vetores seja igual à **dimensão do espaço**.

**Exemplos:**

Espaço	2 vetores independentes formam base?	Dimensão
$\mathbb{R}^1$	Não (precisa de 1)	1
$\mathbb{R}^2$	Sim	2
$\mathbb{R}^3$	Não (precisa de 3)	3
$\mathbb{R}^n$	Não (precisa de $n$ )	$n$

**Conclusão:** dois vetores linearmente independentes só formam base se o espaço for bidimensional.

## Base em $\mathbb{R}^3$ – Visualização



Esses vetores são linearmente independentes e geram todo o espaço  $\mathbb{R}^3$ , formando uma base.

## Exemplo — Dimensão de $\mathbb{R}^2$

Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ :

- a) Os vetores  $v_1 = (1, 0)$  e  $v_2 = (0, 1)$  são linearmente independentes.  
Logo,  $\mathbb{R}^2$  tem dimensão 2.

- b) Se adicionarmos um terceiro vetor, como  $v_3 = (2, 3)$ , então o conjunto  $\{v_1, v_2, v_3\}$  será linearmente dependente.

Pois  $v_3$  pode ser escrito como combinação linear de  $v_1$  e  $v_2$ :

$$v_3 = 2v_1 + 3v_2.$$

# Definição 5.1 — Convergência em Espaços Vetoriais

- Seja  $E$  um espaço vetorial com uma norma  $\|\cdot\|$ .
- Uma sequência de vetores  $\{x^{(k)}\} \subset E$  converge para  $x \in E$  se:

$$\|x^{(k)} - x\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty.$$

- **Interpretação em métodos iterativos:**

- Em um sistema linear  $Ax = b$ , buscamos a solução  $x^*$ .
- Os métodos iterativos geram aproximações sucessivas  $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$
- Dizemos que o método **converge** se essas aproximações tendem para a solução exata:

$$\|x^{(k)} - x^*\| \rightarrow 0.$$

- Isso nos leva a perguntar: *em que condições essa convergência ocorre?*

→ Esta questão será respondida pelo Teorema 5.1, a seguir.

## Teorema 5.1 — Convergência de Métodos Iterativos

Considere o sistema linear  $Ax = b$  e um método iterativo do tipo:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$$

onde  $B$  é a **matriz de iteração** e  $c$  é um vetor constante.

**Teorema 5.1:** A sequência  $\{x^{(k)}\}$  converge para a solução exata  $x^*$ , qualquer que seja a aproximação inicial  $x^{(0)}$ , **se, e somente se,**

$$\rho(B) < 1,$$

onde  $\rho(B)$  é o **raio espectral** de  $B$ , ou seja, o maior valor absoluto dos autovalores de  $B$ .

**Consequência:** Se  $\rho(B) \geq 1$ , o método não converge em geral.

# Intuição: Por que $\rho(B) < 1$ garante convergência?

- Em cada iteração de um método iterativo:

$$e^{(k+1)} = Be^{(k)} \quad \Rightarrow \quad e^{(k)} = B^k e^{(0)}.$$

- Assim, a norma do erro satisfaz:

$$\|e^{(k)}\| \leq \|B^k\| \cdot \|e^{(0)}\|.$$

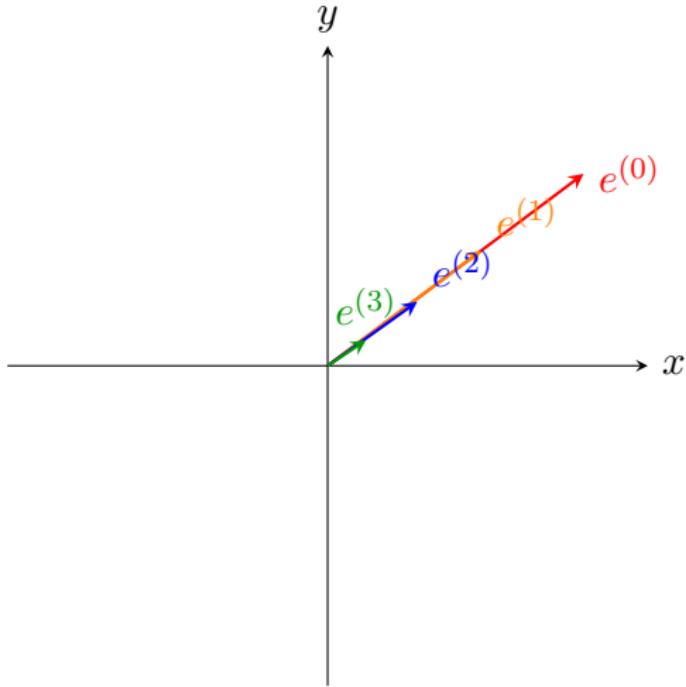
- Se  $\rho(B) < 1$ , então  $\|B^k\| \rightarrow 0$  à medida que  $k \rightarrow \infty$ .
- Consequentemente,  $\|e^{(k)}\| \rightarrow 0$ , ou seja:

$$x^{(k)} \rightarrow x^*.$$

- Geometricamente: o erro é "encolhido" a cada iteração.

→ A seguir: visualização gráfica.

# Visualização: Convergência do Erro



A matriz  $B$  vai "encolhendo" o erro:  $B^k e^{(0)} \rightarrow 0$ .

# Processo de Parada

- Dado um sistema linear  $Ax = b$ , podemos aplicar um método iterativo da forma:

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$$

com  $x^{(0)}$  escolhido como aproximação inicial.

- A sequência  $\{x^{(k)}\}$  gera aproximações sucessivas da solução exata  $x^*$ , refinando a solução.

# Processo de Parada

- O processo para quando a aproximação é **numericamente satisfatória**, ou seja, o erro relativo é pequeno o suficiente:

$$\frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|} < \varepsilon$$

onde  $\varepsilon > 0$  é uma tolerância previamente fixada.

- A norma usada pode ser, por exemplo, a norma euclidiana:

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

- Se o teste for satisfeito, considera-se que  $x^{(k)} \approx x^*$  com a precisão desejada.

# Erro Relativo em Métodos Iterativos

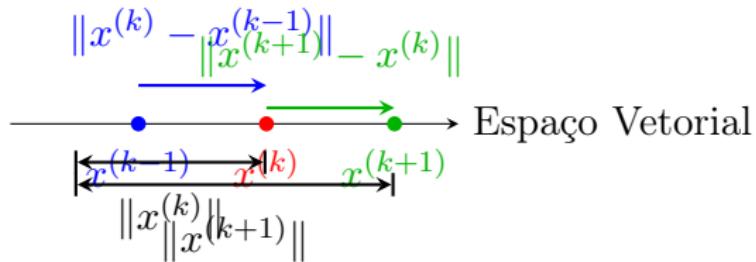
- O erro relativo pode ser calculado de duas formas comuns:

$$\text{Forma 1: } \frac{\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|}{\|x^{(k)}\|}$$

$$\text{Forma 2: } \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|}$$

- Ambas medem a mudança relativa entre iterações consecutivas, porém:
  - Forma 1** normaliza pela norma da aproximação atual  $x^{(k)}$ ;
  - Forma 2** normaliza pela norma da próxima aproximação  $x^{(k+1)}$ .
- A escolha depende do momento em que o critério de parada é avaliado:
  - Forma 2 é usada após calcular  $x^{(k+1)}$ , refletindo a precisão da última aproximação;
  - Forma 1 pode ser usada para comparar aproximações já calculadas.
- Quando a sequência converge,  $x^{(k)} \approx x^{(k+1)}$ , e as duas fórmulas produzem valores muito próximos.
- Portanto, nenhuma delas está errada — é questão de convenção e contexto do método.

# Ilustração do Erro Relativo



- **Erro relativo forma 1:** distância entre  $x^{(k)}$  e  $x^{(k-1)}$ , normalizada por  $\|x^{(k)}\|$ .
- **Erro relativo forma 2:** distância entre  $x^{(k+1)}$  e  $x^{(k)}$ , normalizada por  $\|x^{(k+1)}\|$ .
- Ambas medem o tamanho relativo da mudança entre iterações consecutivas.

# Importância do Método de Jacobi-Richardson

- **Simplicidade Conceitual e Computacional:**
  - O método é direto e fácil de implementar computacionalmente.
  - Não exige resolução de sistemas internos ou substituições sucessivas.
- **Atualizações Independentes:**
  - Cada variável de  $x^{(k+1)}$  é calculada apenas com base nos valores de  $x^{(k)}$ .
  - Isso permite fácil paralelização do método.
- **Aplicabilidade em Sistemas Esparsos:**
  - Muito útil quando a matriz  $A$  é esparsa (muitos zeros).
  - Evita armazenamento e operações desnecessárias.

# Importância do Método de Jacobi-Richardson

- **Importância Didática:**

- É o primeiro contato com métodos iterativos em cursos de álgebra linear e métodos numéricos.
- Serve de introdução aos conceitos de erro, convergência e normas.

- **Base para Métodos Mais Avançados:**

- Ajuda a entender variações como Gauss-Seidel e SOR.
- A estrutura  $x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + g$  é comum a muitos métodos.

- **Condições de Convergência:**

- A convergência depende da matriz de iteração  $B$ .
- Uma condição suficiente é que  $\rho(B) < 1$  (raio espectral).

# Método de Jacobi-Richardson: Forma Iterativa

**Sistema linear:**  $Ax = b$

- A matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é decomposta como:

$$A = D + L + U$$

onde:

- $D$ : parte diagonal de  $A$
- $L$ : parte estritamente inferior
- $U$ : parte estritamente superior
- A fórmula iterativa é:  
$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - (L + U)x^{(k)})$$
- A cada iteração, calcula-se a nova aproximação  $x^{(k+1)}$  usando apenas os valores anteriores  $x^{(k)}$ .
- O processo continua até que:

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

# Exemplo Numérico: Método de Jacobi

**Sistema linear:**

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{4}(7 - x_2^{(k)})$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{3}(8 - 2x_1^{(k)})$$

# Exemplo Numérico: Método de Jacobi

Fórmulas iterativas:

Iteração 0 (inicial):  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Iteração 1:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(7 - 0) = 1.75 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(8 - 0) = 2.67 \end{aligned} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 2.67 \end{bmatrix}$$

Iteração 2:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(7 - 2.67) \approx 1.08 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1.75) = 1.5 \end{aligned} \Rightarrow x^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 1.08 \\ 1.50 \end{bmatrix}$$

Continue até que o erro relativo seja menor que  $\varepsilon$ .

## Teorema 5.1: Convergência de Métodos Iterativos

Considere um sistema linear  $Ax = b$  resolvido iterativamente por:

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$$

**Teorema 5.1:** A sequência  $\{x^{(k)}\}$  converge para a solução  $x^*$  para qualquer  $x^{(0)}$  se, e somente se,

$$\rho(B) < 1$$

onde  $\rho(B)$  é o **raio espectral** de  $B$ , isto é, o maior valor absoluto entre os autovalores de  $B$ .

**Critério de Parada (Erro Relativo):**

$$\frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}{\|x^{(k+1)}\|} < \varepsilon$$

- $\varepsilon$ : precisão desejada (ex:  $10^{-4}$ )
- O teste avalia se o método convergiu numericamente.

# Cálculo do Erro Relativo

**Iterações:**

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,67 \end{bmatrix}, \quad x^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 1,08 \\ 1,50 \end{bmatrix}$$

**Erro absoluto:**

$$x^{(2)} - x^{(1)} \approx \begin{bmatrix} 1,08 - 1,75 \\ 1,50 - 2,67 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,67 \\ -1,17 \end{bmatrix} \Rightarrow \|x^{(2)} - x^{(1)}\| \approx \sqrt{(-0,67)^2 + (-1,17)^2} \approx 1,34$$

**Norma de  $x^{(2)}$ :**

$$\|x^{(2)}\| \approx \sqrt{(1,08)^2 + (1,50)^2} \approx \sqrt{1,17 + 2,25} \approx \sqrt{3,42} \approx 1,85$$

**Erro relativo:**

$$\frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{\|x^{(2)}\|} \approx \frac{1,34}{1,85} \approx 0,724$$

**Conclusão:** o erro ainda é alto, então continuamos iterando.

# Exemplo Prático: Iteração 0

**Sistema:**

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$$

**Iteração 0 (inicial):**

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Iteração 1:**

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(7 - 0) = 1,75 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(8 - 0) = 2,67 \end{aligned} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,67 \end{bmatrix}$$

**Erro absoluto:**

$$e^{(1)} = x^{(1)} - x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1,75 \\ 2,67 \end{bmatrix} \quad \|e^{(1)}\| = \sqrt{1,75^2 + 2,67^2} \approx 3,18$$

## Iteração 2 e Erro

**Iteração 2:**

$$\begin{aligned}x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(7 - 2,67) \approx 1,08 \\x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(8 - 2 \cdot 1,75) = 1,5\end{aligned}\Rightarrow x^{(2)} \approx \begin{bmatrix}1,08 \\1,50\end{bmatrix}$$

**Erro absoluto:**

$$e^{(2)} = x^{(2)} - x^{(1)} \approx \begin{bmatrix}-0,67 \\-1,17\end{bmatrix} \quad \|e^{(2)}\| \approx \sqrt{(-0,67)^2 + (-1,17)^2} \approx 1,34$$

# Erro Relativo na Iteração 2

**Erro relativo:**

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{\|x^{(2)} - x^{(1)}\|}{\|x^{(2)}\|} \approx \frac{1,34}{\sqrt{1,08^2 + 1,50^2}} \approx \frac{1,34}{1,84} \approx 0,73$$

**Interpretação:** A aproximação ainda está longe da solução. O erro deve ser comparado com uma tolerância  $\varepsilon$  para decidir se deve parar.

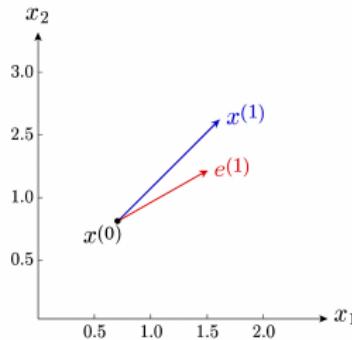


Figura 1: Gráfico 1

# Critério de Convergência - Linhas

- Seja  $B = (b_{ij})$  a matriz de iteração de um método iterativo.
- O critério de convergência por linhas diz que:

$$\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$$

- Ou seja, para cada linha da matriz, a soma dos valores absolutos dos elementos deve ser menor que 1.
- Intuitivamente, isso significa que o efeito combinado de todas as variáveis na atualização do vetor aproximações diminui a cada iteração, garantindo que a sequência converja.
- Esse critério é simples de verificar e útil para garantir a estabilidade do método.

# Critério de Convergência - Colunas

- Para a mesma matriz  $B = (b_{ij})$ , o critério por colunas é dado por:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1$$

- Isso significa que para cada coluna, a soma dos valores absolutos dos elementos deve ser menor que 1.
- Interpretando, cada variável no sistema não pode exercer influência excessiva sobre as variáveis atualizadas na próxima iteração.
- Assim, o processo iterativo é controlado e garante convergência.
- Esse critério é complementar ao critério por linhas e pode ser usado em análises específicas.