

Teorema da Melhor Aproximação (SVD) aplicado a imagens:

Diagnóstico do posto r , erro de reconstrução e análise
em 25 imagens

Pedro Henrique Visentini Pantarotto

Agosto de 2025

Resumo

Este relatório aplica o Teorema da Melhor Aproximação (Eckart–Young–Mirsky) a um conjunto de 25 imagens, avaliando a reconstrução por SVD truncada com diferentes postos r . Para cada imagem, calcula-se o erro de reconstrução $\|A - A_r\|_F$ e avalia-se a legibilidade visual em $r \in \{5, 20, 50, 100, 200\}$. Os resultados mostram queda acentuada de erro entre $r = 5$ e $r = 20$, ganhos relevantes até $r \approx 50 - 100$ e retornos decrescentes além disso; a necessidade de r maior depende fortemente do conteúdo da cena (tamanho relativo do objeto, repetição de padrões e complexidade/texture do fundo). Ao final deste PDF, encontram-se anexados: (i) o gráfico de erro médio versus r ; (ii) o espectro e a soma acumulada de valores singulares; e (iii) as 25 imagens originais com suas reconstruções para os r indicados.

1 Objetivo

Aplicar o Teorema da Melhor Aproximação por SVD truncada a imagens reais, quantificando o erro $\|A - A_r\|_F$ e investigando como o conteúdo visual da cena afeta a qualidade perceptiva quando r é pequeno. Repetimos o estudo em um *dataset* de 25 imagens de mesma categoria (aeronaves em céu aberto, com variações).

2 Base teórica (essência)

Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Sua decomposição em valores singulares (SVD) é

$$A = U \Sigma V^\top,$$

onde $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são ortogonais e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$, com $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq 0$. Para um posto r , definimos $A_r = U_r \Sigma_r V_r^\top$, onde mantemos apenas os r maiores valores singulares. O Teorema de Eckart–Young–Mirsky garante que A_r é a *melhor* aproximação de posto r de A em norma 2 e Frobenius. Ademais,

$$\|A - A_r\|_{\text{F}}^2 = \sum_{i>r} \sigma_i^2,$$

de modo que o erro decresce monotonicamente com r .

3 Metodologia

- **Dados:** 25 imagens (aeronaves em céu aberto e variações).
- **Pré-processamento:** conversão para tons de cinza por média dos canais RGB.
- **Reconstrução:** SVD truncada com $r \in \{5, 20, 50, 100, 200\}$.
- **Métrica:** erro de reconstrução $\|A - A_r\|_{\text{F}}$ por imagem e por r .
- **Agregação:** média e desvio padrão do erro no conjunto.

4 Resultados quantitativos (síntese)

O erro médio $\|A - A_r\|_{\text{F}}$ decresce rapidamente de $r = 5$ para $r = 20$, com grande variabilidade entre imagens quando r é baixo; a partir de $r \approx 50$ a maioria das imagens já se torna visualmente estável, e entre $r = 100$ e $r = 200$ as reconstruções são quase indistinguíveis das originais. O espectro singular típico apresenta poucos σ muito grandes e cauda longa; a soma acumulada indica que $\sim 95\%$ da energia é capturada antes de $r \approx 150$ e $\sim 99\%$ por volta de $r \approx 200$.

Observação sobre anexos. Ao final deste PDF estão anexas duas figuras: (i) *Média do erro de reconstrução vs. r* ; e (ii) *Valores singulares (escala log) e sua soma acumulada*. Em seguida, anexamos as 25 imagens e, para cada uma, as reconstruções para $r \in \{5, 20, 50, 100, 200\}$.

5 Resultados qualitativos (diagnóstico por conteúdo)

Os seguintes fatores governam a legibilidade em r baixos:

1. **Fração da área ocupada pelo objeto.** Objetos muito pequenos em campo amplo (céu) tendem a desaparecer em $r = 5$. Ex.: **img4** ($\sim 10\%$ do quadro, um avião parcialmente oculto): irrecognitível em $r = 5$.

2. **Repetição de elementos semelhantes.** Padrões repetidos emergem com r menor.

Ex.: **img5** (quatro aviões, $\sim 25\%$ do quadro, posições similares): já se identifica “aviões” em $r = 5$. **img6** (quatro aviões com fumaça, $\lesssim 15\%$): também reconhecível em $r = 5$ graças ao fundo simples.

3. **Complexidade/texture do objeto e do fundo.** Close-ups texturizados exigem r maior. Ex.: **img14**, **img15**, **img16**, **img17**, **img25** (um avião em close com muitos detalhes): identificação “cega” é difícil em $r = 5$; melhora progressivamente até $r \geq 50 - 100$.

Casos com um único avião pequeno (**img7**, **img9**) tendem a ser ambíguos em $r = 5$. Em contrapartida, **img21** (paisagem com água) é sugerida com $r = 5$ pelo padrão especular do reflexo, típico de estruturas de baixo posto. Artefatos como “halo/retângulo” em torno dos elementos principais são frequentes por volta de $r \approx 20$ e diminuem sensivelmente em $r \geq 50$.

6 Recomendações de escolha de r

- **Inspeção rápida / thumbnail:** $r \approx 20$.
- **Qualidade apresentável:** $r \approx 50$.
- **Alta fidelidade:** $r \approx 100$.
- **Quase original:** $r \approx 200$.

Como critério automático, escolher o menor r tal que

$$\frac{\sum_{i=1}^r \sigma_i}{\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \sigma_i} \geq \tau, \quad \tau \in [0.95, 0.99],$$

ajustando τ ao compromisso qualidade/compactação desejado.

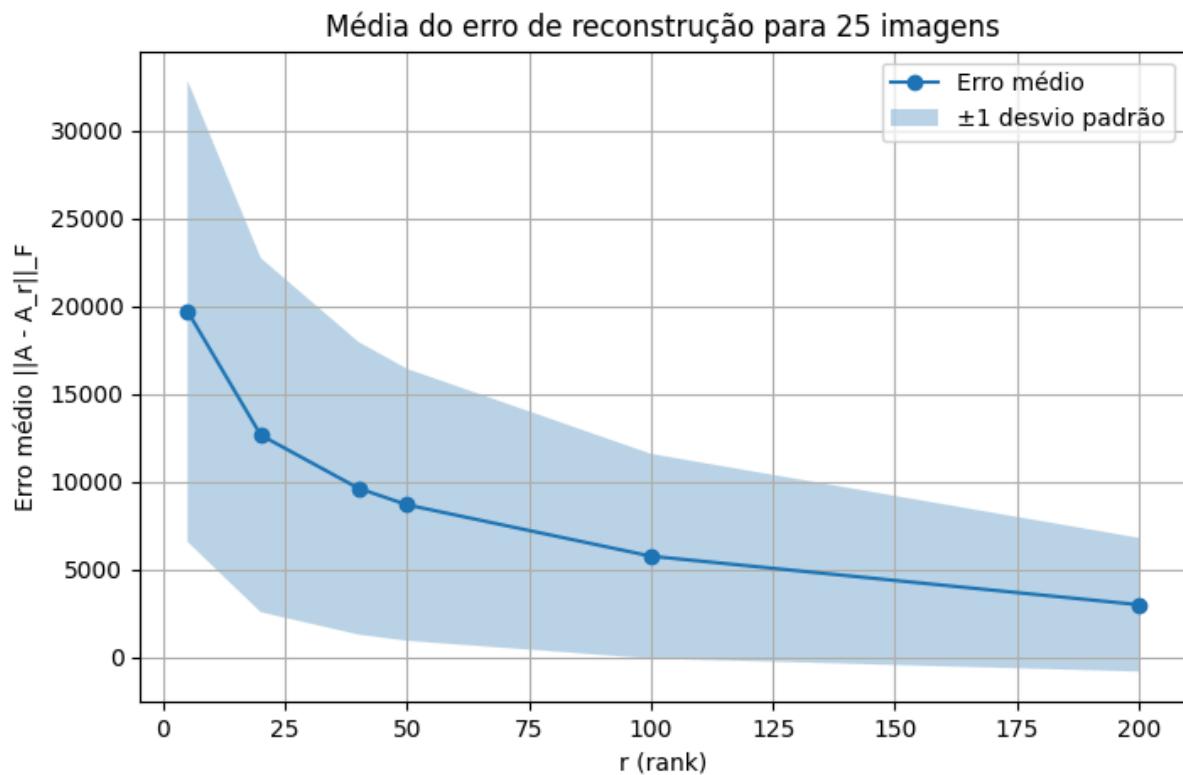
7 Conclusões

(i) A SVD truncada confirma o Teorema da Melhor Aproximação: para cada r , A_r minimiza $\|A - A_r\|_F$. (ii) Percepção humana não é linear no erro: cenas com objeto pequeno, poucos elementos ou alta textura exigem r maior. (iii) Há retornos decrescentes após $r \approx 50 - 100$; $r \approx 200$ é praticamente indistinguível do original. (iv) O conteúdo da cena (ocupação, repetição, textura) *determina* o r necessário.

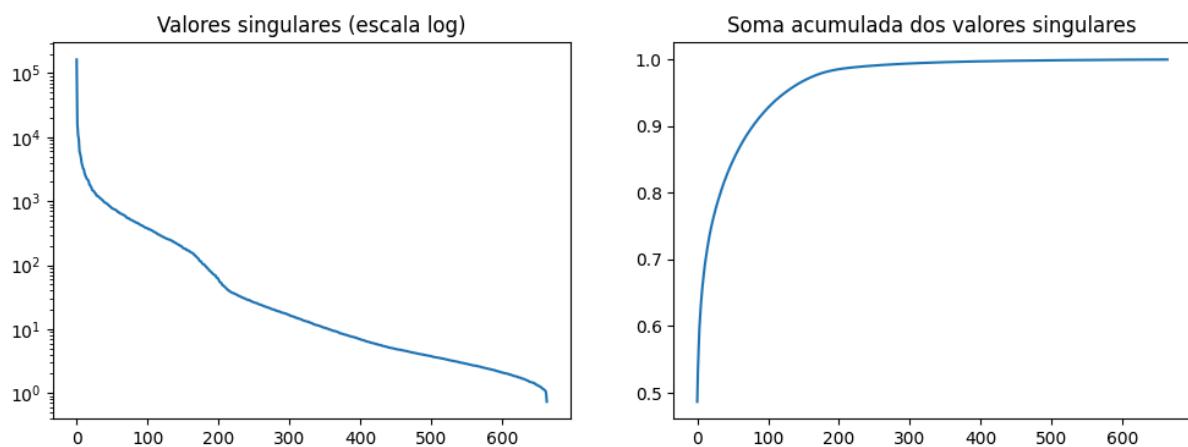
Anexos (descrição)

- **Anexo A.** Gráfico da *Média do erro de reconstrução vs. r* para o *dataset* de 25 imagens (com faixa de ± 1 desvio padrão).
- **Anexo B.** Gráfico dos *Valores singulares em escala log* e da *Soma acumulada normalizada*.
- **Anexo C.** Para cada uma das 25 imagens: original em tons de cinza e reconstruções para $r \in \{5, 20, 50, 100, 200\}$.

Anexo A



Anexo B



Anexo C

Imagen original: img1.jpg



img1.jpg | r = 50



img1.jpg | r = 5



img1.jpg | r = 100



img1.jpg | r = 20



img1.jpg | r = 200



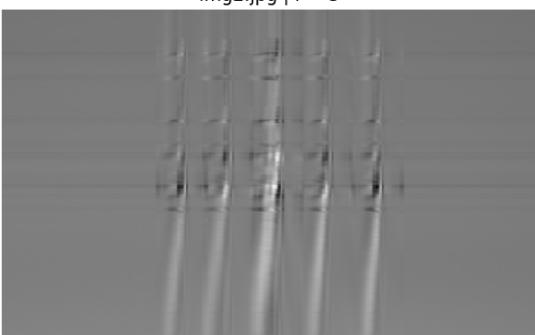
Imagen original: img2.jpg



img2.jpg | r = 100



img2.jpg | r = 5



img2.jpg | r = 20



img2.jpg | r = 50



img2.jpg | r = 200



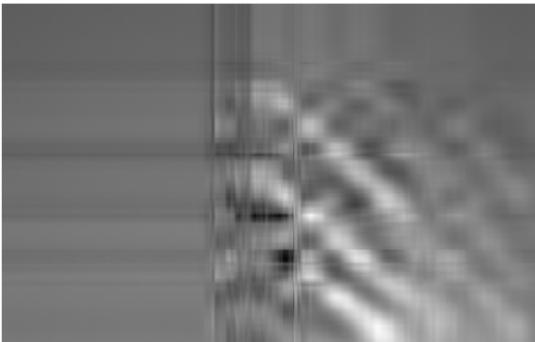
Imagen original: img3.jpg



img3.jpg | r = 50



img3.jpg | r = 5



img3.jpg | r = 100



img3.jpg | r = 20



img3.jpg | r = 200



Imagen original: img4.jpg



img4.jpg | r = 50



img4.jpg | r = 5



img4.jpg | r = 100



img4.jpg | r = 20



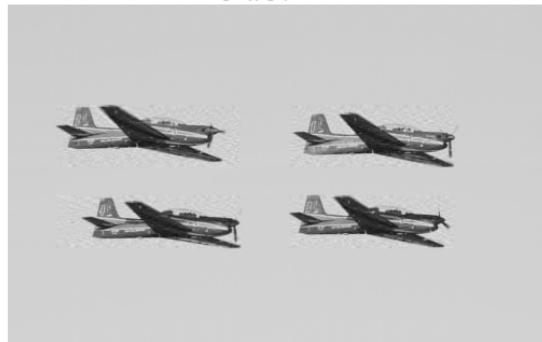
img4.jpg | r = 200



Imagen original: img5.jpg



img5.jpg | r = 50



img5.jpg | r = 5



img5.jpg | r = 100



img5.jpg | r = 20



img5.jpg | r = 200



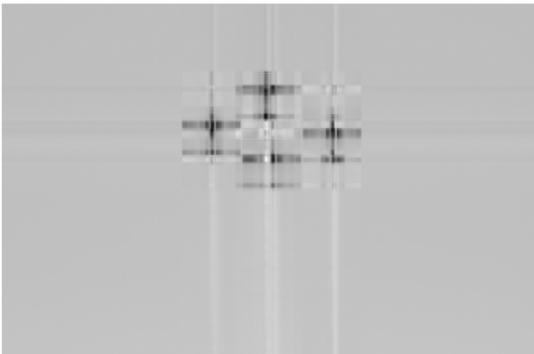
Imagen original: img6.jpg



img6.jpg | r = 50



img6.jpg | r = 5



img6.jpg | r = 100



img6.jpg | r = 20



img6.jpg | r = 200



Imagen original: img7.jpg



img7.jpg | r = 50



img7.jpg | r = 5



img7.jpg | r = 100



img7.jpg | r = 20



img7.jpg | r = 200



Imagen original: img8.jpg



img8.jpg | r = 50



img8.jpg | r = 5



img8.jpg | r = 100



img8.jpg | r = 20



img8.jpg | r = 200



Imagen original: img9.jpg

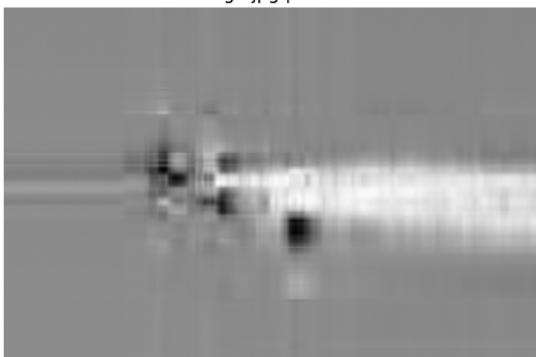


Ricardo De Lucia

img9.jpg | r = 50



img9.jpg | r = 5



img9.jpg | r = 100



Ricardo De Lucia

img9.jpg | r = 20



img9.jpg | r = 200



Ricardo De Lucia

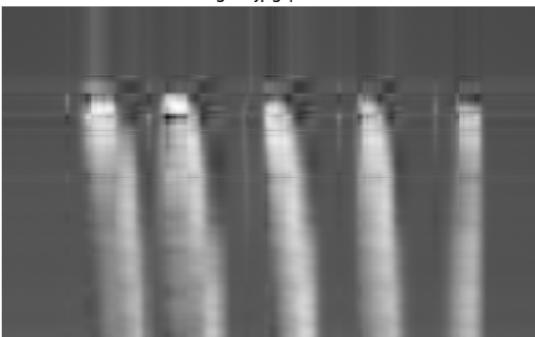
Imagen original: img10.jpg



img10.jpg | r = 50



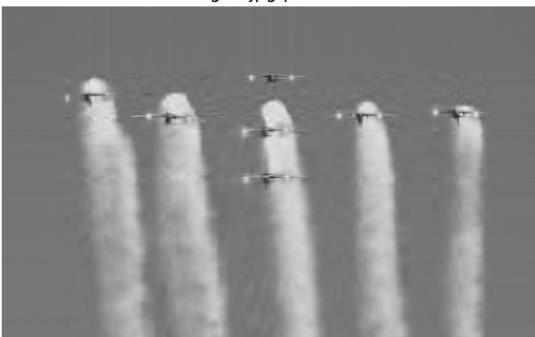
img10.jpg | r = 5



img10.jpg | r = 100



img10.jpg | r = 20



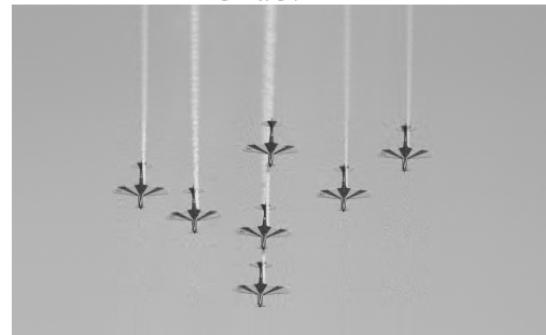
img10.jpg | r = 200



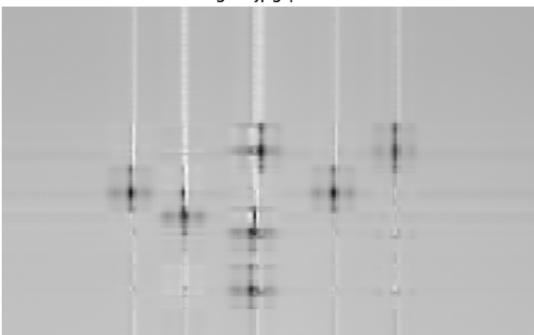
Imagen original: img11.jpg



img11.jpg | r = 50



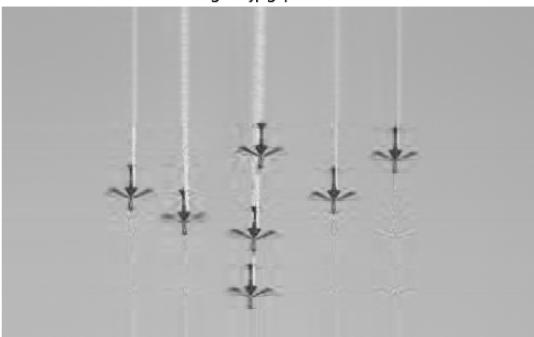
img11.jpg | r = 5



img11.jpg | r = 100



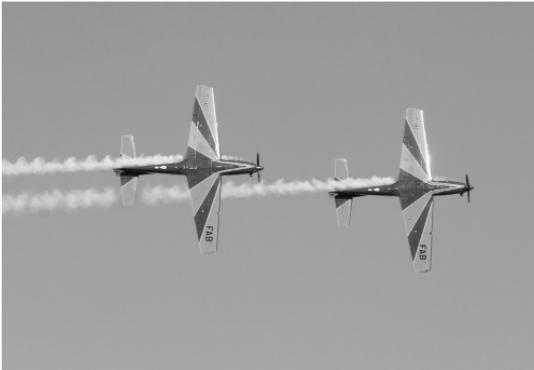
img11.jpg | r = 20



img11.jpg | r = 200



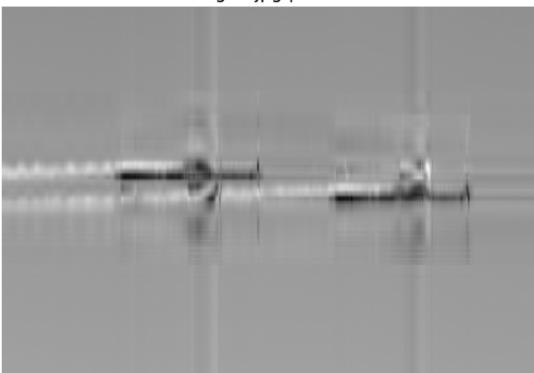
Imagen original: img12.jpg



img12.jpg | r = 50



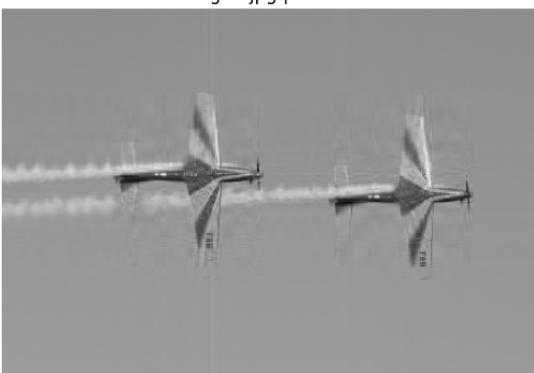
img12.jpg | r = 5



img12.jpg | r = 100



img12.jpg | r = 20



img12.jpg | r = 200



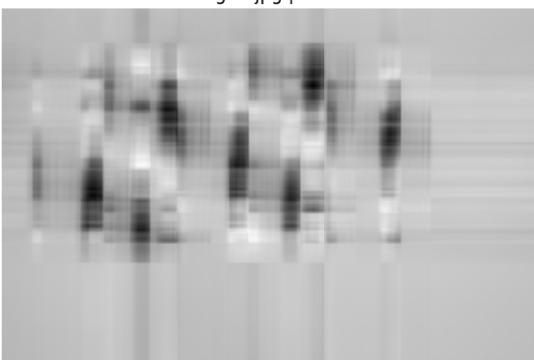
Imagen original: img13.jpg



img13.jpg | r = 50



img13.jpg | r = 5



img13.jpg | r = 100



img13.jpg | r = 20



img13.jpg | r = 200



Imagen original: img14.jpg



img14.jpg | r = 50



img14.jpg | r = 5



img14.jpg | r = 100



img14.jpg | r = 20



img14.jpg | r = 200



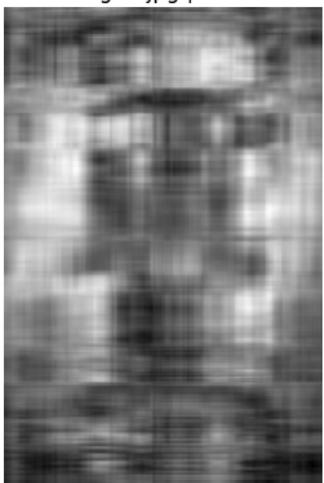
Imagen original: img15.jpg



img15.jpg | r = 50



img15.jpg | r = 5



img15.jpg | r = 100



img15.jpg | r = 20



img15.jpg | r = 200



Imagen original: img16.jpg



img16.jpg | r = 100



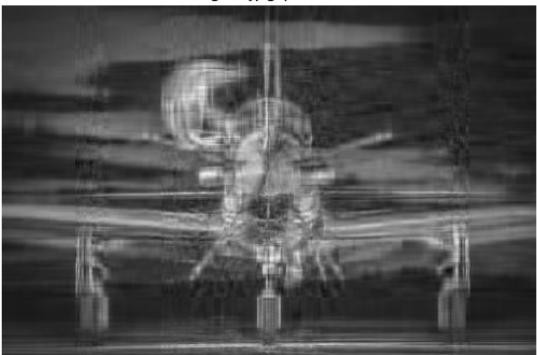
img16.jpg | r = 5



img16.jpg | r = 200



img16.jpg | r = 20



img16.jpg | r = 50



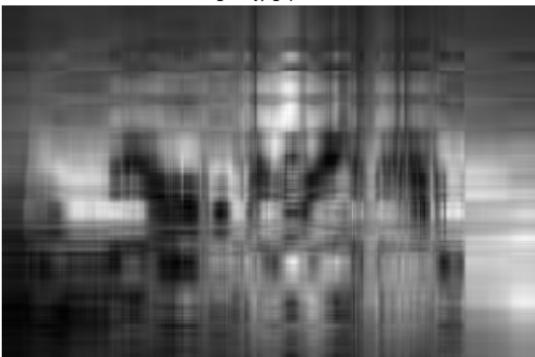
Imagen original: img17.jpg



img17.jpg | r = 50



img17.jpg | r = 5



img17.jpg | r = 100



img17.jpg | r = 20



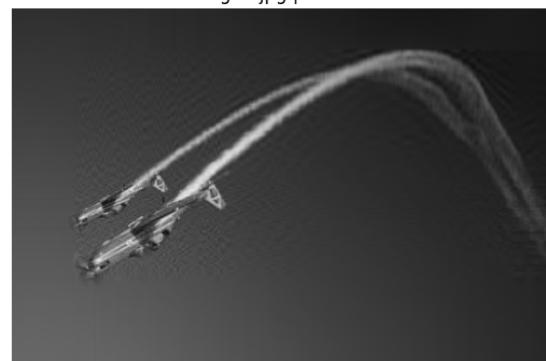
img17.jpg | r = 200



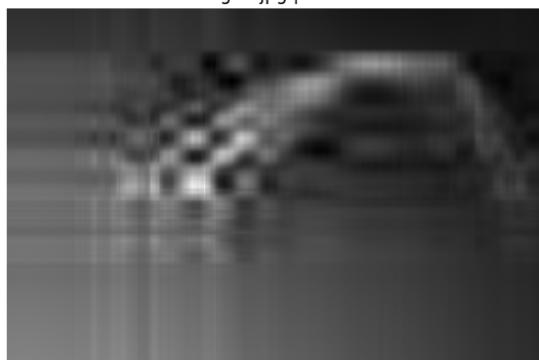
Imagen original: img18.jpg



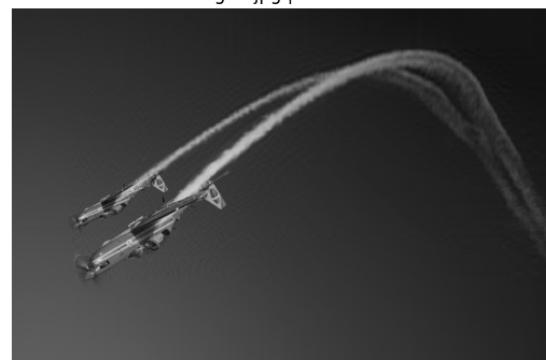
img18.jpg | r = 50



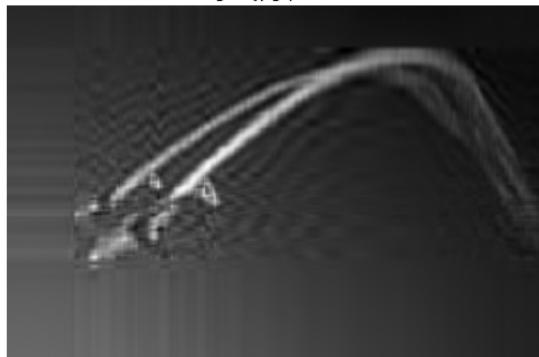
img18.jpg | r = 5



img18.jpg | r = 100



img18.jpg | r = 20



img18.jpg | r = 200

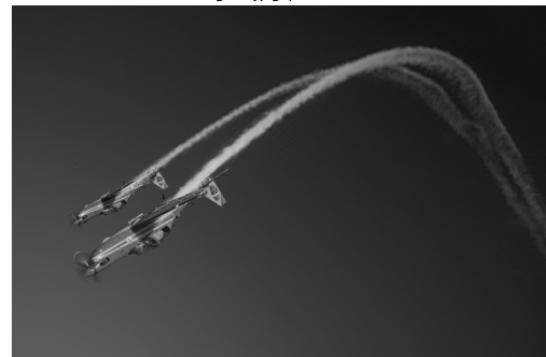


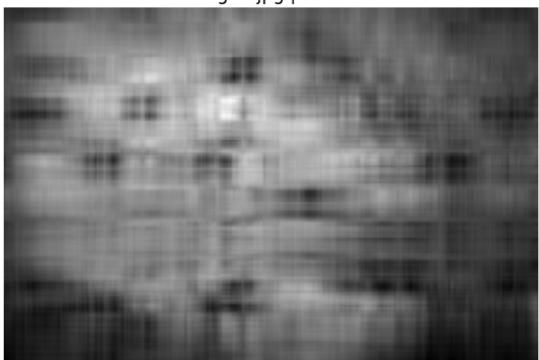
Imagen original: img19.jpg



img19.jpg | r = 50



img19.jpg | r = 5



img19.jpg | r = 100



img19.jpg | r = 20



img19.jpg | r = 200



Imagen original: img20.jpg



img20.jpg | r = 50



img20.jpg | r = 5



img20.jpg | r = 100



img20.jpg | r = 20



img20.jpg | r = 200



Imagen original: img21.jpg



img21.jpg | r = 50



img21.jpg | r = 5



img21.jpg | r = 100



img21.jpg | r = 20



img21.jpg | r = 200



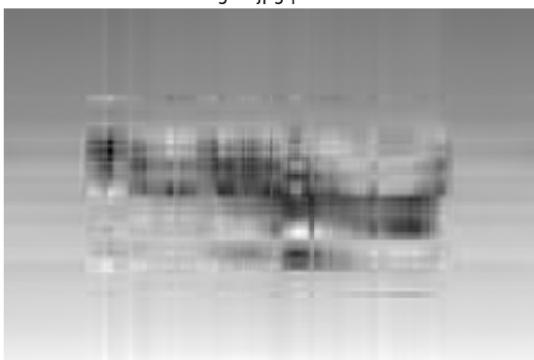
Imagen original: img22.jpg



img22.jpg | r = 50



img22.jpg | r = 5



img22.jpg | r = 100



img22.jpg | r = 20



img22.jpg | r = 200



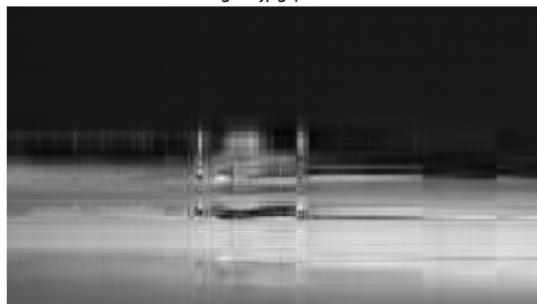
Imagen original: img23.jpg



img23.jpg | r = 50



img23.jpg | r = 5



img23.jpg | r = 100



img23.jpg | r = 20



img23.jpg | r = 200



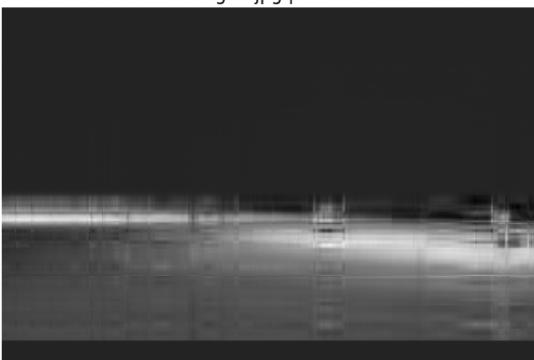
Imagen original: img24.jpg



img24.jpg | r = 50



img24.jpg | r = 5



img24.jpg | r = 100



img24.jpg | r = 20



img24.jpg | r = 200



Imagen original: img25.jpg



img25.jpg | r = 50



img25.jpg | r = 5



img25.jpg | r = 100



img25.jpg | r = 20



img25.jpg | r = 200

