3ª Apresentação - Estudo do livro: Cálculo Numérico de Neide Bertoldi Franco

Métodos Iterativos

Pedro Henrique Visentini Pantarotto
Orientador: Prof. Dr. Irineu Lopes Palhares Junior

FCT-Unesp
ICSB - Iniciação Científica Sem Bolsa

Métodos Iterativos

Método de Gauss-Seidel

Objetivo: Resolver sistemas lineares $Ax = b$ usando aproximações sucessivas.

Ideia central:

- Utiliza os valores mais atualizados possíveis em cada passo.
- Ao calcular $x_i^{(k+1)}$, já se usa os valores atualizados $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{i-1}^{(k+1)}$ e os antigos $x_{i+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}$.

Fórmula de atualização:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Comparação com Jacobi:

- **Jacobi:** usa apenas os valores de $x^{(k)}$.
- **Gauss-Seidel:** atualiza imediatamente os valores.

Exemplo: Método de Gauss-Seidel

Sistema:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} \qquad \text{com } x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Iteração 1:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{1}{4}(7 - x_2^{(0)}) = \frac{1}{4}(7 - 0) = 1.75 \\ x_2^{(1)} &= \frac{1}{3}(8 - 2x_1^{(1)}) = \frac{1}{3}(8 - 3.5) = 1.5 \end{aligned} \Rightarrow x^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.75 \\ 1.5 \end{bmatrix}$$

Iteração 2:

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{1}{4}(7 - x_2^{(1)}) = \frac{1}{4}(7 - 1.5) = 1.375 \\ x_2^{(2)} &= \frac{1}{3}(8 - 2x_1^{(2)}) = \frac{1}{3}(8 - 2.75) = 1.75 \end{aligned} \Rightarrow x^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.375 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

Comparação entre métodos iterativos

Por que Gauss-Seidel foi melhor que Jacobi e Gradientes?

- **Gauss-Seidel**: Atualiza imediatamente os valores. Usa os valores mais recentes da própria iteração, acelerando a convergência.
- **Jacobi**: Utiliza apenas os valores da iteração anterior. Simples, mas mais lento.
- **Gradiente**: Avança na direção do resíduo (erro). Funciona para qualquer matriz, mas é menos eficiente.
- **Gradientes Conjugados**: Gera direções ortogonais. Muito eficiente para matrizes simétricas e definidas positivas.

O que é Relaxação e sua relação com Gradientes

Relaxação:

- Técnica iterativa para resolver sistemas $Ax = b$ suavemente.
- Atualiza solução por: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha \cdot p^{(k)}$
- $p^{(k)}$: direção de correção ("direção de relaxação")

Método dos Gradientes:

- Minimiza função: $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$
- Gradiente: $\nabla f(x) = Ax - b = -r$
- Direção: $p^{(k)} = r^{(k)}$, o resíduo
- Atualiza: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k r^{(k)}$

Conclusão: Todo método iterativo com $p = -\nabla f(x) \equiv r$ é chamado de **Método dos Gradientes**.

Resumo de desempenho

Método	Iterações	Observações
Gradientes Conjugados	2	Extremamente eficiente. Ideal para matrizes simétricas positivas definidas.
Gauss-Seidel	7	Atualiza os valores a cada passo. Boa taxa de convergência.
Gradiente	12	Mais geral. Baseado em descer o gradiente do erro.
Jacobi-Richardson	13	Mais simples, mas usa dados menos atualizados. Convergência mais lenta.

Comparação entre métodos iterativos

Por que Gauss-Seidel foi melhor que Jacobi e Gradientes?

- **Gauss-Seidel**: Atualiza imediatamente os valores. Usa os valores mais recentes da própria iteração, acelerando a convergência.
- **Jacobi**: Utiliza apenas os valores da iteração anterior. Simples, mas mais lento.
- **Gradiente**: Avança na direção do resíduo (erro). Funciona para qualquer matriz, mas é menos eficiente.
- **Gradientes Conjugados**: Gera direções ortogonais. Muito eficiente para matrizes simétricas e definidas positivas.

Comparação Geral

Resumo do desempenho:

Método	**Melhor caso**	**Recomendação**
Jacobi	Matriz diagonal dominante	Simples, fácil de implementar, útil com paralelismo.
Gauss-Seidel	Matriz bem condicionada	Converge mais rápido que Jacobi na maioria dos casos.
Gradiente	Matriz simétrica definida positiva	Boa para grandes sistemas esparsos.
Gradientes Conjugados	Igual ao Gradiente	**Mais rápido** quando aplicável (máx. n iterações).

Regras práticas:

- Use **Jacobi** quando a matriz for diagonal dominante e quiser simplicidade.
- Prefira **Gauss-Seidel** se a matriz for bem condicionada e precisar de desempenho rápido.
- Use **Gradientes/Conjugados** em matrizes **simétricas e positivas definidas**, especialmente em grandes dimensões.

Jacobi foi melhor: Diagonal dominante

Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 1 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \end{bmatrix}$$

Desempenho:

- Jacobi: **13 iterações**
- Gauss-Seidel: 6 iterações
- Gradiente: 8 iterações

Por que Jacobi foi eficiente?

- A matriz é **diagonal dominante**, o que garante boa estabilidade ao método.
- A independência entre as variáveis favorece o uso de valores anteriores.

Gauss-Seidel foi melhor: Simetria com estrutura útil

Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Desempenho:

- Jacobi: 39 iterações
- Gauss-Seidel: **13 iterações**
- Gradiente: 28 iterações

Por que Gauss-Seidel foi melhor?

- O método se beneficia da **atualização imediata** dos valores.
- A matriz simétrica favorece a convergência rápida, mas o Jacobi demora por usar sempre a iteração anterior.

Gradiente foi melhor: Simétrica definida positiva

Matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Desempenho:

- Jacobi: 13 iterações
- Gauss-Seidel: 7 iterações
- Gradiente: **12 iterações**

Por que o Gradiente se destacou?

- A matriz é **simétrica e definida positiva**, ideal para métodos baseados em mínimos quadrados.
- O método de Gradiente segue a direção do resíduo, mais eficiente nesse tipo de geometria.

Por enquanto é isso

Obrigado! pedro.pantarotto@unesp.br