AULA 3 – SOMA, SUBTRAÇÃO, DIVISÃO E MULTIPLICAÇÃO

OBJETIVO DA AULA

Efetuar operações aritméticas nas bases binária, octal e hexadecimal.

APRESENTAÇÃO

Na aula anterior conhecemos as bases binária, octal e hexadecimal. Além disso, aprendemos como converter números entre elas.

Agora que já sabemos como funcionam as bases binária, octal e hexadecimal e como converter números entre elas, está na hora de aprendermos a somar, subtrair, multiplicar e dividir nelas.

As operações funcionam da mesma forma que na base decimal. Então, é hora de começarmos.

1. SOMA EM BINÁRIO

Para começarmos, vamos lembrar que:

0 + 0 = 0.

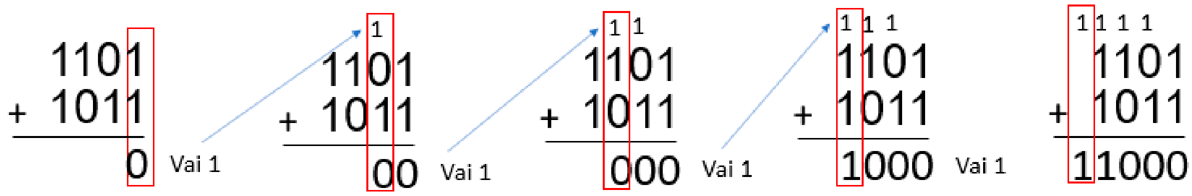
0 + 1 = 1.

1 + 0 = 1.

1 + 1 = 10 (= 2 em binário – vamos usar o “vai 1”).

1 + 1 + 1 = 11 (= 3 em binário – e vamos usar o “vai 1” também).

Como exemplo, vamos somar os números $(1101)_2$ e $(1011)_2$.



Repare que o processo é o mesmo utilizado nas somas em decimal. E você verá que em octal e hexadecimal será da mesma forma.

1.1. SOMA EM OCTAL

Aqui precisamos lembrar que, como não usamos os algarismos 8 e 9, sempre que o resultado da soma igualar ou passar de 8, teremos o *vai 1*.

O algoritmo é simples:

1º caso: o resultado da soma está entre 0 e 7 – simplesmente o escrevemos, sem precisar o *vai 1*.

2º caso: o resultado iguala ou ultrapassa 8 – então executaremos os seguintes passos:

- Somamos 1 à próxima coluna (vai 1);
- Na coluna atual colocamos o quanto ultrapassou a base (no caso, 8).

Observe o exemplo abaixo, somando $(1563 + 1275)_8$.

			1	
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
				0

(a)

		1	1	
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
			6	0

(b)

	1	1		
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
		0	6	0

(c)

	1	1		
	1	5	6	3
+	1	2	7	5
	3	0	6	0

(d)

a) 3 + 5 = 8 → colocamos o resultado igual a 0 (zero), pois devemos subtrair 8 (resultado maior do que 7) por 8 (a base octal). Então fica: 8 – 8 = 0. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

b) 1 + 6 + 7 = 14 → colocamos o resultado igual a 6, pois devemos subtrair 14 (resultado maior do que 7) por 8 (a base octal). Então fica: 14 – 8 = 6. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

c) 1 + 5 + 2 = 8 → colocamos o resultado igual a 0 (zero), pois devemos subtrair 8 (resultado maior do que 7) por 8 (a base octal). Então fica: 8 – 8 = 0. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

d) 1 + 1 + 1 = 3 → colocamos o resultado igual a 3 e, como está entre 0 e 7, não precisamos adicionar nada na próxima coluna.

1.2. SOMA EM HEXADECIMAL

Aqui usaremos o mesmo raciocínio. Mas lembre-se: como estamos trabalhando na base decimal, tudo o que fizemos em relação a 8 na base octal faremos em relação ao 16 na base hexadecimal.

Assim, quando a soma ficar entre 0 e 15, usaremos o algarismo (ou letra) correspondente, sem precisar adicionar 1 à próxima coluna. E quando igualar ou passar de 16 utilizaremos o mesmo raciocínio do octal.

Como exemplo, vamos efetuar $(AF97 + BC59)_{16}$.

			1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
			F	0

(a)

	1		1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
		B	F	0

(b)

1	1		1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
	6	B	F	0

(c)

1	1		1	
	A	F	9	7
+	B	C	5	9
1	6	B	F	0

(d)

a) 7 + 9 = 16 → colocamos o resultado igual a 0 (zero), pois devemos subtrair 16 (resultado maior do que 15) por 16 (a base hexadecimal). Então fica: 16 – 16 = 0. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

b) 1 + 9 + 5 = 15 → como 15 é menor do que 16, colocamos a letra correspondente ao 15, a letra F.

c) 15(F) + 12(C) = 27 → colocamos o resultado igual a B (11), pois devemos subtrair 27 (resultado maior do que 15) por 16 (a base hexadecimal). Então fica: 27 – 16 = 11 (B). Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda.

d) 1 + 10(A) + 11(B) = 22 → colocamos o resultado igual a 6, pois devemos subtrair 22 (resultado maior do que 15) por 16 (a base hexadecimal). Então fica: 22 – 16 = 6. Devemos adicionar 1 a próxima coluna a esquerda, pois a regra informa que ao ultrapassar o valor, subtraímos, inserirmos o resultado e adicionamos 1 a próxima coluna a esquerda. Neste caso, ao subir o 1, consequentemente faremos a 1 + 0 (nada, vazio da coluna) e será igual a 1. Resultado: 16BF0

2. SUBTRAÇÃO EM BINÁRIO

Agora vamos usar, como em decimal, o recurso de "pedir emprestado". Lembrando uma regra simples: **quem empresta perde um e quem ganha emprestado ganha o valor da base.** Isso valerá para todas as bases com que trabalhamos aqui.

Vamos efetuar, como exemplo $(110001 - 101111)_2$.

```
  110001
- 101111
```

Subtração trivial

```
  0 1 1 10
  110001
- 101111
       0
```

```
      10
```

Como foi necessário "pedir emprestado", o primeiro 1 encontrado à esquerda vira zero e haverá uma sequência de empréstimos até a coluna em que estamos trabalhando. Nesse caso o 0 ganha 2 (10). Teremos então $(10 - 1)_2 = 1$

```
  0 1 1
  110001
- 101111
     010
```

A partir daqui as subtrações são triviais e só teremos zeros à esquerda

2.1. SUBTRAÇÃO EM OCTAL

Aqui também precisaremos do recurso de "pedir emprestado", lembrando de que quem emprestar perderá 1 e quem receber ganhará 8.

Vamos ao exemplo efetuando $(7214 - 1636)_8$.

```
  7214
- 1636
```

Como 4 é menor do que 7, terá que pedir emprestado ao 1

```
     12
  7204
- 1636
     6
```

Ao emprestar, o 1 virou 0 e o 4, recebendo 8, virou 12. Então, 12 – 6 = 6

```
    8
  7104
- 1636
    56
```

Como 0 é menor do que 3, terá que pedir emprestado ao 2, que vira 1 e o 0, ao receber emprestado, vira 8. Finalmente, 8 - 3 = 5

```
   9
  6104
- 1636
  5356
```

Como 1 é menor do que 6, terá que pedir emprestado ao 7, que vira 6 e o 1, ao receber emprestado, vira 9. Finalmente, 9 - 6 = 3

Finalizando, 6 – 1 = 5

2.2. SUBTRAÇÃO EM HEXADECIMAL

Aqui executaremos o mesmo algoritmo, sempre lembrando que os valores entre 10 e 15 serão substituídos pelas letras e que, na regra do pedir emprestado, aquele que receber o empréstimo ganhará 16.

Vamos efetuar $(A741 - 8BED)_{16}$.

```
  A7 41
-  8BED
-------
```

Como 1 é menor do que D (13), terá que pedir emprestado ao 4

```
      17
  A73 1
-  8BED
-------
      4
```

Ao emprestar, o 4 virou 3 e o 1, recebendo 16, virou 17. Então, 17 – 13 = 4

```
     19
  A6 31
-  8BED
-------
     56
```

Como 3 é menor do que E (14), terá que pedir emprestado ao 7, que vira 6 e o 3, ao receber emprestado, vira 19. Finalmente, 19 - 14 = 5

```
   22
   96 31
-  8BED
-------
  1B 56
```

Como 6 é menor do que B (11), terá que pedir emprestado ao A, que vira 9 e o 6, ao receber emprestado, vira 22. Finalmente, 22 - 11 = 11 (B)

Finalizando, 9 – 8 = 1

3. MULTIPLICAÇÃO EM BINÁRIO

Aqui também vamos utilizar o mesmo algoritmo que usamos nas multiplicações em decimal.

Lembrando que 0 x 0 = 0, 0 x 1 = 0 e 1 x 1 = 1.

Como exemplo, vamos efetuar $(1101 \times 101)_2$.

```
     1101
 x    101
---------
     1101
    00000
+  110100
---------
  1000001
```

O primeiro passo é multiplicar cada algarismo do número de baixo pelo número de cima.

O segundo passo é somar as parcelas.

3.1. MULTIPLICAÇÃO EM OCTAL

Para facilitar essa operação, vamos utilizar uma tabela com uma "tabuada" em octal.

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7

x	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Com ajuda dessa tabela, vamos efetuar $(32 \times 45)_8$.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 45 \\ \times\ 32 \\ \hline 2 \end{array}$$

Usando nossa tabela, veremos que 2 x 5 = 12. Assim colocamos o 2 embaixo e subimos o 1

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 45 \\ \times\ 32 \\ \hline 112 \end{array}$$

2 x 4 = 10; somando com o 1 que subiu, teremos 11.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 45 \\ \times\ 32 \\ \hline 112 \\ 157 \end{array}$$

Agora efetuamos a multiplicação por 3.

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 32 \\ \hline 112 \\ +157 \\ \hline 1702 \end{array}$$

Finalmente, efetuamos a soma.

3.2. MULTIPLICAÇÃO EM HEXADECIMAL

Da mesma forma que fizemos com a base octal, vamos usar uma tabela para nos auxiliar.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
2	0	2	4	6	8	A	C	E	10	13	14	16	18	1A	1C	1E
3	0	3	6	9	C	F	12	15	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	0	4	8	C	10	14	18	1C	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23	28	2D	32	37	3C	41	46	4B
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31	38	3F	46	4D	54	5B	62	69
8	0	8	10	18	20	28	30	38	40	48	50	58	60	68	70	78
9	0	9	13	1B	24	2D	36	3F	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46	50	5A	64	6E	78	82	8C	96

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D	58	63	6E	69	84	8F	9A	A5
C	0	C	18	24	30	3C	48	54	60	6C	78	84	90	9C	A8	B4
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Como exemplo, vamos efetuar $(3F \times D9)_{16}$.

```
  8
 D9
x 3F
----
   7
```

Usando nossa tabela, veremos que F x 9 = 87. Assim colocamos o 7 embaixo e subimos o 8

```
  8
 D9
x 3F
----
 CB7
```

F x D = C3; somando com o 8 que subiu, teremos CB.

```
  1
 D9
x 3F
----
 CB7
28B
```

3567

Agora efetuamos a multiplicação por 3.

```
  D9
 x 3F
 ----
  CB7
+28B
-----
 3567
```

Finalmente, efetuamos a soma.

4. DIVISÃO EM BINÁRIO

A operação de divisão em binário segue o mesmo procedimento da divisão em binário, com a diferença de que quando o valor do dividendo é menor do que o divisor, o quociente recebe 0. Se o dividendo foi maior ou igual ao divisor, o quociente recebe 1.

Para entender melhor, vamos a um exemplo, efetuando $(111010 \div 11)_2$.

```
111010 | 11
0      | 1
```

O dividendo em questão é igual ao divisor. Assim, colocamos 1 no quociente e 0 no resto.

```
111010 | 11
01     | 10
```

Agora o dividendo é menor do que o divisor. Então colocamos o 0 no quociente e "baixamos" mais um número.

```
111010 | 11
010    | 100
```

Como o dividendo continua menor que o divisor, colocamos outro 0 e "baixamos" mais um número.

```
111010 | 11
 0101  | 1001
-  11
  100
```

Agora o dividendo é maior do que o divisor. Então colocaos 1 no quociente, subtraímos o divisor do dividendo e "baixamos" o próximo número.

```
111010 | 11
 0101  | 10011
 - 11
   100
  - 11
     1
```

Da mesma forma, subtraímos o divisor do dividendo. Como não temos mais como "baixar" outro número, chegamos ao fim com a divisão tendo resto 1.

4.1. DIVISÃO EM OCTAL

Vamos agora efetuar a divisão na base octal. Como já mencionamos, o raciocínio é o mesmo das bases binária e decimal, considerando que não vamos usar os algarismos 8 e 9.

Para isso, vamos efetuar $(443 \div 17)_8$.

Para facilitar essa operação é bom colocarmos uma tabuada em octal do divisor (que é o 17), como a seguir:

17x1 = 17
17x2 = 36
17x3 = 55
17x4 = 74
17X5 = 113
17x6 = 132
17x7 = 151
17x10 = 170

```
  443 | 17
- 36  | 2
   6
```

O dividendo é maior do que o divisor. Então, pela tabuada, vemos a linha a ser usada é a segunda.

```
  443 | 17
- 36  | 23
   63
 - 55
    6
```

Agora baixamos o 3 e, com ajuda da tabuada, vemos que a linha a ser usada é a terceira.

Como não temos mais como dividir, o quociente é 23 e o resto da divisão é 6.

4.2. DIVISÃO EM HEXADECIMAL

Nesta última operação aritmética vamos repetir o processo usado na base octal e criar uma tabuada do divisor para facilitar.

Como exemplo, vamos efetuar $(B54A \div C1)_{16}$.

Para facilitar essa operação é bom colocarmos uma tabuada em octal do divisor (que é o C1), como a seguir:

C1x1 = C1
C1x2 = 182
C1x3 = 243
C1x4 = 304
C1X5 = 3C5
C1x6 = 486
C1x7 = 547
C1x8 = 608
C1x9 = 6C9
C1xA = 78A
C1xB = 84B
C1xC = 90C
C1xD = 9CD
C1xE = A8E
C1xF= B4F
C1x10 = C10

```
  B54A |C1
- B4F   F
    5
```

O dividendo é maior do que o divisor. Então, pela tabuada, vemos a linha a ser usada é a décima quinta.

```
  B54A |C1
- B4F   F0
   5A
```

Agora baixamos o A e, como o novo dividendo é menor do que o divisor, colocamos 0 no quociente e o resto da divisão fica sendo 5A.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta aula vimos como trabalhar as quatro operações aritméticas nas bases binária, octal e hexadecimal.

São algoritmos semelhantes usados nas três bases (assim como na base decimal) e, embora pareça complicado a princípio, vemos com a prática que é muito simples trabalhar essas operações.

O mais importante é que, como qualquer atividade ligada à matemática, é fundamental a prática e repetição de exercícios para consolidar o aprendizado.

Como sugestão, utilize a calculadora do Windows, na versão programador, e pratique bastante até consolidar seu conhecimento.

Na próxima aula veremos estudaremos as portas lógicas que compõem os circuitos existentes no computador.

Até lá!

MATERIAIS COMPLEMENTARES

Assista a esse vídeo bem didático com exemplos de multiplicação em octal. Link: https://www.youtube.com/watch?v=3kStGiYGmkc&t=44s.

Nesse material você poderá ler um pouco sobre a importância da base hexadecimal. Link: https://canaltech.com.br/produtos/O-que-e-sistema-hexadecimal/.

REFERÊNCIAS

STALLINGS, William. *Arquitetura e organização de computadores: projeto para o desempenho*. 8ª edição. Editora Pearson. Livro (642 p.). ISBN 9788576055648. Disponível em: <https://middleware-bv.am4.com.br/SSO/iesb/9788576055648>. Acesso em: 16 out. 2022.

TANENBAUM, Andrew S. *Sistemas operacionais modernos*. 3ª edição. Editora Pearson. Livro (674 p.). ISBN 9788576052371. Disponível em: <https://middleware-bv.am4.com.br/SSO/iesb/9788576052371>. Acesso em: 16 out. 2022.

TANENBAUM, Andrew S. *Organização estruturada de computadores*. 6ª edição. Editora Pearson. Livro (628 p.). ISBN 9788581435398. Disponível em: <https://middleware-bv.am4.com.br/SSO/iesb/9788581435398>. Acesso em: 16 out. 2022.