# Primeira Lista de Contabilometria

Pedro Schuler

03 de novembro de 2025

# 1 Primeira Lista de Exercícios

# Questão 1

## Letra a

| Empresa | Retorno (Y) | Agressividade (X) | $X \times Y$ | $X^2$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 3.0 | 25 | 75 | 625 |
| B | 3.5 | 28 | 98 | 784 |
| C | 3.6 | 35 | 126 | 1225 |
| D | 3.1 | 20 | 62 | 400 |
| E | 3.3 | 25 | 82.5 | 625 |
| F | 3.8 | 30 | 114 | 900 |
| G | 4.0 | 35 | 140 | 1225 |
| H | 3.1 | 25 | 77.5 | 625 |
| I | 3.2 | 20 | 64 | 400 |
| J | 3.5 | 30 | 105 | 900 |
| $\sum$ | 34.1 | 273 | 944 | 7709 |

$\beta_1$ pode ser definido da seguinte forma:

$$\beta_1 = \frac{n\sum(X_iY_i) - \sum Y_i \sum X_i}{n\sum X^2 - (\sum X_i)^2}$$

Agora podemos utilizar os valores da tabela criada para calcular $\beta_1$.

$$\beta_1 = \frac{10 \times 944 - 273 \times 34.1}{10 \times 7709 - (273)^2} = 0.05103$$

$\beta_0$ pode ser definido como $\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \times \bar{X}$, logo:

$$\beta_0 = \frac{34.1}{10} + 0.05103 \times \frac{273}{10} = 2.01688$$

Agora que temos os valores de $\beta_0$ e $\beta_1$ podemos interpretar o seguinte: quando a agressividade tributária for igual a 0, o retorno sobre o investimento das empresas será, em média, igual a 2,01688 mil reais. O $\beta_1$ nos informa que, quando a agressividade tributária aumenta em mil reais, o retorno sobre o investimento aumenta, em média, em 0,05103 mil reais, ou seja, aumenta em R$ 51,03.

## Letra b

A variância do erro, denotada por $\sigma^2$, é um parâmetro populacional e, portanto, desconhecido. Para estimá-lo podemos utilizar os seguintes estimadores:

$$s^2 = \frac{\sum \hat{u_i^2}}{n-k} \quad \hat{\sigma^2} = \frac{\sum \hat{u_i^2}}{n}$$

Inicialmente precisamos calcular o somatório do quadrado dos resíduos (SQR).

$$SQR = \sum (Y - \widehat{Y})^2$$

$$\begin{aligned}
[3.0 - (\beta_0 + \beta_1 \times 25)]^2 &= 0.08563 \\
[3.5 - (\beta_0 + \beta_1 \times 28)]^2 &= 0.00295 \\
[3.6 - (\beta_0 + \beta_1 \times 35)]^2 &= 0.04118 \\
[3.1 - (\beta_0 + \beta_1 \times 20)]^2 &= 0.00391 \\
[3.3 - (\beta_0 + \beta_1 \times 25)]^2 &= 0.00005 \\
[3.8 - (\beta_0 + \beta_1 \times 30)]^2 &= 0.06361 \\
[4.0 - (\beta_0 + \beta_1 \times 35)]^2 &= 0.03884 \\
[3.1 - (\beta_0 + \beta_1 \times 25)]^2 &= 0.03711 \\
[3.2 - (\beta_0 + \beta_1 \times 20)]^2 &= 0.02641 \\
[3.5 - (\beta_0 + \beta_1 \times 30)]^2 &= 0.00228 \\
SQR &= 0.30197
\end{aligned}$$

Portanto:

$$s^2 = \frac{0.30197}{10-8} = 0.03775 \quad \hat{\sigma^2} = \frac{0.30197}{10} = 0.03020$$

Entretanto, vamos preferir utilizar $s^2$ como estimador da variância do erro, pois ele é um estimador não viesado.

## Letra c

Para calcularmos a variância e covariância das variáveis em questão podemos utilizar uma abordagem matricial. A matriz de variância-covariância dos estimadores é dada por:

$$VarCov = S^2 \times (X'X)^{-1}$$

Como já obtivemos $S^2$ na questão anterior, precisamos apenas calcular $(X'X)^{-1}$.

$$(X'X) = \begin{bmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{bmatrix}$$

E, portanto:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \times \begin{bmatrix} \sum X^2 & -\sum X \\ -\sum X & n \end{bmatrix}$$

Logo, temos que:

$$VarCov = S^2 \times (X'X)^{-1} = 0.03775 \times \frac{1}{10 \times 7709 - (273)^2} \times \begin{bmatrix} 7709 & -273 \\ -273 & 10 \end{bmatrix}$$

$$VarCov = \begin{bmatrix} 0.11363 & -0.00402 \\ -0.00402 & 0.00015 \end{bmatrix}$$

Por fim, temos que:

$$Var(\beta_0) = 0,11363$$
$$Var(\beta_1) = 0,00015$$

## Letra d

A hipótese que garante o não-viés dos estimadores é a hipótese de exogeneidade (H1), que diz que $E(u|X) = 0$.

## Letra e

A variância de $Var(\beta_0 + \beta_1)$ é dada por:

$$Var(\beta_0 + \beta_1) = Var(\beta_0) + Var(\beta_1) + 2 \times Cov(\beta_0 \beta_1)$$

Da letra C temos que:

$$Var(\beta_0 + \beta_1) = 0,11363 + 0,00015 + 2 \times (-0,00402)$$

$$Var(\beta_0 + \beta_1) = 0,10574$$

## Letra f

Sabemos que $R^2$ é dado por:

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT}$$

E da letra b temos que $SQR = 0,30197$. Agora precisamos calcular $SQT$.

$$SQT = \sum (Y - \bar{Y})^2$$
$$(3.0 - 3.41)^2 = 0.1681$$
$$(3.5 - 3.41)^2 = 0.0081$$
$$(3.6 - 3.41)^2 = 0.0361$$

$$(3.1-3.41)^2 = 0.0961$$
$$(3.3-3.41)^2 = 0.0121$$
$$(3.8-3.41)^2 = 0.1521$$
$$(4.0-3.41)^2 = 0.3481$$
$$(3.1-3.41)^2 = 0.0961$$
$$(3.2-3.41)^2 = 0.0441$$
$$(3.5-3.41)^2 = 0.0081$$
$$SQT = 0.9690$$

Portanto: $R^2 = 1 - \frac{0.30197}{0.9690} = 0.68837$

## Letra g

O modelo calculado foi:

$$retorno_i = 2.01688 + 0.05103 \times BTD_i + u_i$$

Substituindo o valor apropriado de BTD, temos:

$$retorno_i = 2.01688 + 0.05103 \times 29 = 3,49675$$

# Questão 2

## Letra a

| Preço (Y) | Receita Líquida (X) |
|---|---|
| 10 | 25 |
| 15 | 30 |
| 30 | 35 |
| 16 | 28 |
| 20 | 25 |
| 12 | 25 |

Utilizaremos uma abordagem matricial para derivar os estimadores de MQO. As matrizes $X$ e $Y$ são dadas por:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 25 \\ 1 & 30 \\ 1 & 35 \\ 1 & 28 \\ 1 & 25 \\ 1 & 25 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 30 \\ 16 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Também podemos escrever a matrix $X'$ da seguinte forma:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 30 & 35 & 28 & 25 & 25 \end{bmatrix}$$

Logo, multiplicando $X'$ por $X$, obtemos:

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 168 \\ 168 & 4784 \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz $X'X$ obtemos:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{6 \times 4784 - 168^2} \times \begin{bmatrix} 4784 & -168 \\ -168 & 6 \end{bmatrix}$$

Podemos também obter a matriz $X'Y$, que é dada por:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 103 \\ 2998 \end{bmatrix}$$

Por fim, obtemos o produto de $(X'X)^{-1}$ por $X'Y$:

$$(X'X)^{-1}X'Y = \beta = \frac{1}{6 \times 4784 - 168^2} \times \begin{bmatrix} -10912 \\ 684 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -22,73333 \\ 1,425 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Logo, podemos interpretar que, quando a receita líquida é igual a 0, o preço do ativo é, em média, de R$ -22,73333. Além disso, quando a receita líquida aumenta em (1) mil reais, o preço do ativo aumenta, em média, em R$ 1,425.

## Letra b

A variância dos estimadores pode ser calculada utilizando a seguinte fórmula:

$$VarCov = S^2 \times (X'X)^{-1}$$

Primeiramente precisamos calcular $S^2$. Para isso, precisamos calcular o somatório do quadrado dos resíduos (SQR).

$$SQR = \sum (Y - \widehat{Y})^2$$

$$[10 - (\beta_0 + \beta_1 \times 25)]^2 = 8.36176$$
$$[15 - (\beta_0 + \beta_1 \times 30)]^2 = 25.16698$$
$$[30 - (\beta_0 + \beta_1 \times 35)]^2 = 8.17005$$
$$[16 - (\beta_0 + \beta_1 \times 28)]^2 = 1.36112$$
$$[20 - (\beta_0 + \beta_1 \times 25)]^2 = 50.52836$$

$$[12-(\beta_0+\beta_1\times 25)]^2 = 0.79508$$

$$SQR = 94.38335$$

Logo, sabendo que $S^2 = \frac{SQR}{n-k}$:

$$S^2 = \frac{94.38335}{6-2} = 23.59584$$

Agora podemos calcular a matriz $VarCov$:

$$VarCov = 23.59584 \times (X'X)^{-1}$$

$$VarCov = \frac{23.59584}{6\times 4784 - 168^2} \times \begin{bmatrix} 4784 & -168 \\ -168 & 6 \end{bmatrix}$$

$$VarCov = \begin{bmatrix} 235.17187 & -8.25854 \\ -8.25854 & 0.29495 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos:

$$Var(\beta_0) = 235,17187$$

$$Var(\beta_1) = 0,29495$$

## Letra c

| Preço (Y) | Receita Líquida ($X_1$) | Escolaridade ($X_2$) |
|---|---|---|
| 10 | 25 | 22 |
| 15 | 30 | 20 |
| 30 | 35 | 24 |
| 16 | 28 | 16 |
| 20 | 25 | 18 |
| 12 | 25 | 24 |

Por se tratar de uma regressão múltipla, precisaremos novamente adotar uma abordagem matricial. As matrizes relevantes são:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 25 & 22 \\ 1 & 30 & 20 \\ 1 & 35 & 24 \\ 1 & 28 & 16 \\ 1 & 25 & 18 \\ 1 & 25 & 24 \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \\ 30 \\ 16 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 30 & 35 & 28 & 25 & 25 \\ 22 & 20 & 24 & 16 & 18 & 24 \end{bmatrix}$$

Primeiramente obtemos $X'X$:

$$X'X = \begin{bmatrix} 6 & 168 & 124 \\ 168 & 4784 & 3488 \\ 124 & 3488 & 2616 \end{bmatrix}$$

Obtemos também o determinante da matriz $X'X$, que é igual a:

$$det(X'X) = 24064$$

Invertendo a matriz $X'X$ obtemos:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{24064} \times \begin{bmatrix} 348800 & -6976 & -7232 \\ -6976 & 320 & -96 \\ -7232 & -96 & 480 \end{bmatrix}$$

Obtemos agora a matriz $X'Y$:

$$X'Y = \begin{bmatrix} 103 \\ 2998 \\ 2144 \end{bmatrix}$$

Podemos então calcular os coeficientes $\beta$:

$$(X'X)^{-1}X'Y = \beta = \frac{1}{24064} \times \begin{bmatrix} -493056 \\ 35008 \\ -3584 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20.48936 \\ 1.45479 \\ -0.14894 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

## Letra d

A literatura sugere uma relação positiva entre a escolaridade e o preço do ativo, ou seja, espera-se que $\beta_2 > 0$. Entretanto, o valor obtido para $\beta_2$ foi $-0,14894$, indicando uma relação negativa entre as variáveis. Existem evidências de que a hipótese de exogeneidade foi violada, uma vez que $\beta_1^{simples} \neq \beta_1^{mltipla}$.

## Letra e

Para calcularmos a variância dos estimadores, precisamos novamente calcular $S^2$. Para isso, precisamos calcular o somatório do quadrado dos resíduos (SQR).

$$SQR = \sum(Y - \widehat{Y})^2$$

$$[10-(\beta_0+\beta_1\times 25+\beta_2\times 22)]^2 = 6.77930$$
$$[15-(\beta_0+\beta_1\times 30+\beta_2\times 20)]^2 = 26.78621$$
$$[30-(\beta_0+\beta_1\times 35+\beta_2\times 24)]^2 = 9.89901$$

$$[16-(\beta_0+\beta_1\times 28+\beta_2\times 16)]^2 = 3.46600$$
$$[20-(\beta_0+\beta_1\times 25+\beta_2\times 18)]^2 = 46.24721$$
$$[12-(\beta_0+\beta_1\times 25+\beta_2\times 24)]^2 = 0.09353$$
$$SQR = 93.27126$$

Logo, sabendo que $S^2 = \frac{SQR}{n-k}$:

$$S^2 = \frac{93.27126}{6-3} = 31.09042$$

Sabendo também que $VarCov = S^2 \times (X'X)^{-1}$, temos que:

$$VarCov = 31.09042 \times (X'X)^{-1}$$

$$VarCov = \frac{31.09042}{24064} \times \begin{bmatrix} 348800 & -6976 & -7232 \\ -6976 & 320 & -96 \\ -7232 & -96 & 480 \end{bmatrix}$$

$$VarCov = \begin{bmatrix} 450.64572 & -9.01291 & -9.34366 \\ -9.01291 & 0.41344 & -0.12403 \\ -9.34366 & -0.12403 & 0.62015 \end{bmatrix}$$

Portanto, temos:

$$Var(\beta_0) = 450,64572$$
$$Var(\beta_1) = 0,41344$$
$$Var(\beta_2) = 0,62015$$

# Questão 3

Sabemos que $\beta_1 = \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2}$ e que $\beta_0 = \bar{Y} - \beta_1 \times \bar{X}$.

Utilizando uma abordagem matricial temos as seguintes matrizes:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ ... & ... \\ 1 & X_n \end{bmatrix} \quad Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ ... \\ Y_n \end{bmatrix} \quad X' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ X_1 & X_2 & ... & X_n \end{bmatrix}$$

Podemos obter, então, a matriz $X'X$:

$$X'X = \begin{bmatrix} n & \sum X \\ \sum X & \sum X^2 \end{bmatrix}$$

Invertendo a matriz $X'X$ obtemos:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \times \begin{bmatrix} \sum X^2 & -\sum X \\ -\sum X & n \end{bmatrix}$$

Obtemos também a matriz $X'Y$:

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y \\ \sum XY \end{bmatrix}$$

Por fim, obtemos o produto de $(X'X)^{-1}$ por $X'Y$:

$$(X'X)^{-1}X'Y = \beta = \frac{1}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \times \begin{bmatrix} \sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY \\ n\sum XY - \sum X \sum Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

O coeficiente $\beta_1$ calculado pela abordagem matricial concorda com o valor conhecido de $\beta_1$. Entretanto precisamos mostrar que o valor obtido de $\beta_0$ também é equivalente ao valor conhecido. Podemos adotar uma prova por contradição, para fazer isso escreveremos que o $\beta_0$ obtido pela via matricial é igual ao valor conhecido de $\beta_0$.

$$\frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \bar{Y} - \beta_1 \bar{X1}$$

Escrevendo $\bar{Y}$ e $\bar{X1}$ em termos de somatórios e substituindo $\beta_1$ pela sua forma conhecida, temos:

$$\frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\sum Y}{n} - \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \times \frac{\sum X}{n}$$

$$\frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} + \frac{n\sum XY - \sum X \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} \times \frac{\sum X}{n} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$\frac{\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} + \frac{\sum X(n\sum XY - \sum X \sum Y)}{n(n\sum X^2 - (\sum X)^2)} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$\frac{n(\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY) + \sum X(n\sum XY - \sum X \sum Y)}{n(n\sum X^2 - (\sum X)^2)} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$\frac{n(\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY) + n\sum X \sum XY - \sum X \sum X \sum Y}{n(n\sum X^2 - (\sum X)^2)} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$\frac{n(\sum X^2 \sum Y - \sum X \sum XY + \sum X \sum XY) - (\sum X)^2 \sum Y}{n(n\sum X^2 - (\sum X)^2)} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$\frac{n\sum X^2 \sum Y - (\sum X)^2 \sum Y}{n(n\sum X^2 - (\sum X)^2)} = \frac{\sum Y}{n}$$

$$\frac{n\sum X^2 \sum Y - (\sum X)^2 \sum Y}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} = \sum Y$$

$$n\sum X^2 \sum Y - (\sum X)^2 \sum Y = \sum Y(n\sum X^2 - (\sum X)^2)$$

$$n\sum X^2\sum Y - (\sum X)^2\sum Y = n\sum Y\sum X^2 - \sum Y(\sum X)^2$$
$$n\sum X^2\sum Y - (\sum X)^2\sum Y = n\sum Y\sum X^2 - (\sum X)^2\sum Y$$
$$n\sum X^2\sum Y = n\sum Y\sum X^2$$
$$n\sum X^2\sum Y = n\sum X^2\sum Y$$
$$n = n$$

Portanto, o valor de $\beta_0$ obtido pela via matricial é equivalente ao valor conhecido de $\beta_0$.

Precisamos agora mostrar que, ao atendermos H1, os valores dos coeficiente obtidos são não viesados. Para esta condição ser satisfeita precisamos que $\mathbb{E}(\hat{\beta}) = \beta$

Sabemos que:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

E sabemos que:

$$Y = X\beta + u$$

Substituindo $Y$ na equação de $\hat{\beta}$, temos:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'(X\beta + u)$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'u$$
$$\hat{\beta} = I\beta + (X'X)^{-1}X'u$$
$$\hat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'u$$
$$\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid X) = \mathbb{E}(\beta + (X'X)^{-1}X'u \mid X)$$
$$\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid X) = \mathbb{E}(\beta \mid X) + \mathbb{E}((X'X)^{-1}X' \mid X)\mathbb{E}(u \mid X)$$

Pela hipótese de exogeneidade sabemos que $\mathbb{E}(u \mid X) = 0$, logo:

$$\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid X) = \mathbb{E}(\beta \mid X) + \mathbb{E}((X'X)^{-1}X' \mid X) \times 0$$

$$\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid X) = \mathbb{E}(\beta \mid X)$$
$$\mathbb{E}(\hat{\beta} \mid X) = \beta$$