UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA
SISTEMAS DE CONTROLE II - ELE0522

Docente:
Gabriel Pereira de Oliveira

Discente:
Douglas Wilian Lima Silva
Gutembergue Ferreira da Silva
Jeffet Matheus Cardoso da Silva
Pedro Artur Fernandes Varela de Lira
Roger José Zacarias da Conceição

Implementação de controles no domínio da frequência

Natal - RN
Novembro de 2023

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo o controle da velocidade e da posição de um motor de corrente contínua (DC) no domínio da frequência, de modo que esse controle aconteça baseado em dois cenários distintos, sendo o primeiro cenário dedicado ao controle da velocidade e o segundo cenário dedicado ao controle da posição angular da máquina.

Vale ressaltar que, em ambos os cenários, o trabalho envolve o projeto e a implementação de sistemas de controle que atendam às margens de fase e de ganho estabelecidas, garantindo um desempenho adequado do motor DC nas dimensões de velocidade (Cenário 1) e posição (Cenário 2). Além disso, o trabalho considera a frequência de corte e utiliza uma aproximação com base na frequência de cruzamento de ganho para otimizar o controle.

Dessa forma, partindo da análise elétrica do motor, modelou-se todo o sistema e foi obtida uma equação diferencial ordinária no domínio do tempo, que, aplicando La Place, levou a equação para o domínio da frequência, o que possibilitou a obtenção da função de transferência que dita o funcionamento do motor e que é o coração desse trabalho. Feito isso, após traçar o Diagrama de Bode da conhecida função de transferência do motor, fez-se, então, o projeto e a simulação dos controladores, buscando o atendimento das condições impostas no problema para ambos cenários. Por fim, obteve-se as respostas dos sistemas dos dois cenários, já com os seus respectivos controladores projetados e cumprindo os requisitos impostos para o êxito da resolução do problema.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

Hodiernamente, há grande interesse no controle de sistemas físicos dos mais variados tipos, para que estes atendam à finalidade dos processos nos quais eles estão inseridos, tendo em vista que a industrialização e as demandas tecnológicas utilizam diversos sistemas, dos mais simples aos mais complexos, isolados ou interconectados entre si. Nesse sentido, a implementação do controlador adequado é feita mediante a análise do sistema e o atendimento de critérios de funcionamento com relação ao tempo ou a frequência, a depender do intuito. Sendo assim, este trabalho acadêmico tem como objetivo a modelagem de um sistema elétrico - um motor elétrico, a saber - e o projeto de um controlador que atenda a requisitos no domínio da frequência, em dois cenários distintos, buscando, inicialmente, controlar a velocidade do motor e, posteriormente, sua posição angular.

2 Desenvolvimento

O sistema proposto consiste no controle de posição e velocidade de um motor DC utilizando os métodos de resposta em frequência. Para tal, o desenvolvimento do projeto é dado de forma sequencial, partindo da modelagem do sistema físico equivalente ao motor, até a construção das estratégias de controle visando atender os 2 cenários propostos inicialmente. A figura 1 abaixo apresenta a representação física/elétrica do referido sistema.

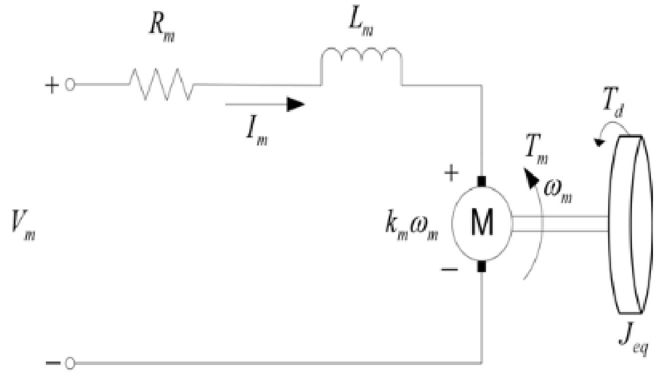

Figura 1: Esquema elétrico do motor DC.

2.1 Cenário 1

Neste cenário, é requerido o controle de velocidade do motor em 150 rad/s, de modo que o erro em regime da planta seja nulo, mantendo uma margem de fase ($MF \geq 100°$), uma margem de ganho ($MG > 6$ dB) e a frequência de corte (ω_b) maior ou igual àquela inicialmente encontrada.

2.1.1 Modelagem

Para a realização da modelagem do sistema é necessário partir dos conceitos que circundam as definições dos sistemas eletromecânicos, relacionando as variáveis elétricas do circuito RL apresentado, com as variáveis mecânicas acopladas à ele. Desse modo, percorre-se a malha de Kirchhoff observada, de forma a obter a equação 1 apresentada.

$$v_m(t) - R_m i_m(t) - L\frac{di(t)}{dt} - k_m\omega_m(t) = 0 \tag{1}$$

É possível modelar o torque gerado pelo motor através da corrente que o circula, como $\tau(t) = k_m i(t)$, em que nesse caso, $i(t) = i_m(t)$. Por consequência, pode-se definir as expressões 2 e 3 que relacionam essas grandezas.

$$\tau(t) = k_m i_m(t) \tag{2}$$

$$\dot{\tau}(t) = k_m \dot{i}_m(t) \tag{3}$$

Isolando $i_m(t)$ e fazendo a substituição de 2 e 3 em 1, obtêm-se o resultado apresentado na equação 4.

$$v_m(t) = R_m \frac{\tau(t)}{k_m} + L\frac{\dot{\tau}(t)}{k_m} + k_m \omega_m(t) \tag{4}$$

Vale ressaltar que, o objetivo da modelagem para esse caso é a obtenção de uma equação diferencial que relacione a tensão aplicada ao motor $v_m(t)$ com a rotação gerada por ele $\omega_m(t)$. Dessa forma, é necessário relacionar o torque gerado pelo sistema, com a velocidade angular desejada.

Para tal, analisa-se a relação torque-inércia do sistema, já que através da inércia, o torque é relacionado à velocidade angular. Partindo dessa análise, é possível definir a expressão 5 mostrada a seguir.

$$\tau(t) = J_{eq}\omega_m(t) + b\omega_m(t) \tag{5}$$

Em que J_{eq} é a inércia equivalente do sistema e b o coeficiente de amortecimento devido ao atrito no eixo do motor. As descrições técnicas da máquina não apresentam o coeficiente b, portanto, torna-se necessário relacioná-lo à constante de tempo mecânica do motor τ_m através da seguinte expressão, em que J_m é a inércia do motor

$$\tau_m = \frac{J_m}{b} \implies b = \frac{J_m}{\tau_m} \tag{6}$$

Por fim, o único termo desconhecido na equação é inércia equivalente do sistema, que pode ser facilmente encontrada pela soma da inércia do motor (J_m) com a inércia do disco ligado à ele (J_d), conforme a equação 7.

$$J_{eq} = J_m + J_d \tag{7}$$

Conforme mostra (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, v. 1, p. 263), o momento de inércia de um disco pode ser obtido pela metade do produto entre a massa do mesmo e o quadrado do seu raio, fazendo com que o resultado possa ser obtido em 8.

$$J_{eq} = J_m + \frac{M_1 r_1^2}{2} \tag{8}$$

Substituindo todos os resultados obtidos em 4, obtêm-se a equação diferencial que modela o sistema, conforme apresentado abaixo.

$$v_m(t) = \frac{L}{k_m}\left(J_m + \frac{M_1 r_1^2}{2}\right)\ddot{\omega}_m(t) + \left[\frac{R_m}{k_m}\left(J_m + \frac{M_1 r_1^2}{2}\right) + \frac{J_m L}{k_m \tau_m}\right]\dot{\omega}_m(t) +$$

$$+\left(\frac{R_m J_m}{k_m \tau_m} + k_m\right)\omega_m(t) \tag{9}$$

Fazendo as devidas substituições dos coeficientes com aqueles informados nas características técnicas do motor DC, pode-ser representar a EDO conforme a equação 10.

$$v_m(t) = (3,6053 \times 10^{-7})\ddot{\omega}_m(t) + (4,6643 \times 10^{-3})\dot{\omega}_m(t) + (9,9188 \times 10^{-2})\omega(t) \tag{10}$$

Com o intuito da obtenção da função de transferência do sistema, pode-se aplicar a transformada de Laplace nos dois lados da equação, levando a EDO para o domínio da frequência, concluindo, então, o objetivo inicial da modelagem que consiste na obtenção do modelo em domínio da frequência da resposta da velocidade do motor em função da tensão aplicada.

$$V_m(s) = (3,6053 \times 10^{-7})s^2 W_m(s) + (4,6643 \times 10^{-3})sW_m(s) + (9,9188 \times 10^{-2})W_m(s)$$

$$G_p(s) = \frac{W_m(s)}{V_m(s)} = \frac{1}{(3,6053 \times 10^{-7})s^2 + (4,6643 \times 10^{-3})s + (9,9188 \times 10^{-2})} \tag{11}$$

Simplificando a expressão faz-se:

$$G_p(s) = \frac{2,7737 \times 10^6}{(s + 21,3)(s + 12916,04)} \tag{12}$$

2.1.2 Parâmetros de controle

Obtendo a modelagem do sistema, é necessário realizar a verificação dos parâmetros da planta de forma a verificar quais dos requisitos estão sendo atendidos sem a implementação de um sistema de controle e qual controlador será necessário para corrigir aqueles não atendidos.

O erro em regime do sistema para uma entrada degrau é dado conforme a expressão 13 abaixo, considerando uma entrada degrau unitário.

$$e(\infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{R(s)}{1 + G_p(s)} \tag{13}$$

Em que $R(s)$ é a entrada. Dessa forma, pode-se definir o erro em regime como sendo:

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + 10,08209} \implies e(\infty) = 0,0902357 \tag{14}$$

De forma sequencial, os gráficos de Bode de magnitude e fase podem ser observados na figura 2 abaixo. Neles, pode-se observar o comportamento da planta do sistema no domínio da frequência.

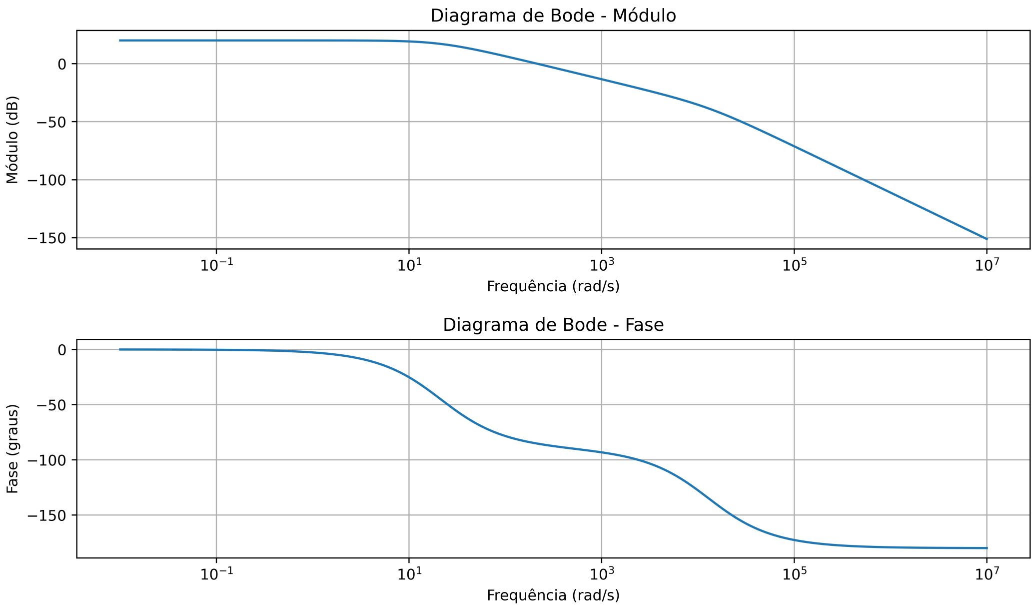

Figura 2: Gráficos de Bode da planta.

Além disso, a figura 3 apresenta o destaque da margem de fase do sistema, que é observável numericamente. No entanto, a margem de ganho não está representada já que em 2 que o diagrama não cruza a fase de -180° o que condiz à uma margem $MG = \infty$.

Nota-se que a frequência de cruzamento de ganho (ω_{cg}) é encontrada com um valor de 213,68 rad/s. Para esse valor, a magnitude da planta possui um valor de -0,001 dB. Isso ocorre, devido a representação discreta do sinal para a criação das curvas de Bode, que não garante que o ponto exato de 0 dB possua um correspondente no gráfico.

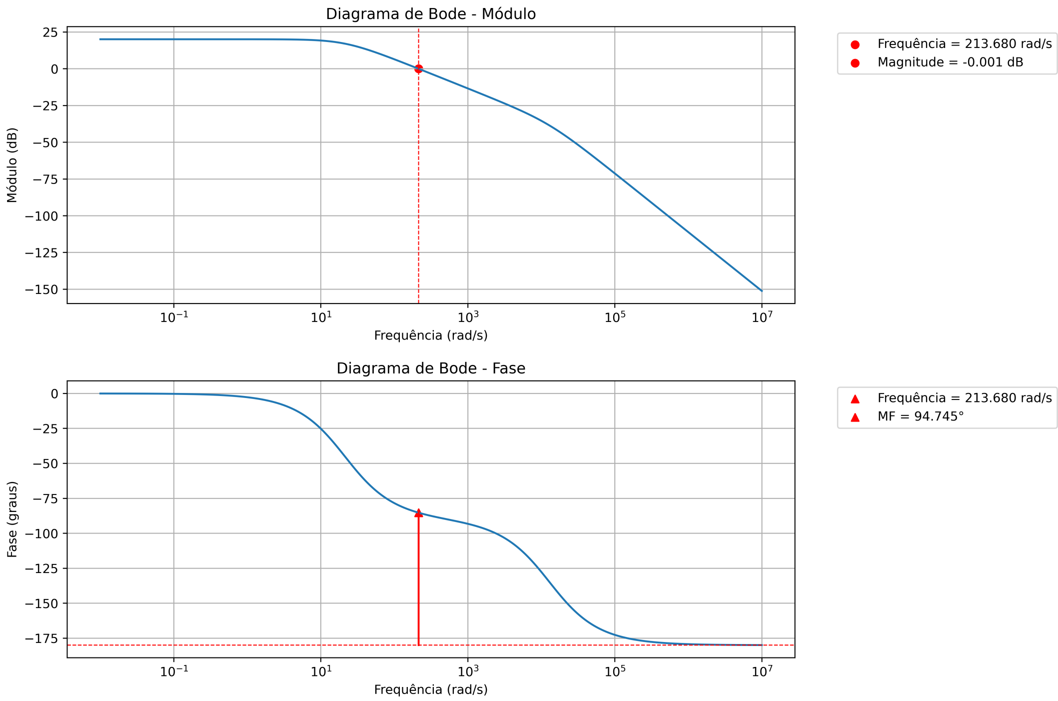

Figura 3: Margens do sistema.

Percebe-se, então, que a margem de fase da planta original é de 94,745°, para a frequência ω_{cg} já citada.

Com base nos parâmetros apresentados, é possível observar que apenas o requisito de margem de ganho está sendo atendido. É necessária a implementação de uma parte integrativa para zerar o erro em regime e, de forma semelhante, a implementação de uma parte derivativa para corrigir a margem de fase para a frequência desejada. Fazendo com que, para o atendimento dos requisitos o controlador ideal aplicado seja o PID.

2.1.3 Implementação PID

No domínio da frequência, a planta de um controlador proporcional integrativo derivativo é dada através da expressão 15. Tal construção só é válida por meio da representação da parte integrativa T_I como sendo 4 vezes o valor da parte derivativa T_D. Dessa forma, durante o processo de descrição dos parâmetros, a preocupação se dá apenas com os coeficientes proporcional e derivativo.

$$G_c(s) = \frac{\frac{K_C}{4T_D}(2T_D s + 1)^2}{s} \tag{15}$$

Nota-se que o PID adiciona dois zeros dimensionáveis e um polo na origem para correção do erro em regime. Esses zeros são responsáveis pelo aumento da margem de fase, enquanto o polo tende a piorá-la.

Como para o atendimento dos requisitos deve-se manter ou aumentar a frequência de corte anterior, todo o projeto será pensado de forma a manter a frequência de cruzamento de ganho $\omega_{cg} = 213,68$ rad/s.

É necessário que o acréscimo do controlador adicione a margem de fase faltante para que o sistema atinja os requisitos desejados na frequência ω_{cg}, por conseguinte, torna-se essencial que a fase do controlador seja dada da seguinte maneira.

$$\angle G_c(j\omega cg) = \phi_f - \phi_i \tag{16}$$

Em que ϕ_f é a margem de fase desejada e ϕ_i a margem já obtida pela planta.

$$\angle \frac{\frac{K_C}{4T_D}(2T_D j\omega_{cg} + 1)^2}{j\omega_{cg}} = \phi_f - \phi_i \implies 2\tan^{-1}(2T_D\omega_{cg}) - 90^\circ = \phi_f - \phi_i \tag{17}$$

Através da expressão 17 é possível a obtenção do valor de T_D, utilizando as margens já obtidas anteriormente.

$$2\tan^{-1}(2T_D \cdot 213,68) - 90^\circ = 100^\circ - 94,745^\circ$$
$$\tan^{-1}(427,36T_D) = 47,6275$$

$$T_D = \frac{\tan(47,6275)}{427,36} \implies T_D = 0,002565 \tag{18}$$

De forma semelhante, é necessário que ao adicionar o controlador, para a frequência de 213,68 rad/s, a magnitude se mantenha em 0 dB. Ou seja, o módulo do produto entre as duas funções de transferência deve ser igual a 1.

$$|G_c(j\omega_{cg})||G_p(j\omega_{cg})| = 1 \tag{19}$$

$$\frac{|\frac{K_C}{4T_D}(2T_D j\omega_{cg} + 1)^2|}{|j\omega_{cg}|} \cdot \frac{|2,7737 \times 10^6|}{|(j\omega_{cg} + 21,3)(j\omega_{cg} + 12916,04)|} = 1 \tag{20}$$

$$\frac{\frac{K_C}{4T_D}(4T_d^2\omega_{cg}^2 + 1)}{\omega_{cg}} = \frac{\sqrt{\omega_{cg}^2 + 21,3^2} \cdot \sqrt{\omega_{cg}^2 + 12916,04^2}}{2,7737 \times 10^6} \tag{21}$$

$$1,00422K_C = 1,00009 \implies K_C = 0,9959 \tag{22}$$

Através dos parâmetros encontrados, é possível evidenciar a função de transferência do controlador PID que atende os requisitos desejados, conforme a expressão 23 abaixo.

$$G_c(s) = \frac{0,0025445s^2 + 0,993959s + 97,06628}{s} \tag{23}$$

2.1.4 Resposta do sistema controlado

Com a obtenção da planta do controlador, faz-se a multiplicação com a planta do sistema de forma a representar a resposta final do sistema controlado. Em seguida, é visualizado o diagrama de bode objetivando conhecer o comportamento em frequência da malha de controle.

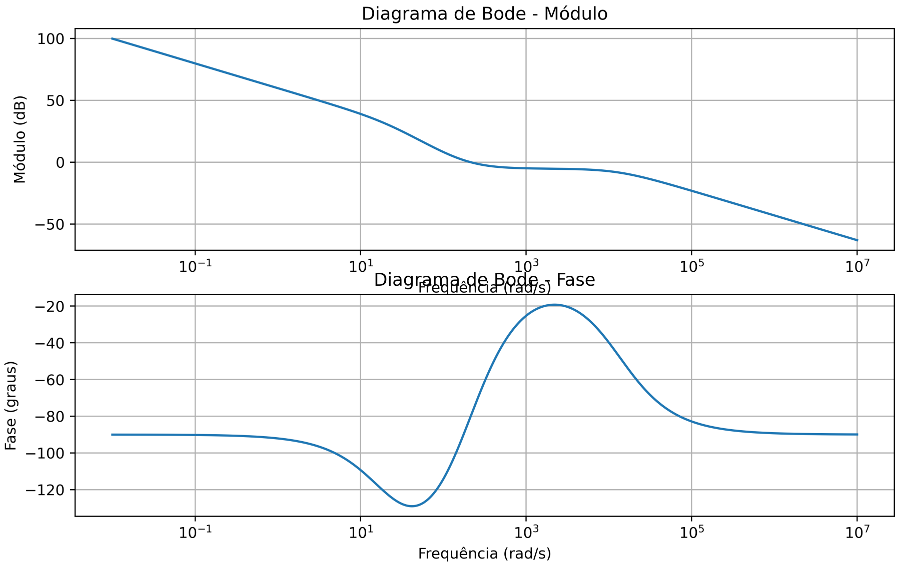

Figura 4: Diagramas de Bode da planta controlada.

Com a plotagem apresentada, torna-se necessário verificar as margens do sistema para o novo caso, observando a frequência ω_{cg} desejada e analisando se haverá a necessidade de ajuste dos parâmetros do controlador implementado. Dessa forma, as margens foram plotadas através do diagrama de bode, conforme apresenta a figura 5 abaixo.

Ela mostra que a margem de ganho continua infinita, já que não há o cruzamento com a fase de -180° e que, para a frequência de 213,68 rad/s, a margem de fase do sistema subiu de 94,745° para 99,772°. Dessa forma, a margem requisitada pode ser considerada atendida. Caso fosse necessário, poderiam ser feitos leves ajustes nos parâmetro, de forma a ultrapassar o valor de 100° para a margem de fase.

Pode-se, por exemplo, aumentar levemente o K_C para 1, obtendo:

$$G_c(s) = \frac{0,002565s^2 + s + 97,4658}{s} \tag{24}$$

Que por sua vez, geraria as margens apresentadas em 6, que atendem os requisitos por completo, aumentando levemente a frequência de corte em torno de 1 rad/s.

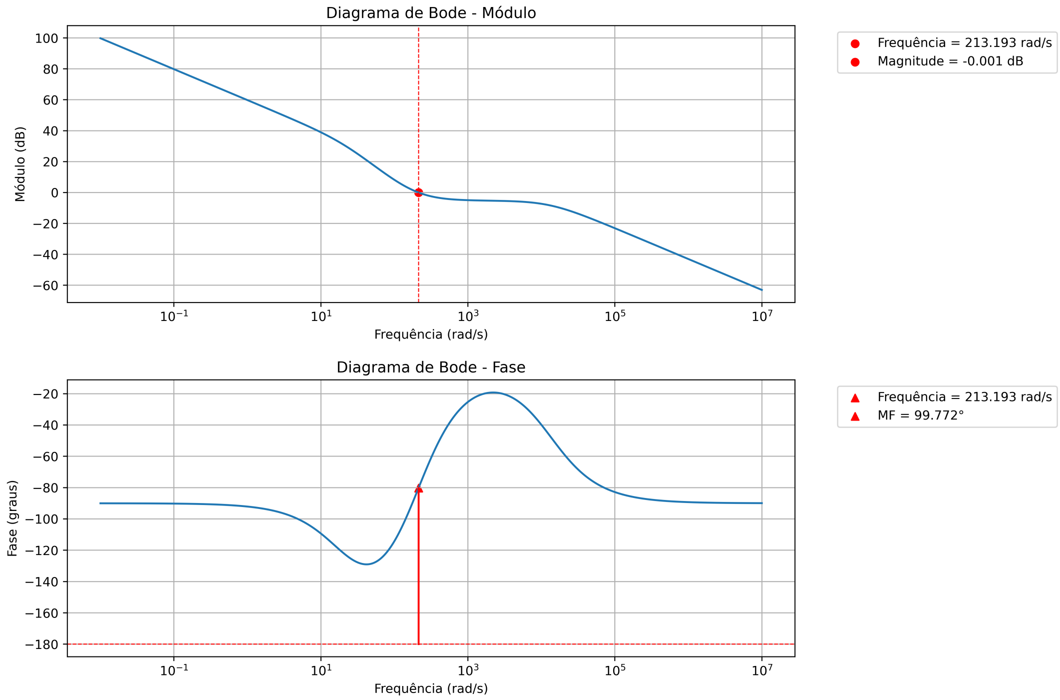

Figura 5: Margens do sistema controlado.

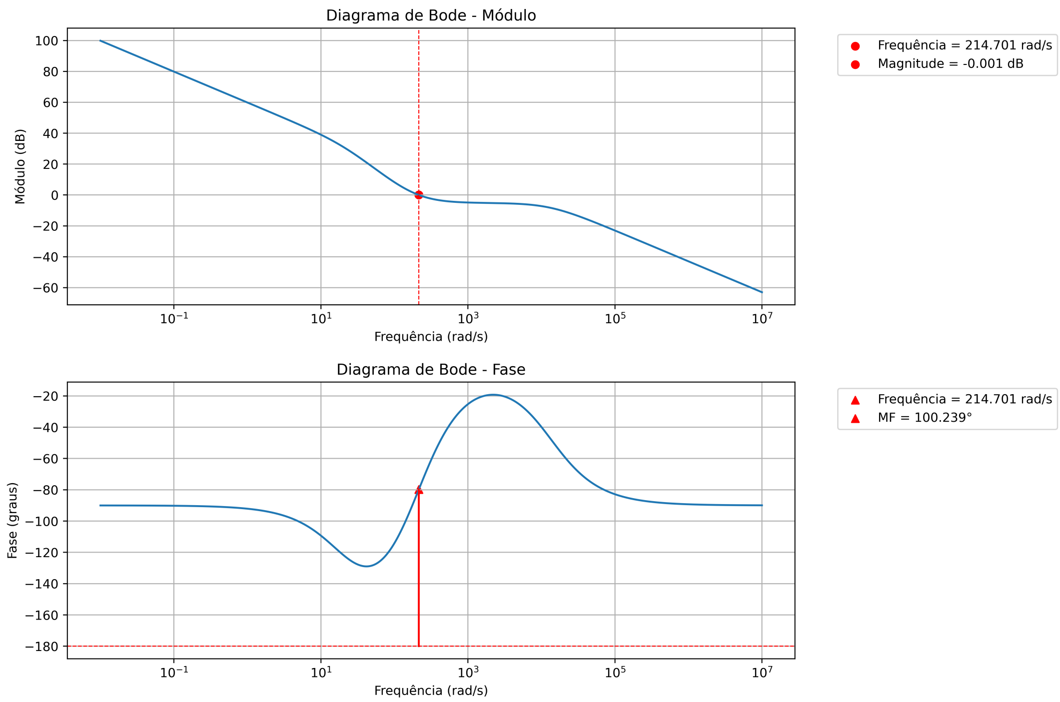

Figura 6: Margens do sistema ajustado.

2.2 Cenário 2

2.2.1 Modelagem

Para o segundo cenário, a situação é análoga e os parâmetros não se modificaram. Portanto, chega-se à mesma modelagem obtida na equação 12. Porém, pede-se a relação entre a entrada de tensão $V_m(s)$ e uma saída de posição $\Theta(s)$, não mais de velocidade $W_m(s)$.

Conforme mostrado em (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, v. 1), a relação entre velocidade e posição angular é dada pela equação 25 no domínio do tempo, ou pela equação 26, no domínio da frequência.

$$\omega_m(t) = \dot{\theta}_m(t) \tag{25}$$

$$\frac{\Theta_s(s)}{W_m(s)} = \frac{1}{s} \tag{26}$$

Com isso, é possível fazer o produto entre a relação velocidade e posição dada pela equação 26 com a função de transferência que relaciona a entrada de tensão $V_m(s)$ e a saída de velocidade $W_m(s)$ dada pela equação 12. O resultado desse produto expressa uma relação direta entra a entrada de tensão $V_m(s)$ e saída de posição $\Theta_s(s)$ (Equação 27).

$$G_p(s) = \frac{\Theta_s(s)}{W_m(s)} \cdot \frac{W_m(s)}{V_m(s)} = \frac{2,7737 \times 10^6}{s(s+21,3)(s+12916,04)} \tag{27}$$

2.2.2 Parâmetros de controle

Analogamente ao procedimento realizado no cenário 1, é necessário realizar a verificação dos parâmetros da planta de forma a verificar quais dos requisitos estão sendo atendidos sem a implementação de um sistema de controle e qual controlador será necessário para corrigir aqueles não atendidos.

Para o cálculo do erro de regime, aplica-se a expressão 13, conforme explicado. Com isso, obtêm-se um erro de regime nulo, já que a função de transferência da equação 27 é do tipo 1 com uma entrada degrau unitário.

Seguindo sequencialmente, os gráficos de Bode de magnitude e fase para análise do comportamento da planta no domínio da frequência estão expostos na figura 7.

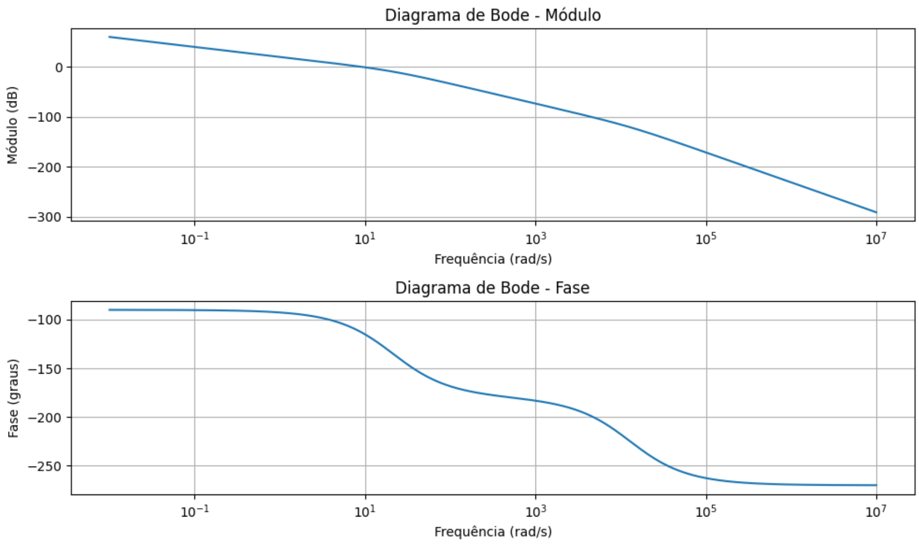

Figura 7: Gráficos de Bode da Planta do Cenário 2.

Além disso, a figura 8 apresenta o destaque da margem de fase do sistema, que é observável numericamente. É possível observar que o sistema cruza a fase de $-180°$ na frequência de 524.599 rad/s, cuja correspondência é uma margem de ganho $MG =$ 62.169 dB.

Nota-se que a frequência de cruzamento de ganho (ω_{cg}) é encontrada com um valor de 9.248 rad/s. Para esse valor, a magnitude da planta possui um valor de -0,001 dB. Isso ocorre, devido a representação discreta do sinal para a criação das curvas de Bode, conforme explicado anteriormente.

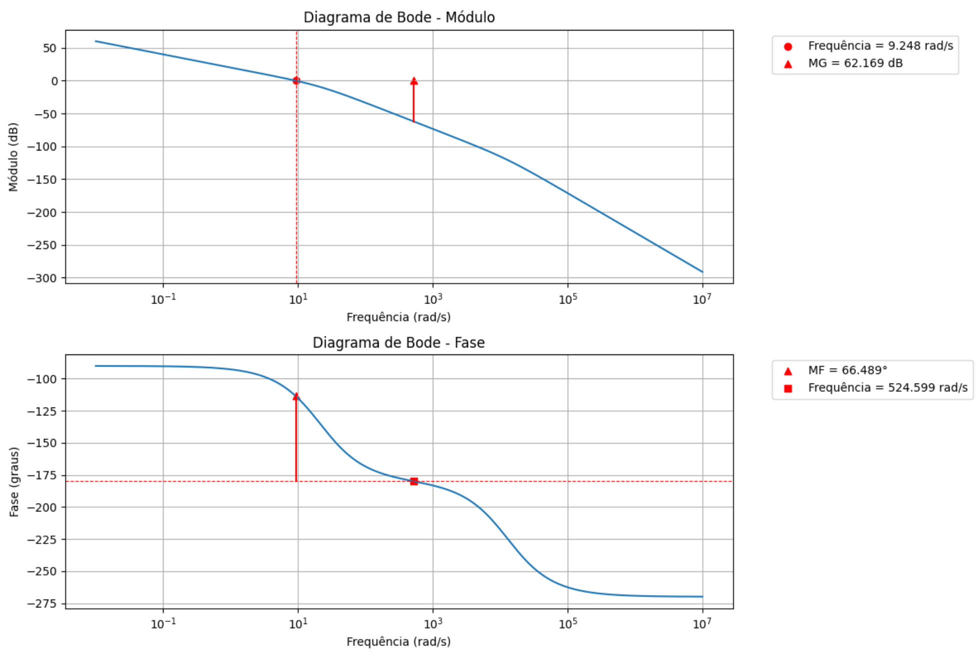

Figura 8: Margens do Sistema do Cenário 2.

Percebe-se, então, que a margem de fase da planta original é de 66.489°, para a frequência ω_{cg} já citada.

Com base nos parâmetros apresentados, observa-se que todos os requisitos solicitados são atendidos pela planta: erro de regime nulo, $MF \geq 50°$ e $MG \geq 6dB$, não havendo a necessidade de nenhum tipo de controlador.

2.2.3 Resposta em realimentação unitária

Deseja-se regular a posição do eixo do motor em 1 rad (sem erro em regime). Portanto, faz-se necessária a implementação de uma realimentação unitária sobre o sistema da planta, com uma referência de 1 rad.

Através da implementação desse sistema com o uso da linguagem de programação Python, obteve-se uma resposta no domínio do tempo com o comportamento exposto na figura 9.

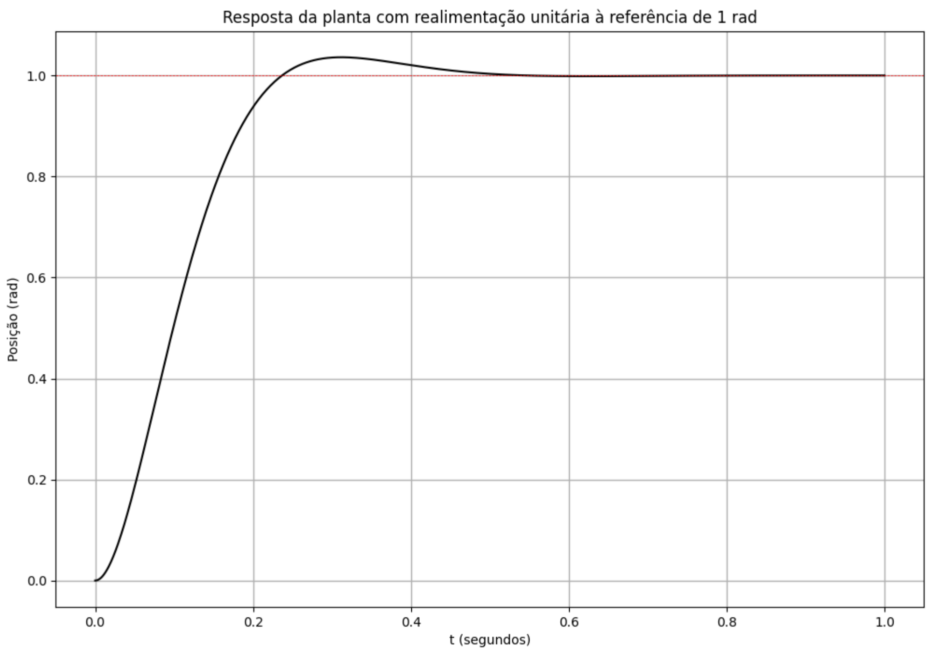

Figura 9: Resposta Temporal da Planta do Cenário 2 com realimentação unitária.

Observa-se um tempo de estabilização em torno de 0.5s e um erro de regime nulo.

3 Considerações Finais

O presente relatório descreve a aplicação de técnicas de controle em um motor DC, abordando um desafio de relevância na área de Engenharia Elétrica. Durante a execução do projeto, que envolveu o controle da velocidade e posição do motor, os conceitos teóricos foram traduzidos em prática, com destaque para a implementação do controle de PID utilizando o método da frequência.

No primeiro cenário, a abordagem para resolver o problema teve início com a modelagem da planta, resultando em uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de segunda ordem. Em seguida, a transformada de Laplace foi aplicada, permitindo a obtenção da função de transferência no domínio da frequência. Nesse ponto, procedeu-se à criação do diagrama de Bode da planta original, observando que a mesma apresentava erro em regime, uma vez que o $e(\infty) = 0,0902357$. Além disso, a margem de fase era de 94,745°, o que não atendia aos requisitos do projeto. Para solucionar essas duas questões, a implementação do controlador PID se fez necessária.

Foi realizada a parametrização do controlador PID incorporando-o ao projeto. Durante a análise do novo sistema, foi observado que a margem de ganho tendia ao infinito como inicialmente, e a margem de fase foi ajustada para atingir 99,772°. Dada a proximidade desse valor em relação ao requisito do projeto, pôde-se considerar que o sistema atende às especificações estabelecidas.

No segundo cenário, segue-se o mesmo processo de modelagem, com a única alteração sendo a associação da tensão com a posição em vez de com a velocidade. Dado o relacionamento existente entre a velocidade e a posição, essa modificação pôde ser facilmente realizada.

Ao examinar a planta original no diagrama de Bode, fica evidente que todos os requisitos são atendidos de forma que não é necessário a utilização de nenhum controlador, apenas uma realimentação com referência de 1 rad.

Finalmente, é evidente que os objetivos foram plenamente alcançados. Isso demonstra que o controle de sistemas através do domínio da frequência é uma alternativa viável que pode oferecer soluções mais ágeis, dependendo das características da planta em questão.

Referencial Teórico

[1] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Rotação: Cálculo do momento de inércia.** In: FUNDAMENTOS de Física: Mecânica. 9. ed. [S. l.: s. n.], 2012. v. 1, cap. 10, p. 249-276.

[2] MARTINS, Allan de Medeiros. **Notas de aula: Modelagem.** LACI - UFRN, [s. l.], [202-?]. Disponível em: https://www.dev-mind.blog/apps/board/. Acesso em: 31 out. 2023.

[3] OLIVEIRA, Gabriel Pereira. **Projeto de controladores PID pelo método frequencial**, 2023. Apresentação de slides. Acesso em 23 out. 2023.