

**El templo de Artemisa**  
**Saga de las maravillas del mundo**

**Jesús González Abril**  
**Pedro Villa Navarro**  
**Sergio Lozano Melgar**  
**Mario Gallego Navarro**

Curso 2024-2025

# Índice general

<b>1. Variedades topológicas. Superficies</b>	<b>2</b>
1.1. La topología cociente . . . . .	2
1.2. Ejemplos de espacios cocientes . . . . .	7
1.3. Espacios localmente euclídeos . . . . .	16
1.4. Variedades topológicas . . . . .	16
1.4.1. Ejemplos de superficies . . . . .	19
1.4.2. Propiedades de las variedades topológicas . . . . .	23
1.5. Unión disjunta . . . . .	25
1.6. Suma conexa . . . . .	27
<b>2. Clasificación de superficies compactas</b>	<b>32</b>
2.1. Símplices . . . . .	32
2.2. Complejos simpliciales . . . . .	33
2.3. Triangulaciones . . . . .	34
2.4. Presentación de superficies . . . . .	34
2.5. Transformaciones elementales . . . . .	40
2.6. Teorema de Clasificación . . . . .	43
2.7. Orientabilidad . . . . .	50
<b>3. Homotopía. El grupo fundamental</b>	<b>53</b>
3.1. Equivalencia homotópica . . . . .	53
3.2. Espacios contractiles . . . . .	59
3.3. Homotopía por caminos . . . . .	61
3.4. Espacios simplemente conexos . . . . .	68
3.5. El homomorfismo inducido . . . . .	69
3.6. Aplicaciones recubridoras . . . . .	73
3.7. Retractos . . . . .	77
3.8. Teorema de Seifert-van Kampen . . . . .	79
<b>A. Teoría de grupos</b>	<b>84</b>
A.1. Grupos y subgrupos . . . . .	84
A.2. Homomorfismos . . . . .	87
A.3. Teorema de Lagrange y consecuencias . . . . .	88

# Capítulo 1

## Variedades topológicas. Superficies

### 1.1. La topología cociente

#### Definición 1.1.1: Topología final o imagen

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico,  $Y$  un conjunto y  $p : X \rightarrow Y$  una aplicación. Definimos en  $Y$  la topología final o imagen de  $p$  como:

$$\mathcal{T}(p) := \{O \subset Y \mid p^{-1}(O) \in \mathcal{T}\}.$$

#### Afirmación

$\mathcal{T}(p)$  es una topología sobre  $Y$

#### *Demostración*

- (T1)  $p^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{T} \implies \emptyset \in \mathcal{T}(p)$ .  $p^{-1}(Y) = X \in \mathcal{T} \implies Y \in \mathcal{T}(p)$ .
- (T2) Si  $U_i \in \mathcal{T}(p) \ \forall i \in I$  entonces  $p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \ \forall i \in I$ , por tanto  $p^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$  lo que significa que  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}(p)$ .
- (T3) Si  $U_i \in \mathcal{T}(p) \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$  entonces  $p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T} \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , por tanto  $p^{-1}(\bigcap_{i=1}^n U_i) = \bigcap_{i=1}^n p^{-1}(U_i) \in \mathcal{T}$  lo que significa que  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}(p)$ .

**Proposición 1.1.2: Propiedades de la topología final**

1.  $\mathcal{T}(p)$  hace a  $p$  continua y es la topología más fina que lo hace.
2. Sea  $g : (Y, \mathcal{T}(p)) \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  una aplicación.  $g$  es continua si y solo si  $g \circ p$  es continua.
3. Los cerrados de  $\mathcal{T}(p)$  son  $\{C \subset Y \mid p^{-1}(C) \text{ es cerrado en } \mathcal{T}\}$ .

**Demostración**

1. Que  $\mathcal{T}(p)$  hace continua a  $p$  es inmediato por la propia definición de  $\mathcal{T}(p)$ . Además, si  $\mathcal{T}'$  es otra topología cualquiera que hace a  $p$  continua entonces  $\forall U \in \mathcal{T}', p^{-1}(U) \in \mathcal{T} \implies U \in \mathcal{T}(p)$ , por lo que  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(p)$ , luego la topología final es la más fina.
2. Claramente si  $g$  es continua entonces  $g \circ p$  es continua, puesto que es composición de dos aplicaciones continuas (recordemos que  $p$  es continua como aplicación en  $(Y, \mathcal{T}(p))$ ). Si por el contrario  $g \circ p$  es continua, entonces dado  $U \in \mathcal{T}''$  arbitrario, la preimagen  $(g \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(g^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$  es abierta por ser  $g \circ p$  continua, pero entonces por la definición de  $\mathcal{T}(p)$  debe cumplirse  $g^{-1}(U) \in \mathcal{T}(p)$ , por tanto  $g$  es continua.
3.  $C$  es cerrado en  $\mathcal{T}(p) \iff Y \setminus C \in \mathcal{T}(p) \iff p^{-1}(Y \setminus C) \in \mathcal{T} \iff X \setminus p^{-1}(C) \in \mathcal{T} \iff p^{-1}(C)$  es cerrado en  $\mathcal{T}$ . El tercer  $\iff$  se cumple puesto que  $p^{-1}(Y) = X$ .

**Definición 1.1.3: Identificación**

Sean  $(X, \mathcal{T})$ ,  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos, y  $p : X \rightarrow Y$  una aplicación. Decimos que  $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es una identificación si  $p$  es sobreyectiva y  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$ .

**Nota**

Si  $f : X \rightarrow Y$  es una aplicación sobreyectiva entonces  $f(f^{-1}(U)) = U$  para cualquier  $U \subset Y$ .

**Proposición 1.1.4: Propiedades de las identificaciones**

1.  $Id : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T}')$  es una identificación si y solo si  $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ .
2. Si  $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es una identificación y  $f : (Y, \mathcal{T}') \rightarrow (Z, \mathcal{T}'')$  es una aplicación, entonces  $f$  es continua si y solo si  $f \circ p$  es continua.
3. Si  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua, abierta (o cerrada) y sobreyectiva, entonces  $f$  es una identificación.

**Demostración**

1. Claramente  $Id$  es sobreyectiva (de hecho es biyectiva con inversa  $(Id)^{-1} = Id$ ), por lo que será identificación si y solo si  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(Id)$ . Ahora bien,  $\mathcal{T}(Id) = \{O \subset Y \mid (Id)^{-1}(O) \in \mathcal{T}\} = \{O \subset Y \mid O \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T}$ , por tanto  $Id$  es identificación si y solo si  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ .
2. Si  $f$  es continua entonces  $f \circ p$  es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Si por el contrario  $f \circ p$  es continua, entonces dado  $U \in \mathcal{T}'$  arbitrario, la preimagen  $(f \circ p)^{-1}(U) = p^{-1}(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$  es abierta por ser  $f \circ p$  continua, pero entonces, como  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(p)$  al ser  $p$  identificación, debe cumplirse  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}'$ , por tanto  $f$  es continua.
3. Como  $f$  es sobreyectiva solo necesitamos ver que si es continua y abierta (cerrada) entonces  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$ . Supongamos que  $f$  es continua, en tal caso tenemos garantizado que  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f)$ .  
Si además es abierta entonces dado  $U \in \mathcal{T}(f)$  arbitrario,  $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  por la definición de  $\mathcal{T}(f)$ , pero entonces  $f(f^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$  al ser  $f$  abierta, y como es sobreyectiva  $f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{T}'$ , por lo que  $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f) \implies \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ , luego  $f$  es una identificación.  
Si  $f$  es cerrada razonamos de manera similar pero con cerrados: dado  $U \in \mathcal{T}(f)$ ,  $C = Y \setminus U$  es cerrado en  $\mathcal{T}(f)$ , por lo que  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $\mathcal{T}^a$ , por tanto  $f(f^{-1}(C)) = C$  es cerrado en  $\mathcal{T}'$  al ser  $f$  cerrada, pero entonces  $U = Y \setminus C \in \mathcal{T}'$ , por tanto  $\mathcal{T}(f) \subset \mathcal{T}' \subset \mathcal{T}(f) \implies \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ , luego  $f$  es una identificación.

<sup>a</sup>Por la tercera parte de la Proposición 1.1.2

### Definición 1.1.5: Topología cociente

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico,  $\sim$  una relación de equivalencia en  $X$ , y  $p : X \rightarrow X/\sim = \tilde{X}$  la proyección al cociente. La topología cociente sobre  $\tilde{X}$  es la topología final o imagen de  $p$ :

$$\mathcal{T}/\sim = \tilde{\mathcal{T}} := \mathcal{T}(p) = \{V \subset \tilde{X} \mid p^{-1}(V) \in \mathcal{T}\}.$$

El espacio  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) = (X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$  se llama espacio cociente.

#### Nota

1. Toda relación de equivalencia  $\sim$  sobre  $X$  determina un espacio cociente dado por  $\tilde{X} = X/\sim$ . Recíprocamente, todo espacio final asociado a una aplicación  $p$  es el espacio cociente correspondiente a la relación de equivalencia  $\sim_p$  dada por  $x \sim_p y \iff p(x) = p(y)$ .
2. Al definir un cociente estamos identificando los puntos que están en una misma clase de equivalencia.
3.  $\tilde{\mathcal{T}}$  es la topología más fina sobre  $\tilde{X}$  que hace continua a  $p$ .

**Proposición 1.1.6: Propiedades del espacio cociente**

1.  $V$  es un abierto de  $\tilde{X}$  si y solo si  $\bigcup_{[x] \in V} [x]$  es abierto en  $X$ .
2. Si  $X$  es compacto, entonces  $\tilde{X}$  es compacto.
3. Si  $X$  es conexo (conexo por caminos), entonces  $\tilde{X}$  es conexo (conexo por caminos).
4.  $p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  es una identificación.
5.  $g : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua si y solo si  $g \circ p : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua.

**Demostración**

1.  $V \in \tilde{\mathcal{T}} \iff p^{-1}(V) \in \mathcal{T}$  por definición de la topología cociente, veamos que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{[x] \in V} [x]$ . Si  $y \in p^{-1}(V) \implies p(y) = [y] \in V$ , por tanto  $[y] \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$ , luego  $y \in [y] \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$ , por lo que  $p^{-1}(V) \subset \bigcup_{[x] \in V} [x]$ .  
Por otro lado si  $x \in \bigcup_{[x] \in V} [x]$  entonces  $[x] \in V$ , por tanto  $p(x) = [x] \in V \implies x \in p^{-1}(V)$ , lo que prueba finalmente que  $p^{-1}(V) = \bigcup_{[x] \in V} [x]$ .
2. Sabemos que la aplicación  $p$  es continua y la compacidad se preserva por aplicaciones continuas. Como además  $p$  es sobreyectiva entonces  $p(X) = \tilde{X}$ , por tanto si  $X$  es compacto entonces  $p(X) = \tilde{X}$  también lo es.
3. Sabemos que la aplicación  $p$  es continua y tanto la conexión como la arcoconexión se preservan por aplicaciones continuas. Como además  $p$  es sobreyectiva entonces  $p(X) = \tilde{X}$ , por tanto si  $X$  es conexo (conexo por caminos) entonces  $p(X) = \tilde{X}$  también lo es.
4. Es inmediato que  $\tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T}(p)$ , por otro lado dado  $y \in \tilde{X} \implies y = [x]$  para cierto  $x \in X$ , por tanto  $p(x) = y$ , luego  $p$  es sobreyectiva.
5. Por el apartado 4,  $p$  es una identificación, por tanto basta aplicar la parte 2 de la Proposición 1.1.4

Recordemos ahora que dada una aplicación  $f : X \rightarrow Y$  cualquiera, podemos definir una relación de equivalencia sobre  $X$  a partir de ella. Denotaremos por  $R_f$  a la relación de equivalencia en  $X$  dada por:

$$xR_fx' \iff f(x) = f(x')$$

**Ejercicio 1.1**

Demostrar que  $R_f$  es una relación de equivalencia.

**Teorema 1.1.7: Proposición 4.1**

Dados  $(X, \mathcal{T})$  y  $(Y, \mathcal{T}')$  espacios topológicos,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  y  $(\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}})$  el espacio cociente dado por  $R_f$ , existe una aplicación  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  que hace que el siguiente diagrama sea conmutativo<sup>a</sup>

$$\begin{array}{ccc} (X, \mathcal{T}) & \xrightarrow{f} & (Y, \mathcal{T}') \\ p \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) & & \end{array}$$

Además,  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T})$  es una identificación si y solo si  $\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es un homeomorfismo.

<sup>a</sup>Que el diagrama sea conmutativo quiere decir que “da igual que camino de flechitas sigamos”, es decir,  $\tilde{f} \circ p = f$ .

**Demostración.** Si pretendemos que el diagrama sea conmutativo debe cumplirse

$$\tilde{f}(p(x)) = f(x)$$

Es decir,

$$\tilde{f}([x]) = f(x)$$

Por tanto definimos  $\tilde{f}$  de la siguiente manera:

$$\tilde{f} : (\tilde{X}, \tilde{\mathcal{T}}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}'), \quad \tilde{f}([x]) = f(x).$$

Ahora solo necesitamos ver que la aplicación está bien definida<sup>1</sup>. En efecto si  $x, y \in X$  son dos representantes de la misma clase de equivalencia  $[x]$  entonces  $x R_f y$ , por tanto se cumple  $f(x) = f(y)$ , luego

$$\tilde{f}([x]) = f(x) = f(y) = \tilde{f}([y])$$

por lo que la aplicación está bien definida.

Para la segunda parte, si suponemos que  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo entonces  $f = \tilde{f} \circ p$  es continua por ser composición de funciones continuas, y es sobreyectiva por serlo  $\tilde{f}$  y  $p$ . Además, si  $U \in \mathcal{T}(f)$  entonces  $f^{-1}(U) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(U)) \in \mathcal{T}$ , por tanto  $\tilde{f}^{-1}(U) \in \tilde{\mathcal{T}}$ , y al ser  $\tilde{f}$  abierta y biyectiva  $U = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(U)) \in \mathcal{T}'$ , lo que prueba que  $\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$  y por tanto  $f$  es una identificación.

Si por el contrario suponemos que  $f$  es una identificación entonces  $f$  es sobreyectiva y  $\mathcal{T}' = \mathcal{T}(f)$ , por tanto  $f$  es continua y al ser  $p$  identificación también lo es  $\tilde{f}$  (apartado 2 de la Proposición 1.1.4). Que  $\tilde{f}$  es inyectiva es inmediato por la propia definición de  $\tilde{f}$ . Para ver que es sobreyectiva, dado  $y \in Y$  por ser  $f$  sobreyectiva existe  $x \in X \mid f(x) = y$ , por tanto  $\exists z = [x] \in \tilde{X}$  tal que  $\tilde{f}([x]) = f(x) = y$ . Veamos que  $\tilde{f}$  es abierta: dado  $U \in \tilde{\mathcal{T}}$  entonces  $f^{-1}(\tilde{f}(U)) = p^{-1}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(U))) = p^{-1}(U) \in \mathcal{T}$  por ser  $p$  continua, por lo tanto  $\tilde{f}(U) \in \mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'$ , luego  $\tilde{f}$  es un homeomorfismo.  $\square$

<sup>1</sup>Una aplicación que tiene como dominio un cociente está bien definida si la imagen de una clase de equivalencia no depende del representante escogido para la clase.

## 1.2. Ejemplos de espacios cocientes

Veamos ahora algunos ejemplos de espacios cociente y la posibilidad de establecer homeomorfismos entre estos espacios cociente y otros espacios topológicos de interés. En estos primeros ejemplos haremos uso del Teorema 1.1.7 para encontrar tales homeomorfismos.

### Ejemplo

Para el intervalo  $I = [0, 1]$ , consideramos la partición:

$$\tilde{I} = \{\{0, 1\}\} \cup \{\{x\} : x \in (0, 1)\}.$$

El espacio cociente  $(\tilde{I}, \tilde{\mathcal{T}})$  es homeomorfo a la circunferencia unidad  $\mathbb{S}^1$ .

**Demostración.** Probemos que la relación  $\sim$  dada por la partición  $\tilde{I}$  coincide con la relación dada por la aplicación  $f : I \rightarrow \mathbb{S}^1, f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ . Para ello, dados  $x, y \in I$

$$xR_f y \iff f(x) = f(y) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x) = \cos(2\pi y) \\ \sin(2\pi x) = \sin(2\pi y) \end{cases}$$

Para que se den estas igualdades entre cosenos y senos hay varias opciones: si  $x, y \in (0, 1)$  entonces debe cumplirse  $x = y$ ; si  $x, y \in \{0, 1\}$  entonces o bien  $x = y$ , o bien  $x = 0, y = 1$ , o bien  $x = 1, y = 0$ . En resumen:

$$xR_f y \iff x = y \text{ o } x = 1, y = 0 \text{ o } x = 0, y = 1 \iff x \sim y$$

Por tanto ambas son la misma relación. Ahora veamos que  $f$  es una identificación, y por tanto  $\exists \tilde{f}$  homeomorfismo entre  $\tilde{I}$  y  $\mathbb{S}^1$ .

En primer lugar,  $f$  es continua por ser restricción de una aplicación continua (basta considerarla como aplicación de  $I$  a  $\mathbb{R}^2$ ), además es cerrada puesto que  $I$  es compacto y  $\mathbb{S}^2$  es Hausdorff (Ver Ejercicio 1.2). Por último dado  $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ , denotemos por  $\alpha = \text{ang}((x, y))$  al ángulo en radianes que forma el punto  $(x, y)$  con la horizontal, con  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Es sencillo comprobar que  $f(\frac{\alpha}{2\pi}) = (x, y)$ , por tanto  $f$  es sobreyectiva, lo que según la Proposición 1.1.4 apartado 3 garantiza que  $f$  es una identificación, y por tanto  $\exists \tilde{f}$  homeomorfismo entre  $\tilde{I}$  y  $\mathbb{S}^1$   $\square$

### Ejercicio 1.2

Probar que si  $X$  es compacto,  $Y$  es Hausdorff y  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$  es continua entonces  $f$  es cerrada.



**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 = y_2.$$

El espacio cociente es homeomorfo a un cilindro.

**Demostración.** Consideremos el cilindro  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, z \in [0, 1]\}$ , probaremos que la relación  $\sim$  coincide con la relación dada por la aplicación  $f : X \rightarrow C, f(t, s) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), s)$ . Para ello, dados  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$

$$(x_1, x_2)R_f(x_2, y_2) \iff \begin{cases} \cos(2\pi x_1) = \cos(2\pi x_2) \\ \sin(2\pi x_1) = \sin(2\pi x_2) \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Dejamos como un sencillo ejercicio comprobar que para que se den estas igualdades entre cosenos y senos debe darse  $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ . En resumen:

$$(x_1, x_2)R_f(x_2, y_2) \iff (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$$

Por tanto ambas son la misma relación. Ahora veamos que  $f$  es una identificación, y por tanto  $\exists \tilde{f}$  homeomorfismo entre  $\tilde{X}$  y  $C$ .

En primer lugar,  $f$  es continua y cerrada por un argumento similar al del ejemplo anterior. Para ver que es sobreyectiva basta tomar  $p = (x, y, z) \in C$ , y denotemos por  $\alpha = \text{ang}((x, y))$  al ángulo en radianes que forma el punto  $(x, y)$  con la horizontal si consideramos a  $(x, y)$  como punto de  $\mathbb{S}^1$ , con  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Entonces  $f(\frac{\alpha}{2\pi}, z) = (x, y, z) = p$ , por lo que  $f$  es sobreyectiva y por tanto identificación.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } (x_1, y_1) = (x_2, y_2) \text{ o } [x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2].$$

El espacio cociente es homeomorfo a una banda de Möbius.

**Demostración.** Llamaremos  $M$  a la banda de Möbius.  $M$  será la imagen de la función

$$F : [0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$F(u, v) = ((2 - v \sin(\frac{u}{2})) \sin(u), (2 - v \sin(\frac{u}{2})) \cos(u), v \cos(\frac{u}{2}))$$

es decir,  $M = F([0, 2\pi] \times [-1, 1])$ .

Probaremos ahora que la función  $f : I \times I \rightarrow M$  dada por  $f(t, s) = F(2\pi t, 2s - 1)$  define la misma relación que  $\sim$  y además es una identificación. La aplicación  $f$  es claramente continua, cerrada por ir de un compacto a un  $T_2$  y sobreyectiva por definición (ya que  $M = F([0, 2\pi] \times [-1, 1]) = f(I \times I)$ ).

En cuanto a la relación, dados  $(x, y), (a, b) \in I \times I$

$$(x_1, y_1) R_f (x_2, y_2) \iff f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \iff$$

$$\iff \begin{cases} (2 - (2y_1 - 1) \sin(\pi x_1)) \sin(2\pi x_1) = (2 - (2y_2 - 1) \sin(\pi x_2)) \sin(2\pi x_2) \\ (2 - (2y_1 - 1) \sin(\pi x_1)) \cos(2\pi x_1) = (2 - (2y_2 - 1) \sin(\pi x_2)) \cos(2\pi x_2) \\ (2y_1 - 1) \cos(\pi x_1) = (2y_2 - 1) \cos(\pi x_2) \end{cases}$$

claramente si  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  o  $[x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2]$  entonces se dan las igualdades y  $(x_1, y_1) R_f (x_2, y_2)$ . Por el contrario, si  $(x_1, y_1) R_f (x_2, y_2)$  dejamos la comprobación de que debe cumplirse  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$  o  $[x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2]$  como ejercicio (o castigo) al lector.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}.$$

El espacio cociente es homeomorfo a un toro.

**Demostración.** En primer lugar notemos que la relación de equivalencia consiste en identificar los lados del cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  según la siguiente figura



En cuanto al toro  $\mathbb{T}^2$ , lo consideraremos como el subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  de la siguiente forma

$$\mathbb{T}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

Si definimos la función

$$F : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{T}^2$$

$$F(u, v) = (\cos u(\cos v + 2), \sin u(\cos v + 2), \sin v)$$

basta comprobar que

$$f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad f(t, s) = F(2\pi t, 2\pi s)$$

induce la misma relación de equivalencia que  $\sim$ , y además es continua, sobreyectiva y cerrada (por ir de un compacto a un Hausdorff). Todas estas comprobaciones, muy similares a las de los anteriores ejemplos, quedan como un sencillo ejercicio para el lector.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = [0, 1] \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } [x_1 = x_2 \text{ e } y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}] \text{ o } [x_1 - x_2 = \pm 1 \text{ e } y_1 = 1 - y_2].$$

El espacio cociente es homeomorfo a una botella de Klein.

**Demostración.** Definiremos la botella de Klein  $K$  como el subconjunto de  $\mathbb{R}^4$  dado por la imagen de la siguiente función:

$$\begin{aligned} f : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow K \subset \mathbb{R}^4 \\ f(t, s) &= ((2 + \cos(2\pi t)) \cos(2\pi s), \\ &\quad (2 + \cos(2\pi t)) \sin(2\pi s), \\ &\quad \sin(2\pi t) \cos(\pi s), \\ &\quad \sin(2\pi t) \sin(\pi s)) \end{aligned}$$

Claramente  $f$  es continua, sobreyectiva (por la propia definición de  $K$ ) y cerrada (por ir de un compacto a un  $T2$ ). Además, se puede comprobar que determina la misma relación de equivalencia que  $\sim$ , por lo que en virtud de la Proposición 4.1 existe un homeomorfismo entre  $\tilde{X}$  y la botella de Klein.  $\square$

**Ejemplo**

Sea  $X = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$  con la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } y_1 = y_2 = 0 \text{ o } (x_1, y_1) = (x_2, y_2).$$

El espacio cociente es homeomorfo a un cono.

**Demostración.** Definamos el cono

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, z \in [0, 1]\}$$

y tomemos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{S}^1 \times [0, 1] &\rightarrow C \\ f(\theta, t) &= (t\theta_x, t\theta_y, t), \quad \theta = (\theta_x, \theta_y) \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

es inmediato ver que la función es continua, sobreyectiva y cerrada por argumentos como los del resto de ejemplos. Por otro lado

$$(\theta, t) R_f(\theta', t') \iff t = t', t\theta = t'\theta' \iff t = t' = 0 \quad \text{ó} \quad (\theta, t) = (\theta', t') \iff (\theta, t) \sim (\theta', t')$$

Por tanto existe un homeomorfismo entre  $C$  y  $\tilde{X}$ . □

**Ejemplo**

Sea  $X = \mathbb{S}^2$  con la relación de equivalencia:

$$p \sim q \iff p = \pm q.$$

El espacio cociente  $\tilde{\mathbb{S}}^2$  es homeomorfo al plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$ .

**Demostración.** En primer lugar, el plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$  será el conjunto cociente obtenido al considerar la siguiente relación  $\sim_p$  sobre  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

$$x \sim_p y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0.$$

La idea va a ser construir una aplicación de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  a  $\mathbb{S}^2$  de tal manera que la aplicación respeta la relación que existe sobre  $\mathbb{S}^2$ , es decir,  $x \sim_p y \iff f(x) \sim f(y)$ . Similarmente, veremos que existe una aplicación de  $\mathbb{S}^2$  a  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  que también respeta la relación de equivalencia del proyectivo. Esto garantiza que las aplicaciones "pasan al cociente". Finalmente veremos que estas aplicaciones en el cociente son homeomorfismos y que la una es la inversa de la otra. La idea se resume en el siguiente diagrama, donde  $\pi_1, \pi_2$  son las proyecciones a los cocientes.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{\iota} \end{array} & \mathbb{S}^2 \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{RP}^2 & \begin{array}{c} \xrightarrow{\tilde{f}} \\ \xleftarrow{\tilde{\iota}} \end{array} & \tilde{\mathbb{S}}^2 \end{array}$$

Definamos  $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^2$  por  $f(x) = \frac{x}{|x|}$ , y  $\iota : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  por  $\iota(x) = x$ . Notemos que si  $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  están relacionados entonces:

$$x \sim_p y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0$$

y por tanto

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \frac{\lambda y}{|\lambda||y|} = \pm \frac{y}{|y|} = \pm f(y) \iff f(x) \sim f(y).$$

Además, si  $f(x) \sim f(y)$  entonces

$$\frac{x}{|x|} = \pm \frac{y}{|y|} \implies x = \lambda y, \lambda \neq 0$$

en esencia hemos visto que  $x \sim_p y \iff f(x) \sim f(y)$ , lo que garantiza que la aplicación  $\tilde{f}([x]_p) = [f(x)]^2$  está bien definida puesto que

$$\tilde{f}([x]_p) = \tilde{f}([y]_p) \iff [f(x)] = [f(y)] \iff f(x) \sim f(y) \iff x \sim_p y \iff [x]_p = [y]_p.$$

La demostración de que  $\iota$  también pasa al cociente como  $\tilde{\iota}([x]) = [\iota(x)]_p$  se deja como un sencillo ejercicio.

---

<sup>2</sup>Usamos  $[\cdot]_p$  para referirnos a las clases de equivalencia en el proyectivo y  $[\cdot]$  para las clases de equivalencia en  $\mathbb{S}^2$ .

Veamos ahora que  $\tilde{f}$  y  $\tilde{\iota}$  son inversas la una de la otra

$$\tilde{f}(\tilde{\iota}([x])) = \tilde{f}([x]_p) = [f(x)] = \left[ \frac{x}{|x|} \right] = [x]$$

donde la última igualdad se sigue de que  $x \in \mathbb{S}^2$  y por tanto  $|x| = 1$ . Por otro lado

$$\tilde{\iota}(\tilde{f}([x]_p)) = \tilde{\iota}([f(x)]) = \tilde{\iota}\left(\left[\frac{x}{|x|}\right]\right) = \left[\frac{x}{|x|}\right]_p = [x]_p$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que  $\frac{x}{|x|} \sim_p x$ .

Veamos ahora que  $\tilde{f}$  es continua. Para ello notemos que por la Proposición 1.1.6,  $\tilde{f}$  es continua si y solo si  $\tilde{f} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$  lo es. Pero claramente  $f$  es continua y también lo es la proyección  $\pi_2$ , por lo que  $\tilde{f}$  es continua. De manera similar,  $\iota$  es continua si y solo si lo es  $\iota \circ \pi_2 = \pi_1 \circ \iota$ , que es claramente continua por serlo  $\pi_1, \iota$ .

□

**Ejemplo**

En el disco cerrado  $D(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ , consideramos la relación de equivalencia:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \text{ si y solo si } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \partial D(0, 1), x_1 = \pm x_2 \text{ e } y_1 = y_2.$$

El espacio cociente  $D(0, 1)/\sim$  es homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

**Demostración.** Se deja como ejercicio. □

**Ejercicio 1.3**

Dado  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico y  $K \subset X$ , definimos la relación

$$x \sim y \iff \begin{cases} x, y \in K \\ x = y \end{cases}$$

y llamemos al espacio cociente  $(X/K, \mathcal{T}/K) := (X/\sim, \mathcal{T}/\sim)$ .

- a) Demostrar que  $p|_{X \setminus K} : X \rightarrow p(X \setminus K)$  es una biyección.
- b) Demostrar que  $p|_{X \setminus K}$  es un homeomorfismo si  $K$  es abierto o cerrado.

**Solución:**

Para el apartado a) notemos que

$$\forall x \in X \setminus K, \quad p|_{X \setminus K}(x) = [x]$$

pero por la manera en la que está definida la relación de equivalencia, es inmediato ver que  $[x] = \{x\}$ , ya que el único elemento relacionado con  $x$  es el propio  $x$  (recordemos que  $x \notin K$ ). Por tanto  $p|_{X \setminus K}$  es inyectiva ya que

$$p|_{X \setminus K}(x) = p|_{X \setminus K}(y) \implies [x] = [y] \implies \{x\} = \{y\} \implies x = y$$

y además es sobreyectiva por estar definida en su imagen. Por tanto  $p|_{X \setminus K}$  es una biyección.

Para el apartado b) notemos en primer lugar que  $p$  es continua, por lo que  $p|_{X \setminus K}$  también lo será por ser su restricción a  $X \setminus K$ .

Haremos el caso  $K$  cerrado, cuando  $K$  es abierto hay que razonar de manera idéntica pero con cerrados teniendo en cuenta la parte 3 de la Proposición 1.1.2.

Si  $K$  es cerrado entonces  $X \setminus K$  es abierto, ahora si tomamos  $U \in \mathcal{T}|_{X \setminus K}$  entonces  $U = \tilde{U} \cap (X \setminus K)$ ,  $\tilde{U} \in \mathcal{T}$ . Pero como  $X \setminus K$  es abierto entonces de hecho  $U \in \mathcal{T}$  y por tanto

$$p^{-1}(p(U)) = (p|_{X \setminus K})^{-1}(p|_{X \setminus K}(U)) = U \in \mathcal{T}$$

(recordemos que  $p|_{X \setminus K}$  es una biyección y por tanto tiene inversa). Finalmente por la definición de topología cociente debe de ser  $p(U) \in \mathcal{T}/K$ , pero como además  $p|_{X \setminus K}(U) = p(U) = p(U) \cap p(X \setminus K)$  deducimos que  $p|_{X \setminus K}(U) \in \mathcal{T}/K|_{p(X \setminus K)}$ , lo que prueba que  $p|_{X \setminus K}$  es abierta y por tanto un homeomorfismo.



### 1.3. Espacios localmente euclídeos

#### Definición 1.3.1: Espacio localmente euclídeo

Un espacio topológico  $(X, \mathcal{T})$  se dice que es localmente euclídeo de dimensión  $n$  si todo punto  $p$  de  $X$  tiene un entorno  $U$  homeomorfo a una bola abierta  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\varphi : U \subset X \rightarrow B \subset \mathbb{R}^n$  es tal homeomorfismo,  $(U, \varphi)$  se llama carta en  $X$  alrededor de  $p \in U$ .

#### Nota

1. Por ser  $X$  localmente euclídeo, este hereda las propiedades locales de  $\mathbb{R}^n$ .
2. Podemos sustituir la bola abierta en la definición anterior por un entorno abierto de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definición 1.3.2: Bola euclídea

Diremos que  $B' \subset X$  es una bola euclídea si  $B'$  es homeomorfo a una bola abierta  $B(0, r)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

#### Definición 1.3.3: Bola regular euclídea

Diremos que  $B \subset X$  es una bola regular euclídea si:

- Existe una bola euclídea  $B'$  tal que  $\overline{B} \subset B'$ .
- Existe  $r > 0$  y una carta  $\varphi : B' \rightarrow B^n(0, 2r)$  tal que  $\varphi(\overline{B}) = \overline{B^n(0, r)}$ .

### 1.4. Variedades topológicas

#### Definición 1.4.1: Variedad topológica

Una variedad topológica  $M$  es un espacio topológico  $T_2$  y  $2AN$  que es localmente euclídeo. La dimensión de  $M$  es el número natural  $n$ . También se denomina  $n$ -variedad (topológica).

#### Definición 1.4.2: Superficie topológica

Una superficie topológica  $S$  es una variedad topológica de dimensión dos o 2-variedad.

**Nota**

En ocasiones podemos referirnos a las superficies topológicas como superficies, o en general a las  $n$ -variedades topológicas como  $n$ -variedades (o incluso variedades si se sobreentiende su dimensión). Cabe destacar que en otros contextos la palabra superficie puede referirse a un concepto distinto, como el de superficie parametrizada o el de variedad diferenciable de dimensión 2 (superficie regular).

**Definición 1.4.3: Variedad con borde**

Si en la definición de variedad cambiamos el espacio modelo  $\mathbb{R}^n$  por el semiespacio superior  $\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0\}$ , obtenemos el concepto de variedad con borde.

**Ejemplo**

Sea  $X = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$  y consideremos la relación  $R$  dada por

$$(x, 0)R(x, 1) \forall x \neq 0, (x, y)R(x, y) \forall (x, y) \in X.$$

Entonces  $X/R$  es localmente euclídeo de dimensión 1 pero no es Hausdorff, por tanto no es una variedad. Para más información consultar *Line with two origins* en Wikipedia.

**Proposición 1.4.4: Observaciones sobre variedades topológicas**

1. Toda variedad topológica es localmente conexa por caminos (y localmente conexa).
2. Las componentes conexas y las componentes conexas por caminos coinciden en una variedad.
3. Una variedad es conexa si y solo si es conexa por caminos.
4. Toda variedad es localmente compacta.
5. Si una variedad no es compacta, siempre podremos compactificarla añadiendo un solo punto.

**Demostración**

Sea  $M$  una  $n$ -variedad. Notemos en primer lugar la siguiente afirmación que usaremos para probar el punto 4:

**Afirmación**

Dado  $x \in M$ , como  $M$  es una variedad existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(x)$  homeomorfo a una bola  $B(0, r) = \varphi(U)$  de  $\mathbb{R}^n$  con  $\varphi(x) = 0$ .

**Demostración**

Sabemos por ser  $M$  variedad que existe un entorno  $U' \in \mathcal{E}(x)$  y un homeomorfismo  $\psi : U' \rightarrow B$  con  $B$  una bola en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\psi(x) = 0$  ya hemos acabado, si  $\psi(x) \neq 0$  entonces podemos elegir una bola centrada en  $\psi(x)$  de radio  $r'$  lo suficientemente pequeño de manera que  $B(\psi(x), r') \subset B \implies A = \psi^{-1}(B(\psi(x), r')) \subset \psi^{-1}(B) = U$ , y  $A \in \mathcal{E}(x)$ . Finalmente la aplicación  $\phi : B(\psi(x), r') \rightarrow B(0, r')$ ,  $\phi(s) = s - \psi(x)$  es un homeomorfismo, por lo que  $\varphi = \phi \circ \psi|_A : A \rightarrow B(0, r')$  es el homeomorfismo buscado.

De hecho dado cualquier  $V \in \mathcal{E}(x)$  siempre podemos elegir el entorno homeomorfo a una bola de manera que  $U \subset V$  puesto que si  $U \not\subset V$ , entonces basta tomar  $B'(0, r') \subset B(0, r)$  lo suficientemente pequeña para que  $U' = \varphi^{-1}(B'(0, r')) \subset U \cap V$  y claramente  $U'$  también es homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$ .

1. Sean  $x \in M, V \in \mathcal{E}(x)$ , como  $M$  es una variedad existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(x), U \subset V$  homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$ , y por tanto localmente conexo por caminos. Como  $U$  es localmente conexo por caminos  $\exists U' \subset U$  un entorno de  $x$  conexo por caminos. Por último notemos que  $U' \subset U \subset V \implies U' \subset V$ , luego  $U'$  es un entorno de  $x$  conexo por caminos contenido en  $V$ , lo que prueba que  $M$  es localmente conexa por caminos. Que es localmente conexa es inmediato puesto que localmente conexo por caminos implica localmente conexo.
2. Se sigue de las propiedades generales de un espacio localmente conexo por caminos.
3. Se sigue de las propiedades generales de un espacio localmente conexo por caminos.
4. Sea  $x \in M$ , como  $M$  es una variedad existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(x)$  homeomorfo a una bola  $B(0, r)$  mediante un homeomorfismo  $\varphi : B(0, r) \rightarrow U$  con  $\varphi(0) = x$ . Puesto que  $\overline{B(0, \frac{r}{2})}$  es compacto y  $\varphi$  es continua,  $\varphi(\overline{B(0, \frac{r}{2})})$  es un compacto. Además  $\varphi(\overline{B(0, \frac{r}{2})}) \subset \varphi(B(0, r)) = U$  por lo que si tomamos  $C = \varphi(\overline{B(0, \frac{r}{2})})$  como compacto y  $U$  como entorno se verifica que  $x \in C \subset U$ , por lo que  $M$  es localmente compacta en  $x$ , como el punto elegido era arbitrario  $M$  es localmente compacta.
5. Como cualquier variedad es  $T_2$  y localmente compacta el Teorema de Alexandroff nos asegura que podemos compactificarla por un punto.

### 1.4.1. Ejemplos de superficies

En todos los ejemplos siguientes consideramos subespacios de algún  $\mathbb{R}^m$ , por tanto todos los espacios son  $T_2$  y  $2AN$  (recordemos que estas propiedades se heredan al considerar las topologías relativas). Solo necesitamos probar que cada uno de estos espacios son localmente euclídeos.

#### Ejemplo

La esfera  $\mathbb{S}^2$  es una superficie topológica.

**Demostración.** Sea  $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{S}^2$  y supongamos que  $z_0 > 0$ , en tal caso el entorno  $U = \mathbb{S}^2 \cap \{z > 0\}$  es homeomorfo a la bola  $B^2((0, 0), 1)$  mediante el homeomorfismo

$$\varphi : B^2((0, 0), 1) \rightarrow U, \quad \varphi(x, y) = (x, y, \sqrt{x^2 + y^2}).$$

En efecto  $\varphi$  es un homeomorfismo pues es abierta, continua y biyectiva, con inversa

$$\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y).$$

Para el resto de puntos sabemos que alguna de las tres componentes  $x_0, y_0, z_0$  debe ser no nula, por lo que podemos hacer un procedimiento similar, tarea que encomendamos al lector.  $\square$

#### Ejemplo

El toro  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es una superficie topológica.

**Demostración.** Recomendamos al lector que vuelva a echar un vistazo al ejemplo referente al toro en la Sección 1.2, aunque en este caso identificaremos al toro con el producto cartesiano de dos circunferencias.

Para ver que  $\mathbb{T}^2$  es localmente euclídeo sea  $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ , de manera que

$$p = ((\cos \theta_0, \sin \theta_0), (\cos \phi_0, \sin \phi_0))$$

para ciertos  $\theta_0, \phi_0 \in [0, 2\pi)$ . Consideremos la bola abierta  $B = B((\theta_0, \phi_0), 1) \subset \mathbb{R}^2$  y el homeomorfismo

$$\varphi : B \rightarrow U \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \quad \varphi(\theta, \phi) = ((\cos \theta, \sin \theta), (\cos \phi, \sin \phi)).$$

En efecto es un homeomorfismo al considerarla sobre su imagen  $U = \varphi(B)$  porque es continua y biyectiva con inversa continua. Que es sobreyectiva es inmediato, que es inyectiva también puesto que las funciones seno y coseno son  $2\pi$ -periódicas y el radio de la bola es menor que  $2\pi$ . Por tanto para cada punto  $p$  existe la carta  $(U, \varphi^{-1})$  en torno a ese punto, lo que prueba que  $\mathbb{T}^2$  es localmente euclídeo.  $\square$

**Ejemplo**

El cilindro  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  es una superficie topológica.

**Demostración.** Sea  $p = ((\cos \theta_0, \sin \theta_0), s_0) \equiv (\cos \theta_0, \sin \theta_0, s_0) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$  y consideremos la bola abierta  $B = B((\theta_0, s_0), 1) \subset \mathbb{R}^2$  y el homeomorfismo

$$\varphi : B \rightarrow U \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \quad \varphi(\theta, s) = (\cos \theta, \sin \theta, s).$$

En efecto es un homeomorfismo al considerarla sobre su imagen  $U = \varphi(B)$  porque es continua y biyectiva con inversa continua. Por tanto para cada punto  $p$  existe la carta  $(U, \varphi^{-1})$  en torno a ese punto, lo que prueba que el cilindro es localmente euclídeo.  $\square$

**Ejemplo**

El paraboloides de revolución  $x^2 + y^2 - z = 0$  es una superficie topológica.

**Demostración.** Sea  $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z = 0\}$  y sea  $p \in P, p = (x_0, y_0, z_0)$ . Consideremos la bola  $B = B((x_0, y_0), 1)$  y el homeomorfismo

$$\varphi : B \rightarrow U, \quad \varphi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

definido en su imagen  $U = \varphi(B)$ . Que es un homeomorfismo es inmediato puesto que es continua y su inversa es  $\varphi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ , también continua. Entonces  $(U, \varphi^{-1})$  es una carta que cubre al punto  $p$ , lo que prueba que  $P$  es un localmente euclídeo y por tanto una superficie.  $\square$

El resto de ejemplos se pueden justificar de manera similar a los anteriores encontrando una serie de cartas que cubran todos los puntos de la superficie. Dejamos esta tarea al lector.

**Ejemplo**

El hiperboloide de una hoja  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  es una superficie topológica.

**Ejemplo**

El hiperboloide de dos hojas  $x^2 + y^2 - z^2 = -1$  es una superficie topológica.

**Proposición 1.4.5: Espacio proyectivo real**

El espacio proyectivo real  $\mathbb{RP}^n$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ .

**Demostración**

Veamos en primer lugar qué tipo de espacio topológico es  $\mathbb{RP}^n$ . Para ello, notemos que está definido por la relación de equivalencia sobre  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  dada por

$$x \sim y \iff x = \lambda y, \lambda \neq 0.$$

Podemos dar una expresión explícita de las clases de equivalencia en  $\mathbb{RP}^n$  como

$$[x_1, \dots, x_{n+1}] = \{(\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}) : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists x_{i_0} \neq 0\}$$

en cuyo caso la proyección al cociente viene dada por

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{RP}^n, \quad \pi(x_1, \dots, x_{n+1}) = [x_1, \dots, x_{n+1}].$$

Veamos que  $\mathbb{RP}^n$  es localmente euclídeo. Sea  $p = [x_1, \dots, x_{n+1}] \in \mathbb{RP}^n$ , por definición de  $\mathbb{RP}^n$  sabemos que existe un  $i_0$  tal que  $x_{i_0} \neq 0$ , definimos el siguiente entorno  $U_p = \{[y_1, \dots, y_{n+1}] : y_{i_0} \neq 0\}$  que contiene a  $p$  y es abierto puesto que la topología sobre  $\mathbb{RP}^n$  es precisamente la topología final de  $\pi$  y se tiene  $\pi^{-1}(U_p) = V_p$  donde

$$V_p = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) : y_{i_0} \neq 0\}$$

que es abierto puesto que su complementario

$$[\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}] \setminus V_p = \{(y_1, \dots, y_{n+1}) : y_{i_0} = 0\}$$

es cerrado. Por tanto  $U_p$  es abierto (recuérdese la definición de topología final), y la siguiente aplicación

$$\varphi : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi([x_1, \dots, x_{n+1}]) = \left( \frac{x_1}{x_{i_0}}, \dots, \frac{x_{i_0-1}}{x_{i_0}}, \frac{x_{i_0+1}}{x_{i_0}}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_{i_0}} \right)$$

es un homeomorfismo. Omitiremos ver que  $\varphi$  está bien definida y es un homeomorfismo.

Ahora veamos que  $\mathbb{RP}^n$  es 2AN. Para ello notemos que  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  es 2AN y  $\pi$  es continua y sobreyectiva. En tal caso podemos aplicar el siguiente lema:

**Lema 1.4.6**

Sea  $X$  un espacio 2AN y  $\pi : X \rightarrow M$  continua y sobreyectiva. Si  $M$  es localmente euclídeo entonces es 2AN.

**Demostración.** Sea  $\mathcal{U} = \{U_p \mid p \in M\}$  un recubrimiento por bolas euclídeas de  $M$ , en tal caso  $\mathcal{B} = \{\pi^{-1}(U_p) \mid U_p \in \mathcal{U}\}$  es un recubrimiento por abiertos de  $X$ . Por ser  $X$  2AN debe existir un subrecubrimiento numerable de  $\mathcal{B}$  (la demostración de este hecho queda para el lector). Sea  $\mathcal{B}' = \{\pi^{-1}(U_p) \mid U_p \in \mathcal{U}'\}$  tal subrecubrimiento numerable,

entonces existe un subrecubrimiento numerable  $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ . Como cada bola euclídea de  $\mathcal{U}'$  tiene una base numerable la unión numerable de estas bases es una base numerable de  $M$  (recordemos que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable).  $\square$

Finalmente para probar que es Hausdorff recordemos que una relación de equivalencia  $\sim$  en un espacio topológico  $X$  se dice abierta si para cada subconjunto abierto  $A$  de  $X$ , el conjunto

$$[A] := \{x \in X \mid x \sim a \text{ para algún } a \in A\}$$

también es abierto. Es fácil ver que la relación que define a  $\mathbb{RP}^n$  es abierta, y en tal caso podemos aplicar el siguiente lema cuya demostración dejamos como ejercicio.

#### Lema 1.4.7

Sea  $\sim$  una relación de equivalencia abierta en un espacio  $X$ . Entonces  $X/\sim$  es Hausdorff si y solo si el conjunto  $\{(x, y) \mid x \sim y\}$  es cerrado en  $X \times X$ .

Sea  $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$  y  $\sim$  la relación del espacio proyectivo. Definamos la aplicación  $f : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$f(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - y_i x_j)^2.$$

Entonces  $f(x, y)$  es claramente continua y se anula si y solo si  $y = \lambda x$  para algún  $\lambda \neq 0$ , es decir, si y solo si  $x \sim y$ . Así tenemos que

$$f^{-1}(0) = \{(x, y) \mid x \sim y\}$$

es cerrado en  $X \times X$  y por el lema,  $\mathbb{RP}^n$  es Hausdorff. ■

#### Nota

$\mathbb{RP}^n$  es de hecho una variedad compacta. Para probar esto basta ver que  $\mathbb{RP}^n$  es homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^n$  con la relación de equivalencia

$$p \sim q \iff p = \pm q$$

que denotaremos  $\tilde{\mathbb{S}}^n$ . Esta demostración es muy similar a la del ejemplo para  $\mathbb{RP}^2$  de la Sección 1.2 y queda para el lector. Por las propiedades de los espacios cociente  $\tilde{\mathbb{S}}^n$  es compacta, y por tanto  $\mathbb{RP}^n$  también.

### 1.4.2. Propiedades de las variedades topológicas

Comenzamos demostrando sin demasiado detalle un pequeño lema técnico.

#### Lema 1.4.8: Lema técnico

Sea  $B = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$  la bola abierta de centro 0 y radio 1 y sean  $p, q \in B$ . Entonces existe un homeomorfismo  $\phi : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  de manera que  $\phi(p) = q$  y  $\phi|_{\partial B} = Id$ .

**Demostración.** Sea  $\mu : B \rightarrow \mathbb{R}^n, \mu(x) = \frac{x}{1-|x|}$ , es fácil comprobar que  $\mu$  es un homeomorfismo. Definamos la aplicación  $\phi : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  por

$$\phi(x) = \begin{cases} \mu^{-1}(\mu(x) - \mu(p) + \mu(q)), & x \in B \\ x, & x \in \partial B \end{cases}$$

se puede comprobar que  $\phi$  es continua en la frontera de  $B$  y que también lo es su inversa, por tanto es un homeomorfismo que cumple  $\phi(p) = q, \phi|_{\partial B} = Id$ .  $\square$

#### Teorema 1.4.9: Proposición 4.2 - Homogeneidad

Sea  $X$  una variedad topológica conexa de dimensión  $n$  y  $p, q \in X$ . Entonces existe un homeomorfismo  $f : X \rightarrow X$  tal que  $f(p) = q$ .

**Demostración.** Sea la relación de equivalencia en  $X$  dada por

$$p \sim q \iff \exists f : X \rightarrow X \text{ homeomorfismo tal que } f(p) = q.$$

Vamos a ver que  $[p]$  es abierta y cerrada en  $X$ , y, por tanto, es todo  $X$  al ser  $X$  conexo.

Para ver que es abierta sea  $q \in [p]$ , veremos que podemos encontrar un entorno de  $q$  contenido en  $[p]$ . Por ser  $X$  localmente euclídeo existe  $U \in \mathcal{E}(q)$  homeomorfo a una bola de  $\mathbb{R}^n$ . Como todas las bolas son homeomorfas podemos elegir un homeomorfismo de la siguiente forma

$$\varphi : B^n(0, 2) \rightarrow U, \quad \varphi(0) = q, \quad 0 = \varphi^{-1}(q).$$

Consideremos ahora los conjuntos  $B = B^n(0, 1), B' = \varphi(B)$ . Notemos que ambos son abiertos en sus respectivas topologías. Definamos ahora la aplicación

$$\tilde{\varphi} : \overline{B} \rightarrow \overline{B'}, \quad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$$

y veamos que es un homeomorfismo. En efecto por ser  $\varphi$  continua y cerrada se tiene

$$\varphi(\overline{B}) \subset \overline{\varphi(B)} = \overline{B'} \subset \overline{\varphi(\overline{B})} = \varphi(\overline{B}) \implies \varphi(\overline{B}) = \overline{B'}$$

por lo que  $\tilde{\varphi}$  está bien definida y es sobreyectiva. Finalmente notemos que  $\tilde{\varphi}$  es la restricción de un homeomorfismo y es sobreyectiva, y por tanto es un homeomorfismo. Démonos cuenta también de que

$$\tilde{\varphi}(\partial B) = \tilde{\varphi}(\overline{B} \setminus B) = \tilde{\varphi}(\overline{B}) \setminus \tilde{\varphi}(B) = \overline{B'} \setminus B' = \partial B'$$



Veamos ahora que  $B' \subset [p]$ , para ello sea  $y \in B'$ , de manera que  $y = \varphi(x)$ ,  $x \in B$ . Por el lema anterior, como  $0, x \in B$  existe un homeomorfismo  $\phi : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$  de manera que  $\phi(0) = x$  y  $\phi|_{\partial B} = Id$ . Definamos ahora la siguiente aplicación

$$F : \overline{B'} \rightarrow \overline{B'}, \quad F = \tilde{\varphi} \circ \phi \circ \tilde{\varphi}^{-1}$$

que es un homeomorfismo por ser composición de homeomorfismos y además cumple

$$F(q) = \tilde{\varphi}(\phi(\tilde{\varphi}^{-1}(q))) = \tilde{\varphi}(\phi(\varphi^{-1}(q))) = \tilde{\varphi}(\phi(0)) = \tilde{\varphi}(x) = \varphi(x) = y$$

Si tomamos  $z \in \partial B'$  entonces  $\tilde{\varphi}^{-1}(z) \in \partial B$ , por lo que  $\phi(\tilde{\varphi}^{-1}(z)) = \tilde{\varphi}^{-1}(z)$  luego

$$F(z) = \tilde{\varphi}(\phi(\tilde{\varphi}^{-1}(z))) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}^{-1}(z)) = z \implies F|_{\partial B'} = Id.$$

Ahora, por el lema del pegado para aplicaciones continuas la aplicación

$$f : X \rightarrow X, \quad f(x) = \begin{cases} F(x), & x \in \overline{B'} \\ x, & x \in X \setminus B' \end{cases}$$

es continua ya que  $\overline{B'}, X \setminus B'$  son cerrados y tanto  $F$  como  $Id$  son continuas en cada uno de estos respectivos cerrados, coincidiendo además sus valores en la intersección  $\partial B'$ . Por un argumento completamente análogo podemos ver que la inversa de  $f$

$$f^{-1} : X \rightarrow X, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} F^{-1}(x), & x \in \overline{B'} \\ x, & x \in X \setminus B' \end{cases}$$

es también continua, lo que prueba que  $f$  es un homeomorfismo en  $X$  que además satisface  $f(q) = F(q) = y$ , por tanto  $\forall y \in B'$  se tiene  $y \sim q \sim p \implies y \sim p$ , lo cual quiere decir que  $B' \subset [p]$ , luego  $[p]$  es abierto.

Hemos visto que  $[p]$  es abierto. Además,  $X \setminus [p] = \bigcup_{q \neq p} [q]$ , porque las clases de equivalencia son disjuntas. Al ser unión arbitraria de abiertos es abierto, luego el complementario  $[p]$  es cerrado. Como  $X$  es conexo y  $[p]$  es abierto y cerrado debe ser  $[p] = X$ , lo que finaliza la demostración.  $\square$

## 1.5. Unión disjunta

### Definición 1.5.1: Unión disjunta

Sea  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  una familia indexada de espacios topológicos. Definimos su unión disjunta como:

$$\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha = \{(x, \alpha) : x \in X_\alpha, \alpha \in J\}.$$

Consideramos las inyecciones canónicas  $\iota_\alpha : X_\alpha \rightarrow \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ , dadas por  $\iota_\alpha(x) = (x, \alpha)$ .

### Nota

Para entender la unión disjunta podemos situarnos en el siguiente contexto: supongamos que los espacios topológicos son subconjuntos acotados del plano (por ejemplo polígonos), su unión disjunta consistirá intuitivamente en disponer estos subconjuntos de tal manera que no se solapen unos con otros. Un ejemplo sería la imagen siguiente



Otra manera de imaginar la unión disjunta es considerar que ponemos cada subconjunto del plano en una copia distinta de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, tendremos cada espacio topológico (en la figura cada polígono coloreado) en un "plano" distinto y la unión disjunta será la unión de todas esas "hojas".

### Proposición 1.5.2: Topología unión disjunta

La familia de subconjuntos  $B = \{\iota_\alpha(U) : U \in \mathcal{T}_\alpha, \alpha \in J\}$  es una base para una topología  $\mathcal{T}$  sobre  $\bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  que recibe el nombre de topología unión disjunta.

### Demostración

Sea  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  una familia de espacios topológicos. Veamos que  $B$  es una base:

(B1) Para todo  $(x, \alpha) \in \bigsqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  se tiene  $x \in X_\alpha$ , y como  $X_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ , deducimos que  $(x, \alpha) \in \iota_\alpha(X_\alpha) \in B$ .

(B2) Si  $(x, \alpha) \in \iota_\alpha(U_1) \cap \iota_\beta(U_2)$  necesariamente  $\alpha = \beta$  puesto que en otro caso  $\iota_\alpha(U_1) \cap \iota_\beta(U_2) = \emptyset$  que es una contradicción con que  $x$  está en la intersección. Entonces  $x \in U_1 \cap U_2$  y existe  $V = U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}_\alpha$  (que es abierto puesto que  $U_1, U_2$  lo son) con  $x \in V \subset U_1 \cap U_2$ , por lo que  $(x, \alpha) \in \iota_\alpha(V) \subset \iota_\alpha(U_1) \cap \iota_\alpha(U_2)$ . La última inclusión es fácil de comprobar y se deja como un sencillo ejercicio. ■

**Proposición 1.5.3: Propiedades de la unión disjunta**

Sea  $\{(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)\}_{\alpha \in J}$  una familia de espacios topológicos,  $X = \sqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  y  $(X, \mathcal{T})$  el espacio topológico con la unión disjunta. Entonces:

1. Cada inclusión  $\iota_\alpha$  es un embebimiento, por lo que podemos identificar  $X_\alpha \equiv \iota_\alpha(X_\alpha) \subset \sqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$ .
2. Un subconjunto es abierto en  $\sqcup_{\alpha \in J} X_\alpha$  si y solo si su intersección con cada  $X_\alpha$  es un abierto en  $X_\alpha$ .
3. Una aplicación  $f : \sqcup_{\alpha \in J} X_\alpha \rightarrow Y$  es continua si y solo si  $f|_{X_\alpha}$  es continua, para todo  $\alpha \in J$ .
4. Si todos los espacios  $X_\alpha$  son  $T_2$  (resp.  $1AN$ ), la unión disjunta también es  $T_2$  (resp.  $1AN$ ).
5. Si todos los espacios  $X_\alpha$  son  $2AN$  y  $J$  es numerable, entonces la unión disjunta también es  $2AN$ .
6. La unión disjunta de una cantidad numerable de  $n$ -variedades es una  $n$ -variedad.

***Demostración***

Pendiente.

## 1.6. Suma conexa

### Definición 1.6.1: Suma conexa

Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies conexas y sean  $D_1$  y  $D_2$  discos regulares euclídeos. Sea  $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  un homeomorfismo y denotemos por  $S'_i := S_i \setminus D_i$ ,  $i = 1, 2$ . Definimos en  $S'_1 \sqcup S'_2$  la menor relación de equivalencia que contiene a  $x \sim \varphi(x)$  para todo  $x \in \partial D_1$ . Entonces el cociente  $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$  es un espacio topológico.

#### Nota

El homeomorfismo  $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  existe siempre puesto que las fronteras de los discos son homeomorfas a las fronteras de alguna bola euclídea, y por tanto ambas fronteras son homeomorfas a la circunferencia unidad

$$\partial D_1 \cong \mathbb{S}^1 \cong \partial D_2.$$

A continuación se enuncian un par de lemas que serán útiles para la demostración de la Proposición 1.6.4. El primero es una generalización del conocido Teorema de la Curva de Jordan, el cual se enuncia sin demostración. El segundo es un lema técnico, que sí demostraremos.

### Lema 1.6.2: Teorema de Jordan - Schönflies

Sean  $C$  y  $C'$  dos curvas cerradas simples de  $\mathbb{R}^2$ , y  $f : C \rightarrow C'$  un homeomorfismo. Entonces existe un homeomorfismo  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $F|_C = f$  y fuera de un compacto  $K \supseteq C$  es la identidad.

### Lema 1.6.3: Extensión de homeomorfismos de $\mathbb{S}^1$

Sean  $C_1, C_2$  homeomorfos a  $\mathbb{S}^1$ ,  $h : C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo y  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  abierto,  $U \cong \mathbb{R}^2$ , con  $C_1 \cup C_2 \subseteq U$ . Entonces existe un homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $H|_{C_1} = h$  y  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

#### Demostración

Sea  $g : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  el homeomorfismo dado por la hipótesis  $U \cong \mathbb{R}^2$  y sean  $\tilde{C}_1 = g(C_1)$ ,  $\tilde{C}_2 = g(C_2)$ , definamos la aplicación

$$\hat{h} = g \circ h \circ (g^{-1}|_{\tilde{C}_1}) : \tilde{C}_1 \rightarrow \tilde{C}_2.$$

que es claramente un homeomorfismo. Por el Teorema de Jordan-Schönflies existe un homeomorfismo  $\hat{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\hat{H}|_{\tilde{C}_1} = \hat{h}$  y  $\hat{H}$  es la identidad fuera de un compacto  $K$ ,  $\tilde{C}_1 \subset K$ .

Sea  $H' = g^{-1} \circ \hat{H} \circ g : U \rightarrow U$ , entonces podemos extender esta aplicación como la identidad fuera de  $U$ , obteniendo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , que es el homeomorfismo buscado puesto

que para todo  $x \in C_1$

$$\begin{aligned} H|_{C_1}(x) &= (g^{-1} \circ \hat{H} \circ g)|_{C_1}(x) = g^{-1} \circ \hat{H} \circ (g|_{C_1})(x) = \\ &= g^{-1} \circ (\hat{H}|_{\tilde{C}_1})(g(x)) = (g^{-1} \circ \hat{h})(g(x)) = \\ &= (g^{-1} \circ g \circ h \circ g^{-1})(g(x)) = h(x) \implies H|_{C_1} = h \end{aligned}$$

y además  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

#### Proposición 1.6.4: Invarianza del cociente $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$

Si  $S_1$  y  $S_2$  son dos superficies topológicas conexas, entonces, salvo homeomorfismo, el espacio  $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$  no depende de los discos regulares euclídeos ni del homeomorfismo  $\varphi$ .

#### Demostración

Veremos la demostración en 3 pasos:

##### 1. El tamaño del disco no importa.

Sean  $D_1$  y  $D_3$  discos regulares y euclídeos centrados en  $p \in S_1$ , y supongamos que  $\overline{D_1} \subset D_3$  sin pérdida de generalidad. Veamos que  $S_1 \setminus D_1 \cong S_1 \setminus D_3$ .

Sea  $D'_3$  otro disco euclídeo con  $\overline{D_3} \subseteq D'_3$ , y  $\psi : D'_3 \rightarrow B(0, 2)$  un homeomorfismo verificando  $\psi(\overline{D_3}) = \overline{B(0, 1)}$ .

Aplicamos el Lema 1.6.3 a  $U = B(0, 3/2)$ ,  $C_1 = \psi(\partial D_1)$ ,  $C_2 = \psi(\partial D_3)$  y  $h : C_1 \rightarrow C_2$  un homeomorfismo cualquiera. Obtenemos que existe  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de forma que  $H|_{C_1} = h$  y  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

Sea

$$\tilde{H} = \psi^{-1} \circ H \circ \psi : D'_3 \rightarrow D'_3,$$

entonces  $\tilde{H}(D'_3 \setminus D_1) = D'_3 \setminus D_3$ , pues  $\overline{D_1} \subset D_3$  y  $\tilde{H}(\partial D_1) = \partial D_3$ .

Ahora, extendiendo fuera de  $D'_3$  por la identidad obtenemos el homeomorfismo buscado.

##### 2. El punto donde centremos el disco no importa.

Sea  $D_1$  un disco regular euclídeo centrado en  $p \in S_1$  y  $D_3$  disco regular euclídeo centrado en  $q \in S_1$ . Veamos que  $S_1 \setminus D_1 \cong S_1 \setminus D_3$  haciendo una construcción similar al caso anterior, pero haciendo también uso de la homogeneidad.

Sea  $F : S_1 \rightarrow S_1$  un homeomorfismo verificando  $F(p) = q$ . Sea  $D'_3$  disco regular con  $\overline{D_3} \subseteq D'_3$ . Sea  $\psi : D'_3 \rightarrow B(0, 2)$  el homeomorfismo que cumple que  $\psi(\overline{D_3}) = \overline{B(0, 1)}$ .

Sea ahora  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño de forma que  $\overline{F(D_4)} \subseteq D_1$ , donde  $D_4 = \psi^{-1}(B(0, \varepsilon))$ . Como  $\overline{D_4} \subseteq D_3$ , por el paso 1) obtenemos  $S_1 \setminus D_4 \cong S_1 \setminus D_3$ , y de la misma forma  $S_1 \setminus F(D_4) \cong S_1 \setminus D_1$ .

Pero como  $F$  es un homeomorfismo,  $S_1 \setminus F(D_4) \cong S_1 \setminus D_4$ , concluyendo así el paso 2.

### 3. No influye el homeomorfismo que elijamos.

Consideramos  $\varphi, \sigma : \partial S_1 \rightarrow \partial S_2$  y veamos que

$$S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi \cong S'_1 \sqcup S'_2 / R_\sigma.$$

Sea  $D'_2$  disco regular euclídeo con  $\overline{D_2} \subseteq D'_2$  y  $\psi_2 : D'_2 \rightarrow B(0, 2)$  homeomorfismo, con  $\psi_2(\overline{D_2}) = \overline{B(0, 1)}$ .

Aplicamos el lema 1.6.3 a las curvas  $C_1 = C_2 = \mathbb{S}^1$ ,  $h = \psi_2 \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  y  $U = B(0, 3/2)$ . Obtenemos un homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $H|_{\mathbb{S}^1} = h$  y  $H|_{\mathbb{R}^2 \setminus U} = Id$ .

Definimos  $F : D'_2 \rightarrow D'_2$  como  $F = \psi_2^{-1} \circ H|_{B(0, 2)} \circ \psi_2$ , verificando  $F(D'_2 \setminus D_2) = D'_2 \setminus D_2$ .

Ahora, extendiendo  $F$  a todo  $S_2$  por la identidad, obtenemos un homeomorfismo  $\hat{F} : S_2 \rightarrow S_2$  definido como la identidad en  $S_1 \setminus D_1$  y como  $F$  en  $S_2 \setminus D_2$ .

Para concluir la prueba basta comprobar que  $\hat{F}$  pasa al cociente. Es decir, queremos ver si a partir de nuestro homeomorfismo

$$\hat{F} : (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2) \rightarrow (S_1 \setminus D_1) \sqcup (S_2 \setminus D_2)$$

podemos definir un homeomorfismo entre los cocientes:

$$\tilde{F} : S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi \rightarrow S'_1 \sqcup S'_2 / R_\sigma.$$

Para que esto ocurra debe verificarse  $x R_\varphi y \implies \hat{F}(x) R_\sigma \hat{F}(y)$ . En nuestro caso,

$$x R_\varphi y \iff y = \varphi(x), \quad x \in \partial D_1, \quad y \in \partial D_2.$$

Pero entonces

$$\hat{F}(y) = \hat{F}(\varphi(x)) = \psi_2^{-1} \circ \psi_2 \circ \sigma \circ \varphi^{-1} \circ \psi_2^{-1} \circ \psi_2(\varphi(x)) = \sigma(x) = \sigma(\hat{F}(x)),$$

donde la última igualdad se debe a que  $\hat{F}$  es la identidad en  $\partial D_1$ .

Por tanto,  $\hat{F}(x) \sim \hat{F}(y)$ , y  $\hat{F}$  pasa al cociente como  $\tilde{F}$ , que es continua.

Aplicando la misma construcción a  $\varphi^{-1}$  y  $\sigma^{-1}$  podemos construir  $\tilde{F}^{-1}$ , y por tanto  $\tilde{F}$  es un homeomorfismo, concluyendo así la demostración.

#### Definición 1.6.5: Suma conexa de superficies

Al espacio topológico cociente  $S'_1 \sqcup S'_2 / \sim$  lo denotaremos  $S_1 \# S_2$  y lo llamaremos suma conexa de  $S_1$  y  $S_2$ .

**Proposición 1.6.6: Propiedades heredadas de la suma conexa**

Sean  $S_1, S_2$  superficies. Entonces,  $S_1 \# S_2$  es una superficie. Además:

- Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies conexas, entonces  $S_1 \# S_2$  es una superficie conexa.
- Si  $S_1$  y  $S_2$  son superficies compactas, entonces  $S_1 \# S_2$  es una superficie compacta.

**Demostración**

Las demostraciones de las propiedades de conexidad y compacidad se omiten, nos centramos en demostrar que  $S_1 \# S_2$  es una superficie. Se puede comprobar fácilmente que las propiedades de  $2AN$  y  $T_2$  se heredan de  $S_1$  y  $S_2$ . Por tanto, nos queda comprobar que  $S_1 \# S_2$  es localmente euclídeo de dimensión 2.

Usando la notación habitual, sea

$$S_1 \# S_2 = S'_1 \sqcup S'_2 / R_\varphi,$$

con  $\varphi : \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$  un homeomorfismo. Ya vimos en la Proposición 1.6.4 que  $S_1 \# S_2$  no depende de la elección de  $D_1, D_2$  ni de  $\varphi$ .

Consideramos la proyección

$$p|_{S'_1 \setminus \partial D_1} \rightarrow S_1 \# S_2,$$

que nos da un homeomorfismo de  $S'_1 \setminus \partial D_1$  sobre su imagen, la cual es un abierto de  $S_1 \# S_2$ . Por tanto,  $S'_1 \setminus \partial D_1$  es localmente euclídeo de dimensión 2. Análogamente,  $S'_2 \setminus \partial D_2$  es localmente euclídeo de dimensión 2.

Falta ver qué ocurre en  $\partial D_1$  y  $\partial D_2$ . Sean  $D'_1$  y  $D'_2$  discos regulares tales que  $\overline{D_i} \subseteq D'_i$ ,  $i = 1, 2$  y sean  $\psi_i : D'_i \rightarrow B(0, 2)$  homeomorfismos tales que  $\psi_i(\overline{D_i}) = B(0, 1)$ . Introducimos la siguiente notación: si  $J \subseteq [0, +\infty)$  es un intervalo, denotamos

$$A_J = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \in J\}.$$

Se tiene que  $\psi_i(D'_i \setminus D_i) = A_{[1, 2]}$ . Si llamamos  $\beta = \psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , y

$$\alpha(x) = \begin{cases} \|x\| \cdot \beta\left(\frac{x}{\|x\|}\right) & \text{si } x \neq (0, 0), \\ (0, 0) & \text{si } x = (0, 0). \end{cases}$$

Se verifica que  $\alpha|_{\mathbb{S}^1} = \beta$  y que  $\alpha \circ \psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$ . Por tanto,  $\alpha$  es un homeomorfismo de  $D'_1 \setminus D_1$  sobre  $D'_2 \setminus D_2$ .

Sea ahora

$$I : A_{[1, 2]} \rightarrow A_{(1/2, 1]}, \quad z \mapsto I(z) = \frac{z}{\|z\|^2}.$$

Por último, definimos

$$\Phi : (D'_1 \setminus D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2) \rightarrow A_{(1/2, 2)}$$

mediante

$$\Phi(q) = \begin{cases} I \circ \alpha \circ \psi_1(q) & \text{si } q \in D'_1 \setminus D_1, \\ \psi_2(q) & \text{si } q \in D'_2 \setminus D_2. \end{cases}$$

Afirmamos que

$$V_0 = p((D'_1 \setminus D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2))$$

es el abierto de  $S_1 \# S_2$  que contiene a  $p(\partial D_1) = p(\partial D_2)$ . Se tiene que

$$(\partial D_1) \cup ((D'_1 \setminus D_1) \cap (S'_1 \setminus \partial D_1)) = \partial D_1 \cup (D'_1 \setminus D_1) = D'_1 \setminus D_1.$$

Veamos que  $\varphi(\partial D_1) \cup (D'_2 \setminus D_2)$  es abierto en  $S_2$ .

Queda por demostrar que  $\Phi : V_0 \rightarrow A_{(1/2,2)}$  pasa al cociente. Esto ocurre pues se tiene que

$$\psi_2 \circ \varphi = I \circ \alpha \circ \psi_1$$

sobre  $\partial D_1$ . Cabe como ejercicio para el pobre lector comprobar que, dado  $xR_\varphi y$ , se cumple que  $\psi_2(y) = \psi_2(\varphi(x)) = I \circ \alpha \circ \psi_1(x)$ . Una vez hecho esto, la demostración concluye. ■



## Capítulo 2

# Clasificación de superficies compactas

### 2.1. Símplices

#### Definición 2.1.1: Símplice

Dados  $k+1$  puntos  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^m$  afínmente independientes, el subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^m$  más pequeño que los contiene se conoce como un  $k$ -símplice y se denota por  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$ . Los puntos  $v_i$  se llaman los vértices del  $k$ -símplice. Diremos que la dimensión de  $\sigma$  es  $k$ .

#### Definición 2.1.2: Subsímplices, caras

Si  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$  es un  $k$ -símplice, cualquier subconjunto no vacío de vértices también determina un símplice que llamaremos subsímplice de  $\sigma$ . Si solo se omite un vértice, el subsímplice correspondiente se denomina una cara.

Las caras de  $\sigma$  se denotan:  $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ , donde  $\hat{v}_i$  es el vértice omitido.

#### Ejemplo

0-símplice (punto), 1-símplice (segmento de línea), 2-símplice (triángulo) y 3-símplice (tetraedro)



**Definición 2.1.3: Frontera**

Si  $\sigma = [v_0, \dots, v_k]$  es un  $k$ -símplice, la unión de todas sus caras se denomina la frontera de  $\sigma$  y se denota por

$$\partial\sigma = \bigcup_{0 \leq i \leq k} [v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k].$$

**Definición 2.1.4: Interior**

Si  $\sigma$  es un  $k$ -símplice, el complementario de su frontera se denomina el interior de  $\sigma$ ,

$$\text{int}(\sigma) = \sigma \setminus \partial\sigma$$

Inmediatamente, se obtiene  $\sigma = \text{int}(\sigma) \cup \partial\sigma$ , donde la unión es disjunta.

**Nota**

La frontera y el interior de un  $k$ -símplice  $\sigma$  son conceptos independientes de la topología tomada sobre  $\mathbb{R}^m$ . Sin embargo, si  $k = m$ , entonces coinciden con la frontera y el interior topológicos de  $\sigma$  en topología usual de  $\mathbb{R}^m$ .

## 2.2. Complejos simpliciales

**Definición 2.2.1: Complejo simplicial**

Un complejo simplicial  $K$  es una colección finita de símlices tal que:

1. Cada cara de cada símplex de  $K$  también está en  $K$ .
2. La intersección de cualesquiera dos símlices de  $K$  es vacía o es un subsímplex de ambos.

La dimensión de  $K$  es la máxima dimensión de sus símlices.

**Definición 2.2.2: Número de Euler**

Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n$ , si para cada  $0 \leq k \leq n$  denotamos por  $i_k$  el número de  $k$ -símlices de  $K$ , entonces el número (o característica) de Euler de  $K$  es:

$$\chi(K) = i_0 - i_1 + \dots + (-1)^n i_n.$$

**Nota**

Para el caso de un complejo simplicial de dimensión 2, denotando a los vértices  $V = i_0$ , aristas (edges en inglés)  $E = i_1$  y caras (faces en inglés)  $F = i_2$ ; la característica de Euler se puede expresar como:

$$\chi = V - E + F$$

**Definición 2.2.3: Poliedro asociado**

Dado un complejo simplicial  $K$ , la unión de todos los símlices de  $K$  con la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^n$  se denomina el poliedro de  $K$  y lo denotamos por  $|K|$ .

**2.3. Triangulaciones****Definición 2.3.1: Triangulación**

Una triangulación de dimensión  $n$  de un espacio topológico  $X$  es un complejo simplicial  $K$  de dimensión  $n$  de forma que  $|K|$  y  $X$  son homeomorfos. En este caso se dice que  $X$  es triangulable.

Enunciamos el siguiente teorema sin demostración:

**Teorema 2.3.2: Teorema de Radó**

Toda superficie topológica admite una triangulación por un complejo simplicial de dimensión 2. Además cada 1-símlice (arista) es subsímlice de exactamente dos 2-símlices (cara).

**2.4. Presentación de superficies****Definición 2.4.1: Letras y palabras**

Sea  $A$  un conjunto finito (sus elementos los llamaremos letras). Una palabra  $W$  es una sucesión finita de elementos de la forma  $a$  ó  $a^{-1}$ , con  $a \in A$ , denotada por yuxtaposición.

**Ejemplo**

Consideremos el conjunto  $A = \{a, b, c\}$  formado por tres letras. Algunos ejemplos de palabras son los siguientes:

$$W_1 = cbab^{-1}ca^{-1}, W_2 = caab^{-1}bc^{-1}, W_3 = abb^{-1}a^{-1}.$$

**Definición 2.4.2: Presentación poligonal**

Una presentación poligonal, escrita como  $\mathcal{P} = \langle A | W_1, \dots, W_k \rangle$ , está formada por un conjunto finito de letras  $A$  y una colección finita de palabras  $W_1, \dots, W_k$  que cumplen:

1. Cada letra de  $A$  aparece exactamente dos veces en todo el conjunto de palabras.
2. Cada palabra tiene al menos longitud tres, salvo que haya una sola palabra que podría ser de dos letras.

**Ejemplo**

Algunos ejemplos sencillos de presentaciones poligonales son los siguientes:

$$\mathcal{P}_1 = \langle a \mid aa^{-1} \rangle, \mathcal{P}_2 = \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle.$$

Si consideramos el conjunto de letras y palabras del ejemplo anterior,  $\mathcal{P} = \langle A \mid W_1 \rangle$  es una representación poligonal, pero  $\mathcal{P}' = \langle A \mid W_3 \rangle$  no, ya que la letra  $c$  no aparece exactamente dos veces en el conjunto de palabras.

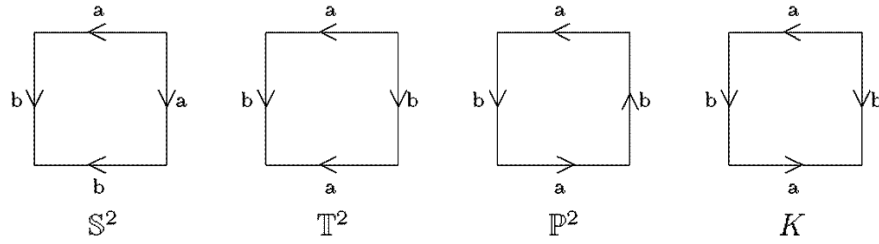
**Definición 2.4.3: Realización geométrica de  $\mathcal{P}$** 

Toda presentación poligonal  $\mathcal{P}$  tiene asociado un espacio topológico  $|\mathcal{P}|$  (realización geométrica de  $\mathcal{P}$ ) construido como sigue:

1. Para cada palabra se considera un polígono con el mismo número de aristas que la longitud de la palabra.
2. Cada arista se etiqueta correlativamente con las letras de la palabra y orientación opuesta si la letra está elevada a -1.
3. Finalmente, se identifican las aristas con el mismo nombre y orientación, mediante la topología cociente.

**Ejemplo**

Ejemplos de realizaciones geométricas y espacios a los que son homeomorfas:



Si nos fijamos en la segunda realización geométrica, esta es claramente homeomorfa al cuadrado unidad  $X = I \times I$  con la relación de equivalencia

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}, y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

que identifica los lados superior e inferior con la misma orientación y también derecho e izquierdo con la misma orientación. Este espacio cociente  $X/\sim$  es precisamente el que tratamos en un ejemplo de la Sección 1.2, donde se probó que era homeomorfo a  $\mathbb{T}^2$ .

**Ejercicio 2.1**

Probar que las realizaciones geométricas del ejemplo anterior, es decir, los cuadrados con una cierta relación de equivalencia, son homeomorfos a los espacios que se indica en la figura.

**Proposición 2.4.4: Compacidad y conexión de  $|\mathcal{P}|$** 

Dada una representación poligonal  $\mathcal{P}$ , su realización geométrica,  $|\mathcal{P}|$ , es una superficie compacta. Además si solo tiene una palabra, entonces es conexa.

**Demostración**

Consideremos el polígono  $X$  (realmente pueden ser varios polígonos disjuntos si hay más de una palabra). Vamos a ver que el espacio topológico cociente  $\tilde{X}$  resultado de identificar las aristas es:

1. Compacto
2. Superficie ( $T_2$ ,  $2AN$ , localmente euclídeo)

Antes de esto, es inmediato que si hay una sola palabra el espacio es conexo, puesto que en tal caso el espacio original  $X$  está formado por un único polígono y es conexo. Por tanto, por las propiedades de los espacios cociente  $\tilde{X}$  también es conexo. Notemos también que el hecho de tener más de una palabra no excluye la posibilidad de que  $\tilde{X}$  sea conexo.

**Compacto:** Sea  $X$  el polígono en  $\mathbb{R}^2$ , sea  $\sim$  la relación de equivalencia entre las aristas y sea  $\tilde{X}$  el cociente.  $X$  es compacto por ser cerrado y acotado, y la proyección al cociente  $p : X \rightarrow \tilde{X} = X/\sim$  es continua, por tanto,  $\tilde{X}$  es compacto.

**T<sub>2</sub>:** *Esquema de la demostración:*

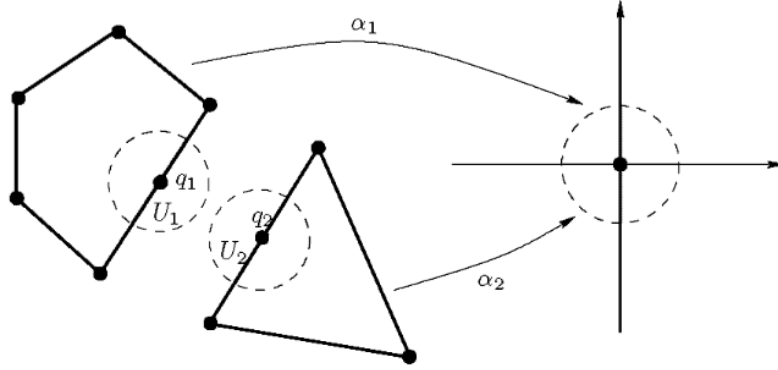
Consideremos dos puntos  $x', y' \in \tilde{X}$  y sean  $x, y \in X$  de tal manera que  $p(x) = x', p(y) = y'$ . Podemos tomar discos en  $\mathbb{R}^2$  lo suficientemente pequeños de forma que separen los puntos en  $X$  y las imágenes por  $p$  separan los puntos de  $\tilde{X}$ .

**Localmente euclídeo:** La idea es distinguir 3 casos:

Veamos que  $\tilde{X}$  es localmente euclídeo. Necesitamos que para cada punto, haya un entorno que sea homeomorfo a un abierto de  $\mathbb{R}^2$ . Sea  $x \in \tilde{X}$  y consideramos los tres casos posibles para la preimagen del punto:

$$\pi^{-1}(x) = \begin{cases} p \in \text{int}(X) \\ \{q_1, q_2\} \in \text{aristas} \\ \{v_1, \dots, v_k\} \in \text{vértices} \end{cases}$$

1.  $\pi^{-1}(x) = p \in \text{int}(X)$ . Como solo se identifican aristas estamos dentro de un polígono de  $\mathbb{R}^2$ . Entonces,  $\pi|_{\text{int}(X)} : \text{int}(X) \rightarrow \pi(\text{int}(X))$  es biyectiva y continua y su inversa también es continua. Por tanto, como  $\text{int}(X)$  es abierto,  $\pi(\text{int}(X))$  es un entorno del  $x$  homeomorfo a un abierto como queríamos ver.
2. Tomamos  $D_i \subset \mathbb{R}^2$  disco centrado en  $q_i$  con  $\overline{D_1} \cap \overline{D_2} = \emptyset$ . Además, tampoco cortan ningún vértice de  $X$ . Sean  $U_i = D_i \cap X$  semidisks. Sea  $h : a \rightarrow a'$  el homeomorfismo que da la relación de equivalencia (con  $a, a'$  las aristas), es decir,  $h(x) = y, x \in a, y \in a' \iff xRy$ .



Existen homeomorfismos  $\alpha_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (de hecho aplicaciones afines) tales que:

$$\alpha_1(U_1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1, \text{Im}(z) \geq 0\} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y)\| < r_1, y \geq 0\}$$

$$\alpha_2(U_2) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r_2, \text{Im}(z) \leq 0\}$$

que verifican que  $\alpha_2 \circ h = \alpha_1|_a$  y que mandan  $q_1, q_2$  al origen.

Sea  $r = \min\{r_1, r_2\}$  y definamos los abiertos

$$V_1 = \alpha^{-1}(\{z : |z| < r, \text{Im}(z) \geq 0\}), \quad V_2 = \alpha^{-1}(\{z : |z| < r, \text{Im}(z) \leq 0\})$$

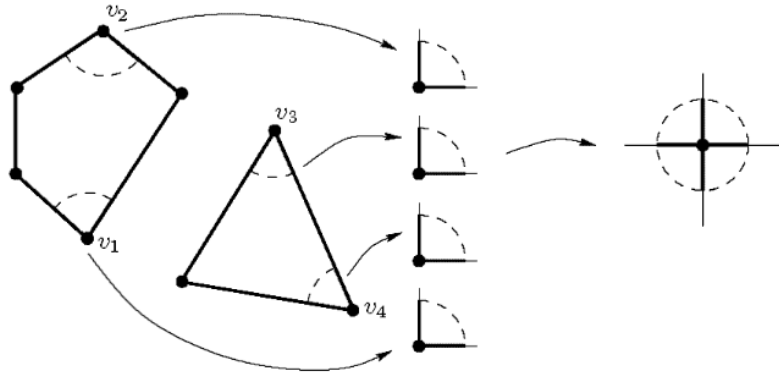
Consideremos ahora  $V = V_1 \cup V_2$  abierto de  $X$ . Entonces  $\alpha : V_1 \cup V_2 \rightarrow B(0, r)$  definida por

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1(x) & x \in V_1 \\ \alpha_2(x) & x \in V_2. \end{cases}$$

es una identificación (continua, cerrada, sobreyectiva). Está bien definida y pasa al cociente porque  $xRy, x \in a, y \in a' \implies y = h(x)$  y entonces  $\alpha(y) = \alpha_2(y) = \alpha_2(h(x)) = \alpha_1(x) = \alpha(x)$ . Al pasar al cociente obtenemos  $\tilde{\alpha} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , donde  $\tilde{V} = \pi(V)$  que es abierto, como  $x \in \tilde{V}$  esto prueba que existe un entorno de  $x$  homeomorfo a un entorno de  $\mathbb{R}^2$ , puesto que podemos considerar la restricción de  $\tilde{\alpha}$  a su imagen (que será abierta puesto que  $\tilde{V}$  lo es), de manera que obtenemos un homeomorfismo.

3. Sea ahora  $\pi^{-1}(x) = \{v_1, \dots, v_k\}, k \in \mathbb{N}$ . Consideremos  $D_i$  discos suficientemente pequeños de manera que  $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset, i \neq j$  no contenga puntos de otras aristas, ni vértices. Sean  $U_i = D_i \cap X$  sectores circulares. Denotemos a las dos aristas de cada vértice  $a_i, b_i$ , y supongamos los sectores ordenados de forma que  $b_i \sim a_{i+1}, i = 1, \dots, k$ .

Objetivo: encontrar una aplicación que junte todos los sectores para formar una circunferencia,  $V_1 \cup \dots \cup V_k \xrightarrow{\alpha} B(0, r) \subset \mathbb{R}^2$ .



En primer lugar podemos construir un homeomorfismo afín  $\alpha_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva el sector  $U_i$  en  $\{z : |z| < r_i, \arg(z) \in [\frac{2\pi(i-1)}{k}, \frac{2\pi i}{k}]\}$  para todo  $i = 1, \dots, k-1$  cumpliendo  $\alpha_{i+1} \circ h_i = \alpha_i|_{b_i}$ , donde  $h_i : b_i \rightarrow a_{i+1}$ .

También podemos construir el último homeomorfismo  $\alpha_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  que lleva  $U_k$  en  $\{z : |z| < r_k, \arg(z) \in [\frac{2\pi(k-1)}{k}, 2\pi]\}$  y que cumpla

$$\begin{cases} \alpha_k \circ h_{k-1} = \alpha_{k-1}|_{b_{k-1}} \\ \alpha_1 \circ h_k = \alpha_k|_{b_k \equiv a_1} \end{cases} \quad (\star)$$

con  $h_k : b_k \rightarrow a_1$ .

Para garantizar la existencia de  $\alpha_k$ , podemos construirla en dos pasos, una para llevar a su hueco y otra para garantizar  $(\star)$ .

Sea  $r \leq \min\{r_1, \dots, r_k\}$  y  $V_i = \alpha_i^{-1}(\{z : |z| < r, \arg(z) \in [\frac{2\pi(i-1)}{k}, \frac{2\pi i}{k}]\})$ . Definimos  $\alpha : V_1 \cup \dots \cup V_k \rightarrow B(0, r)$  como

$$\alpha(x) = \alpha_i(x), x \in V_i.$$

$\alpha$  está bien definida pues

$$xRy, x \in b_i, y \in a_{i+1} \implies \alpha(y) = \alpha_{i+1}(h_i(x)) = \alpha_i(x) = \alpha(x), i \neq k.$$

Y para  $i = k$ ,

$$y = h_k(x) \in a_1, \alpha(y) = \alpha_1(h_k(x)) = \alpha_k(x) = \alpha(x).$$

Luego,  $\alpha$  es identificación (continua, sobreyectiva, cerrada) y  $\tilde{\alpha}$  es un homeomorfismo al restringirla a su imagen, y podemos aplicar el mismo argumento del caso anterior.

**2AN:** La proyección es continua y sobreyectiva, y el polígono es  $2A\mathbb{N}$ , luego  $\tilde{X}$  también lo es por el Lema 1.4.6. ■

### Definición 2.4.5: Presentación de una superficie compacta

Sea  $\mathcal{S}$  una superficie compacta. Una presentación de  $\mathcal{S}$  es una presentación poligonal  $\mathcal{P}$  tal que  $|\mathcal{P}|$  y  $\mathcal{S}$  son homeomorfas.



## 2.5. Transformaciones elementales

### Definición 2.5.1: Transformaciones elementales sobre presentaciones poligonales

Dada una presentación poligonal, llamaremos transformaciones elementales a las siguientes operaciones:

- **Renombrado:** Sustituir todas las apariciones de una letra  $a$  por otra letra  $b$  que no estuviera en la presentación.
- **Subdivisión:** Cambiar todas las apariciones de una letra  $a$  por  $ab$ , y todas las apariciones de  $a^{-1}$  por  $b^{-1}a^{-1}$ , donde  $b$  es una letra nueva que no estaba en la presentación.
- **Consolidado:** Dadas dos letras  $a$  y  $b$  que siempre aparezcan juntas de la forma  $ab$  o  $b^{-1}a^{-1}$ , sustituimos todas las apariciones de  $ab$  por  $c$ , y todas las apariciones de  $b^{-1}a^{-1}$  por  $c^{-1}$ , donde  $c$  es una letra nueva que no estaba en la presentación.
- **Reflejo:** Cambiar una palabra de la forma  $a_1a_2 \dots a_k$  por  $a_k^{-1}a_{k-1}^{-1} \dots a_1^{-1}$ , donde  $a_i$  son letras de la presentación.
- **Rotación:** Cambiar una palabra de la forma  $a_1a_2 \dots a_k$  por  $a_2a_3 \dots a_ka_1$ , donde  $a_i$  son letras de la presentación.
- **Corte:** Dada una palabra  $W_1W_2$ , con  $W_1$  y  $W_2$  no vacías, quitamos  $W_1W_2$  de la presentación y añadimos  $W_1a, a^{-1}W_2$  como palabras nuevas, donde  $a$  es una letra nueva que no estaba en la presentación.
- **Pegado** Sustituimos dos palabras de la forma  $W_1a, a^{-1}W_2$ , con  $W_1$  y  $W_2$  arbitrarias y no vacías, por  $W_1W_2$ .
- **Plegado** Una palabra de la forma  $W_1aa^{-1}$  se sustituye por  $W_1$ , donde  $W_1$  tiene al menos longitud 3, salvo que haya una sola palabra, en cuyo caso podría ser de dos letras.
- **Desplegado** Una palabra de la forma  $W_1$  se sustituye por  $W_1aa^{-1}$ , donde  $W_1$  tiene al menos longitud 3, salvo que haya una sola palabra, en cuyo caso podría ser de dos letras.

### Definición 2.5.2: Presentaciones equivalentes

Dos transformaciones poligonales se dice que son topológicamente equivalentes si sus realizaciones geométricas son homeomorfas.

### Proposición 2.5.3: Equivalencia por transformaciones elementales

Cada una de las transformaciones elementales sobre una presentación poligonal produce otra presentación topológicamente equivalente.

#### Demostración

Claramente, subdividir y consolidar son operaciones inversas una de la otra, al igual que cortar/pegar y plegar/desplegar, por lo que por simetría solo es necesario demostrar una de cada par. Demostramos las técnicas probando la proposición para cortar y plegar, y dejamos el resto como ejercicio.

Para probar que cortar produce una realización geométrica homeomorfa, sean  $P_1$  y  $P_2$  polígonos convexos «etiquetados»  $W_1e$  y  $e^{-1}W_2$ , respectivamente, y sea  $P'$  un polígono convexo etiquetado  $W_1W_2$ . Por el momento, asumamos que estas son las únicas palabras en sus respectivas presentaciones. Sean  $\pi : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow S$  y  $\pi' P' \rightarrow S'$  las identificaciones respectivas. El segmento de recta que va desde el vértice terminal de  $W_1$  en  $P'$  hasta su vértice inicial está contenido en  $P'$  por convexidad; etiquetemos este segmento como  $e$ . Se puede asegurar<sup>a</sup> que existe una aplicación continua  $f : P_1 \sqcup P_2 \rightarrow P'$  que lleva cada arista de  $P_1$  o  $P_2$  a la arista en  $P'$  con la etiqueta correspondiente, y cuya restricción a cada  $P_i$  es un homeomorfismo. Además,  $f$  es una identificación. Como  $f$  identifica las dos aristas etiquetadas  $e$  y  $e^{-1}$  pero nada más, las también identificaciones  $\pi' \circ f$  y  $\pi$  realizan exactamente las mismas identificaciones, por lo que sus espacios cociente son homeomorfos. Si hay otras palabras  $W_3, \dots, W_k$ , simplemente extendemos  $f$  declarándola como la identidad en sus respectivos polígonos y procedemos como antes.

Para plegar, como antes podemos ignorar las palabras adicionales  $W_2, \dots, W_k$ . Si  $W_1$  tiene longitud 2, podemos subdividir para alargarla, luego realizar la operación de plegado y después consolidar, así que asumimos que  $W_1$  tiene longitud al menos 3. Supongamos primero que  $W_1 = abc$  tiene longitud exactamente 3. Sean  $P$  y  $P'$  polígonos convexos con etiquetas de arista  $abcee^{-1}$  y  $abc$ , respectivamente, y sean  $\pi : P \rightarrow S$ ,  $\pi' : P' \rightarrow S'$  las identificaciones.



Añadiendo aristas como se muestra en la figura existe una única aplicación  $f : P \rightarrow P'$  que lleva cada arista de  $P$  a la arista de  $P'$  con la misma etiqueta. Como antes,  $\pi' \circ f$  y  $\pi$  son identificaciones que realizan las mismas identificaciones, por lo que sus espacios cociente son homeomorfos.

Si  $W_1$  tiene longitud 4 o más, podemos escribir  $W_1 = Xbc$  para algún  $X$  de longitud al menos 2. Entonces cortamos a lo largo de  $a$  para obtener  $\langle S, b, c, e \mid Xbcee^{-1} \rangle \cong \langle S, a, b, c, e \mid Xa^{-1}, abcee^{-1} \rangle$  y procedemos como antes. ■

<sup>a</sup>Haría falta hacer una construcción que no incluimos, pero se puede probar que las aplicaciones que nombramos existen.

**Proposición 2.5.4: Presentación de  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$** 

Sean  $\mathcal{S}_1$  y  $\mathcal{S}_2$  dos superficies compactas y conexas presentadas por  $\langle A_1 | W_1 \rangle$  y  $\langle A_2 | W_2 \rangle$ , respectivamente. Entonces,  $\langle A_1 \cup A_2 | W_1 W_2 \rangle$  es una presentación de  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$ .

***Demostración***

Sea  $\mathcal{P}_1$  el polígono asociado a  $W_1$  y sean  $p, q \in \text{int}(\mathcal{P}_1)$  dos puntos distintos y  $v$  un vértice de  $\mathcal{P}_1$ .

Aplicando operaciones elementales tenemos

$$\mathcal{S}_1 = \langle A_1 | W_1 \rangle = \langle A_1 \cup \{a, b, c\} \mid W_1 cba = Q_1, a^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle.$$

Definimos  $\pi' : \mathcal{P}_1 \cup Q_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$  y  $\pi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{S}_1$ . Sea entonces  $B_1 = \pi'(\text{int}(Q_1)) \subset \mathcal{S}_1$ . Si probamos que  $B_1$  es homeomorfo a un disco, entonces podemos hacer lo mismo con  $\mathcal{S}_2$  y aplicar que  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$  se puede ver como  $\mathcal{S}_1 \setminus Q_1 \cup \mathcal{S}_2 \setminus Q_2 /_{R_\varphi}$ .

Para ver que  $B_1$  es homeomorfo a un disco, hacemos un razonamiento similar al de la Proposición 2.4.4 tomando como abierto uno de la forma «sector circular» con  $p$  y  $q$  dentro del sector y  $v$  el vértice, y hacer el mismo razonamiento con un solo sector.

Así, tendremos que  $\langle A_1 \cup \{a, b, c\} \mid W_1 cba, a^{-1}b^{-1}c^{-1} \rangle$  es una presentación de  $\mathcal{S}_1 \setminus \text{int}(Q_1)$ , análogamente  $\langle A_2 \cup \{a', b', c'\} \mid W_2 c'b'a', (a')^{-1}(b')^{-1}(c')^{-1} \rangle$  es presentación de  $\mathcal{S}_2 \setminus \text{int}(Q_2)$ .

Para obtener  $\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2$  identificamos  $\varphi : \partial Q_1 \rightarrow \partial Q_2$ , con  $\varphi(a) = a', \varphi(b) = b', \varphi(c) = c'$  y obtenemos

$$\mathcal{S}_1 \# \mathcal{S}_2 = \langle A_1 \cup A_2 \cup \{a, b, c\} \mid W_1 cbaa^{-1}b^{-1}c^{-1}W_2 \rangle = \langle A_1 \cup A_2 \mid W_1 W_2 \rangle.$$

## 2.6. Teorema de Clasificación

En esta sección se presenta y demuestra el teorema de clasificación de superficies compactas de  $\mathbb{R}^n$ . Ya hemos visto que las transformaciones elementales sobre presentaciones poligonales producen presentaciones equivalentes, nuestro objetivo ahora es demostrar que cualquier presentación poligonal de una superficie compacta y conexa puede ser transformada en una de las formas canónicas dadas por el teorema de clasificación.

En primer lugar enunciamos sin demostración una serie de presentaciones «estándar» de las superficies más usuales

- $\mathbb{S}^2 \cong \langle a, b \mid abb^{-1}a^{-1} \rangle \cong \langle a \mid aa^{-1} \rangle$
- $\mathbb{T}^2 \cong \langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$
- $\mathbb{RP}^2 \cong \langle a, b \mid abab \rangle \cong \langle a \mid aa \rangle$
- $K \cong \langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$



El siguiente lema simplifica la demostración del teorema de clasificación, mostrando la equivalencia entre ciertos tipos de superficies.

### Lema 2.6.1: Equivalencia entre algunos tipos de superficies

1. La botella de Klein y  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  son homeomorfas.
2.  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{RP}^2$  y  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$  son homeomorfas.

#### Demostración

Para la primera parte nos fijamos en el siguiente dibujo:



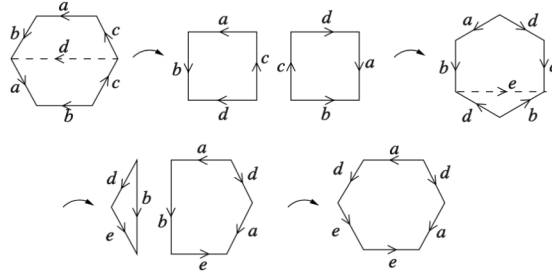
Por tanto a la presentación de la botella de Klein dada por  $\langle a, b \mid abab^{-1} \rangle$  le aplicamos

un corte, una reflexión, dos rotaciones, un pegado y una última rotación:

$$\begin{aligned}\langle a, b \mid abab^{-1} \rangle &\cong \langle a, b, c \mid abc, c^{-1}ab^{-1} \rangle \cong \langle a, b, c \mid abc, ba^{-1}c \rangle \\ &\cong \langle a, b, c \mid bca, a^{-1}cb \rangle \cong \langle b, c \mid bccb \rangle \cong \langle b, c \mid bbcc \rangle\end{aligned}$$

y llegamos a una presentación de la suma conexa de dos proyectivos.

Para la segunda parte nos fijamos en este otro dibujo:



Partimos de una presentación de  $K \# \mathbb{RP}^2$ , que por la parte 1 sabemos que es homeomorfo a  $\mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$ . La presentación está dada por  $\langle a, b \mid abab^{-1}cc \rangle$ , y le aplicamos las transformaciones de la figura (ejercicio para el lector: indicar qué transformaciones elementales se usan en cada paso)

$$\begin{aligned}\langle a, b, c \mid abab^{-1}cc \rangle &\cong \langle a, b, c, d \mid abd^{-1}c, c^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle \cong \langle a, b, d \mid abd^{-1}ba^{-1}d^{-1} \rangle \\ &\cong \langle a, b, d, e \mid deb^{-1}, bea^{-1}d^{-1}a \rangle \cong \langle a, d, e \mid deea^{-1}d^{-1}a \rangle \\ &\cong \langle a, d, e \mid a^{-1}d^{-1}adee \rangle\end{aligned}$$

y llegamos a una presentación de la suma conexa de un toro y un proyectivo. ■

### Teorema 2.6.2: Clasificación de superficies compactas

Sea  $S$  una superficie compacta y conexa, entonces  $S$  es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

- la esfera  $\mathbb{S}^2$ .
- una suma conexa de toros  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ .
- una suma conexa de planos proyectivos  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ .

**Demostración.** Sea  $M$  una superficie compacta y conexa y sea  $\mathcal{P}$  su presentación poligonal, la cual sabemos que existe por el Teorema de Radó.

Objetivo: aplicar transformaciones elementales a  $\mathcal{P}$  hasta llegar a uno de los siguientes casos:

$$\mathcal{P} \cong \begin{cases} \langle a|aa^{-1} \rangle, & \text{presentación de } \mathbb{S}^2, \\ \langle a_1, b_1, \dots, a_n, b_n | a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1} \rangle, & \text{presentación de } \mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2, \\ \langle a_1, \dots, a_n | a_1 a_1 \dots a_n a_n \rangle, & \text{presentación de } \mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2. \end{cases}$$

Para ello, separamos la demostración en 7 pasos, en cada uno de los cuales manipulamos  $\mathcal{P}$  para que cumpla una determinada condición (nótese el abuso de notación al llamar  $\mathcal{P}$  tanto a la presentación original como a la presentación  $\mathcal{P}'$  obtenida tras aplicar una transformación elemental). Al término del último paso, llegaremos a que  $\mathcal{P}$  adopta una de las formas canónicas anteriores.

Durante la demostración, llamaremos *aristas complementarias* a aquellas que aparecen en  $\mathcal{P}$  como  $a$  y  $a^{-1}$ , y *aristas retorcidas* a las que aparecen como  $a$  y  $a$ , o  $a^{-1}$  y  $a^{-1}$ .

### PASO 1:

Podemos suponer que  $\mathcal{P}$  tiene solo una palabra (o que el polígono tiene 1 sola cara).

Una consecuencia de que la superficie sea conexa es la siguiente: si  $\mathcal{P}$  tiene varias palabras, para cada palabra debe existir una arista que se identifique con una arista de otra palabra. Es decir, siempre que  $\mathcal{P}$  tenga varias palabras, para cada palabra  $W_1$  de  $\mathcal{P}$  debe existir una arista  $a \in W_1$  y una palabra  $W_2$  tal que o bien  $a \in W_2$  o  $a^{-1} \in W_2$ . En caso de que esto no ocurra, en la realización geométrica  $W_1$  y las demás palabras serían disjuntas, formando así una separación que contradice la conexión de  $M$ .

Ahora, si  $W_1$  es una palabra y  $\mathcal{P}$  tiene más de una palabra, por lo anterior existe una arista  $a$  que conecta con otra palabra  $W_2$  (ya sea mediante  $a$  o  $a^{-1}$ ). Pegando  $W_1$  y  $W_2$  (aplicando rotaciones y reflejos si fuera necesario), obtenemos una presentación donde  $W_1$  y  $W_2$  se han sustituido por una única nueva palabra  $W'_1 W'_2$ .

Como el número de palabras de la presentación original es finito, mediante este proceso se obtiene una presentación equivalente compuesta por una sola palabra.

### PASO 2:

Podemos suponer que no hay pares de aristas complementarias adyacentes ( $W_1 a a^{-1} W_2$ ).

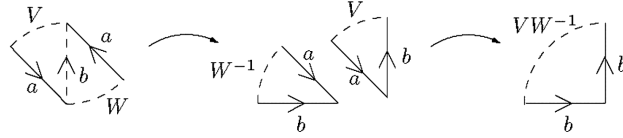
Si las hubiera, plegando por ellas desaparecen. Excepto el caso en que solo tengamos ese par ( $W_1, W_2 = \emptyset$ ). Pero entonces la superficie es una esfera, que es una de las formas canónicas que pretendíamos obtener.

### PASO 3:

Podemos suponer que todos los pares de aristas retorcidas son adyacentes.

Supongamos que tenemos  $VaWa$ , con  $V, W \neq \emptyset$ . Cortamos por el medio ( $Vab$  y  $b^{-1}Wa$ ). Rotamos y reflejamos la segunda palabra ( $bVa$  y  $a^{-1}W^{-1}b$ ), y pegamos por  $a$  llegando a

$bbVW^{-1}$ , donde las aristas retorcidas ya son adyacentes. La repetición de este proceso una cantidad finita de veces demuestra el paso 3.



*Nota:* En cada iteración, es posible que tengamos que volver a aplicar el paso 2 ya que al pegar  $V$  y  $W^{-1}$  en  $VW^{-1}$  podrían aparecer nuevas aristas complementarias adyacentes.

#### PASO 4:

Podemos suponer que el polígono tiene todos sus vértices identificados.

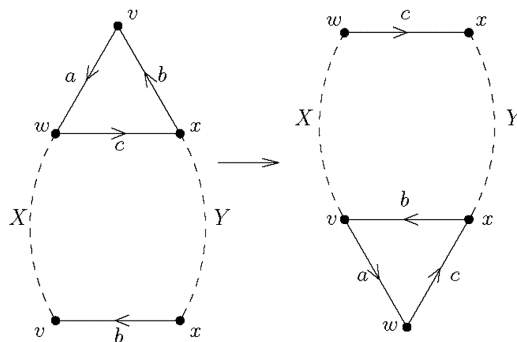
Sea  $p : \mathcal{P} \rightarrow M$  la proyección al cociente. Sea  $p(v) = [v]$ . Si no todos los vértices están identificados, existen vértices  $v_1, w$  en  $\mathcal{P}$  y una arista  $a : v_1 \rightarrow w$  con  $p(v_1) \neq p(w)$ . Ahora, la arista que termina en  $v_1$  no puede ser ni  $a$  (porque entonces  $p(v_1) = p(w)$ ) ni  $a^{-1}$  (pues tendríamos la secuencia  $a^{-1}a$  y al aplicar de nuevo el paso 2 llegaríamos también a que  $p(v_1) = p(w)$ ). Por tanto, concluimos que la arista es distinta, llamémosla  $b$ , y al vértice del que parte  $x$ . Es decir, tenemos  $b : x \rightarrow v_1$ .

Por la definición de presentación poligonal, la letra  $b$  debe aparecer (bien como  $b$  o como  $b^{-1}$ ) en otro sitio de la presentación. Suponemos que aparece  $b^{-1}$  (si fuese  $b$  sería análogo salvo una reflexión que ahora mencionaremos). Tenemos entonces por construcción la secuencia  $baXb^{-1}Y$ , con  $X$  e  $Y$  cadenas arbitrarias de la presentación. Podemos suponer  $X, Y \neq \emptyset$ . Veámos por qué:

- Si  $X$  fuese vacío, por la definición de  $b$ , el vértice al que llega  $b^{-1}$  en nuestra cadena no sería otro que  $w$  (recordemos  $a : v_1 \rightarrow w$ ). Pero entonces  $p(v_1) = p(w)$ , lo que contradice la hipótesis.
- Si  $Y$  fuese vacío, rotando obtendríamos dos aristas adyacentes  $b$  y  $b^{-1}$  y estaríamos en el paso 2.

Ahora, cortando por una nueva arista  $c : w \rightarrow x$ , rotando para pegar por  $b$  (y reflejando si en vez de tener  $b^{-1}$  tuviéramos  $b$ ) obtenemos:

$$baXb^{-1}Y \cong bac, c^{-1}Xb^{-1}Y \cong acb, b^{-1}Yc^{-1}X \cong acYc^{-1}X$$



Incluyendo los vértices en la presentación a la que hemos llegado,

$$v_1 \xrightarrow{a} w \xrightarrow{c} x \xrightarrow{Y} x \xrightarrow{c^{-1}} w \xrightarrow{X} v_1$$

que es una presentación equivalente donde hemos reducido la cantidad de vértices que se identifican con  $v_1$  en una unidad.

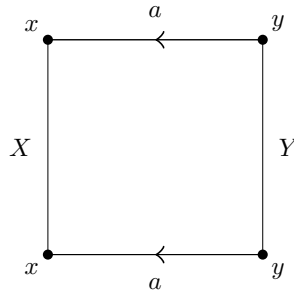
*Nota:* De nuevo, podría ser que al pegar  $Xa$  aparecieran nuevas aristas complementarias adyacentes. En ese caso, se aplicaría el paso 2, donde en ningún caso se pueden aumentar los vértices identificados con  $v_1$ , solo disminuirlos.

Una cantidad finita de iteraciones de este proceso elimina la clase de equivalencia de vértices  $v_1$ , pues en cada paso se elimina un elemento de este conjunto finito. Repitiendo para cada clase de equivalencia de vértices, llegamos a que solo puede quedar una, demostrando así el paso 4.

#### PASO 5:

Se cumple que si aparece un par  $a, a^{-1}$ , entonces hay otro par  $b, b^{-1}$  intercalado, es decir, de la forma  $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$ .

Si no fuese así, tendríamos una presentación de la forma  $aXa^{-1}Y$ , donde además  $X$  e  $Y$  no comparten aristas (si compartiesen alguna letra  $b$ , por hipótesis ésta debería aparecer como  $b$ , y no como  $b^{-1}$ , tanto en  $X$  como en  $Y$ , lo cual no es posible por el paso 3). Esto significa también que  $X$  e  $Y$  no comparten vértices, ya que si  $x$  fuese un vértice de  $X$  y  $y$  un vértice de  $Y$  tales que acaban identificados en la proyección, por cómo se define la relación de equivalencia tendría que haber una arista a la vez en  $X$  y en  $Y$ , contradiciendo así que  $X$  e  $Y$  no comparten aristas.



En particular, los vértices finales de  $a$  y  $a^{-1}$ , que están ambos en  $X$ , solo pueden identificarse con vértices de  $X$ . Por otro lado, los vértices iniciales de  $a$  y  $a^{-1}$ , que están ambos en  $Y$ , solo pueden identificarse con vértices de  $Y$ . Entonces, existen dos clases de equivalencia de vértices distintas, lo que contradice el paso 4. Por tanto no puede darse la situación  $aXa^{-1}Y$  y los pares de aristas complementarias deben estar intercalados.

#### PASO 6:

Podemos suponer que los pares de aristas del paso 5 aparecen consecutivos.



Tenemos ahora una cadena  $aXbYa^{-1}Zb^{-1}W$ , y buscamos hacer transformaciones para que las aristas aparezcan consecutivas. Empezamos con nuestra presentación original, la cual rotamos para cortar desde el final de  $X$  al final de  $W$ , llamando a la arista del corte  $c$ .

$$aXbYa^{-1}Zb^{-1}W \cong WaXbYa^{-1}Zb^{-1} \cong WaXc, c^{-1}bYa^{-1}Zb^{-1}$$

Vamos a pegar por  $a$ , para lo cual tenemos primero que rotar.

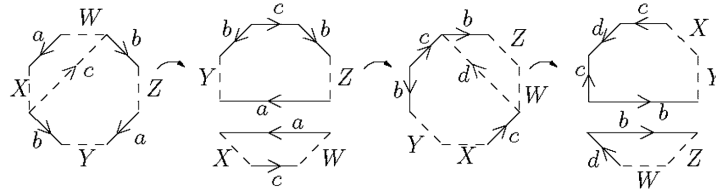
$$WaXc, c^{-1}bYa^{-1}Zb^{-1} \cong XcWa, a^{-1}Zb^{-1}c^{-1}bY \cong XcWZb^{-1}c^{-1}bY$$

Ahora cortamos desde el final de  $b^{-1}$  al final de  $c$ , llamando  $d$  a esa arista.

$$XcWZb^{-1}c^{-1}bY \cong c^{-1}bYXcWZb^{-1} \cong c^{-1}bYXcd, d^{-1}WZb^{-1}$$

Por último, rotando y pegando por  $b$  conseguimos que las cuatro aristas queden consecutivas.

$$c^{-1}bYXcd, d^{-1}WZb^{-1} \cong YXcdc^{-1}b, b^{-1}d^{-1}WZ \cong YXcdc^{-1}d^{-1}WZ$$



Haciendo esto para todos los pares de aristas intercalados que no sean consecutivos se demuestra el paso 6.

#### PASO 7:

La superficie  $M$  es homeomorfa a  $\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$ , o bien a  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$ .

Con todo lo que hemos hecho hasta ahora, nuestra presentación solo puede contener los siguientes tipos de elementos:

1. Pares de aristas complementarias consecutivas, de la forma  $aba^{-1}b^{-1}$ .
2. Aristas retorcidas de la forma  $aa$ .

Recordemos que la presentación poligonal de un toro viene dada precisamente por la forma  $aba^{-1}b^{-1}$ , y la presentación de un plano proyectivo por  $aa$ . Por tanto, si solo hubiese aristas de una de estas dos formas, la superficie sería homeomorfa a una suma conexa de toros o de planos proyectivos, respectivamente.

Nos queda ver qué ocurre en el caso de que  $\mathcal{P}$  contenga ambos grupos de aristas. Supongamos que existen un grupo de aristas complementarias  $aba^{-1}b^{-1}$  y otro de aristas retorcidas  $cc$ . Por el lema 2.6.1, la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos. Es decir,  $aba^{-1}b^{-1}cc \cong a'a'b'b'c'c'$ . Transformando cada par (toro, proyectivo) en tres proyectivos podemos eliminar los toros y quedarnos con un número finito de planos proyectivos.

Concluyendo, si  $\mathcal{P}$  tiene solo aristas complementarias alternadas, es homeomorfa a una suma conexa de toros. Si tiene solo aristas retorcidas, es homeomorfa a una suma conexa de planos proyectivos. Y si tiene ambos tipos de aristas, es homeomorfa a una suma de planos proyectivos.  $\square$

### Proposición 2.6.3: Característica de Euler invariante por transformaciones elementales

La característica de Euler de una presentación poligonal es invariante por transformaciones elementales

#### Demostración

Es inmediato que al renombrar, reflejar y rotar no cambiamos el número de vértices, aristas y caras, por lo que  $\chi$  no cambia. Para el resto de transformaciones veamos que los cambios en  $F, E, V$  se «compensan»:

- Consolidar y dividir

3 vertices, 2 aristas  $\longleftrightarrow$  2 vértices, 1 arista,  $\chi$  se mantiene.

- Cortar y pegar

1 cara, 2 aristas  $\longleftrightarrow$  2 caras, 3 aristas,  $\chi$  se mantiene.

- Plegar y desplegar:

1 vértice  $\longleftrightarrow$  2 vértices, 1 arista,  $\chi$  se mantiene

### Definición 2.6.4: Característica de Euler de una superficie compacta

Dada una superficie compacta  $M$ , se define su característica de Euler  $\chi(M)$  como la característica de cualquier presentación poligonal de ella (ya que es invariante por transformaciones elementales).

#### Ejemplo

Característica de Euler en las superficies modelo (para visualizarlo es útil recordar sus representaciones «estándar»):

1.  $\chi(\mathbb{S}^2) = 1 - 1 + 2 = 2$ .
2.  $\chi(n\mathbb{T}^2) = 1 - 2n + 1 = 2 - 2n$ .
3.  $\chi(n\mathbb{RP}^2) = 1 - n + 1 = 2 - n$ .

**Nota**

Para todo poliedro de  $\mathbb{R}^3$ , esto es, un sólido bordeado por un conjunto finito de polígonos convexos unidos por los lados, que sea homeomorfo a la esfera  $\mathbb{S}^2$  se tiene que

$$\chi = V - E + F = 2$$

**2.7. Orientabilidad****Definición 2.7.1: Superficie orientable**

Una superficie compacta se dice orientable si admite una presentación poligonal en la que no existe ningún par de aristas que se identifiquen recorriéndose en el mismo sentido, es decir, si para cada arista  $a$  de la presentación, aparece tanto  $a$  como  $a^{-1}$ .

**Proposición 2.7.2**

Una superficie compacta es no orientable si y solo si contiene un subespacio homeomorfo a la cinta de Möbius.

**Demostración**

( $\implies$ ) Siempre tenemos aristas identificadas  $aa$ . Demostración con dibujitos, no puedo hacerlo :(

( $\impliedby$ ) Sea una presentación:

Afirmación 1: El subespacio homeomorfo a la cinta de Möbius toca al borde. No entra en detalle, si alguien quiere hacerlo que se las apañe jeje. ■

**Ejemplo**

Superficies no orientables:  $\mathbb{RP}^2$ ,  $K$  (botella de Klein).

Superficies orientables:  $\mathbb{S}^2$ ,  $\mathbb{T}^2$ .

**Proposición 2.7.3: Orientabilidad de la suma conexa**

Dadas dos superficies compactas  $S_1$  y  $S_2$ , la suma conexa  $S_1 \# S_2$  es orientable si, y solo si, ambas superficies son orientables.

**Demostración**

Es fácil ver que tanto la esfera como la suma conexa de toros son orientables, mientras que la suma conexa de proyectivos no lo es. Por tanto, por el teorema de clasificación una superficie compacta es no orientable si y solo si es homeomorfa a una suma conexa de planos proyectivos. Por tanto si  $S_1, S_2$  son orientables entonces son homeomorfas a una suma de toros o a una esfera, pero entonces  $S_1 \# S_2$  también es homeomorfa a una suma de toros o a una esfera, y por tanto es orientable como queríamos ver. ■

**Ejemplo**

$\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2$  es orientable.  $\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2$  es no orientable.

**Corolario 2.7.4**

Dos superficies compactas son homeomorfas si, y solo si, tienen la misma característica de Euler y la misma orientabilidad.

**Demostración**

Sean  $S_1, S_2$  dos superficies compactas. Si son homeomorfas es claro que ambas serán homeomorfas a la misma presentación del teorema de clasificación, y por tanto tendrán la misma característica de Euler y la misma orientabilidad. Si por el contrario tienen la misma orientabilidad entonces ambas son suma de proyectivos o suma de toros, y si además tienen la misma característica de Euler entonces debe haber igual número de proyectivos/toros, por lo que ambas son homeomorfas a una misma suma conexa y por tanto homeomorfas entre si.

**Definición 2.7.5: Género de una superficie**

Sea  $S$  una superficie compacta y conexa. Se define el género de  $S$  como  $g(S) = 1 - \frac{1}{2}\chi(S)$  si  $S$  es orientable, y  $g(S) = 2 - \chi(S)$  si no lo es. El género también se conoce como el número de agujeros.

**Ejemplo**

- $g(\mathbb{S}^2) = 0 = g(0\mathbb{T})$ .
- $g(\mathbb{T}^2 \# \dots \# \mathbb{T}^2) = n$ .
- $g(\mathbb{RP}^2 \# \dots \# \mathbb{RP}^2) = n$ .

**Corolario 2.7.6**

Si  $S$  es una superficie compacta, conexa y orientable, entonces  $S$  es homeomorfa a:

$$\begin{cases} \text{una esfera, cuando } g(S) = 0 \\ \text{una suma conexa de } n \text{ toros, cuando } g(S) = n, n \geq 1 \end{cases}$$

**Demostración**

A partir de la propia definición de género de una superficie podemos conocer su característica de Euler, y sabiendo que es orientable esto nos permite discernir si se trata de una esfera o de una suma conexa de toros. Sin embargo, añadimos una demostración directa que resulta muy instructiva.

Sea  $S$  una superficie compacta, conexa y orientable. Por definición, existe una presentación  $\mathcal{P}$  que no tiene pares de aristas retorcidas. Además, por el Teorema de Clasificación,  $S$  debe ser homeomorfa a una suma conexa de una de las tres superficies modelo. Basta ver que a partir de la presentación  $\mathcal{P}$  no se puede llegar a una suma conexa de planos proyectivos.

Nótese que en una presentación sin pares de aristas retorcidas, la única forma de que aparezcan mediante transformaciones es cortando y haciendo un reflejo en una de las palabras. Seguimos el algoritmo de la demostración del Teorema de Clasificación, teniendo como hipótesis que en  $\mathcal{P}$  inicialmente no hay aristas retorcidas, para observar que nunca aplicamos reflejos y por tanto no llegamos a un plano proyectivo (recomendamos tener dicha demostración delante para ver esta, pues son comentarios a los pasos de la misma).

1. Si  $\mathcal{P}$  tiene más de una palabra, para pegar solo hay que hacer rotaciones y no reflejos (pues todos los pares ya son de la forma  $a, a^{-1}$ ).
2. No se hacen reflejos en ningún caso.
3. No hay aristas retorcidas, así que el paso no se aplica.
4. Recordemos la construcción  $a : v_1 \rightarrow w$ ,  $b : x \rightarrow v_1$ . La otra aparición de  $b$  en la presentación debe ser como  $b^{-1}$ , y por tanto no es necesario aplicar ninguna reflexión.
5. No se aplican reflejos.
6. Ninguna transformación de las que se hacen es un reflejo.
7. Una vez llegamos a este paso, podemos concluir directamente que estamos ante una suma de toros, pues sabemos que no hay ningún par de aristas retorcidas.



## Capítulo 3

# Homotopía. El grupo fundamental

### 3.1. Equivalencia homotópica

#### Definición 3.1.1: Camino o arco

Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico e  $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Se llama **camino o arco** en  $X$  a una aplicación continua  $\alpha : I \rightarrow X$ . Se llama  $\alpha(0)$  origen y  $\alpha(1)$  final. Diremos que  $\alpha$  es un arco uniendo  $\alpha(0)$  con  $\alpha(1)$ . Cuando  $\alpha(0) = \alpha(1)$  diremos que  $\alpha$  es un lazo.

#### Definición 3.1.2: Aplicaciones homotópicas

Dos aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos son homotópicas si existe una aplicación continua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  y  $F(x, 1) = g(x)$ , para todo  $x \in X$ . Se dice que  $F$  es una homotopía entre  $f$  y  $g$ , y se representa por  $f \simeq g$ .

#### Nota

Si  $F$  es una homotopía, para cada  $t \in [0, 1]$ , definimos  $F_t : X \rightarrow Y$  por  $F_t(x) = F(x, t)$ . Las aplicaciones  $F_t$  son continuas,  $F_0 = f$  y  $F_1 = g$ . Si fijamos  $x$ , entonces

$$F_x(t) = F(x, t) : I \rightarrow Y$$

es un arco en  $Y$  uniendo  $f(x)$  con  $g(x)$ .

**Ejemplo**

Si  $Y \subset \mathbb{R}^n$  es convexo, cualquier par de aplicaciones  $f, g$  continuas son homotópicas.

**Demostración.** Consideremos la siguiente homotopía:

$$F : X \times I \rightarrow Y, \quad F(x, t) = tg(x) + (1 - t)f(x)$$

como para cada  $x \in X$  se tiene  $f(x), g(x) \in Y$  y el conjunto  $Y$  es convexo, entonces el segmento contenido entre  $f(x), g(x)$  está contenido en  $Y$ , luego  $F$  está bien definida. Además es continua por ser composición de aplicaciones continuas. Finalmente notemos que  $F(x, 0) = f(x), F(x, 1) = g(x)$ .  $\square$

**Ejemplo**

Sean  $X, Y$  espacios topológicos e  $y_1, y_2 \in Y$ . Entonces las aplicaciones constantes

$$C_{y_i} : X \rightarrow Y, \quad C_{y_i}(x) = y_i, \quad i = 1, 2$$

son homotópicas si y solo si existe un arco en  $Y$  uniendo  $y_1, y_2$ .

**Demostración.** Si ambas aplicaciones son homotópicas sea  $F(x, t)$  la homotopía entre ellas, entonces dado  $x_0 \in X$  arbitrario la aplicación  $F_{x_0}(t) = F(x_0, t)$  es un camino que une  $y_1, y_2$  puesto que es continua y

$$F_{x_0}(0) = F(x_0, 0) = C_{y_1}(x_0) = y_1, \quad F_{x_0}(1) = F(x_0, 1) = C_{y_2}(x_0) = y_2.$$

Si por el contrario existe  $\alpha : I \rightarrow Y$  un camino uniendo  $y_1 = \alpha(0), y_2 = \alpha(1)$  entonces consideremos la aplicación dada por

$$F(x, t) = \alpha(t)$$

que es claramente continua y además verifica  $F(x, 0) = y_1 = C_{y_1}(x), F(x, 1) = y_2 = C_{y_2}(x)$ , luego es una homotopía.  $\square$

**Proposición 3.1.3: Relación  $\simeq$  entre aplicaciones continuas**

La propiedad de ser homotópicas  $\simeq$  es una relación de equivalencia en el conjunto  $\mathcal{C}(X, Y)$  formado por todas las aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$ .

**Demostración****1. Reflexiva:  $f \simeq f$** 

Definamos la aplicación  $F : X \times I \rightarrow Y$  por  $F(x, t) = f(x)$ .  $F$  es continua por ser  $f$  continua, además se tiene 
$$\begin{cases} F(x, 0) = f(x) \\ F(x, 1) = f(x) \end{cases} \quad \text{por lo que es una homotopía, luego } f \simeq f.$$

**2. Simétrica:**  $f \simeq g \implies g \simeq f$ 

Sea  $F$  la homotopía entre  $f, g$  entonces la aplicación

$$\bar{F} : X \times I \rightarrow Y, \quad \bar{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$$

es una homotopía entre  $g, f$  puesto que es continua al serlo  $F$  y cumple  $\bar{F}(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$ ,  $\bar{F}(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$ .

*Nota:* La aplicación  $\bar{F}$  se puede construir con cualquier homeomorfismo  $\alpha : I \rightarrow I$  con  $\alpha(0) = 1$  y  $\alpha(1) = 0$  en vez de  $1 - t$ .

**3. Transitiva:**  $f \simeq g, g \simeq h \implies f \simeq h$ 

Sea  $F_1$  la homotopía entre  $f, g$  y  $F_2$  la homotopía entre  $g, h$ , entonces la aplicación

$$\bar{F} : X \times I \rightarrow Y, \quad \bar{F}(x, t) = \begin{cases} F_1(x, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(x, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es continua y verifica  $\bar{F}(x, 0) = F_1(x, 0) = f(x)$ ,  $\bar{F}(x, 1) = F_2(x, 1) = h(x)$ , por lo que es una homotopía entre  $f$  y  $h$ .

*Nota:* Al igual que antes, se podría hacer con cualquier homeomorfismo que cumpla con lo que necesitamos. ■

**Definición 3.1.4: Espacios homotópicamente equivalentes**

Decimos que dos espacios topológicos  $X$  e  $Y$  son homotópicamente equivalentes o tienen el mismo tipo de homotopía (denotado  $X \simeq Y$ ) si existen aplicaciones continuas  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow X$  tales que  $g \circ f \simeq Id_X$  y  $f \circ g \simeq Id_Y$ . A la aplicación  $f$  (también a  $g$ ) se le llama, equivalencia de homotopía.

**Ejemplo**

Si  $Y \subset \mathbb{R}^n$  es convexo, entonces  $Y \simeq \{x\}$ .

**Demostración.** Sea  $X = \{x\}$ , fijemos un  $y_0 \in Y$  y definamos las aplicaciones  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f(x) = y_0$  y  $g : Y \rightarrow X$ ,  $g(y) = x$ . Es inmediato notar que  $g \circ f = Id_X$  puesto que para el único punto de  $X$  se cumple

$$g(f(x)) = g(y_0) = x.$$

Por tanto  $g \circ f = Id_X \simeq Id_X$  por la reflexividad de  $\simeq$ .

Por otro lado sea  $h = f \circ g : Y \rightarrow Y$  y definamos la siguiente homotopía:

$$H(y, t) = (y, t) = ty + (1 - t)y_0 \implies \begin{cases} H(y, 0) = y_0 = f(x) = f(g(y)) = h(y) \\ H(y, 1) = y = Id_Y(y) \end{cases}$$

que es claramente continua y está bien definida porque  $Y$  es convexo. □



**Ejemplo**

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^1.$$

**Demostración.** Buscamos  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1$  y  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  continuas tales que

$$\begin{cases} f \circ g \simeq Id_{\mathbb{S}^1} \\ g \circ f \simeq Id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}. \end{cases}$$

Sean  $f(y) = \frac{y}{|y|}$  y  $g(x) = x$ . Es inmediato notar que  $f \circ g = Id_{\mathbb{S}^1} \simeq Id_{\mathbb{S}^1}$  ya que

$$f(g(x)) = f(x) = \frac{x}{|x|} = x$$

al ser  $g(x) = x$  de norma 1.

Por otro lado definamos la homotopía  $F$  siguiente

$$F(y, t) = ty + (1-t)\frac{y}{|y|}, \quad \begin{cases} F(y, 0) = \frac{y}{|y|} = g(f(y)) \\ F(y, 1) = y = Id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}(y) \end{cases}$$

luego  $g \circ f \simeq Id_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}}$ . □

**Ejemplo**

$$\text{La corona circular } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\} \simeq \mathbb{S}^1$$

**Demostración.** Procedemos de forma idéntica al ejemplo anterior. De hecho, se recomienda al lector intentar hacerlo como ejercicio antes de ver la solución.

Definimos  $f : C \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow C$  como sigue:

$$f(y) = \frac{y}{|y|}, \quad g(x) = x$$

Para cualquier  $x \in \mathbb{S}^1$  se tiene que

$$f \circ g(x) = f(x) = x$$

Concluimos que  $f \circ g \simeq Id_{\mathbb{S}^1}$ . Por otro lado, si  $y \in C$ ,

$$g \circ f(y) = g\left(\frac{y}{|y|}\right) = \frac{y}{|y|}$$

Consideramos la homotopía  $F : C \times I \rightarrow C$  siguiente,

$$F(y, t) = ty + (1-t)\frac{y}{|y|}, \quad \begin{cases} F(y, 0) = \frac{y}{|y|} = g(f(y)) \\ F(y, 1) = y = Id_C(y) \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que para cualquier  $y \in C$  la aplicación  $F_y$  definida como  $F_y(t) = F(y, t)$  verifica  $F_y(t) \in C \quad \forall t \in I$ . Así,  $F$  está bien definida y por tanto  $g \circ f \simeq Id_C$ . □

**Proposición 3.1.5: Espacios homeomorfos y homotopía**

Si  $X$  e  $Y$  son homeomorfos, entonces  $X \simeq Y$ . El recíproco no es cierto.

**Demostración**

Supongamos que  $X$  e  $Y$  son homeomorfos. En tal caso existe  $f : X \rightarrow Y$  homeomorfismo, que será una aplicación continua y con inversa  $g = f^{-1}$  también continua. Entonces

$$g \circ f = Id_X \simeq Id_X, \quad f \circ g = Id_Y \simeq Id_Y$$

por lo que  $X \simeq Y$ .

Como contraejemplo para el recíproco consideremos el conjunto  $\mathbb{R}^n$  que es convexo, por tanto  $\mathbb{R}^n \simeq \{x\}$  para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$ , sin embargo no son espacios homeomorfos puesto que  $\mathbb{R}^n$  no es compacto y  $\{x\}$  sí. ■

**Proposición 3.1.6: Relación  $\simeq$  entre espacios**

La propiedad  $\simeq$  define una relación de equivalencia entre los espacios topológicos.

**Demostración****1. Reflexiva:**  $X \simeq X$ 

Basta tomar  $f = g = Id_X \implies f \circ g = g \circ f = Id_X \simeq Id_X$ .

**2. Simétrica:**  $X \simeq Y \implies Y \simeq X$ 

Si  $X \simeq Y$  entonces  $\exists f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  de manera que  $f \circ g \simeq Id_X, g \circ f \simeq Id_Y$ , luego tomando  $\bar{f} = g, \bar{g} = f$  tenemos dos aplicaciones que cumplen lo necesario para que  $Y \simeq X$ .

**3. Transitiva:**  $X \simeq Y, Y \simeq Z \implies X \simeq Z$ 

Por hipótesis  $\exists f_1 : X \rightarrow Y, g_1 : Y \rightarrow X$  cumpliendo

$$f_1 \circ g_1 \simeq Id_X, g_1 \circ f_1 \simeq Id_Y$$

y también  $\exists f_2 : Y \rightarrow Z, g_2 : Z \rightarrow Y$  de manera que

$$f_2 \circ g_2 \simeq Id_Y, g_2 \circ f_2 \simeq Id_Z$$

Definamos ahora

$$f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z, \quad g = g_1 \circ g_2 : Z \rightarrow X$$

y notemos que se tiene:<sup>a</sup>

$$f \circ g = f_2 \circ f_1 \circ g_1 \circ g_2 \simeq f_2 \circ Id_Y \circ g_2 = f_2 \circ g_2 \simeq Id_Z$$

así como

$$g \circ f = g_1 \circ g_2 \circ f_2 \circ f_1 \simeq g_1 \circ Id_Z \circ f_1 = g_1 \circ f_1 \simeq Id_X.$$

*Nota:* A lo largo de la demostración todas las aplicaciones que aparecen son continuas, recordemos que esto es indispensable para que podamos hablar de homotopías. ■

---

<sup>a</sup>Para los pasos  $\simeq$  ver el Ejercicio 3.1

### Ejercicio 3.1

Probar que si  $f_1 : X \rightarrow Y, f_2 : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas tales que  $f_1 \simeq f_2$  entonces se tiene  $g \circ f_1 \simeq g \circ f_2$ . Plantear y resolver el problema análogo para ver que se cumple  $f_1 \circ g \simeq f_2 \circ g$

## 3.2. Espacios contractiles

### Definición 3.2.1: Espacio contráctil

Un espacio topológico  $X$  se dice que es contráctil si es homotópicamente equivalente a un punto.

### Proposición 3.2.2: Caracterizaciones de espacios contráctiles

Sea  $Y$  un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $Y$  es contráctil.
2. Existe  $y_0 \in Y$  tal que  $Id_Y$  y  $C_{y_0} : Y \rightarrow \{y_0\}$  son homotópicas.
3. Si  $X$  es otro espacio topológico, cualquier par de aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$  son homotópicas.
4. Para todo  $y_0 \in Y$ , se tiene que  $C_{y_0}$  es homotópica a la  $Id_Y$ .
5. Si  $X$  es otro espacio topológico y  $f : Y \rightarrow X$  continua, entonces existe  $x_0 \in X$  tal que  $f \simeq C_{x_0}$ .

#### Demostración

(1  $\implies$  2)

Por hipótesis  $Y \simeq \{p\}$ , luego existen aplicaciones  $g : Y \rightarrow \{p\}, f : \{p\} \rightarrow Y$  cumpliendo que  $g \circ f \simeq Id_{\{p\}}$  y  $f \circ g \simeq Id_Y$ . Notemos que  $g$  debe ser  $C_p$ , es decir  $g(y) = p \forall y \in Y$  ya que el espacio de llegada es un único punto, y por otro lado la imagen de  $f$  será un único punto  $f(p) = y_0$ .

Notemos ahora que dado  $y \in Y$ ,  $f(g(y)) = f(p) = y_0 \in Y$ , luego  $C_{y_0} = f \circ g \simeq Id_Y$ , por tanto existe  $y_0 = f(p)$  de manera que  $Id_Y \simeq C_{y_0}$ .

(2  $\implies$  3)

Sabemos que  $\exists y_0 \in Y$  tal que  $Id_Y \simeq C_{y_0}$ . Sea  $X$  espacio topológico, y  $f, g : X \rightarrow Y$  continuas. Veamos que  $f \simeq g$ .

$$f = Id_Y \circ f \simeq C_{y_0} \circ f = \overline{C_{y_0}} : X \rightarrow \{y_0\} \text{ tal que } \overline{C_{y_0}}(x) = y_0$$

$$g = Id_Y \circ g \simeq C_{y_0} \circ g = \overline{C_{y_0}} : X \rightarrow \{y_0\} \text{ tal que } \overline{C_{y_0}}(x) = y_0$$

Por tanto,  $f \simeq \overline{C_{y_0}} \simeq g$ .

(3  $\implies$  4)

Tomemos  $Y = X$ ,  $f = Id_Y$ ,  $g = C_{y_0}$ , con  $y_0 \in Y$  arbitrario. Aplicando (3) a estos espacios y funciones se obtiene que  $Id_Y = f \simeq g = C_{y_0}$ .

(4  $\implies$  5)

Sabemos que  $C_{y_0} \simeq Id_Y, \forall y_0 \in Y$ . Sea  $X$  espacio topológico y  $f : Y \rightarrow X$  continua. Entonces

$$f = f \circ Id_Y \simeq f \circ C_{y_0} : Y \rightarrow X$$

donde  $(f \circ C_{y_0})(y) = f(C_{y_0}(y)) = f(y_0)$ . Luego,  $f \circ C_{y_0} = C_{f(y_0)} : Y \rightarrow X$ . Tomando  $x_0 = f(y_0)$ , se tiene que  $f \simeq C_{x_0}$ .

(5  $\implies$  2)

Aplicamos la hipótesis al espacio  $X = Y$  y la función  $f = Id_Y$ . Entonces, obtenemos  $y_0 \in Y$  tal que  $f \simeq C_{y_0}$ . Por tanto,  $Id_Y \simeq C_{y_0}$ .

(2  $\implies$  1)

Por la hipótesis, existe  $y_0 \in Y$  tal que  $Id_Y \simeq C_{y_0}$ . Las aplicaciones buscadas son

$$\begin{aligned} f &= C_{y_0} : Y \rightarrow \{y_0\}, & f(y) &= y_0 \\ g &= \iota : \{y_0\} \rightarrow Y, & g(y_0) &= y_0 \end{aligned}$$

que son continuas y cumplen:

$$\begin{aligned} f \circ g &= Id_{\{y_0\}} \simeq Id_{\{y_0\}} \\ g \circ f &= C_{y_0} \simeq Id_Y \end{aligned}$$

luego  $Y \simeq \{y_0\}$ . ■

### Corolario 3.2.3

Todo espacio contráctil es arcoconexo y por tanto conexo.

#### *Demostración*

Sea  $Y$  un espacio contráctil y sean  $y_1, y_2 \in Y$  dos puntos arbitrarios. Aplicando el apartado (3) de la proposición anterior a las aplicaciones  $f = C_{y_1}, g = C_{y_2} : Y \rightarrow Y$  continuas obtenemos

$$C_{y_1} \simeq C_{y_2} \iff \exists F : Y \times I \rightarrow Y \text{ continua tal que } \begin{cases} F(y, 0) = C_{y_1}(y) = y_1 \\ F(y, 1) = C_{y_2}(y) = y_2 \end{cases}$$

Consideremos la aplicación  $\alpha : I \rightarrow Y, \alpha(t) = F(y_0, t)$ , con  $y_0 \in Y$  fijo. Esta aplicación es claramente continua y une  $y_1$  y  $y_2$ , por tanto,  $Y$  es arcoconexo. ■

### Definición 3.2.4: Invariante homotópico

Un invariante homotópico es una propiedad topológica  $\mathcal{P}$  que se conserva por equivalencias homotópicas, es decir, si  $X \simeq Y$ , entonces  $X$  satisface  $\mathcal{P}$  si, y solo si,  $Y$  satisface  $\mathcal{P}$ .

#### Ejemplo

1. La conexión es un invariante homotópico.
2. La conexión por caminos es un invariante homotópico.
3. La compacidad NO es un invariante homotópico.

### 3.3. Homotopía por caminos

#### Definición 3.3.1: Caminos homotópicos

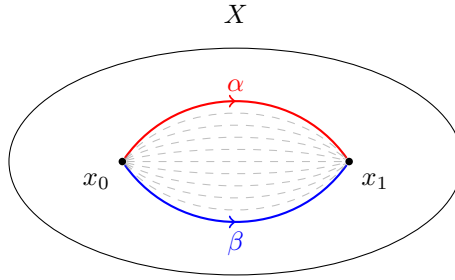
Dos caminos  $\alpha, \beta : I \rightarrow X$  en un espacio topológico  $X$  uniendo dos puntos  $x_0$  y  $x_1$  se dice que son homotópicos (por caminos) si existe una homotopía  $F : I \times I \rightarrow X$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $F(0, t) = x_0$ ,  $F(1, t) = x_1$ , para todo  $t \in I$ . Lo denotaremos por  $\alpha \simeq_p \beta$ .

#### Nota

El subíndice  $p$  de  $\simeq_p$  proviene de que en inglés camino se traduce por *path*.

#### Nota

Para cada  $t \in I$ ,  $F_t$  es un camino uniendo  $x_0$  y  $x_1$ , con  $F_0 = \alpha$  y  $F_1 = \beta$ . En la siguiente imagen aparecen los distintos  $F_t$  en color gris:



#### Nota

¡Ojo!  $F$  ahora está definida en  $I \times I$ , por lo que podría haber confusión al hablar de  $F_t$  para  $t \in I$  sin mencionar explícitamente qué componente de  $F$  estamos fijando. Para nosotros,  $t$  siempre será la variable de la segunda componente de  $F$ , y  $s$  de la primera. Escribiremos  $F_t(s) = F(s, t)$ .

#### Proposición 3.3.2: Relación de equivalencia $\simeq_p$

$\simeq_p$  define una relación de equivalencia sobre el conjunto de caminos que unen  $x_0, x_1$ . Denotamos por  $[\alpha]$  la clase asociada a un camino  $\alpha$ .

#### Demostración

##### 1. Reflexiva: $\alpha \simeq \alpha$

Definamos la aplicación  $F : I \times I \rightarrow X$  por  $F(s, t) = \alpha(s)$ .  $F$  es continua por ser  $\alpha$  continua, además se tiene 
$$\begin{cases} F(s, 0) = \alpha(s) \\ F(s, 1) = \alpha(s) \end{cases} \quad \text{por lo que es una homotopía. Como además cumple}$$

$$F(0, t) = \alpha(0) = x_0, F(1, t) = \alpha(1) = x_1$$

se tiene  $\alpha \simeq_p \alpha$ .

**2. Simétrica:**  $\alpha \simeq \beta \implies \beta \simeq \alpha$

Sea  $F$  la homotopía por caminos entre  $\alpha, \beta$  entonces la aplicación

$$\bar{F} : I \times I \rightarrow X, \quad \bar{F}(s, t) = F(s, 1 - t)$$

es una homotopía por caminos entre  $\beta, \alpha$  puesto que es continua al serlo  $F$  y cumple

$$\bar{F}(s, 0) = F(s, 1) = \beta(s), \bar{F}(s, 1) = F(s, 0) = \alpha(s)$$

así como

$$\bar{F}(0, t) = F(0, 1 - t) = x_0, \bar{F}(1, t) = F(1, 1 - t) = x_1$$

por tanto  $\beta \simeq_p \alpha$ .

**3. Transitiva:**  $\alpha \simeq \beta, \beta \simeq \gamma \implies \alpha \simeq \gamma$

Sea  $F_1$  la homotopía por caminos entre  $\alpha, \beta$  y  $F_2$  la homotopía por caminos entre  $\beta, \gamma$ , entonces la aplicación

$$\bar{F} : I \times I \rightarrow X, \quad \bar{F}(s, t) = \begin{cases} F_1(s, 2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(s, 2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

es continua y verifica  $\bar{F}(s, 0) = F_1(s, 0) = \alpha(s), \bar{F}(s, 1) = F_2(s, 1) = \gamma(s)$ , y también

$$\bar{F}(0, t) = \begin{cases} F_1(0, 2t) = x_0 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(0, 2t - 1) = x_0 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}, \quad \bar{F}(1, t) = \begin{cases} F_1(1, 2t) = x_1 & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ F_2(1, 2t - 1) = x_1 & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

por lo que es una homotopía entre  $\alpha$  y  $\gamma$ . ■

### Definición 3.3.3: Producto de caminos

Si  $\alpha$  es un camino uniendo  $x_0$  y  $x_1$ , y  $\beta$  es un camino uniendo  $x_1$  y  $x_2$ , definimos el camino producto  $\alpha * \beta$  por

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

#### Nota

Es importante tener en mente que definimos el producto de caminos de izquierda a derecha, es decir, recorriendo primero el camino de la izquierda y después el de la derecha.

**Lema 3.3.4: Lema previo**

Sea  $\alpha$  un camino uniendo  $x_0$  y  $x_1$ , sea  $\beta$  un camino uniendo  $x_1$  y  $x_2$ . Entonces, para cualquier  $r \in (0, 1)$  se cumple  $\alpha * \beta \simeq_p \gamma$ ,  $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(\frac{t}{r}) & t \in [0, r] \\ \beta(\frac{t-r}{1-r}) & t \in [r, 1]. \end{cases}$

**Demostración**

Queremos ver que  $\alpha * \beta$  y  $\gamma$  son homotópicos por caminos, luego necesitamos una homotopía  $H : I \times I \rightarrow X$  tal que  $H(x, 0) = \alpha * \beta(x)$  y  $H(x, 1) = \gamma(x)$ , y además  $H(0, t) = x_0$  y  $H(1, t) = x_2$ .

Definamos  $H$  de la siguiente manera

$$H(x, t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{(1-t)\frac{1}{2}+tr}\right) & x \in [0, (1-t)\frac{1}{2}+tr] \\ \beta\left(\frac{x-(1-t)\frac{1}{2}-tr}{1-(1-t)\frac{1}{2}-tr}\right) & x \in [(1-t)\frac{1}{2}+tr, 1] \end{cases}$$

Claramente  $H$  es continua por el lema del pegado y además se verifican las siguientes propiedades que necesitábamos comprobar:

- $H(x, 0) = \alpha * \beta(x) \checkmark$
- $H(x, 1) = \gamma(x) \checkmark$
- $H(0, t) = \alpha(0) = x_0 \checkmark$
- $H(1, t) = \beta(1) = x_2 \checkmark$

**Proposición 3.3.5: Propiedades del producto de caminos**

1.  $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq_p (\alpha * \beta) * \gamma$ .
2. Si  $\epsilon_{x_0}$  es el arco constante  $x_0$  y  $\epsilon_{x_1}$  el arco constante  $x_1$ , entonces

$$\epsilon_{x_0} * \alpha \simeq_p \alpha \text{ y } \alpha * \epsilon_{x_1} \simeq_p \alpha$$

3. Sea  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1-t), t \in I$ . Entonces,

$$\alpha * \bar{\alpha} \simeq_p \epsilon_{x_0} \text{ y } \bar{\alpha} * \alpha \simeq_p \epsilon_{x_1}$$

**Demostración**



1. Es inmediato notar que

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) = \begin{cases} \alpha(2s) & s \in [0, \frac{1}{2}] \\ \beta(4s - 2) & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \gamma(4s - 3) & s \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

$$(\alpha * \beta) * \gamma(s) = \begin{cases} \alpha(4s) & s \in [0, \frac{1}{4}] \\ \beta(4s - 1) & s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ \gamma(2s - 1) & s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Aplicando el lema previo con  $r = \frac{1}{3}$  al primer producto obtenemos

$$\alpha * (\beta * \gamma)(s) \simeq_p \sigma(s) = \begin{cases} \alpha(3s) & s \in [0, \frac{1}{3}] \\ \beta(3s - 1) & s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \gamma(3s - 2) & s \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

y de nuevo aplicandolo al segundo producto se puede llegar a  $(\alpha * \beta) * \gamma(s) \simeq_p \sigma(s)$ , lo que prueba finalmente que  $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq_p \sigma \simeq_p (\alpha * \beta) * \gamma$ .

2. Probaremos solo el primer caso, el segundo es muy similar. Definamos la siguiente aplicación

$$H(x, t) = \begin{cases} x_0 & x \in [0, \frac{t}{2}] \\ \alpha\left(\frac{2x-t}{2-t}\right) & x \in [\frac{t}{2}, 1] \end{cases}$$

que es una homotopía por caminos puesto que es continua y verifica

$$H(x, 1) = \epsilon_{x_0} * \alpha(x), H(x, 0) = \alpha(x), H(0, t) = x_0, H(1, t) = x_1,$$

luego  $\alpha \simeq_p \epsilon_{x_0} * \alpha$ .

3. De nuevo probamos solo el primer caso, para ello basta definir la siguiente homotopía por caminos  $H : I \times I \rightarrow X$ , dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} \alpha(2x(1-t)) & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha((2-2x)(1-t)) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

esta aplicación es continua y efectivamente cumple  $H(x, 1) = \epsilon_{x_0}(x)$ ,  $H(0, t) = x_0$ ,  $H(1, t) = x_0$ , además de

$$H(x, 0) = \begin{cases} \alpha(2x) & x \in [0, \frac{1}{2}] \\ \alpha(2-2x) = \alpha(1-(2x-1)) = \bar{\alpha}(2x-1) & x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = \alpha * \bar{\alpha}(x).$$

**Definición 3.3.6: Conjunto de arcos**

Dado  $X$  un espacio topológico, denotaremos por

$$\Omega_{x_0}^{x_1}(X) := \{\alpha : I \rightarrow X \text{ continua con } \alpha(0) = x_0, \alpha(1) = x_1\}$$

y

$$\Omega_{x_0} = \Omega_{x_0}^{x_0}(X)$$

Llamaremos

$$\pi_1(X, x_0) : \Omega_{x_0} / \simeq_p$$

**Proposición 3.3.7: Producto de clases de homotopía**

El producto  $*$  induce un producto bien definido para clases de homotopía:

$$[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$$

**Demostración**

Veamos que el producto  $*$  está bien definido en el cociente, es decir, no depende de los representantes elegidos de las clases  $[\alpha]$  y  $[\beta]$ . Sean  $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_{x_0}^{x_1}$  con  $\alpha_1 \simeq_p \alpha_2$  y  $\beta_1, \beta_2 \in \Omega_{x_1}^{x_2}$  con  $\beta_1 \simeq_p \beta_2$ . Queremos probar que  $\alpha_1 * \beta_1 \simeq_p \alpha_2 * \beta_2$ . Llamemos  $F_\alpha$  a la homotopía entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , y sea  $F_\beta$  la homotopía entre  $\beta_1$  y  $\beta_2$ .

Buscamos probar que  $\alpha_1 * \beta_1$  y  $\alpha_2 * \beta_2$  son caminos homotópicos. Nuestra homotopía candidata es  $G : I \times I \rightarrow X$  como

$$G(s, t) = \begin{cases} F_\alpha(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ F_\beta(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Veamos que  $G$  es homotopía. Es claramente continua por serlo  $F_\alpha$  y  $F_\beta$  y coincidir cuando  $s = \frac{1}{2}$ , y además verifica

$$G(s, 0) = \begin{cases} G(s, 0) = F_\alpha(2s, 0) = \alpha_1(2s) = \alpha_1 * \beta_1(s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(s, 0) = F_\beta(2s - 1, 0) = \beta_1(2s) = \alpha_1 * \beta_1(s) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$G(s, 1) = \begin{cases} G(s, 1) = F_\alpha(2s, 1) = \alpha_2(2s) = \alpha_2 * \beta_2(s) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(s, 1) = F_\beta(2s - 1, 1) = \beta_2(2s) = \alpha_2 * \beta_2(s) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Por otro lado, también se verifica la condición de homotopía de caminos, pues  $\alpha_1 \simeq_p \alpha_2$  implica que  $G(0, t) = F_\alpha(0, t) = x_0$ . Análogamente, se tiene que  $G(1, t) = F_\beta(1, t) = x_2$ .

Concluimos entonces que  $\alpha_1 * \beta_1 \simeq_p \alpha_2 * \beta_2$ , y por tanto  $[\alpha] * [\beta]$  no depende de los representantes de las clases  $[\alpha]$  y  $[\beta]$ . ■

Veremos a continuación que la estructura  $(\pi_1(X, x_0), *)$  forma lo que en álgebra se conoce como un grupo. Un grupo es, esencialmente, un conjunto con una operación que satisface

ciertas reglas (asociatividad, existencia de un elemento neutro y de inversos para cada elemento). Para una introducción más formal a los conceptos que usaremos de teoría de grupos, se puede consultar el Apéndice A.

### Teorema 3.3.8: El grupo fundamental

El conjunto  $\pi_1(X, x_0)$  junto con la operación producto  $*$  es un grupo, denominado el grupo fundamental de  $X$  en  $x_0$ .

**Demostración.** Veamos que la operación  $*$  definida en el cociente  $\Omega_{x_0}/\simeq_p$  es asociativa, tiene un elemento neutro y todo elemento tiene un inverso respecto a ella. En esencia, aplicaremos la proposición 3.3.5 a la operación en el cociente, usando que está bien definida.

**Asociatividad.** Sean  $[\alpha], [\beta], [\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ . Queremos ver que  $([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma])$ . Por definición de la operación en el cociente, esto es equivalente a probar que  $[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)]$ . La proposición 3.3.5 (1) nos dice que  $(\alpha * \beta) * \gamma \simeq_p \alpha * (\beta * \gamma)$ , lo que implica que sus clases de homotopía son iguales.

**Elemento neutro.** Sea  $\epsilon_{x_0}$  el camino constante en  $x_0$ . La proposición 3.3.5 (2) establece que  $\epsilon_{x_0} * \alpha \simeq_p \alpha$  y  $\alpha * \epsilon_{x_0} \simeq_p \alpha$  (notemos que en este caso  $x_1 = x_0$ ). En términos de clases de homotopía, esto significa que  $[\epsilon_{x_0}] * [\alpha] = [\alpha]$  y  $[\alpha] * [\epsilon_{x_0}] = [\alpha]$ . Por lo tanto,  $[\epsilon_{x_0}]$  es el elemento neutro del grupo.

**Elemento inverso.** Para cualquier  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ , consideremos el camino inverso  $\bar{\alpha}(t) = \alpha(1 - t)$ . La proposición 3.3.5 (3) nos dice que  $\alpha * \bar{\alpha} \simeq_p \epsilon_{x_0}$  y  $\bar{\alpha} * \alpha \simeq_p \epsilon_{x_0}$ . Esto se traduce en  $[\alpha] * [\bar{\alpha}] = [\epsilon_{x_0}]$  y  $[\bar{\alpha}] * [\alpha] = [\epsilon_{x_0}]$ . Por lo tanto,  $[\bar{\alpha}]$  es el inverso de  $[\alpha]$ .

Como la operación  $*$  es asociativa, tiene elemento neutro y todo elemento tiene inverso,  $(\pi_1(X, x_0), *)$  es un grupo.  $\square$

#### Ejemplo

Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  convexo, entonces  $\pi_1(X, x_0) = (0, +)$  (el grupo trivial) para todo  $x_0 \in X$ . En particular  $\pi_1(\mathbb{R}^n, x_0) = (0, +)$  y  $\pi_1(B^n, x_0) = (0, +)$ , donde  $B^n$  es la bola unidad.

**Demostración.** Veamos que dado  $X \subset \mathbb{R}^n$  convexo y  $x \in X$  cualquier camino  $\alpha \in \Omega_x$  es homotópico por caminos al camino constante  $\epsilon_x$ , y por tanto el grupo fundamental debe ser el grupo trivial al tener  $\Omega_x/\simeq_p$  un único elemento. Para ver que  $\alpha \simeq_p \epsilon_x$  basta considerar la homotopía por caminos

$$H(s, t) = t\alpha(s) + (1 - t)\epsilon_x(s) = t\alpha(s) + (1 - t)x$$

que en efecto es continua y verifica  $H(s, 0) = \epsilon_x(s)$ ,  $H(s, 1) = \alpha(s)$ ,  $H(0, t) = x = H(1, t)$ .  $\square$

#### Ejemplo

$\pi_1(\mathbb{R}, x) = (0, +)$ .

**Nota**

En los ejemplos anteriores se abusa ligeramente del lenguaje y se indica que los grupos fundamentales «son» el grupo trivial ya que son isomorfos a él. De hecho, cualquier grupo con un solo elemento es isomorfo al grupo trivial. Por otro lado, se suele abusar de la notación representando al grupo trivial simplemente como 0 en lugar de  $(0, +)$ .

**Definición 3.3.9**

Sea  $\sigma$  un camino uniendo dos puntos  $x_0, x_1 \in X$ . Definimos

$$\hat{\sigma} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$$

por

$$\hat{\sigma}([\gamma]) = [\bar{\sigma}] * [\gamma] * [\sigma].$$

**Proposición 3.3.10: Proposición 6.8**

La aplicación  $\hat{\sigma}$  es un isomorfismo de grupos para todo camino  $\sigma$ .

**Demostración**

En primer lugar es claro que para todo  $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$  la imagen  $\hat{\sigma}([\gamma]) = [\bar{\sigma}] * [\gamma] * [\sigma] = [\bar{\sigma} * \gamma * \sigma]$  pertenece a  $\pi_1(X, x_1)$ , ya que

$$\bar{\sigma} * \gamma * \sigma$$

es un camino que parte de  $x_1$  y llega a  $x_1$  (recordamos que se recorre primero  $\bar{\sigma}$ ).

Para ver que  $\hat{\sigma}$  es biyectiva comprobaremos que tiene inversa dada por

$$(\hat{\sigma})^{-1} = \widehat{(\bar{\sigma})}$$

en efecto se tiene

$$\widehat{(\bar{\sigma})}(\hat{\sigma}([\gamma])) = [\sigma] * \hat{\sigma}([\gamma]) * [\bar{\sigma}] = [\sigma] * [\bar{\sigma}] * [\gamma] * [\sigma] * [\bar{\sigma}] = [\gamma]$$

donde hemos usado las propiedades de grupo de  $\pi_1(X, x_0)$ . Para comprobar que  $\widehat{(\bar{\sigma})}$  también es inversa por la derecha de  $\hat{\sigma}$  seguimos un razonamiento similar que omitimos.

Para ver que es un homomorfismo basta notar que

$$\hat{\sigma}([\gamma]) * \hat{\sigma}([\alpha]) = [\bar{\sigma}] * [\gamma] * [\sigma] * [\bar{\sigma}] * [\alpha] * [\sigma] = [\bar{\sigma}] * [\gamma] * [\alpha] * [\sigma] = \hat{\sigma}([\gamma] * [\alpha])$$

usando de nuevo que  $\pi_1(X, x_0)$  es un grupo. ■

**Nota**

Podemos pensar en  $\hat{\sigma}$  como un isomorfismo que cambia el «punto base» del grupo fundamental.

**Corolario 3.3.11**

Si  $X$  es conexo por caminos, todos los grupos  $\pi_1(X, x_0)$  son isomorfos entre sí. En este caso, podemos considerar el grupo fundamental  $\pi_1(X)$ , independiente del punto base.

**Demostración**

Sea  $x_0, x_1 \in X$  dos puntos arbitrarios. Entonces, existe un camino  $\sigma$  que une  $x_0$  y  $x_1$ . Por la proposición anterior se tiene que  $\hat{\sigma}$  (definida según la definición 3.3.9) es un isomorfismo de grupos, luego  $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ . ■

**3.4. Espacios simplemente conexos****Definición 3.4.1: Espacio simplemente conexo**

Decimos que un espacio topológico  $X$  es simplemente conexo si es conexo por caminos y  $\pi_1(X) = 0$ .

**Ejemplo**

■ Si  $X \subset \mathbb{R}^n$  es convexo, entonces  $X$  es simplemente conexo.

### 3.5. El homomorfismo inducido

#### Definición 3.5.1: Homomorfismo inducido

Sea  $f : X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Para todo punto  $x_0 \in X$ ,  $f$  induce una aplicación

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

definida por  $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$ , denominada el homomorfismo inducido.

#### Afirmación

$f_*$  es un homomorfismo de grupos.

#### Demostración

En primer lugar notemos que  $f \circ \alpha$  es un lazo centrado en  $f(x_0)$  por ser  $f$  continua. Ahora basta notar que dados  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X)$  tenemos

$$f_*([\alpha]) * f_*([\beta]) = [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] = [f \circ (\alpha * \beta)] = f_*([\alpha * \beta]).$$

Los detalles de cada paso, especialmente de

$$f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$$

quedan para el lector. ■

#### Proposición 3.5.2: Propiedades del homomorfismo inducido

1. Si  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : Y \rightarrow Z$  son continuas, entonces  $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ .
2. Para la identidad  $Id_X : X \rightarrow X$  se tiene  $(Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)}$ .
3. Si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f_*$  es un isomorfismo de grupos. Así, el grupo fundamental es un invariante topológico.

#### Demostración

1. Sea  $[\alpha] \in \pi_1(X)$ , entonces

$$(g \circ f)_*([\alpha]) = [(g \circ f) \circ \alpha] = [g \circ (f \circ \alpha)] = g_*([f \circ \alpha]) = g_*(f_*([\alpha])) = g_* \circ f_*([\alpha]).$$

2. Es inmediato verificar que

$$(Id_X)_*([\alpha]) = [Id_X \circ \alpha] = [\alpha] = Id_{\pi_1(X, x_0)}([\alpha])$$

3. Ya sabemos que  $f_*$  es un homomorfismo. Para ver que es una biyección notemos que  $f^{-1}$  también es continua por ser  $f$  homeomorfismo, por tanto, usando los apartados

anteriores

$$\begin{aligned} f_*^{-1} \circ f_* &= (f^{-1} \circ f)_* = (Id_X)_* = Id_{\pi_1(X, x_0)} \\ f_* \circ f_*^{-1} &= (f \circ f^{-1})_* = (Id_X)_* = Id_{\pi_1(Y, f(x_0))} \end{aligned}$$

luego  $f_*^{-1}$  es la inversa de  $f_*$  y por tanto es una biyección.

### Lema 3.5.3

Sea  $X$  un espacio topológico y sean  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  arcos homotópicos en  $X$  (no necesariamente por caminos). Entonces existen arcos  $\tau_1$  uniendo  $\sigma_1(0)$  con  $\sigma_2(0)$  y  $\tau_2$  uniendo  $\sigma_1(1)$  con  $\sigma_2(1)$  tales que

$$\sigma_2 \simeq_p \bar{\tau}_1 * \sigma_1 * \tau_2.$$

De hecho, si  $F : I \times I \rightarrow X$  es la homotopía que relaciona  $\sigma_1$  con  $\sigma_2$ , se tiene que

$$\tau_1(t) = F(0, t), t \in I \quad y \quad \tau_2(t) = F(1, t), t \in I.$$

Además, si  $\sigma_i$  es un lazo centrado en  $x_i \in X$ ,  $i = 1, 2$ , entonces pueden elegirse  $\tau_2 = \bar{\tau}_1$ .

**Demostración.** *Esquema de la prueba*

Como  $\sigma_1 \simeq \sigma_2$  existe una homotopía  $F : I \times I \rightarrow X$  tal que  $F(x, 0) = \sigma_1(x)$ ,  $F(x, 1) = \sigma_2(x)$ . Entonces basta tomar  $\tau_1(t) = F(0, t)$ ,  $\tau_2(t) = F(1, t)$  y vemos que  $\sigma_2$  y  $\bar{\tau}_1 * \sigma_1 * \tau_2$  son homotópicos por caminos.  $\square$

### Proposición 3.5.4

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos,  $x_0 \in X$  y  $F$  una homotopía entre las aplicaciones continuas  $f, g : X \rightarrow Y$ . Si denotamos por

$$\sigma(t) := F(x_0, t), \quad t \in I \text{ entonces } \hat{\sigma} \circ f_* = g_*,$$

es decir, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ & \searrow g_* & \downarrow \hat{\sigma} \\ & & \pi_1(Y, g(x_0)) \end{array}$$

**Demostración**

Sea  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ , notemos en primer lugar que  $f \circ \alpha, g \circ \alpha$  son lazos en torno al mismo punto. Además sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} \circ f_*([\alpha]) &= g_*([\alpha]) \iff [\bar{\sigma}] * [f \circ \alpha] * [\sigma] = [g \circ \alpha] \iff \\ &\iff [f \circ \alpha] = [\sigma] * [g \circ \alpha] * [\bar{\sigma}] \iff [f \circ \alpha] = [\sigma * g \circ \alpha * \bar{\sigma}] \end{aligned}$$

por tanto solo hace falta ver que

$$\sigma * g \circ \alpha * \bar{\sigma} \simeq_p f \circ \alpha.$$

Para probar esto último consideremos la homotopía por caminos siguiente

$$G(s, t) = \begin{cases} \sigma(3ts) = F(x_0, 3ts) & s \in [0, \frac{1}{3}] \\ F(\alpha(3s - 1), t) & s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \sigma(3t(1 - s))F(x_0, 3t(1 - s)) & s \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

ahora basta notar que  $G(s, 0)$  es una reparametrización del producto de caminos  $\epsilon_{f(x_0)} * (f \circ \alpha) * \epsilon_{f(x_0)}$  mientras que  $G(s, 1)$  es una reparametrización del producto de caminos  $\sigma * (g \circ \alpha) * \bar{\sigma}$ , lo que nos permite afirmar que  $\epsilon_{f(x_0)} * (f \circ \alpha) * \epsilon_{f(x_0)} \simeq_p \sigma * (g \circ \alpha) * \bar{\sigma}$ .

Finalmente aplicando la Proposición 3.3.5 obtenemos

$$f \circ \alpha \simeq_p \epsilon_{f(x_0)} * f \circ \alpha * \epsilon_{f(x_0)} \simeq_p \sigma * g \circ \alpha * \bar{\sigma}$$

como queríamos ver. ■

### Corolario 3.5.5

El grupo fundamental es un invariante homotópico. En efecto, si

$$f : X \rightarrow Y$$

es una equivalencia de homotopía entre espacios topológicos homotópicamente equivalentes, entonces

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, f(x_0))$$

es un isomorfismo de grupos.

### Demostración

Por ser  $f$  una equivalencia de homotopía debe existir  $g$  tal que

$$g \circ f \simeq Id_X, \quad f \circ g \simeq Id_Y$$

Sea  $F_X$  la homotopía entre  $Id_X, g \circ f$  y sea  $F_Y$  la homotopía entre  $Id_Y, f \circ g$ . Sea  $x_0 \in X$  y sea  $\sigma_X = F_X(x_0, t)$  aplicando la proposición anterior obtenemos:

$$\hat{\sigma}_X \circ (Id_X)_* = \hat{\sigma}_X \circ Id_{\pi_1(X, x_0)} = g_* \circ f_*$$

Como  $\hat{\sigma}_X, Id_{\pi_1(X, x_0)}$  son isomorfismos su composición también lo es, por tanto  $g_* \circ f_*$  es un isomorfismo, lo que implica que  $f_*$  debe ser inyectiva.

Similarmente, consideremos la aplicación  $\sigma_Y = F_Y(f(x_0), t)$ , aplicando la proposición anterior obtenemos:

$$\hat{\sigma}_Y \circ (Id_Y)_* = \hat{\sigma}_Y \circ Id_{\pi_1(Y, f(x_0))} = f_* \circ g_*$$



igual que antes  $\hat{\sigma}_X \circ Id_{\pi_1(Y, f(x_0))}$  es un isomorfismo, y por tanto  $f_*$  debe ser sobreyectiva, lo que finaliza la prueba puesto que ya sabemos que es un homomorfismo. ■

### Corolario 3.5.6

Si  $X$  es un espacio contráctil entonces  $X$  es simplemente conexo.

#### *Demostración*

Si  $X$  es contráctil entonces es homotópico a un punto  $\{x\}$ , como el único lazo en este espacio es el lazo constante, su grupo fundamental es el grupo trivial:  $\pi_1(\{x\}) \cong (0, +)$ . Finalmente, por el corolario anterior el grupo fundamental es un invariante homotópico, y como  $X \simeq \{x\}$  hemos de tener

$$\pi_1(X) \cong \pi_1(\{x\}) \cong (0, +).$$

Finalmente, el Corolario 3.2.3 nos permite asegurar que  $X$  es arcoconexo, lo que prueba que  $X$  es simplemente conexo. ■

### 3.6. Aplicaciones recubridoras

#### Definición 3.6.1: Aplicación recubridora

Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación continua y sobreyectiva. Decimos que  $p$  es una aplicación recubridora si para todo  $b \in B$  existe un entorno  $U \in \mathcal{E}(b)$  tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{i \in J} V_i$$

donde los  $V_i$  son abiertos disjuntos en  $E$  y

$$p|_{V_i} : V_i \rightarrow U$$

es un homeomorfismo para todo  $i \in J$ . Se dice que  $E$  es un espacio recubridor de  $B$ . Si  $J = \{1, \dots, n\}$  diremos que  $p$  es una aplicación recubridora de  $n$  hojas.

#### Ejemplo

La aplicación  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$  es una aplicación recubridora.

**Demostración.**  $p$  es continua por ser composición de funciones continuas, y es sobreyectiva pues todo punto en  $\mathbb{S}^1$  puede expresarse en coordenadas polares como  $(\cos \theta, \sin \theta)$  para algún  $\theta \in \mathbb{R}$ , luego  $p(\frac{\theta}{2\pi}) = b$ .

Sea  $b = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$ . Tomemos el entorno  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}$ , entonces

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( k + \frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2}, k + \frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2} \right),$$

donde cada  $V_k = (k + \frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2}, k + \frac{\theta}{2\pi} + \frac{1}{2})$  es abierto en  $\mathbb{R}$  y  $p|_{V_k} : V_k \rightarrow U$  es un homeomorfismo. Los  $V_k$  son disjuntos y  $p$  restringida a cada  $V_k$  es biyectiva, con inversa continua.  $\square$

#### Ejemplo

La aplicación  $p : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $p(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  (elevar al cuadrado en  $\mathbb{C}$ ) es una aplicación recubridora.

**Demostración.**  $p$  es continua por serlo cada componente, y es sobreyectiva pues dado  $b = (\cos \theta, \sin \theta) \in \mathbb{S}^1$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  podemos tomar  $(x, y) = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2})$  de manera que

$$p(x, y) = (\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}, 2 \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2}) = (\cos \theta, \sin \theta) = b.$$

Además, para cualquier  $b \in \mathbb{S}^1$ , podemos tomar  $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-b\}$ . Supongamos ahora que el punto  $b$  está en el primer cuadrante, para el resto de cuadrantes podemos razonar de

manera similar. Es fácil comprobar que

$$p^{-1}(-b) = \{a, b\}, \quad a = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})), b = (\cos(\theta + \frac{3\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{3\pi}{2}))$$

Entonces es claro que:

$$p^{-1}(U) = V_1 \cup V_2,$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son los dos hemisferios abiertos de  $\mathbb{S}^1$  dados por

$$V_1 = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in (\theta + \frac{\pi}{2}, \theta + \frac{3\pi}{2})\}, \quad V_2 = \{(\cos \alpha, \sin \alpha) \mid \alpha \in (\theta + \frac{3\pi}{2}, 2\pi) \cup [0, \theta + \frac{\pi}{2})\}.$$

Cada  $V_i$  es un "sector" de  $\mathbb{S}^1$  que cubre la mitad del círculo, y  $p|_{V_i}$  es un homeomorfismo. Si  $b$  no estuviera en el primer cuadrante también obtenemos dos hemisferios abiertos, los detalles se dejan como ejercicio.  $\square$

### Proposición 3.6.2

El producto de dos aplicaciones recubridoras es una aplicación recubridora.

#### Demostración

Sean  $p_1: E_1 \rightarrow B_1$  y  $p_2: E_2 \rightarrow B_2$  aplicaciones recubridoras. Entonces el producto es

$$p = p_1 \times p_2: E_1 \times E_2 \rightarrow B_1 \times B_2, \quad p(e_1, e_2) = (p_1(e_1), p_2(e_2)).$$

Para ver que  $p$  es una aplicación recubridora es inmediato que  $p$  es continua y sobreyectiva porque  $p_1$  y  $p_2$  lo son.

Dado  $(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ , existen entornos  $U_1 \subset B_1$  de  $b_1$  y  $U_2 \subset B_2$  de  $b_2$  tales que:

$$p_1^{-1}(U_1) = \bigcup_{i \in I} V_i^1, \quad p_2^{-1}(U_2) = \bigcup_{j \in J} V_j^2,$$

con los  $V_i^1, V_j^2$  disjuntos y tales que  $p_1|_{V_i^1}: V_i^1 \rightarrow U_1$  y  $p_2|_{V_j^2}: V_j^2 \rightarrow U_2$  son homeomorfismos. Entonces, para  $U = U_1 \times U_2$ , tenemos:

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} V_i^1 \times V_j^2.$$

Cada  $V_i^1 \times V_j^2$  es abierto en  $E_1 \times E_2$ , son disjuntos, y:

$$p|_{V_i^1 \times V_j^2}: V_i^1 \times V_j^2 \rightarrow U_1 \times U_2$$

es un homeomorfismo porque es producto de homeomorfismos. Por lo tanto,  $p_1 \times p_2$  es una aplicación recubridora.  $\blacksquare$

#### Ejemplo

Sea  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $p(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ , entonces  $p \times p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es una aplicación recubridora sobre el toro.

**Lema 3.6.3: Levantamiento de caminos**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sean  $e \in E, b \in B$  tales que  $p(e) = b$ . Para cualquier camino  $\alpha : I \rightarrow B$  que comienza en  $b$ , existe un único camino  $\tilde{\alpha} : I \rightarrow E$  que comienza en  $e$  tal que  $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ . El camino  $\tilde{\alpha}$  se llama levantamiento de  $\alpha$ .

**Lema 3.6.4: Levantamiento de homotopías**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sean  $e \in E, b \in B$  tales que  $p(e) = b$ . Para cualquier homotopía por caminos  $F : I \times I \rightarrow B$  con  $F(0, 0) = b$ , existe una única homotopía por caminos  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow E$  tal que  $p \circ \tilde{F} = F$  y  $\tilde{F}(0, 0) = e$ .

**Proposición 3.6.5**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sean  $e \in E, b \in B$  tales que  $p(e) = b$ . Sean  $\alpha, \beta$  dos caminos en  $B$  comenzando en  $b$  y finalizando en un mismo punto  $b'$ , y sean  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  sus respectivos levantamientos comenzando en  $e$ . Si  $\alpha \simeq_p \beta$ , entonces  $\tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$  y  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  finalizan en un mismo punto de  $E$ .

**Demostración**

Supongamos que  $\alpha \simeq_p \beta$  y sea  $F$  la homotopía por caminos entre  $\alpha, \beta$ , con  $F(0, 0) = b$ . Por el lema anterior existe una única homotopía por caminos  $\tilde{F}$ , que cumple  $\tilde{F}(0, t) = e, \tilde{F}(1, t) = e'$  para un cierto  $e'$ . Veamos que es una homotopía entre  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ , en efecto

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{F}(s, 0) &= F(s, 0) = \alpha(s) \implies \tilde{F}(s, 0) = \tilde{\alpha}(s) \\ p \circ \tilde{F}(s, 1) &= F(s, 1) = \beta(s) \implies \tilde{F}(s, 1) = \tilde{\beta}(s) \end{aligned}$$

y como además mantiene fijos los extremos es una homotopía de caminos, por tanto  $\tilde{\alpha} \simeq_p \tilde{\beta}$ . ■

**Definición 3.6.6: Correspondencia del levantamiento**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sean  $e \in E, b \in B$  tales que  $p(e) = b$ . Definimos la aplicación

$$\Phi : \pi_1(B, b) \rightarrow p^{-1}(b)$$

que asigna a cada clase de lazos  $[\alpha] \in \pi_1(B, b)$  un elemento de  $E$ . En concreto, sea  $\tilde{\alpha}$  el levantamiento de  $\alpha$  que empieza en  $e$ , entonces ese elemento es

$$\Phi([\alpha]) := \tilde{\alpha}(1).$$

**Proposición 3.6.7**

Sea  $p : E \rightarrow B$  una aplicación recubridora. Sean  $e \in E$ ,  $b \in B$  tales que  $p(e) = b$ .

1. Si  $E$  es conexo por caminos, entonces  $\Phi$  es sobreyectiva.
2. Si  $E$  es simplemente conexo, entonces  $\Phi$  es biyectiva.

**Demostración**

1. Si  $E$  es conexo por caminos dado  $e' \in p^{-1}(b)$  existe un camino  $\tilde{\alpha}$  en  $E$  uniendo  $e$  con  $e'$ . Entonces  $\alpha = p \circ \tilde{\alpha}$  es un lazo centrado en  $b$  con  $\Phi([\alpha]) = \alpha(1) = e'$  por definición, luego  $\Phi$  es sobreyectiva.
2. Si  $E$  es simplemente conexo entonces es conexo por caminos, por lo que el apartado anterior garantiza la sobreyectividad.

Para ver que es inyectiva sean  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(B, b)$  tales que  $\Phi([\alpha]) = \Phi([\beta])$ . Sean  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  los levantamientos empezando en  $e$  y terminando en  $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$  dados por la proposición anterior. Como  $E$  es simplemente conexo existe una homotopía por caminos  $\tilde{F}$  entre  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ , pero entonces  $F = p \circ \tilde{F}$  es una homotopía por caminos entre  $\alpha, \beta$ , por lo que  $[\alpha] = [\beta]$ .

**Teorema 3.6.8**

El grupo fundamental de la circunferencia  $\mathbb{S}^1$  es isomorfo a  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Demostración.** Sea  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$  dada por  $p(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$  y sea  $e = 0, b = p(0) = (1, 0)$ . Como ya sabemos,  $p$  es una aplicación recubridora. Además,  $p^{-1}(b) = \mathbb{Z}$ , y como  $\mathbb{R}$  es simplemente conexo la aplicación  $\Phi$  es una biyección. Veamos que también es un homomorfismo.

Sean  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(\mathbb{S}^1, b)$  y sean  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  los levantamientos empezando en  $e$  y terminando en  $\tilde{\alpha}(1) = n, \tilde{\beta}(1) = m$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Consideremos el camino en  $\mathbb{R}$  dado por

$$\tilde{\tilde{\beta}} : I \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{\tilde{\beta}}(s) = n + \tilde{\beta}(s)$$

como  $p(x + n) = p(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $\tilde{\tilde{\beta}}$  es un levantamiento de  $\beta$  que comienza en  $\tilde{\tilde{\beta}}(0) = n$  en lugar de en 0. Entonces  $\tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}}$  está bien definido ya que

$$\tilde{\alpha}(1) = n = \tilde{\tilde{\beta}}(0)$$

y es un levantamiento de  $\alpha * \beta$  que comienza en 0. Notemos ahora que el punto final de  $\tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}}$  es  $\tilde{\tilde{\beta}}(1) = n + m$ , luego tenemos

$$\Phi([\alpha * \beta]) = n + m = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\tilde{\beta}}(1) = \Phi([\alpha]) + \Phi([\beta])$$

lo que prueba que  $\Phi$  es un homomorfismo. □

### 3.7. Retractos

#### Definición 3.7.1: Retracción, retracts

Sea  $A \subset X$  un subconjunto de un espacio topológico  $X$ . Una retracción de  $X$  en  $A$  es una aplicación continua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r|_A = Id_A$ . Se dice que  $A$  es un retracto de  $X$ .

#### Ejemplo

La aplicación  $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$  dada por  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  es una retracción, así  $\mathbb{S}^n$  es un retracto de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

#### Lema 3.7.2

Si  $A$  es un retracto de  $X$ , entonces el homomorfismo inducido  $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  es inyectivo, para todo  $a \in A$ , donde  $i : A \rightarrow X$  es la inclusión.

**Demostración.** Sea  $r$  la retracción de  $X$  en  $A$ . Sean  $[\alpha]_A, [\beta]_A \in \pi_1(A, a)$ , entonces

$$i_*([\alpha]_A) = i_*([\beta]_A) \implies [i \circ \alpha]_X = [i \circ \beta]_X \implies [\alpha]_X = [\beta]_X.$$

Como  $[\alpha]_X = [\beta]_X$  existe una homotopía por caminos  $F : I \times I \rightarrow X$  entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Sea entonces  $\tilde{F} : I \times I \rightarrow A$ ,  $\tilde{F} = r \circ F$ , que está bien definida porque las imágenes de  $\alpha, \beta$  están en  $A$ . Además  $\tilde{F}$  es una homotopía por caminos, luego  $[\alpha]_A = [\beta]_A$ .  $\square$

#### Definición 3.7.3: Retracto de deformación

Sea  $A \subset X$  un retracto de  $X$ . Decimos que  $A$  es un retracto de deformación de  $X$  si la aplicación identidad  $Id_X$  es homotópica a  $i \circ r$ , con  $r$  una retracción de  $X$  en  $A$ , de forma que cada punto de  $A$  permanece fijo por la homotopía. En particular,  $A \simeq X$ .

#### Ejemplo

$\mathbb{S}^n$  es un retracto de deformación de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ .

#### Corolario 3.7.4

Sea  $A$  un retracto de deformación de  $X$ . Para todo  $a \in A$ , el homomorfismo inducido  $i_* : \pi_1(A, a) \rightarrow \pi_1(X, a)$  por la inclusión es un isomorfismo.

#### Demostración

Como  $A$  es un retracto de deformación de  $X$  sabemos que  $i \circ r \simeq Id_X$ , y además es inmediato que  $r \circ i = Id_A$ . Veamos que  $i_*$  es sobreyectiva y habremos terminado, puesto que ya sabemos que es un homomorfismo y que es inyectiva.

Sea  $[\alpha]_X \in \pi_1(X, a)$  y sea

$$\tilde{\alpha} : I \rightarrow A, \quad \tilde{\alpha}(s) = r(\alpha(s))$$

entonces

$$i_*([\tilde{\alpha}]_A) = [i \circ \tilde{\alpha}]_X = [(i \circ r) \circ \alpha]_X = [\alpha]_X$$

donde la última igualdad se da porque  $i \circ r \simeq Id_X$ , luego  $i \circ r \circ \alpha \simeq Id_X \circ \alpha \simeq \alpha$ . ■

### Corolario 3.7.5

$\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^n)$ , para todo  $n \geq 1$ .

#### *Demostración*

Por el ejemplo anterior  $\mathbb{S}^n$  es un retracto de deformación de  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ , luego  $i_*$  es el isomorfismo buscado entre  $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$  y  $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ . ■

### 3.8. Teorema de Seifert-van Kampen

#### Teorema 3.8.1: Teorema de Seifert-van Kampen (versión reducida)

Supongamos que  $X = U \cup V$ , donde  $U$  y  $V$  son abiertos y  $U \cap V \neq \emptyset$  es conexo por caminos. Sean  $i : U \rightarrow X$  y  $j : V \rightarrow X$  las inclusiones. Para cada  $x_0 \in U \cap V$ , las imágenes de los homomorfismos inducidos  $i_*$  y  $j_*$  generan el grupo  $\pi_1(X, x_0)$ .

**Demostración.** Queremos ver que dado  $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$  se tiene que

$$[\alpha] = [\beta_1 * \cdots * \beta_n]$$

con cada  $\beta_k$  contenido en  $U$  o en  $V$ .

Existe una subdivisión de  $[0, 1]$  de la forma  $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = 1$  tal que  $\alpha(a_i) \in U \cap V$  y  $\alpha([a_{i-1}, a_i])$  está contenido en  $U$  o en  $V$ .

Definamos  $\alpha_i$  como un camino que cubre el trozo de  $\alpha$  en el intervalo  $[a_{i-1}, a_i]$  haciendo

$$\alpha_i(t) = \alpha(a_{i-1} + t(a_i - a_{i-1})).$$

Es inmediato entonces que

$$\alpha \simeq_p \alpha_1 * \cdots * \alpha_n.$$

Cada curva  $\alpha_i$  es un camino uniendo puntos de  $U \cap V$ , que es conexo por caminos. Por tanto, existe  $\gamma_i$  un camino contenido en  $U \cap V$  uniendo  $x_0$  con  $\alpha(a_i)$ . Como  $\alpha(a_0) = x_0 = \alpha(a_n)$ , los arcos  $\gamma_1, \gamma_n$  son constantes.

Finalmente, definamos los arcos  $\beta_i = \gamma_{i-1} * \alpha_i * \overline{\gamma_i}$ , entonces se tiene que  $\beta_i$  es un lazo en  $x_0$  y además

$$\beta_1 * \beta_2 * \cdots * \beta_n \simeq_p \alpha_1 * \cdots * \alpha_n \simeq_p \alpha$$

lo que nos permite concluir

$$[\alpha] = [\beta_1 * \cdots * \beta_n]$$

como queríamos ver. □

#### Nota

Es fácil visualizar el teorema en el caso de los lazos simples. Si tomamos un punto  $x_0 \in U \cap V$  y un lazo simple  $\alpha$  centrado en  $x_0$ , entonces siempre podemos dividir este camino en dos lazos distintos  $\alpha_1, \alpha_2$  de manera que  $\alpha_1$  está en  $U$  y  $\alpha_2$  está en  $V$ , y además  $[\alpha] = [\alpha_1 * \alpha_2]$ .

#### Corolario 3.8.2

Sea  $X = U \cup V$  con  $U, V \subseteq X$  abiertos tales que  $U$  y  $V$  son conexos por caminos y simplemente conexos, y  $U \cap V \neq \emptyset$  con  $U \cap V$  conexo por caminos. Entonces  $X$  es simplemente conexo.



**Demostración**

Sea  $x_0 \in U \cap V$ . Como  $U$  y  $V$  son conexos por caminos y  $U \cap V \neq \emptyset$  entonces  $X = U \cup V$  es conexo por caminos, lo que nos permite identificar  $\pi_1(X) \cong \pi_1(X, x_0)$ .

Por el teorema de Seifert-van Kampen las inclusiones  $i : U \hookrightarrow X$  y  $j : V \hookrightarrow X$  inducen homomorfismos  $i_*$  y  $j_*$  cuyas imágenes generan  $\pi_1(X, x_0)$ .

Como  $U$  y  $V$  son simplemente conexos,  $\pi_1(U, x_0) = \pi_1(V, x_0) = \{1\}$ , de modo que  $\text{Im } i_* = \text{Im } j_* = \{1\}$ .

Finalmente el subgrupo generado por el elemento triviales es el grupo trivial, luego

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \{1\} \rangle = \{1\}.$$

Por tanto  $X$  es simplemente conexo. ■

**Corolario 3.8.3**

La esfera  $\mathbb{S}^n$  es simplemente conexa para  $n \geq 2$ .

**Demostración**

Sean  $p = (0, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $q = (0, \dots, -1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , entonces  $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$ , por tanto simplemente conexa. De igual manera,  $\mathbb{S}^n \setminus \{q\}$  es homeomorfa a  $\mathbb{R}^n$  y por tanto simplemente conexa. Finalmente notemos que

$$(\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \cap (\mathbb{S}^n \setminus \{q\}) \neq \emptyset, (\mathbb{S}^n \setminus \{p\}) \cup (\mathbb{S}^n \setminus \{q\}) = \mathbb{S}^n$$

por tanto, por el corolario anterior,  $\mathbb{S}^n$  es simplemente conexa. ■

**Teorema 3.8.4**

Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios topológicos y fijemos puntos  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ . Entonces

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

**Demostración.** Queremos construir un isomorfismo de grupos

$$\Phi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

Consideremos las proyecciones canónicas  $p : X \times Y \rightarrow X$  y  $q : X \times Y \rightarrow Y$ . Estas aplicaciones son continuas y, por lo tanto, inducen homomorfismos entre los grupos fundamentales:

$$p_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$q_* : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0).$$

Definimos la aplicación  $\Phi$  de la siguiente manera: para cualquier lazo  $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ ,

$$\Phi([\alpha]) := (p_*([\alpha]), q_*([\alpha])) = ([p \circ \alpha]_X, [q \circ \alpha]_Y).$$

Para demostrar que  $\Phi$  es un isomorfismo, verificaremos que es un homomorfismo y que es

biyectiva.

**1.  $\Phi$  es un homomorfismo** Sean  $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ . Entonces,

$$\begin{aligned}\Phi([\alpha] * [\beta]) &= \Phi([\alpha * \beta]) \\ &= (p_*([\alpha * \beta]), q_*([\alpha * \beta])) \\ &= ([p \circ (\alpha * \beta)]_X, [q \circ (\alpha * \beta)]_Y).\end{aligned}$$

Dado que  $[p \circ (\alpha * \beta)]_X = [p \circ \alpha]_X * [p \circ \beta]_X$  y análogamente  $[q \circ (\alpha * \beta)]_Y = [q \circ \alpha]_Y * [q \circ \beta]_Y$ , se sigue que

$$\begin{aligned}p_*([\alpha * \beta]) &= [p \circ \alpha * p \circ \beta]_X = [p \circ \alpha]_X * [p \circ \beta]_X = p_*([\alpha]) * p_*([\beta]) \\ q_*([\alpha * \beta]) &= [q \circ \alpha * q \circ \beta]_Y = [q \circ \alpha]_Y * [q \circ \beta]_Y = q_*([\alpha]) * q_*([\beta]).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Phi([\alpha] * [\beta]) &= (p_*([\alpha]) * p_*([\beta]), q_*([\alpha]) * q_*([\beta])) \\ &= (p_*([\alpha]), q_*([\alpha])) * (p_*([\beta]), q_*([\beta])) \\ &= \Phi([\alpha]) * \Phi([\beta]).\end{aligned}$$

Así,  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos.

**2.  $\Phi$  es inyectiva** Sabemos que un homomorfismo es inyectivo si y solo si su núcleo es trivial. En este caso, el núcleo de  $\Phi$  está dado por

$$Ker(\Phi) = \{[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) : [p \circ \alpha] = [\varepsilon_{x_0}], [q \circ \alpha] = [\varepsilon_{y_0}]\}.$$

Supongamos que  $\alpha$  es un lazo en  $(x_0, y_0)$  con  $[\alpha] \in Ker(\Phi)$ . Esto implica que  $p \circ \alpha \simeq_p \varepsilon_{x_0}$  y  $q \circ \alpha \simeq_q \varepsilon_{y_0}$ . Sean  $H$  y  $G$  las respectivas homotopías. Entonces, definimos

$$F((x, y), t) = (H(x, t), G(y, t)),$$

que es homotopía entre  $\alpha$  y el lazo constante en  $(x_0, y_0)$ . Por lo tanto,  $[\alpha] = [\varepsilon_{(x_0, y_0)}]$ , lo que implica que el núcleo de  $\Phi$  es trivial.

**3.  $\Phi$  es sobreyectiva** Sea  $\gamma_1$  lazo en  $X$  centrado en  $x_0$  y  $\gamma_2$  lazo en  $Y$  centrado en  $y_0$ . Buscamos  $[\alpha] \in \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$  tal que  $\Phi([\alpha]) = ([\gamma_1], [\gamma_2])$ .

Basta tomar  $\alpha(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s))$  para  $s \in [0, 1]$  y observar que cumple las condiciones.

Hemos visto que  $\Phi$  es un homomorfismo de grupos, inyectivo y sobreyectivo, por lo que es un isomorfismo.  $\square$

### Corolario 3.8.5

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

**Demostración**

El resultado es inmediato si notamos que  $\mathbb{S}^1$  es conexo por caminos, luego  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  también, y por tanto los grupos fundamentales no dependen del punto escogido. Además, por el Teorema 3.6.8

$$\pi_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$$

por lo que aplicando el teorema anterior se obtiene el resultado. ■

**Proposición 3.8.6**

El grupo fundamental del plano proyectivo  $\mathbb{RP}^2$  es  $\mathbb{Z}_2$ .

**Demostración**

Consideremos  $\mathbb{RP}^2$  como el espacio cociente en  $\mathbb{S}^2$  al identificar puntos opuestos. En tal caso la aplicación

$$p : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, \quad p(x) = [x]$$

es una aplicación recubridora de dos hojas (la demostración de que lo es queda como ejercicio). Como  $\mathbb{S}^2$  es simplemente conexa la correspondencia del levantamiento

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{RP}^2, x) \rightarrow p^{-1}([x])$$

es una biyección. Ahora notemos que  $\mathbb{RP}^2$  es conexo por caminos, luego el grupo fundamental no depende del punto escogido, y además  $p^{-1}([x]) = \{x, -x\}$ , por lo que  $\pi_1(\mathbb{RP}^2)$  tiene solo dos elementos. Finalmente, un resultado bien conocido sobre teoría de grupos nos permite afirmar que todos los grupos de dos elementos son isomorfos a  $\mathbb{Z}_2$ , luego

$$\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$$

como queríamos ver. ■

**Proposición 3.8.7**

El grupo fundamental de la figura ocho  $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$  es no abeliano (grupo libre de dos generadores).

**Demostración**

■ Pendiente. ■

**Corolario 3.8.8**

El grupo fundamental del plano doblemente agujereado es no abeliano.

**Demostración**

■ Pendiente. ■

**Corolario 3.8.9**

El grupo fundamental del doble toro  $\mathbb{T}^2 \# \mathbb{T}^2$  es no abeliano.

***Demostración***

■ Pendiente. ■

# Apéndice A

## Teoría de grupos

### A.1. Grupos y subgrupos

#### Definición A.1.1: Operación binaria

Dado un conjunto  $X$ , una operación binaria en  $X$  es una aplicación

$$* : X \times X \rightarrow X$$

Dados  $a, b \in X$  se suele abreviar la notación escribiendo  $*(a, b) =: a * b$ .

#### Ejemplo

- La suma  $+$  es una operación binaria sobre  $\mathbb{Z}$ .
- La resta  $-$  no es una operación binaria sobre  $\mathbb{N}$ .
- Dado un conjunto cualquiera  $X$ , llamemos  $S_X = \{\sigma : X \rightarrow X : \sigma \text{ es biyectiva}\}$ . La composición  $\circ$  es una operación binaria sobre  $S_X$ .

#### Definición A.1.2: Grupo

Un grupo es un par  $(G, *)$  donde  $G$  es un conjunto y  $* : G \times G \rightarrow G$  es una operación binaria que satisface:

(G1) **Asociatividad:**  $(a * b) * c = a * (b * c)$  para todo  $a, b, c \in G$

(G2) **Elemento neutro:** Existe  $e \in G$  tal que  $e * a = a * e = a$  para todo  $a \in G$

(G3) **Elemento inverso:** Para cada  $a \in G$ , existe  $a^{-1} \in G$  tal que

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e.$$

**Ejemplo**

El par  $(\{0\}, *)$ , con  $*$  :  $\{0\} \times \{0\} \rightarrow \{0\}$  la única aplicación posible, forma un grupo llamado grupo trivial.

**Demostración.** Trivial. □

**Ejemplo**

El conjunto  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  con la operación  $+$  dada por

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0$$

forma un grupo.

**Demostración.** La asociatividad se puede comprobar “a mano”, el neutro es el 0 y tanto 0 como 1 se tienen a sí mismos como inversos. □

**Definición A.1.3: Grupo abeliano**

Un grupo  $(G, *)$  se dice abeliano o conmutativo si además cumple:

(G4) **Conmutatividad:**  $a * b = b * a$  para todo  $a, b \in G$

**Nota**

Sobre la notación usual para grupos. Si  $(G, *)$  es un grupo arbitrario, por comodidad se suele trabajar con la siguiente notación:

- Si sabemos que  $G$  es abeliano, se suele usar notación sumativa. Es decir, se sustituye el símbolo  $*$  por  $+$  para denotar la operación, y trabajamos con  $(G, +)$ . Además, el elemento neutro  $e_G \in G$  se suele llamar el “cero” de  $G$ , y se escribe  $0_G$  o directamente 0. Es bastante intuitivo pensar que para cualquier  $g \in G$ ,  $0_G + g = g + 0_G = g$ , aunque no estemos trabajando con números.
- Alternativamente y de forma más general, se puede usar notación multiplicativa: trabajamos con  $(G, \cdot)$  y ahora el neutro es  $e_G = 1_G$  el “uno” de  $G$ . Se tiene que  $\forall g \in G$ ,  $1_G \cdot g = g \cdot 1_G = g$ . De nuevo, recalco, no estamos trabajando con números.

**Ejercicio A.1**

Probar las siguientes afirmaciones:

- $(\mathbb{Z}, +)$  es un grupo abeliano.
- $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  es un grupo abeliano.
- El grupo simétrico  $S_n$  de permutaciones de  $n$  elementos es un grupo con la composición como operación.
- $(\mathbb{N}, +)$  no es un grupo.

**Nota**

Dado un conjunto cualquiera  $X$  con  $n$  elementos, una permutación en  $X$  es una aplicación biyectiva  $\sigma : X \rightarrow X$ . Cuando se habla del grupo simétrico es lo mismo trabajar con el conjunto  $X$  que con cualquier otro que tenga el mismo cardinal. Por ello, las permutaciones de un conjunto finito se suelen describir sin perder generalidad como biyecciones  $\sigma : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_n$ , donde  $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Definición A.1.4: Subgrupo**

Un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  es un subgrupo (denotado  $H \leq G$ ) si:

1.  $H$  es no vacío
2. Para todo  $a, b \in H$ ,  $a * b \in H$  (cerrado bajo la operación)
3. Para todo  $a \in H$ ,  $a^{-1} \in H$  (cerrado bajo inversos)

**Proposición A.1.5: Observacion sobre subgrupos**

Todo subgrupo es un grupo.

**Demostración**

Si  $H \leq G$ , entonces  $(H, *)$  es un grupo con la misma operación que  $G$ . Ya se tienen las propiedades de la asociatividad y la existencia del elemento inverso, solo hace falta ver que existe un elemento neutro, que además, resulta coincidir con el elemento neutro de  $G$ .

Como  $H$  es no vacío, existe  $a \in H$ . Entonces definimos el neutro de  $H$  como  $e_H = a * a^{-1} \in H$ . Observemos que como  $a \in G$ , también se tiene que  $a * a^{-1} = e_G$  y ambos neutros son en realidad el mismo elemento. De aquí se deduce que  $e_H$  cumple las propiedades de elemento neutro al heredarlas de  $G$ . ■

## A.2. Homomorfismos

### Definición A.2.1: Homomorfismo de grupos

Sean  $(G, \cdot)$  y  $(H, *)$  grupos. Una aplicación  $f : G \rightarrow H$  es un homomorfismo de grupos si preserva las operaciones de grupo, es decir:

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b) \quad \forall a, b \in G$$

### Definición A.2.2: Isomorfismo de grupos

Un isomorfismo de grupos es una aplicación biyectiva que además es homomorfismo. Si  $(G, \cdot)$  y  $(H, *)$  son grupos y  $f : G \rightarrow H$  es un isomorfismo decimos que  $G$  y  $H$  son isomorfos.

### Definición A.2.3: Imagen y núcleo

Dado un homomorfismo  $f : G \rightarrow H$  definimos la imagen de  $f$  como

$$\text{Im} f = \{h \in H \mid h = f(g), g \in G\}$$

y el núcleo de  $f$  como

$$\text{Ker} f = \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$$

donde  $e_H$  indica el elemento neutro del grupo  $H$ .

### Ejercicio A.2

Sea  $f : G \rightarrow H$  un homomorfismo, probar las siguientes afirmaciones:

- $f$  es inyectiva si y solo si  $\text{Ker} f = \{e_H\}$ .
- Si  $f$  es biyectiva, entonces  $f^{-1}$  también es un homomorfismo.
- $\text{Im} f, \text{Ker} f$  son subgrupos de  $H, G$  respectivamente.
- Si  $K \leq G$  entonces  $f(K) \leq H$ . Recordar que  $\leq$  indica que el conjunto es un subgrupo.



### A.3. Teorema de Lagrange y consecuencias

#### Definición A.3.1: Orden de un grupo

Sea  $G$  un grupo. El orden de  $G$ , denotado por  $|G|$ , es el número de elementos que contiene  $G$  si  $G$  es finito. Si  $G$  tiene infinitos elementos decimos que  $G$  es un grupo de orden infinito.

#### Teorema A.3.2: Teorema de Lagrange

Sea  $G$  un grupo finito y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Entonces, el orden de  $H$  divide al orden de  $G$ . Es decir,

$$n|H| = |G|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

#### Corolario A.3.3

Sea  $G$  un grupo con  $p$  elementos,  $p$  un número primo. Entonces  $G \cong \mathbb{Z}_p$ .

#### *Demostración*

Dado que  $|G| = p$ , tomamos un elemento  $g \in G$  distinto de la identidad ( $g \neq e$ ). Consideramos el subgrupo cíclico generado por  $g$ , denotado  $\langle g \rangle$ .

Por el Teorema de Lagrange, el orden de  $\langle g \rangle$  debe dividir a  $p$ . Como  $p$  es primo, los únicos divisores posibles son 1 y  $p$ . Pero  $g \neq e$ , así que  $|\langle g \rangle| \neq 1$ , lo que implica  $|\langle g \rangle| = p$ . Por lo tanto,  $\langle g \rangle = G$ , es decir,  $G$  es cíclico generado por  $g$ .

Para ver que todo grupo cíclico de orden  $p$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_p$  podemos construir el isomorfismo explícito:

$$\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}_p, \quad \phi(g^k) = k \pmod{p}.$$

La comprobación de que es un isomorfismo se deja como ejercicio. Finalmente,  $G \cong \mathbb{Z}_p$ . ■