Análise Combinatória

I

Resumo

Pedro Volpi Nacif

v1.0

Sumário

1 Introdução

Análise Combinatória é um braço da matemática que lida com problemas de contar elementos sem listá-los todos. Tipicamente, precisamos construir um **conjunto solução** a partir de elementos de outros conjuntos predefinidos pela questão. Nesse contexto, cada elemento único do conjunto solução nós chamamos de "configuração".

É necessário entender a natureza destas configurações para resolver os problemas. A formulação do enunciado geralmente nos leva a considerar certos aspectos fundamentais das configurações:

1. **Ordem dos elementos**: se eu trocar a ordem de dois elementos de uma configuração, eu gero uma configuração nova? Se sim, a ordem é importante para a contagem.

2. **Repetição de elementos**: uma configuração pode ter elementos repetidos?

3. **Natureza dos elementos**: os elementos que formarão as configurações são distinguíveis ou indistinguíveis? Por exemplo, bolas vermelhas em uma urna são todas indistinguíveis, mas se forem bolas vermelhas enumeradas elas são distinguíveis.

4. **Restrições**: Quais restrições são impostas nas configurações? Restrições podem incluir ordens específicas ou números máximos ou mínimos de elementos.

Uma vez que o objetivo primeiro das técnicas combinatoriais é determinar a quantidade de elementos do conjunto solução sem que precisemos produzir todos seus elementos, frequentemente transformamos o problema sob análise em um problema equivalente, em que os elementos subjacentes não são necessariamente os mesmos, mas que a **quantidade** de elementos é a mesma.

2 Princípio Fundamental da Contagem

2.1 Misturando conjuntos distintos entre si

O Princípio Fundamental da Contagem é um método que nos permite calcular o número total de possibilidades quando fazemos múltiplas escolhas sequenciais. Matematicamente, ele permite **misturar todos os elementos de um conjunto com todos os elementos de outro**. Se há a maneiras de fazer uma coisa e b maneiras de fazer outra coisa, há $a \times b$ maneiras diferentes de fazer ambas as coisas em sequência.

Exemplo: temos 3 ternos e 5 camisas. De quantas maneiras podemos compor um look?

Essencialmente temos um conjunto T de ternos, com três elementos, e um conjunto C de camisas, com cinco elementos. Nosso conjunto solução S será todas as listas de looks distintos. Par misturar todos os elementos de T com os de C, formando S, usamos os princípio fundamental da contagem.

$$|S| = |C| \times |T|$$
$$|S| = 5 \times 3 = 15$$

Teremos assim 15 looks diferentes.

Vamos dar um passo para trás e analisar a questão sob seus componentes básicos. Os conjuntos T e C podem ser visualizados da seguinte forma.

$$T = \{t_1, t_2, t_3\}$$
$$C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$$

Podemos visualizar o conjunto solução em forma de matriz.

$$S = \begin{matrix} (t_1, c_1) & (t_2, c_1) & (t_3, c_1) \\ (t_1, c_2) & (t_2, c_2) & (t_3, c_2) \\ (t_1, c_3) & (t_2, c_3) & (t_3, c_3) \\ (t_1, c_4) & (t_2, c_4) & (t_3, c_4) \\ (t_1, c_5) & (t_2, c_5) & (t_3, c_5) \end{matrix}$$

Pela representação acima, é nítido que, por termos 5 linhas e 3 colunas, teremos 15 elementos.

Podemos nos perguntar: ao trocar de posição os elementos de uma configuração, geramos uma nova configuração? Isto é, (t_1, c_2) é distinto de (c_2, t_1)? A resposta é **não**. O fato de t vir primeiro na nossa listagem foi uma mera convenção nossa, e trocar t com c de posição não gera um look novo.

Desse modo, de maneira geral, tendo n ternos e m camisas, podemos visualizar todas as configurações conforme a matriz abaixo.

$$S = \begin{matrix} (t_1, c_1) & (t_1, c_2) & \cdots & (t_1, c_m) \\ (t_2, c_1) & (t_2, c_2) & \cdots & (t_2, c_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (t_n, c_1) & (t_n, c_2) & \cdots & (t_n, c_m) \end{matrix}$$

2.2 Misturando um conjunto consigo mesmo

2.2.1 PFC com repetição

Em muitos casos é necessário construir sequências a partir de um conjunto maior que as contêm, de maneira que estaremos misturando elementos de um conjunto com outros elementos dele mesmo. O exemplo mais clássico é a formação de senhas com caracteres alfanuméricos. As senhas nas questões de vestibular são, de maneira geral, compostas pelas 26 letras do alfabeto e pelos 10 dígitos de 0 até 9, podendo haver repetições de caracteres. Dessa maneira, temos um conjunto C de caracteres com $26 + 10 = 36$ elementos.

Assim, as seguintes informações são importantes: (a) quais os caracteres possíveis, (b) quantos caracteres terá a senha e (c) se há possibilidade de introduzir repetições dos caracteres selecionados. Todas essas informações são fornecidas pelo enunciado.

Suponhamos que vamos construir senhas de 5 dígitos, podendo repetir caracteres. Utilizando o PFC, teremos 36 opções para o primeiro caractere, 36 para o segundo, e assim por diante. Sendo assim, nosso conjunto de senhas possíveis terá o tamanho:

$$|S| = 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 36 = 36^5$$
$$|S| = 60.466.176$$

Vamos observar as senhas possíveis geradas com dois caracteres, dentro um conjunto de n caracteres, com nossa representação de matriz. No caso em tela, os elementos são os caracteres $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ e teremos uma matriz $n \times n$.

$$S = \begin{matrix} (c_1, c_1) & (c_1, c_2) & \cdots & (c_1, c_n) \\ (c_2, c_1) & (c_2, c_2) & \cdots & (c_2, c_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_n, c_1) & (c_n, c_2) & \cdots & (c_n, c_n) \end{matrix}$$

A análise interessante é ver que (I) são permitidos elementos repetidos $(c_1, c_1), (c_2, c_2), \dots$, contidos na diagonal principal; e (II) o par ordenado (c_1, c_2) é diferente de (c_2, c_1). Por indução, ao termos uma senha de k caracteres dentre os n possíveis, teríamos n^k senhas possíveis. Como repetições são permitidas, podemos ter inclusive $k > n$.

2.2.2 PFC sem repetição

Vejamos um caso análogo: devemos gerar as senhas de 5 dígitos mas sem que possamos repetir dígitos. No caso sob exame, a análise é similar: teremos 36 possibilidades para o primeiro caractere. Já para o segundo, teremos 35 pois não podemos utilizar o mesmo caractere de antes. Seguindo este raciocínio, nosso conjunto S' de senhas terá o temanho:

$$|S'| = 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32$$

$$|S'| = 45.239.040$$

O importante é entender que, ao diminuir o número de caracteres possíveis de uma posição para a outra, nós **impedimos a repetição**, mas não impedimos qualquer relação de ordem entre os caracteres. Lembre-se: o PFC mistura todos os elementos de um conjunto com todos os do outro. Isto significa que, por exemplo, o caractere "A" pode aparecer em qualquer posição na senha (i.e. de todas as senhas que geramos, o caractere "A" pode estar em qualquer uma das cinco posições), mas ele necessariamente não aparecerá duas ou mais vezes numa mesma senha.

Reforçando este ponto, pois é fonte de muita confusão entre os alunos: nesta última contagem, poderemos ter as senhas $A1234$, $1A234$, $12A34$, $123A4$ e $1234A$, mas definitivamente não teremos a senha $AAAAA$ ou $AA123$ etc.

Novamente, vamos ver sob a ótica da matriz a junção de dois destes caracteres. Agora nós não podemos contar os elementos repetidos da diagonal principal.

$$S = \begin{matrix} \cancel{(c_1, c_1)} & (c_1, c_2) & \cdots & (c_1, c_n) \\ (c_2, c_1) & \cancel{(c_2, c_2)} & \cdots & (c_2, c_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (c_n, c_1) & (c_n, c_2) & \cdots & \cancel{(c_n, c_n)} \end{matrix}$$

Esta nova contagem confunde um pouco os alunos, mas não é nada de outro mundo: nós temos n linhas e n colunas. Cada linha (ou coluna) possui exatamente um elemento na diagonal principal. Sendo assim, dos n^2 iniciais, nós tiramos n, obtendo:

$$\begin{aligned} |S| &= n^2 - n \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

Nós podemos ver matematicamente o que essas subtrações de 1 em 1 fazem: elas **impedem a repetição**. Elas não impedem que os elementos do conjunto troquem de ordem se estivermos misturando um conjunto consigo mesmo. Note que ainda contamos (c_1, c_2) e (c_2, c_1) como duas configurações válidas.

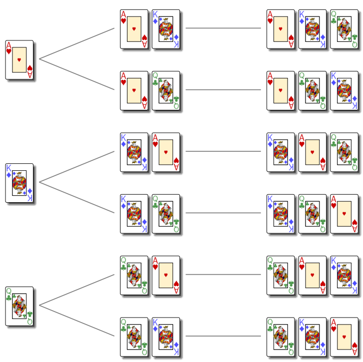
A grande lição que deve ser depreendida é que ao usar o PFC com elementos de um mesmo conjunto, vamos embaralhar os elementos. Eu gosto de pensar que o PFC embaralha os índices, pois quando tínhamos mistura de dois conjuntos distintos, obtínhamos (a_1, b_2) e (a_2, b_1), mas nunca obteremos uma troca de posição como (b_1, a_2). Não precisávamos nos preocupar com as contagens duplas pois estas configurações são distintas. Já ao usar o PFC com elementos do mesmo conjunto, obteremos (a_1, a_2) e (a_2, a_1) na contagem, e precisamos pensar se, na questão, estas configurações são ou não a mesma.

Macete

O PFC embaralha os **índices** dos elementos.

2.2.3 Permutação: caso especial de PFC sem repetição

Imagine o seguinte: temos três cartas  e desejamos saber todos os possíveis embaralhamentos destas três cartas. Seguimos o raciocínio análogo a antes: para a primeira carta, temos 3 possibilidades. Para a segunda teremos 2, pois a primeira carta não pode ser repetida. Para a terceira, temos apenas uma opção. Desta maneira, temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas diferentes de embaralhar um baralho de 3 cartas, como podemos ver na imagem abaixo.



Por indução, quando quer-se embaralhar todos os elementos de um baralho com n cartas, teremos $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ maneiras diferentes de fazê-lo. A esta operação de multiplicar todos os números consecutivos de n até 1 dá-se o nome de **fatorial** e representa-se com a notação $n!$.

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$$

Sendo assim, a permutação pode ser pensada como uma aplicação do princípio fundamental da contagem.

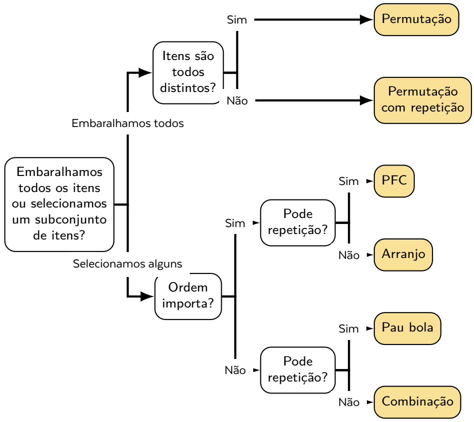
2.2.4 Propriedades do fatorial

I. $n! = n(n-1)!$

II. $0! = 1$

III. $\dfrac{n!}{(n-k)!} = \overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots}^{k \text{ termos}}$

3 Principais Tipos de Questões

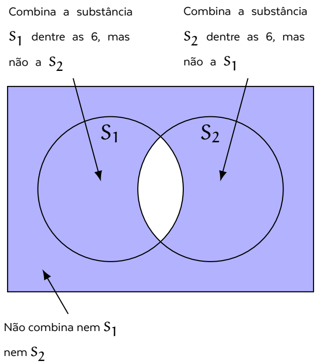


4 Método da inclusão-exclusão

Questões mais sofisticadas de combinatória exigem incluir apenas alguns casos das configurações geradas, excluindo outros. Para estes casos nós usamos o método da inclusão-exclusão, que nada mais é que usar diagramas de Venn para contar as configurações desejadas.

Questão 4.1 Um químico possui 10 tipos de substâncias. De quantos modos ele pode associar 6 dessas substâncias se, entre as 10, duas não podem ser associadas?

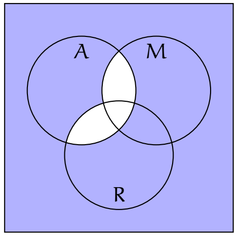
Solução 4.1 Para resolver esta questão, sejam S_1 e S_2 as substâncias que não podem ser associadas simultaneamente. Assim, o diagrama de Venn abaixo mostra todas as regiões de combinações de substâncias possíveis. A única região em que não podemos estar é a do meio $S_1 \cap S_2$.



O que o diagrama acima nos mostra é que podemos calcular os casos sem a restrição do problema e subtrair os casos em que ambas as substâncias são combinadas. Combinando 6 substâncias de um conjunto de 10, onde a ordem não importa e não permite-se repetição, temos $C(10, 6) = 210$. Já para quantidade de casos em que usamos as substâncias S_1 e S_2, se nós já pusemos estas duas substâncias no tubo de ensaio basta combinar as outras 4 substâncias oriundas do conjunto das 8 remanescentes, obtendo $C(8, 4) = 70$. A quantidade desejada pela questão será $210 - 70 = 140$.

Questão 4.2 (Fuvest) Em uma classe de 9 alunos, todos se dão bem, com exceção de Andréia, que vive brigando com Manoel e Roberto. Nessa classe, será constituída uma comissão de cinco alunos, com a exigência de que cada membro se relacione bem com todos os outros. Quantas comissões podem ser formadas?

Solução 4.2 O diagrama resultante será:



Para obter as regiões acima desenhadas, vamos:

I. Combinar todos alunos sem restrição $C(9, 5)$;

II. Subtrair os casos em que Andreia está com Manoel: com os dois na comissão, combinamos os 7 alunos restantes nas 3 vagas remanescentes $C(7, 3)$;

III. Subtrair os casos em que Andreia está com Roberto $C(7, 3)$;

IV. E, por fim, **somar** os casos em que os três estão juntos, pois ao subtrair Andreia com Manoel e Andreia com Roberto, nós subtraímos **duas vezes** Andreia com Manoel e Roberto $(A \cap M \cap R)$. Este caso é a combinação dos 6 alunos restantes com os 2 espaços remanescentes $C(6, 2)$.

O resultado será:

$$\begin{aligned}|S| &= C(9,5) - C(7,3) - C(7,3) + C(6,2) \\ &= 126 - 35 - 35 + 15 \\ &= 71\end{aligned}$$

5 Formação de Duplas

Eu chamo essa seção de formação de duplas pois o caso mais emblemático é o da questão de duplas de torneio de tênis, que confunde muitos alunos. Mas a teoria pode ser aplicada para formação de grupos em geral. Diferentemente da combinação pura, ao invés de selecionar apenas duas pessoas de um conjunto de n indivíduos para formar a dupla, nós vamos continuar formando outras duplas com as pessoas remanescentes até não sobrar ninguém.

Por que este tipo de questão confunde os alunos? Pois existem casos em que a ordem entre as duplas importa, e casos em que não importa. Vejamos os dois exemplos.

Questão 5.1 De quantos modos diferentes pode-se formar a primeira fase de um torneio de tênis, sabendo que existem 8 tenistas disputando a competição e que ao perder o jogo o tenista está eliminado da competição?

Solução 5.1 Para formar uma partida, selecionamos duas pessoas das 8. Como a ordem entre esses jogadores não importa e não pode-se repetir jogador (ninguém joga contra si mesmo), teremos $C(8,2)$ maneiras de formar uma partida. Para a outra partida que acontecerá ao lado, teremos 6 pessoas, de forma que há $C(6,2)$ maneiras de formá-la, e $C(4,2)$ para a terceira e $C(2,2)$ para a quarta.

Pelo princípio fundamental da contagem, para misturar estas duplas entre si, devemos multiplicar as quantidades acima calculadas. No entanto, o PFC não sabe que estamos misturando elementos de conjuntos com interseções entre si. Como vimos na seção 2.1, o PFC embaralha os **índices** dos elementos que estamos misturando. Isto é, ao multiplicar $C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)$, estaremos contando como configuração, por exemplo, as duplas $d_1d_2d_3d_4$, mas em algum momento aparecerá $d_4d_3d_2d_1$ e todas as outras permutações destes índices.

Como há $4!$ permutações de 4 índices distintos, significa que cada conjunto único de duplas será contado $4!$ vezes na conta acima. Dessa forma, devemos dividir a contagem inicial por $4!$ para obter a quantidade correta:

$$|S| = \frac{C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)}{4!}$$

Questão 5.2 De uma turma de 8 alunos, serão formadas duplas de tênis para competir em um torneio em que esses alunos competem entre si. Quantos são os resultados possíveis de classificação destas duplas no torneio?

Solução 5.2 Nós temos uma questão similar à anterior, mas a ordem das duplas formadas muda pois estamos lidando com a classificação no torneio. Sendo assim, vamos formando as duplas com a contagem de antes:

$$|S| = C(8,2)C(6,2)C(4,2)C(2,2)$$

E terminamos. Se associarmos a posição das duplas na configuração à sua colocação, a aparição de $d_1d_2d_3d_4$ é diferente de $d_4d_3d_2d_1$ pois a d_1 em 1º lugar é diferente da d_4 em 1º lugar.

6 Permutações Geométricas

Assunto que envolve a contagem de diferentes arranjos espaciais de elementos. Em essência, a localização específica de cada elemento atribui a ele uma identidade única, o que justifica a aplicação do Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Para ilustrar, consideremos um cinema onde cada assento é numerado. Se representarmos os espectadores a e b como pares ordenados ocupando os assentos, temos que o par (a,b) é distinto de (b,a). Isso ocorre porque a troca de assentos entre a e b resulta em uma configuração visual completamente diferente, evidenciando a importância da posição em permutações geométricas.

Também é comum a combinação deste tipo de questão com o Método da Inclusão-Exclusão.

Questão 6.1 Uma lotação possui três bancos para passageiros, cada um com três lugares, e deve transportar os três membros da família Sousa, o casal Lúcia e Mauro e mais quatro pessoas. Além disso, (1) a família Sousa quer ocupar o mesmo banco; (2) Lúcia e Mauro querem sentar-se lado a lado. Nessas condições, o número de maneiras distintas de dispor os nove passageiros no lotação é igual a?

Solução 6.1 Sejam S_1, S_2 e S_3 os membros da família Souza; L e M: Lúcia e Mauro; e P_1, P_2, P_3 e P_4 as outras quatro pessoas. Vemos abaixo um exemplo de configuração.

S_1	S_2	S_3
P_1	P_2	P_3
P_4	L	M

Se não houvesse qualquer restrição, seria suficiente permutar todos estes 9 elementos, obtendo $9!$ configurações. Como a família e o casal ficam juntos, usamos o PFC e multiplicamos todas as formas de combinar os assentos de maneira válida. A família como um todo pode ocupar 3 posições possíveis:

S_1	S_2	S_3

S_1	S_2	S_3

S_1	S_2	S_3

E para cada posição ocupada, podemos embaralhar a família de $3!$ formas diferentes. Quanto ao casal, para cada posição válida da família, ele pode ocupar 4 posições:

S_1	S_2	S_3
L	M	

S_1	S_2	S_3
	L	M

S_1	S_2	S_3
L	M	

S_1	S_2	S_3
	L	M

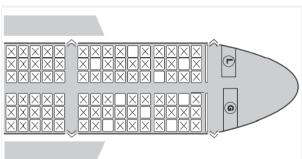
Para cada uma destas posições, podemos embaralhar o casal de $2!$ formas diferentes.

Para cada posição válida da família e do casal, podemos embaralhar as pessoas remanescentes de $4!$ formas.

Assim, pelo PFC a solução será o número N que é o produto das contagens acima:

$$N = (3 \cdot 3!) \cdot (2 \cdot 2!) \cdot 4!$$
$$N = 3.456$$

Questão 6.2 Uma família composta por sete pessoas adultas, após decidir o itinerário de sua viagem, consultou o site de uma empresa aérea e constatou que o voo para a data escolhida estava quase lotado. Na figura, disponibilizada pelo site, as poltronas ocupadas estão marcadas com X e as únicas poltronas disponíveis são as mostradas em branco.



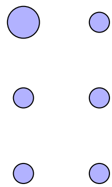
O número de formas distintas de se acomodar a família nesse voo é calculado por?

Solução 6.2 Podemos ver que há 9 lugares para 7 pessoas da família. Desta forma, é mais sensato tentar distribuir os lugares para os familiares do que o inverso. Usando o PFC, para o primeiro familiar temos 9 opções de lugar, para o segundo, 8, e assim por diante. De maneira que nosso conjunto solução terá o tamanho:

$$|S| = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

Que é nada mais que um arranjo $A_{9,7}$. Este número equivale a $\frac{9!}{2!}$, e é nosso gabarito.

Questão 6.3 (Enem) A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos no qual cada caractere é um conjunto de 6 pontos dispostos em forma retangular, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos demais.



O número total de caracteres que podem ser representados no sistema Braile é?

Solução 6.3 Essa é uma boa questão para vermos como um mesmo enunciado pode dar origem a várias interpretações.

Conforme o enunciado, cada ponto pode se destacar ou não se destacar. Assim, para cada um dos 6 pontos temos duas opções, e pelo PFC teríamos $2^6 = 64$ configurações.

A questão não foi muito bem redigida. Se levarmos ao pé da letra a afirmação de que "pelo menos um se destaca em relação aos demais", então nem a célula totalmente plana (sem pontos em relevo) nem a célula totalmente preenchida (com todos os pontos em relevo) satisfariam essa condição, pois em ambas as configurações não há um ponto que se destaque em relação aos outros. Considerando esta interpretação, o gabarito deveria ser $64 - 2 = 62$ configurações.

No entanto, em Braille, todos os pontos planos representa o caractere espaço, e todos os pontos preenchidos representa o caractere "O". Assim, pode-se argumentar que o gabarito correto deveria ser 64.

(Na ciência da computação, o espaço é um caractere como qualquer outro, possuindo códigos próprios, dependendo da codificação: ASCII 32, UTF-8 0x20 etc. Ele possui a função de separar termos, e desconsiderá-lo como caractere equivaleria a desconsiderar, por exemplo, o ponto final como caractere, que tem a função de encerrar frases.)

Já se tomarmos "se destaca em relação aos demais" ignorando a última parte e interpretarmos como "se destaca do papel", todos os pontos planos não contaria como uma configuração, e teríamos $64 - 1 = 63$ configurações.

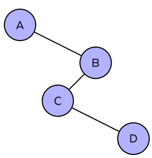
Felizmente, a questão original era múltipla escolha, e destas três opções apenas o 63 constava como alternativa, sendo o gabarito oficial.

7 Coloração de Grafos

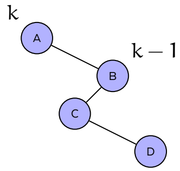
De tempos em tempos cai uma questão destas, e como não é muito complexo, vale a pena aprender a teoria. Grafo é uma estrutura matemática composta por vértices e arestas. Por exemplo, as redes sociais são modeladas como grafos: você é um vértice, e existe uma aresta entre você e uma outra pessoa se você segue a pessoa. Grafos podem ser direcionados (você segue a pessoa $\neq$ a pessoa segue você) ou não direcionados (você é vizinho de uma pessoa $=$ a pessoa é sua vizinha). Estudaremos apenas os grafos não direcionados.

O problema de coloração é o seguinte: tendo k cores, de quantas formas podemos colorir o grafo de maneira que dois vértices adjacentes (isto é, conectados por uma aresta) não tenham a mesma cor?

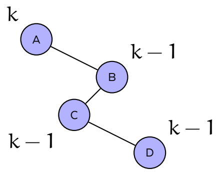
A solução depende do tipo de grafo com que estamos lidando, mas vamos ver os exemplos mais simples (não cai nada muito complexo no Enem). Observe o grafo abaixo.



Escolha sempre um vértice na ponta e vá caminhando pelos seus vizinhos. Temos k cores para o vértice A. Para o B, como já gastamos uma cor, teremos $k - 1$ cores.



Agora o pulo do gato: para o vértice C, nós **não** gastamos duas cores. Ele pode tranquilamente ter a mesma cor do vértice A, pois eles não são adjacentes. Em vista disso, gastamos apenas a cor do vértice B, de forma que teremos $k - 1$ cores novamente. O mesmo ocorrerá para o vértice D.

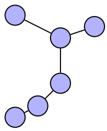


Pelo PFC, teremos $P(k) = k(k-1)^3$ formas de colorir o grafo acima com k cores (em problemas de coloração de grafos, cada vértice é único, normalmente identificado por um número ou letra, de forma que não precisamos desembaralhar nada). Uma curiosidade: o polinômio $P(k)$ é chamado de **polinômio cromático** do grafo. Vejamos uma aplicação.

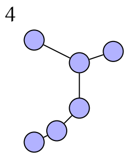
Questão 7.1 (Enem) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

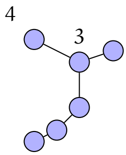
Solução 7.1 Modelando o troféu como um grafo, cada região será um vértice e traçaremos uma aresta entre as regiões se elas forem vizinhas, de sorte que teremos o grafo abaixo.



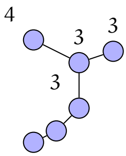
Escolhemos o vértice no canto superior direito e estabelecemos que ele possui 4 possibilidades de pintura.



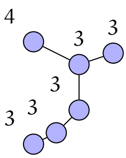
O vértice vizinho só poderá ter 3 cores.



Pela mesma lógica de antes, seus vizinhos terão 3 cores também, pois não podem ser a mesma cor dele, mas podem ter a mesma cor do primeiro.



E assim por diante.



Teremos $4 \cdot 3^5 = 972$ maneiras de colorir o troféu.

Observações

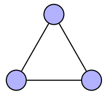
Por que começamos da ponta? Pois uma vez que fixar k cores para um vértice impõe uma cor a menos para todos seus vértices adjacentes e os vértices nas pontas propagarão o menor número de restrições para o resto do grafo, começar pela ponta permite pintar com o maior número de cores possível. Vértices no núcleo do grafo vão propagar mais restrições.

Por que devemos caminhar aresta por aresta para calcular o número de configurações? Pois, novamente, quando fixamos um número k de cores para um vértice, ele já restringe todos seus vértices vizinhos, que restrigem seus vizinhos, e assim por diante. Se saltarmos uma aresta, estaremos esquecendo de contar algumas das restrições já impostas.

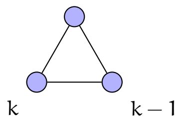
7.1 Outros grafos importantes

7.1.1 Grafo K_3

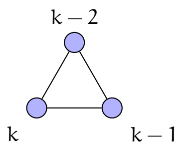
O grafo completo K_3 é outro relevante, pois forma um triângulo.



Podemos pintar de k cores um vértice qualquer. Se formos a um vértice vizinho, ele poderá ser pintado de $k-1$ cores.



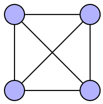
Já o último vértice não pode ser pintado de duas cores de seus vizinhos que já foram pintados, podendo assumir $k-2$ cores.



Teremos $P(k) = k(k-1)(k-2)$ formas de pintar o grafo acima.

7.1.2 Grafo K_4

O grafo completo K_4 não é difícil também.

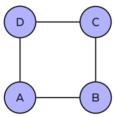


Se formos pintando os vértices um a um, você verá que a quantidade de colorações será:

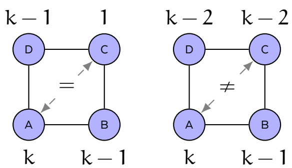
$$P(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

7.1.3 Grafo cíclico C_4

Este já é mais difícil.



Como de costume, o primeiro vértice terá k possibilidades. Seu vizinho A, $k-1$. O vizinho dele C, deveriam ser $k-1$ cores. Já o último vértice, depende: se A e C tiverem a mesma cor, gastamos uma cor somente para colorir D; se A e C tiverem cores diferentes, gastamos duas cores. A solução é separar estes casos em dois e somar. Vamos precisar refazer nossa análise do início, seguindo a ordem A, B, C e D.



O polinômio cromático resultante será:

$$P(k) = k(k-1)^2 + k(k-1)(k-2)^2$$

Este foi o grafo mais complexo que já apareceu em uma prova do Enem.