Matemática Financeira

Resumo

Pedro Volpi Nacif

1 Introdução

Matemática Financeira é um assunto matematicamente simples mas conceitualmente complexo. Enquanto os cálculos envolvidos muitas vezes se resumem a operações básicas de aritmética e um entendimento fundamental de exponenciais e logaritmos, a verdadeira complexidade surge ao interpretar esses números e aplicá-los a situações reais.

Uma particularidade do vestibular é que existe uma divergência entre a vida real e as provas. Na vida real, não se fala em regime de juros simples, ao passo que nas provas esse conceito é abordado.

Como a dificuldade maior é assimilação do conteúdo de juros compostos, a maior parte desta apostila se referirá a este conceito, a começar pelas convenções abaixo que devem ser memorizadas:

(i) Se há passagem do tempo, há incidência de juros;

(ii) Para comparar valores em momentos diferentesno tempo, é necessário trazer ao valor presente;

(iii) Juros simples só existe nos sonhos dos examinadores;

(iv) Se há parcelas, há juros sendo cobrados.

1.1 Revisão de Porcentagens

Como tudo que envolve matemática financeira lida com porcentagens, cabe aqui fazer um breve resumo do assunto.

O símbolo da porcentagem $\%$ simplesmente significa $\frac{1}{100}$.

Símbolo da porcentagem

$$\% = \frac{1}{100}$$

É uma convenção representar o resultado da divisão entre dois números como partes de cem. Tomemos como exemplo os números 5 e 10. Se o 10 for dividido em 100 partes, quantas partes o 5 ocupará? Como 5 é metade de 10, ele ocupará 50 partes. Dessa forma, o número 5 é 50% do número 10 .

A porcentagem pode também ser pensada como uma regra de três:

$$\begin{aligned} 10 &\rightarrow 100\% \\ 5 &\rightarrow x \end{aligned}$$

Implica:

$$\begin{aligned} x &= \frac{5}{10}100\% \\ x &= 50\% \end{aligned}$$

No entanto, **não** é desejável que o aluno faça uma regra de três para determinar porcentagens, por tomar tempo extra com passos desnecessários. Para determinar qual a porcentagem que a é de b, basta dividir: $\frac{a}{b}$. Ao obter a expansão decimal do resultado, podemos fazer a conversão para porcentagem, como veremos a seguir.

1.1.1 Decimal para porcentagem

Então você dividiu um número por outro e decide agora determinar qual a porcentagem que esta divisão representa. O primeiro passo é obter a expansão decimal do resultado. Por exemplo: você chegou na fração $\frac{2}{3}$, mas é necessário fazer a divisão longa para concluir que $\frac{2}{3} = 0.666\ldots$. Feito isso, para converter um número em decimal em porcentagem, basta andar duas vírgulas para a direita e colocar um sinal de $\%$ ao final.

Note como isto equivale a multiplicar por 100%, número este que é igual a 1 e não alterará o resultado.

$$\begin{aligned} 0.1034 &= 0.1034 \times 100\% = 10.34\% \\ 0.0004 &= 0.0004 \times 400\% = 0.04\% \\ 0.567 &= 0.567 \times 100\% = 56.7\% \\ 1 &= 1 \times 100\% = 100\% \\ 2 &= 2 \times 100\% = 200\% \\ 7 &= 7 \times 100\% = 700\% \end{aligned}$$

1.1.2 Porcentagem para decimal

O caminho inverso é igualmente simples. Como $\% = \frac{1}{100}$, para converter um número em porcentagem para decimal, basta andar duas vírgulas para a esquerda.

$$50\% = \frac{50}{100} = 0.50$$
$$20\% = \frac{20}{100} = 0.20$$
$$0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$
$$12.5\% = \frac{12.5}{100} = 0.125$$

1.1.3 Como obter porcentagens de valores

Dado um valor x qualquer, quando é $y\%$ deste valor? O resultado é obtido simplesmente pela multiplicação entre x e $y\%$:

$$p = xy\%$$

Isto ocorre pois, novamente, se x é o todo (ou seja, 100%), então podemos montar nossa regra de três para saber quanto equivale a y partes de cem:

$$x \to 100\%$$
$$p \to y\%$$

Daqui segue que a porcentagem resultante será o produto destes dois números. Exemplos:

(a) Quanto é 30% de 70? R.: $0.3 \times 70 = 21$

(b) Quanto é 1% de 132? R.: $0.01 \times 132 = 1.32$

(c) Quanto é 13% de 47? R.: $0.13 \times 47 = 6.11$

(d) Quanto é 303% de 20? R.: $3.03 \times 20 = 60.6$

1.2 Relação Fundamental da Matemática Financeira

A fórmula mais importante da Matemática Financeira, **que inclusive aparece em vários outros assuntos**, é que relaciona a aplicação de uma taxa t a um valor inicial v_i, produzindo um valor final v_f.

$$v_f = (1 + t)v_i$$

Decorar a fórmula acima é **obrigatório** para o aluno que deseja estar competitivo em vestibulares concorridos. Vamos ver de onde ela saiu.

Uma taxa é simplesmente um número adimensional que representa uma parte ou proporção a ser aplicada a um ou mais valores. Se um valor inicial v_i aumenta a uma taxa t, este aumento A , como vimos na seção anterior, é obtido pelo produto $v_i t$.

Contudo, não podemos jogar fora o valor com o qual começamos. O valor final v_f será a soma do valor inicial com o aumento produzido pela taxa t:

$$v_f = v_i + A$$
$$v_f = v_i + v_i t$$

Colocando v_i em evidência:

$$v_f = (1 + t)v_i$$

Observe que a taxa t pode também ser negativa, representando uma redução ao invés de um aumento. Nós podemos reorganizar a fórmula e ver como calcular a taxa a partir dos valores inicial e final:

$$v_i t = v_f - v_i$$
$$t = \frac{v_f - v_i}{v_i}$$

Note que, ao passo que $v_f - v_i$ nós dá um aumento **absoluto**, a razão $\frac{v_f - v_i}{v_i}$ representa um aumento **relativo**. "Relação"é também um nome dado às divisões entre números.

Podemos manipular um pouquinho mais a fórmula acima para obter:

$$t = \frac{v_f}{v_i} - 1$$

Esta fórmula é objeto de bastante confusão entre os alunos. Os jovens, na ânsia de chegar às respostas, frequentemente dividem os valores final e inicial para tentar obter a taxa de aumento (ou redução) entre eles, mas esquecem-se que é necessário subtrair 1 do resultado.

Observem ainda que se $v_f < v_i$ temos uma **redução** e portanto devemos observar uma taxa **negativa**, obtida corretamente pela fórmula acima, uma vez que:

$$v_f < v_i$$
$$\frac{v_f}{v_i} < 1$$
$$\frac{v_f}{v_i} - 1 < 0$$

Questão 1.1 (Enem) Segundo o Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros, no ano 2000, era de R$ 1.250,00. Já o Censo 2010 mostrou que, em 2010, esse valor teve um aumento de 7,2% em relação a 2000. Esse mesmo instituto projeta que, em 2020, o rendimento médio mensal dos trabalhadores brasileiros poderá ser 10% maior do que foi em 2010.

IBGE. Censo 2010. Disponível em: www.ibge.gov.br.
Acesso em: 13 ago. 2012 (adaptado)

Supondo que as projeções do IBGE se realizem, o rendimento médio mensal dos brasileiros em 2020 será de:

(a) R$ 1.340,00
(b) R$ 1.349,00
(c) R$ 1.375,00
(d) R$ 1.465,00
(e) R$ 1.474,00

Solução 1.1 O valor inicial é v_i = R$ 1.250,00. Há um aumento de $7,2\%$ de 2000 para 2010 e um aumento projetado de 10% de 2010 para 2020. Assim, o valor final será:

$$v_f = 1250(1 + 7,2\%)(1 + 10\%)$$
$$v_f = 1250 \cdot 1,72 \cdot 1,1$$
$$v_f = 1474$$

Gabarito: letra E.

Questão 1.2 Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R$ 3.800,00 gerado pela aplicação. A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de:

(a) R$ 4.222,22
(b) R$ 4.523,80
(c) R$ 5.000,00
(d) R$ 13.300,00
(e) R$ 17.100,00

Solução 1.2 Perder 30% equivale a uma taxa de crescimento negativa. Começando com o montante M_0, após o primeiro mês temos:

$$M_1 = (1 - 30\%)M_0$$
$$M_1 = 0,7M_0$$

O quanto foi perdido foi $30\%M_0$, e a pessoa recuperou 20% disto. Então ela recuperou $0,2 \cdot 0,3M_0 = 0,06M_0$. O total ao final do segundo mês será:

$$M_2 = 0,7M_0 + 0,06M_0$$
$$M_2 = 0,76M_0$$

Se esse montante é igual a R$ 3.800,00:

$$0,76M_0 = 3800$$
$$M_0 = \frac{3800}{0,76}$$
$$M_0 = 5000$$

Gabarito: letra C.

1.3 Macete cálculos de potências de taxas

Na Matemática Financeira é necessário calcular de forma rápida algumas potências muito comuns.

Para potências da forma $(1 + i)^2$com $0.02 \leqslant i \leqslant 0.09$, o algoritmo é o seguinte:

$$(1 + i)^2 = 1,\text{DDQQ}$$

Onde DD são os dígitos do dobro de i, e QQ são os dígitos do quadrado de i. Exemplos:

a. $1,01^2 = 1,0201$

b. $1,07^2 = 1,1449$

c. $1,09^2 = 1,1881$

Para valores de i entre $0,1$ e $0,9$, basta tratar como um número inteiro e colocar a vírgula após o 1. Por exemplo, o quadrado de 11 é 121, então $1,1^2 = 1,21$.

Para calcular cubos, o mais prático é combinar o método acima para achar o quadrado e depois multiplicar pelo número novamente. Potências maiores seguem a mesma lógica, embora extremamente raro serem objeto de cobrança nas provas.

2 Juros

Juros representam o custo de pegar dinheiro emprestado. Quando você pega um valor emprestado, chamado de montante inicial, de uma instituição financeira, você não só devolve esse valor, mas também paga um extra por ter usado esse dinheiro. Esse extra são os juros.

Juros e Amortização

Pagar mais do que o valor emprestado reduz o que você deve, isso é chamado de amortização. Com cada pagamento que inclui juros e parte do montante inicial, você está gradualmente diminuindo o que deve até quitar sua dívida completamente. Assim, os juros dos períodos subsequentes vão ser menores, pois o saldo devedor vai diminuindo, e os juros são proporcionais a ele.

Período de Capitalização

Período de capitalização representa o intervalo de tempo entre duas aplicações da taxa de juros, ou seja, permite determinar o quão frequentemente ela é aplicada. Por exemplo, podemos ter uma taxa de juros de 10% ao mês ou de 10% ao ano, e estas taxas são bem distintas. A primeira produzirá um aumento de 10% ao final de cada mês e a segunda apenas a cada 12 meses.

Utiliza-se com frequência a notação "a.a.", "a.m" e "a.s." para representar os períodos ao ano, ao mês, ao semestre etc.

Atenção

Se a questão não mencionar qual o período de capitalização, supõe-se que seja **mensal**.

Com o passar do tempo, os juros continuam a acumular. Após n períodos, todos os juros de cada um desses períodos se somam para produzir um montante devido M_n. Exemplo: se em cada período você acumulou R\$ $10{,}00$ de juros, no final de três períodos, os juros totais seriam R\$ $30{,}00$.

O juro total, que é o somatório dos juros de todos os períodos de capitalização $\sum_{k=1}^{n} J_k = J_1 + J_2 + \cdots + J_n$, se somado ao montante inicial M_0 nos dará o saldo devedor final M_n. Em outras palavras, o juro total é a diferença entre o montante devido total e o montante inicialmente emprestado.

Juro total

$$\sum_{k=1}^{n} J_k = M_n - M_0$$

Por fim, o que distingue entre os regimes de juros simples e compostos é a forma como os juros são calculados durante os períodos. No regime simples, os juros são calculados sempre sobre o montante inicial, enquanto no regime composto, os juros de cada período são calculados sobre o montante acumulado até então, incluindo juros anteriores.

2.1 Juros Simples

No regime de juros simples, o juro é cobrado apenas sobre o **valor inicial** emprestado. Assim, um devedor que deve um montante inicial M_0 e paga uma taxa de juros i, passa a dever $J_1 = iM_0$ de juros após o primeiro período de capitalização.

Decorrido o segundo período de capitalização, a taxa de juros continuará a ser aplicada sobre o montante inicial, fazendo com que o saldo devedor seja atualizado em $J_2 = iM_0$. O valor total de juros acumulado até aqui será portanto $J_1 + J_2 = iM + iM = 2iM$.

Após n períodos de capitalização, o devedor deverá um juro total de:

$$iM_0 + iM_0 + \cdots + iM_0 = niM_0$$

O total M_n a ser devolvido será o montante inicial mais os juros: $M_n = M_0 + niM_0$.

Montante total no regime de juros simples

$$M_n = (1 + ni)M_0$$

Exemplos

(a) Um empréstimo de R\$ $1.000{,}00$ com uma taxa de juros simples de 5% ao mês, ao final de 6 meses, terá acumulado juros de $\sum_{i=1}^{6} J_k = 6 \times 0{,}05 \times$ R\$ $1.000{,}00 =$ R\$ $300{,}00$. Assim, o montante total a ser pago será: $M_6 =$ R\$ $1.000{,}00 +$ R\$ $300{,}00 =$ R\$ $1.300{,}00$

(b) Um financiamento de R\$ $5.000{,}00$ a uma taxa de juros simples de 12% ao ano, após 3 anos, acumulará juros de: $\sum_{i=1}^{3} J_k = 3 \times 0{,}12 \times$ R\$ $5.000{,}00 =$ R\$ $1.800{,}00$. Logo, o montante total a ser devolvido ao credor será $M_3 =$ R\$ $5.000{,}00 +$ R\$ $1.800{,}00 =$ R\$ $6.800{,}00$.

2.1.1 Convertendo períodos de capitalização no juro simples

Em diversas situações, é necessário converter uma taxa de juros para um período de capitalização diferente do período em que ela foi originalmente definida. No regime de juros simples, essa conversão é direta.

Suponha que uma taxa de juros i_a seja definida para um período de capitalização T_a, e desejamos encontrar a taxa de juros equivalente i_b para um novo período de capitalização T_b.

Para que as taxas supramencionadas sejam equivalentes, ao aplicá-las a dois montantes de mesmo valor M_0 por um mesmo intervalo de tempo T devemos obter o mesmo montante final. A diferença é que elas serão aplicadas um número distinto de vezes neste montante (e.g. em um ano, uma taxa semestral vai ser aplicada duas vezes e uma taxa anual uma vez). Assim, para obter a quantidade de vezes que uma taxa é aplicada, basta dividir o tempo total pelo período de aplicação.

Pense que a divisão representa quantas vezes um número "cabe" dentro do outro. Assim, num intervalo de 12 meses, o período de 6 meses cabe $\frac{12}{6} = 2$ vezes nele.

Sejam n e m a quantidade de vezes que são aplicadas as taxas i_a e i_b, respectivamente, dentro do intervalo de tempo T. Conforme o raciocínio anterior, teremos $n = \frac{T}{T_a}$ e $m = \frac{T}{T_b}$.

A aplicação dessas duas taxas em dois montantes de valor M_0 gerará dois montantes M_n e M_m de mesmo valor.

$$
\begin{aligned}
M_n &= M_m \\
(1 + ni_a)\cancel{M_0} &= (1 + mi_b)\cancel{M_0} \\
1 + ni_a &= 1 + mi_b \\
ni_a &= mi_b \\
\frac{\cancel{T}}{T_a} i_a &= \frac{\cancel{T}}{T_b} i_b
\end{aligned}
$$

Em síntese, a relação entre essas taxas no regime de juros simples é dada por:

Taxas equivalentes no regime de juros simples

$$i_b = i_a \cdot \frac{T_b}{T_a}$$

Exemplos

(a) Quanto equivale a taxa de juros de 12% ao ano em um período de capitalização mensal?

$$i_{\text{mensal}} = 12\% \times \frac{1 \text{ mês}}{12 \text{ meses}} = 1\%$$

(b) Uma taxa de juros de $1,5\%$ ao mês equivale a qual taxa anual?

$$i_{\text{anual}} = 1,5\% \times \frac{12 \text{ meses}}{1 \text{ mês}} = 18\%$$

(c) Converta uma taxa de juros de $3,5\%$ ao trimestre para uma taxa anual.

$$i_{\text{anual}} = 3,5\% \times \frac{12 \text{ meses}}{3 \text{ meses}} = 14\%$$

(d) Uma taxa de $2,1\%$ capitalizada ao quadrimestre equivale a qual taxa capitalizada ao trimestre?

$$i_{\text{trimestral}} = 2,1\% \times \frac{3 \text{ meses}}{4 \text{ meses}} = 1,575\%$$

2.2 Juros Compostos

Os juros compostos incidem sempre sobre o montante que é devido (ou seja, o **montante atual**), e não pelo montante inicial como no caso dos juros simples. Se o devedor pega emprestado um montante M_0 com o credor, a uma taxa de juros i, após um período de capitalização ele deverá:

$$M_1 = (1 + i)M_0$$

Após o segundo período, nada for pago ao credor, o juro incide sobre o montante M_1, de forma que o devedor vai ficar devendo:

$$M_2 = (1 + i)M_1$$

Substituindo o M_1 que calculamos do período anterior:

$$M_2 = (1 + i)^2 M_0$$

Por indução, após n períodos de capitalização, o devedor vai dever o montante:

Montante total no regime de juros compostos

$$M_n = (1 + i)^n M_0$$

Esse será o montante **total** devido. O juro total devido é a diferença entre este montante total e o valor inicial pego emprestado:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} J_k &= (1 + i)^n M_0 - M_0 \\
&= ((1 + i)^n - 1)M_0
\end{aligned}
$$

Mais importante que tentar decorar a fórmula acima é entender o conceito, que relembraremos agora: em qualquer regime, o juro total é a diferença entre o valor devido atual e o valor emprestado inicialmente.

2.2.1 Taxas Equivalentes — Convertendo períodos de capitalização no juro composto

No juro simples, a relação entre as taxas em diferentes períodos de capitalização era linear. No juro composto, como temos envolvimento de funções exponenciais, a regra será diferente. Vejamos o exemplo mais simples para induzir a regra geral. Quanto uma taxa de 1% ao mês equivale no ano? Como 1 ano são 12 meses, após 12 períodos de aplicação da nossa taxa de 1% em um montante M_0 teremos:

$$\begin{aligned} M_{12} &= (1+1\%)^{12} M_0 \\ &= 1,01^{12} M_0 \end{aligned}$$

Se, ao invés desta taxa, tivéssemos usado uma taxa anual i, teríamos aplicado-a apenas uma vez, obtendo $(1+i)M_0$. Como estamos buscando essencialmente a mesma taxa só que em um outro período de capitalização, a aplicação desta taxa, no mesmo intervalo de tempo, deve produzir o mesmo montante final. Assim:

$$1,01^{12} \cancel{M_0} = (1+i)\cancel{M_0}$$

Dividindo ambos os lados por M_0 e isolando i, segue que:

$$i = 1,01^{12} - 1$$

O cálculo de $1,01^{12}$ é inviável na mão, de forma que precisamos que o enunciado forneça esse tipo de potência, o que é o comum nas provas de vestibular. Feita essa consulta, temos a aproximação $1,01^{12} \approx 1,1268$. Assim:

$$\begin{aligned} i &\approx 1,1268 - 1 \\ &\approx 0,1268 \\ &\approx 12,68\% \end{aligned}$$

Ante o exposto, a regra geral é a seguinte: para obter a equivalência entre duas taxas t_a e t_b, aplicamos ambas, em dois montantes distintos mas de mesmo valor M_0, por um mesmo período de tempo. Como os períodos de capitalização são distintos, isto vai originar uma quantidade diferente de aplicações de cada taxa (veja os exemplos abaixo). Se as taxas são equivalentes, o montante final obtido será igual para ambas aplicações. A partir desta equação, M_0 é cancelado em ambos os lados — de forma que podemos pular este passo e partir da igualdade entre as taxas aplicadas sem considerar M_0.

Exemplos

(a) Quanto equivale a taxa de juros compostos de 12% ao ano em um período de capitalização mensal?

Se em um ano temos doze meses, aplicaremos doze vezes a taxa i e obteremos o mesmo valor se tivéssemos aplicado a taxa de 12% uma só vez nesse período.

$$\begin{aligned} (1+i)^{12} &= 1,12 \\ i &= \sqrt[12]{1,12} - 1 \\ i &\approx 1,009 - 1 \\ &\approx 0,009 \\ &\approx 0,9\% \end{aligned}$$

(b) Qual o rendimento anual de uma taxa de juros compostos de $1,5\%$ ao mês?

Rendimento anual é o mesmo que taxa anual. Faremos o mesmo procedimento.

$$\begin{aligned} 1+i &= 1,015^{12} \\ i &= 1,015^{12} - 1 \\ i &\approx 1,1956 - 1 \\ &\approx 0,1956 \\ &\approx 19,56\% \end{aligned}$$

(c) Uma taxa de 7% ao trimestre equivale a qual taxa anual?

$$\begin{aligned} 1+i &= 1,07^4 \\ i &= 1,07^4 - 1 \\ i &\approx 1,31 - 1 \\ &\approx 0,31 \\ &\approx 31\% \end{aligned}$$

◀ Atenção: um ano é composto por **quatro** trimestres.

(d) Uma taxa de $2,1\%$ capitalizada ao quadrimestre equivale a qual taxa capitalizada ao trimestre?

$$\begin{aligned} (1+i)^4 &= 1,021^3 \\ 1+i &= 1,021^{\frac{3}{4}} \\ i &= 1,021^{\frac{3}{4}} - 1 \\ i &\approx 1,01571 - 1 \\ &\approx 0,01571 \\ &\approx 1,571\% \end{aligned}$$

◀ Analogamente, **três** quadrimestres perfazem um ano.

(e) Uma taxa de juros compostos de 2% capitalizada bimestralmente equivale a qual taxa semestral?

$$\begin{aligned} 1+i &= 1,02^3 \\ i &= 1,02^3 - 1 \\ &= 1,061208 - 1 \\ &= 0,061208 \\ &= 6,1208\% \end{aligned}$$

3 Desconto

Desconto é a diferença entre um valor que deveria ser pago e um valor que é realmente pago. Seja v_n o valor nominal (na etiqueta de preço do produto) e v_r o valor real (realmente pago pelo produto), então o desconto D será dado por:

Desconto

$$D = v_n - v_r$$

O desconto é o valor absoluto determinado pela relação acima. Já a taxa de desconto vai depender do caso: se estamos lidando com desconto comercial ou desconto financeiro.

No dia a dia usamos muito o desconto comercial, ao passo que no mercado financeiro usa-se o desconto financeiro para obter o valor presente de ativos diversos. Essa distinção conceitual costuma causar confusão nos alunos então veremos ela extensivamente.

3.1 Desconto Comercial

O desconto comercial, como o nome indica, é aquele que praticamos quando vamos a um comércio comum. Quando um vendedor nos oferece um desconto de 10%, sobre um produto que custa, por exemplo, R\$ $90,00$, ele está na verdade se referindo a uma taxa de desconto. Para calcular o desconto dado, multiplicamos R\$ $90,00$ pela taxa, obtendo R\$ $9,00$. Daí nós subtraímos esse valor para obter quanto vamos pagar, descobrindo que pagaremos R\$ $81,00$.

Assim, o que nós fizemos foi pegar a taxa d de desconto **comercial** e multiplicar pelo valor nominal v_n do produto para obter o desconto.

Desconto comercial

$$D = v_n d$$

Por fim, o valor real será o valor nominal menos o desconto:

$$\begin{aligned} v_r &= v_n - D \\ v_r &= v_n - v_n d \end{aligned}$$

Valor real no desconto comercial

$$v_r = v_n(1-d)$$

Atenção: não confunda taxa de desconto com desconto. O desconto é sempre a diferença entre os valores real (pago) e nominal — na etiqueta do produto, anunciado etc. — sendo um valor absoluto. A taxa é um valor relativo entre essas grandezas.

Em essência, o desconto comercial só é utilizado quando no enunciado da questão temos a aquisição de um produto à vista, normalmente em um comércio genérico, como faríamos no cotidiano.

Questão 3.1 Em uma loja, o preço promocional de uma geladeira é de R\$ $1.000,00$ para pagamento somente em dinheiro. Seu preço normal, fora da promoção, é 10% maior. Para pagamento feito com o cartão de crédito da loja, é dado um desconto de 2% sobre o preço normal.

Uma cliente decidiu comprar essa geladeira, optando pelo pagamento com o cartão de crédito da loja. Ela calculou que o valor a ser pago seria o preço promocional acrescido de 8%. Ao ser informada pela loja do valor a pagar, segundo sua opção, percebeu uma diferença entre seu cálculo e o valor que lhe foi apresentado.

O valor apresentado pela loja, comparado ao valor calculado pela cliente, foi:

(a) R\$ $2,00$ menor
(b) R\$ $100,00$ menor
(c) R\$ $200,00$ menor
(d) R\$ $42,00$ maior
(e) R\$ $80,00$ maior

3.2 Desconto Financeiro

O desconto financeiro é uma extensão mais natural da aplicação dos juros compostos. Se para projetar o valor futuro de um ativo com valor inicial v_i a uma taxa t nós fazemos $v_f = (1+t)v_i$, então para obter o valor inicial a partir do valor futuro basta fazer o procedimento inverso:

$$v_i = \frac{v_f}{1+i}$$

Se o valor inicial for o valor da data de hoje, nós o chamamos de **valor presente**, representado pelo símbolo v_p. Analogamente, o valor final será chamado de valor futuro, não mudando o símbolo pois final e futuro começam com "f". Nesse contexto, não usamos a nomenclatura "valor real" e "valor nominal" pois o valor futuro é também um valor real, só não na data de hoje.

Questão 3.2 Um ativo rende 10% a.a. e ano que vem ele estará sendo negociado ao valor de R\$ $1.100{,}00$. Quanto ele vale hoje? Qual o valor descontado para trazè-lo ao valor presente?

Solução 3.2 Basta usar a fórmula para encontrar o valor presente:

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{\text{R\$ } 1.100{,}00}{1{,}1} \\ &= \text{R\$ } 1.000{,}00 \end{aligned}$$

Assim, o valor descontado do ativo equivale a R\$ $1.000{,}00$. Já o desconto será:

$$D = \text{R\$ } 1.100{,}00 - \text{R\$ } 1.000{,}00 = \text{R\$ } 100{,}00$$

No desconto financeiro, por convenção, a taxa de desconto é considerada a mesma da taxa de rendimento (10%), de maneira que não podemos usar a fórmula da taxa de desconto comercial.

Note que se esse mesmo ativo tivesse sido submetido a um desconto comercial, o valor presente dele seria $v_p' = \text{R\$ } 1.100{,}00(1-10\%) = \text{R\$ } 990{,}00$, o que **não** estaria correto. Estes dois tipos de descontos não são equivalentes conceitual e matematicamente.

4 Série de Pagamentos

Quando contraímos uma dívida, ao invés de pagar tudo no final do período de vigência do contrato (seja ele de compra e venda a prazo, de empréstimo ou qualquer outro), podemos pagar em parcelas ao longo do tempo, de maneira que vamos diminuir gradativamente o montante devido e, por consequência, reduzir o valor dos juros pagos.

Mesmo que não tenha sido mencionada explicitamente a incidência de juros, ao parcelar o pagamento de um determinado valor qualquer, nós inadvertidamente introduzimos a incidência dos juros no saldo devedor. O motivo pelo qual isto ocorre não é trivial. Para demonstrar tal fato, vamos percorrer a linha de raciocínio a seguir:

1. para um devedor é sempre mais vantajoso pagar mais tarde, e para um credor é sempre mais vantajoso receber mais cedo;

2. assim, para um vendedor é preferível vender à vista e receber um preço P no momento da venda do que n parcelas de $\frac{P}{n}$;

3. por consequência, para que o vendedor aceite receber parcelado, ele deve ganhar algo com isso;

4. em conclusão, para que o vendedor "se dê bem" sem alertar o cliente, o valor P anunciado (nominal) já inclui o valor dos juros que o vendedor deseja cobrar.

Por que devedores preferem pagar mais tarde?

Quando falamos em dívidas, pode parecer estranho, mas muitas vezes é vantajoso optar por pagar mais tarde. Este fenômeno é conhecido como "valor do dinheiro no tempo". Imagine que você tem R\$ $100{,}00$ agora. Você pode gastá-lo hoje ou investir e ter mais do que R\$ $100{,}00$ no futuro. Por isso, para quem deve, pagar depois permite usar ou investir o dinheiro que teria sido gasto, talvez até ganhando mais com isso.

Além disso, ao diferir no tempo o pagamento de uma dívida, permitimos que outros fluxos de caixa se manifestem para nos ajudar a honrar nossos compromissos. É o caso de não se conseguir saldar à vista uma dívida de R\$ $10.000{,}00$ de uma TV, mas conseguir pagar R\$ $1.000{,}00$ por mês durante dez meses, pois a cada mês um novo fluxo de caixa chamado "salário" é depositado em nossas contas correntes.

Por que credores querem receber antecipadamente?

Do outro lado da moeda, para quem empresta ou vende, receber dinheiro antecipadamente é sempre mais atraente. Com o dinheiro em mãos mais cedo, o credor ou vendedor pode reinvestir esse valor em novos produtos ou serviços, potencialmente aumentando seus ganhos. Esse princípio explica por que descontos são frequentemente oferecidos para pagamentos à vista.

Compensando a espera: por que os vendedores oferecem pagamento parcelado?

Apesar de preferirem receber tudo de uma vez, vendedores muitas vezes oferecem opções de pagamento parcelado. Isso torna seus produtos mais acessíveis a um número maior de clientes, que talvez não conseguissem pagar tudo de imediato.

Juros embutidos no preço a prazo

Quando um vendedor permite o pagamento parcelado, o valor nominal já inclui juros escondidos. Ele inclui os juros para compensar a espera pelo dinheiro e o risco de calote; e ele os esconde para criar a ilusão de que a troca é vantajosa para o cliente. A ideia de ter que pagar a mais para exercer a conveniência de comprar parcelado pode ser desestimulante para um comprador, então é melhor que o comprador pense que ele vai pagar a mesma coisa só que em várias parcelas "sem juros".

Se o cliente acha que o valor real é igual ao valor nominal (e, por consequência, que a venda é a juro zero), a possibilidade de comprar a prazo, sob essa suposição, é matematicamente superior à alternativa de pagar a vista.

A profusão de ofertas de parcelamento no mercado atual aumenta a quantidade de vendas feitas, pois o comprador pode fracionar seu orçamento, fazendo mais compras num mesmo período e reduzindo a ocorrência de situações em que teria que escolher entre comprar um produto ou outro por não ter dinheiro. A contrapartida disto é que o comprador comprometerá seu orçamento do futuro, ao se obrigar a pagar as parcelas (e haja parcela).

Questão 4.1 Um determinado produto custa R$ 800,00 e pode ser parcelado em duas vezes sem juros, com primeiro pagamento um mês após a aquisição, ou adquirido à vista com desconto de 5%. Qual o juro embutido no parcelamento?
Obs.: considere que $\sqrt{860} = 29,3$.

Solução 4.1 Como estamos falando de desconto em um produto, usaremos o desconto comercial para descobrir o valor real à vista.

$$v_r = (1 - 5\%)800 = 760$$

Como é o verdadeiro valor do produto que foi adquirido, quando nós escolhermos a opção de parcelamento, nós estaremos na verdade parcelando R$ 760,00 em duas parcelas de R$ 400,00.

É como se tivéssemos contraído uma dívida de R$ 760,00, pois não pagamos este valor ao vendedor no momento da compra.

É dessa diferença que surgem os juros, pois se eles não existissem nós pacelaríamos em duas vezes de R$ 380,00. A parcela é de R$ 400,00 pois o saldo devedor está sujeito a uma taxa de juros i, que nós iremos calcular.

Assim, nosso montante inicial será $M_0 = 760$. Após um período de capitalização, nosso saldo devedor se atualiza para $760(1+i)$ e, feito o pagamento, deveremos:

$$M_1 = 760(1+i) - 400$$

Decorrido o segundo período de capitalização, nosso novo saldo devedor se atualiza para:

$$\begin{aligned}&(1+i)\,(760(1+i) - 400)\\ &= 760(1+i)^2 - 400(1+i)\end{aligned}$$

Após o pagamendo da segunda parcela, temos o novo montante atual:

$$M_2 = 760(1+i)^2 - 400(1+i) - 400$$

No entanto, feito o pagamento desta parcela, nós quitamos a dívida. Ou seja, $M_2 = 0$.

$$760(1+i)^2 - 400(1+i) - 400 = 0$$

Esta é uma equação do segundo grau na variável $1+i$, podendo ser resolvida pela fórmula de Bháskara. Como $\text{mdc}(400, 760) = 40$, vamos dividir ambos os lados por 40 primeiro.

$$\frac{760(1+i)^2 - 400(1+i) - 400}{40} = \frac{0}{40}$$

$$\frac{760}{40}(i+1)^2 - \frac{400}{40}(i+1) - \frac{400}{40} = 0$$

$$19(1+i)^2 - 10(1+i) - 10 = 0$$

Aplicando Bháskara:

$$1+i = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 19 \cdot 10}}{38}$$

$$1+i = \frac{10 \pm \sqrt{860}}{38}$$

Usamos a aproximação do enunciado e descartamos a raiz negativa, pois a taxa de juros em empréstimos é sempre positiva:

$$\begin{aligned} 1+i &\approx \frac{10+29,3}{38} \\ 1+i &\approx \frac{39,3}{38} \\ 1+i &\approx 1,0342 \\ i &\approx 3,42\% \end{aligned}$$

O comprador vai pagar um juro embutido de $3,42\%$ ao mês, o que não é pouca coisa, equivalente a cerca de 26% ao ano. Se você contrair uma dívida de longo prazo com esse juro, pule de uma ponte que dói menos.

4.1 Método do Valor Presente

A solução da seção anterior foi meramente ilustrativa. Na prática, nós usamos o método do valor presente para resolver problemas de séries de pagamentos.

Pensemos da seguinte forma: no exemplo acima, nós parcelamos a uma taxa i, e um mês após a aquisição do produto nós pagamos R\$ $400{,}00$, e dois meses após a aquisição nós pagamos R\$ $400{,}00$ novamente. Assim, eles são valores futuros, e na data da aquisição eram iguais a $\frac{400}{1+i}$ e $\frac{400}{(1+i)^2}$, respectivamente.

A soma dos valores das parcelas **trazidas ao valor presente** devem ser iguais ao valor real do produto.

$$\frac{400}{1+i} + \frac{400}{(i+1)^2} = 760$$

Multiplicando ambos os lados da equação acima por $(i+1)^2$ e trazendo todos os termos para o mesmo lado obtemos a equação quadrática original:

$$(1+i)^2\left(\frac{400}{1+i} + \frac{400}{(1+i)^2}\right) = 760(1+i)^2$$

$$400(1+i) + 400 = 760(1+i)^2$$

$$760(i+1)^2 - 400(1+i) - 400 = 0$$

E chegamos à mesma equação da solução anterior de maneira muito mais rápida, e melhor: sem ter que pensar muito. Assim, desvendamos uma das mais poderosas técnicas da Matemática Financeira.

Método do Valor Presente

Ao avaliar uma série de pagamentos ao longo, traga todas as parcelas ao valor presente e iguale ao valor presente do produto, empréstimo ou investimento.

Por fim, atente para o fato de que este método só se aplica ao regime de juros compostos.

5 Receita, Custo e Lucro

Para fechar o assunto, vamos só introduzir as definições de receita (ou faturamento), custo e lucro. Basta decorar os conceitos, pois as soluções dos exercícios desta disciplina se dá pelo conteúdo dos demais capítulos.

5.1 Receita (ou faturamento)

Receita/faturamento é o **valor total** que o vendedor recebe pelo bem vendido ou serviço prestado. Na contabilidade, receita e faturamento não são exatamente a mesma coisa, mas nas provas de vestibular podem considerados sinônimos.

O termo receita vem do latim *recipere*, que significa "receber". Dessa palavra o órgão federal responsável pela arrecadação do Estado recebe o nome de Receita Federal (não há relação com culinária 😔).

5.2 Custo

Custo é o valor que o vendedor ou prestador de serviço paga para poder adquirir suas matérias primas para produzir seus bens ou prestar seu serviço. Na contabilidade há uma diferença entre custo (absorvido no valor do produto), despesa (não absorvido no valor do produto) e gasto (qualquer dispêndio de dinheiro), mas nas provas de vestibular isto não é abordado. Tudo que o vendedor gastar será custo, a não ser que o enunciado diga o contrário.

5.3 Lucro

Lucro é a diferença entre a receita/faturamento e o custo. É o quanto o vendedor embolsa, leva pra casa, deposita no banco, depois de vender seus produtos. É o dinheiro "limpo". Não adianta nada faturar cem mil reais, se seu custo foi de noventa e nove mil, novecentos e noventa e nove reais. Você levou um real pra casa e um abraço (e às vezes nem o abraço).

Lucro

$$L = R - C$$

5.4 Receita total e preço unitário

Preço unitário é o preço de uma unidade do produto.

Se são vendidos n produtos a um preço unitário p, a receita total será a soma dos valores recebidos por cada produto vendido.

$$R = \overbrace{p + p + p + \cdots + p}^{n}$$
$$R = np$$

6 Exercícios resolvidos

Vamos aplicar os conceitos vistos ao longo da apostila em alguns exercícios de provas de vestibular.

Questão 6.1 (Enem 2011) Considere que uma pessoa decida investir uma determinada quantia e que lhe sejam apresentadas três possibilidades de investimento, com rentabilidades líquidas garantidas pelo período de um ano, conforme descritas:

1. Investimento A: 3% ao mês.
2. Investimento B: 36% ao ano.
3. Investimento C: 18% ao semestre.

As rentabilidades, para esses investimentos, incidem sobre o valor do período anterior. O quadro fornece algumas aproximações para a análise das rentabilidades:

n	1.03^n
3	1.093
6	1.194
9	1.306
12	1.429

Para escolher o investimento com a maior rentabilidade anual, essa pessoa deverá:

(a) escolher qualquer um dos investimentos A, B ou C, pois as suas rentabilidades anuais são iguais a 36%.

(b) escolher os investimentos A ou C, pois suas rentabilidades anuais são iguais a 39%.

(c) escolher o investimento A, pois a sua rentabilidade anual é maior que as rentabilidades anuais dos investimentos B e C.

(d) escolher o investimento B, pois sua rentabilidade de 36% é maior que as rentabilidades de 3% do investimento A e de 18% do investimento C.

(e) escolher o investimento C, pois sua rentabilidade de 39% ao ano é maior que a rentabilidade de 36% ao ano dos investimentos A e B.

Solução 6.1 Para comparar taxas em diferentes períodos de capitalização, vamos converter elas. Como o enunciado diz que as taxas **incidem sobre o valor do período anterior**, temos necessariamente o regime dos **juros compostos**.

Como foi dada uma tabela de potências de $1,03$, vamos converter taxa de 3% mensal para uma taxa anual.

$$1 + i_{\text{anual}}(A) = 1,03^{12}$$
$$1 + i_{\text{anual}}(A) = 1,429$$
$$i_{\text{anual}}(A) = 0,429 = 42,9\%$$

Então a opção A gera uma taxa anual maior que a opção B (36% ao ano). Para comparar com a opção C, vamos levar a taxa de 18% ao semestre para uma taxa anual.

$$1 + i_{\text{anual}}(C) = 1,18^2$$
$$1 + i_{\text{anual}}(C) = 1,3924$$
$$i_{\text{anual}}(C) = 0,3924 = 39,24\%$$

Em suma, a ordem das taxas é:

$$i_{\text{anual}}(B) < i_{\text{anual}}(C) < i_{\text{anual}}(A)$$

Gabarito: letra C.

Questão 6.2 (Enem 2010) Uma empresa possui um sistema de controle de qualidade que classifica o seu desempenho financeiro anual, tendo como base o do ano anterior. Os conceitos são: insuficiente, quando o crescimento é menor que 1%; regular, quando o crescimento é maior ou igual a 1% e menor que 5%; bom, quando o crescimento é maior ou igual a 5% e menor que 10%; ótimo, quando é maior ou igual a

10% e menor que 20%; e excelente, quando é maior ou igual a 20%. Essa empresa apresentou lucro de R$ 132.000,00 em 2008 e de R$ 145.000,00 em 2009.

De acordo com esse sistema de controle de qualidade, o desempenho financeiro dessa empresa no ano de 2009 deve ser considerado:

(a) insuficiente
(b) regular
(c) bom
(d) ótimo
(e) excelente

Solução 6.2 Utilizando a relação fundamental da matemática financeira:

$$\begin{aligned} v_f &= (1+t)v_i \\ 145000 &= (1+t)132000 \end{aligned}$$

Segue que:

$$\begin{aligned} 1+t &= \frac{145}{132} \\ 1+t &= 1,098\ldots \\ t &= 0,098\ldots \\ t &\approx 9,8\% \end{aligned}$$

Por consequência, $5\% < t < 10\%$, então o desempenho foi bom. Gabarito: letra C.

Questão 6.3 (Enem 2013) Para aumentar as vendas no início do ano, uma loja de departamentos remarcou os preços de seus produtos 20% abaixo do preço original. Quando chegam ao caixa, os clientes que possuem o cartão fidelidade da loja têm direito a um desconto adicional de 10% sobre o valor total de suas compras.

Um cliente deseja comprar um produto que custava R$ 50,00 antes da remarcação de preços. Ele não possui o cartão fidelidade da loja.

Caso esse cliente possuísse o cartão fidelidade da loja, a economia adicional que obteria ao efetuar a compra, em reais, seria de:

(a) R$ 15,00
(b) R$ 14,00
(c) R$ 10,00
(d) R$ 5,00
(e) R$ 4,00

Solução 6.3 Como estamos falando de vendas em uma **loja**, os descontos dados aqui serão **comerciais**. O preço antes da remarcação era R$ 50,00, então após o desconto será:

$$\begin{aligned} v_f &= (1-d)v_i \\ &= (1-20\%)50 \\ &= 80\% \times 50 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Como trata-se de **desconto comercial**, o desconto é a taxa de desconto vezes o valor. Se temos uma taxa de desconto de 10%:

◀ Clique na lâmpada para voltar à fórmula, se quiser.

$$\begin{aligned} D &= 10\% \times 40 \\ D &= 4 \end{aligned}$$

O desconto a mais obtido seria de R$ 4,00. Gabarito: letra E.

Questão 6.4 (Enem 2016) Uma pessoa comercializa picolés. No segundo dia de certo evento ela comprou 4 caixas de picolés, pagando R$ 16,00 a caixa com 20 picolés para revendê-los no evento. No dia anterior, ela havia comprado a mesma quantidade de picolés, pagando a mesma quantia, e obtendo um lucro de R$ 40,00 (obtido exclusivamente pela diferença entre o valor de venda e o de compra dos picolés) com a venda de todos os picolés que possuía.

Pesquisando o perfil do público que estará presente no evento, a pessoa avalia que será possível obter um lucro 20% maior do que o obtido com a venda no primeiro dia do evento. Para atingir seu objetivo, e supondo que todos os picolés disponíveis foram vendidos no segundo dia, o valor de venda de cada picolé, no segundo dia, deve ser:

(a) R$ 0,96
(b) R$ 1,00
(c) R$ 1,40
(d) R$ 1,50
(e) R$ 1,56

Solução 6.4 Muitas dessas questões de receita, custo e lucro se resolvem por **tabelas**. É um jeito bom e prático de organizar a informação, e um bom hábito do estudante de alta performance. É só tabelar e ir completando.

Dia	Receita	Custo	Lucro
1º dia	R_1	4×16	40
2º dia	R_2	4×16	L_2

Como o **lucro é a diferença entre a receita e o custo**, a receita será o lucro mais o custo.

$$R_1 = 64 + 40 = 104$$

No segundo dia, o lucro foi 20% maior que o do primeiro.

$$\begin{aligned} L_2 &= (1 + 20\%)40 \\ &= 1,2 \times 40 \\ &= 48 \end{aligned}$$

Assim, vamos preenchendo:

Dia	Receita	Custo	Lucro
1º dia	104	64	40
2º dia	R_2	64	48

A receita do dia 2 será:

$$R_2 = 64 + 48 = 112$$

Como cada caixa possuía 20 picolés, teremos $4 \times 20 = 80$ picolés. Se a receita total foi 112, e cada um dos 80 picolés foi vendido por um preço p:

$$\begin{aligned} 80p &= 112 \\ p &= 1,4 \end{aligned}$$

Assim, para atender ao enunciado, cada picolé deverá ser vendido por R\$ $1{,}40$.

Gabarito: letra C.

Questão 6.5 (Enem 2012) Arthur deseja comprar um terreno de Cléber, que lhe oferece as seguintes possibilidades de pagamento:

- Opção 1: Pagar à vista, por 55.000,00;
- Opção 2: Pagar a prazo, dando uma entrada de 30.000,00, e mais uma prestação de 26.000,00 para dali a 6 meses.
- Opção 3: Pagar a prazo, dando uma entrada de 20.000,00, mais uma prestação de 20.000,00, para dali a 6 meses e outra de 18.000,00 para dali a 12 meses da data da compra.
- Opção 4: Pagar a prazo dando uma entrada de 15.000,00 e o restante em 1 ano da data da compra, pagando 39.000,00.
- Opção 5: pagar a prazo, dali a um ano, o valor de 60.000,00.

Arthur tem o dinheiro para pagar à vista, mas avalia se não seria melhor aplicar o dinheiro do valor à vista (ou até um valor menor) em um investimento, com rentabilidade de 10% ao semestre, resgatando os valores à medida que as prestações da opção escolhida fossem vencendo.

Após avaliar a situação do ponto de vista financeiro e das condições apresentadas, Arthur concluiu que era mais vantajoso financeiramente escolher a opção:

(a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4
(e) 5

Solução 6.5 Tabelamos as opções.

Opção	Hoje	1 semestre	1 ano
A	R\$ 55.000,00	R\$ 0,00	R\$ 0,00
B	R\$ 30.000,00	R\$ 26.000,00	R\$ 0,00
C	R\$ 20.000,00	R\$ 20.000,00	R\$ 18.000,00
D	R\$ 15.000,00	R\$ 0,00	R\$ 39.000,00
E	R\$ 0,00	R\$ 0,00	R\$ 60.000,00

Para descobrir qual alternativa é a mais vantajosa, podemos utilizar o método do valor presente, usando a taxa de 10%. A opção que possuir o menor valor presente é a mais barata, e portanto deve ser escolhida por Arthur. Esta análise seria diferente se estivéssemos comparando investimentos: neste caso procuraríamos o investimento com maior valor presente, pois seria o mais vantajoso. Tudo depende se estamos gastando dinheiro ou investindo dinheiro.

O valor presente de cada opção será:

$$VP_A = 55.000$$
$$VP_B = 30.000 + \frac{26.000}{1,1}$$
$$VP_C = 20.000 + \frac{20.000}{1,1} + \frac{18.000}{1,1^2}$$
$$VP_D = 15.000 + \frac{39.000}{1,1^2}$$
$$VP_E = \frac{60.000}{1,1^2}$$

Você pode fazer as contas acima ou simplesmente multiplicar tudo por $1,1^2$ e fazer a mesma comparação. O menor valor presente será também o menor valor futuro. É melhor computacionalmente pois multiplicar é mais fácil que dividir.

$$1,1^2 VP_A = VF_A = 55.000 \cdot 1,1^2$$
$$1,1^2 VP_B = VF_B = 30.000 \cdot 1,1^2 + 26.000 \cdot 1,1$$
$$1,1^2 VP_C = VF_C = 20.000 \cdot 1,1^2 + 20.000 \cdot 1,1 + 18.000$$
$$1,1^2 VP_D = VF_D = 15.000 \cdot 1,1^2 + 39.000$$
$$1,1^2 VP_E = VF_E = 60.000$$

Obtemos portanto os seguintes valores futuros:

$$VF_A = 66.550$$
$$VF_B = 64.900$$
$$VF_C = 64.200$$
$$VF_D = 57.150$$
$$VF_E = 60.000$$

Naturalmente, a opção D é a mais vantajosa, por ser a mais barata.

Questão 6.6 (Enem 2017) Um empréstimo foi feito à taxa mensal de i%, usando juros compostos, em oito parcelas fixas e iguais a P. O devedor tem a possibilidade de quitar a dívida antecipadamente a qualquer momento, pagando para isso o valor atual das parcelas ainda a pagar. Após pagar a 5ª parcela, resolve quitar a dívida no ato de pagar a 6ª parcela.

A expressão que corresponde ao valor total pago pela quitação do empréstimo é:

(a) $P\left(1 + \frac{1}{1+\frac{i}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right)$

(b) $P\left(1 + \frac{1}{1+\frac{i}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{2i}{100}\right)}\right)$

(c) $P\left(1 + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right)$

(d) $P\left(\frac{1}{1+\frac{i}{100}} + \frac{1}{1+\frac{2i}{100}} + \frac{1}{1+\frac{3i}{100}}\right)$

(e) $P\left(\frac{1}{1+\frac{i}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\frac{3i}{100}\right)^3}\right)$

Solução 6.6 No momento citado, temos três parcelas: uma no momento atual, e duas futuras (a sétima e a oitava parcelas). Estas duas devem ser trazidas ao valor presente: a sétima por um período de capitalização, e a oitava por dois.

A taxa de juros foi representada de maneira não muito usual, mas algumas provas cobram assim para testar a atenção do candidato. Se a taxa é de $i\%$, ela é igual a $\frac{i}{100}$, **por definição**.

Assim, temos a parcela P, mais a sétima parcela trazida ao valor presente $\frac{P}{1+\frac{i}{100}}$, mais a oitava parcela trazida ao valor presente (considerando dois períodos de desconto consecutivos) $\frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}$. O valor pago será:

$$P + \frac{P}{1+\frac{i}{100}} + \frac{P}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}$$
$$P\left(1 + \frac{1}{1+\frac{i}{100}} + \frac{1}{\left(1+\frac{i}{100}\right)^2}\right)$$

Gabarito: letra A.

Questão 6.7 (Enem 2019) Uma pessoa se interessou em adquirir um produto anunciado em uma loja. Negociou com o gerente e conseguiu comprá-lo a uma taxa de juros compostos de 1% ao mês. O primeiro pagamento será um mês após a aquisição do produto, e no valor de R\$ 202,00. O segundo pagamento será efetuado um mês após o primeiro, e terá o valor de R\$ 204,02. Para concretizar a compra, o gerente emitirá uma nota fiscal com o valor do produto à vista negociado com o cliente, correspondendo ao financiamento aprovado.

O valor à vista, em real, que deverá constar na nota fiscal é de:

(a) R\$ 398,02
(b) R\$ 400,00
(c) R\$ 401,94
(d) R\$ 404,00
(e) R\$ 406,02

Solução 6.7 Basta trazer as duas parcelas ao valor presente, com uma taxa de 1%.

$$
\begin{aligned}
v_p &= \frac{202}{1+1\%} + \frac{204,02}{(1+1\%)^2} \\
&= \frac{202}{1,01} + \frac{204,02}{1,01^2} \\
&= 200 + \frac{204,02}{1,0201} \\
&= 200 + 200 \\
&= 400
\end{aligned}
$$

Gabarito: letra B.